

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

34e JAARGANG 1958/59

V - 1 FEBRUARI 1959

INHOUD

Dr. Joh. H. Wansink, A. J. S. van Dam erelid van Wimecos	129
Dr. P. G. J. Vredenduin, Dr. Joh. H. Wansink erelid van Wimecos	129
Algemene vergadering van Wimecos	129
Ingekomen boeken	130
Prof. Dr. E. M. Bruins, De algebra der oudheid en der middeleeuwen	131
Dr. Joh. H. Wansink, Didactische revue	160

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2412;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Bakenbergseweg 158, Arnhem, tel. 08300/21960.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, 's-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (/ 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Indien geen opzegging heeft plaats gehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

A. J. S. VAN DAM ERELID VAN WIMECOS

De heer A. J. S. van Dam heeft als inspecteur in de naoorlogse jaren meer in het bijzonder de zorg voor al wat met het wiskunde-onderwijs in verband stond voor zijn rekening genomen. Weliswaar kwam deze zorg ook deels voor rekening van Dr. Doornenbal, maar we menen toch begrepen te hebben, dat de heer Van Dam zich binnen het college van Inspecteurs speciaal met de wiskunde-problemen bezig hield.

Zoals bekend is de heer Van Dam thans oud-inspecteur. Als we onze vreugde erover uitgesproken hebben dat het nieuwe wiskunde-programma nog juist op tijd in veilige haven is gekomen, dan is het goed daarbij te beseffen dat veel van het voor het bereiken van dit doel noodzakelijke werk te danken is aan wat de heer Van Dam voor de realisering van de wensen door de diverse verenigingen geformuleerd, heeft gedaan.

De jaarvergadering van WIMECOS heeft daarom de heer Van Dam op voorstel van het bestuur tot erelid benoemd.

Met het verlenen van deze onderscheiding drukt WIMECOS dus zijn grote waardering uit voor wat de heer Van Dam in de periode van zijn inspecteurschap heeft gedaan om de belangen van het wiskunde-onderwijs te helpen bevorderen en in het bijzonder voor wat hij gedaan heeft om de wensen die er in de verenigingen van wiskundeleraars leven, te helpen realiseren.

Joh. H. Wansink.

Dr. JOH. H. WANSINK ERELID VAN WIMECOS

Op 29 december heeft de vereniging WIMECOS het erelidmaatschap aangeboden aan Dr. Joh. H. Wansink. Zij heeft hiermede uitdrukking willen geven aan de grote waardering, die zij voor het vele werk heeft, dat Wansink jarenlang ten bate van het wiskunde-onderwijs in Nederland verricht heeft. Zijn activiteit heeft hij overal ontplooid, waar de belangen van dit onderwijs op het spel stonden, zowel binnen WIMECOS als daarbuiten. Een volledige opsomming van zijn verdiensten zou mij hier te ver voeren. Ik wil echter niet nalaten te vermelden, dat zijn bemoeiingen van beslissende invloed geweest zijn op het stand komen van het K.B. 431 van 30 augustus j.l. En dit alleen zou reeds voldoende motivering inhouden voor het verlenen van het erelidmaatschap van onze vereniging.

P. G. J. Vredenduin.

ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS

gehouden te Utrecht op 29 december 1958

De voorzitter, dr. Joh. H. Wansink, opent om 10.40 de vergadering en heet de aanwezigen welkom, in het bijzonder dr. Monna,

de inspecteurs dr. Doornenbal, dr. Van der Neut, dr. Gribnau en dr. Capel. Verder de gasten uit België en de vertegenwoordigers van de zusterorganisaties. In zijn openingswoord herdenkt hij de overleden leden der vereniging, in het bijzonder het erelid J. van Andel. De vergadering neemt enige ogenblikken stilte in acht. Daarna spreekt hij er zijn voldoening over uit dat het nieuwe programma nu wordt uitgevoerd en hij gaat nog even de geschiedenis van dit programma na. Dan komt een niet op de agenda vermeld onderwerp aan de orde. De voorzitter stelt voor de oud-inspecteur de heer Van Dam tot erelid van de vereniging te benoemen. De vergadering bekrachtigt dit met een krachtig applaus. De voorzitter richt nu enige waarderende woorden tot de heer Van Dam, die daarna voor de onderscheiding dankt. De notulen van de vorige ledenvergadering, de jaarverslagen van secretaris, penningmeester, kascommissie, redactie van „Euclides” en de leesportefeuillecommissie, worden zonder bespreking goedgekeurd. In de nieuwe kascommissie worden benoemd de heren dr. J. Koksma te Groningen en W. J. Brandenburg, eveneens te Groningen.

Bij het volgende punt van de agenda verzoekt dr. Vredenduin de voorzitter hem de leiding van de vergadering over te geven en hij stelt de vergadering voor ook aan de voorzitter het erelidmaatschap toe te kennen. Ook hier betuigt de vergadering door een krachtig applaus zijn instemming.

Daarna worden de aftredende bestuursleden bij acclamatie herkozen. Nu is het woord aan prof. dr. C. Visser uit Leiden voor het houden van zijn voordracht. Op deze voordracht, die in „Euclides” zal worden opgenomen volgt discussie, waaraan door een achttal leden wordt deelgenomen.

Hierna wordt de vergadering geschorst tot 14.15.

Na heropening spreekt nu de heer W. Servais, één der Belgische gasten de vergadering toe.

Dan is het woord aan dr. H. Streefkerk voor zijn voordracht over de toekomst van het wiskundeonderwijs. Deze voordracht lokt veel discussie uit en zal eveneens in „Euclides” worden gepubliceerd.

Bij de rondvraag dankt dr. Doornenbal ook namens dr. Monna en zijn mede-inspecteurs voor de ontvangen uitnodiging.

Nadat ook de heer Leujes, mede namens de vertegenwoordigers van de andere zusterorganisaties hetzelfde gedaan heeft, sluit de voorzitter om ± 5 uur deze zeer goed bezochte en geanimeerde vergadering.

De secretaris.

INGEKOMEN BOEKEN

Van P. Noordhoff N.V., Groningen:

- C. J. Alders, *Planimetrie* voor M.O. en V.H.O.; 2de en 3de druk f 3,50, geb. f 4,40.
- C. J. Alders, *Stereometrie* voor M.O. en V.H.O.; 12de druk f 2,50, geb. f 3,35.
- C. J. Alders en G. J. Hietbrink, *Algebra voor Kweekscholen*; 2de druk f 2,90.
- C. J. W. de Jong, *Praktische driehoeksmeting* van P. Wijdenes; 6de druk f 3,50.
- A. J. Liefkens en B. H. Gerritsma, *Vlakke meetkunde* (Onze Uitgebreide Technische Serie); 4de druk f 3,50.
- A. J. Liefkens en B. H. Gerritsma, *Inleiding tot de Gonio- en Trigonometrie* (Onze Uitg. Techn. Serie); f 0,75.

DE ALGEBRA DER OUDHEID EN DER MIDDELEEUWEN¹⁾

door

Prof. Dr. E. M. BRUINS

Men spreekt wel eens van de „wetenschappelijke revolutie der XVII-de eeuw”, waarmede men dan doelt op de ogenschijnlijk plotselinge ontwikkeling, die in die tijd werd beleefd. Wij zeggen ogenschijnlijk, omdat deze gebeurtenissen niet los mogen worden gezien van de vroegere geleidelijke ontwikkeling, die de begripsvormingen en de symbolen hebben opgeleverd zonder welke deze opleving nauwelijks mogelijk geacht moet worden. Immers deze symbolen maakten het mogelijk, dat ook minder begaafden in staat werden gesteld de zoveel eenvoudiger geworden bewerkingen te volgen. De gelukkige omstandigheid, dat de moeilijkheden voor het numeriek rekenen, na het verloren gaan van de kennis van het sexagesimale stelsel der Sumero-Babylonische beschaving ontstaan, door het opkomen van het weliswaar minder soepele decimale stelsel werden ondervangen, samengaan met het feit, dat men, vooral sedert Vieta, „met letters” begon te rekenen is hiervan wel de voornaamste reden: de mogelijkheid tot het formuleren van compacte „Faustregeln”, daardoor gegeven, maakte het „denken” minder en het „mechanisch opereren” voornamer.

Evenzo kan men de ontwikkeling der Algebra niet los zien van de voorafgaande stadia: tellen en rekenen. Men loopt daarbij nog het gevaar voor vanzelfsprekend aan te zien, wat vroeger belangrijke problemen opleverde. Ter verduidelijking geven wij hier enkele verzen uit de Odysee: δ , 410—413, welke verzen wij citeren met een onmiddellijk daaropvolgende vertaling door een Duitse „zuivere” philoloog:

πάντα δέ τοι ἔρῳ ὀλοφώϊα τοῖο γέροντος.

φώκας μὲν τοι πρῶτον ἀριθμήσει καὶ ἔπεισι.

αὐτὰρ ἔπει πάσας πεμπάσσεται ἡδὲ ἴδηται,

λέξεται ἐν μέσσησι, νομεὺς ὥς πῶεσι μῆλων.

Alle furchtbaren Künste des Greises will ich dir nennen:
Erstlich geht er umher und zählt die liegenden Robben;
Und nachdem er sie alle bei Fünfen gezählt und betrachtet
legt er sich mitten hinein, wie ein Schäfer zwischen die Herde.

