

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60

II - 1 OKTOBER 1959

INHOUD

Verslag van de Nomenclatuurcommissie	49
Recreatie	78
Boekbespreking	80
Examencommissie Wiskunde l.o. en m.o.	80

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
A. M. KOLDIJK, Singel 13, Hoogezand, tel. 05980/3994; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam; Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht; Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen; Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft; Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht; Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.; G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht; Prof. dr. H. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (/ 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

VERSLAG VAN DE NOMENCLATUURCOMMISSIE

In december 1957 werd door de verenigingen Wimecos en Liwenagel een nomenclatuurcommissie voor de wiskunde ingesteld. Leden van de commissie werden M. H. G. Birkenhäger, Dr. L. N. H. Bunt (namens het instituut voor de Leraarsopleiding der R.U. te Utrecht), D. Leujes, Dr. P. G. J. Vredenduin (voorzitter) en Dr. Joh. H. Wansink. Omdat contact met het hoger onderwijs van belang geacht werd, is ook Prof. Dr. E. J. Dijksterhuis aangezocht lid van de commissie te worden zonder echter verplicht te zijn alle vergaderingen bij te wonen. Zijn taak zou beperkt blijven tot het corrigeren en aanvullen van een door de overige leden op te stellen voorlopig verslag. Hoewel Prof. Dijksterhuis onmiddellijk bereid was als lid toe te treden, is het hem helaas wegens ziekte niet mogelijk geweest aan het werk van de commissie deel te nemen. Zijn taak is overgenomen door Prof. Dr. F. Loonstra.—

De eerste moeilijkheid was de afbakening van onze taak. De wiskundige termen zijn namen voor begrippen, relaties en operatoren. Nu doet zich soms de omstandigheid voor, dat aan eenzelfde begrip verschillende namen gegeven worden, maar eveneens, dat eenzelfde term als naam voor verschillende begrippen gebruikt wordt. Zo wordt enerzijds een rationaal getal ook wel een meetbaar getal genoemd; anderzijds heeft bij auteurs van schoolboeken het woord „evenredigheid” niet steeds dezelfde betekenis, doordat ze er verschillende, niet gelijkwaardige definities voor geven. De volledige taak van een nomenclatuurcommissie is dus eigenlijk een dubbele: het vaststellen van de namen, die aan bepaalde begrippen, relaties en operatoren gegeven worden, en het eenduidig vastleggen (door definitie) van de begrippen, relaties en operatoren, die door de namen aangeduid worden.

Dit laatste kan leiden tot een beïnvloeden van de methodiek. Het reeds genoemde voorbeeld van de betekenis van „evenredigheid” is hier een voorbeeld van. Als we b.v. zouden willen vaststellen, dat $a : b = c : d$ per definitie betekent $ad = bc$, dan zou dit methodische consequenties met zich meebrengen, die door de meeste leraren (o.i. terecht) niet geaccepteerd worden. We hebben dan ook gemeend ons zoveel mogelijk vrij te moeten houden van beschouwingen betreffende de methodiek en ernaar gestreefd ons te beperken tot kwesties betreffende naamgeving. In sommige gevallen is echter ook de betekenis van een term vastgelegd.

Een tweede kwestie was de vraag, welk doel we met ons werk voor

ogen moesten hebben. Is er zoveel bezwaar tegen, dat verschillende boeken en verschillende leraren niet geheel dezelfde terminologie gebruiken? Een dwang tot uniformiteit zou stellig te veroordelen zijn. Er is echter in ons onderwijs één moment, waarop uniforme terminologie onmisbaar is, en dat is het eindexamen. In examenopgaven treft men soms omschrijvingen aan als „de som van een oneindig voortlopende meetkundige reeks (ook somlimiet of limietsom genoemd)”, „de poollijn (raakkoorde)”. Ook ziet men wel omschrijvingen als „de rechte, die l en m beide loodrecht snijdt”, een omschrijving, die blijkbaar gegeven wordt, omdat men vreest, dat niet alle kandidaten voor deze rechte dezelfde naam hebben geleerd. Soms wordt gesproken over een kegel, soms over een rechte cirkelkegel. Leerlingen van de ene school kunnen onder kegels ook andere dan rechte cirkelkegels verstaan; leerlingen van een andere school hebben wellicht de term rechte cirkelkegel nooit gehoord. In twijfelgevallen leek het ons daarom wenselijk vast te stellen, welke termen elke leerling behoort te kennen. Dergelijke termen hebben we in het verslag *verplichte termen* genoemd, de overige termen *facultatieve termen*.

We willen direct vaststellen, dat het niet onze bedoeling is de overheid ertoe te bewegen een lijst samen te stellen van termen, die wel, en van termen, die niet in eindexamenopgaven mogen voorkomen. Een dergelijke reglementering lijkt ons uit den boze, omdat zij verstarring in de hand zou werken. Soepeler is het gestelde doel te bereiken langs de weg van de conventie. We hopen namelijk, dat de auteurs van schoolboeken tot het verkrijgen van een minimale eenheid zullen willen medewerken door althans de verplichte termen in hun boeken te doen voorkomen, en enkele termen, waarvan het gebruik niet ondubbelzinnig vastligt (zoals kegel), alleen op af te spreken manier te definiëren. Verder zouden we de persoonlijke vrijheid niet gaarne aan banden proberen te leggen en moet men de inhoud van het verslag als zuiver adviserend opvatten.

In het verslag zijn de verplichte termen gespatieerd en alle overige termen gecursiveerd. Na elk vak is een opsomming gegeven van de verplichte termen en van de termen, die we op een bepaalde „verplichte” manier gedefinieerd wilden zien. Bij de termen van de laatste soort is tussen haakjes „def.” toegevoegd.

We hebben ons niet willen beperken tot het opsommen van de verplichte termen. Ook als dit geen directe consequenties voor het eindexamen met zich meebracht, hebben we het gebruik van sommige termen aanbevolen of afgeraden. Een enkele maal hebben

we termen gesignaleerd, die o.i. zonder bezwaar uit ons onderwijs zouden kunnen verdwijnen. Ten slotte zijn er enkele gevallen, waarin we aarzelen met het bepalen van ons standpunt. We hebben dan de knoop niet doorgehakt, maar er de voorkeur aan gegeven deze gevallen in ruimere kring ter discussie te stellen.

Op een oproep in Euclides ons desiderata op terminologisch gebied te doen toekomen, mochten we slechts één reactie ontvangen, namelijk van de heer J. K. Timmer te Hengelo (O.), die we hiervoor dank zeggen.

Bij de opmerkingen, die we ten aanzien van de notatie gemaakt hebben, hebben we ons laten leiden door de voorschriften, die gegeven zijn door de Hoofdkommissie voor Normalisatie in Nederland (HCNN).

De commissie heeft in totaal vijftien keer vergaderd, voor het eerst op 11-2-58 en voor het laatst op 26-5-59. De laatste drie vergaderingen zijn door Prof. Loonstra bijgewoond. Op zijn advies zijn verscheidene verbeteringen in het voorlopig verslag aangebracht.

Alle bijeenkomsten zijn gehouden in het Instituut voor de Leraarsopleiding te Utrecht. We zeggen de leiding van dit Instituut niet alleen gaarne dank voor de gastvrijheid, maar vooral ook voor het vele werk, dat door de administratie is verricht.

I. Algebra

Getalsoorten

De term *rationale* (en niet *rationele*) getallen verdient de voorkeur boven de term *meetbare* getallen. Het woord *meetbaar* dankt zijn ontstaan aan het *onderling* meetbaar zijn van een lijnstuk en een aangenomen lengteëenheid en niet aan het meetbaar zijn van een lijnstuk, en is hier dus misleidend. Evenzo verdient irrationaal de voorkeur boven *onmeetbaar*.

De complexe getallen bestaan uit de reële en de *niet-reële* getallen. De benaming *reël* is niet erg gelukkig gekozen, want noch de reële, noch de niet-reële getallen kunnen aanspraak op werkelijkheid maken. Deze verkeerde associatie versterken we echter nog, als we van *bestaanbare* en *onbestaanbare* getallen spreken. Om dezelfde reden achten we de term *imaginaire* getallen niet aan te bevelen.

Bewerkingen

De termen *gedurige som* en *gedurig produkt* kunnen in ons onderwijs gemist worden.

Aangaande de *volgorde van de bewerkingen* bestaat enige onzekerheid t.a.v. worteltrekking en vermenigvuldiging. Met $\sqrt{ab}$ bedoelt men stellig, dat men eerst moet vermenigvuldigen en dan worteltrekken. Minder duidelijk is dit b.v. bij $\sqrt{2}\sqrt{3}$. Daarentegen zal men met $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ het produkt van $\sqrt{2}$ en $\sqrt{3}$ bedoelen. Om aan de onzekerheid een eind te maken, doet men verstandig de volgende regel te accepteren: als geen vermenigvuldigingsteken ($\times$ of $\cdot$) gebruikt wordt, gaat vermenigvuldigen voor worteltrekken; wordt dit teken wel gebruikt, dan gaat worteltrekken voor vermenigvuldigen. (Deze regel is overbodig, als men gebruik maakt van wortelbanden. In geschreven tekst verhoogt dit de duidelijkheid.)

Analoge opmerkingen gelden t.a.v. het nemen van de logaritme.

Onder $\sqrt[n]{a}$ wordt per definitie een getal verstaan, dat groter dan of gelijk aan 0 is. Vat men $\sqrt{x}$ op als een tweewaardige functie, dan bedoelt men, dat men te maken heeft met een relatie, door middel waarvan aan elk positief getal een tweetal getallen toegevoegd wordt. Deze relatie kunnen we noteren $y^2 = x$, zodat we in dit verband het wortelteken kunnen ontberen. Bij het rekenen kunnen we niet volhouden, dat b.v. $\sqrt{4}$ hetzelfde betekent als ± 2 . Allereerst is niet duidelijk, wat hiermee bedoeld wordt, verder is niet duidelijk, wat b.v. $\sqrt{4} + \sqrt{9}$ zou betekenen en ook begrijpen we niet, wat nu bedoeld zou worden met een vraag als: voor welke waarden van x is $\sqrt{x+5} < 2x$?

Aan $\sqrt[n]{a}$ wordt alleen betekenis gehecht, als n een natuurlijk getal is.

Grondtal van een logaritme behoort tot de verplichte termen, *basis* niet.

De term *oneigenlijke machten* doet vreemd aan. Er is even weinig reden $a^{\frac{1}{2}}$ een oneigenlijke macht te noemen als $\frac{2}{3}a$ een oneigenlijk produkt. Beter is daarom: *machten met reële exponenten*.

