

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

33e JAARGANG
VII - 1 APRIL 1958

INHOUD

Dr. J. H. Wansink, J. van Andel †	193
Dr. P. G. J. Vredenduin, In memoriam J. H. Schogt	194
Dr. M. van Vlaardingen, Het wiskunde-onderwijs aan de K.M.A.	195
Ingekomen boeken	204
Hermen J. Jacobs Jr., De derde opgave voor stelkunde op het eind-examen gymnasium β 1957	205
Bockbespreking	209
J. A. Huneman, Enige formules uit de planimetrie, afgeleid uit eigenschappen van de cirkel	212
P. C. de Jongh, Nog iets over $\sum_{i=1}^n i^p$	215
Elementaire meetkunde	220
Notulen van de ledenvergadering van Liwenagel	222
12de congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen	224

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34998; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3387;
Dr. H. MOOY, Monrovia;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2414;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Bakenbergseweg 158, Arnhem, tel. 08300/21960.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, s'-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (/ 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender“ in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

J. VAN ANDEL †

Op 7 februari 1958 overleed te zijnen huize oud-inspecteur J. van Andel, erelid van Wimecos.

Gaarne wil ik namens de redactie van Euclides zijn betekenis voor het wiskunde-onderwijs in Nederland memoreren.

In het jaar 1925 ontvingen vier leraren in de wiskunde van het college van inspecteurs bij het middelbaar onderwijs het verzoek een onderzoek in te stellen naar het wiskunde-onderwijs en naar aanleiding hiervan met nadere voorstellen te komen. Tot deze vier behoorde de heer Van Andel, destijds directeur van een Chr. H.B.S. te 's-Gravenhage. Het rapport van deze commissie van vier, die naar zijn voorzitter en zijn secretaris in de onderwijswereld bekend staat als de commissie Beth-Dijksterhuis, bleef gedurende het inspectoraat van dr. Jensema zonder tastbare resultaten. Toen echter in 1934 de heer Van Andel dr. Jensema als inspecteur opvolgde, heeft hij van meet af aan gestreefd naar een herziening van het wiskunde-onderwijs in de geest van het in 1926 uitgebrachte rapport van de commissie van vier, waarbij hij het bestuur van Wimecos bij herhaling aangaande de herzieningsplannen heeft geraadpleegd. De activiteit van de heer Van Andel vindt zijn bekroning in de tot standkoming van het nieuwe leerplan voor wiskunde voor de H.B.S.-B in 1937. De ouderen onder ons zullen zich herinneren hoe hij in 1937 in een druk bezochte Wimecos-vergadering de bedoelingen van het nieuwe leerplan welwillend aan de docenten heeft duidelijk gemaakt.

In de algemene vergadering van januari 1950 werd hij wegens zijn grote verdiensten voor het wiskunde-onderwijs op de middelbare school en voor de wijze waarop hij Wimecos raadpleegde en met de adviezen van Wimecos rekening hield, tot erelid van deze vereniging benoemd.

De heer Van Andel heeft ook na zijn pensionering steeds blijk gegeven van grote belangstelling in het Wimecos-werk. Hij was zolang zijn gezondheidstoestand het hem veroorloofde een trouw bezoeker van onze jaarvergaderingen, waarop we hem de laatste jaren node misten.

We zullen zijn nagedachtenis in eerbiedige herinnering bewaren.

WANSINK.

IN MEMORIAM J. H. SCHOGT

Op 8 februari j.l. overleed op 65-jarige leeftijd collega J. H. Schogt. Een markante persoonlijkheid, die van grote betekenis is geweest voor de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in ons land, is hiermee heengegaan. Als lid van de redactie van Euclides denk ik hierbij in de eerste plaats aan het vele werk, dat hij voor ons tijdschrift gedaan heeft. Vanaf de oprichting is hij gedurende een periode van bijna 25 jaar redacteur geweest. Verscheidene publikaties zijn van zijn hand in Euclides verschenen; met name op het gebied van de zuivering van de wiskundige vaktaal. Daarnaast was hij van 1925 tot 1929 secretaris van Wimecos. Zowel de redactie van Euclides als het bestuur van Wimecos denken met grote waardering terug aan de nauwgezette wijze, waarop Schogt zijn taak vervuld heeft.

Hij was op didactisch gebied bezield met het ideaal zoveel als mogelijk was wiskundige strengheid in het onderwijs door te voeren. Zelf heb ik mijn eerste wiskunde-onderwijs in de jaren 1921—23 van Schogt mogen hebben en ik gedenk deze lessen nog steeds met dankbaarheid. Degenen, die daar ontvankelijk voor waren, konden van hem leren, hoe men zijn gedachten streng logisch op kan bouwen en hoe men ze zuiver onder woorden dient te brengen. Zijn didactische idealen vonden hun neerslag in een viertal boeken. In 1929 verschenen zijn *Beginnelsen der Vlakke Meetkunde* en *Oefeningen in de Vlakke Meetkunde* en in 1926 en '27 zijn *Beginnelsen der Theoretische Mechanica I* en *II*. Deze boeken zijn met de uiterste zorg en met grote bekwaamheid geschreven. Menig wiskundeleraar zal er met veel genoegen kennis van hebben genomen en ze een afzonderlijke plaats in zijn boekenkast gegeven hebben. Helaas heeft de auteur er weinig vreugde van beleefd. Bij zijn pogen de idealen, die hij zich gesteld had, te verwerkelijken, bleek hij te hoog gegrepen te hebben. Hoe waardevol zijn boeken waren, voor de leerling bleken zij te moeilijk. In deze ene zin weerspiegelt zich de tragiek van Schogts loopbaan. Aan de ene kant was hij met een dergelijke liefde voor zijn vak bezield, dat hij niet kon dulden, dat zich als wiskunde-onderwijs aandiende, wat op deze naam slechts gebrekkig aanspraak kon maken. Aan de andere kant was hij daarin zo consequent, dat teleurstelling hem niet bespaard kon blijven. Zijn beslist positieve instelling, zijn correctheid en stiptheid mogen ons echter blijvend een voorbeeld zijn.

P. G. J. Vredenduin

HET WISKUNDE-ONDERWIJS AAN DE KONINKLIJKE MILITAIRE ACADEMIE ¹⁾.

door

Dr. M. VAN VLAARDINGEN

Lector aan de Koninklijke Militaire Academie.

Alvorens een opsomming te geven van de wiskundige onderwerpen die aan de Koninklijke Militaire Academie gedoceerd worden, zij het mij veroorloofd te wijzen op de rol die dit onderwijs heeft gespeeld in de jaren rond het jaar 1900. Voor de bekende reeks wiskundige werken van de Firma Noordhoff tegen 1920 begon te verschijnen waren de uitgaven van de Koninklijke Militaire Academie vrijwel de enige in Nederland verschenen werken op wiskundig gebied. Wij mogen in dit verband noemen de werken van Badon Ghijben over Beschrijvende Meetkunde, van Van Aller over Hogere Algebra en Analytische Meetkunde, het werk van Pool over Differentiaal- en Integraalrekening, het werk van Pool over Waarschijnlijkeheidsrekening en nog een aantal andere werken. Hoewel deze thans uit de aard der zaak zijn verouderd hebben zij toch in een lange periode hun belang gehad. Dat deze werken ook in het buitenland bekendheid genoten moge blijken uit een aantal artikelen van T. Hayashi (Japan). De belangstellende lezer zij in dit verband verwezen naar een aantal artikelen in het Nieuwe Archief voor Wiskunde (tweede reeks deel 7 en 9).

Het onderwijs in de wiskunde zoals dit thans op de Koninklijke Militaire Academie wordt gegeven heeft ten doel de Cadetten van

¹⁾ Rapport nummer II van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, subcommissie van de C.I.E.M.:

*„The teaching of mathematics to students between 16 and 21 years of age
in the Netherlands”*

van de hand van Dr. L. N. H. Bunt (Wolters, Groningen, 1955) bevat geen bijdrage over het wiskunde-onderwijs aan de K.M.A., dat wat de leeftijdsgroep betreft valt in de door Dr. Bunt behandelde categorie van studerenden.

De redactie van Euclides neemt daarom met genoegen dit artikel over het wiskunde-onderwijs aan de K.M.A. in dit tijdschrift op, dat voor vele lezers een welkome informatie bevat. Thans kan deze bijdrage worden geplaatst dank zij de vriendelijke bemiddeling van de gouverneur van de K.M.A., de Kolonel W. Klopenburg.

de technische opleidingen dié kennis bij te brengen die nodig is voor het begrijpen van de toepassingen die zij in hun loopbaan veelvuldig zullen tegenkomen, alsmede om hen in staat te stellen met vrucht de artikelen uit de vakliteratuur te lezen. De ontwikkeling van de oorlogsvoering vooral in technische richting maakt dit noodzakelijk. Bij het onderwijs op de Koninklijke Militaire Academie vindt de Wiskunde o.a. toepassing bij de theoretische en toegepaste Mechanica, de Thermodynamica, Ballistiek, Electrotechniek, Theorie van Maxwell, Aërodynamica, Supersonica etc.

Thans moge een overzicht volgen van de verschillende categorieën cadetten aan welke onderwijs in de wiskunde wordt gegeven alsmede een overzicht van de te behandelen leerstof, urentabel en een aantal voorbeelden van vraagstukken zoals die op de overgangsexamens zijn opgegeven.

Overzicht van de diverse categorieën Cadetten en Urentabel

1. Cadetten van het eerste jaar van de Genie, de Verbindingsdienst en de Technische Dienst der Koninklijke Landmacht:

	128 uren
Idem voor het tweede jaar:	140 uren
Cadetten der Genie in het derde jaar:	35 uren
Cadetten van de Verbindingsdienst in het derde jaar:	34 uren

2. Cadetten der Artillerie in het eerste jaar

	106 uren
Idem voor het tweede jaar:	114 uren
Idem voor het derde jaar:	34 uren

3. Cadetten van de Electronische Diensten en de Technische dienst der Koninklijke Luchtmacht

in het eerste jaar:	169 uren
Idem voor het tweede jaar:	130 uren
Cadetten van de Electronische Diensten in het derde jaar:	33 uren

4. Cadetten der Militaire Administratie

in het eerste jaar:	
Voorbereidende Wiskunde:	55 uren
in het tweede jaar:	
Financiële Rekenkunde en Levensverzekeringswis-	
kunde:	34 uren
in het derde jaar idem:	79 uren

Overzicht van de leerstof.