¹⁾ Voordracht, gehouden tijdens de vakantiecursus 1958 van het Mathematisch Centrum op 25 augustus 1958.

Voor een hedendaags philoloog is het tellen zo iets gewoons, dat hem de gedachtenarbeid, die ten grondslag ligt aan het „benoemen” van een „aantal” niet meer voor ogen staat. Bij thans nog primitief levende stammen treft men bij koop en verkoop nog veelvuldig aan, dat wordt volstaan met de „één aan één toevoeging” van de objecten, die ten verkoop worden geboden en de objecten, die als betaalmiddel worden gebezigd, zonder dat dus een aantal behoeft te worden bepaald. De wiskundig niet geïnteresseerde philoloog zal dus — zoals in het boven gegeven voorbeeld van vertaling — niet meer duidelijk onderscheiden tussen ἀριθμέω, ik benoem het aantal, ik tel, en πεμπάζω ik voeg aan mijn vingers toe of λογίζομαι (ik gebruik mijn hersens, ik denk,) ik reken. De wiskundige zal een sterk verschillende interpretatie geven, ongeveer als volgt:

Ik zal je de snode, listige dingen van deze grijsaard vertellen:
Eerst zal hij het aantal der robben benoemen en gaat daartoe
bij hen langs

En nadat hij ze alle in correspondentie heeft geplaatst met zijn
vingers en heeft geïnspecteerd,
zal hij zich te midden daarvan neerleggen, zoals een herder bij
zijn kudde schapen.

Men kan hieruit enerzijds zien, dat ten tijde van Homerus het benoemen van het aantal robben op een zandbank, wanneer uiterste precisie wordt nagestreefd, niet los gezien wordt van het voorafgaande „turven”, waarvoor geen telwoorden nodig zijn, en dit daartoe ook aangegeven wordt.

In aansluiting hierop kan worden vermeld hoe het „bij vijf” een caesuur maken nog volgt uit de oud-Griekse notatie

$$\begin{array}{ccccccccc} | = 1 & \Gamma = 5 & \Delta = 10 & \text{P} = 50 & \text{H} = 100 & \text{P} = 500 & \times = 1000 \\ & & & \text{P} = 5\,000 & \text{M} = 10\,000 & \text{P} = 50\,000 & \end{array}$$

Minoïsch: $| = 1 \quad - = 10 \quad \circ = 100 \quad \diamond = 1000 \quad \phi = 10\,000$

en die der welbekende „Romeinse cijfers”

I V X L C D M

terwijl de Egyptische notatie een caesuur bij 10 vertoont

| ∩ ∘ ∫ ∩

Het is dan ook niet te verwonderen, dat de tabletten van Knossos, Pylos en Mycene voor de vóór-Homerische tijd een tientallen notatie bevatten, waarbij een eenheid door een verticale en een tiental door een horizontale streep werd aangeduid. De voornaamste berekeningen uit de genoemde archieven hebben betrekking op belasting en tribuut en als meest voorkomende becijfering het vaststellen van het nog uitstaande bedrag en het vaststellen van de aanslag, waarbij de hoeveelheden van te leveren natura in een vaste verhouding

$$14 : 14 : 4 : 6 : 7 : 300$$

optreden. Dat men zich daarbij soms afrondingen veroorloofde blijkt uit het volgende staatje

$$\text{Ma02 } 28 : 28 : 8 : 12 : 6 : 600$$

$$\text{Ma07 } 46 : 46 : — : — : 10 : 1000$$

$$\text{Ma03 } 63 : 63 : 17 : 27 : — : 1350 \text{ (17 voor 18?)}$$

$$\text{Ma12 } 24 : 24 : 7 : 10 : 5 : 500$$

$$\text{Ma09 } 17 : 17 : 5 : 7 : 4 : 362$$

$$\text{Ma13 } 17 : 17 : 5 : 8 : 4 : —$$

Voor de Sumero-Babylonische tijd willen wij nog een beschrijving toevoegen. Reeds in de oud-Sumerische tijd had men het in het tellen ver gebracht. De telwoorden verraden door hun bouw nog de „vijf vingers”

$$1 = \text{aš}, 2 = \text{min}, 3 = \text{eš}, 4 = \text{limmu}, 5 = \text{i of ia}$$

$$6 = \text{a—aš}, 7 = \text{i—min}, 8 = \text{us—su}, 9 = \text{i—limmu}, 10 = \text{u}$$

$$20 = \text{ni—eš}, 30 = \text{u—šu}, 40 = \text{ni—mi—in}, 50 = \text{ni—nu—u}, \\ 60 = \text{giš}$$

en dan telt men verder met veelvouden van 60 tot 600 = giš—u, dan met veelvouden van 600 tot 3600 = sar, dan met veelvouden van sar tot 36000 = sar—u en tenslotte met veelvouden van sar—u tot 216000 = sar—gal. In dit oude stelsel hebben dus de eenheden na 10 afwisselend de verhouding 6 en 10. Dat 60 een afzonderlijke eenheid is geworden vindt waarschijnlijk zijn oorzaak in het „distributiesysteem”. Voor een maand van 30 dagen was een basisrantsoen vastgesteld; de zware arbeid werd gehonoreerd met dubbelrantsoen en daar het aantal werklieden zeer groot was werd de „basiseenheid” het dubbelrantsoen van zestig eenheden! Optellen en aftrekken levert met dit soort eenheden geen bijzondere moeilijkheden op. De bezwaren komen eerst sterk naar voren wanneer men tot vermenigvuldiging komt. De in de geschiedenis

der wetenschappen weergaloze vinding der oude Sumeriers is deze, dat zij hebben afgezien van de tussenliggende tienvouden en zestigvouden, derhalve uitsluitend met zestigvouden als hogere eenheden hebben gerekend en . . . deze zestigvouden alle met hetzelfde symbool hebben voorgesteld. Het ontbreken van een „nul” leverde abstract gesproken dubbelzinnigheid, doch in de praktijk vergist men zich niet met een factor 60! Wanneer de hogere eenheden aan elkander stootten werd een scheidingssymbool ingevoerd, dat later óók werd gebruikt om een „lege plaats” aan te geven. Een nul vóór of na het laatste sexagesimaal symbool werd door de Sumero-Babylonische wiskundigen nimmer geschreven. In een verbluffend korte tijd heeft zich deze ontwikkeling van de oudste symbolen

D = 1 O = 10 D = 60  = 600 O = 3600  = 36000

naar de jongere



en het wetenschappelijke eindresultaat



voltrokken. Voor minder wetenschappelijke doeleinden, als het tellen van krijgsgevangenen en buitgemaakte aantallen vee werd een zuiver tientallig voortlopende reeks gebruikt



Men schreef dus in de oorlogs- en strooptochtberichten

[illegible]

maar in rekentechnische verhandelingen

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = 200150 \quad \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = 641$$

$$\triangleright \llcorner \{ \begin{smallmatrix} \triangleright \triangleright \triangleright \\ \triangleright \triangleright \triangleright \end{smallmatrix} \} = 1.30.16.40.0$$

$\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma = 2.0.0.33.20$

Een opvallende gewoonte, die wederom wijst op de „rustpunten” in het telsysteem is het terugtellen van een nabijliggend-hogere.

algemeen is het procedé als

$$\begin{array}{rcl}
 5 \times 7 = ? & '1 & 7 \\
 & 2 & 14 \\
 & '4 & 28 \\
 & & 35
 \end{array}$$

Voor een aftrekking, teruggebracht tot het omgekeerde van een optelling, ontmoet men geen moeilijkheden, zolang de rest „positief” is, door het stellen van de vraag: „wat moet men bij het éne optellen om het andere te krijgen?” Evenmin levert een opgaande deling bezwaren: men telt met de deler tot men het deeltal bereikt. Voor niet opgaande delingen komt men tot het ontwikkelen van de breukrekening. Deze onderzoekingen worden geheel bepaald, door een toevallige omstandigheid, door het teken „r”, dat „deel” voorstelt en geschreven wordt als een streep of stip boven het getal. De *notatie* levert dus het uitsluitende optreden van stambreuken. Het fundamentele vraagstuk wordt zodoende de reductie van de som van twee breuken met dezelfde oneven noemer, het hanteren van „ $2/n$ ”. Deze reductie werd verkregen door het invoeren van een kleinere teleenheid. De factor werd gekozen volgens de „eenvoudige vermenigvuldiger” volgend uit het systeem van vermenigvuldiging: 2^n , 3×2^n , en de tienvouden daarvan. Stelt men de eis, dat niet meer dan vier splitsingstermen mogen optreden en dat de „noemer” niet groter mag worden dan 1000, dan is het mogelijk, in het oog houdende de kleinste breuk zo groot mogelijk te maken, de reeks van splitsingen uit de lijst van verificaties, voorkomende aan het begin van de Papyrus Rhind voor $n = 3, 5, \dots 101$, op een drietal gevallen na direct op te schrijven. De opvulling van de drie lacunes is dan slechts op één wijze mogelijk, die men dan ook in de serie, bekend als de „ $2/n$ -tabel”, vindt. De methode wordt bovendien in Plato's „Wetten” beschreven. Andere moderne constructies en reconstructies dienen daarom zonder meer te worden verworpen.

Het spreekt vanzelf, dat men met deze stand van rekentechniek wél directe berekeningen kan uitvoeren en dat het bepalen van een vierde evenredige, analoog aan de „regel van drie” mogelijk is, doch dat men nauwelijks kan verwachten een hogere dan eerste-graadsvergelijkingen behandelende algebra te vinden. Inderdaad wordt een onbekende grootheid voorgesteld door „h”, het teken voor „hoeveelheid” en vergelijkingen van de vorm $ax + b = c$ worden vaak opgelost. Enkele problemen met twee onbekenden, die tot een zuivere vierkantsvergelijking leiden, komen voor. Het

gaat daarbij om een rechthoek of een rechthoekige driehoek, waarvan de oppervlakte en de verhouding van de zijden gegeven is, terwijl deze zijden moeten worden berekend. Het systeem

$$xy = a \quad x = by$$

wordt dan opgelost door

$$bxy = ab = x^2$$

en de wortel, gesymboliseerd door de „rechte hoek van de muren” wordt opgegeven. De „Regel van drie” vindt men in opgaven als: „wanneer iemand in a dagen b verdient, hoeveel verdient hij dan in c dagen?” Verdelingsvraagstukken, als van een aantal broden over een aantal personen, die porties krijgen, welke in gegeven betrekkingen staan, wijzen er door het resultaat op, dat tot in minime fracties van een brood wordt opgegeven, dat men „niet op het praktisch belangrijke lette” en dus in zekere zin „zuiver wetenschappelijk” te werkgaat.

Men bespeurt zodoende de rechte lijn, van de Engelse gouvernante der prinsen Mohammed en Hassan van Jordanië, die op Schiphol verklaarde: „Hunne Koninklijke Hoogheden zijn zéér, zéér intelligent, haast zo intelligent als de normale Engelse schooljongen van hun leeftijd”, over Robert Recorde, de lijfarts van Eduard VI, die leefde van 1501—1558 en een boek schreef met titel: „The grounds of Artes”. Robert Recorde schreef in de inleiding tot dit werk: „De Engelsen worden weliswaar door slechts enkele volken in menselijk vernuft overtroffen, maar zij zijn verschrikkelijk onwetend . . . en daar moet zijn boek iets aan doen. Alle fouten, die voorkomen bij de leerlingen passeren in een vraaggesprek de revue: overdracht van tientallen bij de optelling, wegstrepen van nullen bij de herleiding van een breuk, de „negenproef” met totaal uit Pond, Shilling en Penny volgens $1 \text{ Pond} \simeq 2 \text{ sh} \simeq 3 \text{ d}$. De leerling merkt op, dat hij dit niet begrijpt! Antwoord: no more doe you of manye things else, maar men moet de regels eerst aan de toepassing leren, alvorens men kan trachten ze te begrijpen! „Hoeveel yard van 3 yard breed is nodig voor de voering van 30 yard van twee yard breed? „Why, there is none so broade” merkt de leerling op. „I doe not care for that” zegt Recorde!

In zoverre steken de Egyptenaren dan uit boven de na hen komende, dat zij nimmer een onjuist antwoord opgeven! In het Regensburger Rekenboek, bij voorbeeld, vindt men opgaven als: Een toren is 10 ellen hoog. Een duif vliegt elke dag $\frac{2}{3}$ el naar beneden en $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$ el naar boven. Wanneer komt hij beneden

op de grond aan? Men bepaalt het verschil van de gegeven afstanden op $1/12$ el en constateert: de duif komt na $10 \times 12 = 120$ dagen beneden, en verzuimt op te merken, dat de duif dan enkele dagen onder de grond vliegt! Evenzo het voorbeeld van Leonardo van Pisa over de „leeuw in de put”, die elke dag $1/7$ palm naar boven klautert en weer $1/9$ palm naar beneden glijdt om dan na 1575 dagen uit de put te komen, waarvoor hij enkele dagen in de vrije lucht heeft moeten klimmen en glijden!

Men vindt de Egyptische gewoonte om een rij stambreuken naast elkaar te plaatsen in latere tijd terug. Zo bevat de Papyrus van Akhmîm uit de VIIIe eeuw A.D. een tabel voor de veelvouden van $1/n$ voor $n = 3, 4, \dots, 20$ en $1\frac{1}{2}$, waarbij de veelvouden van $2/3, 1/3, \dots, 1/10$ opgegeven zijn tot de corresponderende fractie van 10 000. En zelfs Simon Stevin gebruikt soms nog splitsingen, waarbij men aan dit Egyptische gebruik kan denken!

Babylonische Algebra.

Het gebruik van het sexagesimale positiestelsel lost bij consequente toepassing daarvan alle moeilijkheden met breuken en irrationale grootheden automatisch op: men dient er zich echter bij neer te leggen, dat er twee soorten van getallen zijn: die met afbrekende en die met niet afbrekende sexagesimale ontwikkeling.

De oplossing van een vergelijking $ax = b$ wordt dan teruggebracht tot de bepaling van de reciproke waarde van a , welke dan vermenigvuldigd wordt met b . Hoewel het sexagesimale systeem veel soepeler werkt dan het decimale systeem, al realiseert de moderne mens zich dat niet zo eenvoudig meer — immers het gebruiken van verschillende talstelsels, zoals een paar tientallen jaren geleden nog op de lagere school werd onderwezen, met $\square$ voor 11 en $\triangle$ voor 10 is nu ook al uit het programma geschrapt! —, voelt men toch de behoefte om vaak voorkomend rekenwerk ééns vooral te hebben uitgevoerd. Men treft dan ook in de spijkerschriftteksten veel tabellenwerk aan.

Allereerst komen zeer uitgebreide tabellen van reciproke waarden voor van getallen van de vorm $2^a 3^b 5^c$, de zogenaamde réguliere getallen, die een afbrekende ontwikkeling voor de reciproke waarde hebben: daarnaast vindt men tabellen met reciproke waarden op enkele sexagesimalen berekend voor niet-reguliere getallen; tabellen voor quadraten, derdemachten en de som van quadraten en derdemachten van de vorm $n^2 + n^3$. Reeksen van machten van eenzelfde basis tot de tiende macht van een basis, zogenaamde exponentiaal-tabellen, komen voor als ook tabelletjes, die met de driehoek van

Pascal te vergelijken zijn: de quadraten van 1; —1; 1— 1; 1,1 enz. Deze worden kennelijk successief berekend:

$$\begin{array}{ll}
 1 & 1 \\
 1; 1 & 1, 2, 1 \text{ Inderdaad } 1; 1+0; 1, 1=1; 2, 1 \\
 1; 1, 1 & 1, 2, 3, 2, 1 \\
 1; 1, 1, 1 & 1, 2, 3, 4, 3, 2, 1.
 \end{array}$$

Dit levert dus hetzelfde hulpmiddel voor de quadraten van samengestelde getallen als de driehoek van Pascal levert voor de machten van een tweeterm:

$$\begin{array}{l}
 1 \ 1 \\
 1 \ 1 \\
 1 \ 1 = 1, 2, 1 \\
 1, 2, 1 \\
 1, 2, 1 = 1, 3, 3, 1 \text{ enz.}
 \end{array}$$

Het ontbreken van de nul en de negatieve getallen maakt de classificatie der problemen natuurlijk veel omslachtiger dan met behulp van deze begrippen mogelijk is. Sedert kort, sedert de ontdekking van de teksten van Susa, weten wij, dat ook een poging is gedaan om breuken van de vorm $2/n$ voor te stellen.

Ten aanzien van lineaire vergelijkingen beschikt men over „schoolboeken”, waarin twee en drie vergelijkingen worden opgelost door successieve eliminatie van onbekenden: allereerst geeft men een heuristische oplossing, daarna voert men de bewerkingen uit met de coëfficiënten alleen. Van sommige vergelijkingssystemen geeft men op een der tabletten van Susa verschillende oplossingen, die er op berusten, dat de coëfficiënten van de gegeven vergelijkingen in niet-regulaire (!) factoren ontbonden worden. De basis vormen de vergelijkingen $x + y = a$ en $x - y = b$, zoals ook heden ten dage nog in de rekenkunde gebruikelijk is.

Na deze vragen komt het probleem:

$$x + y = a, \quad xy = b.$$

Dit is niet een zuiver wetenschappelijk gestelde vraag! Door de andere definitie van de „prijs”, namelijk precies door de reciproke waarde van de tegenwoordig gebruikelijke, stoot de handelaar op vierkantsvergelijkingen! Het fundamentele probleem wordt opgelost met behulp van de identiteit

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy.$$

Deze maakt het mogelijk bij gegeven produkt en som of verschil, het verschil of de som te vinden door een quadraatworteltrekking.

De in de „schoolteksten” optredende vragen zijn natuurlijk g prepareerd en de wortel is steeds te vinden. De teksten geven uitvoerige opsommingen van de verschillende gevallen: het geval van twee positieve wortels ontbreekt in de teksten van Susa niet.

Aanvankelijk heeft men gedacht, dat vergelijkingen van de vorm

$$x + \frac{1}{x} = a$$

algemeen quadratische vergelijkingen voorstelden. Zij werden echter behandeld met behulp van de gegeven identiteit, die het verschil van de reciproke waarden oplevert. De identiteit heeft ook gediend, zoals uit de analyse van voorkomende fouten blijkt, om Pythagore sche triaden op te stellen. Uit de som en het verschil werden gemeenschappelijke factoren, veelal direct herkenbaar uit de laatste sexagesimaal, ge elimineerd. Vervolgens werden meer ingewikkelde betrekkingen geanalyseerd. Allereerst

$$\begin{aligned} \alpha x + \beta y &= \gamma \\ xy &= a. \end{aligned}$$

Men voert dan twee hulpgrootheden $X = \alpha x$ en $Y = \beta y$ in en heeft met $XY = \alpha\beta a$ het vraagstuk tot de standaardvorm teruggebracht.

Dan volgen vraagstukken met bilineaire betrekkingen. Voor de reductie hiervan maakt de Babyioni r gebruik van een additieve constante, aangeduid met de naam KI-GUB en fundamenteel is daarbij de identiteit

$$(x + 1)(y + 1) = xy + x + y + 1.$$

De vergelijking

$$\begin{aligned} \alpha xy + \beta x + \gamma y &= \varepsilon \text{ wordt herleid tot} \\ (\alpha x + \gamma)(\alpha y + \beta) &= (\varepsilon\alpha + \beta\gamma). \end{aligned}$$

Een invoering van $X = \alpha x + \gamma$, $Y = \alpha y + \beta$ levert dan dus $XY = \varepsilon\alpha + \beta\gamma$. Een tweede lineaire vergelijking

$$px + qy = r$$

levert dan $pX + qY = \alpha r + p\gamma + q\beta$, en daarmee is dit systeem op het vorige geval herleid. Een der teksten van Susa bevat een dergelijk systeem met volledige herleiding.

Met behulp van deze grondproblemen worden „cascades” van vierkantsvergelijkingen verkregen. Men vormt bij voorbeeld som en produkt, daarvan weer som en produkt en, de eindresultaten opgevende, vraagt men de oorspronkelijke getallen terug te vinden.

De hoogste graad van dergelijke cascaden is de graad acht, die verkregen werd bij het vraagstuk:

$$xy = A, \quad x^3z = B, \quad x^2 + y^2 = z^2.$$

De oplossing verloopt volgens

$$x^6z^2 = x^8 + x^6y^2 = x^8 + x^4A^2 = B^2,$$

hetgeen een vierkantsvergelijking in x^4 oplevert.

Voor de berekening van niet in tabellen voorkomende getallen worden reductieformules ontwikkeld.

Bij de reciproke waarden van een getal, waarvan deze waarde niet bekend is, splitst men van het gegeven getal c een deel af, waarvan deze reciproke waarde wel bekend is:

$$c = a + b = a \left(1 + \frac{b}{a} \right)$$

en herhaalt zo nodig dit proces, totdat men op bekende waarden of benaderingen uitkomt.

Voor de vierkantswortel en de derdemachtswortel heeft men reductieformules, waarbij men door de tweede of derde macht van de laatste sexagesimaal deelt — als deze een fraaie vorm heeft — en van het aldus ontstane kleinere getal de gevraagde wortel zoekt.

Voor niet-opgaande worteltrekkingen heeft men benaderingsformules, die bij iteratie steeds meer sexagesimalen opleveren kunnen. Men gaat daarbij uit van de relatie tussen zijden en diagonaal van een rechthoek en verkrijgt uit

$$d^2 - a^2 = (d - a)(d + a) = b^2$$

$$d = a + \frac{b^2}{d + a},$$

en hiermede op grond van de evidente betrekking

$$a + b < d < a$$

de grenzen

$$a + \frac{b^2}{2a + b} < d < a + \frac{b^2}{2a}.$$

Over de wijze waarop kubiekwortels werden benaderd is niets bewaard. Enkele derdegraadsvergelijkingen worden opgelost. Het betreft dan vergelijkingen, die met behulp van een tafel: $n^3 + n^2$ direct opgelost kunnen worden. Hier kunnen wij slechts opmerken, dat de methode van de additieve constante elke derdegraadsvergelijking op de vorm

$$x^3 + \alpha x^2 = \beta$$

kan terugvoeren en dat dan reductie op een normaalvorm

$$X^3 + X^2 = B$$

volgens de methoden, gebruikt bij de vierkantsvergelijkingen, eenvoudig is.

Exponentiële vergelijkingen werden met lineaire interpolatie behandeld. Men heeft hier wel eens gesproken van de „Regula falsi”. Een dergelijke naam is echter te reserveren voor lineaire interpolatie bij lineaire vergelijkingen, die dan het juiste resultaat levert.

De exponentiële vergelijking trad op bij vraagstukken over samengestelde interest en de gevolgde werkwijze volgt ondubbelzinnig uit de tekst AO 6770. Men heeft een bedrag uitgezet tegen 20 procent rente en vraagt na hoeveel jaren kapitaal en interest aan elkaar gelijk zijn. De tekst geeft aan, dat men eerst het bedrag berekent, waarmede kapitaal en interest na 4 jaren 2 overtreffen; dan uitrekent hoeveel kapitaal en interest na 3 jaren minder zijn dan 2 en voegt dan toe: het levert mij 2.33.20; van vier jaren moet ik 2 maanden 33.20 aftrekken, dit geeft mij het aantal gehele jaren en de dagen.

Sexagesimaal moet men oplossen

$$1; 12^x = 2.$$

Men geeft aan, dat men berekenen moet $1; 12^4 - 2$ en $2 - 1; 12^3$.

Lineaire interpolatie, dat wil dus zeggen verdeling van het vierde jaar in stukken, die zich verhouden als de berekende verschillen, levert nu voor het verschil met vier jaren D

$$(1; 12^4 - 2) = (1; 12^4 - 1; 12^3)D = 1; 12^3 \times 0; 12 \times D.$$

Rekent men D dus in maanden om, dan valt de voorlaatste factor weg! (De Babyloniër heeft geen „absolute” getallenvoorstelling). De berekening loopt dan erg eenvoudig af, door eerst beide leden met $5 \times 5 \times 5$ te vermenigvuldigen en levert het opgegeven resultaat. De fout bedraagt slechts vijf dagen!

Wat betreft de Regula falsi merken wij nog op, dat deze bestaat in het bepalen van de waarde van een lineaire betrekking

$$ax - b$$

voor twee waarden $x = x_1$ en $x = x_2$, waarvan de ene te groot en de andere te klein is ten opzichte van de gezochte waarde x waarvoor $ax = b$. Zijn de verschillen f_1 en f_2 in absolute waarde, dan berekent men

$$x = \frac{x_1 f_2 + x_2 f_1}{f_1 + f_2}.$$

Dit wordt meetkundig als volgt ingezien. Heeft men een rechthoek met verhouding van de zijden $(1 : a)$, dan geldt, op grond van de aanvullende rechthoeken (fig. 1) voor de loodlijnen uit een punt

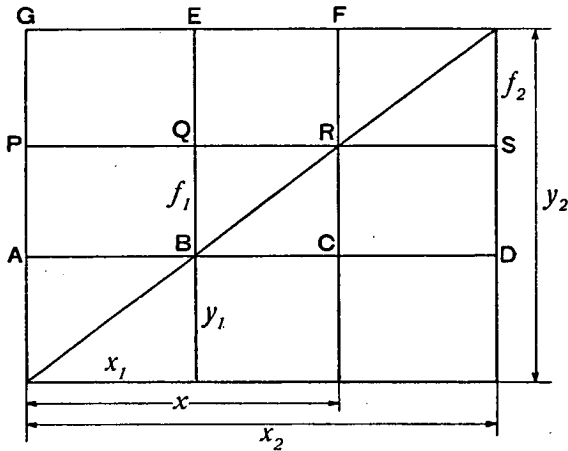


Fig. 1.

van de diagonaal: $y = ax$. Men wil dus bepalen voor welke waarde van x de lijn $y = b$ gesneden wordt. Nu is als $PQ = x_1$, $PR = x$, $PS = x_2$ en dus $BQ = f_1$ en $RF = f_2$ op grond van de aanvullende rechthoeken $EQRF$ en $RCDS$

$$\sphericalangle ACFG = PQEG + PADS \text{ of } x(f_1 + f_2) = x_1 f_2 + x_2 f_1.$$

Dit bewijs, gegeven door de geschriften van Qusta ibn Lûqâ gebruikt niets dan eigenschappen, die in de oudste Babylonische tijden eveneens veelvuldig gebruikt werden. Van de toepassing van deze Regula falsi in Babylonische teksten is echter niets bewaard gebleven, zo de Babyloniërs deze ooit hebben gebruikt. Van de oplossing van homogene vergelijkingen door middel van het doorrekenen van de opgave met een aanvankelijk gekozen willekeurige eenheid en het reduceren met een daardoor bepaalde factor zijn verschillende voorbeelden bewaard gebleven.

Er rest ons nog op te merken, dat de coëfficiënt van de tweede macht in Babylonische teksten werd aangegeven door „A-ŠA sar-ru”, dat wil zeggen: de representant van de oppervlakte, en dat men de vierkantsvergelijking

$$ax^2 + bx = c$$

bij voorkeur terugbracht tot een vergelijking in $X = ax$ met

$$X^2 + bX = ac,$$

hoewel in het geval dat a een regulair getal is ook wel eens met de reciproke waarde van a wordt vermenigvuldigd.

Hoewel de meetkundige afleiding van de „formule van Heron” bewaard is gebleven, compleet met de schatting van de gemaakte fout, is van voorwaarden voor oplosbaarheid niets bekend of bewaard gebleven. Evenmin vindt men vragen over extreme waarden, die voor de hand liggen bij de betrekking

$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = 4xy,$$

waaruit de later veelvuldig optredende eigenschap volgt, dat het produkt van twee grootheden met constante som het grootst is voor $x = y =$ halve som en kleiner wordt naarmate het verschil met de halve som van elk der grootheden groter wordt.

Griekse Algebra.

Al spoedig heeft men bij de Griekse getallennotatie de oude symbolen verlaten. Op de abacus bleven zij bewaard, maar in de notatie ging men over tot het gebruiken van de letters van het alfabet

$$\begin{array}{ll} \alpha = 1 & \beta = 2, \dots \\ \iota = 10 & \kappa = 20, \dots \\ \rho = 100 & \sigma = 200, \dots \end{array}$$

Hierdoor wordt het ontwikkelen van een letteralgebra natuurlijk gehinderd, omdat de letters al voor de gewone getallen gebruikt zijn, terwijl ook het voordeel van het decimale indelen min of meer verloren gaat. In de rekenkunde was het gebruik opgaven met zeer veel factoren uit te werken. Hierbij wordt het moderne verzamelen van de „nullen” vervangen door een procedé, waarbij aan elk getal de waarde met weglating van wat, in de decimale notatie, de eindnullen zijn wordt toegevoegd, de *πυθμήν*. Pappos geeft hiervan in het begin van zijn *Collectiones* enkele voorbeelden. Hij stelt de opgave om het produkt uit te rekenen van de getallen voorgesteld door de letters van de woorden van twee versregels, waarvan de eerste is

Ἀρτέμιδος κλειῖτε κράτος ἔξοχον ἐννέα κοῦραι.

Maakt, gij negen Muzen, de buitengewone macht van Artemis beroemd!

Achtereenvolgens worden de *πυθμένες* gesteld 1, 1, 3, 5, 4, 1, 4, 7, 2, 2, 3, 5, 1, 3, 5, 2, 1, 1, 3, 7, 2, 5, 6, 7, 6, 7, 5, 5, 5, 5, 5, 1, 2, 7, 4, 1, 1, 1. Deze worden met elkander vermenigvuldigd

en leveren het resultaat: $19 M^4 + 6036 M^3 + 8480 M^2$, waarbij M staat voor 10.000. Vervolgens worden de machten van tien, die verwaarloosd zijn bij het nemen van de $\pi\upsilon\theta\mu\acute{\epsilon}\nu\epsilon\varsigma$ opgeteld en leveren 37 factoren 10, dus $10 M^9$, waarmee het eindresultaat bereikt wordt:

$$196 M^{13} + 368 M^{12} + 4800 M^{11}.$$

De notatie voor breuken verschilt slechts in het ontbreken van de breukstreep en het verwisselen van teller en noemer van de moderne notatie. Het rekenen met breuken levert dus geen andere moeilijkheden dan die, welke ook bij de moderne notatie optreden.

Wat betreft de, modern gesproken, irrationale grootheden: het onderzoek daarvan heeft een belangrijk deel van de Griekse activiteit in beslag genomen. Allereerst is een onderzoek van deelbaarheids-eigenschappen opgesteld, de begrippen deler, priemgetal, grootste gemene deler van twee getallen, en van een systeem van getallen worden gevormd en zoals bekend vormt een der resultaten de uitspraak over de even volmaakte getallen en een ander de vaststelling, dat er oneindig veel priemgetallen zijn. De benadering van irrationaliteiten door breuken werd verkregen door „middelwaarden”, en door de methoden voor de kwadraatwortel zijn het rekenkundig, het meetkundig en het harmonisch gemiddelde in de bijzondere belangstelling gekomen. De betrekking $AH = G^2$, tussen het rekenkundig gemiddelde A , het harmonisch gemiddelde H , en het meetkundig gemiddelde G maakte het mogelijk door iteratie de kwadraatwortel te trekken. Een verder onderzoek naar verschillende irrationale vormen wordt in het tiende boek der Elementen ingesteld. De ongelukkige omstandigheid, dat in philosophische geschriften de term $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota$ voorkomt in de zin van „potentieel”, heeft tot in de jongste tijden de omschrijvingen van Euclides behept met termen als „potentieel meetbaar”. Stelt men als wiskundige hier tegenover, dat $\delta\upsilon\nu\acute{\alpha}\mu\epsilon\iota \mu\epsilon\acute{\iota}\zeta\omicron\nu$ ondubbelzinnig betekent: „in het kwadraat gebracht groter” dan staat het voor ons buiten twijfel dat de omschrijvingen van Euclides vertaald moeten worden met:

1. Men spreekt van onderling meetbare grootheden als ze door dezelfde maat gemeten worden, en van onmeetbare als er op geen enkele wijze een gemene maat kan worden gevonden.
2. Rechten zijn in het kwadraat meetbaar als de vierkanten daarop beschreven door dezelfde oppervlakte gemeten kunnen worden, en onmeetbaar als er voor de vierkanten op hen be-

schreven op geen enkele wijze een oppervlakte kan worden gevonden, die gemene maat is.

3. Als dit is vastgesteld wordt aangetoond, dat bij een gegeven rechte een oneindige verzameling van meetbare en onmeetbare rechten bestaat zowel alleen in lengte als ook in het kwadraat. De gegeven rechte wordt „uitspreekbaar” genoemd en de daarmede in lengte en in het kwadraat meetbare of alleen in het kwadraat meetbare „uitspreekbaar” en de daarmede onmeetbare „imaginair”, „ondenkbaar”, *ἄλογος*.

De fundamentele grootheid, waarvan wordt uitgegaan is dus de oppervlakte en men kan de zijde construeren van een vierkant, dat gelijk is aan de oppervlakte van een willekeurige, een rationale oppervlakte hebbende rechthoek. Een zuivere vierkantswortel uit een breuk is dus een „uitspreekbare” grootheid. Men kan de deling $ax = bc$ uitvoeren door een rechthoek aan het lijnstuk a aan te passen, die de oppervlakte bc heeft. Voert men de aanpassing uit zo, dat een vierkant te kort schiet of overschiet, dan heeft men de elliptische of hyperbolische aanpassing en deze komt overeen met het oplossen van een vergelijking van de tweede graad:

$$x(a - x) = B \quad \text{of} \quad x(a + x) = B.$$

Het classificeren van de irrationale grootheden door Euclides beschrijft men dan het best door geleidelijk aan de vergelijking en de coëfficiënten te compliceren.

Allereerst kan de oppervlakte B een vierkant zijn, dan alleen maar een rechthoek met meetbare oppervlakte en tenslotte, in een later stadium, een rechthoek met een „uitspreekbare” oppervlakte.

Men verkrijgt dus allereerst vergelijkingen, over de tekens spreken wij niet in bijzonderheden, van de vorm

$$x^2 - 2ax + b = 0.$$

Hierin zal b een kwadraat zijn, of alleen maar meetbaar, of tenslotte een quadratisch meetbaar getal. Dit laatste geval doet zich slechts voor als men de toelaatbare verzameling van oppervlakten heeft uitgebreid met die, waarvan de oppervlakte wordt uitgedrukt door een quadratisch meetbaar getal en de „lengten” uitbreidt met „mediale” grootheden, overeenkomende met de vierdemachtswortels uit breuken.

1. In het eenvoudigste geval zal dus α meetbaar zijn in lengte en de vraag doet zich voor: wanneer zijn de wortels x meetbaar? Het antwoord wordt gegeven in: $\sqrt{\alpha^2 - b}$ moet meetbaar zijn met α . Er doen zich — als steeds — twee gevallen voor: de wortel uit de discriminant is kleiner of groter dan α !

2. Wanneer de wortels niet beide meetbaar zijn in lengte en b is een kwadraat terwijl $\alpha = a$ in lengte meetbaar is, dan ontstaan de „eerste binomiaal” en de „eerste apotome”, die met m meetbaar in het eerste geval

$$a \pm a\sqrt{1-m^2} \text{ zijn;}$$

in het tweede geval ontstaan de „tweede binomiaal en apotome”

$$\frac{a}{\sqrt{1-m^2}} \pm a.$$

3. Dan doen zich voor de gevallen, waarin b alleen maar in lengte meetbaar is. Is dan α slechts quadratisch meetbaar, dan verkrijgt men de „derde binomiaal” en de „derde apotome” in het eerste geval:

$$\alpha \pm \alpha\sqrt{1-m}.$$

Is α toch in lengte meetbaar, dan ontstaan de „vierde binomiaal en apotome” in het eerste geval:

$$a \pm a\sqrt{1-m}.$$

In het tweede geval ontstaan de „vijfde” en „zesde” binomiaal en apotome:

$$\frac{a}{\sqrt{1-m}} \pm a; \quad \frac{\alpha}{\sqrt{1-m}} \pm \alpha \equiv \sqrt{a} \pm \sqrt{b}.$$

Met deze zes irrationaliteiten is dan volledig opgesomd wat met een meetbare oppervlakte kan worden verkregen. Breidt men nu het systeem van toegelaten grootheden uit, dan ontstaan vergelijkingen met

$$x^2 - 2Ax + \beta = 0,$$

waarin β quadratisch meetbaar en A mediaal is. De oplossing levert

$$x = A \pm \sqrt{\alpha - \beta},$$

en men komt tot het onderzoek van de wortel uit de som en het verschil van twee quadratisch meetbare grootheden. In feite gaat het dus om uitdrukkingen van de vorm

$$\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}},$$

waarin wij alleen het geval, dat a en b breuken zijn voor ons krijgen. Het resultaat wordt verkregen in vormen als

$$\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{2}} [\sqrt{1 + \sqrt{m}} \pm \sqrt{1 - \sqrt{m}}],$$

waarmede de classificatie dan volledig is gegeven. Eerst een verdere uitbreiding van het systeem der toelaatbare coëfficiënten zou „hogere irrationaliteiten” opleveren.

Het aanpassen van een volume aan een rechte met kubisch defect of exces levert de derdemachtsvergelijkingen, in bijzondere vorm. Allereerst doet zich dan de vraag voor om een kubusribbe te construeren als het meetbare volume gegeven is. Dit vraagstuk wordt teruggebracht tot het inschuiven van twee middenevenredigen tussen twee gegeven lijnstukken

$$a : x = x : y = y : b.$$

Eutochius geeft in zijn commentaar op Archimedes hiervoor een reeks oplossingen aan, waarvan de eenvoudigste deze wel is, die het vraagstuk terugbrengt tot het bepalen van het snijpunt van twee parabolen:

$$x^2 = ay \quad \text{en} \quad y^2 = bx.$$

De vragen van Archimedes over de verdeling van een bol leidden tot een uitgebreid onderzoek van vergelijkingen van de vorm

$$x^2(a - x) = pD,$$

die dus worden uitgesproken in meetkundige vorm als:

Gegeven een lijn AB , een lijn p en een oppervlakte D . Gevraagd een punt E op AB te vinden zo, dat $AE : p = D : BE^2$. Eutochius toont allereerst aan, dat als E aan het gevraagde voldoet, de loodlijn in E op AB door het snijpunt van een direct construeerbare hyperbool en parabool gaat. Zet men namelijk (fig. 2) in het punt A

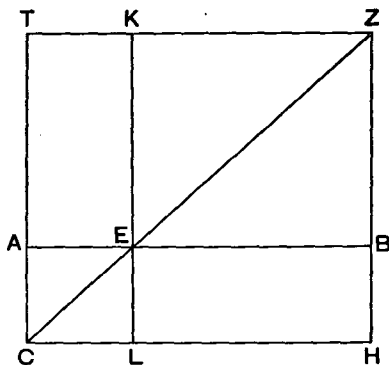


Fig. 2.

loodrecht op AB de afstand p uit en verbindt men het eindpunt van dit segment met E , snijdt men de loodlijn in B met deze verbindingslijn en maakt men de rechthoek $CHZT$ af en richt men vervolgens de loodlijn KEL in E op, dan geldt:

$KZ^2 = HM \cdot HZ$ en K ligt op de parabool met H tot top, HZ als as en HM als parameter.

Eutochius toont dan aan, dat op grond van deze *analyse* de constructie niet altijd uitvoerbaar is: $p \cdot D$ mag de waarde niet overschrijden die bereikt wordt voor het geval, dat E zo gekozen wordt, dat $BE = 2AE$. Hiermede geeft Eutochius de discriminant van de kubische vergelijking aan. Zoals Euclides zuiver meetkundig aantoonst, dat het produkt van twee grootheden x en y met som a maximaal is voor $x = y = \frac{1}{2}a$, zo ook toont Eutochius zuiver meetkundig aan, dat x^2y voor $x + y = a$ maximaal is voor $x : y = 2 : 1$ hetgeen dus de tweede stap is in de reeks, die tot resultaat heeft, dat $x^n y^m$ maximaal is als $x + y = a$ voor $x : y = n : m$! Het bewijs verloopt zeer fraai. Is (fig. 3) $AE = \alpha$ en $EB = 2\alpha$, dan is $BZ = 2p$, $BH = p$. Bepaalt men nu het punt X , $HX = 3p$, op het verlengde van HZ , dan is $PX = KP = KO$. Derhalve raakt XO in K aan de parabool en omdat K het segment tussen de asymptoten middendoor deelt ook aan de hyperbool. De parabool snijdt OC , de hyperbool doet dit niet. Op een horizontale lijn liggen dus steeds van links naar rechts de snijpunten met OX , de parabool en de hyperbool in deze volgorde. Kiest men nu een punt S op BE en is T het snijpunt met de loodlijn in S en de hyperbool, dan is, wegens de hyperbool, de rechthoek FS gelijk aan de rechthoek SH en derhalve liggen C , S en U op één rechte. Derhalve $AC \cdot HC = HU \cdot AS$.

Wegens de parabool is

$$TU^2 < VU^2 = HU \cdot HM$$

en

$$AS \cdot HU \cdot BS^2 < AC \cdot HC \cdot HU \cdot HM$$

of

$$AS \cdot BS^2 < AC \cdot HC \cdot HM = p \cdot D = AE \cdot BE^2$$

terwijl voor een punt s op AE dezelfde redenering opgaat. Eutochius merkt dan nog op, dat als het produkt van p en D kleiner is dan $AE \cdot BE^2$ voor $BE = 2AE$, er twee oplossingen gevonden worden.

De Arabieren hebben in de na-Griekse tijd het werk voortgezet en vervolmaakt. Vele redeneringen worden dan meer algebraïsch gemaakt. Zo bewijst al Qûhî de maxime-eigenschap van Eutochius als volgt:

Is C op AB gelegen zo, dat $BC = 2AC$, verleng dan AB met $BE = BC$, dan is $AC \cdot EC = BC^2$. Ligt nu D tussen C en A en

dus verder van het midden van AE dan C dan geldt

$$DE \cdot DA < AC \cdot CE$$

$$DC/DA = ED \cdot DC/ED \cdot DA > ED \cdot DC/AC \cdot CE$$

dus

$$(DC + AD)/DA = AC/DA > (ED \cdot DC + BC^2)/BC^2 = BD^2/BC^2$$

en derhalve

$$AC \cdot BC^2 > AD \cdot BD^2,$$

en voor een punt D op BC volgt een analoog bewijs.

Van een bespreking van het werk van Diophantos zien wij hier verder af. De methoden door hem gebruikt zijn zeer verwant aan de reducties, die reeds in Babylonische tijd gebruikt worden. Het omvatte gebied is wat groter en een juiste waardering kan slechts verkregen worden door een volledige bespreking van de verschillende vragen en vraagstukken. Wij willen slechts aangeven, dat het Eerste boek van zijn *Arithmetica* de vergelijkingen van de eerste en tweede graad behandelt zoals wij dat voor de Babyloniërs hebben aangegeven; dat bij voorbeeld de vergelijkingen

$$x + a = \alpha^2, \quad y + a = \beta^2$$

worden behandeld, zoals wij dat in Babylon zouden verwachten:

$$x - y = \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

om vervolgens voor $\alpha + \beta$ en $\alpha - \beta$ twee reciproke getallen in te voeren.

De gezochte onbekende wordt voorgesteld als „arithmos” en veelal worden de vergelijkingen herleid, door toepassing van additieve constanten, waardoor dan bereikt wordt, dat men de beide leden van een vergelijking door eenzelfde macht van de „arithmos” kan delen. Behalve de onbekende „arithmos” voerde hij de machten en de reciproken van machten daarvan met bijzondere symbolen in, terwijl het aftrekken door een afzonderlijk symbool $\blacktriangle$ werd aangegeven.

De Algebra der Arabieren.

De nalatenschap der Grieken werd zorgvuldig bewaard door de Arabieren. De geschriften werden nauwgezet bestudeerd en de verkregen resultaten werden uitgebreid. Er moet nog een onbekend grote schat verborgen liggen in de nog onuitgegeven en vaak niet eens gecatalogiseerde manuscripten van vele bibliotheken! De invloed van de wiskunde in de Arabische wereld is groot. Dit blijkt al uit zegswijzen als: „Wanneer mijn lief boos op mij wordt, voel ik mij als bij een probleem met een wortel er in.”

Juist in de tijd van de Arabieren werd de rekentechniek sterk ontwikkeld. Als een samenvatting van de resultaten wijzen wij op het werk van al Kâshî: De sleutel der rekenkunde, Miftâh al-hisâb. Hierin zet de schrijver de bewerkingen met getallen uiteen: de vermenigvuldiging in het — fouten haast uitsluitende — rooster wordt uitvoerig besproken, de „gulden deling”, die het veld moest ruimen voor de „ijzeren deling” is in details te vinden, zowel decimaal als sexagesimaal! Het trekken van hogere machtswortels, met voorbeelden voor vijfde machtswortels, wordt onderwezen. Voor algebraïsche vergelijkingen wordt een schema analoog aan dat van Newton-Horner ontwikkeld. In een ander werk berekent al Kâshî met behulp van de 805306368-hoek het getal π op 16 decimalen en 9 sexagesimalen.

In de Arabische geschriften wordt de terminologie der Grieken op den voet gevolgd en letterlijk overgenomen. Dit heeft ons er toe gebracht om de vraag te stellen of de oorsprong van het woord „sleutel” niet uit een mislezing van vertalingen uit het Grieks te zoeken is. Immers de Grieken spraken bij hun werken over „thesauros, syntaxis, synagoge”, hetgeen alles neerkomt op het begrip „plaats van bewaring”, „magazijn”, „schatkamer”. Nu is een Arabisch woord voor een dergelijke plaats, waar zaken tezamen worden gebracht: maftah. Schrijft men dit, zoals gebruikelijk, zonder klinkers, dan is dit niet te onderscheiden van miftâh, sleutel. Heeft men dit eenmaal zo gelezen, dan ligt de overgang tot het andere woord miftâh voor de hand. Men heeft hier dus iets analoogs aan de geschiedenis van het „sleutelbeen”. Dit verbindingsstuk werd oudtijds jugulum genoemd, direct afgeleid van jungere, verbinden. Nu levert het verkleinwoord van clava, knots, clavicula, hetgeen in het bijzonder werd gebruikt voor de hechtrank van planten, van de wijnstok. Later heeft men dit blijkbaar, en ten onrechte, gezien als verkleinwoord van clavis, sleutel!

Zoals de naam Algebra aanduidt hebben de Arabieren de algebra sterk ontwikkeld en men vindt de mening wel uitgedrukt, dat de algebra met het werk der Arabieren begonnen is. Het ontbreken van de nul en de negatieve getallen maakten het classificeren nog bijzonder ingewikkeld en vermoeiend. Men onderscheidde, ter reductie op een normaalvorm, vier bewerkingen:

al-ğabr, al muqâbalah, al radd en al ikmâl = al itmâm.

De eerste bewerking, waarvan het woord Algebra dus is afgeleid, bestaat in het overbrengen van een „af te trekken stuk” naar het andere lid, door aan beide leden dit af te trekken stuk toe te

voegen: vandaar de naam, die „aanvulling”, „restauratie” ¹⁾ betekent.

De tweede bewerking bestaat daarin, dat men met verschillende coëfficiënten of gelijke coëfficiënten voorkomende termen in beide leden tegen elkaar opheft, voor zover mogelijk, zodat slechts één term van elke soort in één der leden, dus met positieve coëfficiënt, overblijft.

De bewerking al radd, reductie, geeft aan, dat men in de vergelijking $ax^n + \dots$ met $a > 1$ door dit getal a aan beide zijden deelt en dus tot $1 \times x^n + \dots$ komt.

De bewerking al ikmâl of al itmâm, duidt op de completering van een echte breuk a , die tenslotte ook tot $1 \times x^n + \dots$ voert.

Men leert hieruit de nauwkeurige onderscheiding van de gevallen kennen en in dit verband is het van betekenis om op te merken, dat de grootheden, waarmede men werkte werden onderverdeeld in „absolute getallen”, wortels, quadraten, kuben en de „delen daarvan”, dat wil zeggen, de reciproke waarden. Dit „deel” moet men wel zien als een letterlijke vertaling van de Griekse termen, die gevormd werden met -oston. De wortel, de basis zou men wellicht beter zeggen, is genoemd met het woord ġidr, afgeleid van ġadara, hetgeen het wortel schieten en opbloeien van een plant aangeeft. De beginletter van dit woord ذ werd door de Arabieren boven het getal waaruit een wortel getrokken moest worden, geplaatst en hieruit is door verplaatsing en draaiing waarschijnlijk ons tegenwoordig wortelteken ontstaan.

Aanvankelijk heeft men gesproken van de „zes gevallen”. Hiermede werden dan bedoeld

$$x = a; \quad x^2 = a; \quad x^2 = px; \quad x^2 = px + q; \quad x^2 + q = px; \quad x^2 + px = q.$$

Naarmate de „exponent” groter werd, werd de classificatie gewijzigd. *Omar al Khayyamî* deelt in naar „enkelvoudige vergelijkingen”, trinomische, quadrinomische enz. Zijn indeling van de vergelijkingen van de derde graad bestaat dus uit 25 gevallen:

enkelvoudige:

$$x = a; \quad x^2 = a; \quad x^3 = a; \quad x^2 = px; \quad x^3 = px^2; \quad x^3 = px$$

trinomische:

$$\begin{array}{lll} x^2 + ax = b; & x^2 + b = ax; & x^2 = ax + b; \\ x^3 + ax = b; & x^3 + b = ax; & x^3 = ax + b; \\ x^3 + ax^2 = b; & x^3 + b = ax^2; & x^3 = ax^2 + b \end{array}$$

¹⁾ De term kan ook verduidelijkt worden door er op te wijzen, dat „het zetten van een gebroken been” aldus wordt aangegeven!

Dus

$$KE^2 : EA^2 = [CE : EA] = BD^2 : EB^2$$

$$CE \cdot EB^2 = EA \cdot BD^2; \quad EB^3 = EB^3 \quad \text{optellende} \quad BC \cdot BE^2 = BE^3 + EA \cdot BD^2.$$

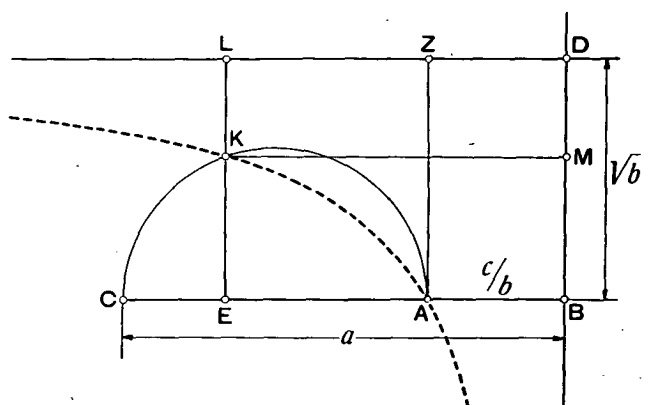


Fig. 5.

Aan beide zijden optellende $AB \cdot BD^2$ volgt

$$BC \cdot BE^2 + AB \cdot BD^2 = BE^3 + BD^2 \cdot BE, \text{ dus met } BE = x:$$

$$x^3 + bx = ax^2 + c.$$

Omar al Khayyamî merkt op, dat de cirkel en de hyperbool noodzakelijk in een van A verschillend punt snijden ... maar verzuimt op te merken, dat, in tegenstelling tot wat in alle 24 overige gevallen voor kan komen, het hier mogelijk is, dat de cirkel en de hyperbool elkander in drie van A verschillende punten snijden!

Men kan veilig aannemen, dat de feitelijke stand van zaken tegen het einde der middeleeuwen zó was, dat de eigenschappen van vergelijkingen en de oplossingsmethoden bekend waren, dat de verschillende gevallen en de discriminanten van de quadratische en kubische vergelijking naar de inhoud reeds in de Oudheid bekend zijn geweest en men kan dan slechts constateren hoeveel moeite het in de XVIde en XVIIde eeuw heeft gekost om een bruikbaar, d.w.z. eenvoudiger symbolensysteem te vinden. Het is aan geen twijfel onderhevig, dat Luca Paciolo, die reeds na de middeleeuwen werkzaam is, zijn voorstellingen als

$$RV\ 40 \quad \tilde{m} R\ 320 \quad \text{en} \quad RV\ 7 \quad \tilde{p} R\ 14$$

voor

$$\sqrt{40} - \sqrt{320} \quad \text{en} \quad \sqrt{7} + \sqrt{14}$$

voor even eenvoudig en nauwelijks verder te vereenvoudigen ge-

houden heeft als de moderne logistici hun formules van thans. Terwijl Robert Recorde de tekens $+$ en $-$ voor „te veel” en „te weinig” bij het toepassen van de Regula Falsi benut, tekens die van de abbreviaturen van et en minus afstammen, en het gelijk-teken, $=$, invoert met de woorden: „and to avoide the tedious repetition of these words: is equalle to, I will sette as I do often in woorke use a pair of parallels, or remove lines of one length, thus: $=$, because noe 2 thynges can be more equalle”, vindt men bij Herigone (1634) nog

$$a\ 2\ |\ 2\ b, \quad a\ 3\ |\ 2\ b, \quad a\ 2\ |\ 3\ b, \quad 4\pi 6\ 2\ |\ 2\ 10\pi 15$$

voor

$$a = b, \quad a > b, \quad a < b, \quad 4 : 6 = 10 : 15.$$

Ten tijde van Descartes werd x voor de onbekende ingevoerd, waarschijnlijk ontstaan als mislezing voor de „ r ” als afkorting van „res”; de symbolen voor „groter dan” en „kleiner dan”, als ook het heden in Engeland nog gebruikelijke teken voor de „evenredigheid” vindt men bij Oughtred (1574—1660) in zijn *Clavis mathematica*. Alb. Girard gebruikt in 1629 nog géén gelijkteken, maar wel $+$, $-$, deelstreep en juxtapositie van factoren. Hij weet, dat een vergelijking zoveel wortels kan hebben als de graad aangeeft. Hij wijst er op, dat men negatieve wortels niet buiten beschouwing moet laten en zelfs wortels uit negatieve getallen mee moet tellen. Bij de oplossing van $x^4 - 4x + 3 = 0$ merkt hij op $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1 + \sqrt{-2}, x_4 = -1 - \sqrt{-2}$. On pourroit dire: à quoy sert ces solutions qui sont impossibles? Je répons: pour trois choses, pour la certitude de la reigle générale, et qu'il n'y a point d'autres solutions, et pour son utilité.

En hiermede is dan duidelijk, dat, hoe belangrijk de stap van Vieta is geweest toen hij onbekenden met „letters” ging voorstellen, een stap zonder welke de moderne algebra niet denkbaar is, de ontwikkeling tot het thans, sedert kort, moet men wel zeggen, in gebruik zijnde symbolisme nog een zeer belangrijke tijd in beslag heeft genomen.

Opmerkingen.

1. De eigenschappen van parabool en hyperbool, die in de beschouwingen van Eutochius gebruikt worden liggen niet zeer diep, zoals men misschien op grond van de heden ten dage gebruikelijke afleidingen zou vermoeden. Dit ligt voornamelijk hierin, dat men de allesbeheersende „aanvullende parallelogrammen” van de vóór-Griekse en Griekse meetkunde uit het oog heeft verloren, zeer ten nadele van de eenvoud en de aanschouwelijkheid.

Voor de *parabool*, als het ware op scheefhoekige coördinatenstelsels gedefinieerd als $Ay = x^2$, levert de betrekking tussen aanvullende parallelogrammen, reeds voor de Regula falsi benut, (fig. b)

$$z(x_2 - x_1) = y_2x_1 - y_1x_2$$

voor elke koorde van de parabool. Derhalve geldt

$$Az(x_2 - x_1) = x_1x_2(x_2 - x_1)$$

$$Az = x_1x_2.$$

Voor een raaklijn wordt $x_1 = x_2$ en dus $z = y$.

Voor een stelsel evenwijdige koorden geldt:

$$A(y_2 - y_1) : (x_2 - x_1) = x_2 + x_1 = \text{constant.}$$

De middens liggen dus op een rechte evenwijdig aan de y -as.

2. De vermenigvuldiging in het rooster maakt het overdragen van tientallen bij de berekening van de gedeeltelijke produkten in de gebruikelijke cijfermethoden overbodig en elimineert daardoor een belangrijke foutenbron. Zij bestaat hierin, dat men de cijfers van vermenigvuldiger en vermenigvuldigtal boven de kolommen en vóór de rijen van een rechthoekig rooster plaatst, waarvan de rechthoeken door diagonalen worden gehalveerd. Op de kruising van een rij en een kolom wordt het produkt van de daarmede overeenkomende cijfers gezet, tientallen in het linkervakje, eenheden in het rechtervakje. Men behoeft dan verder slechts „evenwijdig” aan de diagonaal, de gelijknamige machten van 10 op te tellen.

Voorbeeld

175×7806

	7	8	0	6
1	7	8	0	6
7	4	5	0	4
5	3	4	0	3
6	6	0	5	0

1 3 6

Fig. c.

3. Oorspronkelijk zijn de begrippen „uitspreekbaar” en „niet uitspreekbaar” — $\acute{\epsilon}\eta\tau\acute{o}\varsigma$ en $\acute{\alpha}\rho\eta\eta\tau\acute{o}\varsigma$ — onderscheiden. Het eerste duidt dan onze „rationale” getallen aan, van het andere zijn de „quadraatwortels” voorbeelden. De „diagonaal van een vierkant met zijde 1” is niet uitspreekbaar. De oppervlakte daarvan echter wél. Laat men voor de oppervlakten waarden toe, die overeenkomen

met de niet-uitspreekbare quadraatwortels, dan ontstaan voor de zijden van vierkanten de mediale lengten, μέσος, overeenkomende met de vierdemachtswortel uit een rationaal getal. Dit soort grootheden worden aanvankelijk de ἄλγοι; Men heeft dan dus de onderscheiding te maken: uitspreekbaar, niet-uitspreekbaar maar niet ondenkbaar, niet uitspreekbaar en tevens ondenkbaar.

De aanvankelijke moeilijkheden in het tiende boek der Elementen worden veroorzaakt, doordat Euclides één van deze grenzen laat vallen en uitspreekbare en niet uitspreekbare maar niet ondenkbare getallen tot één klasse met de oude naam van „uitspreekbaar” maakt en daartegenover de „ondenkbare” stelt, terwijl bij de opsomming der mogelijke gevallen de „oude onderscheiding” van uitspreekbaar en niet uitspreekbaar stilzwijgend wordt voortgezet, met behulp van de termen „in lengte meetbaar” en „in het kwadraat meetbaar”.

NASCHRIFT

Zoals uit het veelvuldig gebruik van aanhalingstekens bij aanvaarde, maar strikt genomen niet geheel juiste, of zelfs onjuiste doch gebruikelijke, termen blijkt, ben ik met termen als „onuitspreekbaar”, „imaginair”, „ondenkbaar”, wegens het mogelijke, daardoor veroorzaakte, misverstand, niet zeer tevreden geweest. Nu, enige maanden na de voordracht, heb ik wederom het voorrecht gehad met Dr J. D. Meerwaldt te spreken over de afbakening van verschillende begrippen, in het bijzonder over ἀφθελκτος, onverklankbaar, ἀρητος onzegbaar, onuitsprekelijk (nù scherp te onderscheiden van onuitspreekbaar), ἄλογος, en ἄγνωστος, onkenbaar, ἀδιανόητος niet denkbaar. Hoewel soms de verlokking om enkele begrippen, op grond van de teksten, met elkaar te identificeren groot is, bleek het dan toch weer mogelijk om door complementvorming in de verzameling ontstaan door aan de elkander omvattende deelverzamelingen: zegbaar, verklankbaar, determineerbaar, denkbaar, niet denkbaar toe te voegen, de onderscheidingen zinvol te interpreteren. Thans zou ik er de voorkeur aan geven om ἀρητος door onzegbaar ἄλογος door onbestemd te vertolken. Dit laatste is dan natuurlijk niet te verwarren met onbepaald, onbestimmt, doch is bedoeld gelijkelijk ongedetermineerd, maar wellicht niet indeterminabel, alsook indeterminabel te omvatten. De twee begrippen komen mij voor met het engels inexpressible en indeterminable vrij zuiver te worden aangegeven.

DIDACTISCHE REVUE

door

Dr. JOH. H. WANSINK

Russische urentabel.

Uit mededelingen in Nederlandse en buitenlandse tijdschriften (zie o.a. Paedagogische Studiën, november 1957, en: Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, oktober 1958) leid ik af, dat de urenverdeling voor de Russische tienjarige school (4-jarige grondschool + 3-jarige „Mittelschule” + 3-jarige „Oberschule”) er ongeveer als volgt uit ziet.

Aantal lesuren per week: van 24 tot 33.

Aantal schoolweken per jaar: 33.

1. moedertaal:	2772 uren;
2. wiskunde:	1980 „ ; in elke klas 6 uren per week;
3. geschiedenis:	660 „ ;
4. burgerschapskunde:	33 „ ; alleen in hoogste klasse;
5. aardrijkskunde:	462 „ ;
6. natuurkunde:	528 „ ;
7. astronomie:	33 „ ; alleen in hoogste klasse;
8. biologie:	396 „ ;
9. scheikunde:	363 „ ;
10. psychologie:	33 „ ; alleen in hoogste klasse;
11. vreemde taal:	660 „ ;
12. lichamelijke oefening:	660 „ ;
13. tekenen:	330 „ ;
14. zingen:	198 „ ; alleen in klassen 1—6;
15. verschillende soorten practisch werk:	726 „ .

De overzichten in de genoemde tijdschriften vertonen kleine variaties. Wat allereerst opvalt is de bijzondere plaats die het moedertaal-onderwijs en de wiskunde in het Russische onderwijs innemen.

Voor informatie van methodische en didaktische aard over het wiskunde-onderwijs in Rusland verwijs ik naar een artikel van W. O. STORER in Mathematical Gazette van februari 1958, getiteld: „Mathematics Teaching in Russian Secondary Schools”.

Prof. N. Tschebotaröw

GRUNDZÜGE DER GALOIS'SCHEN THEORIE

Übersetzt und bearbeitet von H. Schwerdtfeger

432 blz. f 17,50 - gebonden f 20,—

Um das breit angelegte Lehrbuch verstehen zu können, genügen geringe Kenntnisse aus der linearen Algebra.

.....Das Buch ist ausgezeichnet geschrieben, für Studierende von hohem Nutzen und für Fortgeschrittene von groszem Interesse. Der Verfasser ist stets bemüht, volles Verständnis zu erreichen und beschränkt sich nie auf reine Existenzsätze. Immer zeigt er durch Angabe von Methoden und durch zahlreiche Beispiele, wie man mit den allgemeinen Begriffsbildungen wirklich vertraut wird.

*Nachrichten der Österreichischen
Mathematischen Gesellschaft*

Das überaus klar abgefaszte Werk enthält in Beispielen, zusätzlichen Bemerkungen, Aufgaben und Fusznoten eine Fülle van interessanten Tatsachen und Literaturhinweisen und wird damit auch dem Kenner viele Anregungen bieten können.

Elemente der Mathematik

Prof. H. J. van Veen

SYSTEMATISCHE VERZAMELING VAN OPGAVEN OVER ANALYTISCHE MEETKUNDE

met antwoorden - 4de druk f 3,90

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN
Ook via de boekhandel

Binnenkort verschijnt:

INLEIDING TOT DE ALGEBRA

door Dr. F. LOONSTRA
Hoogleraar T.H. te Delft

Deze eerste Nederlandse uitgave op het gebied van de MODERNE ALGEBRA bevat de volgende hoofdstukken:

- De gehele getallen -
- Rationale getallen, reële getallen, complexe getallen -
- Groepen -
- Ringen en Lichamen -
- Commutatieve lichamen -
- De theorie van Galois -
- Transcendente uitbreidingen -

Dit studiewerk, dat o.a. bestemd is voor studerenden Akte M.O.-A en kandidaten voor een universitair examen Wis- en Natuurkunde, is mede voor hen, die zich willen oriënteren omtrent de nieuwe inzichten van de moderne algebra, een uitstekend handboek.

Prijs, gebonden f 19,50

P. NOORDHOFF N.V. . GRONINGEN
Ook via de boekhandel