Zowel de benamingen absolute waarde als modulus zijn verplicht, echter niet *volstrekke waarde*.

Evenredigheden

De schrijfwijzen $a : d = b : e = c : f$ en $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$ zijn beide acceptabel; tegen $a : b : c = d : e : f$ hebben we echter bezwaar. Men kan wel zeggen, dat a , b en c zich verhouden als d , e en f .

Binnen- en buitentermen verdient de voorkeur boven *middelste* en *uiterste termen*.

x is *middelevenredig* tussen a en b betekent: $a : x = x : b$, $a > 0$, $b > 0$ en $x > 0$. In het geval, dat men wil toelaten, dat a , b of x niet positief zijn, kan men zeggen, dat a , x en b (in deze volgorde) een meetkundige rij vormen.

De term *derde evenredige* kan men beter niet gebruiken.

Vergelijkingen en ongelijkheden

Het getal x_1 is een *wortel* van de vergelijking $f(x) = g(x)$, als $f(x_1) = g(x_1)$, d.w.z. als $f(x_1)$ en $g(x_1)$ gelijke getallen voorstellen. De definitie: x_1 is een wortel van $f(x) = g(x)$, als $\lim_{x \rightarrow x_1} \{f(x) - g(x)\} = 0$,

lijkt ons voor schoolgebruik ongeschikt, wegens de extra complicaties, die eruit kunnen voortvloeien. (B.v.: voldoet $\frac{1}{2}\pi$ aan

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x} \text{ ?})$$

Onder de *oplossing* van een vergelijking verstaat men soms het oplossingsprocédé en soms het verkregen resultaat. Hoewel in het algemeen deze dubbele betekenis van het woord oplossing niet tot moeilijkheden leidt, zouden we toch willen adviseren te spreken van het aantal wortels van een vergelijking en niet van het aantal oplossingen. Ook raden we aan te zeggen, dat een vergelijking een wortel heeft (niet vals is) en niet, dat de vergelijking *oplosbaar* is. Ook een valse vergelijking kan men immers oplossen.

Een *identieke* vergelijking is een vergelijking, waaraan elk getal voldoet, en niet een vergelijking waaraan oneindig veel getallen voldoen. Identiek zijn dus b.v. niet $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{x-1} = 0$, $x = |x|$, $\sqrt{x} = \sqrt{x}$.

De term *niet-identieke* vergelijking voor een vergelijking, die niet identiek en niet vals is, moet afgekeurd worden. De term is niet alleen onlogisch, maar ook overbodig. Het is immers in de wiskunde gebruik namen te geven aan algemene begrippen en afzonderlijke namen aan begrippen, die daaruit ontstaan door speciale kenmerken toe te voegen. Het is echter niet gebruikelijk daarna aan het begrip, dat ontstaat door deze speciale kenmerken afwezig te stellen, ook nog eens een aparte naam te geven. Zo definieert men het parallellogram en als bijzonder geval daarvan de rechthoek en de ruit, maar men voert geen naam in voor een parallellogram, dat geen rechthoek en ook geen ruit is. Analoog ligt het voor de hand geen speciale benaming in te voeren voor vergelijkingen, die noch identiek, noch vals zijn.

Men zegt, dat een vergelijking *oneindig veel* wortels heeft en niet *onbepaald veel*. Het aantal wortels is immers niet onbepaald, maar niet-eindig.

De termen *zuivere* en *onvolledige* vierkantsvergelijking kunnen zonder schade gemist worden.

De term *irrationale vergelijking* is af te keuren, als hiermee bedoeld wordt een vergelijking, waarin de onbekende onder een wortelteken voorkomt. Er is immers evenveel reden exponentiële en logaritmische vergelijkingen tot de irrationale (d.i. niet rationale) vergelijkingen te rekenen.

Als men meer vergelijkingen tegelijk beschouwt, spreekt men van een stelsel (en niet van een *stel*) vergelijkingen. Voldoet aan een stelsel vergelijkingen b.v. $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$, dan noemt men dit een stel wortels.

Evenals het overbodig is een afzonderlijke naam in te voeren voor vergelijkingen, die niet identiek en niet vals zijn, is het overbodig een naam te geven aan een stelsel vergelijkingen, dat niet afhankelijk en niet strijdig is.

Twee vergelijkingen heten gelijkwaardig of ekwivalent, als elke wortel van de ene vergelijking een wortel is van de andere, en omgekeerd. Twee stelsels vergelijkingen heten gelijkwaardig of ekwivalent, als elk stel wortels van het ene stelsel een stel wortels is van het andere stelsel, en omgekeerd.

Ongelijkheden

De term ongelijkheid wordt in verschillende betekenissen gebruikt. Men noemt b.v. niet alleen $3 \neq 5$ een ongelijkheid, maar ook $3 < 5$. Dit laatste is eigenlijk geen ongelijkheid, maar een uitspraak, waarin het gelden van een orderelatie beweerd wordt.

Ook op andere wijze wordt het woord ongelijkheid in meer betekenissen gebruikt. In uitspraken, waarin het symbool $=$ voorkomt, maakt men onderscheid tussen gelijkheden (b.v. $3 = 1 + 2$), identiteiten (b.v. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$) en vergelijkingen (voor welke waarden van x is $x + 3 = 2x$?). Op het terrein van de ongelijkheden bestaat een dergelijk terminologisch onderscheid niet. Men noemt zowel $3 < 5$ als $a^2 + b^2 \geq 2ab$ een ongelijkheid en vraagt ook de ongelijkheid $x + 3 > 2x$ op te lossen. Pogingen tot verbetering van deze terminologie hebben tot dusver geen succes opgeleverd. Gelukkig is er geen aanleiding tot misverstand.

Twee ongelijkheden heten gelijkwaardig of ekwivalent, als elk getal, dat aan de ene ongelijkheid voldoet, ook aan de andere voldoet, en omgekeerd.

Algebra

Pag. 56, voorlaatste alinea.

Definitieverzameling en waardenverzameling (i.p.v. -gebied)

pag. 57.

Een functie heet constant in een interval, als hij voor elk ~~waarde aanneemt~~. Een constante functie is een functie, die in het gehele getalgebied gedefinieerd is en overal dezelfde waarde heeft. De functie $\frac{4x-4}{x-1}$ is dus geen constante functie, omdat hij voor $x = 1$ niet gedefinieerd is.

pag. 61, 3e alinea.

Deze alinea wordt geschrapt.

pag. 62.

afvoeren van de lijst verplichte termen:

ekwivalent (beide keren)

lineair-gebroken functie

toevoegen:

nulpunt (van een functie)

wijzigen:

rij van de sommen (i.p.v. somrij)

som van de getallen van een oneindige rij (i.p.v. som van een oneindige rij)

sommeerbare rij (voor: oneindige rij, waarvan de getallen een som hebben)

algemeen dus in plaats:

1. rij $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$

2. som v.d. get. v. d. rij

3. sommeerbare rij: $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \dots$

*4. rij v.d. sommen
 $s_1 = 1; s_2 = 1 + \frac{1}{2}; \dots$*

Differentiaalrekening

pag. 65.

afvoeren van de lijst van verplichte termen:

een functie is stijgend (dalend) in een punt

Meetkunde

pag. 72 - 73

afvoeren van de lijst van verplichte termen:

trapezium (def.)

binnenomtrekshoek

buitenomtrekshoek

zwaartevlak

orthocentrisch viervlak

rechthoekig viervlak

toevoegen:

centrum van vermenigvuldiging (i.p.v. gelijkvormigheids-
punt)

Opmerking: verkorting blijft gehandhaafd

Analytische meetkunde

pag. 77, 3e alinea van onder.

De hoek die een lijn met de X-as maakt, wordt gemeten van
 -90° tot en met 90° .

Functionies

De term functie wordt in twee verschillende betekenissen gebruikt. Men noemt $2x + 5$ een functie van x en men zegt ook, dat y een functie van x is, als $y = 2x + 5$. Vanuit logisch gezichtspunt ziet men waarschijnlijk het gemakkelijkst in, dat tussen deze twee opvattingen aangaande het functiebegrip een essentieel verschil bestaat. Een logicus zal $2x + 5$ een variabele term noemen, terwijl hij $y = 2x + 5$ een propositionele functie met twee variabelen noemt (d.w.z. $y = 2x + 5$ gaat in een bewering over, als we voor x en y getallen invullen, en het zal in het algemeen van de keuze van deze getallen afhangen, of deze bewering juist of onjuist is). De wiskundige zal het misschien meer aanspreken, als we $2x + 5$ een vorm noemen, waarvan de waarde afhankelijk is van de keuze van x , en $y = 2x + 5$ een relatie tussen x en y met de speciale eigenschap, dat bij elke waarde van x hoogstens één waarde van y behoort. Hoewel het zuiverder zou zijn om in het laatste geval te spreken van een functionaal verband tussen x en y , zouden we niet graag propageren deze onderscheiding bij het onderwijs in te voeren.

Er heeft zich de laatste jaren een strijd ontwikkeld, welk van de beide functiebegrippen didactisch het beste als uitgangspunt gekozen kan worden. Daarmee hangt de vraag samen, of men bij het tekenen van grafieken direct de Y-as wil invoeren of niet. Als nomenclatuurcommissie hebben we met deze strijd alleen dit te maken, dat we ermeê rekening moeten houden, dat hij bestaat. We willen in dit verband volstaan met het maken van twee opmerkingen.

De uitdrukking *vergelijking van een rechte lijn* heeft in elk geval betekenis in de analytische meetkunde. Of men deze uitdrukking ook in de algebra wenst te gebruiken, hangt van het ingenomen standpunt af. Algemene bekendheid ermeê in de algebra mag dus niet ondersteld worden.

Degenen, die bij het behandelen van grafieken de Y-as niet gebruiken, kunnen een lijn evenwijdig aan de X-as niet aangeven met $y = c$. Om een gemakkelijke benaming voor een dergelijke lijn mogelijk te maken, zouden we de term *niveaulijn* willen voorstellen. Ook de betekenis van deze term mag dus niet algemeen bekend ondersteld worden.

Men spreekt bij een functie over het argument en de functiewaarde. Het is niet gewenst deze termen te vervangen door *onafhankelijk* en *afhankelijk veranderlijke*. Heeft men een stelsel

betrekkingen, b.v.

$$u = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

$$y^2 = z,$$

dan kan men x , z en t willekeurig kiezen en daarna y en u uitrekenen. Doet men dit, dan zijn x , z en t de onafhankelijk veranderlijken en y en u de afhankelijk veranderlijken. Men kan echter ook x , t en u willekeurig kiezen en daarna y en z uitrekenen (dat men dan meer dan één stel waarden vindt, doet niet ter zake). Dan zijn x , t en u de onafhankelijk veranderlijken en y en z de afhankelijk veranderlijken. Men kan echter niet x , y en z als onafhankelijk veranderlijken kiezen. Welke veranderlijken onafhankelijk zijn en welke afhankelijk, hangt dus af van de keuze. Bij betrekkingen tussen veranderlijken is er geen enkele veranderlijke, die a priori een speciale rol speelt, en men kan daardoor nog kiezen, welke men als onafhankelijke wil opvatten. Een functie $y = f(x)$ is een bijzonder soort relatie, en wel een waarbij x wel a priori een speciale rol speelt. Men accentueert dit bijzondere karakter door de variabelen argument en functiewaarde te noemen. Beschouwt men een functie $f(x)$, dan heet x het argument en $f(x)$ de functiewaarde. Er is hier slechts één veranderlijke, zodat het nu zelfs onmogelijk is te spreken van de afhankelijk veranderlijke.

We merken in dit verband nog op, dat zowel veranderlijke als variabele verplichte termen zijn.

We weten niet, welke van de drie termen *nulwaarde*, *nulpunt* of *wortel* van een functie we moeten aanbevelen. „Nulwaarde van een functie” heeft het nadeel, dat het als associatie „waarde van een functie” kan oproepen, „nulpunt”, dat het doet denken aan een punt van de grafiek in plaats van aan een waarde van het argument, en „wortel”, dat het verschil tussen functies en vergelijkingen verdoezeld wordt. Daarom willen we ter discussie stellen, welke van deze woorden de voorkeur verdient.

De verzameling van waarden van het argument, waarvoor een functie gedefinieerd is, heet het *definitiegebied* van de functie. De verzameling van waarden, die een functie kan aannemen, heet de *waardenverzameling* of het *beeldgebied* van de functie. Evenzo kan men spreken van de waardenverzameling of van het beeldgebied, dat bij een bepaald interval behoort. We bevelen het gebruik van deze termen aan zonder ze echter verplicht te willen stellen.

De term interval behoort tot de verplichte termen. Onder een interval verstaat men zowel de verzameling van waarden van x , waarvoor geldt $a < x < b$ als waarvoor geldt $x < a$ als waarvoor geldt $x > a$. Hierin kunnen de tekens $<$ en $>$ nog door $\leq$ resp.

$\geq$ vervangen worden. De termen *open* en *gesloten* interval zijn echter facultatief.

Eveneens zijn facultatief de termen *definiert positief* en *definiert negatief*, *berg-* en *dalparabool* en *pool*.

Hoewel het zonder twijfel van belang kan zijn, als y een functie is van x , te onderzoeken, of x ook een functie van y is, lijkt het ons overbodig de term *inverse functie* tot de verplichte termen te rekenen.

De extreme of uiterste waarden verdeelt men meestal in *absolute* en *relatieve* (of *lokale*). Nu is de gebruikelijke definitie van een relatieve extreme waarde: de functie $f(x)$ heeft voor $x = a$ als relatief maximum (minimum) b , als $f(a) = b$ en er een omgeving van a bestaat, waarbinnen $f(x) < b$ ($f(x) > b$), als $x \neq a$. Deze definitie brengt met zich mee, dat elke absolute extreme waarde ook een relatieve extreme waarde is. Wil men de terminologie bij het V.H.M.O. niet in strijd doen zijn met de gebruikelijke, dan kan men beter de uiterste waarden verdelen in absolute en niet-absolute. De term *randextreem* is facultatief.

De term lineair-gebroken functie verdient de voorkeur boven *gebroken lineaire functie*, omdat alleen in de eerste term duidelijk tot uitdrukking gebracht wordt, dat het een functie is, die gebroken is en verder nog een speciale eigenschap heeft.

Een constante functie is een functie, die overal waar hij gedefinieerd is, dezelfde waarde heeft. Ook b.v. $\frac{4x-4}{x-1}$ is dus een constante functie.

Rijen en reeksen

In de mathematische literatuur wordt onderscheid gemaakt tussen rijen en reeksen:

$t_1, t_2, t_3, \dots$ is een *rij*,
 $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ is een *reeks*.

Niet alleen in het Nederlands, maar ook in andere talen heeft men voor rij en reeks verschillende woorden: sequence en series, suite en série, Folge en Reihe.

In het Nederlandse V.H.M.O. wordt tussen rijen en reeksen doorgaans geen duidelijk onderscheid gemaakt. Een nadelig gevolg hiervan is, dat leerlingen, die later met het „echte” begrip reeks in aanraking komen, vaak moeite hebben de begrippen rij en reeks uit elkaar te houden. Het is dus stellig gewenst, dat de terminologie van het V.H.M.O. aangepast wordt aan de in de hogere wiskunde gebruikelijke.

Voordat we hiertoe een weg aangeven, willen we het begrip reeks nader analyseren. De boven gegeven omschrijving „ $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ is een reeks” kan de toets der kritiek niet doorstaan, omdat nog geen definitie gegeven is van „ $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ ”. Zou men zonder nadere toelichting zeggen, dat $1 + 3 + 5 + 7 + \dots$ een rekenkundige reeks is, dan is het niet duidelijk, wat hiermee bedoeld wordt. Stappen we over de moeilijkheid heen, dat de som van oneindig veel getallen nog niet gedefinieerd is, dan blijft nog over, dat de getallen $1, 3, 5, 7, \dots$ klaarblijkelijk geen som hebben. We ontkomen dus niet aan een precieze definitie. Deze luidt:

met $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ wordt bedoeld de rij

$$s_1 = t_1, \quad s_2 = t_1 + t_2, \quad s_3 = t_1 + t_2 + t_3, \dots$$

Nu is het zonder twijfel mogelijk het begrip reeks op deze wijze naast het begrip rij te introduceren. Het is echter zeer de vraag, of deze manier uit didactisch oogpunt aan te bevelen is. Men moet bij een reeks dan eigenlijk tegelijk aan twee functies van k (k natuurlijk) denken, nl. aan t_k en aan s_k . Beide functies stellen rijen voor. De getallen van de eerste rij zijn de termen van de reeks, de getallen van de tweede rij de partiële sommen.

We zijn ervoor bevreesd, dat het begrip reeks in de praktijk niet streng en daardoor niet voldoende duidelijk behandeld zal worden. De leerling zal hierdoor geen onderscheid zien tussen vraagstukken over rijen en over reeksen en de verwarring, waar thans het H.O. over klaagt, dreigt dan zijn intrede bij het V.H.M.O. te doen.

We zijn op grond van deze overwegingen, dus om redenen van zuiver didactische aard, tot een ander voorstel gekomen. Dit voorstel is simpel en radicaal: gebruik de term reeks niet. De terminologie wordt nu eenvoudig.

$t_1, t_2, t_3, \dots$ is een rij,

$s_1 = t_1, \quad s_2 = t_1 + t_2, \quad s_3 = t_1 + t_2 + t_3, \dots$ heet de somrij.

(In de definitie van somrij is dus begrepen, dat $s_1 = t_1$.)

Nu we de term reeks uitgebannen hebben, kunnen we niet meer spreken van een convergente reeks. We kunnen deze term ook niet vervangen door convergente rij, want een convergente rij is een rij, waarvoor $\lim_{k \rightarrow \infty} t_k$ bestaat (en niet een rij, waarvoor $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ bestaat).

We zeggen daarom:

onder de som van een oneindige rij $t_1, t_2, t_3, \dots$ verstaat men $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$.

Als deze limiet bestaat, zegt men, dat de rij een som heeft

(facultatief: *sommeerbaar* is; niet: een *somlimiet* of een *limietsom* heeft).

De woorden *convergent* en *divergent* zijn nu overbodig geworden.

Deze oplossing is didactisch eenvoudig. Er zijn geen andere ingrepen in de bestaande toestand nodig dan het vervangen van enkele termen door andere („reeks” door „rij”, „convergent” door „heeft een som”). De terminologie is niet meer in strijd met die, welke bij het H.O. gebezigd wordt. Het H.O. behoeft later hieraan alleen toe te voegen, dat een somrij een reeks genoemd wordt en dat men een reeks convergent noemt, als $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k$ bestaat.

Tot slot nog een paar detailkwesties. We onderscheiden eindige en oneindige rijen; $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n$ is een eindige rij, $t_1, t_2, t_3, \dots$ een oneindige rij. Het lijkt ons overbodig van oneindig *voortlopende* rijen te spreken.

De uitdrukking *algemene term van een rij* lijkt ons ongelukkig gekozen. In plaats van te spreken over een rij met algemene term $3k + 7$ kan men beter zeggen: van een rij is $t_k = 3k + 7$.

De woorden *opklimmend* en *afdalend* geven wel eens aanleiding tot misverstand, doordat men niet duidelijk vaststelt, dat deze woorden alleen met betrekking tot reeksen met positieve termen gebruikt mogen worden. Het gebruik van deze termen is echter overbodig.

Oneindig

Voor een juist begrip is het beter de symbolen ∞ en $-\infty$ alleen te gebruiken in verbinding met het symbool $\rightarrow$. Men kan dus schrijven

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x-1} = 1, \quad \left| \frac{x}{x-1} \right| \rightarrow \infty, \text{ als } x \rightarrow 1,$$

$$\frac{x}{x-1} \rightarrow -\infty, \text{ als } x \rightarrow 1 \text{ en } x < 1,$$

echter niet

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left| \frac{x}{x-1} \right| = \infty.$$

∞ Uitzondering: Zonder bijbehorend pijltje wordt ∞ gebruikt in $\int f(x) dx$.

^a Hopelijk ten overvloede vermelden we nog, dat $\frac{1}{0}$ geen betekenis heeft en niet gelijk is aan oneindig.

De term *onbepaalde vorm* voor $\frac{0}{0}$, 0^0 , $0 \cdot \infty$, e.d. moet beslist

worden afgekeurd. Dergelijke vormen zijn niet onbepaald. Er staat alleen maar onzin.

Notatie

Als men duidelijk wil aangeven, dat a ongeveer gelijk is aan b , kan hiervoor het teken $\approx$ worden gebruikt.

Voor y is evenredig met x kan men de notatie $y \sim x$ gebruiken.

Enzovoorts en *tot en met* in notaties als $t_1, t_2, \dots$ en $t_1, t_2, \dots, t_n$ worden aangeduid door $\dots$ (drie stippen).

Men schrijft $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ en niet $\lim_{x=a} f(x)$.

Sommigen gebruiken in de algebra voor *identiek* het teken $\equiv$. Het gebruik van dit teken spruit voort uit de behoefte in één symbool gelijkheid en geldigheid voor alle waarden van een of meer variabelen tot uitdrukking te brengen. Consequent zou dan zijn door toevoeging van indices aan te geven op welke variabelen het identiteitsteken betrekking heeft. Zo zou men eigenlijk moeten schrijven $(a + b)^2 \equiv_{a,b} a^2 + 2ab + b^2$ en $ax^2 + (b + 1)x + a + b \equiv_x 3x^2 + 5x + 7$ (als men vraagt voor welke waarden van a en b de twee leden voor elke x aan elkaar gelijk zijn). Men laat niet alleen deze indices weg, maar schrijft bovendien in het eerste geval $\equiv$ i.p.v. $\equiv_{a,b}$. Deze inconsequenties kunnen gemakkelijk voorkomen worden door het identiteitsteken niet te gebruiken, hetgeen we dan ook willen adviseren.

In gedrukte tekst verdient het aanbeveling de normalisatievoorschriften te volgen, volgens welke variabelen *cursief* gedrukt worden, operatoren en constanten daarentegen *rechtop*. B.v.

$${}^o\log a, \sin x.$$

De tekens e en i , die bepaalde getallen voorstellen, moeten dus rechtop gedrukt worden.

Opmerkingen van algemene aard

Men kan vragen a te berekenen, te benaderen of uit te drukken in $b, c, \dots$. In het eerste geval wordt bedoeld exact de waarde te vinden, waaraan a gelijk is; in het tweede geval een benadering voor deze waarde te vinden; in het derde geval a te schrijven als functie van $b, c, \dots$. Opmerking verdient, dat in het laatste geval niet noodzakelijk $b, c, \dots$ alle in de uitkomst moeten voorkomen, maar wel geen andere variabelen dan $b, c, \dots$ in de uitkomst mogen voorkomen.

De termen *benaderd getal* of *onnauwkeurig getal*, als men *benadering* bedoelt, zijn onjuist.

De term *bepaal* in uitdrukkingen als „bepaal een functie” of „bepaal een rij” kan tot misverstand aanleiding geven. Als we b.v. geven $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ en $f(2) = 4$, dan kunnen we vragen, of door deze drie gegevens een kwadratische functie $ax^2 + bx + c$ *bepaald* is. Het antwoord luidt dan bevestigend. Het heeft nu weinig zin te vragen de functie te bepalen, want de functie is reeds bepaald. We kunnen dus beter het woord „bepalen” in de laatste vraag vermijden en b.v. vragen de coëfficiënten van de functie te berekenen.

Het gebruik van de symbolen $\rightarrow$ en $\rightleftharpoons$ verdient aanbeveling. Men spreekt $A \rightleftharpoons B$ uit: A is gelijkwaardig of ekwivalent met B . Ook met betrekking tot oordelen (beweringen) kunnen deze termen dus gebezigd worden. Men kan $A \rightleftharpoons B$ ook uitspreken: A is een *noodzakelijke en voldoende voorwaarde* voor B (of omgekeerd). Toch zouden we de introductie van de termen *noodzakelijke voorwaarde* en *voldoende voorwaarde* niet graag willen stimuleren. De terminologische onderscheiding tussen deze twee soorten voorwaarden brengt vaak grote moeilijkheden met zich mee. Consequent gebruik van de pijlnotatie is voldoende en bevordert een gemakkelijk verkrijgen van inzicht.

Als $A \rightleftharpoons B$, zegt men soms, dat A juist is dan en alleen dan als B juist is (b.v. een produkt is dan en alleen dan gelijk aan 0, als een van zijn factoren gelijk aan 0 is). Dit zwaarwichtige „dan en alleen dan als” kan men zonder enig bezwaar vervangen door *alleen als*.

Als gevraagd wordt *onder welke voorwaarde* A geldt, wordt hier een noodzakelijke en voldoende voorwaarde mee bedoeld en niet slechts een voldoende voorwaarde. Vragen we b.v. onder welke voorwaarde de middelpunten van de in- en de omgeschreven cirkel van een driehoek ABC op een lijn liggen, die loodrecht op een van de zijden staat, dan wil men als antwoord genoemd zien de voorwaarde: $\triangle ABC$ is gelijkbenig. Het antwoord: $\triangle ABC$ is gelijkzijdig, zou men afkeuren, hoewel dit wel een voldoende voorwaarde is.

Als men in een opgave vraagt, welke waarden voldoen, dan is daarmee niet impliciet bedoeld, dat er meer dan één waarde gevonden wordt. Het kan dan zijn, dat er meer dan één waarde voldoet; het is echter ook mogelijk, dat er slechts één of zelfs geen enkele waarde voldoet. Aan de wijze, waarop een dergelijke opgave geformuleerd is, moet men niet a priori kunnen zien, van welke aard het antwoord zal zijn. (Voorlopig kan men bij het opstellen van examenopgaven hier beter nog enige voorzichtigheid mee betrachten.)

De term *grootheid* kan men het best reserveren voor benoemd getal. Grootheden komen dus alleen in de toegepaste algebra voor.

Men moet onderscheid maken tussen de woorden *een* en *één*. Als men zegt, dat een vergelijking een wortel heeft, bedoelt men daarmee, dat de vergelijking ten minste één wortel heeft. Zegt men, dat een vergelijking één wortel heeft, dan bedoelt men, dat de vergelijking één en niet meer dan één wortel heeft. Bij andere hoofdelwoorden bestaat in de taal de mogelijkheid tot het maken van een dergelijke onderscheiding niet. Zegt men, dat een vergelijking n wortels heeft, dan bedoelt men daarmee, dat hij n en niet meer dan n wortels heeft. Voor de omstandigheid, dat een vergelijking ten minste n wortels heeft, bestaat geen kortere uitdrukking. Men pleegt wel eens, gedreven door een neiging tot spitsvondigheid, te zeggen, als een vergelijking drie wortels heeft, dat hij er dus ook twee heeft. Dit houdt echter geen steek, als men er maar mee akkoord gaat, dat met de uitdrukking „de vergelijking heeft twee wortels” bedoeld wordt, dat het aantal wortels van de vergelijking twee is. En als dit aantal drie is, dan is het geen twee.

Verplichte termen

rationale en irrationale getallen

reële getallen

grondtal van een logaritme

absolute waarde, modulus

stelsel vergelijkingen, stel wortels

gelijkwaardig, ekwivalent (van vergelijkingen, stelsels vergelijkingen, ongelijkheden)

variabele, veranderlijke

argument, functiewaarde

interval (+ def.)

uiterste of extreme waarden, absoluut en niet-absoluut

lineair-gebroken functie

constante functie (+ def.)

rij

eindige en oneindige rij

somrij (incl. $s_1 = t_1$)

som van een oneindige rij

berekenen, benaderen, uitdrukken in (def.)

gelijkwaardig, ekwivalent (van beweringen)

welke waarden voldoen aan (def.)

Ter discussie gesteld

nulwaarde, nulpunt of wortel van een functie

II. Differentiaal- en integraalrekening

Onder het differentiaalquotiënt of de afgeleide van $f(x)$ in x_1 verstaat men $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$. Onder de afgeleide functie van $f(x)$ verstaat men $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$. Het differentiaalquotiënt is dus, in tegenstelling tot de afgeleide functie, gebonden aan een bepaalde waarde van het argument.

Notatie voor het differentiaalquotiënt van $f(x)$ in x_1 : $f'(x_1)$; voor de afgeleide functie van $f(x)$: $f'(x)$, $\frac{df(x)}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, en, als men $f(x)$ door y voorstelt, ook: y' , $\frac{dy}{dx}$.

Op didactische gronden bevelen we aan de term *onbepaalde integraal* en de schrijfwijze $\int f(x)dx$ niet te gebruiken. In plaats daarvan kan men beter volstaan met te definiëren: $F(x)$ is een primitieve functie van $f(x)$, als $F'(x) = f(x)$, en geen aparte notatie voor een primitieve functie van $f(x)$ invoeren. Dat $\int f(x)dx$ niet een functie, maar een klasse van functies voorstelt, is voor de leerlingen ongewoon. Het naast elkaar voorkomen van onbepaalde integralen (klassen van functies) en bepaalde integralen (getallen) en het gebruik van het integraalteken bij onbepaalde en bepaalde integralen op geheel verschillende manier, maakt het de beginnening lastiger zich van dit zo moeilijke onderdeel van de wiskunde een juist begrip te vormen. Aan deze bezwaren wordt tegemoet gekomen, als men zich beperkt tot het spreken over primitieve functies.

In aansluiting hieraan is het dan overbodig $\int_a^b f(x)dx$ een *bepaalde integraal* te noemen, maar kan men volstaan met te spreken van de integraal van $f(x)$ tussen de grenzen a en b (van a tot b).

$$\text{Notatie: } \int_0^1 (x + 1)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1.$$

Onder *differentiëren* verstaat men het berekenen van een afgeleide functie, onder *integreren* het berekenen van een primitieve functie.

Omdat de betekenis van het stijgend (dalend) zijn van een functie niet door alle leraren op dezelfde wijze vastgelegd wordt, achten we het van belang de volgende definities voor te stellen.

$f(x)$ is stijgend, als $a < b$ impliceert $f(a) < f(b)$ voor elke a en b , waarvoor $f(x)$ gedefinieerd is.

$f(x)$ is stijgend in een interval, als $a < b$ impliceert $f(a) < f(b)$ voor elke a en b , die tot dat interval behoren.

$f(x)$ is stijgend in x_1 , als er een omgeving van x_1 bestaat, waarbinnen $a < x_1 < b$ impliceert $f(a) < f(x_1) < f(b)$ (als x_1 een grenspunt is van het definitiegebied van de functie, kan men volstaan met het beschouwen van een rechter- of linker omgeving).

De definities van „dalend” zijn analoog:

Volgens de laatste definitie kan $f(x)$ stijgend in x_1 zijn, als $f'(x_1) = 0$ is. In verband hiermee is het niet gewenst in dit geval de functie *stationair* in x_1 te noemen.

In $\frac{df}{dx}$ en in $\int_a^b f(x)dx$ moeten de symbolen „d”, volgens hetgeen onder „algebra” over het rechteop drukken van operatoren vermeld is, rechteop gedrukt worden.

Toepassingen op de mechanica

verpl en fac. ken

Men moet onderscheid maken tussen de baancoördinaat en de afgelegde weg. De baancoördinaat van een punt is de langs de baan gemeten afstand van een aangenomen nulpunt tot het punt (voorzien van een teken), terwijl de afgelegde weg het verschil is tussen de baancoördinaten van het punt op twee tijdstippen. Om misverstand te voorkomen, voegen we hier nog aan toe, dat de afgelegde weg niet hetzelfde is als wat in het dagelijks leven onder afgelegde weg verstaan wordt, doch overeenkomt met de grootte van de verplaatsing.

verplaatsing

De baancoördinaat van een punt is een functie van de tijd. Deze functie zouden we de plaatsfunctie willen noemen. Als notatie stellen we voor: $u(t)$. De afgelegde weg is een functie van twee variabelen; we willen deze noteren: $s(t_1, t_2)$. Volgens deze afspraken is dus: $s(t_1, t_2) = u(t_2) - u(t_1)$.

$$= \int_{t_1}^{t_2} v/dt$$

Men moet bij de notatie onderscheid maken tussen een tijdstip en een tijdsduur. Een tijdstip wordt voorgesteld door t (eventueel voorzien van een index), een tijdsduur door $t_2 - t_1$ of Δt .

Om de eenheid in notatie te bevorderen, bevelen we aan de door Velines aangenomen notatievoorschriften ¹⁾ te volgen en dus

- een kracht voor te stellen door F ,
- arbeid door W ,
- energie door U ,
- potentiaal door V ,
- veldsterkte door E ,
- gewicht door G ,
- lading door Q ,

¹⁾ Symbolen voor natuurkundige grootheden, Faraday, 26e jg., nr. 6.

massa door m ,
 snelheid door v ,
 versnelling door a ,
 trillingstijd door T ,
 hoeksnelheid (in rad/sec) door ω ,
 frequentie door f .

Vectoren worden volgens de normalisatievoorschriften aangeduid: door een vette letter, door een pijl boven de letter, door een streep boven en ook door een streep onder de letter. Voor schoolgebruik is de vette letter onbruikbaar en de onderstreping onpraktisch. Tegen de streep erboven bestaat het bezwaar, dat deze notatie ook voor het gemiddelde (b.v. de gemiddelde snelheid) gebruikt wordt. Blijft dus over een pijl boven de letter(s), dus $\overrightarrow{AB}$ of $\overrightarrow{a}$. Deze pijl moet dus ook boven de letters F , E , G , v en a aangebracht worden, als met deze letters vectoren bedoeld worden en niet slechts grootten van vectoren.

De opmerkingen aangaande de toepassingen in de mechanica zijn gemaakt in overleg met de door Liwenagel en Velines ingestelde mechanica-commissie en door deze commissie goedgekeurd.¹⁾

Verplichte termen

differentiaalquotient of afgeleide van $f(x)$ in x_1 (def.)
 afgeleide functie van $f(x)$ (def.)
 primitieve functie van $f(x)$
 integraal van $f(x)$ tussen de grenzen a en b
 stijgende (dalende) functie (+ def.)
 een functie is stijgend (dalend) in een interval (+ def.)
 een functie is stijgend (dalend) in een punt (+ def.)
 baancoördinaat en afgelegde weg
 plaatsfunctie

III. Meetkunde

Het taalgebruik in de schoolmeetkunde is in sommige opzichten weinig exact, doordat bepaalde termen in verschillende betekenis gebruikt worden. We zullen hieronder enige voorbeelden daarvan signaleren. Naar onze mening zou het niet doelmatig zijn eenduidig taalgebruik in deze gevallen te forceren, omdat velen zich daarmee toch niet akkoord zouden verklaren.

We zullen eerst de planimetrische termen bespreken en de

¹⁾ Het rapport van deze commissie zal verschijnen in *Euclides*, 1959—60, nr. 3.

stereometrische alleen voor zover ze daar direct mee in verband staan, en daarna de overige stereometrische termen.

Lijn, halve lijn, lijnstuk

Een *rechte lijn* wordt door sommigen rechte, door anderen lijn genoemd. Verder spreekt men van een loodlijn, een raaklijn en niet van een loodrechte en een raakrechte. Consequent is dus een rechte lijn bij verkorting *lijn* te noemen. We krijgen dan de volgende parallel tussen de planimetrische en de stereometrische termen:

lijn — *halve lijn* — *lijnstuk*,
vlak — *half vlak* — (*vlakstuk*).

Dus *half vlak* en niet *halfvlak*. De benaming *vlakstuk* zou men kunnen gebruiken voor een begrensde deel van een plat vlak.

Het is overbodig een lijnstuk AB aan te duiden met $\overline{AB}$. Uit de context blijkt vrijwel steeds, of met AB een lijnstuk of een lijn bedoeld wordt.

Loodlijnstukken en *raaklijnstukken* worden in de regel kortweg loodlijnen en raaklijnen genoemd. Ook hier is doorgaans misverstand uitgesloten en durven we dus niet op purisme aandringen.

Twee lijnstukken AB en CD of twee halve lijnen met eindpunten A en C heten *evenwijdig in dezelfde zin*, als ze evenwijdig zijn en aan dezelfde kant van de lijn AC liggen. Zijn ze evenwijdig en liggen ze aan verschillende kant van AC , dan heten ze *evenwijdig in tegengestelde zin*.

Hoeken, afstanden

De termen overeenkomstige hoeken en verwisselende binnenhoeken zijn verplicht.

Het heeft weinig zin voor hoeken groter resp. kleiner dan 180° de benamingen *inspringende* en *uitspringende hoeken* te gebruiken. Ook de woorden *volle hoek* en *applement* zijn overbodig.

Onder de hoek van twee lijnen verstaat men een hoek, die kleiner dan of gelijk aan 90° is. Hetzelfde geldt voor de hoek van een lijn en een vlak en de hoek van twee vlakken. Door deze afspraak te maken vermijdt men, dat de hoek van twee lijnen b.v. zowel gelijk aan 60° als aan 120° is, waaruit men normaliter zou concluderen, dat $60^\circ = 120^\circ$.

In verband met deze afspraak is het ongewenst te zeggen, dat de hoek *tussen* twee lijnen gelijk aan b.v. 60° is. Twee lijnen vormen vier hoeken. Van deze vier hoeken zijn er twee gelijk aan 60° en twee gelijk aan 120° , terwijl de hoek *van* de lijnen 60° is. De hoek

van de lijnen is dus per definitie geen meetkundige figuur, maar een grootheid. Een bijkomstigheid in dit verband is nog, dat de uitdrukking „hoek tussen twee lijnen” vrij zonderling aandoet, als men het over kruisende lijnen heeft.

Onder een *afstand* verstaat men een getal en geen lijnstuk. Het heeft dus geen zin te vragen de afstand van twee figuren te construeren.

Termen met verschillende betekenissen

De begrippen *hoek*, *driehoek*, *veelhoek* e.d. worden in de planimetrie op verschillende manieren gedefinieerd, nl.

- a. als een tweetal halve lijnen resp. een stelsel lijnstukken,
- b. als een tweedimensionaal deel van het platte vlak.

In beide gevallen spreekt men van een punt binnen een driehoek en van de oppervlakte van een driehoek, terwijl de eerste zegswijze ontleend is aan de betekenis sub a en de tweede aan de betekenis sub b.

Ook in de stereometrie vindt men dezelfde dubbele betekenis van woorden als viervlak, piramide, prisma en veelvlak.

Alleen t.a.v. *cirkel* en *bol* is de situatie iets anders. Krachtens hun definitie is dit een kromme resp. een oppervlak. Toch worden de woorden cirkel en bol ook wel gebruikt voor het door een cirkel omsloten deel van het platte vlak en voor het door een bol omsloten deel van de ruimte. Het invoeren van termen als *cirkelschijf*, *cirkelomtrek* en *bolvlak* lijkt ons desondanks overbodig, omdat misverstand uitgesloten is.

Merkwaardig is in dit verband, dat men met het middendoor delen van een cirkel bedoelt het middendoor delen van de kromme en met het middendoor delen van een driehoek het halveren van de oppervlakte.

Velen zijn van mening, dat de termen *basis*, *basishoek*, *opstaande zijde*, *top*, *tophoek* en *hoogte* alleen met betrekking tot een gelijkbenige driehoek, echter niet met betrekking tot een willekeurige driehoek gebruikt mogen worden. Hoewel we het in principe hiermee niet oneens zijn, willen we toch wijzen op de consequenties van het hier ingenomen standpunt.

Men zou niet mogen spreken van basis en hoogte van een parallellogram,

wel van basis en hoogte van een trapezium,

niet van grondvlak en hoogte van een viervlak,

wel van grondvlak en hoogte van een piramide, met uitzondering echter van een driedzijdige piramide,

weer wel van grondvlak en hoogte van een regelmatige driezijdige piramide, nu echter met uitzondering van het regelmatige viervlak, niet van grond- en bovenvlak van een prisma of cilinder, maar wel van de hoogte ervan, echter niet van de hoogte van een parallellepipedum (enz.),

wel van grondvlak en hoogte van een kegel.

Ook de gelijkzijdige driehoek levert moeilijkheden. Hoewel een gelijkzijdige driehoek ook gelijkbenig is, zou men toch de terminologie van de gelijkbenige driehoek er niet op mogen toepassen.

Waarschijnlijk zal niemand deze consequenties ten volle willen aanvaarden, zodra hij stereometrische begrippen gaat behandelen. Op grond van deze overwegingen zou het verdedigbaar zijn een willekeurige zijde van een driehoek de basis te noemen. We laten hierbij in het midden, of dit didactisch verantwoord is.

Moeilijkheden geeft ook de term *bissectrice*. Allereerst de schrijfwijze: Deze is *bissectrice*, met twee s'en (ontleend aan het Frans), of *bisectrix*, met één s (ontleend aan het Latijn). Onder een *bissectrice* verstaat men soms een lijnstuk, soms een halve lijn en soms een lijn. De *bissectrice* van een hoek is een halve lijn. De *bissectrices* van een driehoek worden soms als lijnstukken en soms als halve lijnen of lijnen opgevat; hetzelfde geldt voor de buitenbissectrices (vgl.: van een driehoek gaan één binnen- en twee buitenbissectrices door één punt).

Ook hoogtelijnen en zwaartelijnen van een driehoek worden nu eens als lijnstukken, dan weer als lijnen opgevat. Zo zegt men b.v., dat de hoogtelijnen van een stomphoekige driehoek door één punt gaan.

Driehoeken en veelhoeken

De zijden van een driehoek ABC worden zowel door AB , BC en CA als door a , b en c voorgesteld. Het verdient aanbeveling a , b en c alleen te gebruiken, als men daarmee de grootten van de zijden bedoelt, en evenzo $\angle A$, $\angle B$ en $\angle C$ alleen aan te duiden met α , β en γ , als men de grootten van de hoeken bedoelt. Men mag dan dus niet spreken van het midden van de zijde a of van de bissectrice van de hoek α .

De termen *deellijn* en *mediaan* zouden we facultatief willen stellen.

De termen *scheef parallellogram* en *scheve ruit* zijn facultatief:

Een trapezium is een vierhoek, waarvan een paar zijden evenwijdig en het andere paar niet evenwijdig is. We zouden de eenheid in terminologie willen bevorderen door niet toe te laten een parallellogram als bijzonder geval van een trapezium te beschouwen.

Een speciaal symbool voor vierhoek, b.v. $\square$, komt niet op de normalisatiebladen voor en behoeft dus niet gebruikt te worden.

De termen *convexe* en *concave veelhoek* en *convex* en *concaaf veelvlak* zijn facultatief.

Het is niet noodzakelijk te weten, wat verstaan wordt onder het *apothema* van een regelmatige veelhoek of van een regelmatige piramide; wel wat verstaan wordt onder het *apothema* van een kegel.

De uitdrukkingen *verdelen in uiterste en middelste reden* en *gouden snede* zijn facultatief.

Gelijkstandigheid en gelijkvormigheid

Twee figuren, die door vermenigvuldiging uit elkaar ontstaan kunnen, heten gelijkstandig. De term *homothetisch* is facultatief.

Het is echter ongewenst de term *gelijkstandig* ook te gebruiken om aan te geven, welke lijnstukken en hoeken in gelijkvormige of congruente driehoeken met elkaar corresponderen. Deze kan men bij voorkeur *corresponderende* zijden en hoeken noemen. *Overeenkomstige* is hier minder gewenst, omdat overeenkomstige hoeken reeds een andere betekenis heeft.

De term *gelijkvormigheidspunt van twee cirkels* is ongelukkig gekozen, omdat dit punt niet direct te maken heeft met het feit, dat de twee cirkels gelijkvormig zijn, maar wel ermee, dat de ene cirkel door vermenigvuldiging uit de andere ontstaan kan. We willen ter discussie stellen, of het gewenst is de term gelijkvormigheidspunt door *gelijkstandigheidscentrum* te vervangen.

Onder de *gelijkvormigheidsfactor* van de figuren F_1 en F_2 verstaat men de factor, waarmee F_1 vermenigvuldigd moet worden om een figuur te krijgen, die congruent met F_2 is. Deze is dus het omgekeerde van de gelijkvormigheidsfactor van F_2 en F_1 . Het zou beter zijn te spreken over de gelijkvormigheidsfactor van F_1 naar F_2 (want „en” is nevenschikkend), maar dat is nu eenmaal geen gebruik.

Cirkels

Het symbool $\odot$ voor cirkel komt niet op de normalisatiebladen voor. Men behoeft dus de notatie $\odot(M, r)$ niet te kennen, echter wel cirkel (M, r) en ook bol (M, r) .

Men moet niet zeggen, dat twee cirkels *binnen elkaar* liggen, maar dat de ene cirkel *binnen de andere* ligt.

Het is juister te zeggen, dat een lijn een cirkel *raakt*, dan dat een lijn *aan* een cirkel raakt.

Naast de termen middelpuntshoek en omtrekshoek lijken ons de termen binnenomtrekshoek en buitenomtrekshoek aan te bevelen.

Voor de grootte van boog AB zijn zowel de schrijfwijzen $bg\ AB$ als $\widehat{AB}$ in gebruik. De Hoofdc commissie voor Normalisatie geeft geen voorschrift in deze. Het lijkt ons dan ook niet doelmatig een bepaalde schrijfwijze voor te schrijven.

De officiële benamingen zijn om- en ingeschreven cirkel en om- en ingeschreven bol en niet *omcirkel* en *incirkel* resp. *ombol* en *inbol*.

De uitdrukkingen de macht van een punt t.o.v. een cirkel of bol behoren tot de verplichte uitdrukkingen.

De termen cirkelsegment, cirkelsector, bolsegment en bolsector zijn verplicht, echter niet *pijl* van een segment en *hoogte* van een segment.

Oppervlakte

Men moet onderscheid maken tussen *oppervlak* en *oppervlakte*. Een oppervlak is een tweedimensionale figuur, de oppervlakte daarvan is een getal.

Met het gelijk zijn van twee figuren wordt bedoeld het even groot zijn ervan. Men bedoelt er dus niet mee, dat de figuren samenvallen. Alleen in het eerste geval is het geoorloofd het symbool $=$ te gebruiken. In het tweede geval kan men desgewenst het symbool $\equiv$ gebruiken.

Evenals men de gelijkheid van de lijnstukken AB en CD noteert door $AB = CD$, kan men de gelijkheid van de oppervlakten van de driehoeken ABC en DEF en de gelijkheid van de inhouden van de viervlakken $ABCD$ en $EFGH$ noteren door $\triangle ABC = \triangle DEF$ resp. $ABCD = EFGH$.

Meetkundige plaats

We bevelen aan de term *meetkundige plaats* te vervangen door verzameling. Niet alleen is dit een term, die vanuit hoger standpunt gerechtvaardigd is, maar ook sluit het woord beter aan bij de vocabulaire, die de leerling uit het dagelijks leven reeds kent. Vooral als men aanvankelijk spreekt van de verzameling van *alle* punten, die een bepaalde eigenschap hebben, zal men beter suggereren, wat men bedoelt, dan als men spreekt van de meetkundige plaats van die punten. Zowel begrip als bewoording zijn in het laatste geval de leerling vreemd. Later kan men de toevoeging „alle” beter achterwege laten.

Stereometrie

In de stereometrie gaan we uit van drie groundbegrippen: punt, lijn en vlak. Het verdient aanbeveling de elementen van deze drie begrippen voor te stellen door drie verschillende lettertypen, en wel punten door hoofdletters, lijnen door kleine letters en vlakken door kleine Griekse letters (dus $\alpha, \beta, \dots$ en liever niet $V, W, \dots$).

De ~~meetkundige plaats~~ ^{verzameling} van de lijnen door P in vlak α , heet een lijnenbundel; P is het centrum van de lijnenbundel. Als schrijfwijze stellen we voor: lijnenbundel (P, α) . De benamingen *waaiër* en *top* zijn facultatief. Ze zijn niet aan te bevelen, omdat men in de analytische meetkunde aan de term lijnenbundel de voorkeur geeft.

De lijn, die twee kruisende lijnen loodrecht snijdt, kan men het beste hun loodrechte snijlijn noemen. De vaak gebruikte term *gemeenschappelijke loodlijn* is onduidelijk, omdat ook elke lijn, die twee lijnen loodrecht kruist, een gemeenschappelijke loodlijn van deze twee lijnen is.

Het vlak door de bissectrice van een hoek gevormd door twee snijdende lijnen l en m , loodrecht op het vlak door l en m , heet een bissectriceloodvlak van l en m . Ook kan men spreken van het bissectriceloodvlak van $\angle ABC$, in welk geval echter slechts één dergelijk vlak bedoeld wordt.

De lijn door het middelpunt van een cirkel, loodrecht op het vlak van de cirkel, heet de as van de cirkel. Analoog spreken we van de as van een driehoek en meer algemeen van de as van een koordenveelhoek.

Lichamen

De term zwaartevlak van een viervlak is verplicht, *mediaanvlak* facultatief.

Een viervlak, waarvan de hoogtelijnen door één punt gaan, heet een orthocentrisch viervlak. De naam *orthogonaal viervlak* zouden we liever in het geheel niet willen gebruiken. De gewoonte een orthogonaal viervlak te definiëren als een viervlak, waarvan de overstaande ribben elkaar loodrecht kruisen, en dan te bewijzen, dat elk orthogonaal viervlak orthocentrisch is en omgekeerd, lijkt ons nodeloos omslachtig. Men voert toch niet welbewust twee verschillende benamingen in voor ekwivalente begrippen om direct daarna te bewijzen, dat dit eigenlijk overbodig is.

Een viervlak, waarvan drie ribben, die in één hoekpunt samenkomen, drie rechte hoeken met elkaar maken, heet een recht-hoekig viervlak.

Zowel de term *parallellepipedum* als de term *blok* zouden we verplicht willen stellen. Beide zijn in gebruik en beide hebben voordelen. De term *parallellepipedum* accentueert de analogie tussen planimetrie en stereometrie, de term *blok* heeft daartegenover het voordeel van de eenvoud. Een rechthoekig blok zouden we echter niet gaarne een *balk* willen noemen, omdat men dan in de war dreigt te raken door de associaties, die de woorden *blok* en *balk* oproepen.

Notatie voor een prisma met opstaande ribben AD , BE , CF : $ABC.DEF$.

Notatie voor een piramide met top T en grondvlak $ABCD$: $T.ABCD$.

We onderscheiden twee soorten diagonalen: zijvlaksdialagonalen en lichaamsdialagonalen.

Men dient onderscheid te maken tussen een cilindervlak en een cilinder. Een cilinder is een lichaam begrensd door een cilindervlak en twee vlakken loodrecht op de as. Met een cilinder wordt steeds een rechte cirkelcilinder bedoeld.

Analoog dient men onderscheid te maken tussen een kegelvlak en een kegel. Een kegel is per definitie een rechte cirkelkegel.

Voor termen als *algemeen cilindervlak*, *algemeen kegelvlak*, *richtlijn*, *scheve kegel*, *omwentelingskegel* is als gevolg van de gemaakte afspraken in ons onderwijs geen plaats meer.

We spreken van de grondcirkel van een cilinder en van een kegel en niet van de *ribbe*. Verder van de cilindermantel en de kegelmantel en van de manteloppervlakte. Dit woord verdient de voorkeur boven *zijdelingse oppervlakte* of *ronde oppervlakte*, omdat deze termen op zonderlinge wijze samengesteld zijn: de oppervlakte is namelijk noch zijdelings, noch rond.

Projectie

Als zonder meer gesproken wordt van de *projectie* van een figuur, wordt daarmee orthogonale parallelprojectie bedoeld.

Onder de *wijkhoek* zouden we hetzelfde willen verstaan als door de auteurs van de „250 opgaven” is voorgesteld. Het is dus de hoek van een loodlijn in het tafereel op de as van projectie en de scheve projectie op het tafereel van een lijn, die loodrecht op het tafereel staat. Deze hoek wordt van een teken voorzien en ligt tussen -90° en $+90^\circ$. Sommige auteurs verstaan onder de *wijkhoek* het complement van deze hoek. Om de eenheid te bevorderen, zouden we de eerste afspraak echter gaarne bindend verklaard willen zien.

Hoewel de term verkorting enigszins zonderling gekozen is — de verkorting kan immers ook groter dan 1 zijn — zouden we toch willen voorstellen deze term te handhaven. Indien men de voorkeur zou geven aan *projectieverhouding*, zouden we ons daarmee gaarne kunnen verenigen, mits deze term dan ook algemeen ingang vindt.

Notatie: wijkhoek ω , verkorting k .

Voor een figuur, die een projectie van een driedimensionale figuur op een plat vlak voorstelt, gebruikt men vaak de benaming *stereometrische figuur*. Nu het nieuwe K.B., nauwkeuriger dan gebruikelijk was, formuleert op welke wijze een leerling begrip moet hebben van de onstaanswijze van de figuren, die hij in de stereometrie tekent, menen we, dat het aangewezen is de verwarrende term „stereometrische figuur” niet meer te gebruiken en deze te vervangen door projectiefiguur.

Notatie

We vermeldde reeds, dat volgens de normalisatievoorschriften letters, die wiskundige entiteiten voorstellen, die geen constante betekenis hebben, cursief gedrukt moeten worden. In de meetkunde worden punten door hoofdletters aangegeven. Deze hoofdletters stellen echter geen bepaalde punten voor, doch willekeurige punten (als een stelling gaat over driehoek ABC , is daar een willekeurige driehoek mee bedoeld). Volgens de genoemde voorschriften moeten deze hoofdletters dus cursief gedrukt worden. Verder wijzen we erop, dat het gewenst is, dat letters in de tekst en bij figuren in hetzelfde type afgedrukt worden. Ook bij de figuren moeten dus cursieve hoofdletters staan. Schrijvers van nieuwe schoolboeken raden we aan hiermee rekening te houden.

Verplichte termen

A. Planimetrie

- overeenkomstige hoeken
- verwisselende binnenhoeken
- trapezium (def.)
- hoek van twee lijnen (def.)
- gelijkstandig
- binnenomtrekshoek
- buitenomtrekshoek
- omgeschreven cirkel
- ingeschreven cirkel
- macht van een punt t.o.v. een cirkel

cirkelsegment
 cirkelsector
 verzameling (def.)

B. Stereometrie

hoek van een lijn en een vlak (def.)
 hoek van twee vlakken (def.)
 omgeschreven bol
 ingeschreven bol
 macht van een punt t.o.v. een bol
 bolsegment
 bolsector
 lijnenbundel, centrum
 loodrechte snijlijn
 bissectriceloodvlak
 as van een cirkel, driehoek, koordenveelhoek
 zwaartevlak
 orthocentrisch viervlak
 rechthoekig viervlak
 parallellepipedum en blok
 zijvlaksdiaagonaal, lichaamsdiaagonaal
 cilindervlak
 cilinder (def.)
 kegelvlak
 kegel (def.)
 grondcirkel van een cilinder of kegel
 cilindermantel, kegelmantel
 apothema van een kegel
 manteloppervlakte
 wijkhoek (def.)
 verkorting
 projectiefiguur

Ter discussie gesteld

gelijkstandigheidscentrum (i.p.v. gelijkvormigheidspunt)
 projectieverhouding (i.p.v. verkorting)

IV. Goniometrie

Onder *goniometrie* wordt verstaan de leer van de goniometrische verhoudingen, vergelijkingen en functies, onder *trigonometrie* de toepassingen daarvan op de meetkunde.

Er bestaat wel eens meningsverschil over de kwestie, of men moet schrijven $\sin 30^\circ$ of $\sin 30$. Om tot een oplossing van dit probleem te komen, is het noodzakelijk uiteen te zetten op welke manieren goniometrische verhoudingen en functies achtereenvolgens gedefinieerd worden in ons onderwijs.

Eerste stadium. De goniometrische verhoudingen van een concrete hoek worden gedefinieerd. Dus b.v. $\sin \angle BAC$.

Tweede stadium. Het blijkt, dat de goniometrische verhoudingen van gelijke hoeken gelijk zijn. Men spreekt daarom van de goniometrische verhoudingen van de grootte van een hoek of, anders gezegd, van de klassen van onderling gelijke hoeken. Men kan nu dus spreken van $\sin 30^\circ$.

Derde stadium. Voor het argument van de functie kiest men een andere eenheid, de radiaal. Men zou nu eigenlijk moeten schrijven $\sin \frac{1}{6}\pi$ rad.

Vierde stadium. De in het derde stadium gedefinieerde functies kan men niet differentiëren. Immers reeds de differentiequotiënten,

zoals $\frac{\sin 0,1 \text{ rad} - \sin 0 \text{ rad}}{0,1 \text{ rad} - 0 \text{ rad}}$, bestaan niet, omdat men geen getal

door 0,1 rad kan delen. Het is dus alleen mogelijk een functie te differentiëren, als het argument een getal is. Het is nu in de analyse gebruik een functie $\sin x$ in te voeren, waarvan de waarde voor elke x gelijk is aan $\sin x$ rad. Hierin stelt x een getal voor en deze functie kan dus gedifferentieerd worden. Zou men in plaats hiervan een functie $\sin x$ invoeren, waarvan de waarde gelijk is aan $\sin x^\circ$, dan zou men bij het differentiëren minder eenvoudige resultaten verkrijgen.

Het subtiele verschil tussen het derde en het vierde stadium wordt bij het onderwijs verdoezeld door de afspraak te maken, dat van argumenten, die in radialen uitgedrukt zijn, de toevoeging „rad” weggelaten wordt.

Mogen we nu $\sin 30$ schrijven in plaats van $\sin 30^\circ$? Neen, want volgens de algemeen gebruikelijke opvatting wordt met $\sin 30$ het getal bedoeld, dat gelijk is aan de sinus van een hoek van 30 radialen. Deden we het toch, dan zou $\sin 30$ een dubbele betekenis krijgen, en dit is in strijd met de regel, dat een wiskundig symbool eenduidig gedefinieerd moet zijn. We mogen dus niet schrijven $\sin 30$, als we $\sin 30^\circ$ bedoelen.

Als we de vier stadia nog eens nagaan, zien we, dat in de eerste drie stadia sprake is van goniometrische functies van een hoek, in het vierde stadium echter van functies van een getal. Alleen de

eerste drie stadia behoren tot de eigenlijke goniometrie. Zodra we als argument een getal kiezen, hebben we de goniometrie verlaten en bevinden we ons op het terrein van de analyse.

Men verkeert wel eens in twijfel, of de schrijfwijze $\sin(x + 30^\circ)$ geoorloofd is. Als bezwaar hiertegen wordt aangevoerd, dat men bij een hoek van 30° niet het getal x kan optellen. Is $\sin(x^\circ + 30^\circ)$ niet beter? Om hierover een oordeel te vellen, is het noodzakelijk na te gaan, welke de rol van variabelen in een wetenschap is. Een variabele stelt voor een willekeurig individu (iets), dat onder een bepaald begrip valt. In de algebra houden we ons bezig met getallen; een variabele stelt daar een willekeurig getal voor. In de meetkunde onderzoeken we punten, lijnen en vlakken; een variabele stelt daar een willekeurig punt, een willekeurige lijn of een willekeurig vlak voor. Behalve deze variabelen komen ook andere voor, b.v. in de algebra de variabele f voor een willekeurige functie, in de meetkunde variabelen voor een willekeurig lijnstuk, een willekeurige hoek e.d. In de logica schrijft men $A \rightarrow B$, waarin A en B variabelen zijn, die een willekeurig oordeel voorstellen. In de goniometrie houden we ons met hoeken bezig en zullen we dus variabelen nodig hebben, die een willekeurige hoek voorstellen. In $\sin(x + 30^\circ)$ stelt x dan ook geen getal, maar een hoek voor. Deze schrijfwijze is dus juist. De schrijfwijze $\sin(x^\circ + 30^\circ)$ is natuurlijk niet fout; we mogen immers ook getalvariabelen in de goniometrie gebruiken. Aan deze schrijfwijze zijn o.i. echter alleen nadelen verbonden. Het oplossen van de vergelijking $\sin(x + 30^\circ) = \frac{2}{3}$ geeft o.m. $x = 41^\circ 49'$. Maar wat moet men als oplossing opgeven van $\sin(x^\circ + 30^\circ) = \frac{2}{3}$? Consequent is $x = 41\frac{49}{60}$. Deze consequentie zal vermoedelijk niemand willen aanvaardden.

Variabelen voor hoeken worden in de goniometrie door kleine Griekse letters voorgesteld. In vergelijkingen en functies wordt echter ook de variabele x toegelaten. Hoewel dit vreemd aandoet, is het om praktische redenen gewenst. De overgang tussen de goniometrie en de analyse wordt namelijk in ons onderwijs niet gemarkeerd. In de analyse is het aangewezen de variabele door x voor te stellen. Zou men in de goniometrie verbieden de variabele x te gebruiken, dan zou het de leerlingen niet duidelijk gemaakt kunnen worden, wanneer het wel en wanneer niet toegestaan is x te schrijven.

Men kan de cotangens het beste noteren door ctg (in verband met internationale normalisatie). Geoorloofd is ook cotg , echter liever niet cot , wegens mogelijke verwarring met $\cos$ (hoewel cot door de normalisatiecommissie wel is toegestaan).

Een cirkel met straal 1 om het hoekpunt van een hoek heet een *eenheidscirkel* en niet een *goniometrische cirkel*.

Onder een sinusoïde verstaat men de grafiek van een functie van de vorm $a \sin (px + q)$ ($a \neq 0$, $p \neq 0$).

De periode van een functie is het *kleinste* positieve getal p met de eigenschap, dat voor elke x geldt $f(x + p) = f(x)$. Een periodieke functie heeft dus slechts één periode.

Voor de *wortels* van een goniometrische vergelijking gelden dezelfde afspraken als voor de wortels van een vergelijking in de algebra (zie aldaar).

Het is niet gemakkelijk een geschikte notatie te vinden voor de oplossing van een goniometrische ongelijkheid. We zouden een methode willen voorstellen, die aan de volgende twee voorbeelden duidelijk wordt.

$$\begin{array}{ll} \sin x > \frac{1}{2}; & \frac{1}{6}\pi < x < \frac{5}{6}\pi \quad (\text{periode } 2\pi); \\ \sin 2x > \frac{1}{2}, & \frac{1}{12}\pi < x < \frac{5}{12}\pi \quad (\text{periode } \pi). \end{array}$$

Verplichte termen

sinusoïde

periode (+ def.)

periodieke functie

V. Analytische meetkunde

In de planimetrie verstaan we onder de hoek van twee lijnen een hoek, die scherp of recht is. Als men in de analytische meetkunde spreekt over de hoek, die een lijn met de X-as maakt, bedoelt men een hoek, die ook stomp kan zijn. Onder de hoek, die een lijn l met de X-as maakt, verstaan we de hoek φ , waarover men de X-as om het snijpunt van l met deze as in positieve richting moet draaien om hem in l te doen overgaan ($0^\circ \leq \varphi < 180^\circ$).

Het is niet juist in dit geval te spreken van de hoek, die een lijn met de *positieve* X-as maakt. Als l de X-as b.v. in $(-2, 0)$ snijdt, denkt men dan ten onrechte bij de term „positieve X-as” aan het deel van de X-as, waar $x \geq -2$.

Onder de excentriciteit van een ellips wordt verstaan $\frac{c}{a}$.

We spreken dus niet van de *lineaire* en de *numerieke excentriciteit*, maar reserveren de term excentriciteit uitsluitend voor de numerieke. Ook bij de hyperbool heet $\frac{c}{a}$ de excentriciteit.

De termen *hoofdas* en *nevenas* van een hyperbool kan men beter niet gebruiken.

Van de beide termen *poollijn* en *raakkoorde* zouden we de eerste verplicht willen stellen, terwijl we het gebruik van de tweede zelfs afkeuren. De *poollijn* is een lijn en geen lijnstuk, dus geen *koorde*.

De termen *subnormaal*, *subtangens*, *orthoptische cirkel*, *voetpunts-kromme* en *confocaal* zijn facultatief, normaal behoort tot de verplichte termen.

Een orthogonale hyperbool wordt door sommigen een *gelijkzijdige hyperbool* genoemd. Het gebruik van deze term raden we af. Het is immers niet duidelijk, waaruit het gelijkzijdige karakter van deze hyperbool blijkt.

Ontaarde kegelsnede en *dubbelrechte* zijn facultatief, lijnenpaar is daarentegen verplicht.

Als er sprake is van een parabool of een hyperbool, wordt daarmee steeds een niet-ontaarde parabool of hyperbool bedoeld. Deze conventie is gewenst om ondubbelzinnige formulering van opgaven mogelijk te maken.

Men zegt, dat een vergelijking $F = 0$, waarin F een functie van x en y is, die één of meer parameters bevat, een stelsel krommen voorstelt. (Ook rechte lijnen en lijnenparen worden in dit verband tot de krommen gerekend.)

Een evenwijdige verschuiving van een figuur of van een coördinatenstelsel heet een *translatie*. Als bijpassend werkwoord kan men echter alleen *evenwijdig verschuiven* gebruiken.

Het gebruik van de uitdrukking *lopende coördinaten* zouden we willen afraden. Een juist inzicht in de methode van de analytische meetkunde wordt o.i. door het gebruik van deze zegswijze tegenwerkt.

Verplichte termen

hoek, die een rechte lijn met de X-as maakt (def.)
 excentriciteit van een ellips en van een hyperbool (def.)
 poollijn
 normaal
 lijnenpaar
 stelsel krommen
 translatie

RECREATIE

13. Vier schepen bewegen zich eenparig rechtlijnig op zee. De schepen 1 en 2, 1 en 3, 1 en 4, 2 en 3, 2 en 4 ontmoeten elkaar op verschillende plaatsen. Zullen de schepen 3 en 4 elkaar ook ontmoeten? De zee wordt als plat vlak opgevat.

14. Stelling. De som van de evenwijdige zijden van een willekeurig trapezium is gelijk aan 0.

Bewijs. In bijgaande figuur is ABCD het trapezium, $AE = CD$, $CF = AB$.

Nu is

$$\frac{x}{y+z} = \frac{b}{a} \text{ en } \frac{z}{x+y} = \frac{b}{a}.$$

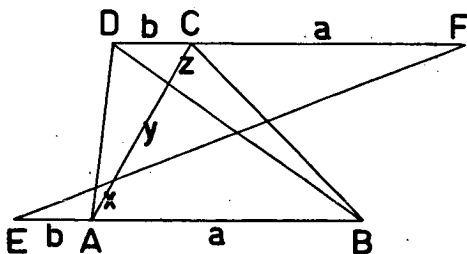
Dus

$$\frac{x}{y+z} = \frac{z}{x+y}.$$

Hieruit volgt

$$\frac{x-z}{(y+z)-(x+y)} = \frac{x}{y+z} = \frac{b}{a}.$$

Dus is $\frac{b}{a} = -1$. Hieruit volgt, dat inderdaad $a + b = 0$.



OPLOSSINGEN

(zie voor de opgaven het vorige nummer)

10. Hij begint in A, gaat eerst naar een der beide nevengelegen cellen en dan naar cel A' terug. Als men de opgave goed leest, ziet men, dat dit niet verboden is. De rest gaat vanzelf.

11. Een rechthoekige driehoek kan men in twee gelijkbenige driehoeken verdelen door de zwaartelij n op de hypotenusa te trekken. Een willekeurige driehoek verdeelt men eerst door een hoogtelijn in twee rechthoekige, waarna men dus volstaan kan met vier gelijkbenige driehoeken. Het minimum kan echter drie zijn (zie onder).

Voor elke n zijn er driehoeken, die in n gelijkbenige driehoeken verdeeld kunnen worden. Om dit in te zien begint men met een gelijkbenige driehoek en past daar een andere gelijkbenige driehoek op zodanige wijze aan, dat weer een driehoek ontstaat. Dit proces kan men steeds voortzetten. Men kan hieruit zonder moeite afleiden, aan welke voorwaarde de hoeken van een driehoek moeten voldoen, als deze in drie gelijkbenige driehoeken verdeeld kan worden.

12. Men moet er een regelmatig viervlak van maken.

BOEKBESPREKING

C. J. Alders, *Algebra voor M.O. en V.H.O.* Deel III, 14e druk. P. Noordhoff N.V., Groningen, 1959, 82 blz., ing. f 1.90, geb. f 2,65.

In verband met het nieuwe programma, is dit boek voor de hoogste klassen geheel herschreven. Het bevat, na hoofdstukken over functies en limieten, de differentiaal- en integraalrekening. Daarna volgen nog enkele extra onderwerpen: complexe getallen, permutaties en combinaties, binomium van Newton en het getal e . De behandeling is kort en duidelijk en er zijn voldoende vraagstukken ter oefening. De uiterste waarden worden terecht nagegaan zonder hulp van de tweede afgeleide. Het is te hopen, dat de differentiaal- en integraalrekening op onze scholen niet de neiging zal gaan vertonen om uit te dijen buiten het hier gegeven bestek. Voor hen, die van beknoptheid en zakelijkheid houden, een zeer aan te bevelen boek.

Drs. D. K. F. Heyt, *Nieuwe Schoolalgebra* van Wijdenes en Beth. Uitgave B, volgens het programma 1958. Derde deel, 21e druk. P. Noordhoff N.V., 1959, 126 blz., ing. f 3,80; geb. f 4,50.

Dit is dus het nieuwe deel III B voor klas 3 van de H.B.S. Het geeft, behalve de nu voorgeschreven stof, ook de reststelling, en dan ook nog de behandeling van de logaritmentafel in 5 decimalen en het interpoleren bij reeksen. Het lijkt mij, dat de meeste collega's die laatste onderwerpen wel zullen overslaan. Het boek maakt in zijn nieuwe gedaante dezelfde degelijke indruk als vroeger. Het bevat, naast een groot aantal vraagstukken, ook 94 uitgewerkte voorbeelden.

R. Troelstra

Schrek, *Beknopte analytische meetkunde*. P. Noordhoff, N.V. Groningen, 1959 ing. f 3,25, geb. f 3,90.

Dr. Schrek is er m.i. zeer goed in geslaagd dit leerboek geheel in overeenstemming te brengen met het Wimecosprogramma. Ook deze keurig verzorgde uitgave zal haar weg wel vinden.

Okken

EXAMEN-COMMISSIE WISKUNDE L.O. en M.O.

Het adres van de secretaris is gewijzigd en luidt thans Alb. Smits, Barnsteenhorst 62, Den Haag.

Van de **Alders** serie wiskunde boeken voor M.O. en V.H.O.

werd thans als laatste deel *aangepast aan het nieuwe programma:*

► **stereometrie**

13e/14e druk f 2,50; gebonden f 3,35
Voorts werden uit deze reeks nog onlangs herdrukt:

► **ALGEBRA voor M.O. en V.H.O.**

Deel I, 36e/38e druk . . . f 2,25; gebonden f 3,—
Antwoorden f 0,90
Deel II, 32e/35e druk . . f 2,50; gebonden f 3,35
Antwoorden f 0,75

► **PLANIMETRIE voor M.O. en V.H.O.**

4e/6e druk f 3,50; gebonden f 4,40

De Alders'-serie: *beknopt, helder, degelijk! — voorzien van overvloedig oefenmateriaal, met alle ballast overboord.*

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN
Ook via de boekhandel verkrijgbaar

Verschenen de **10^e** druk van

P. WIJDENES' *Leerboek der*

Goniometrie en Trigonometrie

349 bladzijden, met register en 205 figuren

Prijs f 12,50, geb. f 14,50

AANBEVELING OVERBODIG!

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

M. G. H. BIRKENHÄGER en H. J. D. MACHIELSEN

Algebra voor M.M.S.

f 3,75

Een knap stuk werk van 117 bladzijden. Alles is serieus behandeld en het is nodig, dat de leerlingen van verschillende hier genoemde onderwerpen kennis nemen.... Het behoort tot het beste, dat ik tot dusverre onder ogen heb gehad. Daarom, in afwachting van meer op het meisje ingestelde boeken, van harte aanbevolen.

(D. S. in Chr. Gymn. en M.O.)

Een boek met aardige verzamelingen van eenvoudige vraagstukken. Weinig theoretische uitleg, zodat aan de docent alle kansen geboden worden. Geschikt voor alle scholen, waar eenvoudig wiskundeonderwijs gegeven wordt, zoals op de m.m.s.

(W. J. Brandenbrug in Weekbl. v.h. „Genootschap”).

Meetkunde voor M.M.S.

Deel I f 3,75

Deel II f 4,50

Deeltje I geeft de stof tot en met de gelijkvormigheid. Na een inleidende cursus van 30 blz. komt het bewijzen van stellingen aan de orde. Deze cursus bevat naast eenvoudige theorie oefeningen in tekenen en berekenen.

Deeltje II bevat de leerstof voor de derde klas. In elk hoofdstuk komt een vrij groot aantal eenvoudige vraagstukken voor, die betrekking hebben op de daarin behandelde theorie. Verder bevat het boek een aantal herhalingsopgaven, die voorafgegaan worden door een overzicht der besproken stellingen en constructies.

De goniometrie is aan het eind geplaatst, zodat de behandeling daarvan desgewenst achterwege kan blijven.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook verkrijgbaar via de boekhandel