Voor de eerste categorie:

Differentiaal- en Integraalrekening:

1. Functies, continuïteit, limieten.
2. Techniek van het differentiëren met toepassing op extremen en het maken van grafieken. Stelling van het gemiddelde.
3. Functies van twee variabelen. Invoeren van nieuwe variabelen. Impliciete functies.
4. Integraalrekening. Berekening van primitieve functies. Invoering van het begrip bepaalde integraal met toepassing op oppervlaktebepaling, zwaartepunten, traagheidsmomenten.
5. Uitvoerige behandeling van het complexe getal.
6. Reeksen van positieve termen en alternerende reeksen. Reeksen met veranderlijke termen; in het bijzonder machtreeksen. Reeks van Taylor. Afleiding van de bekende en meest gebruikte reeksontwikkelingen.
7. Meervoudige integralen in eenvoudige behandeling met toepassing op inhouds- en oppervlakte-bepaling.
8. Differentiaalvergelijkingen. Integratie van de meest gebruikelijke typen.
9. Invoering van de Laplacetransformatie. Toepassingen op voorbeelden ontleend aan de Eelectrotechniek.

Analytische Meetkunde:

1. Vectoren. Rekenregels voor scalair- en vectorproduct.
2. Rechten en vlakken in de ruimte. Hoeken en afstanden.
3. Cirkel en kegelsneden in hun eenvoudigste gedaante.
4. Tweedegraadsoppervlakken op asvergelijkingen.
5. Determinanten en lineaire vergelijkingen.
6. Vectorfuncties met toepassing op de Differentiaalmeetkunde.

De leerstof in het eerste en in het tweede jaar wordt regelmatig verdeeld over twee jaar.

Leerboeken:

1. Courant, Differential en Integral Calculus deel 1 en 2.
2. Kells, Elementary Differential Equations.
3. R. Churchill, Operational Methods in Engineering.
4. Witting, Aufgaben Sammlung Differential und Integralrechnung, deel 1 en 2.

Voor het derde jaar Genie wordt een cursus Numerieke Wiskunde gegeven. De stof is te vinden in het werkje „Numerieke Wiskunde” van E. Bruins.

Voor het derde jaar Verbindingsdienst wordt een cursus gegeven over Fourierreeksen alsmede een inleiding Gammafuncties en functies van Bessel.

Voor de derde categorie is het programma gelijkluidend, terwijl voor de tweede categorie voor wat betreft het eerste en tweede jaar de leerstof in grote lijnen dezelfde is maar op onderdelen en vraagstukken wordt bekort. Voor de cadetten der Artillerie wordt in het derde jaar een cursus Waarschijnlijkheidsrekening gegeven omvattende:

Frequentieverdelingen, gemiddelde en variantie. Begrip waarschijnlijkheid. Rekenregels voor samengestelde en totale waarschijnlijkheid. Mathematische verwachting, waarschijnlijkheidsverdelingen, continue waarschijnlijkheid, binominale verdeling, verdeling van Poisson, beginselen van de steekproeftheorie, verdeling van Student, regressie en correlatie.

Leerboek: S. S. Wilks, Elementary Statistical Analysis.

Voor de vierde categorie cadetten is het studieprogramma ontleend aan het Nederlands Instituut van Accountants, t.w.:

1. Financiële rekenkunde:

Begrip van afronding en bewerkingen met onnauwkeurige getallen. Grondbegrippen van de samengestelde interest; symbolen der interestrekening, aanvangswaarde en slotwaarde, gebroken tijdsduren, gelijkwaardige percentages, gemiddelde vervalldag, renten met gelijkblijvende en veranderlijke termijnen, tijdelijke en eeuwigdurende renten, oplossen van i .

Aflossing, veranderlijke en gelijkblijvende annuïteiten, sinking fund. Afschrijving op activa.

Rentabiliteitsberekening, agio, disagio, afleiding van koersformules voor gelijkblijvende nominale en effectieve rente, aflossingspremie, tussentijdse koersberekeningen, koerstafels etc.

2. Levensverzekeringswiskunde:

Levens- en sterftekans, sterftetafel.

Berekening van koopsommen.

Kostenberekening.

Wiskundige reserve.

Afkoop, pensioenfondsen etc.

De leerstof is te vinden in: Wijdenes en Berckenhof, Wiskunde voor Accountants.

Het zij mij tenslotte vergund nog het volgende op te merken. In onderwijskringen wordt tegenwoordig grote aandacht besteed

aan de paedagogische voorbereiding van de toekomstige leraar voor zijn taak. Ook de officier moet een dergelijke voorbereiding ontvangen, daar hij elk ogenblik geroepen kan worden een docerende taak te vervullen aan een militaire onderwijsinrichting. Het is daarom dat aan dit onderdeel van de opleiding aan de Koninklijke Militaire Academie grote aandacht wordt besteed. Tevens moet aandacht worden besteed aan het feit dat een officier moet optreden in geallieerd verband, zodat hij een gedegen talenkennis op zijn speciaal gebied moet bezitten. Vanzelfsprekend wordt hem dus in diverse talen het wiskundig jargon bijgebracht. Een overzicht van bovengenoemde onderdelen van ons onderwijs moge hier volgen.

Paedagogiek, Vorming tot Instructeur, Sociologie.

In het eerste studiejaar staat de vorming tot instructeur op de voorgrond, daar de cadetten aan het einde van dit studiejaar bij hun detachering in staat moeten zijn als instructeur op te treden. Naast een theoretische beschouwing over een methodische instructie gebaseerd op paedagogische en psychologische beginselen krijgen zij ook oefening in de praktijk van het lesgeven.

In het tweede studiejaar gaat het om het leren begrijpen van de medemens en om de paedagogische beïnvloeding van deze mens. Behandeld worden de onderwerpen:

Algemene psychologie, hedendaagse stromingen in de psychologie, ontwikkelingspsychologie, tucht en straf, angst, moreel, karakter en karaktervorming.

In het derde studiejaar moeten de problemen rondom het „Verantwoord leiderschap” nader worden gezien. In verband hiermede komen onderwerpen als: groep en groepsvorming, sociale instellingen en veranderingen, gezag en gezagsvorming, leiders-eigenschappen en het aankweken van leiderseigenschappen aan de orde. In dit studiejaar moeten de cadetten tevens een scriptie maken, waaruit blijkt dat ze de gedoceerde stof hebben begrepen. Voor het maken van deze scriptie worden zij verwezen naar in de bibliotheek aanwezige literatuur.

Talenonderwijs.

Bij de heropening van de Koninklijke Militaire Academie in 1948 is in het opleidingsschema een plaats ingeruimd voor Engels en Frans. De doelstelling voor dit onderwijs was aanvankelijk driedig: opvoeren van de spreekvaardigheid; inleiding in de militaire vaktaal en behandeling van technische tijdschriftartikelen.

Ten gevolge van een noodzakelijk geworden vermindering van het totaal aantal uren, dat per taal beschikbaar kon worden gesteld, is de spreekvaardigheid op de laatste plaats gekomen. Dit kon zonder bezwaar geschieden, daar de Dienst Welzijnszorg Leger speciale cursussen organiseert ter opleiding voor het examen Spreekvaardigheid dat jaarlijks wordt afgenomen door een commissie van leraren in de moderne talen onder toezicht van een rijksgedelegeerde. Gezien de grote omvang van de technische terminologie blijft de bestudering daarvan beperkt tot het wapen of dienstvak waartoe de cadet behoort. De Genist heeft b.v. als onderwerpen van behandeling: atoomwapens, bruggen, veldversterkingen, duikeropleiding enz. De toekomstige officier van de Verbindingsdienst: telefoon- en radioterminologie en draaggolf-apparatuur. De cadet van de Technische Dienst: motor- en tanktechniek, onderhoud en berging, benevens onderwerpen uit de technische literatuur ontleend aan de *Revue Générale de Mécanique* en het *Mémorial de l'Artillerie*. Daar de Luitenants van de Genie, Verbindingsdienst en de Technische Dienst na hun benoeming tot officier nog een applicatiecursus volgen, is het nodig dat in de cadettentijd hun een zekere vaardigheid in het lezen van vaktaal in het Engels en Frans wordt bijgebracht. Als leermiddelen zijn voor de Franse taal thans een serie gestencilde teksten aanwezig. Deze zullen in boekvorm worden uitgegeven, terwijl een bijbehorend woordenboek eveneens nagenoeg persklaar is. De verwachting is, dat deze vocabulaire ook aan officieren bij hun eigen studie, alsmede aan hen, die buitenlands aan geallieerde staven verbonden zijn, diensten zal kunnen bewijzen. Tenslotte moge hier worden gereleveerd, dat het ook in de bedoeling ligt onderwijs in de moedertaal op te nemen, op overeenkomstige wijze als zulks reeds bij de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam geschiedt in de vorm van mondelinge en schriftelijke taalbeheersing.

Bijlage 1.

Overgangsexamen Hogere Wiskunde 2e studiejaar.

Koninklijke Luchtmacht 1957.

Tijd: 3 uur.

1. a. Bepaal de uiterste waarden van de functie

$$z = x^3 + y^3 - 3x^2 + 6x^2 - 28,$$

alsmede de aard van deze uiterste waarden.

- b. Bepaal het dubbelpunt en de dubbelpuntsraaklijnen van de kromme

$$x^3 + y^3 - 3x^2 + 6y^2 - 28 = 0.$$

2. Los de volgende differentiaalvergelijkingen volledig op:

a. $xy' - y = x^2;$

b. $xy' - y = y^2;$

c. $xy' - y = x^2 + y^2;$

d. $(7x^3 + y^3)dx + (6xy^2 + 5y\sqrt{xy})dy = 0.$

(Aanw.: Deze vergelijking bezit een integrerende factor die alleen van x afhangt.)

3. Bereken de inhoud van het deel van de bol

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

dat ligt binnen de cylinder

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

(Aanw.: Ga in het XOY-vlak over op poolcoördinaten.)

4. Integreer de volgende differentiaalvergelijkingen:

a. $y = y' + \frac{e^x}{y'};$

b. $y'' - 7y' + 12y = 4x^3 e^{2x} - 3x^2 e^{3x} + \sin x.$

Bijlage 2.

Officiersexamen Fin. Rekenkunde 3e studiejaar.

Militaire Administratie 1957.

Tijd: 4 uur.

1. A. Een $4\frac{1}{2}\%$ lening, nominaal f 1.000.000,— zal in 20 gelijke jaarlijkse annuïteiten worden afgelost, waarvan de eerste voldaan wordt 1 jaar na de uitgifte.

Bereken (in 3 dec. nauwkeurig) de koers, waartegen de geldgever deze lening verstrekt, indien hij 5% 's jaars van zijn geld wil maken.

- B. *Bereken* bij de lening onder A de schuldrest na betaling van de 12e annuïteit.

- C. *Bereken* (in 3 dec. nauwkeurig) de koers van uitgifte van een lening, indien de eerste 4 jaar alleen de rente à $4\frac{1}{2}\%$, telkens aan het eind van het jaar wordt voldaan, en daarna, te beginnen eind 5e jaar, de lening in 20 gelijke jaarlijkse annuïteiten wordt afgelost.

Effectieve rentevoet 5% per jaar.

D. *Bereken* (in 3 dec. nauwkeurig) de koers van uitgifte van een lening, indien de eerste 4 jaar alleen de rente à $4\frac{1}{2}\%$, telkens aan het eind van het jaar wordt voldaan en daarna de lening in 20 jaar wordt afgelost, zo dat de jaarlijkse aflossingen gelijk zijn.

