

E U C L I D E S

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

34e JAARGANG 1958/59

IX - 1 JUNI 1959

INHOUD

Prof. Dr. E. W. Beth, Moderne logica	257
Dr. H. Streefkerk, De toekomst van ons wiskunde- onderwijs	267
Dr. H. Streefkerk, Voorstel voor een nieuw leerplan met moderne onderwerpen uit de wiskunde, voor athe- naeum en gymnasium	278
Boekbespreking	279, 287
P. Wijdenes, Over de tafel van Dr. Vredenduin . .	280
Recreatie	288

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (/ 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

MODERNE LOGICA

door

Prof. Dr. E. W. BETH

1. *Inleiding*. — Bijna 20 jaar geleden heb ik een voordracht gehouden, onder een andere titel maar over hetzelfde onderwerp als thans, waaraan ik in de loop van de jaren telkens weer met bijzondere voldoening heb teruggedacht.¹⁾ In die tijd was ik bezig, de laatste hand te leggen aan mijn *Inleiding tot de Wijsbegeerte der Wiskunde*,²⁾ en ik kon dus een greep doen uit het voor dit boek verzamelde materiaal. Ik stelde mij daarbij ten doel, het verband aan te tonen tussen de moderne (symbolische, mathematische of logistische) logica en de oudere zogenaamd formele logica.

Ook nu is het mijn bedoeling, het volle licht te laten vallen op de historische en zakelijke continuïteit. Maar dat betekent niet dat ik de in 1939 gehouden voordracht eenvoudig zou kunnen herhalen. Reeds het feit, dat de tekst ervan in druk verschenen is, zou zich daartegen verzetten. Wat van meer gewicht is: de ontwikkeling van de moderne logica heeft intussen allerminst stilgestaan, en bovendien meen ik ook zelf in de loop van de jaren op allerlei punten tot een dieper inzicht te zijn gekomen. Men kan zich van een en ander gemakkelijk overtuigen, als men mijn reeds genoemde *Inleiding* met mijn onlangs voltooide boek over *The Foundation of Mathematics*³⁾ vergelijkt.

2. *Fundamentele Probleemstelling*. — Als fundamentele probleemstelling van de logica zou ik willen aanmerken de opsporing en rechtvaardiging van algemeene criteria ter beoordeling van de bewijskracht van redeneringen.

Een stelselmatige behandeling van dit probleem doet echter een aantal andere vragen rijzen, die bijvoorbeeld betrekking hebben op de leer der definitie en op de leer der bewijsvoering. De beantwoording van dergelijke vragen wordt mede tot de logica gerekend.

3. *Fundamenteel Kriterium voor Bewijskracht*. — Onderstel dat we de bewijskracht willen onderzoeken van de volgende redeneringen:

(I)

Geen Mammoeth is een Paard
Alle Schapen zijn Mammoeths
∴ Geen Paard is een Schaa

(II)

Sommige Paarden zijn geen Mammoeths
Sommige Mammoeths zijn geen Schapen
∴ Sommige Paarden zijn geen Schapen

We moeten dan niet alleen de beide gegeven redeneringen bekijken, maar tevens alle redeneringen die ontstaan bij vervanging van:

Mammoeth door: *Mees, Meeuw, Merel, Mollusk, Muis, Mus, . . .*;

Paard door: *Panter, Papegai, Patrijs, Poema, Poolvos, Python, . .*;

Schaap door: *Schol, Slang, Sluiwesp, Sperwer, Spreeuw, . . .*

Van de ontelbaar vele redeneringen die we op deze wijze kunnen verkrijgen vermeld ik er nog twee bij wijze van voorbeeld:

(I')	(II')
<i>Geen Mus is een Poema</i>	<i>Sommige Pythons zijn geen Meeuwen</i>
<i>Alle Schollen zijn Mussen</i>	<i>Sommige Meeuwen zijn geen Slangen</i>
<i>∴ Geen Poema is een Schol</i>	<i>∴ Sommige Pythons zijn geen Slangen</i>

De redenering onder (II') heeft iets bijzonders: de beide premissen zijn *waar* maar de conclusie is *onwaar*. Op deze grond ontzeggen we bewijskracht, niet alleen aan de redenering onder (II'), maar ook aan de redenering onder (II) en aan *alle* redeneringen die uit deze door term-vervanging kunnen worden verkregen.

Daarentegen is er bij de redeneringen, die door term-vervanging uit de redenering onder (I) ontstaan, geen enkele waarvan de premissen *waar* zijn maar de conclusie *onwaar* is. Op deze grond kennen we bewijskracht toe aan de redenering onder (I) en aan *alle* redeneringen die er door middel van term-vervanging uit kunnen worden verkregen.

We zeggen dat we, bij vervanging van de termen *Mammoeth, Paard, Schaap* door *Meeuw, Python, Slang*, een *tegenvoorbeeld* krijgen ter beoordeling van de redenering onder (II). Gebruik makend van het begrip *tegenvoorbeeld* kunnen we nu het *fundamentele criterium voor bewijskracht* als volgt formuleren:

Een redenering heeft bewijskracht, als ze geen tegenvoorbeeld toelaat.

Dit criterium was al aan Aristoteles bekend en het is toegepast; zolang de mensheid getracht heeft, logisch te redeneren. Het fundamentele karakter van het criterium is echter pas in 1951 door G. Kreisel⁴⁾ in het licht gesteld. Zelf heb ik in 1955 laten zien hoe men, rechtstreeks op grond van het fundamentele criterium, de logica op zeer eenvoudige en doorzichtige wijze kan opbouwen.⁵⁾

4. *Formeel Karakter van de Logica*. — Klaarblijkelijk bevat elke redenering bepaalde elementen die *vervangbaar* zijn; dit zijn de *termen*, in ons geval: *Mammoeth, Paard, Schaap*. Daarnaast staan elementen die bij term-vervanging niet veranderen. De vervangbare elementen bepalen de *inhoud* van de redenering, de overige elementen bepalen de *vorm* ervan.⁶⁾ In de beide door ons beschouwde ge-

vallen kan deze vorm worden gekarakteriseerd door de beide schema's:

(I°)	(II°)
<i>Geen M is een P</i>	<i>Sommige P's zijn M's</i>
<i>Alle S'en zijn M's</i>	<i>Sommige M's zijn geen S'en</i>
<i>∴ Geen P is een S</i>	<i>∴ Sommige P's zijn geen S'en</i>

Nu hangt de bewijskracht van een gegeven redenering uitsluitend af van de vorm ervan. Met andere woorden: heeft één redenering van een gegeven vorm bewijskracht, dan hebben alle redeneringen van die vorm bewijskracht; heeft één redenering van een gegeven vorm geen bewijskracht, dan hebben redeneringen van die vorm geen van alle bewijskracht. In het bijzonder hebben alle redeneringen van de vorm onder (I°), de modus *Celantes* van het traditionele syllogisme, bewijskracht, terwijl redeneringen van de vorm onder (II°) geen bewijskracht hebben.

5. *Overgang naar de Mathematische Logica.* — Er zit in de gevolgde procedure in zoverre iets onbevredigends, dat het zoeken naar een tegenvoorbeeld op goed geluk geschiedde. Komen we op deze wijze een passend tegenvoorbeeld tegen, dan staat daarmee eens en voor al vast dat redeneringen van de beschouwde vorm geen bewijskracht bezitten. Komen we geen passend tegenvoorbeeld tegen, dan volgt daaruit in het algemeen volstrekt niet, dat redeneringen van de beschouwde vorm *wel* bewijskracht hebben; dit zou alleen het geval zijn, als het zoeken op stelselmatige wijze was geschied.

We kunnen zeggen dat de moderne logica zich juist hierin van de traditionele onderscheidt, dat ze ons in staat stelt, *op stelselmatige wijze naar passende tegenvoorbeelden te zoeken*. Op analoge wijze betekende de algebra een vooruitgang ten aanzien van de antieke rekenkunde, doordat ze de mogelijkheid opende van een stelselmatige behandeling van bepaalde vragen. Dit verklaart tevens de aanduiding van de moderne logica als „*mathematische logica*”. Deze aanduiding lokt wel eens kritiek uit, doordat ze suggereert:

- (i) dat de moderne logica naar wiskundig voorbeeld en zelfs volgens wiskundige beginselen wordt opgebouwd;
- (ii) dat de moderne logica niet wil zijn (of althans niet is) een leer van de strenge bewijsvoering in het algemeen, maar meer in het bijzonder een leer van de wiskundige bewijsvoering.

Wat het eerste punt betreft, kan worden gewezen op het feit dat het gebruik van symbolen in de logica reeds teruggaat op Aristoteles, zodat dit gebruik in de logica even oud is als in de wiskunde. Bij

Boëthius ⁷⁾ vinden we formuleringen als:

si, cum est a, est b, cum sit c, est d,

die sterk herinneren aan formules als:

$$(a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow d)$$

in de moderne logica. Er is hier reeds een duidelijke tendentie tot *formalisering*.⁸⁾ Als *veranderlijken*, vergelijkbaar met de $x, y, z, \dots$ uit de algebra en de $A, B, C, \dots$ uit de meetkunde, worden letters $a, b, c, d, \dots$ gebruikt. Als *logische constanten* (in ons voorbeeld: als uitdrukking van de implicatie) blijft men woorden (*si* en *cum*) gebruiken. Men houde daarbij in het oog dat de straffere structuur van de klassieke talen zich tot een gedeeltelijke formalisering beter leent dan de vrijere zinsbouw van de moderne talen. Men kan, geloof ik, veilig stellen dat het gebruik van symbolen, evenals de daardoor mogelijke formalisering, in logica en wiskunde op dezelfde overwegingen berust.

Het tweede punt vooronderstelt de opvatting volgens welke de strenge bewijsvoering in de wiskunde een ander karakter heeft dan in andere gebieden. Deze opvatting komt in allerlei variaties voor, maar de meest gangbare versie gaat terug op Descartes en op Kant; volgens hen involveert de wiskundige bewijsvoering steeds een beroep op de *aanschouwing*. Naar mijn mening echter is er weinig grond om aan de wiskundige bewijsvoering een afwijkend karakter toe te schrijven; hiermee komt punt (ij) te vervallen.

Niettemin bestaat er in feite een nauw verband tussen de moderne logica en het *wiskundig grondslagenonderzoek*. De verklaring van dit verband steunt op twee overwegingen. Ten eerste heeft juist het wiskundig grondslagenonderzoek, en met name het *logicisme*, de behoefte aan logisch inzicht en daarmee tevens de ontwikkeling van de moderne logica sterk gestimuleerd.

Ten tweede moet een moderne logica, om het te kunnen opnemen tegen de klassieke en de traditionele logica, voldoen aan zware eisen wat betreft *strengheid van opbouw* en *zakelijke volledigheid*; de eerste eis zal weinig toelichting behoeven. De tweede eis houdt in, dat de logica ons in staat moet stellen tot het analyseren van de meest uiteenlopende redeneringen. Om haar op de proef te kunnen stellen moeten we dus de beschikking hebben over een grote voorraad redeneringen omtrent welker bewijskracht geen redelijke twijfel bestaat. Alléén de wiskunde kan ons een dergelijke voorraad leveren, en zij vormt dus het aangewezen „exercitie-terrein” voor de moderne logica.

6. *Opbouw van een Fragment van de Moderne Logica.* — Ik wil nu de opbouw schetsen van een fragment van de moderne logica dat beantwoordt aan de klassieke leer van het *assertorisch syllogisme*.

(1) We zullen gebruik maken van de volgende symbolen:

- (i) Onbepaalde termen $A, B, C, \dots, M, P, S$;
- (ij) Onbepaalde individuele namen $a, b, c, \dots$;
- (iij) Individuele veranderlijken $x, y, z, \dots$;
- (iv) De ontkenning $\bar{}$, de conjunctie $\&$ en de implicatie $\rightarrow$;
- (v) De algemene quantoren $(x), (y), (z), \dots$, en de existentiële quantoren $(Ex), (Ey), (Ez), \dots$

(2) Uitgaande van deze symbolen bouwen we in de eerste plaats atomaire formules $A(a), A(b), A(c), \dots, A(x), A(y), \dots, B(a), B(b), \dots, B(x), \dots, C(a), \dots, M(a), M(b), \dots, M(x), \dots, P(a), \dots$ op.

Bij de vorming van meer ingewikkelde formules gaan we als volgt te werk:

- (i) Is U een formule, dan zijn ook $\bar{U}, (x)U, (y)U, \dots, (Ex)U, (Ey)U, \dots$ formules;
- (ij) Zijn U en V formules, dan zijn ook $U \& V$ en $U \rightarrow V$ formules.

[De regels (i) en (ij) zijn aan zekere beperkingen onderhevig, waarop ik echter thans niet nader wil ingaan.]

(3) Bij de interpretatie van de formules stellen we ons voor dat een domein **D** van individuen gegeven is; we onderstellen dat **D** niet leeg is. De termen $A, B, C, \dots, M, P, S$ worden geacht, begrippen uit te drukken die op de individuen van **D** kunnen worden toegepast. De letters $a, b, c, \dots$ worden beschouwd als namen van individuen van **D**, terwijl de veranderlijken $x, y, z, \dots$ geacht worden, *alle* individuen van **D** te doorlopen.

Dan drukt $A(a)$ de toekenning uit van het begrip A aan het individu a , $A(x)$ drukt de conditie uit dat een individu x van **D** onder het begrip A valt. $\bar{U}$ drukt de ontkenning uit van U . $(x)U$ drukt uit dat ieder individu x van **D** de conditie U vervult en $(Ex)U$ drukt uit dat **D** tenminste één individu x bevat dat de conditie U vervult. $U \& V$ drukt de gelijktijdige bevestiging uit van U en V , terwijl $U \rightarrow V$ de bevestiging uitdrukt van V onder de conditie U .

We komen nu terug op de beschouwingen over de bewijskracht van de redeneringen onder (I) en onder (II). De premissen en de conclusie van de redenering onder (I) kunnen we thans als volgt weergeven:

- (1) $\overline{(Ex)[M(x) \ \& \ P(x)]}$
 (2) $(y)[S(y) \rightarrow M(y)]$
 (3) $\overline{(Ez)[P(z) \ \& \ S(z)]}$

We stellen het volgende tableau op, dat te beschouwen is als beschrijving van een stelselmatige poging tot constructie van een passend tegenvoorbeeld:

Waar	Onwaar
(1) $\overline{(Ex)[M(x) \ \& \ P(x)]}$	(3) $\overline{(Ez)[P(z) \ \& \ S(z)]}$
(2) $(y)[S(y) \rightarrow M(y)]$	(4) $(Ex)[M(x) \ \& \ P(x)]$
(5) $(Ez)[P(z) \ \& \ S(z)]$	(10) $S(a)$
(6) $P(a) \ \& \ S(a)$	(12) $M(a) \ \& \ P(a)$
(7) $P(a)$	(13) $M(a)$
(8) $S(a)$	(14) $P(a)$
(9) $S(a) \rightarrow M(a)$	
(11) $M(a)$	

Het volgende moge dienen als nadere toelichting.

Zou het mogelijk zijn een tegenvoorbeeld te construeren, dan moet aan beide premissen voldaan kunnen worden zonder dat aan de conclusie voldaan is. We gaan ervan uit, dat deze situatie zich voordoet; in het tableau is dit weergegeven door de plaatsing van de formules (1)—(3).

(4) Zal formule (1) waar zijn, dan moet deze formule onwaar zijn.

(5) Zal formule (3) onwaar zijn, dan moet deze formule waar zijn.

We gaan nu letten op de drie formules (2), (4) en (5), en we beginnen met (5).

(6) Zal formule (5) waar zijn, dan moet **D** tenminste één individu z bevatten dat aan de voorwaarde $P(z) \ \& \ S(z)$ voldoet; duiden we dit individu aan als a , dan moet formule (6) waar zijn.

(7)—(8) Zal formule (6) waar zijn, dan moeten deze formules beide waar zijn.

Formule (5) is hiermee afgehandeld. We gaan nu verder met formule (2).

- (9) Zal formule (2) waar zijn, dan moet ieder individu y van $\mathbf{D}$ aan de voorwaarde $S(y) \rightarrow M(y)$ voldoen; dit geldt in het bijzonder voor het individu dat we a genoemd hebben; formule (9) moet dus waar zijn.

We gaan nu, *los van het voorgaande*, formule (9) bekijken. We moeten dan twee gevallen onderscheiden. De formule $S(a) \rightarrow M(a)$ is waar, als $S(a)$ en $M(a)$ beide waar zijn, maar ook als $S(a)$ onwaar is. Vandaar dat we na (9) een splitsing in het tableau moeten aanbrengen; deze is weergegeven door een verticale lijn midden in de kolom „Waar” en midden in de kolom „Onwaar”.

- (10) Onder „Onwaar” vinden we in de linkerhelft $S(a)$. Dit correspondeert met de tweede mogelijkheid. Omdat in de kolom „waar” onder (8) eveneens $S(a)$ voorkomt, stuiten we hier op een onmogelijkheid: $S(a)$ kan niet tegelijkertijd waar en onwaar zijn. Onder (10) zetten we een dubbele streep ter aanduiding, dat we hier op een onmogelijkheid gestuit zijn. (Ook onder „waar” zetten we op de overeenkomstige plaats een dubbele streep.)

- (11) Onder „Waar” vinden we in de rechterhelft $M(a)$. Dit correspondeert met de eerste mogelijkheid: $S(a)$ en $M(a)$ zijn beide waar. We hebben $S(a)$ niet opgeschreven, omdat deze reeds onder (8) voorkomt.

Hiermee is ook (2) afgehandeld. We gaan nu verder met (4).

- (12) Zal formule (4) onwaar zijn, dan moet geen enkel individu x van $\mathbf{D}$ aan de voorwaarde $M(x) \& P(x)$ voldoen; dit geldt ook voor het individu a , zodat formule (12) onwaar moet zijn.

- (13)—(14) Zal formule (12) onwaar zijn, dan moet (tenminste) één der formules (13) en (14) onwaar zijn; maar dit kan niet wegens (7) en (11). Ook deze onmogelijkheid brengen we weer tot uitdrukking door een dubbele streep.

Alle mogelijkheden hebben we nu systematisch nagegaan en overal is dit onderzoek op een onmogelijkheid uitgelopen. Een poging om een tegenvoorbeeld te construeren moet dus principieel mislukken. Op grond van ons algemeen criterium staat de bewijskracht van de redenering onder (I) dus definitief vast.

Voor de redenering onder (II) krijgen we het volgende tableau.

Waar	Onwaar	
(1) $(Ex)[P(x) \& M(x)]$	(3) $(Ez)[P(z) \& \overline{S(z)}]$	
(2) $(Ey)[M(y) \& \overline{S(y)}]$	(10) $S(b)$	
(4) $P(a) \& M(a)$	(11) $P(a) \& \overline{S(a)}$	
(5) $P(a)$		
(6) $M(a)$	(12) $P(a)$	(13) $\overline{S(a)}$
(7) $M(b) \& \overline{S(b)}$	(15) $P(b) \& \overline{S(b)}$	
(8) $M(b)$		
(9) $S(b)$	(16) $P(b)$	(17) $\overline{S(b)}$
(14) $S(a)$		
	(18) $S(b)$	

Korte toelichting:

- (1)—(3) zijn weer de uitgangsformules.
- (4)—(6) ontstaan uit formule (1), die op dezelfde wijze behandeld wordt als formule (5) in het eerste voorbeeld.
- (7)—(10) ontstaan uit formule (2), die het bestaan eist van een individu y dat voldoet aan $M(y) \& \overline{S(y)}$; er is echter geen reden om aan te nemen, dat dit individu samenvalt met het eerder ingevoerde individu a , zodat we dit nieuwe element als b aanduiden.
- (11) Omdat volgens (3) er geen enkel individu uit $\mathbf{D}$ kan bestaan, dat aan $P(z) \& \overline{S(z)}$ voldoet, moet $P(a) \& \overline{S(a)}$ onwaar zijn.
- (12)—(13) Na (11) moeten we het tableau weer splitsen. Wegens (5) zetten we onder (12) een dubbele streep.
- (14) is verkregen uit (13).
- (15) We hebben totnogtoe reeds twee individuen uit $\mathbf{D}$ geïntroduceerd, a en b . Omdat volgens (3) geen enkel individu uit $\mathbf{D}$ aan de formule $P(z) \& \overline{S(z)}$ voldoet, zijn we verplicht ook te vermelden, dat deze formule voor het individu b onwaar is.
- (16)—(18) zijn verkregen uit (15). Wegens (9) en (10) is onder (17) en (18) een dubbele streep geplaatst.

De eindformules waaronder geen dubbele streep geplaatst is en die dus niet tot een onmogelijkheid geleid hebben, zijn blijkbaar (5), (6), (8), (14), (10) en (16).

In dit geval vindt de constructie haar voltooiing zonder dat het

tableau wordt „afgesloten”. We kunnen nu uit het tableau een passend tegenvoorbeeld aflezen. Het domein **D** moet twee individuen *a* en *b* bevatten, terwijl de formules $P(a)$, $M(a)$, $S(a)$ en $M(b)$ waar, de formules $P(b)$ en $S(b)$ onwaar moeten zijn. —

De beide beschouwde tableaux hebben in zekere zin paradigma-tische betekenis. Indien gevraagd wordt naar de bewijskracht van een redenering die, uitgaande van zekere premissen $U_1, U_2, \dots, U_n$, de conclusie V oplevert, dan kunnen we steeds op analoge wijze een tableau opstellen. Er zijn dan maar twee einduitkomsten mogelijk:

(I) Het tableau komt tot „afsluiting”. Dit betekent dat een stelselmatige poging (en dus *elke* poging) tot constructie van een passend tegenvoorbeeld mislukt. Er is dus geen tegenvoorbeeld, en dus volgt inderdaad de conclusie V logisch uit de premissen $U_1, U_2, \dots, U_n$.

(II) Het tableau komt niet tot afsluiting. In dit geval levert het tableau zelf een passend tegenvoorbeeld ten bewijze dat de conclusie V *niet* logisch volgt uit de premissen $U_1, U_2, \dots, U_n$.⁹⁾

Een afgesloten tableau als bedoeld onder (I) levert dus het bewijs dat de conclusie V logisch volgt uit de premissen $U_1, U_2, \dots, U_n$; maar het tableau heeft niet de gebruikelijke gedaante van een redenering die uitgaat van de gegeven premissen en tenslotte de gewenste conclusie oplevert. Het is intussen niet moeilijk, dit gebrek te verhelpen.

(1)	$(Ex)[M(x) \& P(x)]$	(prem 1)
(2)	$(y)[S(y) \rightarrow M(y)]$	(prem 2)

(5)	$(Ez)[P(z) \& S(z)]$	(+ hyp 1)
.....		
(6)	$P(a) \& S(a)$	(+ hyp 2)
(7)	$P(a)$	(6)
(8)	$S(a)$	(6)
(9)	$S(a) \rightarrow M(a)$	(2)
(11)	$M(a)$	(8), (9)
(12)	$M(a) \& P(a)$	(7), (11)
.....		
(4)	$(Ex)[M(x) \& P(x)]$	(— hyp 2)

(3)	$(Ez)[P(z) \& S(z)]$	(— hyp 1)

Door een eenvoudige hergroepering van de formules in het tableau krijgen we dus een redenering die zou passen in een *Calculus van het Natuurlijke Redeneren* volgens Gentzen.¹⁰⁾

AANTEKENINGEN.

¹⁾ E. W. Beth, De logistiek als voortzetting van de traditionele formele logica, *Annalen Genootsch. v. wet. philos.* **11** (1941), of *Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsbeg. en Psychol.* **34** (1940/41). Dit artikel bevat de uitgewerkte tekst van een voordracht die ik op zaterdag 7 oktober 1939 voor het Genootschap had gehouden.

²⁾ E. W. Beth, *Inleiding tot de Wijsbegeerte der Wiskunde*, Antwerpen-Nijmegen 1940, 2de druk 1942, i.h.b. Hoofdstuk V: De Logistiek.

³⁾ E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1959. Mijn standpunt ten aanzien van de centrale problemen heeft zich sinds 1939 niet noemenswaard gewijzigd. Wel is mijn gezichtsveld ruimer geworden en heeft mijn inzicht zich verdiept vooral ook onder invloed van de onderzoeken die ik sinds 1951 heb verricht. Een en, ander heeft mij mede aanleiding gegeven, mijn terminologie in verschillende opzichten te verscherpen.

⁴⁾ G. Kreisel, On the Interpretation of Non-Finitist Proofs — Parts I-II, *J. Symbolic Logic* **16** (1951), **17** (1952).

⁵⁾ E. W. Beth, Semantic Entailment and Formal Derivability, *Mededelingen Kon. Ned. Akad. v. Wetensch., Afd. Lett., N.R.* **18** no. 13 (1955). — Een dergelijke opbouw van de logica is ook gegeven door K. J. J. Hintikka, Two Papers on Symbolic Logic, *Acta Philos. Fennica*, fasc. VIII (1955).

⁶⁾ We kennen dus aan twee redeneringen *dezelfde vorm* toe, als elk van de twee uit de andere door een passende term-vervanging kan worden verkregen. Verg. voorts aantekening 8.

⁷⁾ K. Dürr, Aussagenlogik im Mittelalter, *Erkenntnis* **7** (1938/39); *The Propositional Logic of Boëthius*, Amsterdam 1951.

⁸⁾ Dat men zich van deze tendentie ook in de Oudheid ten volle bewust was, moge blijken uit de volgende uitspraak van Theophrastus (bij Alexander van Aphrodisias, *In Aristotelis Analyticorum Priorum Librum I Commentarium*, ed. Wallies, 53:28—54:2, weergegeven naar de vertaling bij I. M. Bocheński, *Formale Logik*; Freiburg/München 1956, S. 157, 24.08): *Aristoteles voert zijn betoog aan de hand van letters om aan te tonen dat de conclusies niet uit kracht van de inhoud maar krachtens de gedaante, de combinatie en de modus van de premissen ontstaan. Het syllogisme heeft namelijk bewijskracht, niet uit hoofde van zijn inhoud, maar omdat de vorm zodanig is. En de letters laten zien dat de slotsom algemeen en altijd en bij elke keuze van de inhoud een zodanige zal zijn.* — Deze tekst levert tevens een afdoende weerlegging van de tegengestelde zienswijze van P. van Schilfgaarde, *De Logika van Aristoteles*, den Haag 1944.

⁹⁾ Het algemene bewijs van deze stelling levert enige complicaties op en blijft daarom hier achterwege; zie mijn in aantekening 5 genoemde publicatie. In eenvoudige gevallen kan men zonder veel moeite uit het tableau een passend tegenvoorbeeld „aflezen”.

¹⁰⁾ G. Gentzen, *Recherches sur la déduction logique*, trad. et comm. par R. Feys et J. Ladrière, Paris 1955.

DE TOEKOMST VAN ONS WISKUNDEONDERWIJS ¹⁾

door

Dr. H. STREEFKERK

Toen in 212 v.C. een Romeins soldaat na de verovering van Syracuse het vertrek van Archimedes binnentrad, riep deze: veeg mijn cirkels niet uit! Als in 1958 n.C. een schoolschoonmaakster een half uurtje te vroeg een wiskundelokaal zou binnentreden, zou de kans groot zijn, dat de leraar zou roepen: veeg mijn cirkels niet uit!

De geachte toehoorder zal opmerken: Uw grapje is te laat en Uw grapje is ongepast! Te laat, want we hebben een nieuw programma gekregen; ongepast, want U was een van de zes tegenstemmers, toen het concept-programma ter tafel lag. Nu, wat het nieuwe programma betreft, het is daar onder de huidige omstandigheden mee als met de uitvinding van de boekdrukkunst, waarvan men dachtte: het was een reuzenstap ten hemel — en ter hel! Ten hemel, als men alleen let op de leerstof; ter hel, als men let op het gehalte van de leerlingen, die het moeten verwerken. De stap naar de hel is intussen wel wat kleiner geworden, doordat sindsdien de complexe getallen en de statistiek van het programma afgevoerd zijn; maar daardoor is ook de stap naar de hemel kleiner geworden. Paradoxaal, zult u zeggen. Het verwijt van met mijzelf in tegenspraak te zijn is mij dan ook niet onthouden. Geen wonder, heel onze programmabezigheid is een voortdurend wandelen in paradoxen geweest. De ene groep was bezig met een programma voor de H.B.S., de andere groep met een programma voor de H.B.S.sers. Dat moest fout lopen, want iedereen weet, dat tegenwoordig de meeste H.B.S.sers niet op de H.B.S., zoals die nog steeds op papier bestaat, thuis horen, en dat die H.B.S. van het papier een fantoom geworden is, dat geen reëel bestaan heeft. Ik wil daarom onze huidige H.B.S. vergeten, en de blik vooruit werpen, zoals de titel van mijn inleiding ook tot uitdrukking brengt. Ik wil daarbij vier aspecten belichten, om daarna tot een voorstel te komen. Deze zijn:

- a. de behoeften van de hedendaagse maatschappij;
- b. het karakter van de oude en de moderne wiskunde;
- c. de aanleg en de behoeften van de leerlingen;
- d. de leerlingenstroom in de huidige kwaliteit.

¹⁾ Lezing, gehouden op de vergadering van „Wimecos” op 29 december 1958.

Deze vier aspecten zullen niet strikt gescheiden belicht worden. Daar zijn dan allereerst de behoeften van de huidige maatschappij. U weet nu langzamerhand wel, dat Nederland een land is, vrijwel zonder koloniën en grondstoffen. Onze welvaart is in hoge mate afhankelijk van de prestaties in de arbeidssector en van de intellectuele prestaties. De laatste moeten de eerste stimuleren, en beide moeten opgevoerd worden. Men klaagt over een gebrek aan technici, aan atoomdeskundigen, aan leraren. Men klaagt over achterstand ten opzichte van het buitenland. Maar bij toenemende industrialisatie zijn ook meer economen, sociologen, psychologen nodig; er is ook steeds meer behoefte aan hoger administratief personeel. De wiskunde gaat bij verschillende van deze functies een steeds groter rol spelen. U kunt dat lezen in Amerikaanse publicaties, die zich bezig houden met de hervorming van het wiskundeonderwijs aldaar (bijv.: *A survey of research potential and training in the mathematical sciences*, Yale University, April 1957); ook in een publicatie van Prof. D. van Dantzig in *Euclides* 31,II, blz. 88 e.v. Onderstaande opsomming is aan dit laatste artikel ontleend. Had men vroeger de wiskunde alleen nodig bij astronomie, geodesie, mechanica, natuurkunde, techniek en actuariële wetenschappen, later kwamen daarbij biologie, economie en psychologie, allereerst in de vorm van biometrie, econometrie en psychometrie. Tegenwoordig worden wiskundige methoden meer en meer toegepast bij de industriële planning, geneeskunde, biochemie, fysiologie, farmacologie, sociologie, cryptologie, enz. Ook filosofie en zelfs taal-kunde (voor de mechanische vertaling) beginnen belangstelling voor wiskundige methoden te krijgen, vooral voor de symbolische logica. Alleen de muziek en de schilderkunst schijnen de omgekeerde weg te bewandelen en zich van de wiskunde te distancieren; men denke slechts aan het verdwijnen van de perspectief uit de moderne schilderkunst. Prof. van Dantzig voegt hier ietwat ondeugend aan toe, dat hij het aan meer competente beoordelaars wil overlaten om uit te maken of dit tot haar voordeel gestrekt heeft.

Wat Nederland nodig heeft is een zuinig omgaan met alle aanwezige prestatievermogen, zowel van hand als van hoofd. Waar moeten bij steeds toenemende industrialisatie en bij het steeds ingewikkelder worden van de maatschappelijke verhoudingen de krachten vandaan komen? Men zal hoe langer hoe meer mensen met lange vooropleidingen nodig hebben, en die moeten allemaal onze M.S. doorlopen. Wij zullen dus op de M.S. reeds moeten beginnen zuinig om te gaan met de aanwezige potenties. Wat er in de Nederlandse M.S. in werkelijkheid gebeurt is een enorme verspilling

van energie, zowel van de kant van de leraar als van die van de leerlingen. Een wiskundeleraar is iemand die de hele dag bezig is met een vierkante deksel op een ronde pot te passen. Onze collega's uit Drachten of Ter Apel of Stadskanaal moeten hier niet tegen opponen. Het gros van onze M.S.-bevolking zit nu eenmaal in de randstad Holland, en daar is de toestand verre van rooskleurig. De leraar verspilt energie, en de leerling steekt er te weinig van op. De leerling doet òf erg zijn best, maar bereikt weinig, verspilt dus zijn energie, òf hij doet zijn best maar helemaal niet meer omdat het toch niets geeft, en laat dus zijn energie ongebruikt. Men kan dat ook verspilling noemen. En het ergste is dan nog iets anders, nl. dat de *goede* leerling daardoor ook te weinig presteert; hij kan het op zijn sloffen af, want de leraar gaat hem veel te langzaam en legt te veel en te vaak uit. Hier ligt een kernbezwaar tegen de zesjarige H.B.S.: de leerling met de goede aanleg wordt de dupe. In de gevoelige jaren, waarin hij tot grote prestaties te brengen zou zijn bij een aan zijn aanleg aangepast onderwijs, verbeuzelt hij zijn tijd door min of meer verveeld de herkauwende leraar aan te horen en zich te verbazen over en te ergeren aan zijn stupide klasgenoten. Vroeger maakten we ons hier niet zo druk over, omdat de verhoudingen anders lagen tussen de leerlingen met goede en slechte aanleg. Maar langzamerhand is de tijd gekomen dat we moeten inzien dat we zulk energieverlies niet meer kunnen dragen.

Van energieverlies kan men evengoed spreken als men let op de leerlingen met weinig aanleg voor wiskunde. Denkt U maar eens aan de leerlingen die door deze handicap 5 of 6 jaar doen over de eerste drie klassen van de H.B.S. Ze willen nu eenmaal een einddiploma hebben; als B niet gaat, dan maar A; maar de eerste drie klassen moeten doorgeworsteld worden. Wat had die tijd niet beter besteed kunnen worden; hoeveel verborgen andere aanleg had niet ontwikkeld kunnen worden, waardoor de leerling tot goede resultaten had kunnen komen in andere sectoren dan in de wiskunde.

Wij kunnen zo'n verspilling van volkskracht niet meer verdragen. Er is nl. nog een psychologisch aspect aan deze zaak; de leerling die steeds met een 5, 4 of 3 beloond wordt, krijgt minderwaardigheidsgevoelens, die hem soms alle werklust ontnemen, ook in andere vakken; hij kan immers toch niets!

Totnogtoe waren onze reacties in deze gevallen steeds: stuur die leerlingen toch van de H.B.S. af; de H.B.S. is nu eenmaal een school waar de exakte vakken een hoofdrol spelen; dat weten de ouders toch! Wij beschouwden daarbij het bezoeken van de M.S. als een particuliere liefhebberij van de leerlingen of van hun ouders. Maar

de toestand is zich aan het wijzigen. Onze maatschappelijke ontwikkeling *eist* dat *vele* jongelieden zich een M.S.-opleiding trachten eigen te maken. Prof. P. J. Bouman schreef in een artikel in *Wending*: wij moeten onze jeugd in de scholen consigneren, op straffe van hongersnood!

Mijn eerste conclusie is deze: wij moeten ophouden met jaar in, jaar uit van alle leerlingen dezelfde hoeveelheid wiskunde te eisen; er moet grotere differentiatie, ook in het wiskundeonderwijs, komen, waardoor uit de leerlingen gehaald kan worden wat er in zit. Ik leg U dit nu voor als een soort van maatschappelijke noodzaak. Dit is nooit mijn eigenlijke argument geweest; ik heb het altijd als een eis van Christelijke naastenliefde gezien om elke leerling te geven wat die speciale leerling toekomt.

Wellicht vraagt iemand Uwer zich af: bedoelt U differentiatie zodanig, dat de leerlingen in het geheel geen wiskunde meer krijgen, of een ander soort wiskunde? Ik kom hierbij aan het 2e door mij genoemde aspect. U zult opmerken dat het 3e aspect, nl. de aanleg van de leerlingen, reeds enigermate aan de orde geweest is.

Moet op de M.S. de z.g. moderne wiskunde zijn intrede doen? Onlangs sprak ik een academicus, die het volgende opmerkte. Als je een scheikundeboek voor de H.B.S. openslaat, dan zie je daar de scheikunde in modern gewaad, met vele van de laatste resultaten. Sla je een Natuurkundeboek open, dan zie je daar het voortschrijden van de wetenschap duidelijk uiteengezet. Maar als je een wiskundeboek openslaat, dan zeg je: ach, dat is toch geen wiskunde meer! Wie heeft daar nu nog wat aan? In verband hiermee staat het feit, dat onze oud-leerlingen, zodra ze op de Universiteit de wiskunde gaan volgen, het gevoel krijgen dat ze volledig moeten omschakelen. Hetzelfde geldt voor hen, die voor de nieuwe akte wiskunde M.O.-A gaan studeren. Ze hebben dan de lagere akte wiskunde, dan wel een einddiploma H.B.S.-B of Gymnasium β , en denken dat de M.O.-studie eenvoudig een verlengstuk is van hun schoolstudie. Dat was vroeger inderdaad het geval; K_1 was het verlengde van L.O.. Maar als de cursisten nu op de A-cursus de eerste lessen gevolgd hebben, komt een soort scheiding tot stand. Sommigen geven te kennen, dat ze voor dit soort wiskunde geen belangstelling hebben; anderen blijven eenvoudig weg. Maar er zijn er ook, die geïnteresseerd raken en doorzetten, en dan zeer goede resultaten bereiken. Wat had U dan verwacht, vragen we een gedesillusioneerde? Ja, zoiets van uitgebreide Stereometrie en Trigonometrie, dus zoiets van hulplijnkunde en hulpvlakkunde en substitutiegrapjes, enfin, voortzetting van de wiskundige techniek. Die techniek is zeer nuttig geweest.

In de sterrekunde, de zeevaartkunde en de aardmeetkunde was het nodig allerlei technieken met logaritmen en trigonometrische formules te beheersen. Maar de rekenmachine heeft de logaritmentafel verdrongen en de trigonometrische formules zijn bijna nergens meer nodig. Ze kunnen aan de specialist overgelaten worden. De moderne wiskunde eist een geheel andere instelling. Het doel is niet het vinden van slimmigheidjes, maar het zoeken van algemene gezichtspunten, fundamentele concepties, het scheppen van orde in een schijnbaar chaotische verzameling van eigenschappen, het nagaan of een uitspraak die voor elementen van een bepaalde verzameling geldt, ook nog geldt voor de elementen van geheel andere verzamelingen. Men zou misschien kunnen zeggen: naast de knutselaar en de rekenaar en de architect heeft zich de filosoof ontwikkeld. Kon men het in de oude wiskunde met veel handigheid en weinig geheugen vrij ver brengen, in de moderne wiskunde is een goed geheugen een eerste vereiste. Het moet daarom mogelijk zijn een andere klasse van leerlingen voor de wiskunde te interesseren dan vroeger. Dit is het ook, waarmee men in Amerika experimenteert. Zo schreef Prof. Oakley in het reeds eerder genoemde rapport over Haverfordcollege het volgende. (Ter oriëntatie diene, dat het eerste collegejaar bestemd is voor lieden, die de High school doorlopen hebben, en een wiskundekennis bezitten van onze 3e, op sommige punten van onze 4e klassers. Men kan ze ongeveer op één lijn stellen met onze aankomende 5e klassers). Hij schrijft dan: tot voor negen jaar was ons program voor de eerste klas klassiek: klassieke algebra, trigonometrie, analytische meetkunde van het platte vlak en iets van de ruimte. Negen jaar geleden begonnen we dit program te herzien. We beseften dat — wilden we de jeugd in staat stellen de ontwikkeling van de wiskunde, de natuurkunde en de sociale wetenschappen te kunnen volgen — het essentiëel was dat moderne wiskundige methoden zo vroeg mogelijk geïntroduceerd werden, liefst reeds direct in het eerste jaar. Daartoe werd voor het 1e en de volgende jaren een cursus ontwikkeld met onderwerpen uit de praedicaten-logica; verzamelingen, groepen, lichamen, functies als geordende getallenparen, limieten, differentiaal- en integraalrekening (uitsluitend voor polynomen), matrices, waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. Uit de algebra, de trigonometrie en de analytische meetkunde alleen het uiterst noodzakelijke minimum. Wat is nu het resultaat; dat steeds duidelijker wordt? Dit, dat de wiskunde in Haverfordcollege populair geworden is. U moet weten dat de wiskundecursus daar niet verplicht is; hij wordt alleen gevolgd door hen die later wiskunde nodig hebben en door hen, die er zich voor interesseren.

Nu, in deze negen jaren is het percentage toehoorders van 60 % tot 90 % opgelopen; en wat nog meer zegt, het getal van hen, die tengevolge van deze college's in de wiskunde doorgaan, of wiskunde als bijvak kiezen is percentsgewijs sterk toegenomen. In hetzelfde rapport treft men van andere college's soortgelijke ervaringen aan, nl. deze, dat men door de college's in moderne wiskunde de trek van de studenten naar wiskundige eindstudie aan een Universiteit zeer heeft kunnen stimuleren.

Misschien klinkt U dit allemaal vreemd in de oren. Ik wil een poging tot verklaring doen. De moderne wiskunde eist allereerst een vermogen tot en ook een bereidheid tot abstractie. De oude wiskunde was concreet, was vaak techniek. Nu er echter naast de wiskunde als wetenschap ook techniek als wetenschap beoefend wordt, trekken de mensen met aanleg voor het concrete allereerst naar de Technische Hogescholen. Zij die aanleg hebben om door te dringen tot de abstractie moeten echter nog ontdekken dat ze in de wiskunde terecht kunnen, anders zoeken ze hun heil elders. Op de middelbare school worden de ogen niet op die abstracte zijde gericht. Wel wordt er door sommige leraren wat axiomatic bedreven, maar dat berekent nog geen abstractie en wordt door de leerlingen vaak ervaren als een moeilijk praten van gemakkelijke dingen. Zou de gedachte zo gek zijn dat er in deze hypertechnische tijd een toenemend aantal jongemensen opgroeit, die techniek-moede zijn en die toch behoefte hebben aan een exacte denkwijze, aan deductieve methoden? Zij komen op de M.S. niet aan hun trek, ze hebben een hekel aan ~~passers~~ en linialen; alleen de eerste drie maanden stereometrieonderwijs komen hen wat tegemoet.

Ongemerkt ben ik opnieuw aangeland bij het derde aspect: de aanleg en de behoeften van de leerlingen. Ik verbind hier het 4e aspect mee: de leerlingenstroom, zoals die zich nu voordoet. We raken hier het kernpunt van de moeilijkheden. In 1890 bedroeg het totaal aantal leerlingen dat V.H.M.O. ontving 1,8 pro mille van de bevolking; in 1956 was dit 9,5 pro mille; dat is 5 maal zoveel. Dit geeft nog een te lage indruk van de leerlingenaanwas, omdat het aantal kinderen van 12 tot 20 jaar in 1890 percentsgewijs hoger was dan in 1956. We moeten vergelijken: het percentage kinderen van 12 tot 20 jaar dat in 1890 en dat in 1956 het V.H.M.O. bezoekt. Helaas kon ik daar zo gauw geen getallen voor vinden, wel las ik dat het aantal 12- tot 20-jarigen dat in 1890 voortgezet onderwijs ontving 12 per 1000 bedroeg en in 1956 315 per 1000, dus 26-maal zoveel (percentsgewijs). Onze programma's zijn afgestemd op die 12 pro mille, niet op de massa die ons nu overspoelt. En we kunnen niet

zeggen: verwijder dan alles, wat het programma voor die 12 pro mille niet kan volgen, dat gedooft onze nationale toekomst niet; ook is het onrechtvaardig. Er moeten nu eenmaal veel mensen met middelbare-schoolopleiding komen, mensen die veel letters gegeten hebben en hun gedachten kunnen uitdrukken voor andere mensen; daaronder moet een aantal zijn dat een betere wiskundige vorming gehad heeft dan wij ze nu bieden, maar een ander aantal mag gerust van een groot deel van deze vorming verstoken blijven. Hebt U nooit werkelijk begaafde jongens aangetroffen, die toch te „dom” waren voor de H.B.S.? Ik wel. Ik zou U een voorbeeld kunnen noemen van een zeer begaafde knaap, die in de wiskunde de allerslechtste resultaten behaalde, en die alleen, dank zij de voortreffelijke diplomatieke gaven van de rector, die iets in de jongen zag, telkens bevorderd kon worden, en na veel lijden en gezwoeg het einddiploma Gymnasium α behaalde, en die thans academisch docent is in enige talen uit de Oriënt. Hebt U nooit een collega in een of ander vak ontmoet, die in zijn jonge jaren het einddiploma nooit heeft kunnen halen? Ik wel! Nu vraag ik U: had de M.S. aan die jongens niet iets beters kunnen bieden? Wat al wanhoop heeft er in die harten geheerst, wat al waandenkbeelden hebben zich in die hoofden omtrent de wiskunde gevormd! Men werpt wel eens tegen, dat deze jongens dan toch in ieder geval weten, wat wiskunde is. Ik geloof dat niet; als men ze er naar vraagt, dan zeggen ze dat de wiskunde bestaat uit gekke cirkels en gekke hulplijnen en afschuwelijke formules. Het deductieve element, dat de schoolwiskunde ook bevat, kon niet tot hen doordringen. Als men melk in een gesloten kruik doet en men zet dat de kat voor, en zegt dan vriendelijk: toe poes, drink maar, dan zal het beest niet alleen geen melk krijgen, maar niet eens weten, dat er melk aanwezig is; hij kan de kruik niet baas; melk moet voor hem op een schotel.

Als het aantal kinderen van 12 tot 20 jaar, dat op elke 1000 de M.S. bezoekt, nog steeds van jaar tot jaar toeneemt, dan zal men ook een steeds uitgebreider spectrum krijgen van hun aanleg en belangstelling voor de wiskunde. In dat spectrum zou ik willen onderscheiden:

- a. hen, die niet in staat zijn enige vorm van wiskunde tot zich te nemen;
- b. hen, die met wat moeite de eenvoudigste technieken uit de wiskunde kunnen leren, zonder ooit geheel zeker van hun zaak te zijn;
- c. hen, die juist voldoende resultaten in de wiskunde behalen, als ze er veel moeite voor doen;

- d. hen, die behoorlijke aanleg voor wiskunde hebben, en met ijver uitstekende resultaten kunnen behalen;
- e. hen, die de wiskunde spelenderwijs leren.

Naar mijn mening moet groep a na één jaar in 't geheel geen wiskunde meer volgen; groep b na hoogstens 3 jaar ook niet meer; groep c moet er na 4 jaar mee ophouden, terwijl de groepen d en e er eindexamen in moeten doen. Met het „ophouden” bedoel ik, dat het vak voor hen niet meer *verplicht* gesteld wordt.

Maar wat voor wiskunde moeten we aan deze groepen dan bieden? M.i. moet er voor de groepen d en e een 6-jarig programma komen, daarnaast voor groep b een programma dat voor hen in klas 3 eindonderwijs geeft en voor groep c een program dat in klas 4 eindonderwijs geeft.

U zult niet van mij verwachten dat ik U nu uitgewerkte programma's ga geven, wel wil ik graag enkele gedachten dienaangaande naar voren brengen. Wat geven we aan de groepen d en e? Deze moeten zo voorbereid worden, dat ze op de Universiteit het onderwijs kunnen volgen zonder eerst een salto mortale met hun geest te maken. Daartoe zou ik willen aanbevelen, behalve de differentiaal- en integraalrekening: de complexe getallen en de lineaire algebra. Maar ik zou willen trachten de lineaire algebra abstract in te voeren. Ik sta echter op het standpunt dat abstraheren eist, dat er iets is, waarvan men abstraheren kan. Daarom zou ik vooraf vectoralgebra willen geven, maar dan meetkundig opgezet; ik zal daarom verder van vectormetkunde spreken, ook al denk ik mij daarbij gebruik gemaakt van de algebraïsche schrijfwijze.

Dit moet dan veel verder gaan, dan wat men daarover gewoonlijk in de mechanische leerboeken aantreft, zodat inwendige en uitwendige en blokprodukten ter sprake komen en ook enkele hoofdregels. Dit geeft nl. een prachtige inleiding tot, eventueel vervanging van de stereometrie. Verdere voordelen zijn, dat men dan in de natuurkunde eindelijk het elektrische veld in het middelpunt kan plaatsen door het gebruik der vectoren, terwijl men voor de abstracte algebra voorbeelden krijgt ter illustratie van niet-commutatieve en niet-associatieve produkten.

U bedenke bij dit voorstel goed, dat ik nu enkel met de groepen d en e te maken heb; niet met het mengelmoes, dat thans onze 5e klassen bevolkt. We moeten nu eindelijk de groepen d en e gaan geven wat hun toekomt; dat is tevens een landsbelang.

Verder heeft men in Amerika gunstige resultaten bereikt met iets uit de praedicaten-logica, de statistiek, de verzamelingenleer en de theorie der groepen en ringen. Wij zouden hieruit een keus kunnen doen, en deze vakken voor groep e facultatief stellen.

Wat moet er dan verdwijnen? Het hoge woord moet er uit: de stereometrie, terwijl de planimetrie tot het uiterste beperkt moet blijven, verder de analytische meetkunde en nog iets uit de trigonometrie. Allereerst de stereometrie. Waartoe dient eigenlijk de stereometrie?

1° om de deductieve methode eens goed tot zijn recht te doen komen;

2° om kennis van de ruimtemeetkunde en ruimteinzicht te bevorderen;

3° om feitenkennis bij te brengen aangaande vaste lichamen.

Wat 1° betreft: de deductieve methode komt in de bovengenoemde onderwerpen meer en beter tot zijn recht;

wat 2° betreft: de vectormeetkunde kan deze taak zeer goed overnemen;

wat 3° betreft: de noodzakelijke feitenkennis bestaat hoofdzakelijk uit oppervlakte- en inhoudsformules, die men bij de integraalrekening kan behandelen. Verder bevat de stereometrie zeer veel dood hout.

Ook de toepassing van de logaritmen op de berekening van elementen van een driehoek, door ons nieuwe program met zoveel zorg genoemd, kan gevoegelijk afgeschaft worden. Er zijn nuttiger dingen te behandelen.

En de analytische meetkunde? Als U mijn laatste artikeltje in Euclides gelezen hebt, dan begrijpt U het al.

Voor degenen die mijn artikel in Euclides niet gelezen hebben deel ik mede, dat ik mij daar accoord verklaard heb met de zienswijze van de WIMECOS-commissie, dat de grafieken behandeld moeten worden onafhankelijk van de invoering van coördinaten, en wel er aan voorafgaand; dus grafieken zonder y -as. De commissie wil het daar dan in de algebra bij laten en de invoering van coördinaten geheel aan de analytische meetkunde overlaten, terwijl ik mij tegen een scherpe scheiding van algebra en analytische meetkunde verzet heb; ik wens nl. de oplossing van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden niet te illustreren met de grafieken van 2 al of niet lineaire functies, maar met 2 al of niet rechte lijnen, waarbij de coördinaten van de punten de oplossingen zijn van de onbepaalde vergelijkingen. De WIMECOS-commissie verschuift dus een stukje algebra naar de analytische meetkunde; ik doe andersom. Ik denk mij nu echter de analytische meetkunde geheel afgeschaft op de M.S.; maar als volgt vervangen: de invoering van coördinaten vindt in de algebra plaats, de vectormeetkunde geeft verdere uitbreiding, terwijl tenslotte de lineaire algebra het noodzakelijke voltooit. Er is geen apart vak

analytische meetkunde op de M.S. nodig; de invoering ervan op de H.B.S. komt te laat. Tien jaar geleden zou ik er nog anders over gedacht hebben; de ervaring opgedaan met de lineaire algebra heeft mij overtuigd dat we het vak niet alleen kunnen missen, maar dat het zelfs een gunstige ontwikkeling van de lineaire algebra in de weg staat. Het is daarmee precies zo als met de leerlingen die, als ze in de eerste klas komen, op de lagere school al algebra gedaan hebben: je kunt ze niets goeds meer leren; de feiten zijn hun bekend en de geheel andere aanpak van de M.S. gaat hun voorbij.

Globaal gesproken moet voor de groepen d en e aan het eind van het 4e jaar de klassieke wiskunde afgehandeld zijn, d.w.z. het huidige programma, verminderd met de integraalrekening, de stereometrie en de analytische meetkunde, maar vermeerderd met de vectormetkunde (ook dus de differentiaalrekening). Dit zou tevens de afsluiting kunnen zijn van het H.A.V.O. en van Gymnasium α ; men zou kunnen overwegen of voor het H.A.V.O. en het Gymnasium α een aanvulling in een of andere richting wenselijk ware. De 5e en 6e klassen van het Athenaeum en het β -Gymnasium zijn dan geheel bestemd voor de nieuwe vakken. De toekomstige studenten in de economie zouden ook deze wiskunde althans gedeeltelijk moeten volgen; in ieder geval de diff. en integr. rekening, de lineaire algebra en de statistiek.

Wat de groepen b en c betreft, ook hier zal niet zondermeer met het huidige program volstaan kunnen worden. Misschien zullen die nog weer in 2 facultatieve richtingen uiteen moeten vallen: de zuiver technische groep, voor wie het wiskunde-onderwijs een soort lijntekenen en formulerekenen zal moeten worden, en de meer filosofische groep, voor wie het deductieve element meer op de voorgrond zal moeten komen.

De toekomst van ons wiskundeonderwijs ziet er nu niet rooskleurig uit. Het aantal uren gaat in gestaag dalende lijn. Het aantal leerlingen voor wie het onderwijs te zwaar is, gaat in gestaag stijgende lijn. Hiervan kon wel eens een gestaag stijgende onderwaarderding van het vak een gevolg zijn. Hoeveel leerlingen slagen er tenslotte nog met een 5 en een 6, of met twee vijven, nadat ze er zo 7 of 8 jaar over gedaan hebben! In feite hebben ze nooit iets van de wiskunde begrepen, maar later verkondigen ze: „je hebt niets aan die hele wiskunde; ik ben er ook gekomen, het heeft mij een hoop narigheid en ellende en geld gekost, en ik heb er later nooit meer wat aan gehad. Weggegooide tijd is het!” Intussen hebben zij ons belet aan de goede leerlingen te geven, wat hun toekomt.

Als wij vol willen blijven houden dat de wiskunde alleenzalig-

makend is en aan alle leerlingen tot het eind moet worden onderwezen, dan zouden we de strijd om de wiskunde wel eens kunnen verliezen. Maar als wij bereid zijn een deel, zelfs een groot deel van de leerlingen op tijd los te laten, en de wiskunde in de hogere klassen reserveren voor het daarvoor geschikte deel, dan zullen we de wiskunde misschien weer kunnen opstoten tot een hoogte, die nodig is om ons als volk temidden van andere volken te kunnen handhaven.

Ging mijn inleiding tot nu toe over leerstof en leerling, ook aan de leraar zal enige aandacht gewijd moeten worden. Misschien hebben sommigen Uwer al gedacht: als dit allemaal verwezenlijkt moet worden, dan kan ik mijn biezen wel pakken en met pensioen gaan.

Nu wordt dat geluid in Amerika evengoed gehoord, en men is daar druk in de weer met herscholingscursussen voor de leraren. Het is duidelijk dat hier een offer gebracht moet worden. U zult of Uw tijd en energie vrij moeten maken om U in allerlei onderwerpen in te werken, of U zult bereid moeten zijn het werken in de twee hoogste klassen over te laten aan andere collega's.

Het is mijn mening dat we niet een jaar of tien kunnen wachten voordat we met de moderne wiskunde beginnen. Er is gevaar in uitstel. Ik zou daarom het bestuur van WIMECOS in overweging willen geven:

1° Het bestuur van WIMECOS streve naar een regeling van het V.H.M.O., waarbij differentiatie van het wiskundeonderwijs vanaf het 3e leerjaar mogelijk is, en waarbij voor sommige groepen van leerlingen het wiskundeonderwijs eindigt na 1, 3 of 4 jaar. Het onderwijs in de 5e en 6e leerjaren worde aangepast aan de mogelijkheden van de leerlingen met *goede* aanleg voor wiskunde.

2° Instelling van een commissie, die zich bezighoudt met het opstellen van een leerplan in moderne zin, en niet voor de huidige 5- of 6-jarige H.B.S., maar voor H.A.V.O. en Athenaeum en Gymnasium, of voor een nieuw soort 6-jarige school met de mogelijkheid van aflopende wiskunde na 1, 3 of 4 jaar, en gedifferentieerde programma's voor de aflopende cursussen.

3° Instelling van een leerboekcommissie. Dit is misschien een pijnlijk punt, maar we moeten m.i. zo ver zien te komen dat de nieuwe periode niet wordt ingeluid met 5 à 6 concurrerende leerboeken voor elk nieuw vak, maar dat voor elk nieuw vak één leerboek, zij het in stencil, aanwezig is, samengesteld door kleine ondercommissies van de leerboekcommissie. Men zou daar dan eerst eens een jaar of vijf mee moeten experimenteren, voordat alles definitief wordt.

Tot slot zij aan hen, die een goed overzicht wensen van de moderne wiskunde, voorzover deze enige leerstof zou kunnen bevatten voor de M.S., ter lezing aanbevolen: *Insights into modern mathematics*, 23. Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics, U.S.A., Washington DC, 1957.

VOORSTEL VOOR EEN NIEUW LEERPLAN MET MODERNE ONDERWERPEN UIT DE WISKUNDE, VOOR ATHENAEUM EN GYMNASIUM

door

Dr. H. STREEFKERK

In mijn op 29 december 1958 voor WIMECOS gehouden inleiding besprak ik niet alleen de mogelijkheid en wenselijkheid van de behandeling van moderne onderwerpen uit de wiskunde, maar bepleitte ik vooral ook organisatorische wijzigingen in de opzet van het Middelbaar Onderwijs.

Hoewel deze mij na aan het hart liggen, zou de discussie rondom de nieuwe onderwerpen vertroebeld kunnen worden door de discussie over de organisatie. Daarom stel ik het op prijs hieronder een leerplanontwerp aan te bieden, dat in ieder geval in discussie genomen kan worden, ook al wil men van mijn andere voorstellen niets weten. Reorganisatie of niet: de wetenschap schrijdt voort, en de M.S. moet mee!

Afziende van details komt mijn leerplanvoorstel op het volgende neer:

Klassen I, II en III: het huidige nieuwe programma (voor een eventuele kleinere wijziging: zie beneden).

Klasse IV: alleen *algebra*, *goniometrie* en *differentiaalrekening* van het nieuwe programma (dus geen stereometrie, analytische meetkunde en integraalrekening), vermeerderd met *vector-algebra* in meetkundig gewaad, met algebraïsche symbolen (bijv. $\vec{a}$); inclusief inwendige produkten (bijv. $a \cdot b$), uitwendige produkten (bijv. $\vec{a} \times \vec{b}$) en „blok”-produkten (bijv. $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$) met enkele rekenregels, en toepassingen op de ruimte. Nagegaan zou kunnen worden in hoeverre iets uit de vectoranalyse zou

kunnen worden behandeld (vectorfuncties), vooral met het oog op de natuurkunde. Facultatief: *statistiek*.

Klassen V en VI: *integraalrekening, complexe getallen en lineaire algebra*; de laatste toegepast op lineaire punttransformaties, oplossing van lineaire vergelijkingen en oplossing van meetkundige problemen, ook uit de ruimte, zoals snijding van rechten en vlakken. Men zou nog na kunnen gaan via welke van deze toepassingen de invoering van de lineaire algebra het best zou kunnen geschieden.

Verder nog iets uit de *groepenetheorie*.

Facultatief: voortzetting van de *statistiek* en/of iets uit de *theorie der ringen en lichamen*, evt. uit de *wiskundige logica*.

Wat de vectoralgebra betreft: de eerste beginselen hiervan zijn zeer eenvoudig en bovendien nogal aanschouwelijk; men zou daar best reeds in klas III mee kunnen beginnen; daartoe zou ik dan de logaritmische behandeling van de berekening van de elementen van een driehoek willen schrappen. Deze is toch volkomen uit de tijd, nu berekeningen van allerlei aard niet meer met logaritmen, maar met de rekenmachine geschieden. Met het oog op de rekenmachine zou bij de behandeling der ringen iets aan talstelsels gedaan kunnen worden (in zeer elementaire vorm kan dit natuurlijk ook wel bijv. in klas II gebeuren).

BOEKBESPREKING

Dr. W. Peremans, *Diepte in de Wiskunde*, rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de wiskunde aan de Technische Hogeschool te Eindhoven. 16 bladz. J. B. Wolters, Groningen 1958 / 1,50.

Op de algemene vergadering van Wimecos op 29 december 1958 werd in de gehouden voordrachten er de nadruk op gelegd hoe dringend vernieuwing van het wiskundeonderwijs op onze scholen voor V.H.M.O. is.

Bovenvermelde oratie raakt eigenlijk aan dezelfde vragen, zij het dan op hoger niveau. Zij loopt uit in twee conclusies:

- a) we moeten de a.s. ingenieur wiskunde geven, die hij gebruiken kan;
- b) we moeten het hem niet nodeloos moeilijk maken.

In verband hiermede citeer ik nog: „... elementair behoeft niet per se identiek te zijn met hetgeen in het verleden het eerst gedoceerd werd. De moderne wiskunde heeft de grenzen verlegd en heeft door nieuwe uitgangspunten en nieuwe methoden begrippen elementair gemaakt die dat vroeger niet waren.”

Zo zou er meer te citeren zijn; opmerkingen die wij, wiskundedocenten bij het V.H.M.O., goed doen eens ernstig te overwegen.

Ieder docent zij de lezing van deze rede hartelijk aanbevolen.

J. F. Hufferman.

OVER DE TAFEL VAN DR. VREDENDUIN

door

P. WIJDENES

In het Novembernummer van Euclides (34e jaargang 1958/59) vinden we een artikel van Vredenduin onder de titel:

Een tafel van goniometrische functies, waarvan het argument in radialen is uitgedrukt.

De lezer wordt verzocht blz. 73 op te slaan, regel 11 v.o.; in de volgende regel staat: „het argument in duizendste delen, maar ook in duizendste delen van π radialen”. Hij komt tot het laatste, hij geeft de hoeken in π radialen; dat is: hij geeft getallen uit de gewone sinustafel.

$k\pi$ rad is immers $k \times 180^\circ$ (rad zonder punt erachter, dus net als log, sin, km). En nu maken we maar eens een begin met de tafel van blz. 76; voor $k = 0,001$ hebben we

$$0,001 \times 180^\circ \doteq 18 \times 6 \times 6'' = 648'' = 10'48''.$$

In Noordhoff's Tafel in 4 dec. vindt men deze waarde door inlassing

$$0,0029 + \frac{4}{5} \times 3e_4 = 0,0029 + 2,4e_4 = 0,0031.$$

In de schooltafel $0,00291 + \frac{4}{5} \times 29e_5 = 0,00291 + 23,2e_5 = 0,00314$. In beide tafels is aangegeven, dat deze inlassing geoorloofd is.

De getallen van blz. 76—82 van Euclides zijn niet anders dan de vier verhoudingen van de volgende hoeken:

$10'48''$, $21'36''$, $32'24''$, $43'12''$, $54' = 0,005\pi$; zie in de tafel met 4 dec.: 0,0157; 0,9999; 0,0157 en 63,66 (op blz. 76 de eerste 10 getallen in 5 dec.); en zo gaan we door: telkens 11' er bij, 12'' eraf: $1^\circ4'48''$, $1^\circ15'36''$, $1^\circ26'24''$, $1^\circ37'12''$, $1^\circ48'$; zie maar in Noordhoff's tafel in 4 dec. op blz. 58 en in Euclides achter 0,010 op blz. 76. Zo'n tafel is dus eenvoudig te maken.

Nog eenvoudiger met mijn Five Place Tables, decimal system.

De decimale verdeling heeft 100 gr. in een rechte hoek, dus 2000 decigraden in een gestrekte. Het tafeltje van blz. 76 en volgende geeft dus de verhoudingen van 2, 4, 6, ... decigraden; bv. 12,6 gr.

	sin	cos	tg	cotg
Vr. blz. 77, 0,063	0,19663 1966	0,98048 9805	0,20055 2005	4,98639 4,986

Genoeg: de getallen in *Euclides* op blz. 76—82 zijn niet anders dan de goniometrische verhoudingen van een aantal hoeken uit de gewone tafel voor de scholen. Voor het begrip en het werken met radialen van geen waarde. Boven de kolommen staat $k\pi$; dat zijn dan $k\pi$ radialen; maar π radialen = $180^\circ = 200$ gr. Dat men 30° , 60° , 90° , ... aanduidt met $\frac{1}{6}\pi$ (rad), $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, ... goed, dat is om de leerlingen eraan te wennen en te leren lezen bv. $\sin \alpha = \sin (\pi - \alpha)$; $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$; enz.¹⁾

Nuttig en nodig; maar de goniometrische verhoudingen van $k\pi$ zijn *volslagen overbodig*. Dat ze overbodig zijn, dat niemand er behoefte aan gevoelde, is de reden, dat ze ontbreken in de grote tafels met veel bijtafels. Ik heb maar één tafel (van de 15 grote tafels), die één bladzijde geeft en dan in honderdsten. De reden, dat dat tafeltje is opgenomen, wordt gegeven in de noot onderaan de bladzijde: "These functions are useful in the solution of wave equations such as the displacement equation of a sound wave in the form:

$$y = A \sin 2\pi nx,$$

without the necessity of reducing the angular notation either to radians or to degrees in order to find the value of the function." Het bovenstaande over punt *a* blz. 73 van het artikel.

We komen tot *b*: „Moet men oplossen een vergelijking van het type $\sin x = a$, dan"; nu *ga ik verder*: slaat ieder de sinustafel op in zijn log tafel; $\sin x = 0,7665$ geeft $50^\circ 3'$ en $129^\circ 57'$, beide $+ 2k\pi$. Wenst hij $50^\circ 3'$ tot radialen te herleiden, dan gebruikt hij een herleidingstafel (zie in de genoemde tafels opv. blz. 80 en blz. 78; hij vindt $0,8736$ (rad). Maar ... wat zegt dit hem? Waarom zouden we dat eisen?

Erger nog in het artikel: $x = 0,278$; zegt dat de leerling iets, ons dan? Het antwoord is niet anders dan $278 \times 18 \times 6 \times 6'' = 180144''$, afgerond in min. $50^\circ 2'$.

Ik meen, dat men bij een vergelijking als $\sin x = 0,7821$, $\cos x = -0,2531$, $\operatorname{tg} x = -6,1827$ de hoeken gewoon moet opzoeken in de schooltafel en ze zeker *niet moet uitdrukken in duizendste*

¹⁾ Dit gebeurt al lang in mijn *Beknopte driehoeksmeting* § 60, 61; in *Noordhoff's Tafel* in 4 dec. blz. 80, in de *Schooltafel* blz. 78 is een tafeltje opgenomen voor omzetting van gr, min en sec in radialen.

delen van 180° (waarvoor men dan π rad schrijft). Zie het slot van dit artikel.

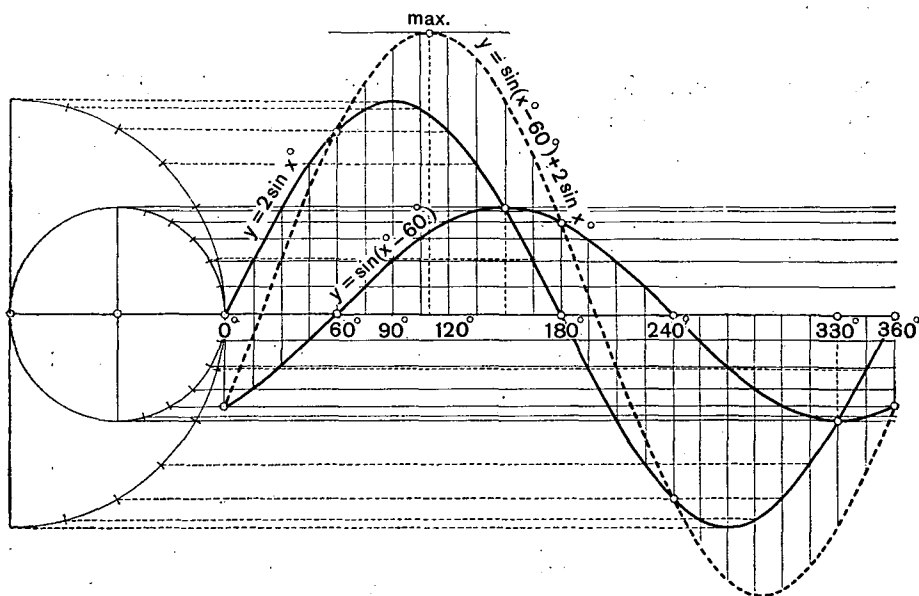
We komen tot c over het tekenen van de grafiek. Zijn de getallen misschien nodig voor het tekenen van de grafiek? Op de x -as uitzetten $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$ enz.; opzoeken in het tafeltje, dat in Euclides staat, voor de sinus dus $\sin \frac{1}{6}\pi$ (rad): $\frac{1}{6}\pi = \sin 0,167\pi = 0,5009$, (het is 0,5, dat weet elke leerling), vermenigvuldigen met r bv. 3 cm en uitzetten 15 mm; Liever dan dit gedoe in de gewone tafel de goniometrische verhoudingen opzoeken van 30° , 60° , 90° , enz.

Zou men de grafieken willen maken met de getallen uit het tafeltje in Euclides of met de getallen uit de schooltafel (wat eenvoudiger is), dan wil ik de collega's wel verzekeren, dat *dit niet de weg is voor het maken van grafieken*, die men bij het V.H.M.O. zal behandelen.

Hoe men de grafieken tekent?

Hier kan ik niet beter doen, dan de figuur te maken, die in 1958 voor het eindexamen H.B.S. werd gevraagd nl.:

a. Teken voor $0^\circ \leq x^\circ \leq 360^\circ$ in één figuur de grafieken van de functies $\sin(x^\circ - 60^\circ)$ en $2 \sin x^\circ$.



In vraag c wordt het maximum van hun som gevraagd; de grafiek van de som vindt men ook op de figuur.

Voor deze figuur is geen enkel getal opgezocht, laat staan uitgerekend. Ieder ziet, hoe de figuur gemaakt is; de kleine cirkel met

de verdeling 0° , 15° , 30° , enz. tot en met 360° ; op de linkerhelft zijn geen deelpunten nodig; de cirkel met tweemaal de straal en dezelfde deelpunten; de horizontale lijnen, die de ordinaten (de sinussen) op de juiste plaats brengen. In potlood een werkje van nauwelijks 10 minuten, mits men voor de evenwijdige lijnen twee driehoeken gebruikt.

Voor het tekenen van een cosinus begint men in het „noordpunt” van de cirkel en gaat rechtsom. Op deze manier tekenen we de grafieken van:

$\sin x$, $a \sin x$; $1 - \sin x$, $1 + \sin x$, $\sin ax$, $\sin (x + \alpha)$, $\cos x$, $a \cos x$, $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2}x$, $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2}x$, $\cos ax$, $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ en zelfs van $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{2}{1 + \cos 2x}$; eerst: $\cos 2x$, dan de x -as 1 laten zakken; dan met de

eigenschap van de macht van P in een cirkel het quotiënt op 2.

Zelfs bij deze wordt geen enkel getal opgezocht; helemaal niets berekend; geen tafel; geen 0,001 van een gestrekte hoek, geen radialen. Wil men eens zien, hoe het zou moeten met het tafeltje uit Euclides? Zó:

Voor $\frac{1}{12}\pi = 0,083\pi$ is $\cos \frac{1}{12}\pi = 0,9662$; $\cos^2 \frac{1}{12} = 0,9335$; $\frac{1}{0,9335} = 1,071$; met r vermenigvuldigd: $1,071 r$; en dan op de juiste plaats op de x -as de ordinaat afzetten!

Nu hebben we nog maar één waarde!

Maar... *veel en veel eenvoudiger en vlugger en beter is het geen tafel op te slaan, niet te cijferen, maar enkel en alleen meetkundig.* In de „250 Opgaven” zijn er maar 2 bij de goniometrie, waarbij men

moet rekenen nl. $\frac{\sin x}{2 + \sin x}$ en $\frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$; men kan deze beter weglaten m.i.

Tot zover hebben we laten zien:

- 1) $k\pi$ (rad) en de goniometrische verhoudingen ervan staan in elke schooltafel; ze zijn nl. $k \cdot 180^\circ$; $0,137\pi$ en zulke komen niet voor en maken het voor de leerlingen maar lastig; $\frac{1}{2}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$ enz. komen voor, maar die kan men, als men hun waarden wil hebben, gewoon in elke tafel opzoeken.
- 2) Voor het maken van een grafiek zijn helemaal geen getalwaarden nodig; integendeel. *De waarden ziet men in een cirkel en brengt die gemakkelijk op de juiste plaats.*

- 3) Er wordt in het artikel van Vredenduin terecht gezegd, dat men goed doet ook eens te werken met radialen; maar zelf doet hij dat niet met k radialen, maar met $k\pi$ radialen en dat is, op zijn zachtst uitgedrukt, ongewenst.

Er is nog wat. In de analyse, reeds in de bovenbouw van het V.H.M.O. komen we tegen:

Gegeven: $f(x) = \cos x$; *bereken* $f'(x)$ en tientallen van dat soort. Bij verdere studie krijgt men reeksontwikkelingen b.v.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots \text{ met vele andere te vermeerderen.}$$

Bij al deze is x een of ander getal b.v. 1; 2, 4; $-1,6$, wat je maar wilt. x is een getal, dat een aantal radialen uitdrukt; laat ik maar een voorbeeld nemen:

$$\cos 0,1 = 1 - \frac{10^{-2}}{2} + \frac{10^{-4}}{24} - \frac{10^{-6}}{720}; \text{ men schrijft dit nog wat ge-}$$

$$\text{makkelijker zo: } \cos 0,1 = 1 - \frac{e_2}{2} + \frac{e_4}{24} - \frac{e_6}{720}; \text{ berekening als volgt:}$$

1	0,005
0,000 004 167	0,000 000 001 39
1,000 004 167	0,005 000 001 4
0,005 000 001	←
0,995 004 17	nk in 8 dec.

Dezelfde reeksontwikkeling geldt ook, als men $0,1\pi$ neemt; ik geef het de lezers te doen.

Altijd en overal is x in zo'n geval een gewoon getal radialen en niet een aantal π radialen.

Elke leraar zal bij het nieuwe program komen tot $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$; is hier x een gewoon getal radialen of $k\pi$ radialen?

Op blz. 276 van mijn Leerboek der goniometrie en trigonometrie

wordt afgeleid: $x = \frac{d}{r} \sin x + \frac{2b}{r^2}$ (wet van Kepler; voor $b = \frac{1}{4}r^2$

en $d = \frac{1}{2}r$ wordt de vergelijking $2x - 1 = \sin x$.

Er komt uit $x = 0,88786$ (radialen) $= 50^\circ 52' 14''$; met een grafische oplossing.

Moet de school iets leren in de bovenbouw, dat in de analyse in dezelfde bovenbouw en bij voortgezet onderwijs in geen enkel geval gebruikt werd en wordt en zal worden?

Voor de school is ruimschoots voldoende: 2 blz. gon. verhoudingen

in honderdsten van radialen; 1 blz. omzetting van radialen in graden en minuten en 1 blz. omgekeerd.

Ziehier het begin van de eerste bladzijde.

GONIOMETRISCHE VERHOUDINGEN
HOEKEN IN RADIALEN

x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	x	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$
0,01	0,0100	1,0000	0,0100	0,51	0,4882	0,8727	0,5594
,02	,0200	0,9998	,0200	,52	,4969	,8678	,5726
,03	,0300	,9996	,0300	,53	,5055	,8628	,5859
,04	,0400	,9992	,0400	,54	,5141	,8577	,5994
,05	,0500	,9988	,0500	,55	,5227	,8525	,6131
0,06	0,0600	0,9982	0,0601	0,56	0,5312	0,8473	0,6269
,07	,0699	,9976	,0701	,57	,5396	,8419	,6410
,08	,0799	,9968	,0802	,58	,5480	,8365	,6552
,09	,0899	,9960	,0902	,59	,5564	,8309	,6696
,10	,0998	,9950	,1003	,60	,5646	,8263	,6941
0,11	0,1098	0,9940	0,1104	0,61	0,5729	0,8196	0,6989
,12	,1197	,9922	,1206	,62	,5810	,8139	,7139
,13	,1296	,9916	,1307	,63	,5891	,8080	,7291
,14	,1395	,9902	,1409	,64	,5972	,8021	,7445
,15	,1494	,9888	,1511	,65	,6052	,7961	,7602

Een tafel in duizendsten van radialen is voor het V.H.M.O. volslagen overbodig. Ook deze in honderdsten van radialen zal maar weinig voorkomen; in de hele bovenbouw op zijn hoogst een keer of tien. Als wij nl. hebben $\cos x = 0,6198$, dan vinden we in de gewone schooltafel $x = \pm 51^\circ 42' + 2k\pi$. Wil men er beslist radialen bijhalen, dan zoeken we $51^\circ 42'$ op in een herleidings-tafeltje.

Moet of wil men nauwkeurig werken met radialen, dan neme men Noordhoff's Wiskundige Tafels, waarbij in de tafel van de natuurlijke waarden de hoek in radialen en in graden en minuten (met bijtafeltjes voor de seconden) naast elkaar wordt opgegeven b.v.

4°	rad	sin	cos	tg	cotg		
10'	0,07272	0,07266	0,979730	0,07287	13,72674	1,49087	50'
						rad	85°

Voor voortgezette studie goed en vrijwel onmisbaar; maar geen tafelwerk voor de school.

Hoekmaten zijn $\left\{ \begin{array}{l} \text{de 60-delige graden, minuten en seconden} \\ \text{of de 100-delige graden, decigraden, enz.} \end{array} \right.$
Er is helemaal geen behoefte, was er niet en zal er ook niet komen, aan een maat van 2 decigraden, die Vredenduin voorstelt.

Tot slot nog een opmerking bij blz. 22 van de „250 Opgaven”. bovenaan staat: ¹⁾ *De hoeken zijn in radialen uitgedrukt. Is dat zo?*

We slaan de antwoorden op en zien daar bij de nummers 6, 15, 17, 19, 21 en 45 de gewone graden en minuten; dus niet in π radialen; goed en normaal. De hoeken, die „mooi” uitkomen, 15° , $22\frac{1}{2}^\circ$ en hun veelvoud, worden uitgedrukt met π ; dan kan b.v. $\frac{1}{12}\pi$, $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{1}{8}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{1}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, $\frac{9}{8}\pi$, $\frac{17}{6}\pi$, $1\frac{1}{2}\pi$, $\frac{11}{6}\pi$, $\frac{13}{8}\pi$, $\frac{13}{12}\pi$, $\frac{17}{12}\pi$. Het is goed; maar ziet de leerling die beter van 15° , 75° , $22\frac{1}{2}^\circ$, . . . en van achter af 255° , 195° , $292^\circ 30'$? Zo, gezien deze antwoorden, wordt de tafel van Vredenduin ook nog *volkomen doelloos*. Uit nr. 17 tg $2x = \cos x$ komt behalve $x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ nog $\sin x = 0,3660$; x wordt niet met het tafeltje opgezocht nl. $= 0,119\pi$, maar gewoon $21^\circ 28' + k.360^\circ$, wat normaal is; maar in tegenspraak met wat er in het artikel onder b is gezegd en met wat er boven de vraagstukken onder 1) staat.

Naschrift van Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Om misverstanden uit de weg te ruimen, wil ik beginnen met op te merken, dat mijn bedoeling met het publiceren van de radialen-tafel uitsluitend geweest is de tijd te overbruggen, gedurende welke het onderwijs behoefte aan een dergelijke tafel zou hebben, terwijl deze nog niet in de in gebruik zijnde tafels voorkwam.

Verder blijkt uit de inleiding, die in het artikel in Euclides aan de tafel voorafgaat, dat ik *geaarzeld* heb tussen een tafel met argumenten in $0,001\pi$ rad nauwkeurig en een tafel met argumenten in $0,001$ rad nauwkeurig. Door de ervaring opgedaan bij het mede samenstellen van de 250 opgaven en van het herschrijven van mijn goniometrieboek heb ik enig inzicht verkregen in het gebruik, dat van een dergelijke tafel gemaakt zal worden. Dit gaf mij aanleiding de eerste oplossing te prefereren om redenen genoemd in het artikel. Ik heb begrepen, dat niet ieder het daarmee eens zou zijn en heb daarom op pag. 74 vermeld, waar men de gegevens kan vinden voor een tafel met argumenten in $0,001$ rad nauwkeurig. Inderdaad, al is de eerste tafel voor *schoolgebruik* m.i. gemakkelijker, de tweede is uit wetenschappelijk oogpunt beter.

De hele kwestie is m.i. niet van groot belang. Wel van belang is, dat op de duur slechts één soort tafels gebruikt wordt. Ik hoop, dat de schrijvers van logaritentafels, waartoe ik niet behoor, zich met elkaar zullen verstaan om een oplossing te vinden, die volgens hen het best aan het nieuwe programma aangepast is. Geeft men dan aan de opvatting van Wijdenes de voorkeur; dan zou ik met hem willen propageren een tafel met argumenten in twee decimalen, waarbij ik mij echter afvraag, of het dan noodzakelijk is de uitkomsten in vier decimalen te geven; is drie niet voldoende? Aan een tafel voor het omrekenen van radialen in graden en omgekeerd, heb ik geen enkele keer behoefte gevoeld.

Het is de uitdrukkelijke wens van de redactie van Euclides, dat in dit tijdschrift meningen naast elkaar gezet worden, echter dat daarna niet tot polemiek wordt overgegaan. Vandaar, dat ik met het bovenstaande volsta en niet op details uit het artikel van Wijdenes inga.

BOEKBESPREKING

Dr. P. M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldorf. *Werkboek der algebra 3*; 2e druk; 105 blz.; prijs f 4.25; Muusses, Purmerend, 1958.

In deze 2e druk is volledig rekening gehouden met het nieuwe programma. Het boek maakt een degelijke indruk; de definities en bewijzen zijn in het algemeen eenvoudig en duidelijk. Vooral het limietbegrip is eenvoudig gehouden; alleen op blz. 87 wordt een meer precieze definitie gegeven.

Een belangrijke eigenschap van het boek is, dat een zelfde onderwerp in verschillende sterk uiteenliggende hoofdstukken wordt behandeld. Hierdoor worden de moeilijkheden gescheiden; dit is stellig een voordeel, al wordt het overzicht er enigszins door bemoeilijkt. Aan het eind staat echter een overzicht van de regels der algebra, met verwijzing naar de nodige bladzijden; hierdoor kunnen de leerlingen dan weer vinden, wat ze nodig hebben. Een bezwaar vind ik, dat de schrijvers zich niet *nog* stricter aan het programma hebben gehouden door allerlei dingen op te nemen, die er niet toe behoren. Ik noem hiervan: het binomium van Newton, het getal e , de afgeleiden van logaritmische en exponentiële functies; grafieken van gebroken functies met kwadratische teller en/of kwadratische noemer; de grafiek van de wortel uit een kwadratische functie. Het binomium wordt o.a. gebruikt om de afgeleiden van x^n te bepalen, maar dit kan ook eenvoudig met volledige inductie. Een groter bezwaar heb ik tegen de behandeling van de complexe getallen. Bij de eerste behandeling wordt i bepaald door $i^2 = -1$; de tweewaardigheid van $\sqrt{x}$, waarin x een complex getal is wordt wel genoemd, maar er wordt niet verder op ingegaan. Bij de 2e behandeling worden wel argument en modulus behandeld, maar er wordt geen toepassing van gemaakt. Wil men toch de complexe getallen behandelen, dan lijkt het me gewenst, dat de leerlingen zien, wat ze er mee doen kunnen; zo zou ik stellig b.v. de verg. $x^6 = 1$ willen behandelen.

Afgezien van bovengenoemde kleine bezwaren, kan ik het boek van harte aanbevelen.

P. Bronkhorst

Recreatie

5. Men kan een kubus door de ribben in drie gelijke delen te verdelen en door de deelpunten vlakken evenwijdig aan een zijvlak aan te brengen, verdelen in 27 delen. Men snijdt de kubus daarbij 6 maal door.

Nu kan dit doorsnijden ook geschieden, als men de reeds verkregen delen niet in de oorspronkelijke stand laat, maar ze op willekeurige wijze op elkaar stapelt. Er wordt gevraagd, of men de 27 delen dan ook met minder dan 6 keer doorsnijden zou kunnen verkrijgen.

We gaan nu uit van een regelmatig viervlak en verdelen dit op analoge manier door vlakken evenwijdig aan een zijvlak, die de ribben in drie gelijke delen verdelen. Men verdeelt het viervlak dus door het 8 keer door te snijden. In hoeveel delen wordt het viervlak daardoor verdeeld?

Zou men dezelfde delen ook kunnen verkrijgen door middel van een geringer aantal keren doorsnijden, als men de reeds verkregen stukken weer op willekeurige wijze op elkaar mag stapelen?

6. Stelling. Het kleinste positieve getal is groter dan 1.

Bewijs. Stel het kleinste positieve getal is x . Dan is $x^2 > x$ (omdat x het kleinste positieve getal is, x^2 eveneens positief is en $x^2 = x$ uitgesloten is, doordat we weten, dat 1 niet het kleinste positieve getal is). Uit $x^2 > x$ en $x > 0$ volgt $x > 1$.

Als U in het volgende nummer tevergeefs naar de ontzenuwing van deze redenering zoekt, hopen we, dat U daar niet uit zult concluderen, dat de redactie het ook niet kon vinden.

OPLOSSING

(Zie voor de opgave het vorige nummer).

4. De fout is in beide gevallen daarin gelegen, dat de overgang van $n = 1$ op $n = 2$ niet juist is. Als men slechts twee personen heeft, gaat de redenering in het bewijs van de eerste stelling niet op. En in het tweede bewijs is zelfs expliciet vermeld, dat we

$$(n > 1 \rightarrow n = n + 2) \rightarrow (n + 1 > 1 \rightarrow n + 1 = n + 1 + 2) \quad (1)$$

moeten bewijzen, als $n \neq 1$, terwijl deze beperking ongeoorloofd is. En als $n = 1$, dan gaat (1) over in

$$(1 > 1 \rightarrow 1 = 1 + 2) \rightarrow (1 + 1 > 1 \rightarrow 1 + 1 = 1 + 1 + 2). \quad (2)$$

Hierin is $1 > 1$ niet juist en dus $1 > 1 \rightarrow 1 = 1 + 2$ wel juist. Echter is $1 + 1 > 1$ juist en $1 + 1 = 1 + 1 + 2$ niet, zodat $1 + 1 > 1 \rightarrow 1 + 1 = 1 + 1 + 2$ niet juist is. Dus is het eerste lid van (2) wel en het tweede lid niet juist, waardoor de gehele implicatie (2) onjuist wordt. Ook hier loopt het dus spaak, als we van $n = 1$ op $n = 2$ willen overgaan.



N.V. PHILIPS' GLOEILAMPENFABRIEKEN

EINDHOVEN

Voor de

RESEARCHAFDELING

van het

REKENCENTRUM

wordt gezocht een academisch gevormd

WISKUNDIGE

(doctor, doctorandus, wisk. ir.)

in verband met de uitbreiding van
de wetenschappelijke staf.

*

Sollicitatiebrieven te richten aan de
afdeling Personeelzaken,
Willemstraat 20, Eindhoven, onder nr. E 59153.

In voorbereiding:

The Theory of THIN SHELLS

door V. V. Novozhilov

vertaald door P. G. Lowe

verzorgd door J. R. M. Radok

This book is devoted to the linear theory of thin shells and it elucidates the inherent problems from a unified point of view which essentially consists of the wide utilization of complex transformations. The underlying method (the idea for which originated from the Zürich school) has been generalized here to include all problems of the linearized theory of shells.

verschijnt zomer 1959

"I hope that the publication of this translation will in some measure contribute to professional and social interchanges between specialists in the theory of elasticity of the Soviet Union and of other countries",

V. V. Novozhilov, Leningrad.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

BINNENKORT VERSCHIJNT

de 23e druk van

Noordhoff's logaritmentafel

in 4 decimalen

de bekende tafel voor schoolgebruik!

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar