EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

35e JAARGANG 1959/60
I - 1 SEPTEMBER 1959

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan A. M. Koldijk, Singel 13 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

PROF. DR. D. VAN DANTZIG †
1900—1959

In de ouderdom van 58 jaar is op 22 juli 1959 tengevolge van een hartverlamming plotseling overleden Prof. Dr. D. van Dantzig, hoogleraar in de leer der collectieve verschijnselen aan de gemeentelijke universiteit te Amsterdam en chef van de afdelingen Mathematische Statistiek en Toegepaste Wiskunde van het Mathematisch Centrum.

Nederland verliest door deze dood een wiskundige van groot formaat en internationale vermaardheid, wiens verdiensten voor de wetenschap buiten de kolommen van dit aan de didactiek der exacte vakken gewijd tijdschrift stellig de nodige aandacht en waardering zullen verwerven.

Het zij de redactie van Euclides echter vergund met dankbaarheid te gewagen van de intense belangstelling, die Prof. van Dantzig bij voortduring tegenover didactische problemen aan de dag heeft gelegd en die o.m. gebleken is uit vaak revolutionaire voorstellen, waarmee hij verbetering van het wiskunde-onderwijs trachtte na te streven.

Van zijn belangstelling en activiteit getuigen tal van bijdragen in dit tijdschrift, in welks derde jaargang reeds een voor LIWENAGEL gehouden voordracht werd opgenomen „Over de maatschappelijke waarde van onderwijs in wiskunde". Op een bijeenkomst van leraren in de wiskunde, een voorloper van het latere Congres van leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen, hield hij in 1929 een lezing „Over de nomenclatuur en notatie in vergelijkingen en functies", voor WIMECOS in 1954 over „Wiskundige consultatie in de practijk". Op een vakantiecursus van het Mathematisch Centrum sprak hij in 1955 over „Enkele prolegomena voor een wetenschappelijke didactiek van wiskunde en statistiek".

Met klem heeft Prof. van Dantzig steeds geijverd voor een verantwoorde, nauwkeurig te formuleren doelstelling van het wiskunde-onderwijs, voor differentiatie van en meer vrijheid in het onderwijs, voor een hervorming van het eindexamen, dat door hem in de huidige vorm als een hoogst ondoeltreffende vorm van kwaliteitscontrole werd beschouwd. De in 1954 voorgestelde invoering van het leervak statistiek zag hij als een belangrijke stap in de richting van een verbeterde aanpassing van het wiskunde-onderwijs aan hedendaagse maatschappelijke en wetenschappelijke behoeften.

Prof. van Dantzig was sinds de oprichting in 1953 een actief lid van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, welks eerste rapport ,,The function of mathematics in modern society and its consequences for the teaching of mathematics'' van zijn hand was. Hij maakte deel uit van een internationale enquête-commissie, ingesteld door de Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique ter bestudering van het lerarentekort.

Met zijn door hem zeer vereerde leermeester en vriend, Prof. Dr. G. Mannoury, behoorde hij tot de beoefenaars der Significa in Nederland. En in het werk van deze groep nemen de empiristisch georiënteerde begripsanalysen van Prof. van Dantzig een bijzondere plaats in.

Voor het begrijpen van Van Dantzig's persoon lijkt me één der stellingen door hem bij zijn promotie tot doctor in de wis- en natuurkunde (1931) verdedigd, karakteristiek: ,,Het is wenselijk en mogelijk het indicatieve element in een waarderingsoordeel van het emotionele te onderscheiden, de betrekkingsbasis ervoor te onderzoeken en het vervolgens te mathematiseren''.

Prof. van Dantzig heeft er zich bij voortduring voor ingezet de wetenschap van emotionele beïnvloeding te bevrijden.

We zullen in leraarskringen de uitingen van zijn logisch-kritische geest node missen.

JOH. H. WANSINK.

REDACTIE-WISSELING

Met ingang van de 35e jaargang van Euclides zal de heer A. M. Koldijk als redactie-secretaris optreden in plaats van de heer H. W. Lenstra, die zich genoodzaakt heeft gezien zijn activiteiten in te perken en in verband hiermee het aan het redactie-secretariaat verbonden werk, dat hij drie jaren lang met onvolprezen toewijding en accuratesse heeft verricht, gaat neerleggen.

De redactie van Euclides is aan haar secretaris voor al het werk, dat hij voor het tijdschrift heeft verricht, grote dank verschuldigd. Het is geen geringe taak geweest om elke maand 32 pagina's, niet meer èn niet minder, persklaar te hebben en de opvolgende nummers met de regelmaat van een klok te doen verschijnen. Dat dit steeds gelukte is in de eerste plaats te danken aan de wijze waarop de heer Lenstra in deze drie jaren met de uitgever heeft weten samen te werken.

Wij verheugen er ons over, dat de heer Lenstra ook na het neerleggen van het secretariaat bereid blijft deel van de redactie uit te maken.

Mede namens de andere redactieleden heet ik collega A. M. Koldijk welkom in de redactie. Wij zijn hem dankbaar, dat hij deze taak op zich heeft willen nemen.

Joh. H. Wansink.

HET BEREKENEN VAN KWADRATEN

N.a.v. de opmerking hierover in Euclides [1]) het volgende: Kennen en herkennen van de kwadraten van de getallen tot 25 vind ik nodig, o.a. voor vraagstukken, waarin de discriminant of de extreme waarde een rol speelt. Eveneens de kwadr. van $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$, enz. die de leerlingen gemakkelijk onthouden, als ze inzien, dat $(a + \frac{1}{2})^2 = a(a + 1) + \frac{1}{4}$, dus b.v. $12\frac{1}{2}^2 = 12 \times 13 + \frac{1}{4}$.

Dan de kwadr. van de getallen, niet ver van 100. Zo b.v. $96^2 = (96^2 - 4^2) + 4^2 = 9200 + 16$.

Als interessante merkwaardigheid willen de leerlingen ook wel onthouden, dat de laatste 2 cijfers van de getallen 26^2, $27^2 \ldots 49^2$ dezelfde zijn als van 24^2, 23^2, 01^2. Dus $48^2 = 2300 + 4$. Dat er 2300 bij komt, vinden sommigen wel.

H. J. v. Geuns

[1]) Euclides 34, blz. 204.

OVER HET 4e MECHANICA-VRAAGSTUK VAN HET EINDEXAMEN H.B.S.-B IN 1959

door

DR. H. STREEFKERK

IV. Twee massapunten A en B met massa m_A en m_B zijn bevestigd aan de uiteinden van een rechte staaf van 80 cm lengte. De massa van de staaf wordt verwaarloosd. Deze staaf kan in een verticaal vlak, zonder wrijving, draaien om een horizontale as door zijn midden. In elk van de volgende gevallen (*a* en *b*) is de staaf in de beginstand verticaal (A boven) en heeft dan een hoeksnelheid van 5 rad/sec.

a. Als $m_A = 10$ gram en $m_B = 70$ gram, bereken dan de verandering van het arbeidsvermogen van plaats van A en van B als de staaf 60° uit de beginstand gedraaid is. Hoe groot is dan de hoeksnelheid van de staaf?

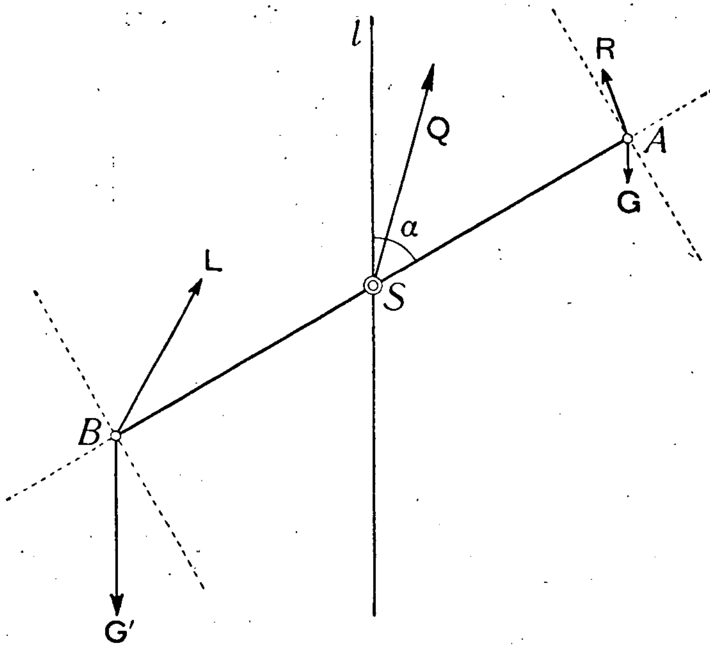
b. Als $m_A = m_B = 10$ gram, bepaal dan de grootte en de richting van de *door A op de staaf* uitgeoefende kracht op het moment, dat deze 60° uit de beginstand gedraaid is.

In dit vraagstuk, onderdeel *a*, werd een oplossing gesuggereerd, die m.i. principieel te verwerpen is. Er werd nl. eerst gevraagd naar de verandering van de potentiële energie der massapunten A en B, en daarna naar de hoeksnelheid dier massapunten, als $\alpha = 60°$. Dit duidt op een gewenste toepassing van de wet van behoud van mechanische energie. Deze wet geeft toevallig wel de goede uitkomst; toch is toepassing ervan foutief. Er zijn immers nog andere krachten in het spel, dan alleen de zwaartekracht. Men zal dus, op de H.B.S., de arbeidswet moeten toepassen. Maar welke H.B.S.-er zal daarbij denken aan de krachten R en L, die de staaf op A en B uitoefent? Zal hij er aan denken, dat deze krachten te danken zijn aan de reactie Q in het steunpunt, zodat de som der arbeiden van R en L nul is? Immers neen! En daarmee is dit vraagstuk volkomen ongeschikt verklaard.

De bedoeling van dit artikeltje is:

1° een juiste oplossing te geven, die echter voor de H.B.S. niet geschikt is;

2° de krachten R en L te berekenen.



We vinden achtereenvolgens:

Traagheidsmoment om de as: $\theta = \Sigma m_i r_i^2 = (10 + 70) \cdot 40^2 =$ 128000.

Impulsmoment om de as: $I = \theta\omega = 128000\,\omega$.

Som van de momenten der werkzame uitwendige krachten: (dit zijn G, G′, en Q, zie fig.) $4.10^5 \sin\alpha - 28.10^5 \sin\alpha =$ $-24.10^5 \sin\alpha = M$.

Uit

$$M = \frac{dI}{dt} = \theta\dot{\omega} \text{ volgt dan:}$$

$$128000\,\dot{\omega} = -24.10^5 \sin\alpha \ldots \tag{1}$$

Hierin is $\omega = \dot{\alpha}$. Voer ω als variable in i.p.v. t.:

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\alpha}\,\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\omega}{d\alpha} \cdot \omega\,.$$

In (1):

$$128000\frac{d\omega}{d\alpha} \cdot \omega = -\,24.10^5 \sin\alpha$$

$$2\omega d\omega = -\frac{75}{2}\sin\alpha\, d\alpha.$$

Bij $\alpha = 0$ is $\omega = 5$ (gegeven). Integratie geeft dus

$$\int_5^\omega 2\omega d\omega = \int_0^\alpha -\frac{75}{2}\sin\alpha\, d\alpha$$

$$\omega^2 - 25 = \frac{75}{2}\cos\alpha - \frac{75}{2}; \quad \boxed{\omega^2 = \frac{25}{2}(3\cos\alpha - 1)} \ldots (2)$$

Bij $\alpha = 60°$ vindt men:

$$\omega^2 = \frac{25}{4}; \quad \omega = \frac{5}{2}\,(\text{rad/sec}); \quad v = 100(\text{cm/sec}).$$

We berekenen nu de versnellingen.

Voor A: centripetale versnelling $= a_c = \dfrac{v^2}{r} = 250$

tangentiële versnelling $= a_t = \ddot{\alpha}r$; $\ddot{\alpha}$ = hoekversnelling

$= \dot{\omega} = -\dfrac{75}{4}\sin\alpha$, zie (1).

dus $a_t = -375\sqrt{3}$.

Voor B: $a_c' = 250$; $a_t' = -375\sqrt{3}$.

Hieruit volgt voor de krachten

in A: $K_c = 2500(\text{dn})$, $K_t = -3750\sqrt{3}(\text{dn})$

in B: $K_c' = 17500(\text{dn})$, $K_t' = -26250\sqrt{3}(\text{dn})$.

We ontbinden nu G, G′, L en R in componenten langs AB (opv. G_1, G_1', L_1 en R_1) en loodrecht op AB (opv. G_2, G_2', L_2 en R_2). Door K_c, K_c', K_t en K_t' te beschouwen als *resultanten* van de aanwezige krachten, vindt men:

uit $K_c = G_1 - R_1$: $R_1 = 2500(\text{dn})$
uit $K_t = R_2 - G_2$: $R_2 = 8750\sqrt{3}(\text{dn})$
uit $K_c' = L_1 - G_1'$: $L_1 = 52500(\text{dn})$
uit $K_t' = L_2 - G_2$: $L_2 = 8750\sqrt{3}(\text{dn})$.

Voor Q vindt men eindelijk (reactie van de as op de staaf):
$Q_1 = 52500 + 2500 = 55000(\text{dn})$
$Q_2 = 2 \times 8750\sqrt{3} = 17500\sqrt{3}(\text{dn})$.

Wat vraag *b* betreft, hier is $M = 0$, zodat (1) overgaat in $\dot{\omega} = 0$. Daar de beweging nu eenparig is, zal $\overline{R} + \overline{G} = \overline{K}_c$ moeten zijn; voor $\overline{K}_c$ vindt men, daar $\omega = 5$ blijft: 10000 dn; dus $|K_c| = |G|$; hun hoek is 60°; derhalve is ook $|R| = 10^4$ dn en werkt $\overline{R}$ onder een hoek van 60° met $\overline{K}_c$; de gevraagde door A uitgeoefende kracht maakt dan een hoek van 120° met de staaf (naar beneden).

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA

XLI. *Middenevenredige transversalen.*

1. De hoogtelijn op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek is middenevenredig tussen de stukken waarin zij deze zijde verdeelt. Wij zullen meer algemeen in een willekeurige driehoek ABC een uit de top C naar een punt S van de basis AB getrokken lijn een m-transversaal noemen als $CS^2 = AS \cdot BS$ en wij vragen ons af of in elke driehoek zulke transversalen bestaan. Meten wij AS positief in de richting AB, terwijl BS in de richting BA wordt gemeten, dan is voor een m-transversaal blijkbaar nodig dat S tussen A en B ligt. Dat er driehoeken met een scheve tophoek bestaan met een m-transversaal is onmiddellijk duidelijk. Zijn A, S en B gegeven, $AS \neq BS$, dan is het voldoende C te kiezen op de cirkel $S(R)$, waarbij $R^2 = AS \cdot BS$. Anderzijds blijkt dadelijk dat geen m-transversaal mogelijk is als de opstaande zijden a en b beide groot zijn ten opzichte van c. Is $CS = x$, $AS = p_1$, $BS = p_2$ (fig. 1) dan is $x > b - p_1$

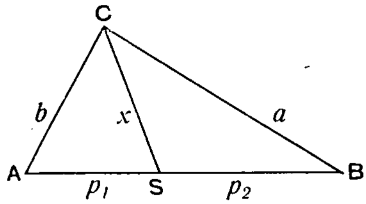


Fig. 1.

en $x > a - p_2$, dus $x > \frac{1}{2}(a + b - c)$; daar voorts $p_1 p_2 \leqq \frac{1}{4}c^2$ vindt men als noodzakelijke voorwaarde $a + b < 2c$. Uit het feit dat sommige driehoeken wel en andere geen m-transversaal hebben, mag men reeds besluiten dat het vraagstuk niet van de eerste graad is. Wij zien trouwens in de rechthoekige driehoek behalve de hoogtelijn nog een tweede m-transversaal, n.l. de zwaartelijn uit C.

2. Men heeft voor x de zogenaamde betrekking van Stewart

$$x^2 c = a^2 p_1 + b^2 p_2 - p_1 p_2 c \tag{1}$$

Uit $x^2 = p_1 p_2$ volgt

$$a^2 p_1 + b^2 p_2 = 2 p_1 p_2 c$$

waaruit met $p_1 + p_2 = c$ de stukken p_1 en p_2 kunnen worden berekend. Voor p_1 vindt men de vierkantsvergelijking

$$2cp_1^2 - (2c^2 + b^2 - a^2)p_1 + b^2c = 0 \qquad (2)$$

Kiest men de meer symmetrische onbekende $u = p_1 - p_2$ dan luidt de vergelijking

$$cu^2 + (a^2 - b^2)u + c(a^2 + b^2 - c^2) = 0 \qquad (3)$$

De driehoek ABC zal dus een m-transversaal uit C hebben als de discriminant D van (2) en (3) niet negatief is. Men heeft

$$\mathrm{D} = a^4 + b^4 + 4c^4 - 4b^2c^2 - 4c^2a^2 - 2a^2b^2 \qquad (4)$$

en herkent daarin (hier met de variabelen a^2, b^2 en $2c^2$) een uitdrukking zoals die in de formule voor het oppervlak van een driehoek voorkomt. De vorm is ontbindbaar:

$$D = -(a+b+c\sqrt{2})(-a+b+c\sqrt{2})(a-b+c\sqrt{2})(a+b-c\sqrt{2}). \qquad (5)$$

Daar a, b en c aan de driehoeksongelijkheden voldoen zijn de eerste drie factoren van (5) positief. De conclusie is: *in driehoek ABC kan men uit C twee, één of geen m-transversalen trekken al naar gelang*

$$a + b - c\sqrt{2}$$

kleiner dan, gelijk aan of groter dan nul is.

3. Als twee m-transversalen uit C bestaan dan heeft (2) twee reële wortels, p'_1 en p''_1. Het produkt van de wortels is $\frac{1}{2}b^2$. Zijn p'_2 en p''_2 de overeenkomstige waarden van p_2 dan is hun produkt uiteraard $\frac{1}{2}a^2$. Zijn CX′ en CX″ twee *isogonale* transversalen uit C (fig. 2),

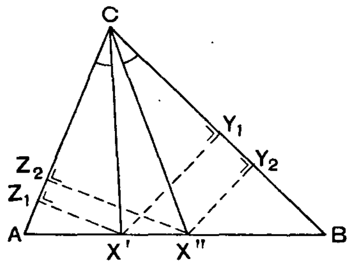


Fig. 2.

Y_1 en Y_2 de projecties van X′ en X″ op BC, Z_1 en Z_2 die op AC, $\angle$ ACX′ = $\angle$ BCX″ = ϕ_1, $\angle$ ACX″ = $\angle$ BCX′ = ϕ_2, dan is $Z_1X' = CX' \sin\phi_1$ en dus $AX' = CX' \dfrac{\sin\phi_1}{\sin\alpha}$ en evenzo $AX'' = CX'' \dfrac{\sin\phi_2}{\sin\alpha}$, $BX' = CX' \dfrac{\sin\phi_2}{\sin\beta}$, $BX'' = CX'' \dfrac{\sin\phi_1}{\sin\beta}$, waaruit volgt

$$a^2 \cdot AX' \cdot AX'' = b^2 \cdot BX' \cdot BX''$$

terwijl ook omgekeerd als aan deze betrekking is voldaan de rechten CX′ en CX″ isogonaal verwant zijn. Uit $p_1'p''_1 = \frac{1}{2}b^2$, $p'_2p''_2 = \frac{1}{2}a^2$ volgt echter

$$a^2p'_1p''_1 = b^2p'_2p''_2$$

zodat wij hebben: *als men uit C twee m-transversalen kan trekken, dan zijn deze isogonaal verwant.*

Een gevolg is nog: de enige m-transversaal die uit C getrokken kan worden als $c\sqrt{2} = a + b$ is, valt met de bissectrice samen.

4. Een driehoek ABC waarbij men uit C reële m-transversalen kan trekken, zullen wij een m-driehoek noemen. Uit de conditie $a + b \leqq c\sqrt{2}$ volgt: *als van een m-driehoek de hoekpunten A en B gegeven zijn dan ligt C op of binnen een ellips E, waarvan A en B de brandpunten zijn; de lange en de korte as van E zijn $c\sqrt{2}$ en c* (fig. 3).

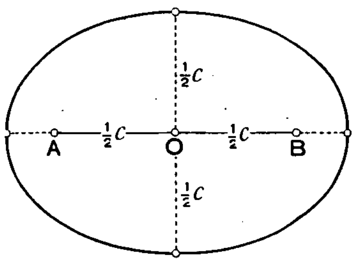


Fig. 3.

Neemt men de X-as langs AB en de oorsprong in het midden van AB dan is de vergelijking van E:

$$2x^2 + 4y^2 = c^2 \tag{6}$$

Is S een willekeurig tussen A en B gelegen punt (u, o) dan is S het uiteinde van een m-transversaal CS als C ligt op de bovengenoemde cirkel S(R), waarbij $R^2 = \frac{1}{4}c^2 - u^2$. De vergelijking van deze cirkel is

$$\mathrm{F}(u) \equiv x^2 + y^2 - 2ux + 2u^2 - \tfrac{1}{4}c^2 = 0 \tag{7}$$

De coördinaten van de snijpunten van twee consecutieve cirkels van deze verzameling voldoen aan $\mathrm{dF}/\mathrm{d}u = 0$, dus aan

$$x = 2u \tag{8}$$

Eliminatie van u uit (7) en (8) geeft vergelijking (6), waaruit volgt: *de ellips E is de omhullende van de cirkels S(R)*. De cirkel (7) raakt E twee maal en wel in de punten $x = 2u$, $y^2 = \frac{1}{4}c^2 - 2u^2$. Deze punten zijn reëel als $u \leqq \frac{1}{4}c\sqrt{2}$. De cirkels (7) voor $u^2 \leqq \frac{1}{8}c^2$ hebben dus E tot omhullende; voor $\frac{1}{8}c^2 < u^2 \leqq \frac{1}{4}c^2$ liggen zij binnen E (fig. 4).

5. Men kan zich afvragen wanneer een driehoek ABC met gegeven zijden a en b en veranderlijke tophoek γ een m-driehoek is. Men heeft

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, zodat de voorwaarde $2c^2 \geqq (a+b)^2$ overgaat in

$$\cos\gamma \leqq \frac{(a-b)^2}{4ab} \tag{9}$$

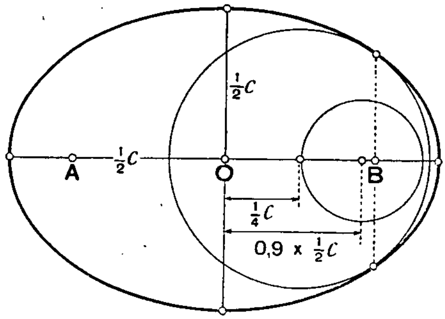


Fig. 4.

Daar het rechterlid niet-negatief is, hebben wij: *bij elke waarde van a en b is de driehoek een m-driehoek als γ stomp of recht is.* Dit volgt ook uit (3) omdat dan de bekende term van deze vergelijking negatief of nul is en de wortels dus reëel zijn. Als het rechterlid van (9) groter dan of gelijk aan 1 is voldoet elke hoek γ aan (9). De voorwaarde luidt

$$a^2 - 6ab + b^2 \geqq 0$$

of

$$[a - (3 + 2\sqrt{2})b][a - (3 - 2\sqrt{2})b] \geqq 0.$$

Hieruit volgt: *is de verhouding van de opstaande zijden van driehoek* ABC *groter dan of gelijk aan* $v_1 = 3 + 2\sqrt{2}$ (of, wat op hetzelfde neer komt, kleiner dan of gelijk aan $v_2 = 3 - 2\sqrt{2}$), *dan is* ABC *een m-driehoek voor elke tophoek.* Ligt de verhouding *tussen* v_1 en v_2 dan wordt door (9) een minimum waarde voor de tophoek bepaald. Is $a = b$ dan moet γ minstens recht zijn. De gelijkzijdige driehoek is geen m-driehoek.

6. Kan een driehoek ten aanzien van meer dan één van zijn hoekpunten een m-driehoek zijn? Wij beelden de driehoek waarvoor $a + b + c = 1$ is af op het punt P binnen een gelijkzijdige driehoek $P_1P_2P_3$, waarvan de hoogtelijn 1 is en wel zo, dat de afstanden van P tot P_2P_3, P_3P_1 en P_1P_2 opvolgend a, b en c zijn (fig. 5). Zijn Q_1, Q_2 en Q_3 de middens van de beelddriehoek dan liggen op grond van de ongelijkheden $a + b - c > 0$ enz. alle punten P binnen driehoek $Q_1Q_2Q_3$. In de figuur is de lijn l_3 met vergelijking $a + b - c\sqrt{2} = 0$ getrokken; zij is evenwijdig met P_1P_2 en verdeelt P_1P_3 in de verhouding $1 : \sqrt{2}$; l_3 ligt hoger dan het zwaartepunt van $P_1P_2P_3$ omdat

$\sqrt{2} < 2$. Opdat uit C een m-transversaal mogelijk zij, moet het beeldpunt P op of boven l_3 liggen, dus in het door l_3 van driehoek $Q_1Q_2Q_3$ afgesneden trapezium. Trekt men nog de analoge lijnen l_1 en l_2 dan leert een blik op de figuur: *er zijn geen driehoeken, die ten aanzien*

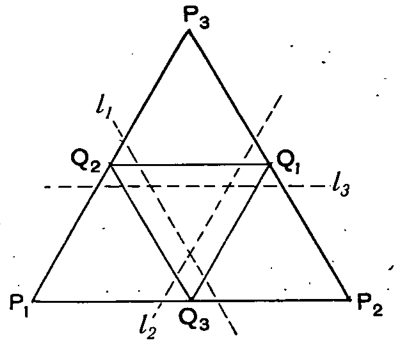


Fig. 5.

van elk hoekpunt een m-driehoek zijn. Maar tevens: *er zijn driehoeken, die ten aanzien van twee hoekpunten een m-driehoek zijn*; hun beeldpunten liggen binnen drie in de figuur ontstane parallelogrammen. Eén daarvan is de figuur ingesloten door de rechten Q_3Q_1, Q_3Q_2, l_1 en l_2. De met l_3 evenwijdige diagonaal daarvan heeft de vergelijking $a + b = (5 + 4\sqrt{2})c$. Wij hebben dus: als in ABC geldt $a + b \geqq (5 + 4\sqrt{2})c$ dan heeft de driehoek twee m-transversalen uit A en twee uit B. De voorwaarde is voldoende, maar niet noodzakelijk.

7. In onze definitie van een m-transversaal werden de stukken AS en BS in verschillende richtingen positief gemeten. Men kan ook m'-transversalen beschouwen, die voldoen aan $CS^2 = AS \cdot BS$, waarbij AS en BS in dezelfde zin op AB worden gemeten; S moet dan buiten AB liggen (fig. 6). Dit vraagstuk is veel eenvoudiger, omdat

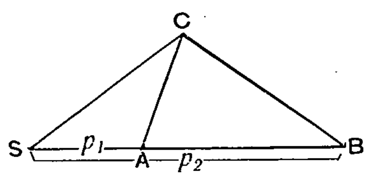


Fig. 6.

de vergelijking nu lineair wordt. Immers met dezelfde notatie als boven moet nu gelden $x^2 = - p_1p_2$, zodat (1) luidt

$$a^2p_1 + b^2p_2 = 0$$

wat samen met $p_1 + p_2 = c$ oplevert als $a > b$ is: $p_1 = \frac{-b^2c}{a^2 - b^2}$, $p_2 = \frac{a^2c}{a^2 - b^2}$, $x = \frac{abc}{a^2 - b^2}$. Is de driehoek niet-gelijkbenig dan gaat uit de top steeds één m'-transversaal; S ligt op het verlengde van AB naar de kant van de kleinste opstaande zijde. Daar $p_1 : p_2 = -b^2 : a^2$ is CS t.o.v. CA en CB harmonisch toegevoegd aan de *symmediaan* uit C.

BOEKBESPREKING

L. Heffter, *Grundlagen und analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nichteuklidischen Geometrie.* 3. wesentlich überarbeitete Auflage. 192 Seiten mit 66 Figuren. DIN C 5. 1958. Ln. DM 16.80. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft — Stuttgart.

In dit boekje, dat een bewerking of misschien beter gezegd een verkorte uitgave is van een in 1905 van dezelfde auteur verschenen boek: „Lehrbuch der analytischen Geometrie" wordt de meetkunde in drie verschillende stadia opgebouwd. Een eerste deel (50 pag.) handelt over meetkundige begrippen, hierbij komen incidentierelaties, ordeningsaxioma's etc. aan de orde.

Dan wordt in de volgende 40 pag. systematisch de projectieve meetkunde (van dimensie 1, 2 en 3) behandeld. In afdeling C komt dan logisch de volgende stap met affine meetkunde. Hierna wordt als een poolverwantschap in het oneigenlijke vlak de orthogonaliteit ingevoerd, zoals de „gewone" Euclidische meetkunde volgt.

Van uit de projectieve meetkunde wordt ook de niet-Euclidische meetkunde geïntroduceerd met behulp van bijzondere polariteiten, die in de gehele ruimte gegeven zijn.

Dit gehele programma (het klassieke „Erlanger" programma van F. Klein) wordt door de nu 96 jaar oude auteur duidelijk uitgevoerd. Een bezwaar is bij deze opbouw, dat het verband tussen meetkunde en het ten grondslag gelegde lichaam niet duidelijk blijkt, omdat de ordeningsaxioma's (tot en met de snede van Dedekind) aan het begin van de opbouw deze weg afsnijden. Ook zou men in onze tijd de vruchten willen plukken van de lineaire algebra, waardoor de, meer door natuurkundige dan door wiskundige overwegingen gegeven beperking tot de dimensies 1, 2, en 3 niet alleen onnodig, maar zelfs ongewenst wordt.

F. van der Blij

Dr. F. Loonstra, *Inleiding tot de algebra.* Uitgeversmij. P. Noordhoff N.V., Groningen 1958. 238 blz. *f* 17,50.

Zoals de schrijver in het voorwoord opmerkt, is het noodzakelijk, gezien de ontwikkeling van de algebra gedurende de laatste vijftig jaren, dat elke student in de wiskunde op de hoogte wordt gebracht met de werkwijzen van de moderne algebra.

Degenen, die zich voorbereiden voor het examen wiskunde A, zullen het verschijnen van dit boek met vreugde begroeten. Maar ook de ouderen die zich op de hoogte willen stellen van deze ontwikkeling, zullen dit werk gaarne bezitten.

Na een behandeling van de eigenschappen van integriteitsgebieden volgen in enkele korte stoten de hoofdstelling van de rekenkunde, de indicator van Euler, congruenties en de restklassen modulo m, waarna een opsomming van de benodigde begrippen en eigenschappen uit de leer van de verzamelingen. Daarna komen de rationale, reële en complexe getallen aan de beurt met als slot een oplossingsmethode voor de vergelijking van de derde resp. vierde graad.

Hoofdstuk III leidt dan de theorie van de groepen in, Hoofdstuk IV: Ringen en Lichamen. Het boek besluit met de groepentheorie van Galois en enkele transcendente toepassingen.

Velen zullen prof. Loonstra dankbaar zijn, dat hij bereid gevonden is, dit boek te doen verschijnen.

W. A. M. Burgers

B. Coster, Dr. A. van Dop en Dr. H. Streefkerk, *Nieuwe Algebra Vraagstukken*. J. B. Wolters, Groningen. 101 bladz. prijs ing. *f* 2,10, geb. *f* 2,75.

Het driemanschap vermeldt in het voorbericht van dit overzichtelijke en instructieve boekje, dat deze vraagstukken in de plaats komen van hun Algebra-Vraagstukken en, in aansluiting op het Wimecos-programma, bestemd zijn voor de 4e en 5e klasse van de B-afdeling van een h.b.s. en voor de 5e en 6e klasse van de β-afdeling van een gymnasium. Het aanhangsel, omvattend een 30-tal bladz. met veel repetitiemateriaal van de 3e klasse van de h.b.s. en van de 4e klasse van het gymnasium, zal in de volgende herdrukken komen te vervallen: of dit verstandig is, waag ik te betwijfelen.

De schrijvers houden zich verre van toepassingen op natuurkundig en mechanisch terrein (waar blijf je dan?). De exponentiële en logaritmische functies komen m.i. goed tot hun recht; om niet al te veel hooi op hun vork te nemen, blijft de differentiatie van deze functies achterwege; misschien . . ., waarbij dan b.v. als uitgangspunt zou kunnen dienen de vraag: het differentiequotiënt te bepalen van $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$ als $\Delta x = \frac{1}{n}$ wordt gesteld. Mag ik zo vrij zijn ook nog de aandacht te vestigen op vragen als: *Schat* de grootte van tg 46° — tg 45°, tg 61° — tg 60°, sin 61° — sin 60° als 1° = 0,0175 radialen; controleer je antwoord m.b.v. een tafel en licht de afwijking van de 4e decimaal toe.

Resumerend: het boekje ligt mij zeer.

Okken

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen: *Algebra voor M.M.S.* P. Noordhoff N.V., Groningen, 1959, 118 blz., *f* 3,75.

De leerlingen van de M.M.S. staan over het algemeen niet als bollebozen in de wiskunde te boek. Dit keurig verzorgde boek, speciaal voor dit type scholen geschreven, houdt hiermee goed rekening. Het behandelt op duidelijke, eenvoudige wijze de algebra, ongeveer in een omvang als thans in klas 1 en 2 van de H.B.S. staat voorgeschreven. De moeilijkheid was, volgens het voorbericht, dat de omvang van de leerstof van school tot school verschilt. Inderdaad zal menigeen wel eens iets missen, of iets aantreffen, wat hem overbodig schijnt. Zo zou ik behalve de grafiek van de rechte lijn, ook die van $ax^2 + bx + c$ laten tekenen, om dan uit de grafiek enkele eenvoudige bijzonderheden te laten aflezen. Zo ook wat grafieken van gemiddelde levensduur, prijzenverloop e.d. Of horen die bij een ander schoolvak thuis?

C. J. Alders, *Goniometrie voor M.O. en V.H.O.* P. Noordhoff N.V., Groningen, 1959, 68 blz., *f* 1,90.

Vergelijking met het boek „Driehoeksmeting" van dezelfde schrijver doet zien, dat dit boek is aan gepast aan het nieuwe programma. Het begint met de trigonometrische toepassingen voor 3 H.B.S. en 4 Gymn. en behandelt daarna de goniometrie voor H.B.S.-B en Gymn.-β. Zoals we van de schrijver gewend zijn: beknopt en zakelijk. Behalve de voorgeschreven theorie en 590 vraagstukken, ziet de schrijver in deze 68 pag. zelfs nog kans om enkele onderwerpen buiten de examenstof te behandelen. (tangens-regel, cyclometrische functies, probleem van Snellius.) Deze zijn met een sterretje aangegeven.

Een zeer bruikbaar boek.

Drs. D. K. F. Heyt, *Nieuwe School-Algebra van Wijdenes en Beth.* Uitgave B, volgens het programma 1958. Tweede deel, 21e druk. P. Noordhoff N.V., 1959, 116 blz., ing. *f* 3,60; geb. *f* 4,30.

Van de bekende Nieuwe Schoolalgebra is deel II in tweeën gesplitst: IIB voor de tweede klas en IIIB voor de derde klas van de H.B.S. In de titel van deel IIB wordt drs. Heyt als de bewerker aangeduid, volgens het voorbericht zijn echter Wijdenes en Heyt samen de verantwoordelijke personen. Het boek is vrijwel geheel in overeenstemming gebracht met het nieuwe programma. Het hoofdstuk wortels behandelt, net als in vorige drukken, alleen vierkantswortels; de andere komen in de derde klas. Van de wortel uit $a \pm b \sqrt{c}$ hebben de schrijvers nog geen afscheid kunnen nemen. Ze zijn tegen het weglaten van de y-as bij grafieken, daar zij menen, dat deze as tot het wezen van de zaak behoort.

Overigens: een van ouds bekend goed leerboek in een enigszins nieuwe vorm.

R. Troelstra

C. J. Alders, *Inleiding tot de Analytische Meetkunde.* Tweede druk. 79 blz., ing. *f* 2,50. Uitg. P. Noordhoff N.V., Groningen-Djakarta 1959.

Met de hem eigen bondigheid heeft de schrijver de tweede druk van dit werkje aan het nieuwe programma aangepast. Hij ging er zelfs nog even boven uit, het boekje bevat hoofdstukken over de stereometrische voortbrenging der kegelsneden, over de algemene vergelijking van de tweede graad en over bundels kegelsneden.

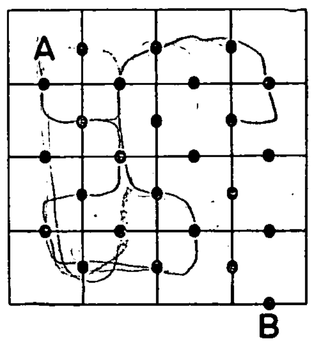
De behandeling der stof is over het algemeen degelijk en helder, voor voldoend oefeningsmateriaal is gezorgd door het opnemen van 420 vraagstukken. De afleiding van de raaklijnformules door differentiëren (van een tweewaardige impliciete functie!) maakt nodig, dat men op aansluiting bij het algebraonderwijs bedacht is. Het schijnt, dat de schrijver er op rekent, dat men daar ook de complexe getallen behandelt, althans hij werkt vrijelijk met imaginaire figuren en veronderstelt daarbij kennelijk het imaginaire getal bekend...

Hier en daar zou men de schrijver wat wiskundig fijner willen hebben. Zo is b.v. het gebruik van het vectorbegrip om er de plaatsbepaling op de rechte lijn op te baseren geheel overbodig, terwijl het de betreffende paragraaf (2) nodeloos moeilijk te begrijpen maakt.

Haren (Gron.) J. Koksma

RECREATIE

10. In bijgaande figuur is een gevangenis getekend met 16 cellen. In elke cel zit een gevangene. Tussen elk paar aangrenzende cellen is een deur, in de figuur door een stip aangegeven. Bij B is de uitgang. De gevangene in cel A krijgt bericht, dat hij naar huis mag. Hij vraagt van zijn 15 medegevangenen afscheid te mogen nemen. Dit wordt toegestaan onder voorwaarde, dat hij de cel van elk van hen slechts één keer mag binnengaan om dan van de bewoner afscheid te nemen en de cel daarna weer te verlaten. Hij moet in A beginnen en ten slotte bij B de gevangenis verlaten. Welke route moet hij nemen?



11. Verdeel een willekeurige driehoek in een minimaal aantal gelijkbenige driehoeken.

Zijn er voor elke n driehoeken, die verdeeld kunnen worden in n gelijkbenige driehoeken?

12. Maak van zes lucifers vier congruente gelijkzijdige driehoeken. Breken is verboden.

OPLOSSINGEN

(Zie voor de opgaven het vorige nummer)

7. De overgang van tg $7x$ op $\dfrac{\text{tg } 8x - \text{tg } x}{1 + \text{tg } x \text{ tg } 8x}$ is niet zonder meer geoorloofd. Doordat er waarden van x zijn, waarvoor tg $7x$ wel en tg $8x$ geen betekenis heeft, kunnen hierbij wortels worden verduisterd.

9. De driehoeken, ABC en A'B'C', moeten in elk geval gelijkvormig zijn. Kies nu b.v. $a = 4$, $b = 6$, $c = 9$ en $a' = 6$, $b' = 9$, $c' = \frac{27}{2}$. Dan is aan de vraag voldaan. Dit is dus alleen maar mogelijk, als de driehoeken de eigenschap hebben, dat een van de zijden middelevenredig is tussen de andere twee.

ONDERZOEK NAAR DE EFFICIENCY VAN LEERLINGENPROEVEN

De afdeling didactiek der natuurkunde van het instituut voor leraarsopleiding, afdeling van het pedagogisch instituut der rijksuniversiteit te Utrecht, wil een onderzoek instellen naar de doeltreffendheid van leerlingenproeven voor de natuurkundige vorming der leerlingen.

Voor het verzamelen van een voldoend aantal gegevens doen ondergetekenden een beroep op collega's die in de 2e of 3e klasse van H.B.S. of lyceum *natuurkunde* doceren. Om prestaties van leerlingen te kunnen vergelijken zoeken wij contact zowel met collega's die wel leerlingenproeven als onderdeel van hun onderwijs hebben, als met hen die geen practicum hebben.

Van de collega's die hun medewerking verlenen, zal gevraagd worden af en toe aan hun leerlingen over in de klas behandelde onderwerpen opgaven voor te leggen, die door ons opgesteld zijn. De leraar mag deze opgaven als zijn eigen proefwerken gebruiken; in dat geval waardeert hij ze eerst zelf en stuurt ze ons pas toe nadat ze als proefwerk volledig hun dienst gedaan hebben.

Indien de leraar de opgaven niet als zijn proefwerk beschouwt, heeft hij niet anders te doen dan het gemaakte werk naar ons op te sturen.

Voorts is de leraar vrij de door ons gestelde opgaven niet aan de leerlingen voor te leggen, indien hij meent dat de opgaven niet passen in zijn behandelingswijze.

Wij menen dat een op deze wijze ingericht onderzoek zeer weinig tijd van de medewerkende leraar of diens leerlingen in beslag zal nemen. De leraar kan zijn eigen lesmethode blijven volgen.

De resultaten van het onderzoek, dat wel een paar jaar zal vergen, worden alleen statistisch vermeld, zonder naam van school of docent.

Collega's, die hun medewerking aan dit onderzoek willen verlenen, verzoeken wij zich op te geven aan het Instituut voor Leraarsopleiding, Lucas Bolwerk 11, Utrecht, tel. 030/21741, ter attentie van Dr. R. L. Krans.

R. L. Krans, Izaak Evertslaan 10, Arnhem.
J. Ph. Steller, Kamerlingh Onnesstraat 8, Amersfoort.

AVONDCOLLEGES VOOR NATUURKUNDELERAREN TE UTRECHT.

Het ligt in de bedoeling in de komende cursus wederom avondcolleges te geven voor natuurkundeleraren. Deze colleges worden georganiseerd door Velines in samenwerking met hoogleraren van de rijksuniversiteit te Utrecht.

Het onderwerp zal zijn: „De fysica van de vaste stof". Belangstellenden worden verzocht zich aan te melden bij: Drs H. J. Stammer, voorzitter van de natuurkundesectie van Velines, Hanenburglaan 38 te 's-Gravenhage.

TOELICHTING OP HET NIEUWE LEERPLAN VOOR WISKUNDE

door

Dr. H. A. GRIBNAU en Dr. D. N. VAN DER NEUT

Het nieuwe leerplan voor wiskunde, vastgesteld bij K.B. van 30 augustus 1958, Stb. 431, is onderwerp van bespreking geweest op een zestal bijeenkomsten, die in februari en maart 1959 resp. te Groningen, Eindhoven, Arnhem, 's-Gravenhage, Amsterdam en Bergen op Zoom door de inspectie van het gymnasiaal en middelbaar onderwijs met de wiskundeleraren van de scholen voor v.h.m.o. gehouden zijn. De redactie van Euclides heeft ons, die op deze bijeenkomsten als referenten zijn opgetreden, verzocht een overzicht te geven van de punten, die op deze bijeenkomsten ter sprake zijn gekomen.

Het genoemde K.B., dat het leerplan voor wiskunde in grote lijnen vastlegt, geeft aanleiding tot het stellen van allerlei vragen, die betrekking hebben op de interpretatie van het leerplan. Ter nadere orientatie kan hier verwezen worden naar enige in Euclides verschenen publikaties. Allereerst dient in dit verband gewezen te worden op het rapport van de leerplancommissie van Wimecos en de discussies hierover op de vergaderingen van Wimecos en Liwenagel (Eucl. 30, IV) en de „250 opgaven in de geest van het ontwerpleerplan" van dezelfde commissie (Eucl., 32, IV). Verder kunnen, wat het wiskunde-onderwijs van de A- en de B-afdelingen van de gymnasia en de gymnasiale afdelingen der lycea betreft, ook de twee rapporten voorkomende in Eucl., 26, 2 en de discussie over deze rapporten in de vergadering van Liwenagel (Eucl., 26, 4) genoemd worden. In het algemeen dient hierbij wel te worden opgemerkt, dat, van hoe grote betekenis deze publikaties, en in het bijzonder die van de leerplancommissie van Wimecos, ook geacht moeten worden, de inhoud toch niet zonder meer als norm voor de interpretatie van het K.B. mag worden beschouwd. Want ten eerste wijkt het K.B. op bepaalde punten af van datgene wat er in rapporten en discussies aan is voorafgegaan, en ten tweede maakt de genoemde leerplancommissie zelf de opmerking, dat zij in de tweede publikatie, namelijk de 250 opgaven, heeft gemeend haar rapport op een bepaald punt „niet naar de letter, maar naar de geest te moeten interpreteren" (Eucl., 32, IV, p. 100).

Het K.B. brengt een aantal wijzigingen aan in het programma voor de wiskunde. Hierbij zullen de eindexamenprogramma's worden aangepast. In deze ontwikkeling ligt voor de scholen een element van experimentele aard. Immers wordt op bepaalde punten het traditionele pad verlaten; op deze punten mag het onderwijs nieuwe wegen zoeken. De achtergrond hiervan is het streven naar vernieuwing van het wiskunde-onderwijs. In dit verband dient in het bijzonder ook aandacht geschonken te worden aan de eindexamenopgaven. Mede door deze opgaven kan de ontwikkeling van het onderwijs een bepaalde richting uitgaan, waardoor dit een al te eenzijdig karakter kan krijgen. De leerplancommissie wijst er terecht op, dat, hoewel niet gezegd mag worden, dat alle opgaven met een „origineel" karakter op het eindexamen uitgesloten moeten worden, herhaald optreden van een „nieuwe vondst" in deze opgaven gemakkelijk tot een ongewenste uitbreiding van de leerstof kan leiden (Eucl., 32, IV, p. 98). Op deze wijze is het mogelijk dat voor bepaalde, in het geheel van de leerstof toch minder belangrijke, onderwerpen een onevenredig deel van de aandacht van leraar en leerlingen wordt opgeëist. Nu kan er een moment komen waarop de verdere behandeling van een dergelijk onderwerp moet worden afgesneden om tijd te winnen voor de behandeling van nieuwe onderwerpen.

Het K.B. noemt als nieuw onderwerp voor gymnasium-β en h.b.s.-B de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening. De behandeling hiervan is slechts mogelijk indien daarvoor ruimte wordt gemaakt. Met het oog hierop verdwijnt de trigonometrie als leerstof voor de hogere klassen. Wat de h.b.s. betreft kan in dit verband ook gewezen worden op de invoering van de analytische meetkunde en de gelijktijdige afschaffing van de beschrijvende meetkunde.

In dit laatstgenoemde manifesteert zich nog een andere tendentie: het zoveel mogelijk gelijk maken van de wiskundeprogramma's van gymnasium-β en h.b.s.-B. Als laatste doel kan hierbij gesteld worden: een eindexamen voor beide schooltypen met dezelfde opgaven voor wiskunde. Aangezien men hierbij de wiskunde niet anders kan beschouwen dan als deel van het examen als geheel, is de divergentie, die er op verscheidene punten tussen de eindexamens van deze schooltypen bestaat — aantal onderdelen van de wiskunde, vrijstellingen en normen bij eindexamen h.b.s., onderscheid in de regeling van de andere exacte vakken — er oorzaak van dat het genoemde doel niet op korte termijn kan worden bereikt. Dat thans de programma's voor wiskunde gelijk zijn, is echter wel een belangrijke eerste stap in deze richting.

Een volgend punt van algemene aard is de vraag tot hoe ver de verschillende onderwerpen, die in het K.B. worden genoemd, behandeld moeten worden. Op hetzelfde niveau ligt de vraag of bepaalde onderwerpen, die niet met zoveel woorden in het K.B. genoemd worden, maar die wel tot de traditionele leerstof behoorden, nog wel aan de orde moeten komen.

In het algemeen kan hierop geantwoord worden dat men bij de interpretatie van het K.B. niet te „zuinig" te werk moet gaan. Dit moge met de volgende voorbeelden worden toegelicht.

1. In het K.B. wordt bij de meetkunde van de lagere klassen niet gesproken over het onderwerp „eigenschappen van lijnstukken in de cirkel", evenmin over de „macht van een punt ten opzichte van een cirkel" en over de „machtlijn van twee cirkels". De conclusie, dat deze onderwerpen dus niet meer tot de leerstof behoren zou echter onjuist zijn, aangezien de behandeling daarvan berust op de combinatie van twee wel genoemde onderwerpen, namelijk „gelijkvormigheid" en „verband tussen hoeken en bogen".

2. In het K.B. worden zowel bij de algebra als bij de goniometrie een aantal functies genoemd. De conclusie dat de behandeling van de functies en hun grafieken beperkt dient te worden tot de hier bedoelden en dat eenvoudige combinaties van deze functies, zoals $\sqrt{ax + b}$, ${}^{a}\log\,(px^2 + qx + r)$, $\dfrac{1}{1 - \cos x}$ niet aan de orde zouden kunnen komen, is onjuist.

Er dient gewaakt te worden tegen verschraling van het wiskundeonderwijs door een al te schriele interpretatie van het in het K.B. vastgestelde leerplan. Dit geeft immers slechts de grote lijnen. Er zijn allerlei onderwerpen, die niet met zoveel woorden zijn genoemd, maar die toch aan de orde kunnen komen teneinde het wiskundeonderwijs tot een zinvol geheel te maken. Wanneer bijvoorbeeld bij het programma voor algebra „rekenkundige en meetkundige reeksen" genoemd worden, en in dit verband het interpoleren in deze reeksen niet wordt vermeld, wil dit niet zeggen, dat dit interpoleren niet behoeft te worden behandeld, zelfs al wordt het in eindexamenopgaven niet gevraagd (zie circulaire van de inspectie d.d. 1 juli 1959).

Vragen van methodisch-didactische aard worden door het K.B.

niet beslist. Terwijl, om een voorbeeld te noemen, in het rapport van de leerplancommissie gezegd wordt, dat „de meetkundecursus met een intuïtieve inleiding dient aan te vangen" (Eucl., 30, IV, p. 154), spreekt het K.B. slechts van „inleiding". Daarmede is ten aanzien van het karakter van deze inleiding niets voorgeschreven, wat echter zeer zeker niet inhoudt, dat op dit punt alles bruikbaar of zelfs goed zou zijn; wel betekent dit dat aan de scholen op dit punt vrijheid van methode is gelaten.

Vrijheid bestaat er ook op het punt van de verdeling van de beschikbare uren over de verschillende onderdelen van de wiskunde. Hier dient gehandeld te worden naar bevind van zaken; de vraag hoeveel lesuren besteed kunnen worden aan bepaalde nieuwe onderwerpen kan slechts op grond van de nog te vormen praktijk beantwoord worden. Wel kan hierbij worden gezegd, dat het in verband hiermede in het algemeen als de meest gewenste situatie moet worden beschouwd, dat alle wiskundelessen in een klas aan één docent worden opgedragen.

De hier en daar gesuggereerde opvatting dat het K.B. o.a. zou bedoelen de betekenis van het vraagstuk voor het wiskunde-onderwijs te verkleinen — „geen techniek, maar inzicht" — dient als onjuist te worden verworpen.

Hoewel steeds gewaakt moet worden tegen ongewenste vraagstukkendressuur mag nooit uit het oog worden verloren dat vele leerlingen eerst door het maken van vraagstukken inzicht verkrijgen in de betekenis en de samenhang der begrippen. Er is naar onze mening reden in verband hiermede de vraag te stellen of de leerplancommissie ten aanzien van de algebra, zoals deze in de eerste klasse aan de orde dient te komen, niet een al te sterke reductie heeft toegepast (Eucl., 30, IV, p. 166, punten 2 en 3). Onzes inziens moet het van belang worden geacht, dat deze leerlingen merkwaardige produkten van de vorm $(a - b - c + d)(a + b + c + d)$ kunnen herleiden, en dat zij de vormen $a^3 - b^3$, $a^3 + b^3$ en $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ leren ontbinden. $-a^2b + a^2b^2$

Behalve de in het voorgaande genoemde punten zijn ons in de discussies nog de volgende vragen gesteld.

Algebra.

Vraag: Wat is bedoeld met het in het K.B. genoemde onderwerp: „de begrippen benadering, absolute en relatieve fout"?

Antwoord: Behandeling van deze begrippen met enkele eenvoudige voorbeelden en toepassingen.

Vraag: Wat is bedoeld met „het getalbegrip" in keuze-onderwerp b2 voor gymnasium-α?

Antwoord: Behandeling van de ontwikkeling en de uitbreidingen van het getalbegrip in samenhang met de uitbreidingen van de algebraïsche bewerkingen: rij der natuurlijke getallen, nul, negatieve gehele getallen, breuken, onmeetbare getallen, eventueel complexe getallen.

Vraag: Wanneer dienen logaritmische ongelijkheden behandeld te worden?

Antwoord: Niet eerder dan in klas 5 gymnasium-β resp. klas 4 h.b.s.-B.

Vraag: Behoren de gebruikelijke vraagstukken, die betrekking hebben op de symmetrische functies van de wortels ener vierkantsvergelijking, op het opstellen van nieuwe vierkantsvergelijkingen, en op twee vierkantsvergelijkingen die een wortel gemeen hebben, nog tot de leerstof?

Antwoord: Deze onderwerpen behoren tot de leerstof. Wel moet worden opgemerkt dat de behandeling beperkt kan worden tot niet-gecompliceerde vraagstukken. Het kan niet de bedoeling zijn bij een vierkantsvergelijking wel met $x_1 + x_2$ en x_1x_2 te werken, maar b.v $x_1^2 + x_2^2$ en $x_1^3 + x_2^3$ niet te behandelen Zo is ook het opstellen van een vierkantsvergelijking, waarvan de wortels een eenvoudig verband hebben met die van een gegeven vierkantsvergelijking voor de leerlingen een goede oefening

„Twee vierkantsvergelijkingen, die een wortel gemeen hebben" behoort tot de onderwerpen, waarover op de schriftelijke eindexamens geen opgaven gesteld zullen worden (circ. van de inspectie d.d. 7 oktober 1957); dit wil echter niet zeggen dat dit onderwerp niet meer tot de leerstof zou behoren. Hierbij speelt de vraag of er tijd voor beschikbaar is, een belangrijke rol. De ondervinding zal hier moeten leiden tot het nemen van beslissingen, die van school tot school, en aan dezelfde school zelfs van jaar tot jaar kunnen verschillen.

Goniometrie.

Vraag: Is de trigonometrie geheel vervallen?

Antwoord: Neen, de stof is beperkt en overgebracht naar de onderbouw, waar zij een plaats heeft gekregen als onderdeel van de meetkunde.

Vraag: Behoren de functies $\log \sin x$ enz. tot de leerstof?

Antwoord: Ja, stellig zolang deze functies in de tafels aan de orde komen.

Vraag: Kunnen grafische voorstellingen van meer samengestelde goniometrische functies, b.v. $\frac{3 \sin x}{2 + \sin x}$ aan de orde komen?

Antwoord: Ja, als vraagstukken ter oefening.

Differentiaal- en integraalrekening.

Vraag: Tot hoe ver dient de differentiaalrekening behandeld te worden?

Antwoord: Aan de orde moeten komen:

a. het begrip differentiaalquotiënt;

b. het differentiëren van de som, het verschil, het produkt en het quotiënt van functies;

c. het differentiëren van samengestelde functies;

d. het differentiëren van gehele en gebroken rationale functies, wortelfuncties, goniometrische functies;

e. het bepalen van extreme waarden, mede met gebruikmaking van de tweede afgeleide.

Vraag: Tot hoe ver dient de integraalrekening behandeld te worden?

Antwoord: Aan de orde moeten komen:

a. het begrip bepaalde integraal als limiet van een som;

b. het integreren van $(ax + b)^m$ (m rationaal en $\neq -1$), $p \sin (ax + b)$, $p \cos (ax + b)$ en sommen en verschillen van deze functies;

c. oppervlakte- en inhoudsberekeningen.

Vraag: Moet het begrip „onbepaalde integraal" behandeld worden?

Antwoord: Dit is in de eerste plaats een kwestie van methode. Het is dus niet voorgeschreven, maar het ligt in het algemeen wel voor de hand aan dit begrip aandacht te schenken.

Vraag: Is het de bedoeling dat de integraalrekening in de stereometrie bij de inhoudsbepalingen wordt toegepast?

Antwoord: Dit verdient inderdaad aanbeveling; het is van belang voor het inzicht in de samenhang van de wiskunde dat de leerlingen leren het ene deel van de wiskunde in het andere toe te passen.

Vraag: Behoort het tot de taak van de wiskundeleraar de in het K.B. genoemde toepassingen van de differentiaal- en integraalrekening op de natuurkunde en de mechanica te behandelen?

Antwoord: In het algemeen kan worden gezegd dat op dit punt aan elke school door overleg tussen de betreffende leraren een regeling tot stand dient te komen. Het is gewenst dat de behandeling van een onderwerp in het ene vak en de toepassing ervan in een ander vak zoveel mogelijk een homogeen karakter zullen hebben.

Wat de toepassingen van de differentiaal- en de integraalrekening op het gebied van de natuurkunde en de mechanica betreft kan nog gewezen worden op de mededeling in de circulaire van de inspectie d.d. 1 juli 1959, dat deze niet bij het eindexamen wiskunde zullen worden gevraagd.

Planimetrie.

Vraag: Behoort de berekening van de merkwaardige lijnen van een driehoek nog tot de leerstof?

Antwoord: Ja, als toepassing van berekeningen in de driehoek, ook met gebruikmaking van goniometrie, eventueel ook van de tafels. Op het kennen van formules voor de lengten der merkwaardige lijnen behoeft echter geen nadruk te worden gelegd. op 2 man.

Vraag: In het K.B. worden de aangeschreven cirkels van een driehoek en de raaklijnenvierhoek niet genoemd, zulks in tegenstelling met de om- en de ingeschreven cirkel van een driehoek en de koordenvierhoek. Betekent dit dat behandeling van eerstgenoemde onderwerpen ongewenst is?

Antwoord: Naar onze mening heeft behandeling van deze onderwerpen nog steeds betekenis, indien de daartoe nodige tijd beschikbaar is.

Vraag: Moet het construeren op de basis van een algebraïsche analyse behandeld worden?

Antwoord: De algebraïsche analyse is belangrijk als toepassing van de algebra op de meetkunde; wel kan men zich op dit punt beperken tot behandeling van eenvoudige gevallen.

Vraag: Kunnen bij het onderwerp „regelmatige veelhoeken" de formules voor de zijden achterwege blijven?

Antwoord: Het is niet nodig dat de leerlingen de formules voor de zijden van de verschillende regelmatige veelhoeken van buiten kennen. Wel verdient een goniometrische behandeling van dit onderwerp aanbeveling, mede met het oog op de afleiding van de formules voor de omtrek en het oppervlak van de cirkel.

Stereometrie.

Vraag: Wat is bedoeld met „de deductieve denkwijze, axioma's en grondbegrippen"?

Antwoord: Bij de behandeling van de planimetrie zal in het algemeen eerst langzamerhand bij de leerlingen enig inzicht worden gewekt in de samenhang van begrippen en stellingen. Veelal zal het begrip „axioma" nauwelijks aan de orde komen; bij de inleiding kan dit begrip niet tot zijn recht komen en bij de verdere behandeling van de planimetrie zal men op dit begrip in den regel niet terugkomen.

Nu geeft de inleiding tot de stereometrie gerede aanleiding op de axiomatische opbouw en de deductieve denkwijze bij de meetkunde wel terug te komen. Men kan deze samenhang laten zien aan de planimetrie, die de leerlingen in de vorige klassen hebben bestudeerd, en vervolgens vanuit dit aspect de stereometrie axiomatisch-deductief opbouwen.

Vraag: Zijn de constructies van punten, lijnen en vlakken, die niet in een voorgeschreven afbeelding effectief kunnen worden uitgevoerd, vervallen? Hier is b.v. gedacht aan vraagstukken van deze soort: Construeer een lijn door een gegeven punt, die gelijke hoeken maakt met twee gegeven kruisende lijnen en die met een derde gegeven lijn een gegeven hoek maakt.

Antwoord: Deze constructies berusten op toepassingen van de meetkundige plaatsen; zij zullen in dat verband aan de orde moeten komen. Deze constructies zijn van belang voor het ontwikkelen van het ruimtelijk inzicht.

Vraag: Is behandeling van de scheve parallelprojectie voorgeschreven?

Antwoord: Het K.B. spreekt slechts van „parallelprojectie". Verder kan gewezen worden op de desbetreffende mededeling in de circulaire van de inspectie d.d. 1 juli 1959: „Op het schriftelijk examen zullen tot nader aankondiging geen vragen over projectiemethoden gesteld worden. Voor de aanvang van het mondeling examen moet de leraar aan de gecommitteerde resp. de deskundige mededelen, welke methode van parallelprojectie hij heeft behandeld."

Dit betekent dus, dat op dit punt aan de scholen een zekere vrijheid is gelaten. Hier is gelegenheid voor experiment.

Vraag: Behoort het vermenigvuldigen van figuren in de ruimte tot de leerstof?

Antwoord: Daar het onderwerp bij de planimetrie wordt genoemd ligt het voor de hand dat er ook in de stereometrie enige aandacht aan wordt besteed.

Analytische Meetkunde.

Vraag: Wat moet behandeld worden van de „klassificatie" der kegelsneden"?

Antwoord: Krachtens de circulaire van de inspectie d.d. 7 oktober 1957 zullen op het eindexamen geen opgaven gesteld worden over de klassificatie van kegelsneden, waarvan de vergelijking in algemene gedaante gegeven is. Uiteraard dienen de leerlingen echter een kegelsnede wel te herkennen, wanneer de vergelijking na eenvoudige herleiding (geen rotatie van het assenstelsel) gebracht kan worden in een van de volgende gedaanten:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} \pm \frac{(y-q)^2}{b^2} = c^2; \; (y-q)^2 = a(x-p); \; xy = c.$$

Vraag: Behoort de transformatie van coördinaten bij de rotatie van het assenstelsel te worden behandeld?

Antwoord: Behandeling van dit onderwerp kan achterwege blijven.

Vraag: Behoort de poollijn tot de leerstof?

Antwoord: Van de poollijn dient het begrip en de vergelijking behandeld te worden, echter niet als uitgangspunt van een nieuw hoofdstuk. Behandeling van eigenschappen van de poollijn blijve dus achterwege. Vervanging van het woord „poollijn" door „raakkoorde" is onjuist, aangezien deze begrippen niet identiek zijn.

Vraag: Is het geoorloofd de analytische meetkunde te behandelen met behulp van vectoren, zoals dit volgens moderne opvatting geschiedt?

Antwoord: Dit is stellig toegestaan; men bedenke echter dat de eindexamenopgaven gebaseerd zullen zijn op toepassing van de traditionele methode.

Vraag: Wanneer dient met de behandeling van de analytische meetkunde een begin te worden gemaakt?

Antwoord: Naar onze mening zo vroeg mogelijk in klas 5 gymnasium-β resp. klas 4 h.b.s.-B, b.v. direct nadat de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening zo ver zijn behandeld, dat deze met vrucht kunnen worden toegepast in de natuurkunde en, voor zover het de h.b.s. betreft, de mechanica.

Geschiedenis van de Wiskunde.

Vraag: Welke hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde zijn bedoeld als keuze-onderwerp voor gymnasium-α.

Antwoord: Het wil ons voorkomen, zulks in verband met het feit dat het een keuze-onderwerp voor gymnasium-α betreft, dat hiertoe in elk geval de wiskunde bij de Grieken zal moeten behoren. Hiernaast kan de wiskunde bij een der andere volken uit de Oudheid behandeld worden of b.v. ook de geschiedenis van de ontwikkeling van het getalbegrip.

Statistiek.

Vraag: Tot hoe ver dient de statistiek als keuze-onderwerp voor gymnasium-α behandeld te worden?

Antwoord: Als minimum de grondbegrippen en eenvoudige toepassingen tot aan de steekproeven. Wij achten de behandeling van de steekproeven wel mogelijk, maar zouden dit onderwerp toch niet verplicht willen stellen.

AANPASSING VAN HET EINDEXAMEN AAN HET LEERPLAN

Gymnasium-β (school- en staatsexamen).

Het examen omvat:

afdeling VIa: algebra en beginselen der differentiaal- en integraalrekening;
VIb: stereometrie;
VIc: goniometrie en analytische meetkunde.

H.B.S.-B (school- en staatsexamen).

Het examen omvat:

wiskunde 1. a. algebra;
b. goniometrie en beginselen der differentiaal- en integraalrekening;

wiskunde 2. a. stereometrie;
b. analytische meetkunde.

Opmerking. Toepassingen van de differentiaal- en integraalrekening kunnen ook in andere onderdelen dan afdeling VIa bij gymnasium-β en wiskunde 1b bij h.b.s.-B aan de orde komen.

Gymnasium-α (schoolexamen).

Het examen omvat:

a. algebra: kwadratische functies en vierkantsvergelijkingen;
b. twee van de volgende onderwerpen (zie het K.B.):
   1. planimetrie en stereometrie;
   2. logaritmen, rekenkundige en meetkundige reeksen met een eindig aantal termen, het getalbegrip;
   3. beginselen van de differentiaalrekening;
   4. hoofdstukken uit de geschiedenis van de wiskunde;
   5. beginselen van de statistiek.

De indeling zal als volgt zijn:

afdeling VIa: algebra gecombineerd met één der twee keuze-onderwerpen;

VIb: het andere keuze-onderwerp.

Welk van de twee keuze-onderwerpen bij de onderscheiden mogelijkheden tot VIa zal behoren zal nader worden geregeld.

Gymnasium-α (staatsexamen).

Het examen omvat:

afdeling VIa: ter keuze van de kandidaat
òf algebra: kwadratische functies en vierkantsvergelijkingen, benevens één der onderwerpen, zulks eveneens ter keuze van de kandidaat, uit de voor gymnasium-α (schoolexamen) onder b2, b3, b4 en b5 (dus *niet* b1) genoemde onderwerpen;
òf algebra, in het K.B. genoemd als leerstof voor de eerste tot en met de vierde klasse van het gymnasium met uitzondering van de logaritmen, de rekenkundige en de meetkundige reeksen;

VIb: ter keuze van de kandidaat
òf planimetrie òf stereometrie, in het K.B. genoemd bij het keuze-onderwerp b1.

Opmerking. Aan deze regeling liggen de navolgende gedachten ten grondslag.

1. Het openen van de gelegenheid voor de kandidaten uit een aantal nauwkeurig aangegeven mogelijkheden te kiezen.

2. Het voorkomen van de mogelijkheid het diploma gymnasium-α te behalen zonder bestudering van meetkunde. Daartoe is aan de kandidaten in VIb meetkunde voorgeschreven. Een kandidaat, die het diploma gymnasium-α aan een school verwerft, is echter, bij bepaalde keuzen uit de in het K.B. onder b genoemde onderwerpen, niet verplicht stereometrie te bestuderen; de planimetrie is hem in de eerste tot en met de vierde klasse onderwezen. Teneinde te voorkomen dat aan de staatsexamenkandidaten ten aanzien van de stereometrie eisen zouden worden gesteld waaraan de schoolkandidaten niet behoeven te voldoen is de mogelijkheid geopend van de keuze van de planimetrie van de eerste tot en met de vierde klasse van het gymnasium.

3. Het behouden van de mogelijkheid het examen af te leggen met dezelfde stof als vóór 1961: de kandidaat bereikt dit door te kiezen:

VIa: algebra, in het K.B. genoemd als leerstof voor de eerste tot en met de vierde klasse van het gymnasium met uitzondering van de logaritmen, de rekenkundige en de meetkundige reeksen.

VIb: stereometrie, in het K.B. genoemd bij het keuze onderwerp b1.

H.B.S.-A (staatsexamen).

Het examen omvat de in het K.B. voor algebra en meetkunde genoemde leerstof van de eerste tot en met de derde klasse der hogereburgerscholen met dien verstande dat de onderwerpen „eenvoudige berekeningen in rechthoekige en scheefhoekige driehoeken" en „enkele voorbeelden van het berekenen, met behulp van tafels, van de onbekende elementen in een driehoek, vooral aan de hand van toepassingen in de praktijk" alleen bij het mondeling examen aan de orde zullen komen, terwijl deze onderdelen slechts betrekking zullen hebben op het berekenen van de onbekende elementen van een driehoek als drie elementen gegeven zijn.

Ten slotte volgen hier de circulaires d.d. 7 oktober 1957 en 1 juli 1959 van de inspectie van het gymnasiaal en middelbaar onderwijs betreffende het eindexamen wiskunde gymnasium-β en h.b.s.-B.

7 oktober 1957

Aan de Rectoren van Gymnasia en Lycea
en Directeuren van H.B.S.-en

Het is het college van inspecteurs gebleken dat de inhoud van vroeger verzonden circulaires ten aanzien van beperkingen bij het schriftelijk eindexamen wiskunde van het gymnasium-β en de h.b.s.-B niet op alle scholen bekend is.

Om deze onzekerheid, voorzover ze bestaat, weg te nemen en te voorkomen dat bij het wiskunde-onderwijs te veel tijd wordt besteed aan training op allerlei onderwerpen, waarover men in twijfel verkeert, zijn in de hierna volgende *herziene* en *aangevulde* lijst een aantal onderwerpen genoemd, waarover op het schriftelijk eindexamen geen opgaven gesteld zullen worden.

Het is uiteraard niet de bedoeling daarmee aan te geven dat deze onderwerpen ook uit de leerstof dienen te verdwijnen, maar alleen dat daarover geen vraagstukken bij het schriftelijk examen zullen worden opgegeven. Bij het onderwijs en dientengevolge bij het mondeling examen kunnen deze en andere (hier niet genoemde) onderwerpen tot hun recht kcmen. [1])

Lijst van onderwerpen en typen vraagstukken waarover op het schriftelijk eindexamen voor wiskunde geen opgaven gesteld zullen worden.

A. *Gymnasium-β en h.b.s.-B.*

1. *Algebra.*

Het herleiden van $\sqrt{(a + b\sqrt{c})}$ tot de som of het verschil van twee wortels;
het verdrijven van $\sqrt{(a + b\sqrt{c})}$ uit de noemer van een breuk;
het verdrijven van andere dan vierkantswortels uit de noemer van een breuk;
onbepaalde vergelijkingen;
wederkerige vergelijkingen;
twee vierkantsvergelijkingen, die een wortel gemeen hebben;
vraagstukken over grafische voorstellingen, die in wezen analytische-meetkunde-vraagstukken zijn (zoals die vraagstukken, die betrekking hebben op een raaklijn aan een parabool of de basispunten van een bundel);
de reststelling (wel moet men weten dat een gehele rationale functie, die een nulwaarde a heeft, deelbaar is door $x - a$);
het oplossen van derde- en hogeregraads-vergelijkingen, waarvan een wortel gegeven of direct te zien is;
merkwaardige quotiënten;
het verband tussen de wortels en de coëfficiënten van vergelijkingen, die van de derde of hogere graad zijn;
rekenkundige reeksen van hogere orde;

[1]) Cursivering van ons. H. A. G.; D. N. v. d. N.

de harmonisch middelevenredige;
complexe getallen;
bewijzen door middel van volledige inductie;
samengestelde interest.

2. *Trigonometrie.*

Gekunstelde goniometrische vergelijkingen;
cyclometrische functies;
het probleem van Snellius.

3. *Stereometrie.*

Formules voor de inhoud van boldelen;
formules voor de inhoud van het afgeknotte driezijdige prisma, de afgeknotte piramide en de afgeknotte kegel;
het netwerk van een prisma;
de prismoïde;
de stelling van Euler; vraagstukken over regelmatige twaalf- of twintigvlakken;
de drievlakshoek;
vraagstukken, waarbij kennis verondersteld wordt van formules betreffende regelmatige veelhoeken of van de stelling van Ptolemaeus.

B. *Gymnasium-β.*

Analytische meetkunde.

De stellingen van Apollonius;
de formules voor de transformatie van coördinaten bij de rotatie van het assenkruis;
de classificatie van kegelsneden, waarvan de vergelijking in algemene gedaante gegeven is (wel moet men kennen de vergelijking $xy = c$ voor de orthogonale hyperbool);
bundels van kegelsneden (wel moet men van cirkelbundels op de hoogte zijn).

C. *H.B.S.-B.*

Beschrijvende meetkunde.

De examenstof voor dit leervak zal beperkt blijven tot:
a. de grondconstructies van de orthogonale parallelprojectie;
b. doorsnijding met platte vlakken van door platte vlakken begrensde lichamen;
c. de wenteling van figuren om een as evenwijdig of loodrecht op het horizontale projectievlak;

d. de bol, benevens de kegel en de cilinder in eenvoudige ligging d.w.z. met assen loodrecht op een der drie onderling loodrechte projectievlakken.

In het algemeen kan nog meegedeeld worden dat getracht zal worden vraagstukken op te geven, waarvoor niet een uitgebreide kennis van formules, noch zeer uitvoerige berekeningen vereist zijn. Het doel van het wiskunde-onderwijs zij vorming van inzicht, ook in de samenhang der verschillende wiskunde-vakken, scholing van wiskundig denken, niet het instampen van veel stellingen en formules. Wel dient gelet te worden op nauwkeurig rekenen en op vaardige hantering van de logaritmentafel.

1 juli 1959

Aan Rectoren van gymnasia en lycea
en Directeuren van H.B.S.-en.

Per circulaire d.d. 7 oktober 1957 is door het college van inspecteurs een lijst gegeven van onderwerpen en typen vraagstukken, waarover op het schriftelijk eindexamen voor wiskunde gymnasium-β en H.B.S.-B geen opgaven gesteld zullen worden.

In verband met de invoering van het nieuwe leerplan voor wiskunde, vastgesteld bij K.B. van 30 augustus 1958, Stb. 431, en de daarmee samenhangende wijziging in de eindexamenprogramma's, worden met ingang van 1961 aan bovengenoemde lijst de volgende onderwerpen toegevoegd.

I. *Algebra, met inbegrip van de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening.*

Interpoleren in reeksen.

Grafieken van andere gebroken functies dan $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Differentiëren en integreren van exponentiële en logaritmische functies.
Buigpunten.
Toepassingen van de differentiaal- en integraalrekening op het gebied van mechanica en natuurkunde.

Opmerkingen.

1. In het leerplan worden de volgende functies genoemd:

lineaire functies, kwadratische functies, $\dfrac{ax+b}{cx+d}$, $\sqrt{x}$, a^x, ${}^{a}\log x$.

Behalve deze functies kunnen ook gevraagd worden:

a. de moduli van deze functies;

b. eenvoudige combinaties, bv. $\sqrt{ax+b}$, ${}^{a}\log\,(px^2+qx+r)$.

2. De differentiaal- en integraalrekening dient bij de vakken mechanica en natuurkunde wel toegepast te worden.

II. *Goniometrie.*

De termen secans en cosecans.

Vraagstukken van het type: herleid $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ tot een produkt als $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

III. *Stereometrie.*

Vraagstukken over ingeschreven bollen van andere lichamen dan viervlakken en rechte prisma's.

Uitslag van een cilinder en een kegel.

Opmerkingen.

1. Gehandhaafd blijft: het netwerk van een viervlak.
2. Op het schriftelijk examen zullen tot nader aankondiging geen vragen over projectiemethoden gesteld worden. Voor de aanvang van het mondeling examen moet de leraar aan de gecommitteerde resp. de deskundige mededelen, welke methode van parallelprojectie hij heeft behandeld.
3. Op het schriftelijk examen kan wel gevraagd worden een stereometrische constructie te beschrijven, en deze in een stereometrische figuur uit te voeren.

IV. *Analytische Meetkunde.*

Toegevoegde middellijnen.

Toegevoegde hyperbolen.

Orthoptische cirkel en voetpuntscirkel.

Opmerking.

Wel gevraagd kunnen worden:

a. de afstand van een punt tot een lijn;

b. lijnen- en cirkelbundels.

N.B. De beginselen van de differentiaal- en integraalrekening alsmede, voor zover het de H.B.S.-B betreft, de analytische meetkunde zullen eerst met ingang van 1961 worden geëxamineerd; voor de H.B.S.-B zal de beschrijvende meetkunde met ingang van 1961 zijn vervallen.

Een bijzondere regeling ten behoeve van de kandidaten die in 1960 zullen worden afgewezen en die het eindexamen in 1961 opnieuw zullen afleggen zal te zijner tijd worden bekend gemaakt.

Roosendaal/Zeist 31 juli 1959.

DE WISKUNDEFILMS VAN NICOLET

door

D. LEUJES en Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Het aantal bestaande wiskundefilms is klein en het aantal, dat daarvan in Nederland is, was tot voor kort 3, namelijk de Franse films van Cantagrel (en Jaquemard). Wel zijn ook op enkele bijeenkomsten enige jaren geleden een paar filmpjes van de Zwitser Nicolet vertoond, maar niemand wist, waar die te krijgen waren. Op verzoek van het bestuur van Liwenagel heeft Technisch Filmcentrum, waarvan de directeur, de heer L. de Vries, en zijn medewerker, de heer K. J. Blaauw, bijzondere belangstelling toonden voor deze materie, de films van Nicolet niet alleen opgespoord, maar er ook voor gezorgd, dat ze nu in Nederland verkrijgbaar zijn.

Het zijn 22 korte stomme 16 mm filmpjes van elk ongeveer 3 minuten (zwart-wit; 16 beelden per sec). Bij de figuren staan geen letters en er zijn geen bijschriften. Dit heeft het voordeel, dat elke docent bij de bespreking zijn letters kan kiezen, zoals hij wil, en dat tijdens de vertoning de aandacht van de leerlingen niet wordt afgeleid door teksten in een vreemde taal. Veelal zal hij een inleiding aan het vertonen laten voorafgaan. Er zijn echter ook filmpjes bij, die beter eerst gedraaid kunnen worden om het verrassende element, dat ze bevatten, goed tot zijn recht te laten komen. In ieder geval zal na het zien van een film een bespreking moeten plaatshebben. Soms zal het aanbeveling verdienen, de film daarna nog eens te draaien. In de handleiding, die bij de films geleverd zal worden, zijn enige suggesties van de maker verwerkt. De tekst van die handleiding volgt hieronder. Door het ontbreken van onderschriften op de films, kan een ieder ze echter gebruiken, zoals hijzelf wil. Zo zullen sommigen ze alleen draaien op een laatste les voor een vakantie, hoewel dit zeker niet de bedoeling van Nicolet is. Het is zijn overtuiging, dat films moeten en kunnen helpen bij het overwinnen van een zekere aversie, die sommige leerlingen tegen de meetkunde hebben. Hij meent namelijk, dat de geest bij het opnemen van kennis meer „intuïtief" dan logisch te werk gaat. Met „intuïtie" bedoelt hij dan het opvatten van een situatie als een geheel en het onbewust in verband brengen ervan met reeds aanwezige kennis. Dit intuïtieve opnemen is wel nodig, maar niet voldoende: het moet door logische redenering bevestigd worden. Bij zijn films valt de nadruk op de eerste fase en hij probeert daarbij steeds de beschouwde situatie te laten zien als één uit oneindig vele. Bij de bespreking van de films afzonderlijk wordt hierop nog nader ingegaan.

Hoe men ook over de ideeën van Nicolet mag denken, voor ons staat wel vast, dat vele van zijn films voor de meeste leerlingen animerend zijn en dat de behandelde kwesties door het zien van deze films beter onthouden en misschien ook beter begrepen zullen worden.

Doordat de films zo kort zijn, kan in één les de vertoning met de daarbij nodig geoordeelde bespreking afgehandeld worden. Het prettige van het ontbreken van geluid is, dat de docent tijdens de vertoning zelf commentaar kan geven. Heeft men een projector met variable snelheid, dan kan men bepaalde gedeelten langzamer of vlugger afdraaien, afhankelijk van de wijze van behandeling, het peil van de klas en de smaak van de docent. Men zal moeten experimenteren om te leren, hoe deze films benut kunnen worden en ieder zal het misschien anders doen. Maar het aardige is nu juist, dat dit hiermee mogelijk is.

Ten slotte nog enige zakelijke gegevens. De films zijn verkrijgbaar bij:

Stichting Technisch Filmcentrum,
Stadhouderslaan 152, Den Haag.

Ze worden niet verhuurd, alleen verkocht. De prijzen zijn inclusief spoel en doos:

a) *f* 25,— voor de films nrs. 1—13, 15—17 en 21,
b) *f* 35,— voor de films nrs. 18, 19, 20 en 22,
c) *f* 40,— voor de film nr. 14.

De prijs voor de gehele eerste serie (nrs. 1—11) bedraagt *f* 250,—, de prijs voor de tweede serie (nrs. 12—22) *f* 300,—.

Hoewel dit voor de hele serie een groot bedrag lijkt, zal een insider begrijpen, dat deze prijzen zeker niet hoog te noemen zijn. Bovendien mag niet vergeten worden, dat vergeleken met andere schoolvakken voor de wiskunde tot nu toe weinig behoefde te worden uitgegeven aan leermiddelen; waarmee wij maar willen zeggen, dat de wiskundedocent niet te bescheiden moet zijn en desnoods via een extra-krediet moet aandringen op aanschaffing van deze films, als hij tenminste evenals wij „er iets in ziet". Ook is het natuurlijk mogelijk, dat gemeenten of combinaties van scholen tot aanschaffing overgaan.

De oorspronkelijke naam van de serie is „Animated Geometry". Wij vertaalden dit met

LEVENDE MEETKUNDE

Serie I

1. *Een cirkel is bepaald door drie punten.*

De verzameling van alle cirkels in een plat vlak heeft drie vrijheidsgraden. Door de eis te stellen, dat de cirkels door een vast punt A gaan, blijven er slechts twee vrijheidsgraden over. Het aantal vrijheidsgraden wordt weer met één verminderd, als men bovendien de straal van de cirkels constant neemt. De middelpunten van deze cirkels liggen op een cirkel met A als middelpunt. Verlangt men ten slotte, dat de cirkel ook nog door een tweede punt B gaat, dan is ook de laatste vrijheidsgraad verdwenen. Nu wordt de eis gehandhaafd, dat de cirkel door A en B gaat, maar de straal wordt vrijgelaten, zodat het aantal vrijheidsgraden weer één wordt. De zo verkregen onderverzameling is de cirkelbundel met A en B als basispunten. Hiervan blijkt slechts één exemplaar te gaan door een derde punt C, niet gelegen op de lijn AB. Herhaling van dit procédé maar dan uitgaande van de punten A en C of B en C, blijkt steeds weer dezelfde cirkel op te leveren.

De film biedt een aardig uitgangspunt om over verzamelingen van cirkels te praten, een onderwerp, dat aanleiding kan geven tot allerlei interessante beschouwingen.

2. *De meetkundige plaats van de middelpunten van de cirkels, die twee concentrische cirkels raken.*

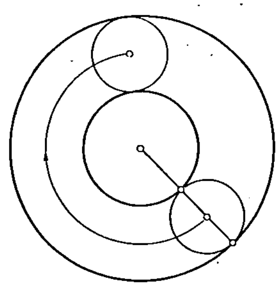


Fig. 1

Zie fig. 1. Het begin van de film sluit aan bij film nr. 1. Men ziet verscheidene cirkels, die slechts één van de beide concentrische cirkels raken. Daarna wordt de vrijheid weer ingeperkt door de eis te stellen, dat beide cirkels geraakt worden. Men ziet dan een cirkel, die aan deze eis voldoet, zo bewegen, dat hij beide cirkels blijft raken. Het middelpunt beschrijft daarbij een cirkel. Ten slotte wordt nog gedemonstreerd, dat de twee raakpunten met de beide middelpunten op één rechte liggen.

Naar aanleiding van deze film kan in de klas nog gesproken worden over de volgende punten:

1) berekening van de straal van de raakcirkels.
2) berekening van de straal van de cirkel, waarop de middelpunten van de raakcirkels liggen.
3) de verandering van de figuur, als de straal van de binnenste van de twee concentrische cirkels nadert tot nul.

3. *Cirkel met constante straal draait om vast punt; de meetkundige plaats van de raakpunten van evenwijdige raaklijnen.*

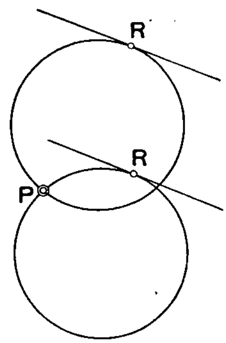


Fig. 2

Zie fig. 2. De cirkel heeft een constante straal en draait om punt P. De raaklijn in R aan de cirkel verandert niet van richting. Men ziet het punt R een cirkel beschrijven, die door P gaat en congruent met de gegeven cirkel is.

Het bewijs is simpel, maar voor leerlingen niet gemakkelijk te vinden. Een aardige film om zonder voorbereiding te laten zien en daarna de leerlingen te vragen zelf het bijbehorende bewijs te leveren.

Om de juistheid van hetgeen vertoond is te bewijzen, moeten we tegelijkertijd de meetkundige plaats van de middelpunten van de verzameling cirkels én een translatie over een afstand, gelijk aan de straal van zo'n cirkel, loodrecht op de richting van de rechte lijnen beschouwen. Merk op, dat in de film slechts de helft van de meetkundige plaats is getoond.

In de klas kan besproken worden, hoe de meetkundige plaats verandert, als

a) de richting van de rechte lijnen verandert;
b) de straal van de gelijke cirkels verandert.

Het vraagstuk leent zich ook uitstekend voor een behandeling met behulp van analytische meetkunde.

4. *Twee elkaar onder een constante hoek snijdende lijnen gaan door de uiteinden van een vast lijnstuk; de meetkundige plaats van het snijpunt.*

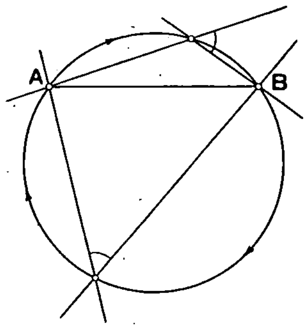


Fig. 3

Zie fig. 3. Het constante lijnstuk is AB. Men ziet het snijpunt van de beide lijnen eerst een deel van de onderste boog AB beschrijven, daarna wordt A gepasseerd en wordt de bovenste boog beschreven en ten slotte de rest van de onderste boog. Men ziet dus meteen, dat bij de twee bogen omtrekshoeken horen, die elkaars supplement zijn.

Eigenlijk bevat de meetkundige plaats nog een tweede cirkel, die symmetrisch is met bovengenoemde ten opzichte van de rechte lijn door de twee vaste punten.

De bekende eigenschap van de hoeken van een koordenvierhoek wordt tevens duidelijk gedemonstreerd.

Het is nuttig om na te gaan, hoe de meetkundige plaats verandert, als

a) de constante hoek varieert;
b) de lengte van het verbindingslijnstuk van de twee vaste punten varieert.

5. *De meetkundige plaats van de punten* P, *waarvoor* $\angle$ APB *constant is.*

Zie fig. 4a—c. Eerst beschrijft het punt P de cirkelboog, die in fig. 4a getekend is. Als het in B aangeland is, zien we de stand van het ene been van de hoek overgaan in de raaklijn. Deze wordt omgeklapt om AB (zie fig. 4b), waarna het punt zijn weg vervolgt langs de in deze figuur getekende boog. Weer zien we de raaklijn aan de cirkel, nu in A, te voorschijn komen. Ook deze wordt omgeklapt om AB en dan zien we de boog in fig. 4c ontstaan. De gehele meetkundige plaats is nu beschreven.

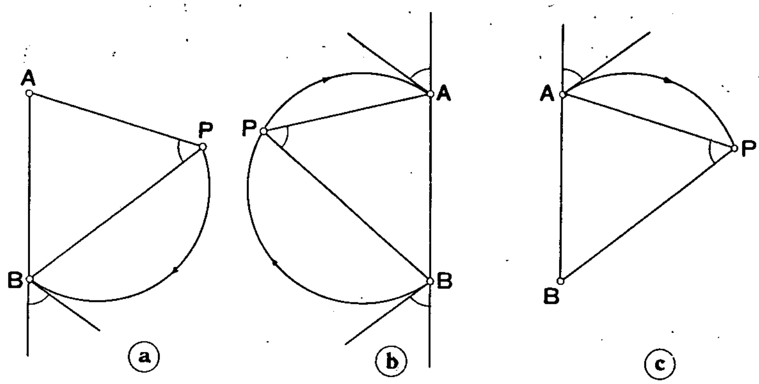


Fig. 4

Doordat in deze film het lijnstuk (AB) verticaal is geplaatst, ziet men duidelijk de symmetrie van de meetkundige plaats. Om deze meetkundige plaats goed te kunnen begrijpen, moeten de volgende punten duidelijk zijn:

a) hoe tekent men een hoek symmetrisch met een gegeven hoek;
b) de grensstand van een koorde (snijlijn) is een raaklijn;
c) een hoek, gevormd door een koorde (snijlijn) en een raaklijn, behoort tot de verzameling omtrekshoeken;
d) hoe groot is de straal van de meetkundige plaats, als de hoek en het lijnstuk gegeven zijn;
e) de meetkundige plaats bestaat uit twee cirkelbogen;
f) welke veranderingen ondergaat de meetkundige plaats, als de hoek toeneemt van 0° tot 180°.

6. *Omtrekshoek = helft van middelpuntshoek.*

De bewijsmethoden, die door deze film worden gesuggereerd, zijn meer intuïtief dan de gebruikelijke. Niet alles, wat aan de kwestie vastzit, wordt vertoond.

Zie fig. 5 en fig. 6. Eerst zien we, zoals in fig. 5 is weergegeven, gedemonstreerd, dat een omtrekshoek, waarvan een been door het middelpunt van een cirkel gaat, gelijk is aan de helft van de middelpuntshoek, die op dezelfde boog staat. Daarna zien we (fig. 6), dat dit ook voor een omtrekshoek geldt, waarbinnen het middelpunt ligt.

Deze film is o.i. alleen van nut, als men hem vertoont, voordat de

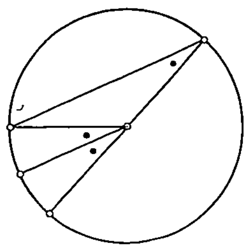


Fig. 5

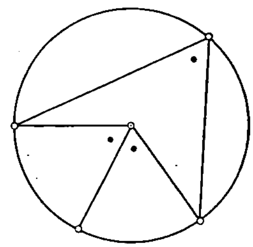


Fig. 6

stelling in de klas bewezen wordt. De leerling kan dan proberen, gestimuleerd door hetgeen hij gezien heeft, zelf het bewijs te vinden.

7. *Verhouding, waarin de binnenbissectrice de overstaande zijde verdeelt.*

Zie fig. 7a en b. In fig. 7a zien we, hoe door om te cirkelen de lijnstukken AD en BD op de benen van $\angle$ C afgepast worden. Men moet nu dus laten zien, dat AP : BQ = AC : BC. Door een serie lijnen te trekken, die evenwijdig aan AB zijn, zien we, dat inderdaad PQ // AB, waaruit de juistheid van de stelling volgt.

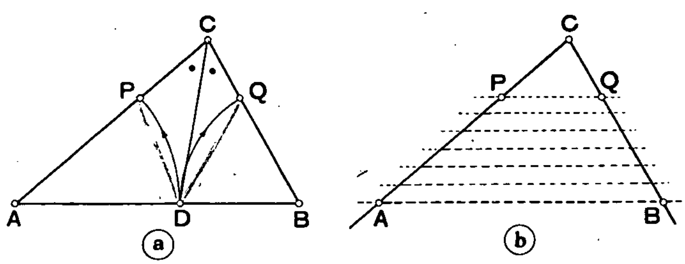


Fig. 7

Ook met de andere twee bissectrices van $\triangle$ ABC wordt dit nog eens gedemonstreerd.

Met deze stelling hebben leerlingen vaak moeite. Het zal voor sommigen gemakkelijker zijn haar te onthouden, als ze deze film gezien hebben. Natuurlijk zal men het meeste profijt van deze film hebben, als het in de les gegeven bewijs aansluit bij de film.

8. *Analoge stelling betreffende de buitenbissectrice.*

Zie fig. 8. Men ziet A naar boven en D naar rechts bewegen volgens de pijltjes. Als A in C aangekomen is, wordt D om C omgecirkeld en komt daardoor in P. Dan is dus CP = AD. Op analoge manier wordt CQ gelijk gemaakt aan BD. Nu is weer PQ // AB.

De uitvoering is iets minder suggestief dan die van nr. 7.

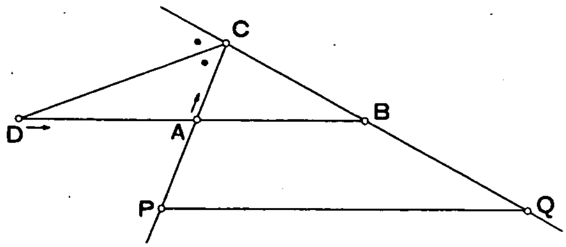


Fig. 8

Als we de stellingen van de films 7 en 8 samen beschouwen, en wel met betrekking tot één zijde, bijv. AB, dan blijkt, dat bij een bepaalde verhouding van AC en BC op de rechte AB twee punten horen, één dat AB inwendig en één dat AB uitwendig verdeelt in de verhouding AC : BC. Het is de moeite waard om na te gaan, hoe deze punten gaan bewegen, als de verhouding AC : BC varieert.

9. *Constructie van de regelmatige vijfhoek.*

Zie fig. 9. De constructie wordt op de bekende manier uitgevoerd. Ten slotte wordt de gehele vijfhoek getekend.

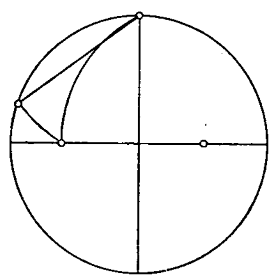


Fig. 9

10. *De gulden snede; constructie van regelmatige vijfhoek door middel van a_5 en d_5.*

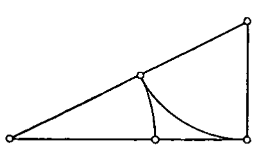


Fig. 10

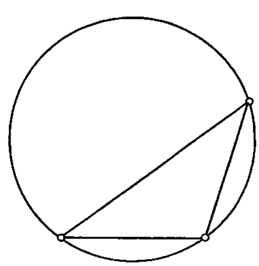


Fig. 11

Zie fig. 10 en fig. 11. Eerst wordt op de gebruikelijke manier een gegeven lijnstuk in uiterste en middelste reden verdeeld (fig. 10). Daarna wordt een gelijkbenige driehoek geconstrueerd met als basis het gegeven lijnstuk en als benen het grootste van de beide delen, waarin het verdeeld is. Deze driehoek zien we in fig. 11. Om deze driehoek wordt een cirkel beschreven en daarna de hierin ingeschreven regelmatige vijfhoek voltooid.

Hoewel de regelmatige vijf- en tienhoek juist van het leerplan zijn afgevoerd, kunnen we ons voorstellen, dat velen er nog iets van zullen behandelen. „De Gulden Snede," zegt Nicolet, „is één van de meest boeiende onderwerpen uit de elementaire vlakke meetkunde." Inderdaad is het dat, als men de aandacht van de leerlingen op de volgende punten vestigt:

a) door van een rechthoek, waarvan de zijden de „gulden verhouding" hebben, een vierkant op de kleinste zijde af te nemen, ontstaat er een rechthoek, gelijkvormig met de oorspronkelijke; dit proces kan men onbegrensd voortzetten;
b) het verband tussen de gulden snede en de reeks van Lamé (of reeks van Fibonacci): 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . .,
c) het voorkomen van de gulden snede in de natuur,
d) het voorkomen van de gulden snede in de kunst.

11. *a_5, a_6 en a_{10} vormen rechthoekige driehoek.*

In een cirkel worden achtereenvolgens een regelmatige vijfhoek, zeshoek en tienhoek getekend. Daarna wordt een driehoek geconstrueerd met als zijden de gevonden a_5, a_6 en a_{10}. Deze driehoek blijkt dan rechthoekig te zijn.

Serie II

12. *Cirkel met straal r rolt inwendig langs cirkel met straal $2r$; een punt van de eerste cirkel beschrijft een middellijn van de tweede.*

Zie fig. 12. Cirkel N rolt langs de binnenzijde van cirkel M. Men ziet dan, dat punt P (als punt van de binnenste cirkel) de middellijn PQ beschrijft.

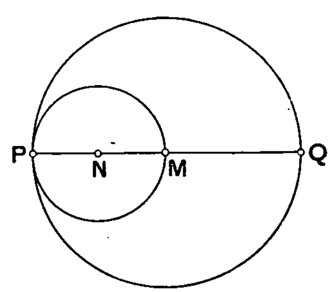


Fig. 12

Evenals nr. 3 zeer geschikt om te vertonen en daarna het bewijs te laten zoeken.

Het verdient aanbeveling de film te stoppen, voordat gedemonstreerd wordt, dat de meetkundige plaats een lijnstuk is. Weinigen zullen dan al opgemerkt hebben, dat de achtereenvolgens verkregen punten op één lijn liggen.

13. *De meetkundige plaats van de punten, van waaruit twee cirkels onder gelijke hoeken gezien worden.*

Zie fig. 13 en fig. 14. Eerst worden uit een willekeurig punt twee raaklijnen aan de beide cirkels getrokken. De hoeken tussen deze raaklijnen blijken in het algemeen niet aan elkaar gelijk te zijn.

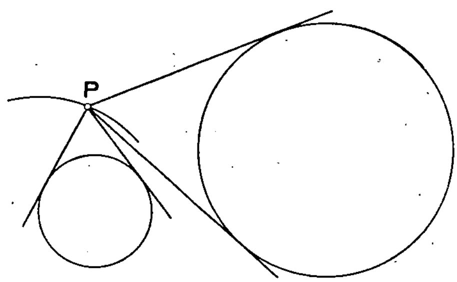


Fig. 13

Daarna wordt een punt P gekozen, waarvoor deze twee hoeken wel aan elkaar gelijk zijn. P beweegt nu zo, dat aan deze voorwaarde voldaan blijft en beschrijft daarbij (fig. 13) een cirkel (van Apollonius). Tot slot krijgt men het beeld te zien, dat door fig. 14 is weergegeven.

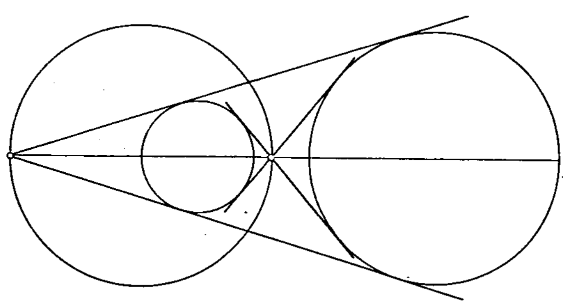


Fig. 14

Ook hier wordt aanbevolen de film te stoppen, voordat de meetkundige plaats verschijnt. Laat de leerlingen dan zelf maar eens raden. Op deze manier zal de belangstelling groter zijn en wordt de kijk op meetkundige figuren beter ontwikkeld. Het bewijs ervan, dat deze meetkundige plaats een cirkel is, kan men van de gemiddelde leerling niet verwachten. Maar zij zullen na de film het bewijs wel willen weten, hetgeen tot een vruchtbare behandeling kan leiden.

Ook kan men nog de vraag stellen, wat er verandert aan de meetkundige plaats, als de verhouding van de stralen van de gegeven cirkels varieert.

14. *Ontstaan van een strofoïde; esthetische vormgeving (vazen).*

Zie fig. 15—17. We beschouwen de verzameling van de cirkels, die in het gegeven punt Q aan de gegeven lijn l raken. P is een vast punt op de loodlijn op l in Q. De meetkundige plaats van de raakpunten van de raaklijnen uit P aan bovengenoemde cirkels is een strofoïde. De lijn PQ is de symmetrie-as van de strofoïde.

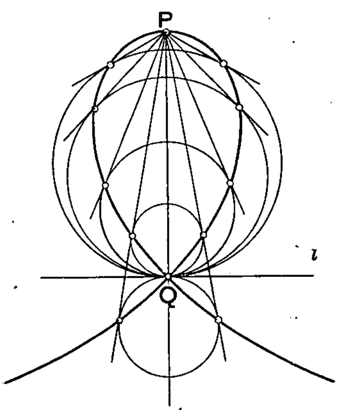


Fig. 15

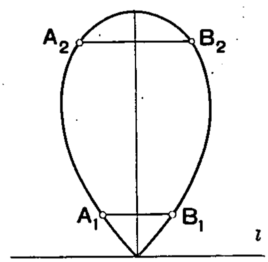


Fig. 16

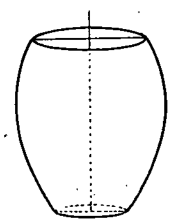


Fig. 17

Daarna vestigen we onze aandacht alleen op het blad van de strofoïde (fig. 16). Hiernaast verschijnt een, in deze figuur niet getekende regelmatige vijfhoek met een diagonaal erin. In het blad van de strofoïde worden nu twee koorden A_1B_1 en A_2B_2 beschreven, die gelijk aan de zijde en de diagonaal van de vijfhoek en parallel met l zijn.

Met elk paar koorden correspondeert nu een omwentelingslichaam met PQ als as. Deze lichamen blijken dezelfde vorm te hebben als vazen uit allerleï cultuurperioden. In fig. 17 is slechts een deel van zo'n vaas getekend, zodat men zich hieruit geen voldoende idee kan vormen van het alleraardigste effect, dat op deze wijze teweeggebracht wordt. Het procédé wordt enige keren herhaald met kleinere en grotere vijfhoeken, waarmee verschillende vazen en ook een theekopje blijken te corresponderen.

De film heeft een zeer verrassend karakter en zal, juist omdat de grenzen van het mathematische erin overschreden worden, op velen indruk maken.

15. *Pool en poollijn t.o.v. een cirkel.*

Zie fig. 18. Het punt P beweegt naar links en tegelijkertijd beweegt de poollijn p naar rechts. Zodra P op de cirkel komt, raakt p de cirkel. Daarna ziet men P verder naar links bewegen en tegelijkertijd p naar rechts. Een meetkundig verband tussen pool en poollijn ziet men in deze film, zodra P binnen de cirkel is aangekomen, niet meer.

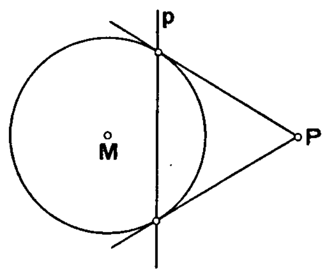


Fig. 18

Nicolet merkt hierbij op, dat het meetkundige verband tussen pool en poollijn alleen algemeen kan worden ingezien, als men uitgaat van de definitie, waarin sprake is van harmonische toevoeging. Hij geeft verder toe, dat dit filmpje slechts een inleiding is tot de studie van pool en poollijn.

16. *Ontstaan van een ellips („uitglijdende ladder").*

Zie fig. 19. Het lijnstuk AB heeft een constante lengte, AP eveneens. Het punt A beweegt langs de verticale lijn en B langs de horizontale. Daarbij wordt dan door P een ellips beschreven.

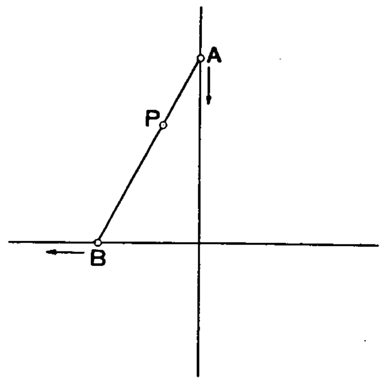


Fig. 19

De volgende vragen kunnen nog gesteld worden:

a) Wat gebeurt er met de meetkundige plaats, als de plaats van P op AB wordt gewijzigd?
b) Kan P buiten het lijnstuk AB geplaatst worden:
   1) op een verlengde ervan;
   2) op een loodlijn op AB?

Zie ook de opmerking aan het slot van dit artikel over het verband tussen nr. 12 en nr. 16.

17. *Orthoptische cirkel van een ellips.*

Zie fig. 20. Door P wordt de meetkundige plaats van de punten beschreven, van waaruit men twee onderling loodrechte raaklijnen aan de ellips kan trekken.

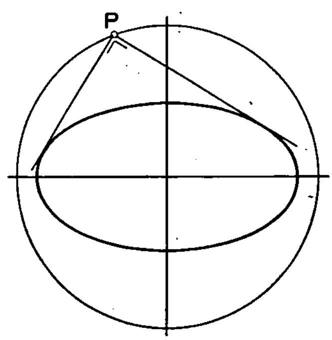


Fig. 20

Hoewel de orthoptische cirkel uit het leerplan is verdwenen, menen wij, dat er geen bezwaar tegen kan zijn deze meetkundige plaats als vraagstuk op te geven. Het filmpje kan dan eerst vertoond worden en de leerlingen moeten daarna in staat zijn het bewijs te leveren van wat zij hebben gezien.

Vragen, die gesteld kunnen worden:

a) Wat gebeurt er, als de ellips een cirkel wordt?
b) Wat gebeurt er, als de kleine as van de ellips tot nul nadert?

Ook kan men nog overgaan op omgeschreven rechthoeken van de ellips.

18. *De meetkundige plaats van de middelpunten van cirkels door gegeven punt, die gegeven cirkel inwendig raken* (*ellips*).

Zie fig. 21 en fig. 22. Cirkel M (de richtcirkel) en punt F zijn vast.

De cirkel met middelpunt P gaat steeds door F en raakt cirkel M inwendig. Daarbij ziet men P een ellips beschrijven (fig. 21). In fig. 22 wordt gedemonstreerd, dat PF + PM constant is, namelijk gelijk aan de straal van cirkel M. De punten F en M zijn dus de brandpunten van de ellips.

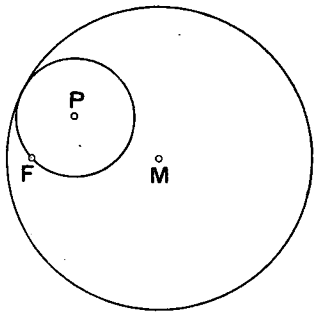


Fig. 21

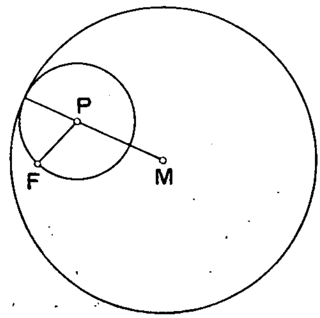


Fig. 22

19. *De meetkundige plaats van de middelpunten van cirkels door gegeven punt, die gegeven cirkel uitwendig raken (hyperbool).*

Zie fig. 23. Op analoge wijze ziet men hier een hyperbool ontstaan met brandpunten F en M. De uiterste standen, die cirkel P hierbij

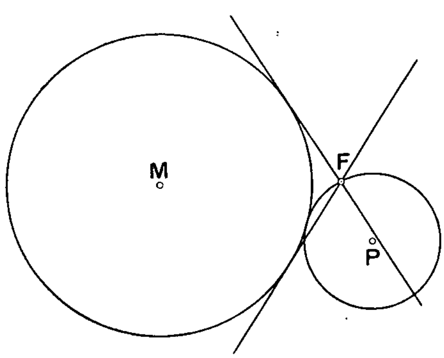


Fig. 23

bereikt, zijn de raaklijnen door F aan cirkel M, zodat men helaas slechts één tak van de hyperbool ziet ontstaan. Tot slot ziet men nog wel de gehele hyperbool, maar alleen doordat de andere tak er symmetrisch bijgetekend wordt.

Voor een onstaanswijze langs deze weg van de volledige hyperbool zie nr. 22.

20. *De meetkundige plaats van de middelpunten van cirkels door gegeven punt, die gegeven lijn raken (parabool).*

Zie fig. 24. Hier beschrijft het punt P een parabool met brandpunt F en richtlijn *l*.

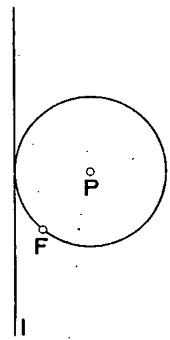


Fig. 24

21. *De meetkundige plaats van de middelpunten van cirkels, die gegeven cirkel loodrecht snijden en gegeven lijn raken (parabool).*

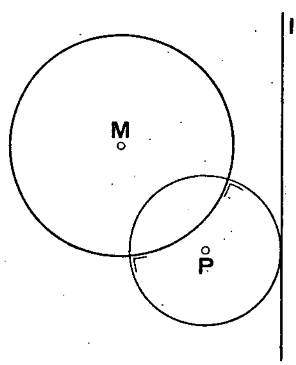


Fig. 25

Zie fig. 25. Cirkel M en lijn *l* zijn vast. De cirkel met middelpunt P raakt *l* en snijdt cirkel M loodrecht. Het punt P beschrijft daarbij een parabool.

22. *Ontstaanswijze van kegelsneden (samenvatting van* 18, 19 *en* 20).

Men ziet achter elkaar de ellips, de hyperbool en de parabool ontstaan op dezelfde wijze als in de nrs. 18, 19 en 20 gebeurd is. Bovendien ziet men in deze film, de gehele hyperbool ontstaan, zodat nu aan het bij nr. 19 genoemde bezwaar tegemoet gekomen is.

Dat F en M brandpunten zijn, wordt in deze film echter niet meer gedemonstreerd.

De nadruk wordt in deze film gelegd op de veranderingen van de gegevens: de plaats van F t.o.v. de cirkel M en de straal van die cirkel. Enkele grensgevallen kunnen mondeling behandeld worden.

Aanbevolen wordt eerst deze film te laten zien en daarna de onderdelen te bestuderen met behulp van de films 18, 19 en 20.

Opmerking. De tekenaar van de figuren maakte ons attent op het volgende verband tussen film nr. 12 en nr. 16.

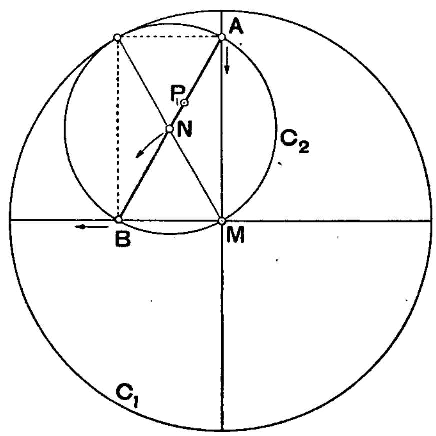


Fig. 26

Zie fig. 26. Als een cirkelschijf C_2 rolt langs de binnenzijde van een cirkel C_1, dan beschrijft elk punt van de omtrek van C_2 een middellijn van cirkel C_1 en beschrijft elk ander punt van de schijf C_2 een ellips (in het bijzonder beschrijft het middelpunt N een cirkel).