Effectieve rentevoet 5 % per jaar.

2. Van een lening, groot f 30.000,— zullen de eerste 5 jaren geen rente of aflossing worden betaald, daarna zal de lening in 10 jaren worden afgelost in gelijke jaarlijkse termijnen.

De nominale rente à 6 % zal dan eens per jaar worden betaald. Als de geldgever jaarlijks een effectieve rente van $4\frac{1}{2}\%$ verlangt, wordt het verloop van het agio of disagio gevraagd.

3. Van een annuïteitenlening met jaarcoupons bedraagt de rentabiliteitswaarde aan het begin van het eerste jaar f 91.699,— en aan het begin van het derde jaar f 86.014,—.

Bereken de annuïteit, indien nog gegeven is, dat de effectieve rentevoet 5 % per jaar bedraagt.

4. Van een in gelijke jaarlijkse termijnen aflosbare 2,97 % lening met half jaarlijkse rentebetaling is gegeven, dat de koers bij uitgifte 92 % en de contante waarde van de aflossingen 68 % bedraagt.

Bepaal de reële rentevoet en vervolgens de duur van de lening.

Bijlage 3

Overgangsexamen Analyse 2e studiejaar.

Artillerie 1955.

Tijd: 3 uur.

1. a) Bepaal $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en $\frac{\partial f}{\partial y}$ als $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{x^2}{4y}$

b) Door

$$x + 2y + 3z + 4 = \sin xyz$$

wordt z bepaald als functie van x en y .

Bepaal $\frac{\partial z}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial y}$ en daarna het raakvlak in het punt waar $x = 0$ en $y = 0$.

2. Los op:

a) $xy' - (x + 1)y = x^2 - x^3;$

b) $(1 - xy) + (xy - x^2)y' = 0$. (Bezit een integrerende factor die alleen van x afhangt).

3. Maak een schets van de kromme $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$.

Bepaal de lengte van de boog gelegen tussen $x = 1$ en $x = \sqrt{e}$.

4. Door $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases} \quad \left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$

wordt een kromme vastgelegd in het XOY-vlak.

Bepaal de oppervlakte ingesloten door de X-as, de lijn $x = \frac{\pi}{2}a$, en de kromme.

Bijlage 4

Examenwerk Analyse voor de Cadetten: G1, T1, V1, 1951.

Tijd: 3 klokuren.

1. Bepaal de volgende integralen:

a) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx$

b) $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x-5} dx;$

c) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} - 2e^x - 3}$

2. Bepaal:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x) + 2 \ln(1-x)}{1 - \cos 3x}$$

3. Onderzoek op con- of divergentie de volgende reeksen:

a) $\frac{1}{\pi+1} - \frac{1}{\pi+2} + \frac{1}{\pi+3} - \frac{1}{\pi+4} + \dots;$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{n \lg(n+1)};$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! e^{\frac{1}{2}n}}{n^n \cdot 2^n}.$

4. Voor welke waarden van x convergeert de reeks met algemene term:

$$u_n = \frac{2^n}{n\sqrt{n}} \left(\frac{x+2}{x-3} \right)^n \quad (x \neq 3).$$

5. Bepaal het eerste differentiaalquotiënt van de functie:

$$y = \arctg \left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x} \right)$$

en herleid de uitkomst tot de eenvoudigste gedaante.

6. Bepaal de uiterste waarden van de functie:

$$y = 2x + 3\sqrt[3]{(x-2)^2}$$

(een grafiek der functie wordt niet verlangd).

INGEKOMEN BOEKEN

Dr Joh. H. Wansink, Algebra voor V.H.O. en M.O., deel II. Wolters, Groningen.

D. K. F. Heyt, Nieuwe School-Algebra van Wijdenes en Beth, deel 1, 22e vereenvoudigde druk; deel 2, 20e druk. Noordhoff, Groningen.

C. F. Frederik en A. van Os, Langzaam Omhoog. Een meetkundeboek voor scholen met beperkt wiskunde-programma, deel 3. Noordhoff, Groningen.

Dr W. J. Bos en P. E. Lepoeter, Wegwijzer in de Meetkunde, deel 1, 4e druk; deel 2, 2e druk. J. M. Meulenhoff, Amsterdam.

J. Keulen, Grondconstructies van de orthogonale parallelprojectie. J. Noorduyt en Zoon. Gorinchem.

F. S. Groen en Dr H. van Rossum, Leerboek der Mechanica voor h.b.s. en lyceum. W. J. Thieme en Cie, Zutphen.

Ir. F. Harkink, Gerichtte vlakke driehoeksmeting en elementaire landmeetkundige berekeningen. Uitgeverij „Argus”, Amsterdam. 2e druk.

G. R. Veldkamp, Inleiding tot de Analyse. Wolters, Groningen.

Dr D. van Hiele-Geldof, De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het v.h.m.o. Diss. Utrecht.

Dr P. M. van Hiele, De problematiek van het inzicht. Diss. Utrecht.

Dr D. Burger. Bol-land. Een roman van Gekromde Ruimten en Uitdijend Heelal door een Zeshoek. C. Blommendaal, 's-Gravenhage.

A. van Dooren O.S.C., Kosmografie in Beelden. College van het H. Kruis, Maaseik (België).

The Teaching of Mathematics. Issued by the Incorporated Association of Assistant Masters in Secondary Schools. Cambridge University Press.

R. M. Thrall and L. Tornheim, Vector Spaces and Matrices. John Wiley and Sons, New York.

DE DERDE OPGAVE VOOR STELKUNDE OP HET EINDEXAMEN GYMNASIUM β 1957

door

HERMEN J. JACOBS Jr. (Den Haag)

Naar aanleiding van de discussie op de vergadering van Liwenagel van 30 augustus j.l., alwaar de heer N. Slotboom uit Hilversum de opgaven voor Wiskunde op het eindexamen Gymnasium β 1957 besprak, vroeg de redactie-secretaris mij voor Euclides een volledige uitwerking met commentaar te schrijven van de in de titel genoemde opgave. Ik voldoe graag aan dit verzoek, omdat ik door deze bijdrage nog eens wil beklemtonen, dat op deze wijze onverantwoorde eisen aan onze leerlingen worden gesteld. Misschien mag ik deze laatste zin nog nader verklaren. Persoonlijk vind ik het bewuste vraagstuk een aardig gevonden opgave om eens precies na te pluizen of de oplossing volkomen exact is. Zo heb ik veel genoeg beleefd aan het critisch bekijken van oplossingen, die vakcollega's naar voren brachten en helaas is ook de heer Slotboom hiervan „het slachtoffer” geworden; maar ik heb het daarentegen helemaal niet plezierig gevonden mijn leerlingen op deze wijze te becritisieren, want m.i. kan van hen onder de omstandigheden van een schriftelijk eindexamen niet verwacht worden, dat ze een opgave volkomen goed maken, waarbij ze op zulke subtiële, fijne trekjes verdacht moeten zijn. Dit niet in te zien, is voorbijkijken aan de psychologie van een eindexamencandidaat. Wat is het gevolg: de leemten in de oplossingen moeten we wel voor het grootste deel door de vingers zien en dat dénatureert het vraagstuk. Kortom, dit vraagstuk is m.i. als schriftelijke opgave volkomen ongeschikt, als mondelinge opgave misschien te verantwoorden.

Ik wil nu eerst hier het vraagstuk oplossen en bespreken.

De opgave luidde: (de vragen heb ik voor het gemak genummerd met behoud van de volgorde, zoals ze gesteld waren.)

Gegeven een rij reële getallen $t_1, t_2, t_3, \dots$

s_n stelt de som voor van de eerste n termen van deze rij.

Voorts is gegeven: $t_1 \neq t_2$; $s_n = \frac{t_1^2 - t_2 \cdot t_n}{t_1 - t_2}$ voor $n = 3, 4, 5, \text{ enz.}$

- 1) Laat zien, dat de formule voor s_n ook juist is als $n = 2$.
- 2) Bewijs uit het ongerijmde, dat $t_1 \neq 0$.
- 3) Bewijs dat de getallen $t_1, t_2, t_3, \dots$ een meetkundige reeks vormen en
- 4) dat alle termen $\neq 0$ zijn, als $t_2 \neq 0$ is.

En nu de oplossing:

1) Als we in de formule voor s_n voor $n = 2$ invullen, krijgen we

$$s_2 = \frac{t_1^2 - t_2^2}{t_1 - t_2} = \frac{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)}{t_1 - t_2} = t_1 + t_2 \quad (t_1 \neq t_2)$$

De vereenvoudiging van de breuk $\frac{(t_1 - t_2)(t_1 + t_2)}{t_1 - t_2}$ tot $t_1 + t_2$ is alleen toegestaan, daar gegeven is $t_1 \neq t_2$; een „gelukkig” gegeven overigens, daar anders de formule voor s_n geen betekenis zou hebben.

2) Stel $t_1 = 0$, dan volgt uit 't gegeven $t_1 \neq t_2$ dat $t_2 \neq 0$.

De formule voor s_n geeft nu dus voor $n \geq 2$, dat $s_n = \frac{-t_2 t_n}{-t_2} = t_n$ ($t_2 \neq 0$). Voor $n = 2$ geeft dit $s_2 = t_2$, hetgeen juist is; voor $n = 3$ geeft dit $s_3 = t_3$, hetgeen tengevolge heeft, dat $t_2 = 0$ zou zijn. Dit is echter in tegenspraak met de aanname $t_1 = 0$ (zie eerste regel 2)), dus $t_1 \neq 0$.

In dit onderdeel wordt dus tweemaal gebruik gemaakt van de voorwaarde $t_2 \neq 0$ en wel bij het vereenvoudigen van de breuk $\frac{-t_2 \cdot t_n}{-t_2}$ tot t_n (een plaats waar vele leerlingen de voorwaarde vergeten hebben te vermelden) en bij het in tegenspraak zijn van de slotconclusie $t_2 = 0$ met de aanname $t_1 = 0$.

Nadat gevonden was $s_n = t_n$ hebben verschillende leerlingen toch nog moeite gehad dit onderdeel tot een goed einde te brengen: $s_n = t_n$ levert immers voor $n = 2$ nog geen en voor $n = 3$ wel een tegenspraak met de veronderstelling $t_1 = 0$ op.

3) Dit onderdeel is m.i. het moeilijkste. Ik laat eerst de oplossing volgen.

Voor iedere $n \geq 2$ geldt $s_n - s_{n-1} = t_n$, daar de formule voor s_n voor $n \geq 2$ geldt en dus s_{n-1} voor $n \geq 3$ is nu voor $n \geq 3$

$$\frac{t_1^2 - t_2 t_n}{t_1 - t_2} - \frac{t_1^2 - t_2 t_{n-1}}{t_1 - t_2} = t_n \quad (1)$$

of

$$\frac{t_2 t_{n-1} - t_2 t_n}{t_1 - t_2} = t_n \quad (2)$$

$$t_2 t_{n-1} - t_2 t_n = t_n (t_1 - t_2) = t_1 t_n - t_2 t_n \quad (3)$$

dus

$$t_2 t_{n-1} = t_1 t_n \quad (4)$$

of, (daar $t_1 \neq 0$)

$$t_n = \frac{t_2}{t_1} \cdot t_{n-1} \quad (5)$$

$\frac{t_2}{t_1}$ is een constante factor, dus de rij $\{t_n\}$ vormt een M.R. Daar de betrekking (5) geldt voor $n \geq 3$ is voor $n = 3$ dus $t_3 = \frac{t_2}{t_1} \cdot t_2$, is de rij $\{t_n\}$ dus werkelijk meetkundig vanaf t_1 .

Voordat ik commentaar geef, eerst de oplossing van

4) als $t_2 \neq 0$, dan is $\frac{t_2}{t_1} \neq 0$.

Als voor een $p \geq 3$ geldt, dat $t_p = 0$, dan volgt uit (5) dat ook $t_{p-1} = 0$. Dit geeft dan uiteindelijk dat $t_2 = 0$, hetgeen in tegenspraak is met het gegeven.

Dit bewijs sluit aan bij de betrekking (5); doch volkomen juist is ook de oplossing;

als bij een meetkundige reeks $t_1 = a \neq 0$ en $t_2 \neq 0$, dus $\frac{t_2}{t_1} = r \neq 0$, dan is iedere term $t_n = a \cdot r^{n-1} \neq 0$.

Dat onderdeel 3) m.i. het lastigste is moge uit het volgende duidelijk zijn: in de eerste plaats zouden er enkele „kleinigheden” vergeeten kunnen worden, zoals

a) de voorwaarde $t_1 \neq 0$ is noodzakelijk bij het herleiden van betrekking (4) tot betrekking (5),

b) de voor de hand liggende conclusie $\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{t_2}{t_1}$ uit betrekking (4)

is foutief, daar nog niet zeker is dat $t_{n-1} \neq 0$;

maar in de tweede plaats zijn er immers nog enkele belangrijke opmerkingen noodzakelijk, voordat dit onderdeel „af” is; ik doel hier in het bijzonder op de laatste regels waarbij nagegaan is, of de reeks wel vanaf t_1 meetkundig is.

Enkele van mijn leerlingen hebben (ik heb achter mijn bureau bij het corrigeren wel op ze gefoeterd) na betrekking (2) een andere weg ingeslagen en wel door t_{n+1} te bepalen en daarna $\frac{t_{n+1}}{t_n}$ verder te herleiden. N.a.v. het eindexamen vraagstuk no. 3 gymnasium β

1953 had ik hen n.l. vroeger al eens laten zien, waarom de eerste weg beter is dan de tweede. Wie schetst echter mijn verbazing toen ik in de uitwerkingen, die het haagse nieuwsblad „Het Vaderland” in mei '57 van alle opgaven gaf, deze methode ook gebruikt zag. Ik wil graag over deze oplossingsmethode nog enkele opmerkingen maken.

„Het Vaderland” (ik neem aan een wiskunde-leraar, doch hij möge een volgend jaar wat meer uitgeslapen zijn; want vele oplossingen vertonen onvolkomenheden, enkele zelfs zeer ernstige fouten) gaf onderstaande oplossing voor dit deel:

nadat op de normale wijze afgeleid is

$$t_n = \frac{t_2 t_{n-1} - t_2 t_n}{t_1 - t_2} \quad (2)$$

volgt er verder (en nu citeer ik dus verder „Het Vaderland”)

$$t_{n-1} = \frac{t_2 (t_{n-2} - t_{n-1})}{t_1 - t_2} \quad (6)$$

dus

$$\frac{t_n}{t_{n-1}} = \frac{t_{n-1} - t_n}{t_{n-2} - t_{n-1}} \quad (7)$$

of

$$t_n (t_{n-2} - t_{n-1}) = t_{n-1} (t_{n-1} - t_n) \quad (8)$$

$$t_n t_{n-2} - t_n \cdot t_{n-1} = t_{n-1}^2 - t_{n-1} \cdot t_n \quad (9)$$

$$t_n \cdot t_{n-2} = t_{n-1}^2 \quad (10)$$

Dit is een bekende eigenschap van de betrekking, welke bestaat tussen drie opeenvolgende termen van een meetkundige reeks. Voor de eerste 3 termen wordt deze betrekking $t_1 \cdot t_3 = t_2^2$.

Tot zover „Het Vaderland”.

De voornaamste fout is de volgende: betrekking (2) geldt voor $n \geq 3$, dus betrekking (6) en de volgende voor $n \geq 4$.

De slotbetrekking (10) geldt dus ook voor $n \geq 4$, voor 't eerst staat er dus $t_2 \cdot t_4 = t_3^2$ en de slotconclusie van „het Vaderland” is dus onjuist; het meetkundige karakter zou dus gelden uitgezonderd de eerste term.

Maar betrekking (7) is zeker een ongeoorloofde conclusie uit (2) en (6); daar het eventueel nul zijn van t_2 ; t_{n-1} en $t_{n-1} - t_{n-2}$ buiten beschouwing gelaten zijn.

Tot slot wil ik een poging wagen bovenstaand bewijs aan te vullen en te verbeteren.

J. Keulen, Grondconstructies der orthogonale parallelprojectie voor M.T.S., H.B.S.-B en studerende voor Nijverheidsakten. Uitgave van J. Noorduijn en Zoon N.V. Gorinchem, 1957. Ing. f 3.—

Volgens het voorbericht kan het boekje gebruikt worden *naast* elk leerboek der beschrijvende meetkunde en vraagstukkenverzameling en is het bovendien geschikt als repetitiedictaat. Maar stereometrische verklaringen en toelichtingen bij de grondconstructies worden aan de leraar overgelaten.

Hiermede is de bruikbaarheid van het boekje wel zeer beperkt. Waarom naast het leerboek nog weer een apart repetitieboekje aangeschaft, dat voor de H.B.S. bovendien nog teveel geeft?

Overigens ziet het boekje er verzorgd uit. De tekeningen zijn duidelijk.

Dr. Joh. H Wansink, Algebra voor V.H.O. en M.O. Deel II. Uitgave van J. B. Wolters Groningen, Djakarta. Ing. f 3,60; geb. f 4,10.

Voor algemene opmerkingen kan ik verwijzen naar de bespreking van deel I in „Euclides” 32, pag. 348.

Wat me in dit 2e deel opviel is:

A. een sterke neiging om nieuwe tekens en uitdrukkingen te gebruiken:

a. $\succ$ voor „moet groter gemaakt worden dan”,

b. $(x) > 2$ betekent: voor alle waarden van x groter dan 2”.

c. de invoering van de naam „slankheidscoëfficiënt” voor $|n|$ bij de kwadratische functie nx^2 .

B. Bij de behandeling van de meetkundige reeksen is de volgorde: als $t_n : t_{n-1}$ onafhankelijk van n is, is de reeks een m.r.

Daarna staat: we zullen 4, 0, 0, 0, 0, ook een m.r. noemen.

Vervolgens: het criterium voor een m.r. wordt $t_n = kt_{n-1}$.

Zou het niet beter zijn met het laatste te beginnen; dan valt de geciteerde reeks er direct onder. Daarna zou de opmerking gemaakt kunnen worden dat bij een reeks zonder nullen, ook gezegd kan worden t_n/t_{n-1} is onafhankelijk van n .

C. Waarom wordt voor „hieruit volgt” steeds het engelse . . . gebruikt? M.i. is het nederlandse $\rightarrow$ veel suggestiever.

J. F. Hufferman

Dr D. Burger, Bolland, Een roman van Gekromde Ruimten en Uitdijend Heelal, door een Zeshoek. C. Blommendaal N.V. 's-Gravenhage, 1957. 120 blz. f 9,50.

In 1884 verscheen er van de hand van de Engelsman E. A. Abbott een roman, getiteld „Flatland, A Romance of Many Dimensions. By a Square.” Het boek werd in 1886 in het Nederlands vertaald onder de titel: „Platland, een roman van vele afmetingen. Door een Vierkant.” In deze roman wordt de lezer op speelse wijze in kennis gebracht met het begrip vierde dimensie. „Platland” is drie keer herdrukt; het is nu helaas niet meer in de handel en nog slechts antiquarisch te krijgen.

Het hier aangekondigde boek van Dr Burger is een vervolg op Abbott's „Platland”. Omdat het zich hierbij aansluit begint de schrijver zijn roman met een korte samenvatting van „Platland”. Vierkant's kleinzoon, een Zeshoek, nu zelf grootvader, komt door eigen overlegging en door gesprekken met anderen, ook

a) Dat de reeks ook met inbegrip van de eerste term meetkundig is, kan als volgt worden ingezien. Betrekking (2) geldt nl. wel voor

$$n = 2, \text{ immers voor } n = 2 \text{ is } \frac{t_2 t_{n-1} - t_2 t_n}{t_1 - t_2} \text{ gelijk aan: } \frac{t_2 t_1 - t_2 \cdot t_2}{t_1 - t_2} = t_2.$$

De eindconclusie (10) geldt dus bij nader inzien ook voor $n = 3$.

b) Betrekking (7) is een overbodige, misschien liever nog, onjuiste tussenstap. Uit (2) en (6) volgt wel onmiddellijk zonder nadere voorwaarden (8); maar als (7) gebruikt wordt is het nodig om het niet nul zijn van t_{n-1} en $t_{n-2} - t_{n-1}$ te onderzoeken.

Geachte lezers, ik heb getracht de oplossingen van de opgave met behoud van alle noodzakelijke voorwaarden te geven; dat mijn oplossing niet onberispelijk was, bleek me reeds uit opmerkingen van Dr. Vredenduin; indien er ook nu nog onvolkomenheden aanwezig zijn, zou ik daar graag op attent gemaakt willen worden.

BOEKBESPREKING

Acta Paedagogica Ultrajectina XI.

Dr. L. N. H. Bunt, Statistiek als onderwerp voor het gymnasium A. Verslag van een proefneming.

Deel A Inrichting en resultaten van het onderzoek f 4,75

Deel B De gebezigde tekst f 6,90

Als uitgave van het Paedagogisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht verschenen bij J. B. Wolters, Groningen, Djakarta, 1957.

Deze uitgave is het resultaat van de bekende proefneming die plaats had op enige A-afd. van het gymnasium en die de aanleiding was om in het ontwerp voor een nieuw wiskundeprogramma van Wimecos-Liwenagel een plaats voor de statistiek in te ruimen. Het is in zeker opzicht jammer, dat dit verslag eerst nu verschenen is. Ongetwijfeld zou de discussie op de vergaderingen waarin het ontwerp-leerplan aan de leden der beide verenigingen van wiskundeleraars voorgelegd werd, zuiverder geweest zijn, wanneer men zich eerst van de inhoud van dit verslag op de hoogte had kunnen stellen.

Mij komt het voor dat de motiveringen voor de keuze van dit leervak in § 2 van deel A voor de leerlingen van het gymnasium A doeltreffend mogen zijn, maar dat ze m.i. niet het opnemen van de leerstof op de B-afd. rechtvaardigen. Een begaafde leerling van die afdeling kan, wanneer hij bij universitaire studie iets van de statistiek moet weten, de inhoud van deel B (dat reeds onder de titel: "Statistiek voor het V.H.M.O." als leerboek voor dit onderwijs verscheen) zich in 3 maanden eigen maken. Het lijkt me niet nodig alle B-leerlingen daarom dit vak bij te brengen, te meer omdat ik me afvraag of deze leerlingen werkelijk door de behandelde stof geboeid zullen worden. Bovendien zal de leerstof bij niet geregelde toepassing snel weer uit de hoofden verdwijnen.

Nu het ontwerp echter eenmaal aangenomen is, kan ik elke wiskundeleraar aanraden deze werkjes eens door te nemen. De behandeling van de stof is duidelijk en de uitvoering keurig.

ENIGE FORMULES UIT DE PLANIMETRIE, AFGELEID UIT EIGENSCHAPPEN VAN DE CIRKEL

door

J. A. HUNEMAN

In de regel worden in de planimetrie uit de eigenschappen der gelijkvormige driehoeken die van de rechthoekige driehoek afgeleid, waarna de „merkwaardige lijnen” aan de orde komen. De gelijkvormige driehoeken komen dan weer op de proppen bij het bewijs van de stellingen over de „stukken” van elkaar snijdende koorden. Men zou deze laatste eigenschappen ook onmiddellijk na de gelijkvormigheid kunnen behandelen en eerst daarna, steunend op die cirkeleigenschappen tot de behandeling van rechthoekige driehoek, projectiestelling enz. kunnen overgaan.

In het volgende hoop ik door enige voorbeelden aan te tonen, dat dit de levendigheid van de bewijzen soms ten goede komt en daarvoor voor leerlingen wellicht aantrekkelijk kan zijn.

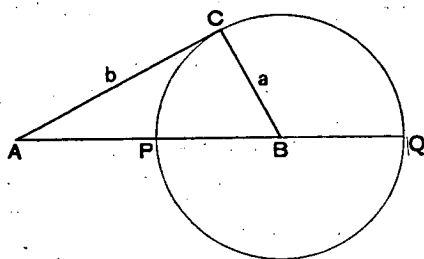


Fig. 1

Fig. 1. $\triangle ABC$ is rechthoekig in C; trek cirkel (B, a), deze snijdt AB in P en Q terwijl AC raaklijn is, dus, als $AC = b$, $BC = a$ en $AB = c$:

$$AC^2 = AP \cdot AQ$$

$$b^2 = (c - a)(c + a)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Stelling van Pythagoras)}$$

Fig. 2. $\triangle ABC$ is willekeurig; $\angle A < 90^\circ$, CD hoogtelijn, stel $AD = q$ en trek de cirkel (C, b), deze snijdt AB in A en E en BC in

door die met de Bol, die in elke nieuwjaarsnacht een bezoek aan Platland brengt, tot de conclusie dat zijn „wereld”, die tot dan toe altijd „Platland” was, in werkelijkheid gekromd, en bovendien nog uitdijend is: een uitdijend „Bol-land”.

Zeshoek vertelt hoe hij tot deze ontdekkingen is gekomen: in de vier hoofdstukken gaat het achtereenvolgens over „De rechte Wereld”, „Congruentie en Symmetrie”, „Gekromde werelden” en „Uitdijende werelden”.

Het boek is bijzonder onderhoudend en geestig geschreven. Ik denk onder meer aan het verhaal van de staat der Amazonen, die slechts uit vrouwen bestond, aan de sprookjes die grootvader Zeshoek op oudejaarsavond bij het oliekringfestijn aan zijn kleinkinderen vertelt, aan de geschiedenis van Agatha en haar hondjes, aan de lotgevallen van Vertato, die op zekere nieuwjaarsmorgen bleek „omgekeerd” te zijn en aan de wederwaardigheden van Dr Puncto, die als directeur van de Trigonometrische Dienst werd ontslagen omdat hij had ontdekt dat de som der hoeken van zijn driehoeken groter was dan 180° .

Voor onze schoolbibliotheken kan dit boek stellig worden aanbevolen. Het zal niet alleen door leerlingen, maar ook door volwassenen, en onder hen in de eerste plaats de wiskundeleraars, met genoegen gelezen worden.

A. van Dooren O.S.C., Kosmografie in Beelden. Leergang in Sterrenkunde voor M.O. Uitg. College van het H. Kruis. Maaseik (België). z. jt. / 2,20.

Dit boekje behoort bij een serie van zeven filmstroken, elk van 20 beelden. (Voor Nederland zijn deze filmstroken verkrijgbaar bij Instituut Lumen, Postbus 5, 's-Graveland à / 21,30. Losse stroken / 3,20). Deze 140 afbeeldingen vindt de leerling in het handboekje bij elkaar: telkens vier onder elkaar op de linker bladzijde en er naast op de rechter de verklarende tekst. De titels van de filmstroken en van de hoofdstukken van het boekje zijn: 1. Waarneming van de hemelverschijnselen. 2. Het heelal. 3. De ster „Zon”. 4. Het zonnestelsel. 5. De draaiende aardbol. 6. De rondcirkelende aardbol. 7. De maan.

De afbeeldingen zijn goed gekozen; zij zijn echter klein, hetgeen vooral hinderlijk is voor het onderkennen van details en voor het lezen van bijschriften. De verklarende teksten zijn nauwkeurig en duidelijk.

Uit de ondertitel (Leergang in Sterrenkunde voor M.O.) krijgt men de indruk dat de schrijver het onderwijs in de kosmografie geheel aan de hand van de genoemde filmstroken en dit handboekje wil geven. Als deze indruk juist is dient wel te worden opgemerkt dat de leraar dan de aansluiting van de opeenvolgende afbeeldingen en de noodzakelijke aanvullende verbinding van de bijbehorende teksten zal moeten verzorgen.

D. N. van der Neut

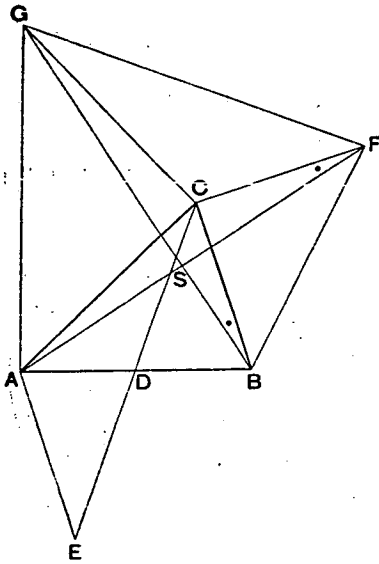


Fig. 4

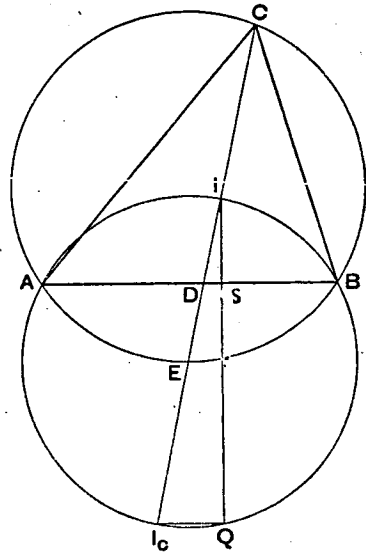


Fig. 5

Fig. 5. De bissectrice CD snijdt de omcirkel van $\triangle ABC$ in C en E . Zeer bekend is de eigenschap, dat de cirkel, die E tot middelpunt en $EB = EA$ tot straal heeft de bissectrice CD snijdt in de middelpunten I en I_c van in- en aangeschreven cirkel. Trek $IS \perp AB$; als het verlengde van IS de cirkel E in Q snijdt, dan is blijkbaar $\angle Q = 90^\circ$, dus $SQ = r_c$. Heeft men nu op de gebruikelijke manier bewezen $O = rs$, $O = r_c(s - c)$, $SB = s - b$, $SA = s - a$, dan vindt men in cirkel E :

$$SB \cdot SA = SI \cdot SQ$$

$$(s - b)(s - a) = r \cdot r_c$$

$$(s - b)(s - a) = \frac{O^2}{s \cdot (s - c)}$$

$$O^2 = s(s - a)(s - b)(s - c)$$

dus, daar $2O = ch_c$:

$$h_c = \frac{2}{c} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \quad (\text{hoogtelijn-formule}).$$

Opmerking: Een ander eenvoudig bewijs van de Stelling van Pythagoras vindt men door de cirkel (B, c) te trekken (zie Fig. 1) en daarna a en b te verlengen tot ze de cirkel tweemaal snijden.

F en G. Daar $CD \perp AE$, is $DE = AD = q$, dus $BE = AE - AB = 2q - c$; nu is dus:

$$\begin{aligned} BE \cdot BA &= BF \cdot BG \\ c(2q - c) &= (b - a)(b + a) \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cq \text{ (Projectiestell.)} \end{aligned}$$

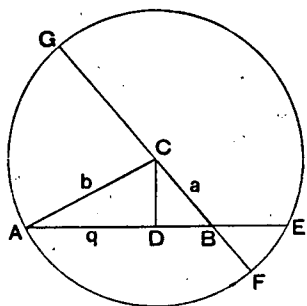


Fig. 2

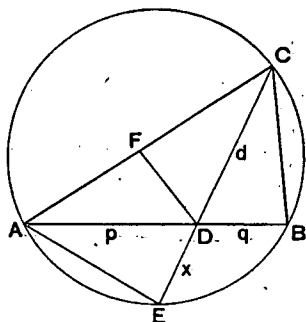


Fig. 3

Fig. 3. We onderstellen in $\triangle ABC$: $b > a$. De bissectrice CD snijdt de omcirkel van $\triangle ABC$ in E . We passen op CA af $CF = CB = a$, dan is $\triangle CFD \cong \triangle CBD$ dus $\angle CFD = \angle B$, ook is $\angle E = \angle B$ dus $FAED$ is een koordenvierhoek.

Stel $CD = d$ en $DE = x$, dan is dus:

$$\begin{aligned} CF \cdot CA &= CD \cdot CE \\ ab &= d(d + x) \\ d^2 &= ab - dx \end{aligned}$$

In de omcirkel van $\triangle ABC$ is: $dx = pq$ ($AD = p$, $DB = q$) dus:

$$d^2 = ab - pq$$

Fig. 4. In $\triangle ABC$ is de zwaartelijn CD verlengd met $DE = CD = z_c$. In C richten we op de zijden a en b loodlijnen op, en passen daarop af $CF = a$ en $CG = b$. We trekken BF , AG , GF , BG en AF .

Nu is $\triangle FGC \cong \triangle EAC$, dus $FG = CE = 2z_c$, voorts is $BF = a\sqrt{2}$ en $AG = b\sqrt{2}$. $\triangle GCB \cong \triangle ACF$, dus $\angle F_x = \angle B_x$, zodat $FCSB$ een koordenvierhoek is, dus in deze vierhoek: $\angle S = \angle C = 90^\circ$.

Uit de identiteit:

$$(SB^2 + SF^2) + (SA^2 + SG^2) = (SB^2 + SA^2) + (SF^2 + SG^2)$$

volgt nu volgens de Stelling van Pythagoras:

$$2a^2 + 2b^2 = c^2 + 4z_c^2 \text{ (zwaartelijnformule).}$$

$$\frac{1}{2}p = t_0 p \quad \rightarrow t_0 = \frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}p \cdot \frac{1}{2}(p-1) - \frac{1}{3} \binom{p}{2} = t_0 p \cdot \frac{1}{2}(p-1) - \frac{1}{3} \binom{p}{2} = t_1 (p-1) \binom{p}{1} \\ \rightarrow t_1 = \frac{1}{2}t_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \quad (3)$$

$$t_1 (p-1) \binom{p}{1} \cdot \frac{1}{2}(p-2) - t_0 p \cdot \frac{1}{3} \binom{p-1}{2} + \frac{1}{4} \binom{p}{3} = t_2 (p-2) \binom{p}{2} \\ \rightarrow t_2 = t_1 - \frac{1}{3}t_0 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \quad (4)$$

enz...

en dan optellen bij (1) vinden we

$$\sum a^p = \frac{1}{p+1} \cdot n^{p+1} + t_0 \cdot n^p + t_1 \binom{p}{1} n^{p-1} + t_3 \binom{p}{3} n^{p-3} + t_5 \binom{p}{5} n^{p-5} + \dots$$

t_2, t_4, t_6 enz. worden 0.

Verder is

$$t_0 = \frac{1}{2}.$$

$$t_1 = \frac{1}{2}t_0 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

$$t_3 = -t_1 + \frac{1}{4}t_0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{1}{120}.$$

$$t_5 = -\frac{1}{3} \binom{5}{2} t_3 - \frac{1}{12} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{36} - \frac{1}{42} = \frac{1}{252}.$$

$$t_7 = -\frac{1}{3} \binom{7}{2} t_5 - \frac{1}{5} \binom{7}{4} t_3 - \frac{1}{12} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9}. \text{ Opm.: } \frac{1}{5} \binom{7}{4} = \frac{1}{3} \binom{7}{2},$$

$$t_9 = -\frac{1}{3} \binom{9}{2} t_7 - \frac{1}{5} \binom{9}{4} t_5 - \frac{1}{3} \binom{9}{2} t_3 - \frac{1}{12} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{11}.$$

$$\text{Opm.: } \frac{1}{7} \binom{9}{6} = \frac{1}{3} \binom{9}{2}.$$

$$t_{11} = -\frac{1}{3} \binom{11}{2} t_9 - \frac{1}{5} \binom{11}{4} t_7 - \frac{1}{5} \binom{11}{4} t_5 - \frac{1}{3} \binom{11}{2} t_3 \\ - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \cdot \frac{1}{13}. \text{ enz.}$$

$$t_7 = -\frac{1}{36} + \frac{7}{120} - \frac{1}{12} + \frac{1}{16} - \frac{1}{72} = -\frac{1}{240}.$$

$$t_9 = \frac{1}{20} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{20} - \frac{1}{110} = \frac{1}{132}.$$

$$t_{11} = -\frac{55}{3} t_9 - 66 t_7 - 66 t_5 - \frac{55}{3} t_3 - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} - \frac{1}{156} = -\frac{691}{32760}.$$

2°

$$n^p (n+1)^p - n^p (n-1)^p = 2 \binom{p}{1} n^{2p-1} + 2 \binom{p}{3} n^{2p-3} + 2 \binom{p}{5} n^{2p-5} + \dots$$

$$(n-1)^p \cdot n^p - (n-1)^p (n-2)^p = 2 \binom{p}{1} (n-1)^{2p-1} + 2 \binom{p}{3} (n-1)^{2p-3} + \dots$$

...

NOG IETS OVER $\sum_{i=1}^n i^p$

door

P. C. DE JONGH

Na lezing van het artikel van de heren Lenstra en Kok in Euclides van 1 sept 1957 kwam ik nog tot de volgende resultaten.

1° $\sum a^p$ betekent $1^p + 2^p + \dots n^p$.

$$n^{p+1} - (n-1)^{p+1} = \binom{p+1}{1} n^p - \binom{p+1}{2} n^{p-1} + \dots$$

$$(n-1)^{p+1} - (n-2)^{p+1} = \binom{p+1}{1} (n-1)^p - \binom{p+1}{2} (n-1)^{p-1} + \dots$$

.....

$$2^{p+1} - 1^{p+1} = \binom{p+1}{1} 2^p - \binom{p+1}{2} 2^{p-1} + \dots -$$

$$1^{p+1} = \binom{p+1}{1} 1^p - \binom{p+1}{2} 1^{p-1} + \dots$$

$$\hline n^{p+1} = \binom{p+1}{1} \sum a^p - \binom{p+1}{2} \sum a^{p-1} + \dots +$$

dus

$$\sum a^p = \frac{1}{p+1} \cdot n^{p+1} +$$

$$\frac{1}{2} \binom{p}{1} \sum a^{p-1} - \frac{1}{3} \binom{p}{2} \sum a^{p-2} + \frac{1}{4} \binom{p}{3} \sum a^{p-3} - \frac{1}{5} \binom{p}{4} \sum a^{p-4} + \dots \quad (1)$$

$$\sum a^{p-1} = \frac{1}{p} \cdot n^p$$

$$+ \frac{1}{2} \binom{p-1}{1} \sum a^{p-2} - \frac{1}{3} \binom{p-1}{2} \sum a^{p-3} + \frac{1}{4} \binom{p-1}{3} \sum a^{p-4} - \dots \quad (2)$$

$$\sum a^{p-2} = \frac{1}{p-1} \cdot n^{p-1} + \frac{1}{2} \binom{p-2}{1} \sum a^{p-3} - \frac{1}{3} \binom{p-2}{2} \sum a^{p-4} + \dots \quad (3)$$

$$\sum a^{p-3} = \frac{1}{p-2} \cdot n^{p-2} + \frac{1}{2} \binom{p-3}{1} \sum a^{p-4} - \dots \quad (4)$$

.....

Als we nu bij (2), (3), (4) ... enz. resp. vermenigvuldigen met

$$2p \sum a^{2p-1} = t^p - I \cdot t^{p-1} + II t^{p-2} - III t^{p-3} + IV t^{p-4} - \dots$$

$$p = 5 \text{ geeft } I = \frac{1}{4} \binom{5}{3} = 2\frac{1}{2};$$

$$II = \frac{1}{3}(10 - 1) = 3;$$

$$III = 1\frac{1}{2};$$

$$\text{dus } 10 \sum a^9 = t^5 - 2\frac{1}{2}t^4 + 3t^3 - 1\frac{1}{2}t^2.$$

Dit is dus te gebruiken als de exponent van a oneven is.

$$p = 6 \text{ geeft } I = \frac{1}{5} \binom{6}{3} = 4;$$

$$II = \frac{1}{4}(40 - 6) = 8\frac{1}{2};$$

$$III = \frac{1}{3}(34 - 4) = 10;$$

$$IV = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5;$$

$$\text{dus } 12 \sum a^{11} = t^6 - 4t^5 + 8\frac{1}{2}t^4 - 10t^3 + 5t^2.$$

Voor even exponent van a .

$$\begin{aligned} n^p(n+1)^p(n+\frac{1}{2}) - (n-1)^p \cdot n^p \cdot (n-\frac{1}{2}) \\ = \left[2\binom{p}{1} + 1 \right] n^{2p} + \left[2\binom{p}{3} + \binom{p}{2} \right] n^{2p-2} + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (n-1)^p \cdot n^p(n-\frac{1}{2}) - (n-2)^p(n-1)^p(n-\frac{1}{2}) \\ = \left[2\binom{p}{1} + 1 \right] (n-1)^{2p} + \dots \end{aligned}$$

$$2^p \cdot 3^p \cdot 2\frac{1}{2} - 1^p \cdot 2^p \cdot 1\frac{1}{2} = \left[2\binom{p}{1} + 1 \right] 2^{2p} + \dots$$

$$1^p \cdot 2^p \cdot 1\frac{1}{2} = \left[2\binom{p}{1} + 1 \right] 1^{2p} + \dots$$

$$n^p \cdot (n+1)^p(n+\frac{1}{2}) = \left[2\binom{p}{1} + 1 \right] \sum a^{2p} + \left[2\binom{p}{3} + \binom{p}{2} \right] \sum a^{2p-2} + \dots$$

dus

$$\begin{aligned} (2p+1) \sum a^{2p} = t^p(n+\frac{1}{2}) - \left[2\binom{p}{3} + \binom{p}{2} \right] \sum a^{2p-2} \\ - \left[2\binom{p}{5} + \binom{p}{4} \right] \sum a^{2p-4} - \dots \end{aligned}$$

$$\text{voor } p = 1 \quad 3 \sum a^2 = n(n+1)(n+\frac{1}{2}) = (n+\frac{1}{2}) \cdot t;$$

$$p = 2 \quad 5 \sum a^4 = (n+\frac{1}{2})t^2 - \sum a^2 = (n+\frac{1}{2})(t^2 - \frac{1}{3}t);$$

$$p = 3 \quad 7 \sum a^6 = (n+\frac{1}{2})(t^3 - t^2 + \frac{1}{3}t).$$

$$2^p \cdot 3^p - 2^p \cdot 1^p = 2 \binom{p}{1} 2^{2p-1} + 2 \binom{p}{3} 2^{2p-3} + \dots$$

$$2^p \cdot 1^p = 2 \binom{p}{1} 1^{2p-1} + 2 \binom{p}{3} 1^{2p-3} + \dots$$

$$\text{dus } n^p(n+1)^p = 2 \binom{p}{1} \sum a^{2p-1} + 2 \binom{p}{3} \sum a^{2p-3} + 2 \binom{p}{5} \sum a^{2p-5} + \dots$$

Als we $n(n+1)$ t noemen vinden we voor

$$p = 1 \quad 2 \sum a = t;$$

$$p = 2 \quad 4 \sum a^3 = t^2;$$

$$p = 3 \quad 6 \sum a^5 = t^3 - 2 \sum a^3 = t^3 - \frac{1}{2}t^2;$$

$$p = 4 \quad 8 \sum a^7 = t^4 - 2 \binom{4}{3} \sum a^5 = t^4 - \frac{4}{3}t^3 + 2t^2.$$

In het algemeen

$$2p \sum a^{2p-1} = t^p - 2 \binom{p}{3} \sum a^{2p-3} - 2 \binom{p}{5} \sum a^{2p-5} - 2 \binom{p}{7} \sum a^{2p-7} - 2 \binom{p}{9} \sum a^{2p-9} - \dots \quad (1)$$

$$- 2(p-1) \sum a^{2p-3} = -t^{p-1} + 2 \binom{p-1}{3} \sum a^{2p-5} + 2 \binom{p-1}{5} \sum a^{2p-7} + 2 \binom{p-1}{7} \sum a^{2p-9} + \dots \quad (2)$$

$$+ 2(p-2) \sum a^{2p-5} = +t^{p-2} - 2 \binom{p-2}{3} \sum a^{2p-7} - 2 \binom{p-2}{5} \sum a^{2p-9} - \dots \quad (3)$$

$$- 2(p-3) \sum a^{2p-7} = -t^{p-3} + 2 \binom{p-3}{3} \sum a^{2p-9} + \dots \quad (4)$$

Als we nu bij (2), (3), (4) enz. resp. vermenigvuldigen met

$$I = \frac{1}{p-1} \binom{p}{3} \quad (2)$$

$$II = \frac{1}{p-2} \binom{p-1}{3} I - \frac{1}{p-2} \binom{p}{5} = \frac{1}{p-2} \left[\binom{p-1}{3} I - \binom{p}{5} \right] \quad (3)$$

$$III = \frac{1}{p-3} \left[\binom{p-2}{3} II - \binom{p-1}{5} I + \binom{p}{7} \right] \quad (4)$$

$$IV = \frac{1}{p-4} \left[\binom{p-3}{3} III - \binom{p-2}{5} II + \binom{p-1}{7} I - \binom{p}{9} \right] \text{ enz.}$$

en bij (1) optellen, vinden we

ELEMENTAIRE MEETKUNDE

Een lezer stelt de volgende vraag:

Moeten de — in enkele schoolboeken voorkomende — stereometrische stellingen, die het aantal gemeenschappelijke beschrijvende lijnen van twee omwentelingskegelvlakken met gemeenschappelijke top in verband brengen met de hoek der assen en de halve tophoeken, gerekend worden tot de elementaire meetkunde, als men voor dit begrip de definitie aanvaardt, die Prof. Grosheide geeft in § 7 van zijn artikel in Euclides 32, aflevering 8?

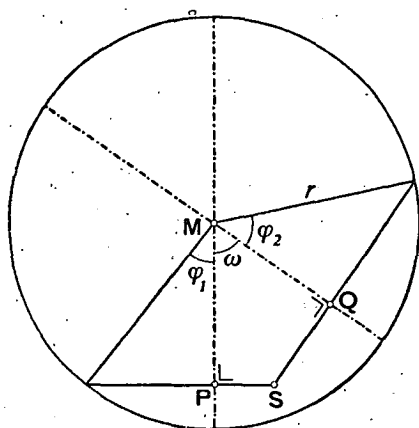


Fig. 1

Antwoord van de redactie.

Het antwoord van de redactie luidt bevestigend.

Het bewijs verloopt eigenlijk heel normaal. Om de gemeenschappelijke top M van de beide kegelvlakken brengen we een bol aan met straal r (willekeurig). Deze bol snijdt de beide kegelvlakken volgens cirkels, hetgeen met congruente driehoeken gemakkelijk aantoonbaar is en dus niet „suspect” is. Noem de hoek tussen de beide kegellassen ω , de halve tophoeken van de beide kegelvlakken φ_1 en φ_2 . De stralen van de snijcirkels zijn dan $r \sin \varphi_1$ en $r \sin \varphi_2$ (hier is kritiek mogelijk, maar daar kom ik aan het slot op terug). Nu zal het vlak van de cirkel op het tweede kegelvlak het vlak van de cirkel op het eerste kegelvlak snijden volgens een rechte. In fig. 1 is deze rechte niet getekend; hij staat echter in punt S loodrecht op vlak PSQ. Of deze rechte de cirkel met middelpunt P snijdt of

In het algemeen

$$(2p+1) \sum a^{2p} = (n + \frac{1}{2})t^p - \frac{2p-1}{3} \binom{p}{2} \sum a^{2p-2} \\ - \frac{2p-3}{5} \binom{p}{4} \sum a^{2p-4} - \frac{2p-5}{7} \binom{p}{6} \sum a^{2p-6} - \dots \quad (1)$$

$$(2p-1) \sum a^{2p-2} = (n + \frac{1}{2})t^{p-1} \\ - \frac{2p-3}{3} \binom{p-1}{2} \sum a^{2p-4} - \frac{2p-5}{5} \binom{p-1}{4} \sum a^{2p-6} - \dots \quad (2)$$

$$(2p-3) \sum a^{2p-4} = (n + \frac{1}{2})t^{p-2} - \frac{2p-5}{3} \binom{p-2}{2} \sum a^{2p-6} - \dots \quad (3)$$

$$(2p-5) \sum a^{2p-6} = (n + \frac{1}{2})t^{p-3} - \dots \quad (4)$$

Als we nu bij (2); (3), (4) enz. resp. vermenigvuldigen met

$$I = -\frac{1}{3} \binom{p}{2}$$

$$II = \frac{1}{3} \binom{p-1}{2} I - \frac{1}{5} \binom{p}{4}$$

$$-III = -\frac{1}{3} \binom{p-2}{2} II + \frac{1}{5} \binom{p-1}{4} I - \frac{1}{7} \binom{p}{6} \text{ enz. en dan bij}$$

(1) optellen, vinden we

$$[2p+1] \sum a^{2p} = (n + \frac{1}{2}) [t^p - I t^{p-1} + II t^{p-2} - III t^{p-3} + \dots],$$

waarin $I = \frac{1}{3} \binom{p}{2},$

$$II = \frac{1}{3} \binom{p-1}{2} I - \frac{1}{5} \binom{p}{4};$$

$$III = \frac{1}{3} \binom{p-2}{2} II - \frac{1}{5} \binom{p-1}{4} I + \frac{1}{7} \binom{p}{6};$$

$$IV = \frac{1}{3} \binom{p-3}{2} III - \frac{1}{5} \binom{p-2}{4} II + \frac{1}{7} \binom{p-1}{6} I - \frac{1}{9} \binom{p}{8};$$

enz.

voor $p = 5 \quad I = 3\frac{1}{3};$

$$II = 6\frac{2}{3} - 1 = 5\frac{2}{3};$$

$$III = 5\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 5;$$

$$IV = 1\frac{2}{3};$$

$$11. \sum a^{10} = (n + \frac{1}{2}) [t^5 - 3\frac{1}{3} t^4 + 5\frac{2}{3} t^3 - 5t^2 + 1\frac{2}{3} t].$$

De redactie publiceert bovenstaande vraag met het antwoord waarmee de vragensteller zich bevredigd verklaarde.

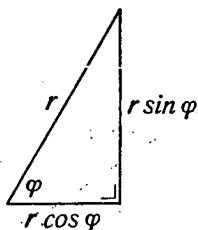


Fig. 3

De redactie zal ook voortaan gaarne vragen van didactisch-methodische aard in Euclides opnemen.

NOTULEN VAN DE LEDENVERGADERING VAN L.I.W.E.N.A.G.E.L.

op zaterdag 28 december 1957 in Hotel Noord-Brabant, Vredenburg,
Utrecht.

Om 10.50 uur opende de voorzitter, Dr. Vredenduin, de vergadering en heette in het bijzonder welkom: de Inspecteur-Generaal van het onderwijs Mr. Ir. M. Goote, Dr. A. F. Monna (vertegenwoordiger van de afd. V.H.M.O. van het Departement van O., K. en W.), de Inspecteurs Dr. J. M. van Buytenen en A. J. S. van Dam, de vertegenwoordigers van zusterverenigingen, nl. Dr. Joh. H. Wansink (*Wimecos*), Dr. W. H. Capel (*Velines*), H. J. Jacobs Jr. (*Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.*), de redactiesecretaris van *Euclides* H. W. Lenstra, voorzitter S. Roodenburg en secretaris J. W. Koning van het *Genootschap*, de voorzitter van de *Groep Classici* Dr. J. A. G. van der Veer en het erelid Dr. D. J. E. Schrek. Later kon hij ook nog Dr. J. C. van der Steen, vertegenwoordiger van *Velebi* verwelkomen.

De voorzitter deelde mee, dat vermoedelijk per 1 september 1958 in de klassen 1, 2 en 3 van de h.b.s en 1, 2, 3 en 4 van het gymnasium het Wimecos-programma zonder de Statistiek zal worden ingevoerd, en dan in de daarop volgende jaren in de B-afdelingen.

De notulen van de vorige ledenvergadering werden goedgekeurd.

De kascommissie bracht verslag uit bij monde van Dr. Capel: de boeken van de penningmeester waren keurig in orde bevonden. De kascommissie beval aan om de kosten van het orgaan „Euclides” per jaar vast te stellen. De voorzitter — tevens penningmeester van de redactie van „Euclides” — toonde aan, dat dit vooral in deze eerste jaren bezwaarlijk was.

De penningmeester werd daarna gedecchargeerd.

Tot leden van de nieuwe kascommissie werden de heren Van Wely en Steemers gekozen.

Het binnengekomen jaarverslag van de redactie van „Euclides” werd door de secretaris voorgelezen. De vergadering had geen op- of aanmerkingen en de voorzitter dankte in het bijzonder de redactie-secretaris, de heer Lenstra, voor het vele werk, dat door hem werd verricht.

niet, hangt er krachtens het extra cirkelaxioma¹⁾ van af, of PS kleiner of groter dan de straal van de cirkel is.

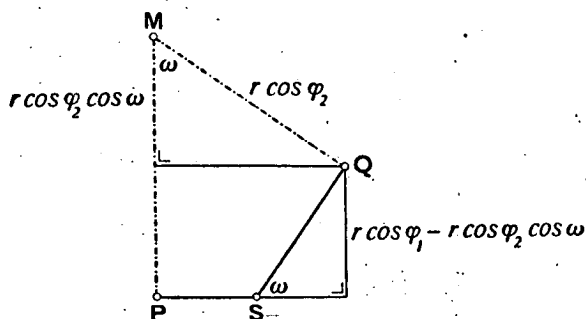


Fig. 2

Om PS uit te rekenen lichten we het vlak PSQM uit de figuur (zie fig. 2). We zien dan eenvoudig in, dat

$$PS = r \cos \varphi_2 \sin \omega - r (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 \cos \omega) \cotg \omega.$$

Voorwaarde voor snijding wordt dus

$$|PS| < r \sin \varphi_1.$$

Dus, na enige herleiding,

$$|\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \cos \omega| < \sin \omega \sin \varphi_1.$$

(Deze formule moet natuurlijk symmetrisch in φ_1 en φ_2 zijn, hetgeen na kwadratering ook het geval blijkt te zijn.)

Is aan de voorwaarde voor snijding voldaan, dan blijken de beide kegelvlakken reeds twee snijlijnen te hebben. Om de onderzoeken, of er nog twee zijn, beschouwen we de „bovenste” cirkel, d.w.z. we vervangen overal ω door $\pi - \omega$.

Zodra de goniometrische verhoudingen als getallen opgevat worden, komen er moeilijkheden. Het weglaten van het continuïteitsaxioma maakt het gebruik van irrationale getallen onmogelijk. Onder $r \sin \varphi$ en $r \cos \varphi$ moeten we dus geen getallen verstaan, maar lijnstukken, die verkregen worden door een lijnstuk r te projecteren op een rechte, die er een hoek $\frac{1}{2}\pi - \varphi$ resp. φ mee maakt (fig. 3). Alle herleidingen zijn dan zuiver meetkundig op te vatten.

¹⁾ B.v.: als op rechte l een punt P ligt, waarvoor $PM < r$, dan hebben l en $\odot (M, r)$ een punt gemeen.

12DE CONGRES VAN LERAREN IN DE WISKUNDE EN DE NATUURWETENSCHAPPEN

te Utrecht op maandag 14 april 1958

Programma

Thema: Grondslagen van de exacte wetenschappen; methodische en didactische aspecten.

Eerste algemene samenkomst. Grote collegezaal Botanisch laboratorium, Lange Nieuwstraat 106.

10.30 Opening van het congres door de voorzitter DR. W. H. CAPEL.

PROF. DR. E. W. BETH, Amsterdam: Didactische consequenties van het exact wetenschappelijk grondslagenonderzoek.

Sectie Wiskunde. Kleine collegezaal Botanisch laboratorium, Lange Nieuwstraat 106.

12.15 PROF. DR. J. RIDDER, Groningen: De grondslagen der wiskunde, didactische aspecten.

15.00 DR. P. G. J. VREDENDUIN, Arnhem: De historische achtergronden van de infinitesimaalrekening.

Sectie natuurkunde. Grote collegezaal Fysisch laboratorium, Bijlhouwerstraat 6.

12.15 PROF. DR. L. C. P. VAN HOVE, Utrecht: Moderne gegevens voor de grondslagen der natuurkunde.

15.00 (samen met de sectie scheikunde) DR. M. A. GELDERMANS, Hilversum: Ons onderwijs en de groei van het natuurkundig inzicht.

Sectie scheikunde.

12.15 Zie de sectie biologie.

15.00 Zie de sectie natuurkunde.

Sectie biologie. Grote collegezaal Botanisch laboratorium, Lange Nieuwstraat 106.

12.15 (samen met de sectie scheikunde) PROF. DR. A. G. M. VAN MELSEN, Nijmegen: Wijsgerige grondslagen van de natuurwetenschappen.

15.00 DR. L. DE RUITER, Groningen: Neo Darwinisme.

Tweede algemene samenkomst. Grote collegezaal Botanisch laboratorium, Lange Nieuwstraat 106.

16.15 PROF. DR. A. W. H. VAN HERK, Amsterdam: Moderne methoden van biologisch onderzoek.

17.15 Sluiting van het congres.

De kosten van deelneming bedragen voor leden van de organiserende verenigingen (Wimecos, Liwenagel, Velines, Velebi) f 3.50, voor anderen f 6.—. Wie dit wenst kan deelnemen aan een maaltijd in de „Mensa”, Lepelenburg, à f 1.70.

Het congresverslag zal verschijnen als afzonderlijk nummer van „Faraday”, dat voor die deelnemers, die dit tijdschrift niet reeds als abonné of als lid van „Velines” ontvangen, voor f 0.50 verkrijgbaar is.

Indien men aan het congres wenst deel te nemen, de maaltijd wenst te gebruiken of het verslag wenst te ontvangen, wordt men verzocht de verschuldigde bedragen te storten op postrekening nr. 581627 ten name van de penningmeester van het Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen te Delft en wel uiterlijk 4 april a.s. Toezending van toegangskarten en later van het congresverslag zal dan volgen. De penningmeester is de heer D. Leujes te Delft, Thorbeckestraat 47.

Namens het congresbestuur,

J. F. Hufferman, *secretaris*

Charlotte de Bourbonlaan 64

Zeist.

Omdat de sprekers nog niet waren gearriveerd, stelde de voorzitter eerst punt 7 van de agenda aan de orde. Het laten vallen van de wiskunde op het eindexamen gymnasium-A was volgens hem het enige, waarmee Liwenagel zich kon bezig houden. Bij de bespreking werd duidelijk, dat alle leerlingen het vak in de 6e klas zullen blijven volgen. Enkele vragen omtrent de bedoeling van het wetsontwerp moesten onbeantwoord blijven. Niemand kon méér zeggen, dan wat in de yage memorie van toelichting had gestaan. Aan deze bespreking namen deel: de heren Jacobs, Oosterhuis, Van Dommelen, Van Wely en Hobma.

Inmiddels waren prof. Gerretsen en prof. Brinkman binnengekomen. Zij werden door de voorzitter hartelijk welkom geheten. Hij stelde voor om punt 7 eventueel in de middagvergadering nogmaals in bespreking te brengen, omdat men er toch kennelijk niet over uitgesproken was.

De daarna volgende inleiding van de voorzitter en de beide lezingen met de discussies zullen afzonderlijk worden gepubliceerd.

Om 12.45 uur bedankte de voorzitter de eerste spreker, Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen, voor zijn lezing: „De academische opleiding van de wiskunde-leraar”. Hij schorste daarop de vergadering tot 14.15 uur.

In de middagzitting sprak Prof. Dr. H. Brinkman over: „De academische vorming van natuurkundeleraar”. Na de discussie bedankte de voorzitter ook de tweede spreker voor zijn betoog. De suggesties, die beide sprekers in hun voordrachten hadden gegeven, zijn zeker het overdenken waard. De voorzitter sprak de hoop uit, dat de besprekingen mochten bijdragen tot de oplossing van de problemen.

Vervolgens werd de bespreking van de wetsvoorstellen voortgezet. De vraag werd gesteld, of het wetsontwerp waarbij aan de beta's meer studierechten wordt toegedacht en het tweede wetsontwerp dat o.a. verlichting van het eindexamen beoogt, wel los van elkaar beschouwd kunnen worden. Opgemerkt werd, dat bij het tweede wetsontwerp het belangrijkste punt is, dat mogelijkheden zijn geopend om van stringente bepalingen af te wijken. De scholen moeten zelf hiervoor eventueel een vorm zien te vinden. Het diploma V.H.M.O. moet garanderen, dat een universitaire studie gevolgd kan worden. De voorwaarden waaraan een leerling moet voldoen om een vak voor het eindexamen te laten vallen, zijn in de memorie van toelichting niet genoemd en die kunnen op velerlei wijzen gesteld worden. Bijvoorbeeld zou rekening gehouden kunnen worden met de toekomstige studie van de leerling. Daartegenover werd gesteld, dat de meeste leerlingen zelfs in de hoogste klassen niet weten, wat ze willen. Bovendien; wat is nodig? Op een gymnasium richt men zich niet in de eerste plaats naar deze vraag. Het prettigst zou zijn, als de wiskunde-leraar in de 5e en 6e klas van de A-afdeling de vrijheid had, om zelf zijn leerstof te kiezen.

Aan deze discussie werd deelgenomen door mevrouw Van Dommelen en de heren Goote, Monna, Roodenburg, Van der Veer, Beukén, Krans, Capel, Wansink, Oosterhuis, Koning, Bronkhorst en Leujes.

Bij de rondvraag dankte Dr. Wansink namens Wimecos en mede namens Velines, Velebi en de W.V.O. voor de ontvangen uitnodiging. De heer Roodenburg deed dit mede namens de heer Koning en Mr. Ir. Goote mede namens Dr. Monna en de Inspectie.

Om 16.55 uur sloot de voorzitter de vergadering.

De secretaris,
D. Leujes

Zo juist verschenen:

Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening

Met toepassingen op verschillende gebieden
door Dr. H. J. E. Beth

7de druk - bezorgd door Dr. E. W. Beth

Met register en 133 figuren f 15,—, gebonden f 17,50

Eerder verscheen:

Inleiding tot de Differentialmeetkunde

door Dr. J. Haantjes

Met 36 figuren f 7,50, gebonden f 9,50

Een voortreffelijk boek

Weekblad Genootschap van Leraren

De behandeling der stof is prettig en duidelijk, het geheel een ideale inleiding voor hen, die zich in willen werken in moderne gebieden van onderzoek.

J. Koksma.

Christ. gymn. en midd. ond.

.... Haantjes bezit de gaven om tussen de klippen door bedachtzaam een veilige koers uit te zetten waarop het een vreugde is hem te volgen.

.... Haantjes heeft een uitstekend leerboek geschreven.

O. Bottema.

Nieuw archief voor wiskunde.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar

„F. A. MINKEMA SCHOOL” - Bijz. Neutr. H.B.S. met 5-jarige cursus
v. d. Valk Boumanlaan 3, WOERDEN

Met ingang van 1 september 1958 wordt gevraagd een

DIRECTEUR

liefst met Wis- en Natuurkunde-bevoegdheid.

Riante nieuwgebouwde villa beschikbaar.

Brieven aan de Secretaris van het Schoolbestuur

J. Eisses, v. d. Valk Boumanlaan 47 - WOERDEN

VLAKE MEETKUNDE

C. J. ALDERS

VLAKE MEETKUNDE voor m.o. en v.h.o.

25ste druk - 186 blz. - met 207 fig. f 3,50
gebonden „ 4,35

C. J. ALDERS

PLANIMETRIE voor m.o. en v.h.o.

163 blz. - met 200 figuren f 3,50
gebonden „ 4,25

Deze uitgave begint met een z.g. intuïtieve inleiding. In hoofdstuk 1 worden verschillende meetkundige begrippen ontwikkeld; tekenen en construeren staan op de voorgrond.

P. WIJDENES

NIEUWE SCHOOLMEETKUNDE

deel 1 - 133 blz., met 162 fig. - 3de druk f 3,50
gebonden „ 4,—
deel 2 - 132 blz., met 153 fig. - 2de druk „ 3,—
gebonden „ 3,60
Toelichting en antwoorden - 2de druk „ 3,50

P. WIJDENES

BEKNOPT MEETKUNDE

deel 1 - 11de druk; deel 2 - 9de druk à f 2,60
Oplossingen f 1,05.

P. WIJDENES

PLANIMETRIE. Een eenvoudig schoolboek voor het eerste onderwijs in vlakke meetkunde

deel 1 - 8ste druk, met 141 figuren f 2,90
deel 2 - 7de druk, met 109 figuren „ 3,40
Beide delen in één band „ 6,40

Dr. H. STREEFKERK

NIEUW MEETKUNDEBOEK voor m.o. en v.h.o.

deel 1 - 3de druk, met 163 figuren f 3,25
deel 2 - 2de druk, met 99 figuren „ 3,50
deel 3 - met 75 figuren „ 2,75

Dr. B. P. HAALMEYER

LEERBOEK DER VLAKE MEETKUNDE

deel 1 - 8ste druk f 3,60, gebonden f 4,60
deel 2 - 6de druk „ 2,75

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar