

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

34e JAARGANG 1958/59

VI - 1 MAART 1959

INHOUD

Dr. Joh. H. Wansink, Toespraak bij de opening van de Wimecos-vergadering	161
Boekbespreking	164
Dr. Joh. H. Wansink, Didactische revue	165
Prof. Dr. F. van der Blij, Beeldende waarde van de wiskunde	176
J. A. Huneman, Twee bewijzen voor de stelling van Ptolomeus	185
Prof. Dr. H. Freudenthal, Een gevaarlijk boek	188
Kalender	192

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Bakenbergseweg 158, Arnhem, tel. 08300/21960.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (/ 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrucken overlegge men met de uitgever.

TOESPRAAK BIJ DE OPENING VAN DE WIMECOS-VERGADERING VAN 29 DECEMBER 1958

door

Dr. JOH. H. WANSINK

Dames en Heren,

Het zal U niet verwonderen dat ik in mijn openingswoord enige ogenblikken wens stil te staan bij het in 1958 tot stand gekomen nieuwe leerplan voor wiskunde.

Het stemt tot voldoening dat een initiatief tot herziening van het wiskundeleerplan op betrekkelijk korte termijn geleid heeft tot een nieuw programma dat op een algemene waardering van de kant van de wiskunde-docenten in Nederland mag rekenen.

Sinds 1919; dat is bijna 40 jaren lang; is er in het wiskunde-programma voor het gymnasium, en sinds 1937; dat is ruim 20 jaren lang, is er in het wiskundeprogramma voor de hogereburger-school geen wezenlijke verandering aangebracht. Deze jaartallen rechtvaardigen reeds voldoende de stelling; dat de modernisering van het wiskunde-onderwijs in ons land zich niet in een overijld tempo voltrekt.

Nadat het verlangen naar modernisering van het onderwijs in de wiskunde bij het V.H.M.O. in de naoorlogse jaren aan LIWENAGEL WIMECOS en aan de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. aanleiding had gegeven tot het formuleren van tal van wensen; en nadat het Paedagogisch Instituut van de Rijks-universiteit te Utrecht door een reeks didactische experimenten de mogelijkheid van behandeling van andere dan de traditionele leerstof had bewezen, nam in november 1953 het Bestuur van WIMECOS het besluit aan de agenda voor de eerstvolgende jaarvergadering de instelling van een leerplancommissie toe te voegen. Deze commissie werd in februari 1954 benoemd en diende haar rapport aan het WIMECOS-bestuur in op de jaarvergadering van december 1954. Opgemerkt moet worden dat er bij de samenstelling van de leerplancommissie door de opname van een vertegenwoordiger van het Bestuur van LIWENAGEL van meet af aan naar is gestreefd de wensen die er in beide verenigingen leven, naar elkaar toe te buigen.

In februari 1955 werden in een buitengewone algemene vergadering de voorstellen van de leerplancommissie zo goed als onge-

wijzigd met een overgrote meerderheid aangenomen, in april 1955 gebeurde hetzelfde op een ledenvergadering van LIWENAGEL. In maart 1955 betuigde de Wiskundegroep van de W.V.O. bij de Minister adhesie ten aanzien van de gedane voorstellen. Eveneens werd er een adhesiebetuiging verzonden namens de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, nationale subcommissie van de Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique (maart 1956).

Ik ben er van overtuigd dat het succes dat aan de voorstellen van 1955 ten deel is gevallen in belangrijke mate de danken is aan het „eenheidsfront” dat de leraren ten aanzien van de programmaherziening zo eendrachtig hebben weten te vormen.

Als symptoom van de belangstelling die er voor de modernisering van ons wiskunde-onderwijs bestond, wijs ik nog op de zeer druk bezochte vacatiecursus van het Mathematisch Centrum in de herfstvacantie 1955, welke cursus geheel aan het ontwerp-leerplan was gewijd.

Het spreekt vanzelf dat er ook verzet bleef bestaan tegen de gedane voorstellen. De bezwaren, die naar voren gebracht werden, waren voornamelijk de volgende:

- a. het nieuwe programma zou overladen zijn;
- b. statistiek als onderdeel van het wiskunde-programma werd als ongewenst beschouwd.

Op de jaarvergadering van WIMECOS in december 1956 kon de voorzitter meedelen, dat het overleg met de Inspectie inzake het nieuwe leerplan nog werd voortgezet, voornamelijk inzake de volgende punten:

- a. de moeilijkheden die de leerstofverdeling zou opleveren als de hogere burgerschool van vijfjarig zesjarig zou worden;
- b. de mogelijkheden van een nieuw leerplan zonder statistiek.

In deze vergadering nam het Bestuur op zich naar een integrale invoering van het conceptleerplan te blijven streven, eventueel naar een programma dat het concept zo dicht mogelijk zou benaderen.

In de loop van 1957 bleek echter dat er van een volledige doorvoering der plannen zou moeten worden afgezien. In de jaarvergadering van 1957 moest de voorzitter meedelen dat het Bestuur van WIMECOS zich gesteld had achter de opvattingen van de leden van de leerplancommissie, die in juni 1957 aan het College van Inspecteurs van het V.H.M.O. hadden meegedeeld, op welke gronden zij allen meenden de statistiek te moeten laten vervallen voor wat betreft een programmaherziening op korte termijn.

In deze jaarvergadering deelde de voorzitter voorts mede, dat redelijkerwijze kon worden verwacht dat op 1 september 1958 het nieuwe leerplan exclusief de statistiek in de klassen 1, 2, 3 van de hogereburgerscholen en in de klassen 1, 2, 3, 4 van de gymnasia zou worden ingevoerd. Verder op 1 september 1959 voor de volgende klassen en op 1 september 1960 voor de hoogste klassen van onze scholen.

Door de totstandkoming van het K.B. van 30 augustus 1958 zijn deze verwachtingen werkelijkheid geworden.

We wachten nu nog op een nieuw eindexamenprogramma, dat vóór 1 september 1959 in het staatsblad zal moeten staan, als het plan om in 1961 voor de eerste maal het eindexamen van hogereburgerschool en gymnasium volgens het nieuwe programma af te nemen uitgevoerd zal kunnen worden.

Ik geloof dat met het vertrouwen de tijdige totstandkoming van de nieuwe eindexamenregeling tegemoet kunnen zien; een niet-tijdige aanpassing zou het onderwijs immers tezeer ontwrichten.

Gaarne wil ik vanaf deze plaats onze grote erkentelijkheid uitspreken voor het feit dat het mogelijk is gebleken op betrekkelijk korte termijn het nieuwe programma, dat voor de naaste toekomst zozeer zijn invloed op ons wiskunde-onderwijs zal doen gelden, in het Staatsblad te brengen.

Voor de *naaste* toekomst: ik ben het nl. eens met velerlei stemmen (o.a. Prof. Gerretsen in Valcoogh, Krooshof in het Mededelingenblad van de W.V.O.) dat dit leerplan slechts een eerste stap is op de weg naar een aanpassing aan de eisen die tegenwoordig aan het leerplan dienen te worden gesteld.

Deze aanpassing blijve daarom een voorwerp van aanhoudende zorg der verantwoordelijke instanties.

Aanvankelijk was het de bedoeling van het Wimecos-bestuur om in februari 1959 een buitengewone algemene vergadering uit te schrijven, in samenwerking met Liwenagel, om alle vragen te bespreken die er in verband met de invoering van het nieuwe leerplan zouden kunnen rijzen. Ook wat betreft de nieuwe regeling van het eindexamen. Alles in de geest van de buitengewone algemene vergadering van 1937, waarin na de invoering van het nieuwe leerplan van dat jaar inspecteur VAN ANDEL de vele vragen die er toen rezen, heeft beantwoord, zoals U in de 14e jaargang van Euclides (blz. 71-85) kunt naslaan.

Het is ons echter gebleken dat deze buitengewone algemene

vergadering overbodig is geworden, doordat het College van Inspecteurs van plan is regionale vergaderingen te doen houden (in elke inspectie één), waarin het nieuwe leerplan voor wiskunde met alle wiskundedocenten zal kunnen worden besproken.

U begrijpt dat het Wimecos-bestuur zich over dit initiatief zeer verheugt, evenals over de toezegging na afloop van de regionale besprekingen in Euclides een nota te doen opnemen, die een samenvatting zal bevatten van het besprokene, ten gerieve van hen die verhinderd zijn geweest de regionale vergaderingen bij te wonen en ten gerieve van hen die zich achteraf omtrent de opvattingen van nu zullen wensen te oriënteren.

Het Bestuur van Wimecos is gaarne bereid zijn bemiddeling te verlenen bij het doorgeven van vragen aan de Inspectie die met de invoering van het nieuwe leerplan enig verband houden.

Met de wens dat het wiskunde-onderwijs onder het nieuwe leerplan 1958 een periode van bloei tegemoet mag gaan verklaar ik de jaarvergadering van WIMECOS voor geopend.

BOEKBESPREKING

Ir. A. E. Bosman, *Het wondere onderzoekingsveld der vlakke meetkunde*. N.V. Uitg. mij. Parcival, Breda, 1957. 144 blz., geb., geen prijs genoemd.

Zoals uit de titel al wel kan worden afgeleid, heeft de schrijver een zeer grote bewondering voor demogelijkheden, die de vlakke meetkunde zijn beoefenaren biedt. Hij is gegrepen door de vele wetmatigheden, tot de ontdekking waarvan onderzoeken op dit terrein kunnen leiden, en vooral door de zeer fraaie figuren, die men kan doen ontstaan, b.v. door het bij herhaling toepassen van bepaalde tekenregels. Vooral aan het vervaardigen van dergelijke figuren en aan het bestuderen er van heeft hij kennelijk zeer veel tijd besteed en met genoegen besteed en het is dan ook geen wonder, dat hij zich heeft afgevraagd, of een en ander niet dienstbaar gemaakt zou kunnen worden aan het onderwijs, ook omdat hij hierin een middel ziet om de leerlingen te brengen tot het beoefenen van de meetkunde en het zelf doen van onderzoeken op dit gebied om der wille van de meetkunde zelf en niet alleen wegens nuttigheidsoverwegingen als „het moet voor mijn eindexamen” e.d.

Het boek, dat als gevolg van deze overwegingen is ontstaan, is zeer mooi uitgevoerd; het is in linnen gebonden en er staan vele bijzonder interessante tekeningen in, aan de vervaardiging waarvan uitzonderlijke zorg is besteed. Het enthousiasme waarmee de schrijver zijn stof aanbiedt, doet weldadig aan.

M. i. heeft het geen zin, op een enkele onnauwkeurigheid te wijzen, die mij in de tekst opviel; ik heb het boekje met genoegen bekeken. De collega, die het voor de schoolbibliotheek aan gaat schaffen, zal zeker zo nu en dan een leerling hebben, aan wie het uitlezen er van zeer besteed is.

H. W. Lenstra

DIDACTISCHE REVUE

door

Dr. JOH. H. WANSINK

Modernisering van het wiskunde-programma

1. In aflevering 3 van deze jaargang staat een artikel van prof. dr. J. C. H. Gerretsen, getiteld „*Doelstelling van het wiskunde-onderwijs*”, dat om meer dan één reden de aandacht van de lezers van Euclides verdient. Ik wijs hier op dit artikel, omdat het een klemmend betoog bevat voor een radicalere herziening van het wiskunde-programma voor onze scholen dan in 1958 in de geest van de Wimecos-voorstellen werd gerealiseerd.

Aan het einde van bedoeld artikel (blz. 93—94) stelt de auteur de vraag: „Zijn de leraren in staat een nieuw leerplan te ontwerpen, dat voldoende is afgestemd op de eisen die de maatschappij stelt, rekening houdt met opvoedkundige idealen en voorts nauwer dan tot dusver het geval is verband houdt met levende wetenschap? Waarschijnlijk zal een dergelijke opgaaf slechts in internationaal verband tot een goed einde kunnen worden gebracht, want de problemen zijn voor alle landen van West-Europa analoog”.

De bedoeling van deze Revue is te laten zien dat de roep om een nieuw leerplan in progressieve geest zich in binnen- en in buitenland reeds bij herhaling doet horen.

De belangstelling voor een „modern leerplan” is dit jaar in ons land o.a. tot uitdrukking gekomen in de tiende prijsvraag door het Wiskundig Genootschap uitgeschreven, en opgenomen in het aprilnummer van het *Nieuw Archief voor Wiskunde*.

De opgaaf luidde:

„Gevraagd wordt, systematisch de mogelijkheid te onderzoeken, het wiskunde-onderwijs op de middelbare school aan de hedendaagse behoeften en hedendaagse opvoedkundige methoden aan te passen. In het bijzonder is het gewenst, de volgende vier punten in een zo mogelijk enigszins gedetailleerde vorm te behandelen:

- a. de wenselijkheid en de mogelijkheid van een differentiatie in het mathematische leerplan met het oog op de toekomstige carrière en de persoonlijke belangstelling van de leerlingen,

bijv. door onderscheiding van de volgende klassen van beroepen:

geheel niet-mathematische beroepen („algemeen vormende wiskunde”), degene waarbij wel eens wiskunde gebruikt wordt, en degene waarbij wiskunde een hoofdzaak vormt;

- b. de wenselijkheid en mogelijkheid, een lange reeks van deductieve argumenten (bv. meetkundige stellingen) te vervangen door een aantal deductieve reeksen van kleinere omvang, zoals bv. voorkomen in de elementaire delen van de axiomatische groepentheorie en andere algebraïsche systemen, topologische ruimten, enz.;
- c. voorkoming van de mogelijkheid, dat anders gericht intellect tengevolge van falen der aanpassing aan mathematisch georiënteerd denken zich op school in onvoldoende mate kan ontplooien, waardoor potentiële mogelijkheden voor de samenleving verloren kunnen gaan;
- d. de wenselijkheid en de mogelijkheid om het bestaande examenstelsel te vervangen door andere toetsingsmethoden (in de statistische zin, niet in de psychologische zin), waarvan verwacht mag worden, dat ze voldoen aan redelijke statistische voorwaarden van betrouwbaarheid en nauwkeurigheid.

In het bijzonder wordt gevraagd, realiseerbare programma's en methoden te schetsen, die zouden kunnen dienen als basis voor experimenteel onderwijs”.

Gaarne vestig ik de aandacht op deze prijsvraag, waarvan „oplossingen” tot 1^o januari 1960 kunnen worden ingezonden. Een volledige beantwoording van alle onderdelen wordt niet gevraagd: ze zou de krachten van de enkeling te boven gaan.

Dat ook het bestuur van Wimecos een open oog heeft voor de verdere modernisering van ons wiskundeonderwijs moge blijken uit de agenda voor de jaarvergadering 1958, waar zowel door een hoogleraar als door een docent V.H.M.O. een voordracht gehouden zal worden over: *„Onderwerpen uit de moderne wiskunde, die geschikt te maken zijn voor leerlingen van het V.H.M.O., en hoe”* (sprekers: Prof. dr. C. Visser en Dr. H. Streefkerk).

2. Bovenstaande publicaties uit Nederlandse tijdschriften geven me gerede aanleiding de aandacht te vestigen op enige buitenlandse publicaties over deze materie, die me het afgelopen jaar onder de ogen zijn gekomen.

Het belangrijkste geschrift is m.i. het tweeëndertigste Yearbook van de National Council of Teachers of Mathematics in de Verenigde Staten. De titel luidt: "*Insights into modern mathematics*" (Washington, 1957).

Dit Yearbook is geschreven om in een speciale behoefte van wiskundeleraren te voorzien. Het geeft informatie zowel ten aanzien van diverse mathematische disciplines als ten aanzien van de geest der moderne wiskunde. Om misverstand te weren wordt er uitdrukkelijk op gewezen dat de inhoud van dit Yearbook zich niet leent om als leerstof op enige middelbare school te worden gebruikt. Wel wordt de verwachting uitgesproken, dat de inhoud ervan invloed zal uitoefenen op de keuze van de leerstof bij toekomstige programmaherzieningen.

Aan het voorwoord ontleen ik:

During recent years, dating approximately from the middle of the nineteenth century, mathematics has experienced a remarkable metamorphosis. The foundations have been, and continue to be, subjected to critical examination. Some traditional techniques have been discarded as no longer efficient, others have undergone radical modification. Familiar definitions of many basic concepts have been dropped as passé and inexact, some to be discarded, some to be modified, some to be retained. Many new concepts and modern techniques are now considered as significant common property among mathematicians.

En niet alleen de indrukwekkende wijzigingen op het gebied der meetkunde vragen onze aandacht.

Simultaneously with these latter accomplishments in geometry, algebra was undergoing a considerable rejuvenation through the extensive use of the postulational-deductive method introduced by geometers and through the utilization of the ideas of abstract group theory. Although many of the basic notions of the newer algebra that resulted go back to Kronecker, Dedekind, and Steinitz, and to several English students of the subject, major credit for its development should probably be given to the great woman mathematician, Emmy Noether. The work, *Modern Algebra*, by one of her students, B. L. Van der Waerden, provides the classical account of modern algebra, as Emmy Noether conceived it...

Unfortunately, the remarkable change that has taken place in algebra appears to have had little effect upon the precollege and early college curriculum in mathematics. The rather common argument that geometry is essential in the high-school program,

because it illustrates the use of deductive procedures deserves reconsideration, for algebra, as presently conceived, may be a better vehicle for exhibiting the use of the postulational-deductive method. Certainly geometry is no longer the only mathematical subject in which deductive logic is used; it is used everywhere in mathematics.

Wat de inhoud van dit belangrijke Yearbook betreft moet ik volstaan met het opsommen van enige titels van hoofdstukken; elk dezer hoofdstukken is door een speciaal deskundige verzorgd.

De titels zijn:

1. the concept of number;
2. operating with sets;
3. deductive methods in mathematics;
4. algebra;
5. geometric vector analysis and the concept of vector space;
6. limits;
7. functions;
8. origins and development of concepts of geometry;
9. point set topology;
10. the theory of probability;
11. computing machines and automatic decisions;
12. implications for the mathematics curriculum.

Uit het laatste hoofdstuk citeer ik enkele zinsneden om uit te laten komen op welke meest nabije gebieden men in de U.S.A. beïnvloeding van het leerplan van de middelbare school door de ontwikkeling van de moderne wiskunde verwacht.

The theory of sets is of fundamental importance in all branches of mathematics. It should permeate the thinking of teachers at all levels—kindergarten through graduate school.

In elementary algebra the following is a useful interpretation of variable: a variable is a symbol that may represent any element from a special set of elements.

The modern concept of function is a special case of a relation. The word "function" is commonly used in two ways:

- (i) A function is a single-valued relation between the elements of a set and the elements of a second set. A precise way of saying this is that a function is a set of ordered pairs of elements such that the first elements are from one set and the second elements are from the other, and there are no two pairs with equal first elements and unequal second elements.

- (ii) A function is a rule or expression which specifies the relationship between the elements of the two sets just mentioned.

Statistical thinking and machine computation represent new areas of mathematics that are now in their initial stage of exploration.

The progress of our country in many scientific areas depends upon our success in preparing our better students not only to be competent in traditional areas of mathematics but also to make use of statistical thinking and machine computation. . . . They need to recognize the dependence of machine computation upon the fundamental mathematics concepts in their high-school mathematics curriculum.

Dit Amerikaanse boek van 440 blz. confronteert de lezer met een noodzaak tot programmawijziging die internationaal is te achten (vgl. nog het artikel van prof. Gerretsen). Wat het werk zo waardevol maakt is dat het zeer veel informatie geeft over moderne wiskunde in een vorm die snelle orientatie vergemakkelijkt; de problemen worden bij herhaling beschouwd niet allereerst van hoger standpunt, maar van het standpunt van de middelbare school.

Een tweede boek over moderne wiskunde en middelbaar onderwijs waarop ik gaarne de aandacht wil vestigen, is van de hand van Lucienne Félix en getiteld „*L'aspect moderne des mathématiques*” (Parijs, 1957). Nog meer dan door de algemene informatie die dit werk verschaft, valt het op door zijn stimulerend karakter. Prof. Bouligand (Sorbonne), die het boek inleidt en commentarieert, zegt in zijn voorwoord: „Mademoiselle Felix étant de ceux qui tiennent à ne pas séparer la pensée mathématique de l'activité globale de l'esprit, a donné au présent exposé une note humaniste en faisant d'heureux rapprochements qui lui font évoquer la musique et la peinture pour les mettre en parallèle avec les sciences déductives”.

In haar inleidende schets over de evolutie van het wiskundig denken stelt Mme Félix de vraag: „Y a-t-il un scandale des mathématiques modernes?” Ze ontdekt het aanstootgevende echter niet op het gebied van de wiskunde zelf, maar wel bij het onderwijs in de wiskunde. Il serait scandaleux qu'un élève sortant d'un lycée avec son premier grade universitaire s'aperçoive que la formation qu'il a reçue et les connaissances acquises ne sont pas adaptées à la suite des études. Weliswaar zullen we vaak moeten erkennen, dat het onvermijdelijk is, dat het onderwijs één generatie achter is ten opzichte van de wetenschap, een achterstand veroorzaakt door het

generatieverschil van docent en leerling. Het is echter beslist ontoelaatbaar dat een leraar in functie niet op de hoogte is van de leerstof die zijn leerlingen een jaar later op universiteit of hogeschool te verwerken zullen krijgen. Mej. Félix constateert een algemeen élan ter overbrugging van deze fatale kloof: toutes les voix qui s'élèvent, les unes très dynamiques, les autres modératrices, reconnaissent que l'immobilisme est condamné.

Haar eigen boek bezit alle kwaliteiten om er in en buiten Frankrijk toe bij te dragen dat de leraar in functie een deel van de achterstand ontstaan door het generatieverschil inhaalt.

Ook hier moet ik verder volstaan met een inhoudsopgave.

1. La révision des valeurs au début du XXe siècle; musique; peinture; sciences de la nature; les nouvelles tendances des mathématiques.
2. Quelques aspects de métamathématique; logique et méthodes. La question des fondements; logique et symbolisme; comparaison des théories; modèles; extension des théories; l'exposition des mathématiques; le formalisme.
3. Quelques pas dans les mathématiques. L'algèbre générale; la topologie générale; exemples des structures composées; quelques grandes théories; conclusions.
4. Point de vue pédagogique. Exemples d'application de la logique; exemples d'utilisation d'un formalisme; théorèmes de Simson, de Miquel, de Clifford.

Op de betekenis van het Duitse standaardwerk „*Grundzüge der Mathematik*” waarvan in 1958 het eerste deel (*Arithmetik und Algebra*) is verschenen, ga ik in deze revue nog niet in.

3. Welke artikelen uit de didactische tijdschriften van het afgelopen jaar zijn van betekenis in verband met het probleem „modernisering van het wiskunde-programma”?

Ik noem in de eerste plaats:

A. Kirsch, „*Zwei isomorphe Gruppen aus der Schulstoff der Mittelschule*” (Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, XI²). Ik citeer eruit:

Das Sichtbarmachen der Isomorphie zweier Gruppen — also der Gleichartigkeit ihrer Struktur — ist zweifellos in hervorragender Weise geeignet, die Abstraktionsfähigkeit zu bilden und den Schulstoff in neuer Weise sehen zu lehren. Im folgenden möchte ich auf die Isomorphie zweier Gruppen aufmerksam machen, die

gleichsam „von selber“ im mathematischen Unterricht der Mittelstufe auftreten und nicht etwa ad hoc gebildet werden müssen. Wohl nur bei solchen Gelegenheiten (und nicht durch eine zusätzliche Behandlung der Gruppen „theorie“ in Arbeitsgemeinschaften) kann der Gruppenbegriff auch in der breiteren Schularbeit fruchtbar werden. Besonders wichtig scheint mir zu sein, daß die betreffenden Gruppen aus verschiedenen Gebieten der Schulmathematik stammen, weil erst so der wesentliche Abstraktionsvorgang voll zur Geltung kommt.

Die erste der beiden Gruppen wird von den Kongruenzabbildungen eines Quadrats gebildet. Im Unterricht kommt man natürlich nicht unmittelbar auf diese Gruppe, sondern etwa auf folgendem Wege. Die Spiegelungen S_1 und S_2 an zwei festen, zueinander senkrechten Achsen werden hintereinander ausgeführt und liefern als „Verknüpfungsergebnis“ die Halbdrehung H um den Achsenmittelpunkt. Die weiteren Verknüpfungen dieser drei Abbildungen S_1, S_2, H , zusammen mit der „erhaltenden Abbildung“ E (oder „Identität“), ergeben zunächst diese Verknüpfungstabelle:

	E	S_1	S_2	H
E	E	S_1	S_2	H
S_1	S_1	E	H	S_2
S_2	S_2	H	E	S_1
H	H	S_2	S_1	E

Dies ist nichts anderes als die Gruppe der Kongruenzabbildungen eines Rechtecks oder eines Rhombus. Fragt man nun weiter nach der Gesamtheit aller Kongruenzabbildungen, die sogar ein Quadrat mit sich zur Deckung bringen, dann treten noch zwei weitere Spiegelungen S_3 und S_4 an den um 45° gedrehten Achsen hinzu, sowie zwei Drehungen D_+ und D_- um jeweils 90° im bzw. gegen den Uhrzeigersinn. Een grotere „Verknüpfungstabelle“ laßt sich nun gemakkelijk samenstellen. Die zweite weniger bekannte Gruppe tritt in der Proportionenlehre auf. Man behandelt die erlaubten Umformungen einer Proportion und fragt dabei naturgemäsz nach der Ergebnis der Hintereinanderausführung zweier solcher Umformungen. Wird z.B. zuerst die Vertauschung J der Innenglieder und danach die Vertauschung A der Aussenglieder vorgenommen, so entsteht als „Verknüpfungs“-ergebnis die Umkehrung R der Reihenfolge aller vier Glieder.

Aus:

$$a : b = c : d$$

wird zuerst:

$$a : c = b : d$$

und danach:

$$d : c = b : a.$$

Analoog aan de eerste tabel hebben we nu:

	E	J	A	R
E	E	J	A	R
J	J	E	R	A
A	A	R	E	J
R	R	A	J	E

Ook nog enige andere omvormingen in evenredigheden worden beschouwd en vervolgens worden de beide grote tabellen die gemaakt kunnen worden, ten aanzien van hun structuur vergeleken. De een blijkt uit de andere te kunnen ontstaan door aan de rij afbeeldingen van het vierkant een rij omvormingen van de evenredigheden toe te voegen.

Damit ist die Gleichartigkeit der Struktur, d.h. die Isomorphie der betreffenden Gruppen erkannt. Wir haben dabei die folgende einfachste Fassung des Isomorphiebegriffes benutzt: „Gruppen, deren Verknüpfungstabelle bei geeigneter Bezeichnung und Anordnung der Elemente übereinstimmen, heißen isomorphe Gruppen.“

De auteur gaat vervolgens in op de diepere grond van de aangewezen isomorphie.

Aan een verslag van een voordracht van Noack over „*Anschauliche Gruppentheorie*“ (M.N.U. XI²) ontleen ik:

Der Vortragende wies darauf hin, dass gewisse elementare Begriffe der modernen Algebra nicht ausser acht gelassen werden dürfen, wenn die Verbindung zwischen Schule und Hochschule in der Mathematik nicht abreißen soll. Hierzu gehört die Gruppe. Sie ermöglicht Aussagen, die für verschiedene Disziplinen gleichzeitig gelten, und sie vermittelt neben formalen und ästhetischen Bildungswerten besonders eindringlich den Geisteswissenschaftlichen Aspekt der Mathematik. Dabei muss in der Schule die Anschauung der Begriffsbildung vorangestellt werden. Es wird weiter gezeigt, dass die Gruppentheorie gestattet, den Symmetriegehalt von Figuren zu analysieren. An zwei Beispielen — Ornament und Polyeder —

zeigte der Vortragende schliesslich, wie man auch kompliziertere Zusammenhänge anschaulich untersuchen kann.

Naast de „groepen” vragen de „vectoren” in de nabije toekomst de belangstelling van het middelbaar onderwijs. Van verschillende zijden wordt de vectorrekening thans reeds als geschikte leerstof aanbevolen. Ik wijs alleen op twee artikelen:

- a. G. Choquet, „*Espaces vectoriels*”, in *Mathematica & Paedagogia* (no 13);
- b. A. Baur, „*Die Einführung der Vektorprodukte im mathematischen Unterricht* (M.N.U., X¹⁰).

Aan Choquet's artikel ontleen ik:

La notion de vecteur se rencontre à diverses occasions dans l'enseignement secondaire: composition de translations, de vitesses, de forces, produit scalaire, produit vectoriel, moment d'un vecteur par rapport à un point, puis plus tard sous des formes algébriques plus cachées à propos des polynômes, des formes lineaires. Le mot vecteur n'est pas alors toujours utilisé avec le même sens: c'est tantôt un vecteur lié, tantôt un vecteur glissant, tantôt un vecteur libre. Il ne s'agira ici que de vecteurs libres.

Bien que l'image géométrique couramment utilisée: un segment de droite muni d'un flèche à un de ses extrémités, puisse laisser croire que l'on peut parler d'un vecteur isolé, indépendamment de la considération d'autres vecteurs, nous verrons bientôt qu'un être mathématique ne peut s'appeler vecteur que s'il appartient à un ensemble d'êtres analogues sur lesquels on peut effectuer certaines opérations que nous préciserons. C'est la nature de ces opérations et non pas le caractère individuel de chacun de ces êtres qui leur donne la qualité de vecteur. C'est ainsi qu'un polynome, une fonction continue, un carré peuvent être dotés de la qualité de vecteur.

De façon vague, on peut dire qu'un ensemble d'êtres mathématiques est un ensemble de vecteurs, si l'on peut y ajouter deux vecteurs et si l'on peut multiplier tout vecteur par un nombre arbitraire.

Met de ondertitel van deze didactische revue staan ook nog de volgende artikelen in verband:

- a. I. T. Adamson, *A new approach to limits*, *Mathematical Gazette*, 340, mei 1958;

- b. H. van Engen, *Plans for the reorganization of college preparatory mathematics*; School Science and Mathematics, 510, april 1958;
- c. Hartung, *Report from the midwest regional state college conference on science and mathematics teacher education*; School Science and Mathematics, 507, januari 1958;
- d. W. L. Duren, *The maneuvers in set thinking*; Mathematics Teacher LI⁵, mei 1958.

Naschrift.

In het novemберnummer van het duitse tijdschrift M.N.U. (11. Band, 6. Heft, 1 November 1958) zijn opgenomen de „*Richtlinien und Rahmenpläne für den Mathematikunterricht*“ van 25 maart 1958.

In verband met het karakter van bovenstaande Revue citeer ik hieruit de alinea's die betrekking hebben op de Oberstufe der gymnasia.

Richtlinien.

Die im Rahmenplan für die Oberstufe vorgesehenen Gebiete können und sollten nicht alle in gleicher Breite behandelt werden. Stoffumfang und Methode sind so zu wählen, dass der innere Zusammenhang des Unterrichts erhalten bleibt und ein vertiefter Einblick in die Denk- und Arbeitsweise der Mathematik gewährleistet ist.

Grundlegende Begriffe wie Zahl, Funktion und Grenzwert müssen einwandfrei herausgearbeitet werden.

Weitere Begriffe wie Menge, Gruppe, Körper, Invariante, Isomorphie können an Beispielen erläutert und zur Aufdeckung tieferer Zusammenhänge herangezogen werden.

Differential- und Integralrechnung sind in enger Verbindung zu behandeln. Ihre Grundtatsachen sollen dem Physikunterricht frühzeitig zur Verfügung stehen.

Kulturgeschichtliche Betrachtungen und Aufgaben aus Naturwissenschaft, Technik und Wirtschaft erweisen die Bedeutung der Mathematik im Geistesleben und ihre praktische Anwendbarkeit. Axiomatische und philosophische Ausblicke erhellen Wesen und Grenzen mathematischer Erkenntnis.

Rahmenpläne.

11. Schuljahr (Obersekunda):

Ausbau der ebenen Trigonometrie.

Die Schwingungsfunktion $y = a \sin (bx + c)$.

Geometrische Folgen und Reihen. Zinseszinsen.

Unendliche Zahlenfolgen. Vertiefte Behandlung des Grenzwertbegriffs.

Grundlegung der Differential- und Integralrechnung.

Analytische Geometrie der Geraden.

12. und 13. Schuljahr (Unter- und Oberprima):

Masvoller Ausbau der Infinitesimalrechnung mit Anwendung auf geometrische und physikalische Probleme.

Fortführung der analytischen Geometrie, womöglich mit Verwendung von Vektoren.

Behandlung der Kegelschnitte unter verschiedenen Gesichtspunkte, wobei dem Abbildungsgedanken und den Methoden der darstellenden Geometrie besondere Bedeutung zukommen.

Ferner muss mindestens eines der folgenden Gebiete behandelt werden:

- a. Der Körper der komplexen Zahlen. Einige Sätze über Gleichungen höheren Grades.
- b. Grundbegriffe der Statistik und der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
- c. Geometrie auf der Kugel mit einfachen Anwendungen. Ausblicke auf nichteuklidische Geometrien.
- d. Mengenlehre.

Bij de beoordeling van dit programma vergete men niet, dat de leerlingen in de hoogste klasse in Duitsland één of twee jaar ouder zijn dan in Nederland.

BEELDENDE WAARDE VAN DE WISKUNDE

door

Prof. Dr. F. VAN DER BLIJ

In onze studententijd cirkuleerde als bezienswaardigheid het wiskundige gedicht van *Johan Andreas der Mouw*:

Maar 'k danste 't liefst volgens wiskund'ge wet:
Door 't X-Y-vlak zwierde ik horizontaal,
En dan met lucht'ge sprongen, vertikaal,
Zweefde als een mug ik op en af langs Z;

Zich weven zag'k uit schimmig lijnennet
De oneindigheid tot kronkel van spiraal:
Het teeken van de almachtige integraal
Heb 'k, toov'naar, steeds met trotsche krul gezet.

(Brahman I, pg. 110)

Het was voor ons een bijzonderheid in een zo geheel ander gebied van de cultuur iets wiskundigs aan te treffen. We gingen langzamerhand meer van zulke rariteiten ontdekken, bijvoorbeeld bij *Christiaan Morgenstern* in de Galgenliedern:

Die drei Winkel

Drei Winkel klappen ihr Dreieck
zusammen wie ein Gestell
und wandern nach Hirschmareieck
zum Widiwondelquell.

Ze willen namelijk mensen worden, het lukt want:

Drei Winkel advokaten
entsteigen ihm also gleich
Drei Advokaten stammen
aus dieses Weihers Schosz
Doch zählst du die drei zusammen
so sind es zwei Rechte bloß.

(Alle Galgenlieder, pg. 261)

Maar het bleven uitzonderingen, en in onze leraarstijd raakten we verzoend met het feit dat gesprekken over de leerlingen vaak zo verliepen:

Zeg, ons jongetje Verschagen in B IV c vertaalde nota bene Winkel door winkel, wat een hopeloos geval, ha, ha, ha.

Zeg dat meisje Groenboom in 6x dacht dat het tweede kabinet Heemskerk door de Staatskundig Gereformeerden ten val gebracht was!!! Ja, maar dat kind hoort toch ook niet op een school als de onze thuis.

Nee, maar het mooiste wat ik beleefd heb is dat die voetballer uit 6β dacht, dat Mallarmee een studie over Sartre geschreven had!!!

Wat een cultuurbarbaren toch.

Maar zei ik dan zachtjes: die jongen Verstraten dacht, dat de oppervlakte van een cirkel omgekeerd evenredig met de straal is, dan viel er een stilte en de meeste aanwezigen mompelden: nou maar, dat zou ik ook niet weten, of wat doet dat er nou toe of je zoiets weet.

En zo leer je wel te berusten in het uitzonderlijke van het eigen vak, dat voor de ALGemene ONTWikkeling evengoed gemist zou kunnen worden.

De laatste tijd heb ik in het wilde weg in mijn lectuur streepjes gezet waar ik in een gedicht of in een stuk proza een wiskundige term of een wiskundig begrip tegenkwam. De nu volgende opsomming van wiskunde in letterkunde wil zeker niet pretenderen op enigerlei wijze volledig of systematisch te zijn.

Het is dus niet de bedoeling gedichten of rijmpjes van wiskundigen te verzamelen, evenmin verhandelingen over wiskundigen of over de wiskunde. Al zou ik een uitzondering willen maken voor het mijns inziens zeer geslaagde verhaal van Jeanne van Schaik-Willing: *Mijn wil staat achter de deur*. (De Tien, Amsterdam 1947). Het verhaal is te lang om geheel overgenomen te worden en te mooi om te couperen, de context van de uitroep: „U bent wiskundige, niet waar. Een heerlijk vak!” is echter alleen al de moeite waard het boekje op te sporen!

Ik zal ook niet veel aandacht geven aan de vele humoristische gedichtjes van het type van de worteltrekkende bok.

We zullen proberen een indeling in drie stapeltjes te maken, dat wil zeggen, drie stapeltjes boeken met streepjes. Op het eerste stapeltje gooi ik de mensen, die blijk geven in de verte een herinnering aan wiskunde te hebben en deze wetenschap nu verheerlijken of verguizen.

Op de tweede stapel komen de verschrikten, voor wie de wiskunde een soort van „bezielde wartaal” is geworden met vaak wonderfraai geconstrueerde inhoudloze versiersels:

Op de derde stapel komen enkele serieuze figuren, die blijk geven meer dan de gewone middelbare schoolstof te kennen.

Zo, de stapels liggen voor me en nu gaan we maar wat bladeren in de eerste stapel. Eerst de verguizers. Bovenop een krantenknipsel, laat de journalist maar anonym blijven.

Gabriels is geen artist, hij is een wetenschapsman. De kunst is bij hem een wetenschap geworden. Hij is een mathematicus en *welke mathematicus kan de mens in vervoering brengen?*

(Als U het soms niet wist, Gabriels is een grootmeester in het biljarten).

Analoog zijn de woorden die *Hubert Lampo* één van zijn figuren in *Hélène Defresne* neer laat schrijven:

Met *Hélène* verliep het helemaal anders. Zij, mijn jongen, bezit de genade. Wat wij, onwetende dwazen in dorre boeken of in mathematische formules zoeken, heeft zij meegekregen bij haar geboorte.

Nauwlijks de moeite van het vermelden waard zijn de regels:

Van Kampen weet als Wijdenes
mij God te duiden in zijn les
Hij zegt mij „ $a + b = c$ ”
ik reken eerst aandachtig mee,

maar dwaal dan natuurlijk af naar vogels of zo iets. (*Reinold Kuipers* in *Rendez-vous* met een *Remington*). Belangwekkender is de uiteenzetting van *Hein Hanfler* (in *Til Brugman's* Bodem pg. 193); hij trachtte de nauwkeurigheid, die in zijn lievelingsvak voor hem zo vanzelf sprak ook in zijn woorden te benaderen: „Je beleeft de mathematiek niet, dat is de hele zaak”. En daarna worden alle belevenissen van het bergbeklimmen geometrisch uiteengerafeld.

We zijn al bij de meer positieve geluiden aangekomen. Bij *Vestdijk* moet natuurlijk betrekkelijk veel te vinden zijn. Ik heb echter geen tijd gehad hier nog eens speciaal op te letten, dus moet U het met een enkel citaat doen uit *De Schandalen* (pg. 176)

Zij zei niets. Hij kreeg slaap van de beroering; alleen in zijn vingertoppen, die met dit jonge vlees van een niet meer jonge vrouw een bijna verplicht spel speelden, snikte de aandoening na om een lichaam dat zo even nog zulk een barbaarse daadkracht had ontwikkeld. Daar had zij in zichzelf gewenteld, als een dronken wiskunstenares, een knappe cirkeltrekster, alle planeten met al hun manen van zich

afschuddend. Het kookpunt en het nulpunt. Het boeide hem in halfslaap.

Ook *Thomas Mann* is er bekend om dat in zijn omvangrijk oeuvre de wiskunde hier en daar opduikt. Ik noem nu slechts een enkele regel uit *Der Tod in Venedig*:

Amor fürwahr tat es den Mathematikern gleich, die unfähigen Kindern greifbare Bilder der reinen Formen vorzeigen.

Bij een eerdere gelegenheid (Euclides 24 pg. 208—225) heb ik al eens gewezen op Bordewijk, Herman Hesse, Achterberg. Vooral de laatste is een zo bekend voorbeeld voor mijn thema, dat ik met deze vermelding maar wil volstaan. Evenmin kom ik toe aan Paul Valéry. Er ligt nog zoveel op deze eerste stapel. Zoals de hele rij van auteurs die geïmponeerd door de wiskundige *bewijstrant*, deze copiëren voor andere gebieden van het dagelijkse leven. Ik behoef U slechts Spinoza: *Ethica* te noemen, maar er zijn in deze trant boeken over *theologie* (Pierre Daniel Huet: *Demonstratio Evangelica*), over de *psychologie* (Dr van Tricht: *Stereometrie van de Hollandse Ziel*), over het *pensionbedrijf* (Stephen Leacock: *Boardinghouse geometry in zijn Literary Lapses*) en zo voort.

Verder de vele stamelaars over de grootheid van de wiskunde, al degenen die in dit (onbegrepen?) vak een bijzonder soort goddelijke openbaring zien. Mag volstaan met het noemen van *Novalis*:

Ik citeer in de vertaling van G. van der Leeuw,

Alle goddelijke afgezanten moet wiskundigen zijn.

Zuivere mathesis is religie. Tot mathesis komt men slechts door een theophanie.

De wiskundigen zijn de enige gelukkigen. De wiskundige weet alles.

De echte mathesis stamt uit het Oosten. In Europa is zij ontaard tot blote techniek.

Wie een wiskundig boek niet met stichting ter hand neemt en het leest als Gods Woord, die begrijpt het niet.

en *Albert Helman*:

Heilige mathesis, kunst der goddelozen die geloven in de eenheid van het Al . . . Boven alle wetenschap zijt gij geprezen!

(*Mathematica Mundi in Kleine Kosmologie*).

Natuurlijk moet hier ook het werk van *M. H. J. Schoenmaekers* genoemd worden, ik denk bijvoorbeeld aan zijn *Beginnelsen der Beeldende Wiskunde*.

Het is niet doenlijk met een enkel citaat deze esoterische spelletjes met mannelijk rechte lijnen en vrouwelijk gebogen cirkels, van elliptische tegendelen en exacte beelding duidelijk weer te geven. Maar het werk van Schoenmaekers heeft niet nagelaten invloed uit te oefenen op de schilder Mondriaan!

De tweede stapel is na veel' gemanoeuvree maar klein gebleven. Om de uitweidingen van de eerste te compenseren zal ik het kort maken. Maar enkele zaken kan ik U niet onthouden. In de nieuwe verhalen van *Belcampo* lees ik (pg. 67):

In het luchtledige begint een steen te vallen met een snelheid van bijna tien meter per seconde (een grappige interpretatie van *g*).

In een boekje *Good God* van *John Hadham* (Penguin Special S 55 pg. 38)

While we might have left it a little vague as to whether the sum of the angles of the hypotenusa really equals the square roots of the two sides of a triangle — I have rather forgotten my geometry, but I hope that my meaning is clear . . .

We constateerden reeds zonder Uw bekenenis dat U wel iets van Uw meetkunde lessen vergeten was!

Zelfs gewoon rekenen is soms al moeilijk, zo schrijft R. Blijstra in *Vandaag V*:

We leven dus in het jaar 9.999.999.999 of volgens anderen in het jaar 11.111.111.111. Dit hangt af van een reeds enige milliarden jaren durend verschil in opvatting tussen de traditionele groepen in onze bevolking en de progressieve. . . . De geboorte van Christus vond namelijk 2.222.222.222 jaar na de geboorte van de aarde plaats. Optellen is toch wel moeilijk!

Hoewel het mij als een belediging aangerekend zou kunnen worden (bij voorbaat vraag ik vergeving) ligt op dit stapeltje ook een dichtbundel van *Bergman*: *Modus vivendi*. En wel om het onderdeel dromen van een algebraïcus (gedichten *a*, *b*, *c*, *p*, *q*). De volgorde van deze letters is goed karakteriserend voor de wiskunde (elementaire meetkunde), maar de algebraïcus is mij toch wel helemaal vreemd gebleven. Uit ieder gedichtje citeer ik één of twee regels:

- a* ik houd van orde en ik kan niet dromen zonder mijn pyama.
- b* maar vaak betrap ik mij te denken: wat mag de middellijn van haar sublieme borsten zijn.
- c* wij zijn; wat te bewijzen was.

p treur niet, mijn hart, Euclides heeft gesproken:
 tussen twee punten past een rechte lijn;
 q ideeën in het berijmde.

Geef mij maar de karakterisering van Jeanne van Schaik-Willing!
 Tot slot de laatste stapel. Niet helemaal terecht ligt hier Het
 Zwarte Licht van *Harry Mulish* op. Het gaat om deze zin:

De klarinet slingerde zich tot een grandioos gevecht van
 geluid om de trombone, — en hij had weer eens het gevoel
 dat het meer waard is zóiets te kunnen, dan raad te weten
 met vectoranalyses en differentiaalvergelijkingen.

Jammer van dat meervoud in het voorlaatste zelfstandige naam-
 woord!

Ook de memoires uit het sousterrain van *F. M. Dostoefski* liggen
 erbij:

Alle menselijke handelingen zullen dan berekend kunnen
 worden volgens die wetten, wiskundig, in de geest van een
 logarithmentafel, tot 108.000 en op een kalender aangetekend
 kunnen worden.

Ik vind die 108.000 (zie b.v. Schrön) zo mooi dat ik de volgende
 passus graag vergeef (maar niet graag vergeet!)

maar $2 \times 2 = 4$, dat is het allerondragelijkste. $2 \times 2 = 4$
 is naar mijn mening, alleen maar een onbeschaamdheid.
 $2 \times 2 = 4$ kijkt als een fat, staat dwars op uw weg met de
 handen in de zij en spuwt. Ik ben het er mee eens dat $2 \times 2 = 4$
 een voortreffelijk ding is maar als men toch eenmaal aan het
 prijzen is, dan vind ik $2 \times 2 = 5$ soms ook een alleraardigst
 dingetje.

Natuurlijk moet hier ook *Aldous Huxley* ter sprake komen.
 Laten we ons beperken tot twee boeken van hem, eerst *Crome*
Yellow. Het lijkt alsof we terugkeren tot de eerste stapel:

that a description of his mental processes is as boring to
 the ordinary reader as a piece of pure mathematics.

Maar het *ordinary* is moedgevend.
 Of bij de tweede stapel:

Parallel straight lines, Denis reflected, meet only at infinity . . .
 We are all parallel straight lines, Jenny was only a little more
 parallel than most.

En verderop zegt Mr. Scogan:

They give me the same pleasure as I derive from a good piece of reasoning or a mathematical problem or an achievement of engineering.

De volgende zin uit *Brave New World*:

The crowds that daily left London left it only to play Electromagnetic Golf or Tennis. Puttingham possessed no links; the nearest Riemann-surfaces were at Guildford.

wordt m.i. alleen overtroffen door een passage van *Alfred Döblin* uit *Babylonische Wanderung*. Dit is een uitvoerige uitwerking van een klassieke anecdote:

Diderot was informed that a learned mathematician was in possession of an algebraic demonstration of the existence of God, and would give it before all the Court, if he desired to hear it. Diderot gladly consented . . . Euler advanced toward Diderot, and said gravely, and in a tone of perfect conviction:

“Monsieur! $\frac{a + b^n}{n} = x$, donc Dieu existe; répondez!”

(*de Morgan*, A budget of Paradoxes)

Nu dan het verhaal van *Döblin* (pg. 241 en 242)..

. . . Man musste, um zu einer Verständigung zu kommen, die Debatte auf ein neues Gebiet bringen. Er vernahm von den beiden alten Frauen, die ruhiger geworden waren und sich heimlich anlächelten, Bemerkungen, die man auffassen konnte als Hinweise auf Oseasche Näherungsgleichung in der Hydrodynamik reibender Flüssigkeiten, vielleicht auch auf Feldlinien mit konstantem Betrag der Feldstärke. Es wurde leichthin das Härte problem ebener Spannungszustände behandelt, dann kamen Zitate zur Ephemeridenrechnung und Bahnverbesserung.

Wodurch sich Konrad gekränkt fühlte, sich einen Ruck gab und Zurück fragte: „Was ist Unendlichkeit? Was ist der Ursprung der Nebellinien?“ Und sie wussten keine Antwort.

Die Frauen hörten zu ihrem Staunen, zu ihrem Befremden seine zornige Gegenfrage, wann eine stetige Kurve M die Summe abzählbar vieler einfacher bis auf Endpunkte zu ein ander fremder Bogen sei? Bitte! He! Was sollen alle Erörterungen über ballistische Theorie, wo, von sonstigen Nebenumständen abgesehen, der entwickelungskoeffizient der

Wagenstrassen (jammer dezè schrieffout F. v. d. B.). Phi-Funktion im Dunklen sei und nach Aufklärung schreie! Es läge hier ein ausgesprochen lemniskatischer Fall vor. Es wollte es sich verkneifen, über die Siebenteilung der lemniskatischen Funktion $\sin am(u)$ zu sprechen.

Sie waren durch seinen groben Ton eingeschüchtert und bemerkten stotternd, entschuldigend einiges über die Bernoullische Zahlen und die Staudtsche Zerlegung, was ihn aber nicht beruhigen konnte. Man wäre schlimm auseinander gekommen, wenn nicht die beiden Kinder gewesen wären...

Ein älterer glatzköpfiger Nachbar kam auf den Lärm in den Laden, nahm die Pfeife aus dem Mund und donnerte Konrad an:

$$,,x_i^3 x_p + x^3 x_i + x_p^3 x_i = 0''.$$

Er gab schlagfertig zurück:

$$,,x^2 y^2 = 2a^3(y - a)''.$$

Worauf der andere sich den Kopf kratzte, die Waffen streckte und weiter rauchte.

Tot zover Döblin, het citaat is wel wat lang, maar zo vol van wiskundige kennis op universitair niveau en de argumenten zijn zo doorslaggevend dat een bekorting mij niet verantwoord leek.

Nu ten slotte nog enkele opmerkingen. Als U mij tot nu toe gevolgd hebt heeft U vermoedelijk iets van dezelfde afwijking die ik bij mijzelf hier constateerde. Dan komt er een goede tijd voor U. Want in de letterkunde (zeker in ons land) is een grote opbloei van de wiskunde (vaak is het natuurkunde, maar niet vaklieden valt het onderscheiden van wiskunde en theoretische physica erg moeilijk).

Als voorproeve vond ik bij *Hans Andreus* alleen maar een onschuldig woord als verdwijnpunt en ∞ colombaas. Maar in een lezing vertelde hij ons van zijn vele wiskundige vrienden en de grote invloed, die het niet meer geldig zijn van de „drie-dimensionale logica” op de hedendaagse dichters had.

A. *Marja* schermt in een boekbespreking (N.R.C. 30-XI-57) met niet euclidische meetkenden. Er zijn verschillende meetkenden, zo ook verschillende poëzie, waarbij de ene niet meer waar is dan de andere.

Ten slotte nog wat citaten van *Bert Schierbeek* in *De Andere Namen*:

... mijn benaderingsmethode deugt niet, denk ik ... tot op de toppen der ziel waarin wij onze ruimtekrommen trokken

tot de buigpunten van het ik onzer beiden voor het bepalen
der gelijke wortels die uitgroeiden tot wonderlijke asymptoten...
maar;

hogere afgeleiden en extremen
de limieten oneindig onszelf

de voorwezens
die de schok wachten
binnen geometrische figuren
van vragen om hulplijn...

nee de verlate Pythagoras wist dat de wilde tijd zijn cirkels
kwam verstoren

later heeft hij overal spiegels opgericht om de zon te vangen
en er de mensen mee te vernielen.

En als ik nu nog leraar was, zou ik tenminste tegen de Neerlandicus kunnen zeggen dat hij de modernen niet zal kunnen verteren zonder voldoende wiskundekennis. Helaas zal de Neerlandicus dan misschien met de wiskunde ook de moderne dichters maar onder tafel laten vallen.

Hopelijk zal in Tom Poes spoedig weer eens de Heer Slagslager optreden, die in zijn succescursussen ook blijk gaf van een behoorlijke wiskundige scholing. Want deze literatuur zal niet onder tafel verborgen kunnen blijven!

Toegevoegd bij de correctie: Zojuist (9-6-58) geven de kwanten-professoren een fraai college mathematische physica!

TWEE BEWIJZEN VOOR DE STELLING VAN PTOLOMAEUS

door

J. A. HUNEMAN

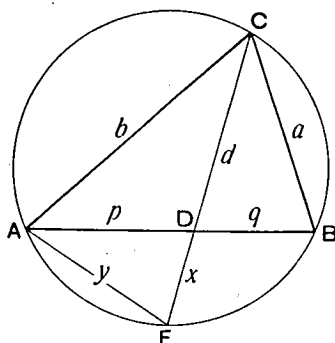


Fig. 1. Voor het eerste bewijs maken we gebruik van een eenvoudige hulpstelling: Zijn $CA = b$ en $CB = a$ twee koorden van dezelfde cirkel en snijdt de bissectrice van hoek C deze cirkel in E, dan is

$$ab = EC^2 - EA^2.$$

Voor 't bewijs trekken we AB, die de bissectrice in D snijdt; $CD = d$, $DE = x$, $AD = p$, $DB = q$ en $EA = y$. Nu is:

$$ab = d^2 + pq$$

dus ook:

$$ab = d^2 + dx \tag{1}$$

Daar blijkbaar $\triangle EDA \sim \triangle EAC$ is:

$$y^2 = x(x + d) \tag{2}$$

Optellen van (1) en (2) geeft

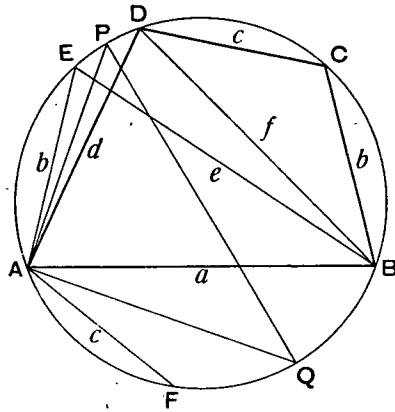
$$ab + y^2 = (x + d)^2$$

dus:

$$ab = EC^2 - EA^2.$$

Fig. 2. ABCD is een koordenvierhoek; $AB = a$, $BC = b$ enz. De diagonalen zijn $AC = e$ (in de fig. niet getrokken) en $BD = f$.

Trek de koorde $AE = b$ zó, dat $CE \parallel AB$, dan is ABCE een



gelijkbenig trapezium, dus $BE = AC = e$. Trekken we verder $AF = c$ ($CF \parallel AD$).

Is nu P het midden van boog DE en Q van boog BF, dan is blijkbaar PQ een middellijn van de cirkel (bg $EAF = \text{bg } DCB$).

Toepassen van bovenstaande hulpstelling levert:

$$ac = QA^2 - QB^2$$

$$bd = PA^2 - PD^2$$

$$ac + bd = (PA^2 + QA^2) - QB^2 - PD^2$$

of, daar $PQ = 2R$ (R is de straal van de cirkel)

$$ac + bd = 4R^2 - QB^2 - PD^2. \quad (1)$$

Nog eens de hulpstelling toepassen:

$$ef = PB^2 - PD^2,$$

dus, daar $\triangle PBQ$ rechthoekig is:

$$ef = 4R^2 - QB^2 - PD^2. \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt

$$ac + bd = ef.$$

Fig. 3. We trekken $AE = b$ en $AF = c$ op dezelfde manier als in fig. 2; dan is $EF = DB = f$. De driehoeken AFB en EFB hebben in A en E gelijke hoeken, dus

$$\frac{\triangle AFB}{\triangle EFB} = \frac{ac}{ef}. \quad (1)$$

EEN GEVAARLIJK BOEK

door

Prof. Dr. H. FREUDENTHAL

Ik bedoel het boek van Lancelot Hogben „Meten is weten”, dat in Euclides 33 (1958), 232, door D. N. van der Neut aan een mijns inziens te welwillende beoordeling werd onderworpen. Ik noem het gevaarlijk, omdat het vrijwel geheel bestaat uit verdraaide of zelfs verzonnen verhalen, die zonder twijfel, gezien de zeer populaire opmaak met „fraaie” illustraties, hun weg zullen vinden in de (nu reeds door en door besmette) mathematisch-historische literatuur. Zonder volledigheid na te streven, zal ik achter elkaar fouten uit dit boek lichten.

Het begint met een verhaal over de oermens, die zich bij zijn omzwervingen naar de sterrenhemel oriënteert. Hij zoekt op de bekende wijze met behulp van de grote wagen de poolster op, die in de hemelspool staat. Dit is door een plaatje geïllustreerd. De schrijver heeft nooit iets over precessie en eigenbeweging der vaste sterren gehoord. Op de verkeerde tekeningen van de gestalten der maan heeft v. d. Neut al gewezen. Het priesterschap ontstond volgens Hogben uit het beroep van het kalendermaken; er is bij mijn weten geen aanleiding dit te geloven. Van die priesters wordt verteld: „Zij legden iedere avond (!) de steeds veranderende plaats waar de zon opkwam vast, iedere avond tekenden zij de sterrebeelden op die zich bevonden op de plaats waar de zon was ondergegaan. Zo slaagden zij er uiteindelijk in de lengte van het jaar tot op twee uur nauwkeurig te berekenen”. Waar haalt de auteur de nauwkeurigheid van twee uur vandaan? Het egyptische kalenderjaar is zes uur te kort, maar hieruit volgt niets omtrent de kennis der Egyptenaren t.a.v. de lengte van het zonnejaar. Een fout van 2 uur ligt ver boven wat „priesters” in de oudheid bereikten. De observatiemethode, die de auteur verzonnen heeft, is dan ook belachelijk vanuit het standpunt zelfs van de meest primitieve astronomie. Door het tijdsverschil (19 jaar) van twee maansverduisteringen op dezelfde plaats van de hemel door 19 te delen, kon men de lengte van het jaar zonder veel observaties uiterst nauwkeurig vaststellen, en de ons overgeleverde getallen tonen aan, dat het op deze of een dergelijke manier moet zijn gedaan.

Het uitvoerige verhaal over de methoden (technisch en meetkundig), die bij de bouw der piramiden werden toegepast, is geheel verzonnen. Eveneens verzonnen is het verhaal over landmëting door triangulatie in Egypte en de priesters als landmeters: Het verbaasde mij niet, de waarde $3\frac{1}{7}$ voor π als egyptisch aangegeven te vinden; dit staat tegenwoordig in vrijwel alle populaire boeken. In werkelijkheid is deze benadering van Archimedes afkomstig. Nieuw is hier, dat Hogben deze waarde bij Ahmes heeft gevonden. Hoe Ahmes aan deze ontdekking kwam, zal volgens Hogben wel altijd een geheim blijven, maar enkele bladzijden later verklaart hij het. Hoe Hogben bij Ahmes deze ontdekking kon ontdekken, zal ook wel een geheim blijven. In musea over de hele wereld vindt men gelijksoortige egyptische manuscripten als dat van Ahmes — beweert Hogben; in werkelijkheid is dat van Ahmes nog steeds nagenoeg uniek.

Verder vertelt Hogben, hoe de „priesters” de windstreken vonden: „men vond waarschijnlijk het noorden door de middagschaduw”. Het tijdstip van de middag stelden die priesters vermoedelijk met hun polshorloge vast. „Er was waarschijnlijk nog een andere manier aan de Egyptenaren bekend om het oosten te vinden. Dagelijks verandert de plaats van zonsopgang. 's Zomers ligt die ten zuiden, 's winters ten noorden van het oosten. Deelt men de hoek tussen deze uiterste punten, dan ligt daar het oosten”. Het opschuiven in de zomer van de zon naar het zuiden is vermoedelijk een gevolg van het warmere klimaat in het zuiden.

De babylonische wetenschap is in „geheimsschrift” neergelegd. „Babylonië had zelf geen timmerhout, geen zijde : : ., geen specerijen, weinig edele metalen : : ”. Dit is juist; maar dat Hogben hieruit een tegenstelling tot Egypte construeert, is onjuist. Egypte had dit evenmin. Niets wijst er trouwens op, dat men, zoals H. beweert, in Babylonië de Chinese zijde kende. Dat de Mesopotamische kooplieden aanvankelijk gerst als betaalmiddel zouden hebben gebruikt, is een verzinsel. Trouwens zal in het hele gerst-verhaal gierst of spelt zijn bedoeld (een vertaalfout?). In het babylonische cijferschrift zouden 10 en 60, evenzo 100 en 3600 door hetzelfde teken zijn aangeduid. De Babyloniërs zouden met een tientallig telraam hebben gerekend, dat bestond uit een reeks groeven in het zand, waar men steentjes in legde. Het verhaal kan juist of onjuist zijn — het is in elk geval verzonnen. Bovendien zou er een vermenigvuldigingsmethode zijn geweest, gebaseerd op kwadraattafels en de formule $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$. Ook dit kan waar of onwaar zijn, maar het wordt door geen feit gestaafd.

Hogben heeft zelfs een kleitafel van vermenigvuldiging opgegraven met twee ingangen — horizontaal en verticaal — althans een kunstig afgebroken hoekje van zo'n tafel, dat tot ongeveer 5×3 reikt (p. 23). Dit zou een geweldige vondst kunnen zijn, want tot nu toe kent men dergelijke „tafels van Pythagoras” pas uit de vroege middeleeuwen. Ik denk echter, dat het een falsificatie is, die zonder twijfel haar vaste plaats in de populaire mathematisch-historische literatuur zal krijgen.

Bij de Babyloniërs aangekomen, weet Hogben ineens, hoe Ahmes op de waarde $3\frac{1}{7}$ voor π zou kunnen zijn gekomen: „Door het kleinste vierkant te tekenen, dat de cirkel kan omsluiten en het kleinste(!) dat erin past, konden zij zien dat de omtrek van de cirkel ligt tussen de omtrekken van de vierkanten. En het gemiddelde van de omtrekken van deze vierkanten is ongeveer $3\frac{1}{7}$ maal de middellijn van de cirkel.” (3,41 i.p.v. 3,14!)

„Een boek over sterrenwielarij, bijna 5000 jaar geleden geschreven voor Sargon, koning van Babylonië, bevat een lange lijst van de tijden der verduisteringen of eclipsen”. De auteur verwisselt Sargon II van Assyrië (ongeveer 700 v. Chr.) met Sargon I van Babylonië (ongeveer 2500 v. Chr.). Net alsof men Tsaar Alexander van Rusland bij Issus tegen Darius Codomannus zou laten strijden. Maar de hele geschiedenis is voor Hogben één vat zuurkool.

Op p. 25 een (vermoedelijk) falsificaat van een kleitafel met geometrische figuren.

De bolgestalte van de aarde is volgens Hogben een fenicische ontdekking. Voor de juistheid van deze bewering bestaat geen enkel argument. Griekse auteurs schrijven die ontdekking meestal aan Pythagoras toe. In elk geval was zij vóór Pythagoras niet bekend. De Mesopotamiërs verdeelden volgens Hogben „lang voor het bloeitijdperk der Feniciërs” de cirkel in 360 graden. De tijdsbepaling is onzin en het verhaal is verdraaid.

„De mensen van Tyrus en Sidon, . . . , waren de eersten die een soort schrift gebruikten”. Dit is toch heel erg. Leefden die dus vóór de spijkerschrift- en hiëroglyphenschrijvers?

Pas in 600 zouden de Grieken het alfabet hebben leren kennen en gebruiken. (Dit is een verwisseling met het feit van de vervanging van de oorspronkelijke Griekse cijfers door de alfabetische cijfers).

Voor de „stelling van Pythagoras” wordt ondanks kleitafelvondsten Pythagoras als ontdekker aangewezen. Volgens Hogben heeft Plato meetkunde gedoceerd. Euclides' werken zijn volgens

hem alleen in Arabische vertalingen behouden. Desondanks worden er enkele bladzijden gereproduceerd van een Grieks Euclides-manuscript volgens de fantasie van de auteur. Evenzo een Arabische falsificatie. „We weten nu, dat Euclides bepaalde dingen voor juist hield, die niet opgaan, wanneer zij toegepast worden in de sterrekunde”.

„Thales de beroemde Griekse zeevaarder, die leermeester was van de jonge Pythagoras . . .”. Hoe Thales de afstand van schepen uit de kust heeft gemeten, wordt bij Griekse schrijvers verteld, maar dit belet Hogben niet, een eigen methode te verzinnen.

Archimedes gebruikte voor de berekening van π de 48-hoek (i.p.v. 96-hoek). De waarde die hij verkreeg was veel nauwkeuriger dan de Egyptische (volgens auteur $3\frac{1}{7}$; hij vertelt niet hoe groot die van Archimedes was).

„Hipparchus, . . ., vatte het belangrijkste van de Griekse meetkunde ten behoeve van sterrenkundigen en landmeters samen in wat we tegenwoordig een logarithmentafel noemen”. Immers bij logarithmentafels vindt men ook tafels van goniometrische functies. Mogelijk heeft Hipparchus zo'n tafel bezeten. In elk geval zal zo'n tafel vóór Snellius nooit door landmeters zijn toegepast.

„Zeno, een zeer knap wiskundige uit Alexandrië”, leefde in werkelijkheid vóór Alexandrië werd gesticht. De bekende paradox van Achilles en de schildpad berust er volgens Hogben op, dat de Grieken geen tientallige breuken kenden.

Op p. 41 een falsificaat van een vermenigvuldiging bij gebruik van Romeinse cijfers. De Romeinse kooplieden konden niet rekenen. Ze lieten dat door hun slaven opknappen.

„Nooit te voren . . . had de wetenschap in een enkele eeuw zulke grote vorderingen gemaakt als tussen 800 en 900 in Bagdad”.

„Hun enige teken (d.w.z. het enige teken in de Hindoese en Mohammedaanse algebra) was $\sqrt{\quad}$ voor het worteltrekken”. In werkelijkheid verschijnt het $\sqrt{\quad}$ -teken pas in het midden van de 16e eeuw.

„Galileï, een jong medisch student, kwam het eerst op de gedachte hoe kleine tijdseenheden te meten, toen hij in de kathedraal van Pisa een lamp heen en weer zag slingeren.” De slinger werd in werkelijkheid lang voor Galileï bij astronomische metingen gebruikt. Huygens deed de eerste geslaagde poging, hem aan een uurwerk te koppelen.

„De eerste man die beseftte hoe nuttig deze grafieken zijn, was René Descartes.” Descartes heeft nooit iets aan grafieken gedaan.

Wel zijn er lang voor hem mensen geweest (Oresme), die de nuttigheid van grafieken beseften.

„De Grieken hadden alleen de lijnen bestudeerd die men kan trekken met liniaal en passer”. Dus geen kegelsneden. „Maar de wiskundige was wel genoodzaakt deze parabool (van de kogelbaan) te bestuderen in een tijd dat een kanon over het lot van een volk kon beslissen”. Hogben merkt niet; dat het woord parabool uit het Grieks komt.

„Watt maakte de kracht van een paard tot eenheid van kracht”. Met een zot plaatje waarbij een paard, met een touw over een katrol, een gewicht optrekt.

Voor een aantal fouten zal wel de vertaler verantwoordelijk zijn, b.v. is „Moslems Keizerrijk” kennelijk ontstaan door een onjuiste vertaling van „Empire”. Hiermee kan slechts een kleine fractie van al die daverende onzin worden verklaard. Voor de rest zal er minder sprake moeten zijn van onwetendheid dan van gemakzucht. Het is minder tijdrovend iets te verzinnen dan een paar boeken te raadplegen.

Voor Elsevier is dit boek een schandvlek.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Kraneweg 71 te Groningen.

VOORDRACHTEN MATHEMATISCH CENTRUM

Wij vestigen de aandacht op de volgende voordrachten:

Serie: „Elementaire onderwerpen van hoger standpunt belicht”, telkens in het Mathematisch Centrum, 2de Boerhaavestraat 49 te Amsterdam, om 20 uur.

woensdag 18 maart 1959 Prof. Dr. E. J. DIJKSTERHUIS: De mechanica tussen mathesis en metafysica. (*vervalt wegens ziekte!*).

woensdag 15 april 1959: Prof. Dr. H. R. VAN DER VAART: Fourier-integralen en numerieke integratie-methoden rond de boldriehoek.

woensdag 13 mei 1959: Prof. Dr. Ir. A. D. DE PATER: Het beginsel van Castigliano.

Serie: „Actualiteiten”, telkens in Krasnapolsky, Warmoesstraat 173-179 te Amsterdam, om 14 uur.

zaterdag 28 februari 1959: PH. VAN ELTEREN: Het combineren van een aantal onafhankelijke toetsen van Wilcoxon.

zaterdag 21 maart 1959 A. H. M. LEVELT: Een hypergeometrische indenditeit.

zaterdag 18 april 1959 Dr. C. G. LEKKERKERKER: Indefinite kwadratische vormen.

zaterdag 30 mei 1959 Dr. H. A. LAUWERIER: Het probleem van de „sloping beach”.



N.V. PHILIPS' GLOEILAMPENFABRIEKEN
EINDHOVEN

Voor het REKENCENTRUM worden gezocht enlge

universitaire wiskundigen
theoretische fysici
wiskundige ingenieurs

respectievelijk academisch gevormden met
gelijkwaardige opleiding en ervaring,

met belangstelling voor toepassing van analyse en numerieke methoden in wetenschappelijk onderzoek.

Bekendheid met moderne rekenmethoden is niet noodzakelijk.

In aanmerking komen tevens zij, die interesse hebben voor de wiskundige grondslagen van rekenautomaten (moderne algebra, getaltheorie, corrigerende codes, informatie-theorie, e.d.).

Brieven te richten aan de afdeling Personeelzaken, Willemstraat 20, Eindhoven onder E 59048.

AANGEPAST AAN HET NIEUWE WISKUNDE-PROGRAMMA

C. J. ALDERS

Algebra voor m.o. en v.h.o.

deel 1 33e-35e druk f 2,25
gebonden f 3,—

deel 2 29e-31e druk f 2,50
gebonden f 3,25

deel 3 ter perse

Inleiding tot de

Analytische meetkunde 2e druk f 2,50
gebonden f 3,25

Goniometrie een nieuwe uitgave f 1,90

Stereometrie 13e druk ter perse

Planimetrie 3e druk f 3,50
gebonden f 4 40

DR. D. J. E. SCHREK

Beknopte Analytische meetkunde

een nieuwe uitgave f 3,25
gebonden f 3,90

DR. H. STREEFKERK

Nieuw Meetkundeboek

deel 1 3e druk 3,25

deel 2 3e druk 3,50

deel 3 2e druk 3,75

WIJDENES-BETH, bewerking D. K. F. Heijt

Nieuwe Schoolalgebra

B-editie - aangepast aan programma 1958

deel 1 reeds aangepast, 22e druk f 4,25

deel 2B, voor de 2e klas

deel 3B, voor de 3e klas

deel 4B, voor de bovenbouw

} ter perse

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar