EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

34e JAARGANG 1958/59
VIII - 1 MEI 1959

INHOUD:

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

HET INTERNATIONALE MATHEMATISCHE CONGRES IN 1958

door

Dr. W. J. THIJSSEN en Dr. J. H. WANSINK

In augustus 1958 werd te Edinburgh het internationale mathematische congres gehouden. In het onderstaande belichten we eerst enkele algemene aspecten van dit congres en brengen vervolgens verslag uit over de werkzaamheden en de resultaten van de historisch-pedagogische sectie ervan.

Bij de verschillende onderdelen is tussen haakjes aangeduid van wiens hand dit onderdeel is. De inhoud van het gehele verslag komt vanzelfsprekend voor ons beider verantwoording.

A. (Th.) *Organisatie van het congres.*

Toen het congres op donderdag 14 augustus, des morgens te 10 uur, door de Lord Provost van Edinburgh in MacEwan-Hall werd geopend, bleek al direct dat de belangstelling zeer groot was. En inderdaad, de ledenlijst bevatte de namen van ongeveer 1700 gewone en een 600-tal buitengewone leden. In deze eerste plenaire zitting werd prof. W. V. D. Hodge (Cambridge) tot congresvoorzitter gekozen. In de namiddag waren alle leden de gasten van het gemeentebestuur van Edinburgh tijdens een ontvangst in de fraaie tuinen van Lauriston Castle, een landhuis op enige afstand van de Schotse hoofdstad gelegen en eens bewoond door de vader van de aan mathematici welbekende John Napier.

De eigenlijke congreswerkzaamheden begonnen op vrijdag 15 augustus en waren verdeeld over acht secties, waarvan een aantal nog weer onderverdeeld waren, namelijk:

sectie	I	Logic and foundations
	IIa	Algebra
	IIb	Theory of numbers
	IIIa	Classical analysis
	IIIb	Functional analysis
	IV	Topology
	Va	Algebraic geometry
	Vb	Differential geometry
	VI	Probability and statistics

VIIa Applied mathematics
VIIb Theoretical physics
VIIc Numerical analysis
VIII History and Education

Iedere ochtend, en in de regel ook iedere namiddag, begon met lezingen van één uur, waarbij we telkens de keuze hadden uit twee of drie onderwerpen die een samenvattend of algemeen oriënterend karakter droegen. Ze werden gehouden door sprekers die hiertoe door het congresbestuur waren uitgenodigd. Verder waren er lezingen van een half uur en korte voordrachten van 15 minuten. Aan de tijdschemata werd over het algemeen behoorlijk de hand gehouden en ook in andere opzichten bleek het congres goed te zijn voorbereid. Excursies, culturele- en gezelligheidsavonden ontbraken natuurlijk niet op het programma.

Welke is nu de plaats en de betekenis van de historisch-pedagogische sectie in het geheel van het internationale mathematische congres?

De *algemene* voorbereiding van een internationaal mathematisch congres berust bij de International Mathematical Union (I.M.U.). Daarnaast bestaat de Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (C.I.E.M.), een organisatie waarvan de doelstelling door de naam voldoende wordt aangeduid. De I.M.U. wijst voor elke periode van vier jaren de voorzitter van de C.I.E.M. aan en voorts tien "membres libres" ("members at large"). Daarnaast is elk land dat in de C.I.E.M. is opgenomen vertegenwoordigd door twee „délegués nationaux". Voor de periode 1954—1958 was prof. dr. J. C. H. Gerretsen membre libre, prof. dr. H. Freudenthal en dr. J. H. Wansink waren délegués nationaux voor Nederland. Het reglement van de C.I.E.M. wordt opgesteld door de I.M.U. [1]) De C.I.E.M. bestaat, met onderbrekingen tengevolge van de wereldoorlogen, al sinds 1908, toen op het internationale mathematische congres te Rome het besluit werd genomen tot instelling van een internationale onderwijscommissie, waarvan Felix Klein (Göttingen) de voorzitter zou worden. In 1952 besluit de I.M.U. te Rome tot de reorganisatie van de C.I.E.M., die tot 1954 onder leiding van prof. dr. A. Châtelet (Parijs) en van 1954—1958 onder leiding van prof. dr. H. Behnke (Münster) stond.

De betekenis van de historisch-pedagogische sectie werd en wordt

[1]) Zie: Dr. Joh. H. Wansink: „de Nederlandse onderwijscommissie voor wiskunde", Euclides XXX, blz. 79—81.

misschien nog wel onderschat. Nog steeds is het gevaar niet denkbeeldig dat zij die een internationaal mathematisch congres als een zuiver wetenschappelijke aangelegenheid zien, deze sectie als een soort aanhangsel en als iets van geringere importantie beschouwen. Geheel ten onrechte. Immers, geheel afgezien van het feit dat de geschiedenis van de wiskunde zich evengoed leent voor zuiver wetenschappelijke arbeid als welk ander gebied der mathesis ook en dat de didaktiek en de methodiek van het wiskundig onderwijs eveneens een wetenschappelijke fundering toelaten, het werk van genoemde sectie is reeds daarom zo belangrijk, omdat het rechtstreeks te maken heeft met de opleiding van nieuwe generaties van wiskundigen. De *plaats* van het werk van de C.I.E.M. op de achtereenvolgende internationale mathematische congressen heeft door de jaren heen vaak moeilijkheden gegeven die op verschillende wijzen zijn opgelost. Werd soms de organisatie van de pedagogische sectie van het congres geheel aan de C.I.E.M. overgelaten, andere keren kreeg de C.I.E.M. gelegenheid om ten congresse de door haar samengestelde rapporten uit te brengen. Zo was het in 1954 in Amsterdam, zo was het in 1958 in Edinburgh.

Afgezien van enkele lezingen van een half uur, waarover verderop gerapporteerd wordt, stonden de eerste drie dagen van het congres in Edinburgh geheel in het teken van de C.I.E.M. Ze waren gereserveerd voor de bespreking van een drietal rapporten over onderwerpen die, sinds het congres van 1954 te Amsterdam, door de nationale subcommissies waren bestudeerd en waarvan het plan ontworpen was door het uitvoerend comité van de C.I.E.M. en vastgesteld op de vergadering van dit comité op 2 juli 1955 te Genève.

Deze rapporten werden uitgebracht in de ochtendzittingen; in de namiddagbijeenkomsten konden dan eerst de nationale rapporteurs, die hiertoe de wens te kennen hadden gegeven, het woord voeren voor een nadere toelichting, met een spreektijd van een kwartier, terwijl er daarna gelegenheid was voor algemene discussie.

De overige dagen waren gewijd aan onderwerpen, die met de bovengenoemde niet of slechts zeer zijdelings in verband stonden.

Alle zittingen van de achtste sectie hadden plaats in Moray-House, het training college van de pedagogische faculteit van Edinburgh-University. Was, zoals reeds opgemerkt, de belangstelling voor het congres als geheel zeer groot, ook die voor de historisch-pedagogische sectie was zeer bevredigend. Naar schatting waren in de regel een 80 à 100 personen in de collegezaal van Moray-House aanwezig.

Welke zijn nu onze indrukken geweest? We mogen zeggen dat de lezingen, zowel naar de inhoud als naar de vorm, over het algemeen goed, sommige zelfs zeer goed verzorgd waren en dat ook de voordracht het mogelijk maakte ze goed te volgen. In het bizonder geldt dit voor de drie onderwijskundige rapporten en ook, om een enkel voorbeeld te noemen, van de lezing van prof. J. E. Hofmann, getiteld: „Ueber eine Euklid-Bearbeitung des Albertus Magnus".

Helaas waren er ook inleiders, die blijkbaar niet begrepen, dat er aan een goede voordracht bepaalde eisen gesteld mogen worden, die meenden de hun toegemeten spreektijd te moeten gebruiken door zich diep over een lijvig, getypt manuscript te buigen en, zonder het auditorium iets meer dan een vluchtige blik of in het geheel geen blik te gunnen, dit manuscript in een zeer snel tempo op te lezen, en dan meestal in een taal die niet hun moedertaal was. De uitspraak liet daarbij soms te wensen over en één maakte het zo bont, dat het even duurde voor we begrepen dat hij engels trachtte te spreken. Dat zoiets nodeloos zware eisen stelt aan het concentratievermogen van de toehoorders spreekt vanzelf. Gelukkig waren de discussieleiders na afloop meestal wel in staat om een samenvatting te geven.

We bespreken nu onder B de onderwijsrapporten en onder C en D de kortere voordrachten.

B. (Th.) *Rapporten van de C.I.E.M.*

De drie algemene rapporten handelden over de volgende onderwerpen:

1. *Mathematical instruction up to the age of fifteen years.*
   Rapporteur: Prof. H. F. Fehr van de Columbia University te New-York.

2. *The scientific bases of mathematics in secondary education.*
   Rapporteur: Prof. Dr. H. Behnke van de Universiteit te Münster (Westfalen).

3. *Comparative study of methods of initiation into geometry.*
   Rapporteur: Prof. Dr. H. Freudenthal, hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht.

1. Over het eerste rapport kan ik kort zijn. Het bevat een overzicht van de wijze waarop in de verschillende landen wiskunde onderwezen wordt aan kinderen van 6—15 jaar. Er blijkt uit, dat het aanvankelijk rekenonderwijs in de eerste vier klassen van de lagere school overal ter wereld wel ongeveer hetzelfde is,

zowel wat betreft de leerstof als de behandelingswijze. Daarna komen er wel verschillen in het onderwijspatroon en deze hangen weer ten nauwste samen met de schoolorganisatie. In Duitsland bijvoorbeeld kunnen de kinderen, na vier jaren de lagere school (de zgn. Grundschule) gevolgd te hebben, overgaan naar de Höhere Schule, de Mittelschule (Realschule) of de Volksoberschule en kunnen dan een propaedeutische inleiding in de meetkunde (Raumlehre) krijgen. Ook in andere landen gebeurt dit laatste, zulks in tegenstelling tot Nederland, waar op de lagere school niets aan meetkunde wordt gedaan, afgezien dan van zeer eenvoudige oppervlakte- en inhoudsberekeningen.
Het zou mij te ver voeren hierop verder in te gaan en ik verwijs de belangstellende lezer naar de volgende publicaties:

a. *The teaching of arithmetic and mathematics to students between 6 and 15 years of age in the Netherlands* (door Dr. L. N. H. Bunt en medewerkers; uitgave J. B. Wolters, Groningen, 1958);

b. *Der mathematische Unterricht für die sechs- bis fünfzehnjährige Jugend in der Bundesrepublik Deutschland.* Herausgegeben von Friedrich Drenckhahn, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1958;

c. *The teaching of mathematics for pupils up to the age of 16 in the scandinavian countries Denmark, Finland, Iceland, Norway, Sweden.* Issued as a supplement to Nordisk Matematisk Tidskrift, vol. 6, 1958.

2. De kern van het betoog van professor Behnke zou ik als volgt willen samenvatten.
De snelle vooruitgang van de wiskunde en van de natuurwetenschappen in de laatste 50 jaren is er de oorzaak van, dat een overvloed van wetenschappelijke kennis aan de jongere generatie moet worden doorgegeven. Dit stelt echter de scholen voor zeer moeilijke problemen, en wel vooral in die landen waar de structuur van het onderwijsstelsel wordt gekenmerkt door:

a. het bestaan van scholen, zoals gymnasia en lycea, die opleiden voor universitaire studie, waar het onderwijs zich richt op de algemene vorming en tot doel heeft het leggen van een zeer brede basis waarop de leerlingen verder kunnen werken, zodat er weinig of geen gelegenheid is voor specialisatie in de een of andere richting;

b. het bestaan van universiteiten of universitaire leergangen die een zuiver wetenschappelijk karakter dragen en waaraan geen voorbereidende cursus verbonden is (zoals bijv. de colleges in Amerika).

Dit systeem, aldus professor Behnke, werkte goed tot aan het einde van de vorige eeuw. Het aantal leerlingen was toen geringer dan thans; maar de leerlingen waren begaafd. De kern van het onderwijs werd toen gevormd door de humaniora en de wiskunde. Bij de eeuwwisseling kwam hierin verandering, met name doordat de natuurwetenschappen in het leerplan werden opgenomen, hetgeen leidde tot vermindering van het aantal lesuren voor wiskunde. In de laatste 50 jaren is de bevolking van de middelbare scholen enorm gestegen, terwijl het gemiddelde intelligentiequotiënt ongetwijfeld gedaald is. Als gevolg van dit alles is het onderwijs in de wiskunde in de verdrukking gekomen. Welke onderwerpen moesten voortaan in de klas worden behandeld? Delen van de elementaire meetkunde werden geschrapt; kubische vergelijkingen en boldriehoeksmeting verdwenen uit het programma. Andere onderwerpen kwamen ervoor in de plaats, zoals bijv. de differentiaalrekening. Toen men dit vak 50 jaar geleden wilde invoeren, gaf dit aanleiding tot felle debatten tussen voor-, en tegenstanders en tot uitvoerige en levendige discussies over de hervorming van het wiskundeonderwijs in het algemeen.

Het is merkwaardig en veelbetekenend dat de situatie van vandaag, mutatis mutandis, veel overeenkomst vertoont met die van een halve eeuw geleden. De algebra en de meetkunde zijn radikaal gewijzigd en het zal er op de duur toch van moeten komen, dat de moderne denkbeelden op de een of andere wijze tot de middelbare school doordringen. De vraag is gesteld of het niet op de weg van de C.I.E.M. zou liggen om het initiatief te nemen tot de publikatie van leerboeken die aan het wiskundeonderwijs in de gehele wereld ten dienste gesteld zouden kunnen worden. Dit is echter niet zo eenvoudig en op het ogenblik praktisch onuitvoerbaar, omdat ten eerste de huidige toestand zo is, dat het onderwijs gegeven moet worden aan *alle* leerlingen en niet aan geselecteerde groepen; ten tweede het schrijven van een leerboek een grondige kennis vereist van de onderwijsstelsels in de diverse landen en ten derde het aantal uren, dat voor wiskunde uitgetrokken is, sterk varieert. Daarbij komen nog andere moeilijkheden. Wie moeten namelijk zo'n leerboek schrijven? Men zou kunnen denken, dat hoogleraren hiervoor de meest aangewezen personen waren, maar de toestand is in feite zo, dat die het in de regel niet eens voor hun eigen land kunnen, omdat ze te weinig weten van de situatie op de middelbare scholen. Vroeger was ook dit anders, omdat toen dikwijls een hoogleraar voordien leraar was geweest. Leraren echter, die doorkneed zijn in de praktijk van het onderwijs, kunnen zo'n leerboek al evenmin schrijven omdat het meestal te lang geleden is, dat ze de Universiteit verlieten en ze niet in staat zijn geweest om zich van de recente ontwikkelingen van hun vak op de hoogte te houden. Bovendien plegen de schrijvers van moderne wetenschappelijke leerboeken de stof in een veel pregnantere vorm te behandelen dan vroeger, zodat het hoe langer hoe moeilijker wordt om leemten in de kennis door zelfstudie aan te vullen.

De impasse, waarin we langzaam maar zeker geraken, is deze dat er tussen het wiskundeonderwijs aan de universiteiten en aan de middelbare scholen een te grote spanning ontstaat. Deze dient verminderd te worden, maar daarvoor is in de eerste plaats nodig dat de docenten met de moderne denkbeelden vertrouwd raken. Te dien einde heeft de Duitse sectie van de C.I.E.M. een groot werk op stapel gezet, dat tot titel draagt: „*Grundzüge der Mathematik*" en waaraan door een internationale staf van deskundigen medewerking wordt verleend. Het eerste deel, handelend over: A. Grundlagen der Mathematik, en B. Arithmetik und Algebra, is in 1958 verschenen (bij Vandenhoeck en Ruprecht te Göttingen). Er zullen nog drie delen volgen, respectievelijk over meetkunde, analyse en praktische methoden en toepassingen van de wiskunde. Men zou dit werk terecht kunnen vergelijken met de bekende „*Enzyklopädie der Elementarmathematik*" van H. Weber en J. Wellstein uit vroegere jaren.

Tot zover het betoog van professor Behnke. Wat hij zei was belangrijk en wij zijn van mening, dat ook in ons land de vraag onder ogen moet worden gezien of er in de moderne wiskunde onderwerpen zijn die zich lenen voor behandeling op middelbaar niveau en zo ja, hoe dit dan moet gebeuren.

3. Ook het derde en laatste algemene rapport betreffende de vergelijkende studie over methodes tot inleiding in de meetkunde is bizonder belangwekkend.

Het was jammer, dat een aantal nationale subcommissies klaarblijkelijk te laat met het voorbereidende werk waren begonnen en, zoal niet het belang, dan toch de eraan verbonden moeilijkheden onderschat hadden. Tien landen hadden een rapport ingezonden, maar soms omvatte dit niet méér dan één enkel vel druks. Zeer gunstig steekt hierbij de Nederlandse bijdrage af. Deze telt 120 pagina's en kon ter conferentie aan de deelnemers worden uitgereikt.

Alle rapporteurs zijn het erover eens, dat de studie van de meetkunde een grote opvoedende waarde heeft. Ook is er geen verschil van mening over de vraag of de meetkunde een deductieve wetenschap is of niet, maar wel lopen de inzichten uiteen ten aanzien van de vraag welke de minimumleeftijd is (in het rapport aangeduid door t_0), waarop met de deductieve methode kan worden begonnen en aan welke beginvoorwaarden moet worden voldaan opdat deze methode vruchten draagt.

In Amerika en Japan ligt t_0 bij 15 jaar en in Canada nog wat hoger; in Italië bij 14 jaar, maar in de meeste andere europese landen bij 12 jaar. Verder is er ook wel een communis opinio over de wenselijkheid of, zo men wil, de noodzakelijkheid van een inleidende of propaedeutische cursus, maar de meningen divergeren weer op het punt van de duur van deze cursus. Deze varieert van enkele maanden tot enkele jaren.

Een propaedeutische cursus dient er natuurlijk op gericht te zijn om de leerlingen een zo gedegen mogelijke intuïtieve kennis van de eigenschappen van meetkundige figuren bij te brengen, maar hier rijst al direct de vraag of men zich tot het platte vlak dient te beperken of dat men ook aandacht moet schenken aan de ruimte. Ook op dit stuk lopen de inzichten sterk uiteen.

In sommige rapporten wordt de stereometrie niet eens genoemd, in andere is ze juist de basis van de propaedeuse (zie bijv. in het nederlandse rapport de bijdrage van Van Albada). Ook zijn er die een vermenging van vlakke meetkunde en ruimte-meetkunde voorstaan.

Verder mag voor leerlingen, die te eniger tijd van de intuïtieve naar de deductieve methode overschakelen, de propaedeutische cursus geen doel op zich zelf zijn, maar behoort zodanig te zijn ingericht, dat er later ten volle profijt van getrokken kan worden. Wisselwerking is noodzakelijk en hoe geleidelijker de overgang is, des te beter. Dit geldt ook voor de methodiek. In dit verband worden in het rapport enkele belangrijke dingen gezegd over de meetkundige transformaties. Nadat de meetkunde sinds het „Erlanger Programm" van Felix Klein (1872) meer en meer beschouwd werd als een invariantentheorie van transformatiegroepen, werd ook de betekenis der meetkundige transformaties voor het middelbaar onderwijs meer en meer erkend. Men verstaat echter Felix Klein verkeerd als men de vrije bewegelijkheid van figuren in een plat vlak in de plaats gaat stellen van de beweging van het gehele vlak (c.q. de ruimte).

Zonder twijfel kan men, als men dit wil, meetkundeonderwijs baseren op de vrije bewegelijkheid van figuren, maar wie dit doet baseert zich niet op het Erlanger Programm.

Dat men dit laatste in de praktijk wel tot grondslag kan nemen, wordt aangetoond in het Poolse rapport. Bij het meetkundeonderwijs in Polen gaat men namelijk uit van de axiale symmetrie. Volgens Freudenthal is dit de beste methode om de transformatietheorie in het onderwijs te introduceren, omdat de axiale symmetrie de enige niet-triviale meetkundige transformatie is, die direct gezien wordt als een transformatie van het gehele vlak en niet als de beweging van een figuur in dat vlak. Verder is de symmetrie onafhankelijk van het begrip evenwijdige lijnen, terwijl bovendien de gehele groep van de vlakke bewegingen uit de symmetrie volgt, daar translatie en rotatie opgevat kunnen worden als produkten van symmetrieën.

In tegenstelling tot het Poolse rapport wil het Duitse, uitgebracht door Sengenhorst, uitgaan van de translaties. Sengenhorst tracht dit te bereiken door de translatie van figuren goed te definiëren en wel door deze te baseren op een oneindig kwadratisch rooster. Dit kwadratisch rooster speelt, naar het schijnt, vooral in het Duitse onderwijs een belangrijke rol. Congruentie, gelijkvormigheid, oppervlakken, enz. worden onderwezen door systematisch van millimeterpapier gebruik te maken. Freudenthal acht dit in zoverre een bezwaar, dat een vast stelsel van horizontale en vertikale lijnen als substraat van een plat vlak de overgang naar de synthetische meetkunde bemoeilijkt. Dan is het beter wat Gattegno doet. Ook hij gaat uit van een kwadratisch rooster, maar dit bestaat uit spijkers op een houten plank, zonder lijnen ertussen. Hierop kunnen nu met elastiekjes figuren worden geconstrueerd. Weer een andere methodiek, die o.a. door mevrouw van Hiele is bestudeerd en toegepast, bestaat hierin dat men de leerlingen een plat vlak laat bedekken met verschillende soorten congruente veelhoeken, uit karton bijv. Ze moeten dan de aldus ontstane figuren overtekenen en ontdekken op deze wijze tal van meetkundige eigenschappen en relaties. Dit is tevens een voorbeeld van een experimentele werkwijze waarbij aan de leerlingen concreet materiaal in handen gegeven wordt. Alle onderzoekers zijn het erover eens dat een abstracte benadering van de meetkunde voor jonge leerlingen uit den boze is en dat de propaedeutische cursus concreet en intuïtief moet zijn. Maar de een bedoelt hiermee iets anders dan de ander. De eis van concreetheid, gecombineerd met de inzichten van de moderne psychologie, maakt dat het verstandiger lijkt uit te gaan van globale structuren en niet van de gebruikelijke volgorde punt-lijn-vlak-lichaam. Ouderwetse opvattingen, waarbij een lijn ontstaat door beweging van een punt, enz., zijn nog niet verdwenen en worden zelfs hier en daar nog wel aanbevolen. De eis van concreetheid speelt ook een rol bij de vraag, hoe men de kinderen moet leren een definitie van meetkundige objecten te geven.

Het is niet moeilijk hun aan de hand van concrete voorbeelden de namen van deze objecten bij te brengen. Aan de andere kant is het ook in de propaedeutische cursus wenselijk en mogelijk dat de leerlingen de betekenis leren van de woorden die ze gebruiken, en dat ze een definitie van een meetkundige figuur geven door verbale omschrijving van de eigenschappen hiervan. Op dit punt is er echter verschil van inzicht. Sommigen eisen een formele definitie reeds in de propaedeuse. Anderen willen dit uitstellen tot de deductieve phase en zijn tevreden als een leerling een rechthoek bijv. kan omschrijven als een figuur met twee paren evenwijdige zijden, vier rechte hoeken, gelijke diagonalen, enz.

Dat in de voorbereidende phase stellingen worden geformuleerd, wordt wel algemeen als vanzelfsprekend beschouwd. Anders is het gesteld met het gebruik van het woord „axioma''. De meeste rapporteurs staan er afwijzend tegenover; slechts enkele willen het introduceren en dan in de betekenis van een waarheid die zonder meer evident is. Hiertegen bestaan geen overwegende bezwaren, als men maar bedenkt dat de leerlingen later tal van voor hen evidente beweringen stellingen horen noemen i.p.v. axioma's en dat de moderne betekenis van het woord axioma een andere is.

Dat evidente stellingen in de propaedeutische cursus zonder bewijs aanvaard mogen worden, wordt algemeen toegegeven. Waar ligt echter de grens? In zijn bijdrage tot het Nederlandse rapport heeft Vredenduin zich hiervan nauwkeurig en zorgvuldig rekenschap gegeven. Aan het einde van het rapport wordt dan nog eens de aandacht gevestigd op de in het begin genoemde leeftijd t_0, de minimumleeftijd dus waarop van de inductieve naar de deductieve phase wordt overgegaan. Men zou nu kunnen menen, dat t_0 niet scherp bepaald kan worden, doordat de overgang zich geleidelijk voltrekt. Dat blijkt echter geenszins het geval te zijn, zomin in de methodiek als in het leerproces. Vredenduin zegt bijv. ,,Op een zeker ogenblik vertellen we de kinderen: tot nu toe hebben we de juistheid van sommige stellingen zonder meer aangenomen, andere hebben we bewezen. Maar van nu aan gaan we alles netjes definiëren en we zullen iedere stelling die we uitspreken ook bewijzen". Dit ogenblik is dus de t_0 voor de *methodiek* en als het nu ook de t_0 in het *leerproces* is, komen er geen moeilijkheden. Doorbreking van het rigoureuse klassikale systeem en het meer rekening houden met de individuele geaardheid der leerlingen zou in dit opzicht wellicht gunstig zijn. In de regel is er evenwel een discontinuïteit en worden de leerlingen schichtig als de deductieve cursus begint. Leraren plegen dan te zeggen dat de kinderen nog niet rijp zijn, maar het merkwaardige is, dat het (zoals het Italiaanse rapport beweert) weinig verschil maakt of bedoelde overgang zich nu op 12-jarige dan wel op 15-jarige leeftijd voltrekt.

Het schijnt dus wel, dat de van Hieles gelijk hebben met hun bewering dat de discontinuïteiten in het leerproces niet geïnterpreteerd mogen worden als symptomen van meer of mindere rijpheid. Freudenthal meent dat de gesignaleerde moeilijkheden het best overwonnen kunnen worden door ervoor te zorgen, dat de propaedeutische cursus ook werkelijk propaedeutisch is en dat de resultaten, hierin verkregen, tenvolle in de deductieve wijze van behandeling worden uitgebuit.

Met enkele opmerkingen over de invloed en de stimulans van de psychologie op het aanvankelijk onderwijs in de meetkunde en in het bizonder over de betekenis van het werk van Piaget (zie beneden) en van de Van Hieles wordt het rapport besloten.

Naschrift. In het nummer juli-september 1958 van l'Enseignement Mathématique, het officiële orgaan van de C.I.E.M., lees ik dat voor het volgende congrès in 1962 de volgende onderwerpen ter bestudering worden aanbevolen:

1. Etude des différents types d'examens et, notamment, des examens donnant accès à l'enseignement supérieur;
2. Quelles sont les questions de „mathématiques modernes" et quelles sont les applications des „mathématiques modernes" qui peuvent trouver place dans les programmes de l'enseignement secondaire?
3. Etude comparée des méthodes d'enseignement employées pour le passage de l'arithmétique à l'algèbre (sujet analogue au troisième thème d'enquête, sur l'initiation à la géométrie, étudié au Congrès d'Edimbourg).

C. (W.) *Halfuur-voordrachten.*

Er waren in sectie VIII twee sprekers uitgenodigd voor een voordracht van een half uur. In het programma waren aangekondigd:

J. Piaget uit Genève; onderwerp: *Psychologie génétique et mathématiques*".

J. E. Hofmann uit Ichenhausen; onderwerp: „*Ueber eine Euklid-Bearbeitung des Albertus Magnus*".

De eerste voordracht beloofde voor de aan het congres deelnemende leraren V.H.M.O. een der aantrekkelijkste te worden. We zijn er ons immers van bewust hoezeer een behoorlijk georganiseerd wiskundeonderwijs behoefte heeft aan een psychologisch verantwoorde methodiek en didaktiek. Nu is Piaget een man van internationaal gezag, een wetenschappelijk onderzoeker van wereldnaam, een der weinigen die door experimenteel psychologisch onderzoek materiaal tracht bijeentebrengen voor psychologische fundering van het onderwijs in rekenen en wiskunde. Voor degenen die zich voor Piaget's werk interesseren, wijs ik op de bijdrage van zijn hand in de bundel „*L'Enseignement des Mathématiques*" (Neuchâtel 1955) met de titel „*Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence*".

Op het voetspoor van Bourbaki onderscheidt Piaget drie fundamentele wiskundige structuren, n.l. de algebraïsche structuren (met als prototype de groep), de ordeningsstructuren (bijv. de tralies) en de topologische structuren. Deze drie moederstructuren zijn onderling onherleidbaar. Met deze drie structuren corresponderen nu volgens Piaget elementaire structuren van het menselijk denken.

Het is duidelijk dat Piaget's theorie van betekenis belooft te zijn voor het wiskundeonderwijs. Het ontbreekt echter ten onzent niet aan kritiek (Bunt, Syswerda). Zo lees ik in het rapport van Prof. Freudenthal voor dit congres: „Piaget's mathematical background has been rather weak" en „Piaget's approach hardly reflects the teaching situation of the classroom, but the rather unusual laboratory situation of the psychologist". De gelegenheid Piaget zijn inzichten te horen uiteenzetten voor een forum van wiskundigen is ons helaas ontgaan. Hij bleek door een fietsongeval buiten machte naar Edinburgh te komen. Zijn plaats werd nu ingenomen door Kurepa uit Zagreb (Yoegoslavië), een der beide vicepresidenten van de C.I.E.M., die zich sterk voor didactische problemen interesseert, maar die Piaget niet op diens eigen terrein kon vervangen. We werden nu geconfronteerd met een aantal aspecten van vernieuwd wiskundeonderwijs, echter zonder de psychologische fundering waarnaar we uitgezien hadden. "*Some principles of mathematical education*" was de titel van Kurepa's voordracht en de principes bleken alle van methodische aard.

Kurepa betoogde dat de begrippen "set and function" ten grondslag dienden te liggen aan alle wiskundeonderwijs. Wat het begrip functie betreft, is de wens al meer dan een halve eeuw oud; zij is opgenomen in het programma van Felix Klein en sindsdien vrij algemeen aanvaard. Wat het begrip verzameling aangaat hebben we te maken met een nog niet algemeen verlangen. Jammer was het, dat Kurepa ons niet uiteenzette, *hoe* het begrip verzameling, methodisch behandeld, nu in ons V.H.M.O. tot een fundamenteel begrip zou kunnen worden gemaakt. Zijn hervormingsplannen bleven daardoor wat zwevend. Hoopvol ten aanzien van constructieve ideeën over de wijze waarop het begrip verzameling zou kunnen worden bijgebracht, ben ik niet als ik denk aan de opmerking van Kurepa, dat hij de functies principiëel als meerwaardige functies wil introduceren. Tegen zijn voorstel om de naam „meetkundige plaats" te vervangen door „verzameling", een gedachte die in ons land door de Nomenclatuurcommissie van Liwenagel en Wimecos eveneens gepropageerd zal worden, zal m.i. minder verzet rijzen. Zonder zijn bedoelingen door instructieve voorbeelden te illustreren betoogde Kurepa dat de begrippen structuur en groep voor het V.H.M.O. fundamentele begrippen zijn. Wij hadden graag gehoord hoe ze op verantwoorde wijze aan jonge leerlingen zouden kunnen worden onderwezen. Kurepa wilde verder bizondere aandacht geschonken zien aan een behandeling van de begrippen uit de logica, i.h.b. aan de quantificatoren "some and every" met de symbolen $\exists_x$ (voor sommige x) en $\forall_x$ (voor alle x).

Kurepa bepleitte een behandeling der meetkunde uitgaande van het vectorbegrip. Ook in St. Andrews, in een conferentie van de „Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques", vlak voor het Internationaal Mathematisch Congres gehouden, was een inleiding tot de vectoranalyse op onze scholen bepleit, die toestaat de meetkunde op voor jonge leerlingen begrijpelijke wijze vectoriëel te bedrijven.

De tweede halfuur-voordracht was van Hofmann, die we vier jaar geleden te Amsterdam node hebben gemist. Hij was ook toen uitgenodigd en overwoog o.m. een inleiding te houden over de amsterdamse burgemeester Hudde, die als wiskundige bekendheid verwierf. Deze Hudde was een tijdgenoot van Jan de Wit, die met hem samenwerkte op het gebied der lijfrenten. Het was destijds een teleurstelling dat Hofmann door ziekte verhinderd was naar Amsterdam te komen, het was nu een genot te luisteren naar zijn heldere, doorwrochte voordracht. Hofmann zette uiteen, dat

Albertus Magnus, volgens recente onderzoekingen, Euclides blijkt te hebben herschreven, daarbij rechtstreeks op Euclides teruggaande en niet op de commentaren van Proclos. Hofmann ging de invloeden na die op Albertus Magnus hebben gewerkt. We kregen de indruk met zeer recente historische vondsten te worden geconfronteerd.

D. (W.) *Korte voordrachten.*

Gemakkelijk is het niet een overzicht te geven van de voordrachten van een kwartier, waarvan er in het geheel 23 in het programma waren opgenomen. Een vaste lijn toch is in deze voordrachten niet te ontdekken. Dit ligt in de structuur van het congres. Ieder die zich aanmeldt voor een lezing van een kwartier en een uittreksel van maximaal 100 woorden inzendt, wordt geaccepteerd, indien dat wat hij wil geven geen tastbare onzin is. Dit laatste komt blijkbaar slechts bij hoge uitzondering voor!

Achteraf kan ik slechts respect hebben voor de orde, die de congresleiding in een dreigende chaos heeft weten te scheppen. In de eerste plaats was het een gelukkige gedachte het accent te leggen op de eerste drie congresdagen, geheel in beslag genomen door de bespreking der rapporten, waarover dr. Thijssen U rapporteerde. Voorts bleek het juist gezien om een vijftal lezingen van Amerikanen op één morgen bijeen te brengen, waardoor althans enige samenhang in de voordrachten ontstond. De congresgids kondigde deze lezingen aan als "*Reports by speakers nominated by the United States Committee on Mathematical Instruction*", d.w.z. van sprekers aangewezen door de nationale subcommissie van de C.I.E.M. uit de Verenigde Staten, een der 24 over de wereld verspreide onderwijscommissies der C.I.E.M.

De vijf sprekers waren:

a. Tucker, met het onderwerp: "*Report on the work of the American Commission of Mathematics*";

b. Vaughan, met het onderwerp: "*The U.I.C.S.M. secondary school programm* (University of Illinois Committee on School Mathematics);

c. Duren, met het onderwerp: "*The reform of college mathematics teaching in the United States*;

d. Baley Price, met het onderwerp: "*National Science Foundation Summer Schools*;

e. Allendoerfer, met het onderwerp: "*Teaching mathematics in television*".

Tucker vat de grondgedachten waarop het werk van de Amerikaanse commissie steunt, in de volgende vier punten samen:

1. De hedendaagse wiskunde verschilt essentieel van de wiskunde van een halve eeuw geleden. Het hedendaagse onderwijs weerspiegelt de veranderingen in het karakter van de wiskunde onvoldoende.
2. Het aantal gebieden waarop de wiskunde en de wiskundige methoden toepassing vinden, is sterk uitgebreid. Zie naar de sociale wetenschappen. Verschijnselen waarbij de waarschijnlijkheid een rol speelt, hebben thans hun eigen wiskundige methoden.
3. De moderne wiskunde verschaft de middelen om zeer uiteenlopende verschijnselen vanuit een centraal gezichtspunt te bestuderen. Sawyer, de auteur van "*Mathematician's delight*", noemde de wiskunde "the study of all possible patterns".
4. In de tweede helft van de twintigste eeuw dient de leerstofkeuze voor de wiskunde te worden bepaald door de eisen van de wiskunde zelf, door die van de natuur- en scheikunde, de biologische wetenschappen, de sociale wetenschappen, de technologische wetenschappen, de ingenieursstudie en door de industrie.

Tucker gaat na hoe een wiskundeprogramma in de geest van de commissie er zou komen uit te zien. Voor de vierde (hoogste) klasse van de high school geeft hij de volgende opsomming: elementary analysis; polynomial, exponential, logarithmic and circular functions; polynomial calculus; probability and statistical inference.

Vaughan komt voor de vierde klasse met zijn programma tot een behandeling der goniometrische functies — met beklemtoning van de periodiciteit, het even en oneven zijn en de monotonie — en de analytische meetkunde. Hij wenst de eigenlijke „driehoeksmeting" vervangen te zien door analytical trigonometry.

De eisen door Tucker en Vaughan gesteld lopen parallel met de eisen van het nieuwe wiskundeprogramma voor gymnasium-B en hogereburgerschool-B van 30 augustus 1958. De voornaamste verschillen zijn:

a. de stereometrie wordt in de amerikaanse syllabi niet genoemd;
b. de statistiek, wel voorkomende in het oorspronkelijke Wimecos-programma, is in Nederland uitgevallen, behalve dan als keuzemogelijkheid voor het gymnasium-A.

Duren wijst op twee trends in het amerikaanse onderwijs. Vóór 1920 die van voortdurende afknabbeling van de wiskundeprogramma's, na 1950 die van vernieuwde belangstelling door de eisen die èn de industrie èn de regering gaat stellen. Kernfysica, spoetniks en computers laten hun invloed gelden. "For the first time in thirty years a reform in mathematics could count on the necessary public support". Duren wil in de hedendaagse didaktiek een tiental stromingen onderscheiden en geeft de volgende opsomming, die uitnodigt amerikaanse toestanden met Nederlandse te vergelijken:

1. handhaving van de status quo;
2. het organiseren van cursussen van één semester over practische wiskunde, die geschikt zijn voor studenten wie het aan alle wiskundige vooropleiding ontbreekt;
3. het incorporeren van de wiskunde in de cultuurhistorie;
4. de stroming die logica in het leerplan wil doen opnemen;
5. de axiomatische methode;
6. de vervanging van verouderde wiskunde door moderne wiskunde;
7. het stellen van de wiskunde in dienst van de "computing technology";
8. invoering van onderwerpen als set theory, probability and statistics;
9. invoering van differentiaal- en integraalrekening in het eerste college year met alle nodige voorbereidingen hiertoe op de high school;
10. vraagstukkentechniek in een verantwoord wetenschappelijk kader.

Duren wil in het bizonder de drie laatste trends tot hun recht laten komen en wil dit bereiken door de uitgave van moderne leerboeken te bevorderen.

Baley Price zet uiteen, hoe sinds enige jaren de in zomerconferenties plaats vindende nascholing van leraren een exponentiële groei vertoont. Deze cursussen gaan uit van de National Science Foundation, ressorteren onder het U.S. Federal Government en bestaan sinds 1952. Ze duren acht weken, er worden moderne onderwerpen behandeld, ze worden behoorlijk gesubsidiëerd. De deelnemers ontvangen een beurs van meer dan 1000 dollars, waardoor het hun mogelijk wordt de andere, onontbeerlijke, zomerverdiensten te laten varen.

Conferenties van deze aard zijn onontkoombaar, als men met de modernisering van het wiskundeonderwijs op korte termijn ernst wil maken.

Allendoerfer heeft uiteengezet hoe de televisie, ook al door een tekort aan leraren, in steeds sterkere mate in de praktijk van het amerikaanse onderwijs wordt ingeschakeld. De uitzendingen worden dus niet langer beperkt tot popularisaties. Ze gaan uit van de local educational authorities.

Begin 1959 zal er een nummer verschijnen van de American Mathematical Monthly met verslagen van de hand van personen die aan de diverse experimenten hebben meegewerkt.

Tot zover de amerikaanse verslagen. Er rest me nog iets te vertellen van de overige korte voordrachten. Ik moet me echter tot enkele van de 18 beperken.

Kay Piene, lid van het Comité Exécutif van de C.I.E.M., inspecteur van het onderwijs in Noorwegen en werkzaam aan het Pedagogisk Seminar te Oslo, sprak over: "*Statistics in secondary Schools*". Hij hield een klemmend betoog voor de invoering van dit vak en ontwikkelde een standpunt dat vrijwel overeenkomt met dat door de Wimecos-commissie in 1955 in haar concept-programma ingenomen (vergelijk: Euclides XXX, blz. 160—162). Piene citeerde trouwens bij herhaling Bunt's leerboek. Ook zijn programma komt in hoofdzaak met het Nederlandse overeen. Alleen zie ik nog het onderwerp "rank-correlation" aan de Nederlandse lijst toegevoegd. Als Piene nu echter beweert, dat hij met 25 á 30 lesuren zou kunnen volstaan om zijn programma af te werken, ben ik voor wat de realisatie ervan betreft wat huiverig. De Wimecos-commissie meende 50 uren voor de statistiek te moeten uittrekken.

Bunt hield een voordracht over "*An investigation into the possibility of teaching probability and statistics in Dutch secondary schools*". Zijn ideeën zijn zozeer bekend, dat het niet nodig is er hier over uit te weiden. De omstandigheid dat we in Nederland aan de vooravond stonden van de invoering van een nieuw wiskunde-programma zonder statistiek heeft Bunt's enthousiasme voor zijn onderwerp niet gedrukt. Tegenover Piaget's laboratorium-psychologie wil ik hier gaarne met waardering voor Bunt's werk erop wijzen, dat zijn experimenten zich in het klasselokaal afspelen en daardoor voor de didaktiek van het wiskundeonderwijs van grotere betekenis beloven te zijn.

Drenckhahn, Hoogleraar aan de Pädagogische Hochschule te Flensburg, auteur van een serie leerboeken („Arbeitsbücher" für den Mathematikunterricht an Realschulen, Mittelschulen und Aufbauzügen), sprak over „*Elementar-geometrie im Unterricht vom Gestaltlichen aus und in didaktischen Experimenten*". Om Drenckhahn te begrijpen is het gewenst ook kennis te nemen van zijn korte voordracht in 1954 te Amsterdam gehouden. Hij onderscheidde daar een drietal „Strukturstufen" in de wiskunde, „drei Strukturstufen, die bezüglich der Gegenständlichkeit als realistisch, intuitiv und begrifflich, und bezüglich der Verfahrensweisen als experimentell-induktiv, intuitiv und formal-logisch bezeichnet werden". De leeftijdsfasen voor deze Stufen zijn volgens Drenckhahn tot 12 jaar, van 12 tot 15 en boven 15 jaar, en dus op verrassende wijze aangepast aan de duitse schoolorganisatie: Unterstufe, Mittelstufe, Oberstufe! In Edinburgh sprak Drenckhahn over de opbouw van de meetkunde, die niet slechts volgens logische principes dient plaats te hebben, maar waarin ook een architektonische structuur aanwezig dient te zijn. Van de vele door hem ter illustratie aangehaalde voorbeelden noem ik er slechts één: de gelijkbenige driehoek neemt in zijn structuur een fundamentele plaats in. Drenckhahn bouwt nu een koordenvierhoek op uit vier gelijkbenige driehoeken en kan daardoor de eigenschap, dat de som van de overstaande hoeken van een koordenvierhoek 180° is, bewijzen zonder dat er nog van middelpuntshoeken en omtrekshoeken sprake is geweest.

Het lijkt me gewenst om in het onderwijs rekening te houden met de eisen die de drie begripsniveau's waarop Drenckhahn doelt, stellen, om met hem te voorkomen dat de didaktiek door logische tendenties overwoekerd wordt.

Storer's lezing over "*Symbolism and the rules of operations in school mathematics*" was er een midden uit de schoolpraktijk.

Storer, lector in de didaktiek der wiskunde aan de Universiteit te Birmingham, is van oordeel, dat het tegenwoordige streven naar uitbreiding van de leerstof voor de middelbare scholen het gevaar in zich sluit, dat de leerlingen minder goed doorkneed worden in de wiskundige techniek, dat ze daardoor de formele zijde van de wiskunde minder betrouwbaar zullen beheersen. Speciaal de zwakkere leerlingen dreigen hiervan de dupe te worden. Nu heeft de moderne maatschappij behoefte aan een steeds groeiend aantal wiskundig geschoolden. Aan deze behoefte zal slechts voldaan kunnen worden, indien de kwaliteit van het onderwijs, juist ten opzichte van deze zwakke leerlingen, wordt verbeterd: "the universal need for an increase in the number of mathematically competent students can only be satisfied by improving the standard of teaching with these weaker pupils".

Storer heeft zich nu speciaal beziggehouden met de moeilijkheden die de wiskundige symbolen en bewerkingen in de aanvangsklassen opleveren, i.h.b. ten aanzien van het commutatieve en distributieve karakter van bepaalde bewerkingen. Hij geeft eenvoudige series opgaven onder headings als "does order matter?" en "does rooting matter?" De leerlingen moeten opgaven als

$$60 : (5 \times 4) \qquad 8 + (5 - 2)$$
$$60 : (12 : 3) \qquad 8 - (5 + 2)$$

op twee manieren oplossen om zó inductief tot de beoogde regels te komen. De leerlingen moeten zelf ontdekken dat ze ter bereiking van het goede antwoord soms de inverse bewerking van de neergeschrevene hebben uit te voeren.

Storer deelt ook zijn gunstige ervaringen mede t.a.v. series opgaven, waarbij van de leerlingen slechts het neerzetten van een gelijkheidsteken of van een ongelijkheidsteken wordt verlangd.

Voorbeelden:

$$(a \times b)^2 = a^2 \times b^2 \qquad \sqrt{(a \cdot b)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$
$$(a : b)^2 = a^2 : b^2 \qquad \sqrt{(a + b)} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$
$$(a + b)^2 \neq a^2 + b^2 \qquad \sin(\alpha + \beta) \neq \sin\alpha + \sin\beta$$
$$(a - b)^2 \neq a^2 - b^2 \qquad \text{enz.}$$

Ness behandelde het thema *„Beispiel und Gegenbeispiel in der Mathematik"*. Hij lichtte toe, dat we in het onderwijs theorema's weliswaar algemeen bewijzen, maar ze toch eerst door voorbeelden zinvol voor de leerlingen proberen te maken. Het is ook mogelijk een doorzichtig voorbeeld zo te behandelen, dat het eigenlijke bewijs achterwege mag blijven. Het tegenvoorbeeld dient om te laten zien dat een bepaalde veronderstelling onjuist is of om te illustreren dat zekere voorwaarden noodzakelijk zijn. Ness verduidelijkte zijn betoog door pakkende voorbeelden.

Op één morgenzitting bijeengebracht waren de volgende voordrachten:

J. J. Burckhardt, *Zwei Griechische Ephemeriden*;
C. Eisele-Halpern, *The theory of probability in Charles S. Peirce's Logic and History of Science*;
J. McConnell, *Sir Edmund Whittaker's philosophy of science*;
J. A. P. Hall, *Robert Recorde.*

Ik wil volstaan met de vermelding van de beide laatste voordrachten in sectie VIII. Prof. Tricomi uit Italië sprak over het onderwerp *„Quo vadimus?"* Hij betoogde dat het ook voor wetenschappelijke onderzoekers op den duur onmogelijk zal blijken de wetenschappelijke literatuur op hun gebied bij te houden. Er zal naar middelen omgezien moeten worden om het essentiële samen te vatten. „De overvloed van tijdschriften bestrijden door de uitgave van een nieuw tijdschrift", werd er geïnterrumpeerd. In deze voordracht kwam scherper dan in enige andere naar voren welke taalmoeilijkheden er op internationale congressen rijzen. Mej. Dr. Tenner had zich nog ter elfder ure als laatste spreekster aan het programma laten toevoegen om een voordracht te houden over *"Equal and unequal"*, waarin ik geen nieuw waardevol element heb kunnen ontdekken.

E. (W.) *Boekententoonstelling.*

Er waren ter gelegenheid van dit congres enige boekententoonstellingen georganiseerd. De voornaamste ervan waren een tentoonstelling van ongeveer 700 wetenschappelijke werken in een der grote boekenzaken, onder leiding van prof. Broadbent uit Engeland, en een tentoonstelling van een paar duizend schoolboeken en didaktische literatuur onder leiding van de C.I.E.M. Deze laatste werd gehouden in hetzelfde gebouw waarin alle lezingen van sectie VII plaats vonden, zodat de bezoekers zonder veel bezwaar van het uitgestelde kennis konden nemen. De bedoeling van deze tentoonstelling was om meer in het bizonder een beeld te geven van wat er op dit moment aan leerlingen tussen 12 en 19 jaar wordt onderwezen. Een 12-tal landen hadden boeken ingezonden. De verzameling, die voor een deel reeds in 1954 te Amsterdam was geëxposeerd en die het eigendom is van het Pedagogisch Museum te Parijs, bleek aanmerkelijk uitgebreid. De schema's van de onderwijsorganisatie in de diverse landen waren ditmaal volgens een bepaalde gronddgedachte opgesteld. Ze waren alle ontleend aan publicaties van de UNESCO. Het was niet duidelijk volgens welk plan de boeken op de diverse tafels geordend waren. Ja, men vroeg zich af of er wel van enig plan sprake was. Zeer ongelijksoortige werken lagen op een stapel. De franse, duitse en amerikaanse collecties waren het uitvoerigst. Om zich in korte tijd te oriënteren zou een beredeneerde catalogus gewenst geweest zijn. Nu ging er teveel tijd verloren met het zoeken naar een bepaalde uitgave.

De nederlandse inzending op deze tentoonstelling was verzorgd door prof. Gerretsen (Groningen).

Mij interesseerden het sterkst schoolboeken die moderne leerstof behandelen. Ik informeerde bij de organisator van de tentoonstelling waar ik deze zou kunnen vinden; boeken bijv. die voor de middelbare school vectoren behandelen of het groepsbegrip. „Ze zijn er nog niet", was het antwoord, „wel lectuur erover". Lezenswaard is bijv. het boek van Lucienne Felix: *„L'aspect moderne des mathématiques"* en eveneens het jongste Yearbook van de amerikaanse lerarenvereniging, dat geheel aan deze materie is gewijd. Juist was het ontvangen antwoord echter niet, want ik vond op de tentoonstelling o.a. het Duitse schoolboek van Reidt-Wolff: *„Die Elemente der Mathematik"*, waarin een vrij uitvoerige behandeling van de vectorrekening voorkomt en eveneens een belangrijk hoofdstuk over „Transformation und Gruppe". Een feit is echter, dat vrijwel overal de invoering van moderne onderwerpen „voor de deur" staat en nog niet „binnen" is.

Onze eindindruk van het I.M.C.-1958 is deze:

a. het congres heeft de bezoeker van de didaktische sectie een betrouwbare informatie gegeven over het ernstige werk dat de C.I.E.M. heet verricht;
b. er is gebleken, dat het verlangen naar vernieuwing van het wiskundeonderwijs een internationaal feit is met tal van algemene trekken;
c. de vele gelegenheden tot contact met collega's van andere landen over problemen van wiskundeonderwijs hebben een stimulerende invloed;
d. de nederlandse bezoeker kon tevreden zijn over de van nederlandse zijde ingediende rapporten, waarmee in vergelijking tot andere landen een uitstekend figuur werd geslagen.

Naschrift. Dit verslag is uiteraard zeer onvolledig. Het is misschien goed hier nog te vermelden, dat er door de C.I.E.M. een enquêtecommissie is ingesteld die bestaat uit de leden D. Kurepa (Yoegoslavië), D. van Dantzig (Nederland), H. F. Fehr (U.S.A.) en W. Servais (België) over het lerarentekort. Een uitgebreide vragenlijst is rondgezonden die over de volgende groepen van problemen handelt:

a. Le statut social et les obligations professionelles du professeur de mathématiques.
b. L'état actuel et la rapidité de développement de l'industrialisation dans votre pays.
c. L'accroissement des effectifs dans les écoles secondaires.
d. Le recrutement des futurs professeurs de mathématiques.

Prof. D. van Dantzig heeft in sectie VIII nog getracht om, los van deze enquête, die eerst op de lange duur tot practische verbetering zou kunnen leiden, een actie op korte termijn te beginnen, die echter om organisatorische redenen niet kon worden doorgezet.

DE DISSERTATIES VAN DE VAN HIELE'S

door

HERMEN J. JACOBS Jr.

In het voorjaar 1958 vroeg de redaktie van dit tijdschrift me, in een artikel de aandacht te vestigen op de betekenis van de beide dissertaties van de Van Hiele's. Hoewel ik deze bijdrage toezegde, bleef het lange tijd liggen, ik mag wel zeggen te lang. Na het zo onverwachte overlijden van Dieke van Hiele, viel het me nog moeilijker mijn belofte gestand te doen. Later heb ik echter begrepen, dat ik moest proberen, ook op deze wijze mee te werken aan het voortzetten van haar werk, dat ze — helaas te vroeg — alleen aan haar man overliet.

A. HET PROEFSCHRIFT VAN DIEKE VAN HIELE.

„De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O." door Dr. D. van Hiele-Geldof. Dissertatie Utrecht, 4 juli 1957. Deze uitgave kwam tot stand door samenwerking van de uitgevers: J. M. Meulenhoff, Amsterdam; J. Muusses, Purmerend; N.V. Erven P. Noordhoff, Groningen; N.V. Uitgeverij Nygh & van Ditmar, den Haag en Spruyt, van Mantge & de Does N.V., Leiden.

Een belangrijk deel van het werk wordt ingenomen door uitvoerige lesprotokollen van vele klassegesprekken in een tweetal eerste groepen van het Amersfoorts Lyceum, waar Dieke van Hiele sedert 1954 lerares was. Ik wil deze lesprotokollen als uitgangspunt nemen, omdat uit dit proefschrift m.i. zo duidelijk gebleken is, hoe belangrijk het is aan de hand van uitvoerige protokollen te beschrijven, hoe de lessituatie zich heeft ontwikkeld. Enerzijds kan dan een beeld gevormd worden over de gevolgde methode — de methodiek — anderzijds, hetgeen nog belangrijker is, over de denkwijzen van de kinderen. Mogelijk kunnen we dus konclusies trekken over de wijze, waarop het leren tot stand is gekomen — de didaktiek.

Bovendien kan scherper nog, dan alleen door theoretische beschouwingen, gewezen worden op de fundering van deze didaktiek. Dergelijke protokollen, zijn momenteel helaas nog zeldzaam.

De waarde van het proefschrift wordt echter niet bepaald door het belang, dat we aan lesprotokollen van ervaren docenten moeten hechten, doch vooral door de bestudering van de volkomen nieuwe aanbieding van de meetkunde en zeker niet in het minst door de fundering van de didaktiek.

Het werk van Dieke van Hiele steunt op de modernste inzichten van de Gestaltspsychologie, op grond waarvan men er in de didaktiek in de eerste plaats naar zal streven, de leerlingen de leerstof als een geheel te laten beleven. Slechts zeer weinig methoden voldoen nog aan dit uitgangspunt. Ze gaat n.l. bij het samenstellen van het materiaal uit van vier wetten uit de apperceptieleer (leer van het waarnemen van de Gestaltspsychologie) n.l.

1. De wet der overeenkomst: overeenkomstige figuren en overgangen worden in de waarneming veelal als totalen waargenomen.

2. De wet der naburigheid: in de waarneming worden delen, die zich in elkaars nabijheid bevinden gemakkelijk als gehelen waargenomen.

3. De wet der geslotenheid: gesloten figuren worden gemakkelijker waargenomen dan open figuren. In de waarneming heeft men de neiging open figuren te willen sluiten.

4. De wet der goede voortzetting: in de waarneming heeft men de neiging een figuur zo voort te zetten, dat de struktuur behouden blijft.

Vele moeilijkheden, die in het meetkunde-onderwijs optreden, zijn te wijten aan het feit, dat de docenten zich van deze wetten niet of nauwelijks bewust zijn en daardoor leggen ze te weinig de nadruk op de visuele meetkundige strukturen, waarover de leerlingen moeten kunnen beschikken. Uitvoerig laat ze zien, hoe men echter eerst aan bekende dingen, b.v. de kubus, de kinderen laat ervaren wat meetkundig struktureren betekent, omdat eerst dan de leerlingen in staat zijn zelf de werkelijkheid om zich heen te plaatsen in de meetkundige kontekst, d.i. het waarnemingsveld te zien met betrekking tot het meetkundige aspekt. In dit eerste stadium van het aanvankelijk meetkunde onderwijs, laat ze, zoals ze dat noemt, „de kinderen denkend doen met hanteerbaar materiaal als hulpmiddel." Uitgaande van de kubus, het regelmatige viervlak en achtvlak, komen de netwerken, het maken van modellen, de symmetrie (zowel symmetrie-as, als middelpunt van symmetrie), de ruit, de grondkonstrukties en de hoeken aan de orde. Het gaat hierbij echter niet om de bewijzen van de eigenschappen, neen, om het waarnemen, het naamgeven, het ordenen van de waargenomen figuren naar hun symmetrie-eigenschappen en het aanbrengen van de hierbij behorende taalstrukturering. De leerlingen hebben zich dus georiënteerd, zij zijn in kennis gebracht met de meetkundige objekten, hun namen en hun kenmerken. Ze hebben dan het eerste denkniveau: „begrip voor het aspekt van de meetkunde" bereikt.

Dan komt het tweede stadium aan de orde. Nu moet het voor de leerlingen duidelijk gaan worden, wat de bedoeling eigenlijk met de meetkundige objekten is. De leerlingen moeten nu van het konkrete naar het abstrakte overgaan. Het onderwerp, waaraan de schrijfster haar gedachten hierover duidelijk maakt, is het hoofdstuk „Tegels". Het protokol over dit werkstuk maakt het eigenlijke experiment uit, dat in dit proefschrift wordt beschreven. De leerlingen zijn dus op het eerste denkniveau en zij worden dus nog voorbereid tot het tweede denkniveau. Zij maken, uitgaande van het trottoir als voorbeeld, allereerst kennis met vlakvullingen door middel van verschillende soorten congruente veelhoeken en vinden aan de hand hiervan de eigenschappen over de som van de hoeken van een veelhoek, over gelijkheid van oppervlakken, over gelijkvormigheid, over de relaties tussen evenwijdigheid en gelijkheid van hoeken en over verschillende soorten symmetrie. Zij gebruikt daarbij de naam „ladder" om de relatie tussen evenwijdigheid en gelijkheid van overeenkomstige hoeken, en de naam „zaag", om die tussen evenwijdigheid en gelijkheid van verwisselende binnenhoeken op te roepen. De leerling is dan echter nog niet in staat in te zien, dat de gelijkheid van de hoeken volgt uit de evenwijdigheid en omgekeerd, voor de leerlingen zijn deze relaties beide tegelijk aanwezig. Dit verschijnsel doet zich b.v. ook voor bij de gelijkbenige driehoek met zijn gelijke basishoeken. Dieke van Hiele introduceert dit verschijnsel als een siamese tweeling.

We kunnen nu verwachten, dat de leerlingen op het tweede denkniveau zijn gekomen: begrip voor het wezen van de meetkunde. Eerst als dit niveau bereikt is, kunnen meer abstraktere denkstruktureringen worden aangebracht, de leerlingen moeten dan komen tot de eigenschappen van figuren langs de weg der redenering. Het scheiden van bovengenoemde siamese tweeling kan — en dan nog moeizaam — op dit niveau tot stand gebracht worden. De symmetrie van de relatie volgt echter eerst op het derde denkniveau: inzicht in de theorie van het vak meetkunde. Dat de leerlingen uit de gevonden stukken langs induktieve weg zelf tot een axiomastelsel zouden komen, komt eerst als het vierde denkniveau is bereikt.

In het voorgaande is enkele malen gesproken over de taalstrukturering. Het is n.l. bij het meetkunde-onderwijs zeer belangrijk op welk moment men van de leerlingen mag en kan verwachten, dat ze de „vak"-taal spreken. Ieder kind heeft, indien het de middelbare school binnentreed, zijn taaleigen, de docent moet nu eerst nagaan, welke van de begrippen en woorden, die hij nodig heeft, bij het kind aanwezig zijn en op welke wijze; hij zal deze moeten aanvullen, maar voor alles moeten zuiveren, zodat ze met de betekenis van de woorden en begrippen in zijn vak overeenkomen, daarna zal het geheel nog moeten worden uitgebreid. De kinderen spreken in elke strukturerende periode (in de globale op het nulde niveau, in de visueel meetkundige op het eerste niveau en in de abstracte denkstrukturerende op het tweede niveau) hun taaleigen en niet de vaktaal. Pas nadat het begrip zich heeft gevormd, volgt het aanbrengen van de bij dit begrip behorende taalstrukturering. Nog teveel docenten zijn zich van deze problemen niet of onvoldoende bewust, daarom is het zo belangrijk, dat Dieke van Hiele ook op deze kwesties zo nauwkeurig en zo diep ingaat.

Ik meen, dat het zeer waardevol is, dat we in deze dissertatie een zeer duidelijke fundering hebben van de didaktiek: de denkniveaus, zoals deze door Pierre van Hiele zijn geïntroduceerd (Paed. St. XXXII, blz. 289) en waarop ik in de bespreking van zijn proefschrift nog nader terug kom, vinden we hier zeer konkreet terug. Alleen een opbouw van de didaktiek, die een werkelijk fundament heeft, zoals we dat hier hebben, geeft een belangrijke stoot aan de exploratie van het vrijwel onontgonnen terrein van de wiskundedidaktiek. We kunnen m.i. slechts twee dingen doen: deze fundering aanvaarden en hierop voortbouwen, waarbij we ons er van bewust moeten zijn, dat de methoden zullen verschillen, afhankelijk van de aard van de school, de instelling van de leraar e.d., of we moeten een ander denkpsychologisch fundament van de didaktiek geven. Het is m.i. dan ook tekenend, dat bij de kritiek, die weleens op het werk van de van Hiele's wordt gegeven, niemand het nog gewaagd heeft om het fundament aan te tasten.

Jammer is 't, daar de problematiek van het meetkunde-onderwijs in de eerste klas van het voortgezet onderwijs zo omvattend is, zeer zeker in deze beginfase van een wetenschappelijk gefundeerde didaktiek, dat dit proefschrift zich slechts tot het werk in de eerste klas moest beperken. We hebben weliswaar nog een artikel van Dieke van Hiele over het leerproces in het begin van het tweede jaar (Euclides 33, VIII, blz. 233), terwijl hoofdstuk XVI uit het proefschrift van Pierre van Hiele een aantal facetten over het onderwijs in de meetkunde in de hogere klassen van het VHMO behandelt, doch een verdere uitvoerige doortrekking naar hogere jaren ontbreekt nog en juist die zou aan dit aanvangsonderwijs meer relief geven en daardoor zou dit werk nog aan overtuigingskracht winnen. Ik hoop, dat anderen samen met Pierre van Hiele in staat zijn, om dit tot stand te brengen. Bovendien zou het wiskunde-onderwijs ook zeer gediend zijn met een soortgelijke wetenschappelijke fundering van de algebradidaktiek.

B. HET PROEFSCHRIFT VAN PIERRE VAN HIELE.

„De problematiek van het inzicht" door Dr. P. M. van Hiele. Dissertatie Utrecht, 4 juli 1957. Deze uitgave kwam tot stand door samenwerking van dezelfde uitgevers als het werk van Dr. D. van Hiele-Geldof.

In een vak als wiskunde in het bijzonder komt het voor, dat een leerling eerst een vraag juist beantwoordt, dan een stel opgaven foutloos maakt, maar dat ineens, soms uit een kleinigheid blijkt, dat de leerling „er niets van begrepen heeft". Zeker zullen we dit verschijnsel, dat ons waarschijnlijk telkens weer verraste, verbaasde en teleurstelde, allen wel eens meegemaakt hebben.

Het is m.i. dan ook buitengewoon belangrijk, dat er nu een studie voor ons ligt, die juist handelt over de problematiek van het inzicht, in het bijzonder gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof. Grondige bestudering van deze dissertatie en een verdere diskussie over die punten waar we nog vraagtekens zetten of waar we het niet mee eens zouden zijn, kan het wiskunde-onderwijs waarvoor we verantwoordelijk zijn, slechts ten goede komen.

Allereerst gaat de schrijver na wat inzicht is en hoe men het konstateert en hij laat daarbij zien, dat een kind inzicht, b.v. in de meetkunde heeft, als het uit de gegevens en de relaties uit de meetkunde die het ter beschikking zijn gesteld, een besluit weet te nemen *in een nieuwe situatie*. Nagegaan wordt ook, welke plaats het inzicht inneemt in enkele denkpsychologiën, in het bijzonder in die van Seltz. Het werk van van Parreren, dat handelt over autonome en rationele leerprocessen krijgt terecht een uitvoerige bespreking. In een afzonderlijk hoofdstuk, waarbij de invloeden nagegaan worden, die sommige leerpsychologieën op de meetkunde-didaktiek hebben, bespreekt Pierre van Hiele onder meer de Wegwijzer van Bos en Lepoeter en hij laat zien, hoe hij moet twijfelen aan de voornaamste denkpsychologische grondslagen van deze boeken. Het is dan ook zeer betreurenswaardig, dat het antwoord van Bos (Mededelingenblad Wiskunde Werkgroep W.V.O. april 1958) in een dergelijke vorm is gegoten, dat hieruit nu niet dadelijk blijkt, dat men van mening is dat een „elkaar willen begrijpen" een eerste vereiste is voor een verdere diskussie.

Zeer nauwkeurig gaat de schrijver na hoe het inzicht tot stand komt en onderscheidt achtereenvolgens een aanschouwelijke strukturering van het waarnemingsveld, een taalstrukturering en een logische strukturering. Zij werken gedeeltelijk samen, vullen elkaar aan maar op den duur verdringt de later genoemde de voorafgaande. Ook hier wordt dus nogeens evenals in het proefschrift van Dieke van Hiele de aandacht gevestigd op het belang van het voldoende tijd besteden aan de aanschouwelijke strukturering. Naast deze theoretische voorwaarden bespreekt de schrijver ook nog een aantal praktische voorwaarden, zoals de belangstelling voor het gegeven onderwerp, de bezinning, het leermateriaal en het persoonlijke kontakt. Hij laat zien, dat op de middelbare school heel dikwijls geen inzicht gekonstateerd wordt, daar waar men het wel verwacht tegen te komen.

Een zeer belangrijk facet in de dissertatie is de verdeling van de leerlingen in twee typen, het algorithmen-type en het strukturerende type. Belangrijk, omdat het m.i. ook voor geheel andere vakken of vakgroepen de moeite waard is deze verdeling te bestuderen. Tot het algorithmen-type behoort de leerling, die een aantal oplossingsmethoden uit het hoofd heeft geleerd en deze kan toepassen, als hij ze maar herkent, terwijl de leerling, die tot het strukturerende type behoort, steeds het begrip van de metoden probeert te overzien en zich zo een eigen weg baant door de problemen. Een leraar, die zich bewust voorneemt dergelijke leerlingen van het tweede type te vormen heeft het vaak niet eenvoudig, hij zal n.l. door die leerlingen oplossingsmetoden voorgezet krijgen, die hij zelf niet voorziet, en hij zal deze in een klassegesprek aan een nauwkeurig onderzoek moeten onderwerpen. Leerlingen van het strukturerende type rekenen vaak niet zo vlot, waardoor sommige operaties stroever lopen, dan de leraar wel zou willen.

Het is van fundamenteel belang om op deze verdeling de aandacht te vestigen, want Pierre van Hiele heeft wel duidelijk aangetoond, dat een transfer (de toepassing van denk en gedragsgewoonten, die door een bepaald leerproces gevormd zijn a) op de problemen uit de wiskunde, of b) op wiskundige problemen in een ander leervak dan wiskunde of c) op problemen van niet-wiskundige aard elders (de vormende waarde dus)) alleen bij die leerlingen een kans van slagen heeft, die meer van het strukturerende type zijn.

Behandeld wordt de vraag of het mogelijk is onder de huidige omstandigheden goed wiskunde-onderwijs te geven, waarbij dan blijkt, dat er in ieder geval twee remmende faktoren zijn, n.l. het toelatingseksamen en het eindeksamen. Het toelatingseksamen maakt, dat de leerling vaak kunstjes moet aanleren omdat de leerlingen de moeilijke vragen van het toelatingseksamen niet met begrip kunnen oplossen. De kinderen moeten dus een aantal recepten kennen, die bij verschillende vraagstukkentypen passen. Men moet dus in het eerste leerjaar op de middelbare school er veel tijd en aandacht aan besteden om de verkeerde gewoonten van de leerlingen te veranderen. Dan is het mogelijk een aantal jaren goed onderwijs te geven, maar al spoedig zal het eindeksamen zijn invloed doen gelden. Op deze eksamens is het al net zo gesteld, ook daar slaagt men alleen als men naast een zekere mate van inzicht ook een voldoend tempo bezit en men over de kennis van een aantal resultaten van aanpakmetoden beschikt.

In het tweede gedeelte van het proefschrift gaat Pierre van Hiele uitvoerig in op de voorwaarden die aan de didaktiek gesteld moeten worden om het inzicht zo goed mogelijk te laten funktioneren en op de praktische realiseerbaarheid daarvan. In het bijzonder het onderwijs in de meetkunde wordt daarbij in het onderzoek betrokken. Het is ondoenlijk om in het kader van dit artikel in te gaan op allerhande facetten die de revue passeren, ik zal slechts enkele uitkiezen.

Schrijver laat zien dat het inzicht niet goed gaat funktioneren als men een groot aantal oplossingsmetoden kent, in tegendeel dit kan zelfs remmend werken; deze onjuiste interpretatie van de denkpsychologie van Selz heeft verschillende onaangename gevolgen gehad, ook ten aanzien van het eindeksamen. Daarentegen moet men de leerlingen laten beschikken over een *beperkt* aantal *rijk* gestruktureerde velden, zoals dit b.v. uit het protokol van Dieke van Hiele blijken mag. Belangrijk zijn m.i. ook de opmerkingen van de schrijver over de aanpassing van het onderwijs aan de ervaringswereld, men kan n.l. door abstraktie uit de ervaringswereld komen tot de wereld der wiskunde. Begint men echter met wiskundige definities en gaat men met behulp hiervan het operatieve veld der wiskunde opbouwen dan is de kans groot, dat tenslotte de strukturering van het wiskundige systeem en die van de ervaringswereld niet voldoende in verband gebracht kunnen worden. In verband met dit uitgangspunt geeft schrijver een lange lijst van onderwerpen, die bij het kennen en begrijpen van de ruimte een rol spelen. Hiermee zal men dan ook terdege rekening moeten en kunnen houden, als men zijn onderwijs wil trachten in te richten naar de kinderlijke motivatie van de leerstof.

De denkniveau's, die Pierre van Hiele heeft geïntroduceerd worden in dit proefschrift nog eens uitvoerig besproken, het bereiken van een niveau immers betekent, het verkrijgen van een bijzonder soort inzicht n.l. van een inzicht dat samenhangt met een geheel nieuwe denkordening. Het komt zo vaak voor, dat een leerling in de meetkunde faalt bij het vinden van een oplossing, men wijt dit dan aan een tekort aan inventief vermogen en tracht door middel van het leren van vele oplossingsmetoden dit euvel te vermijden. De kans is echter groot, dat de leerlingen het vereiste denkniveau nog niet bereikt hebben.

Schrijver wijst erop, dat de leraar steeds aan zijn leerlingen duidelijk moet maken, dat zij niet hun leerstof moeten leren beheersen door middel van rekenmetoden maar met inzicht, omgekeerd zullen verschillende intelligente leerlingen gewaarschuwd moeten worden tegen een overschatting van het inzicht, zij moeten juist gewezen worden op de betekenis van het technisch rekenen.

Het zal duidelijk zijn, dat de beweringen, die in dit proefschrift te vinden zijn grotendeels gebaseerd zijn op zijn eigen ervaringen en die van zijn vrouw en dat deze beweringen in haar proefschrift hun bevestiging vinden. Dat het mogelijk is om over deze problematiek te diskussiëren, danken we mede aan het aanwezig zijn van haar uitvoerige lesprotokollen.

Aan het einde van een recensie leest men wel eens: laat ieder die het wiskunde-onderwijs ter harte gaat, kennis nemen van dit werk; deze woorden zijn echter te zwak om de betekenis van deze beide werken aan te geven. Ik wil hier dan ook maar liever zeggen wat Bergstra in zijn bespreking van het proefschrift van Pierre van Hiele (Mededelingenblad Wiskunde Werkgroep W.V.O. juli 1957) met wat andere woorden schreef: ieder die in de toekomst een steentje zal willen bijdragen tot een wetenschappelijk gefundeerde wiskunde-didaktiek zal daarbij de proefschriften van Dieke en Pierre niet kunnen omzeilen, maar in tegendeel hij zal ze diepgaand moeten analyseren.

MATHEMATISCH CENTRUM

Met ingang van 15 april 1959 is het telefoonnummer van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O., uitsluitend 747272 (3 lijnen).

BOEKBESPREKING

Siegfried Heller, *Die Entdeckung der stetigen Teilung* [1]) *durch die Pythagoreer*; Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik und Technik, Jahrgang 1958, Nr. 6, 28 blz., DM 4,—; Akademie-Verlag, Berlin, 1958.

De korte inhoud van dit boekje is het volgende. De Pythagoreër Hippasos onderzocht het regelmatige twaalfvlak en was de ontdekker van het irrationale. Waarschijnlijk bestaat hier verband tussen en ontdekte hij de irrationale verhouding van een zijde en een diagonaal van een regelmatige vijfhoek. Dit kan geschied zijn, doordat hij de zijde op de diagonaal afpaste, het resterende gedeelte weer op de zijde, enz. Aan de hand van een serie regelmatige vijfhoeken, waarvan elke volgende binnen de vorige ligt, kan men dan inzien, dat dit proces niet eindigt. Op analoge wijze kan men inzien, dat de verhouding tussen een zijde en een diagonaal van een vierkant irrationaal is. Ook hier krijgt men een serie steeds kleiner wordende vierkanten. Noemt men de zijde van een vierkant s_n en de diagonaal d_n en de zijde en diagonaal van het daaruit voortkomende kleinere vierkant s_{n-1} en d_{n-1}, dan blijkt te gelden $s_n = s_{n-1} + d_{n-1}$ en $d_n = s_n + s_{n-1}$. Hoewel er teruggaande geen begin is, zou men kunnen beginnen met een hypothetisch begin, waarbij $s_1 = 1$ en $d_1 = 1$, dus met een ruit met een hoek van 60°. Past men hier de gevonden formules op toe, dan verkrijgt men $s_2 = 2$, $d_2 = 3$, $s_3 = 5$, $d_3 = 7$, hetgeen een serie ruiten oplevert, die vrij snel de gedaante van een vierkant bij benadering aannemen. Steeds is daarbij $2s_n^2 - d_n^2 = \pm 1$. Past men nu hetzelfde procédé toe op de vijfhoeken, dan krijgt men $s_n = d_{n-1}$ en $d_n = s_n + s_{n-1}$. Ook hier kan men uitgaan van een min of meer pathologische vijfhoek met $s_1 = 1$ en $d_1 = 1$ en dan een serie vijfhoeken construeren, die bij benadering regelmatig worden. Weer is $d_n(d_n - s_n) - s_n^2 = \pm 1$. Dit leidt tot het vermoeden, dat voor de regelmatige vijfhoek geldt $d_n(d_n - s_n) - s_n^2 = 0$ Dit vermoeden is later bewezen (vgl. Euclides, Elementen, IV, 10).

De constructie van de regelmatige vijfhoek is waarschijnlijk aanvankelijk geschied met behulp van een inschuifliniaal. Eerst later is onze nog gangbare constructie gevolgd, waarbij van bovenstaand verband tussen s_n en d_n gebruik wordt gemaakt en van oppervlakterekening. Men vindt deze constructie bij Euclides (Elementen, II, 11). Ze is van Pythagoreïsche oorsprong.

Nauwkeurig wordt door de auteur nagegaan, op welke wijze zijn vermoedens op grond van hetgeen over de Griekse meetkunde bekend is, gefundeerd kunnen worden.

Dit interessante boekje kan ik degenen, die van plan zijn in de A-afdeling geschiedenis van de wiskunde te doceren, ten zeerste aanbevelen.

P. G. J. Vredenduin.

Kurt Vogel, *Vorgriechische Mathematik.* Teil I. Vorgeschichte und Ägypten. Mathematische Studienhefte für den mathematischen Unterricht an Höheren Schulen, herausgegeben von Dr. Hermann Athen und Dr. Georg Wolff. Hermnna Schroeder Verlag KG, Hannover. Verlag Ferdinand Schöningh, Paderborn.

De reeks Mathematische Studienhefte, die met dit deeltje begint, vervolgt een tweeledig doel: 1) door behandeling van onderwerpen uit de moderne wiskunde die nog niet in het middelbaar onderwijs zijn doorgedrongen, maar daar wel een plaats zouden verdienen, iets laten zien van de belangrijke vernieuwing die zich op dit gebied aan het voltrekken is; 2) een nieuwe kijk geven op klassieke problemen en de

[1]) = Verdeling in uiterste en middelste reden.

verbinding van de wiskunde met andere gebieden der westerse kultuur in het licht stellen.

Het boven aangekondigde deeltje valt onder de tweede groep. Het gaat over praehistorische en Egyptische wiskunde en vormt daardoor het begin van de (nog voort te zetten) behandeling der gehele prae-helleense wiskunde.

De leiders van de serie hebben voor dit eerste deeltje wel de beste kracht aangetrokken die ze zouden hebben kunnen vinden. Prof. Kurt Vogel, emeritus-hoogleraar in de geschiedenis der wiskunde aan de Universiteit te München, is van het eerste ogenblik af, dat de Egyptische wiskunde in ruimere kring wetenschappelijke belangstelling begon te wekken, een der voornaamste beoefenaren van het onderwerp geweest. Mede met het oog op zijn andere historisch-mathematische publicaties hebben zij overtuigd kunnen zijn, dat er een èn wetenschappelijk èn didactisch verantwoorde uiteenzetting zou komen.

Dit is dan ook het geval. Op een algemene inleiding en een behandeling van praehistorische geometrie en getallenleer volgt een systematisch overzicht van wat uit de verschillende papyri over de wiskunde der oude Egyptenaren bekend is geworden. Het werkje kan aan ieder die zich voor dit onderwerp interesseert volmondig aanbevolen worden.

E. J. Dijksterhuis

W. Docter. *Rekenkunde voor kweekscholen*; eerste deel; 76 blz.; prijs *f* 2.75; Noordhoff, Groningen, 1958.

Het boek behandelt achtereenvolgens de hoofdbewerkingen met natuurlijke getallen, talstelsels, deelbaarheidskenmerken, breuken en verhoudingen. Theoretische rekenkunde is voor de leerlingen een moeilijk vak – op de middelbare scholen is het indertijd terecht afgeschaft – maar het is toch goed dat a.s. onderwijzers er althans iets van weten. Het schijnt me toe, dat de schrijver er in geslaagd is de juiste middenweg te bewandelen. De schrijftrant is prettig en ook de typografische uitvoering laat niets te wensen over. Toch zou ik de volgende opmerkingen willen maken. Waarom houdt men zo angstvallig vast aan de onderscheiding: verhoudingsdeling en verdelingsdeling? Reeds Prof. Schuh constateerde in zijn „Elementaire rekenkunde" op blz. 56: „Beide delingen zijn als rekenkundige vraag geheel dezelfde. Dat twee verschillende vragen betreffende hoeveelheden tot die rekenkundige vraag voeren, verandert hieraan niets. We vatten dan ook de deling uitsluitend als een verbinding van getallen op." Bij de volgorde der bewerkingen geeft de schrijver de zin: „Vader Draaft Op en Af" en ook „Vader Draaft Af en Op". Waarom niet alleen „Vader Draaft"? Op toelatingsexamens worden vaak fouten gemaakt, doordat leerlingen menen dat de optelling vóór de aftrekking gaat.

Eigenschappen van breuken worden bewezen met behulp van stambreuken; deze methode is wel aardig, maar m.i. toch omslachtiger, dan de gewone. Over de omzetting van „gewone breuken in tiendelige wordt niet gesproken, en dus vanzelf niet over repeterende breuken. Dit weglaten lijkt me onjuist.

De vraagstukken zijn verdeeld in A, B, en C-opgaven; vooral de laatste groep bevat voortreffelijke vragen.

Alles bijeen een goed boek, dat zijn weg zeker zal vinden.

P. Bronkhorst

4. Stelling. Elke verzameling mensen bestaat uit uitsluitend mannen of uit uitsluitend vrouwen.

Bewijs. Door middel van volledige inductie. De eigenschap is juist voor $n = 1$. Onderstel, dat de eigenschap juist is voor elke verzameling van k personen. We tonen dan aan, dat hieruit de juistheid voor $n = k + 1$ volgt. Neem een verzameling van $k + 1$ personen en stuur er één weg. Krachtens hypothese bestaat de overgebleven groep dan uit uitsluitend mannen of uit uitsluitend vrouwen. Roep de weggestuurde persoon weer terug. Het is nu nog mogelijk, dat deze van afwijkend geslacht is. Om aan te tonen, dat niet het geval kan zijn, sturen we nu een andere persoon weg. De resterende k personen zijn dan weer van hetzelfde geslacht, waaruit blijkt, dat de mogelijkheid, dat de eerst weggestuurde persoon van afwijkend geslacht is, vervalt.

Waar zit de fout in dit bewijs?

Een andere versie van deze opgave in meer mathematische vorm gegoten, is de volgende.

Stelling. $n = n + 2$, als $n > 1$.

Bewijs. Door middel van volledige inductie bewijzen we:

$$n > 1 \rightarrow n = n + 2.$$

Dit is juist, als $n = 1$, immers een implicatie is juist, als het eerste lid niet juist is.

We moeten nu nog bewijzen: als $n \neq 1$, dan is

$$(n > 1 \rightarrow n = n + 2) \rightarrow (n + 1 > 1 \rightarrow n + 1 = n + 1 + 2). \qquad (1)$$

Omdat $n > 1$ juist is, is

$$n > 1 \rightarrow n = n + 2 \text{ gelijkwaardig met } n = n + 2,$$

immers een implicatie met een juist eerste lid is juist of onjuist, al naarmate het tweede lid juist of onjuist is. We mogen in (1) dus „$n > 1$" weglaten en om dezelfde reden ook „$n + 1 > 1$". In plaats van (1) kunnen we dus volstaan met te bewijzen

$$n = n + 2 \rightarrow n + 1 = n + 1 + 2.$$

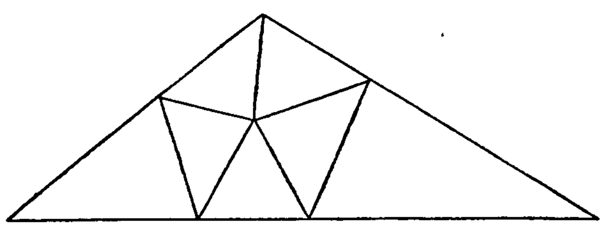
En dit is juist. Hiermee is de stelling bewezen.

Waar zit de fout?

OPLOSSINGEN

(Zie voor de opgaven het vorige nummer).

1. Het minimale aantal is 7. De aard van de verdeling ziet men in bijgaande figuur.



Als de driehoek scherphoekig is, verbindt men b.v. de middens van de zijden en krijgt dan een verdeling in 4 scherphoekige driehoeken.

2. De reeks bestaat uit de met 1 vermeerderde priemgetallen.

3. Hij heeft gevraagd: welke weg zou je broer aanwijzen, als ik hem vroeg, welke van de beide wegen naar A gaat?