

EUCLIDES

MAANDBLAD

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

33e JAARGANG 1957/58

I - 1 SEPTEMBER 1957

INHOUD

Prof. Dr. A. HEYTING, Intuitionisme en schoolwiskunde	1
Boekbespreking	12
H. W. LENSTRA en J. C. KOK, Over $\sum_{i=1}^n i^p$	13
Dr. W. K. BAART, De instructie aan de Technische Hogeschool te Delft.	20
Dr. P. BRONKHORST, Nulwaarde, een onjuist woord	26
A. J. VAN ROOY, Die wiskundige verhoudingsbegrip	27
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Het bissectrixloodvlak	30
Dr. C. J. VOOYS, Euclides als leraar	31
Boekbespreking	32
Kalender	32

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. H. MOOY, Monrovia;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2414;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Bakenbergseweg 158, Arnhem, tel. 08300/21960.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, s'-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (/ 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraars te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en / 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

INTUITIONISME EN SCHOOLWISKUNDE

door

Prof. Dr. A. HEYTING

Wiskundigen hebben de neiging, op de beoefenaars van andere wetenschappen wat neer te zien, omdat al die anderen genoodzaakt zijn, uit te gaan van feiten, die hoogstens bij benadering vaststaan, en daaruit conclusies te trekken door methoden, waarvan de betrouwbaarheid op goede gronden betwijfeld kan worden. De wiskunde daarentegen, uitgaande van als absoluut en volkomen geldig vooropgestelde axioma's, zou daaruit met behulp der onverbiddelijke logica gevolgtrekkingen afleiden, die geen normaal mens betwijfelen kan, zodra hij eenmaal de axioma's als juist heeft aanvaard. Nu ja, de soep wordt ook hier niet altijd kokend door de keel gegoten. Het tere gestel van een eerste jaars gymnasiast zou daar niet tegen bestand zijn. En als het erg druk is in de keuken, waar de wiskunde bereid wordt, zoals bijv. in de eerste helft van de 19e eeuw, dan hebben de koks dikwijls geen tijd, de spijzen gaar te koken, en lichten zij wat de hand met de wiskundige strengheid. Maar goed is de wiskunde pas, als zij volkomen streng wordt beoefend. Overigens is die strengheid niet als een gave uit de hemel aan de wiskundigen ten deel gevallen. Zij hebben er voor moeten vechten, vele eeuwen lang. Telkens weer bleek in redeneringen, die als volkomen streng golden, toch een beroep op aanschouwing of analogie te zijn gedaan, zonder dat dit door de wiskundigen was bemerkt.

Aan het eind van de 19e eeuw werd de axiomatische methode, die, zij het in onvolmaakte vorm, reeds door Euclides werd toegepast, als de aangewezen weg tot het bereiken van wiskundige strengheid beschouwd. Deze methode, in haar geperfectioneerde vorm, kan in het kort als volgt beschreven worden: Alle grondbegrippen van een theorie worden opgenoemd; alle overige begrippen worden door definities tot die grondbegrippen teruggebracht en kunnen dus in principe gemist worden. Alle grondstellingen of axioma's worden, zorgvuldig geformuleerd, aan het begin van de theorie gesteld; alle overige stellingen worden door logische redenering uit de axioma's afgeleid. Men meende hiermee de volkomen strengheid practisch bereikt te hebben.

Daarnaast ontwikkelde zich een gearithmetiseerde wiskunde, waaraan behalve zuivere logica slechts de rekenkunde van de natuurlijke getallen, met inbegrip van het principe der volledige inductie, ten grondslag lag. Het was niet verwonderlijk, dat Poincaré in „La valeur de la science” (1905) schreef: „On peut dire qu’aujourd’hui la rigueur absolue est atteinte”.

De geschiedenis, die zo dikwijls de spot drijft met voorspellingen, bakte ook Poincaré een lelijke poets. Reeds in 1903 had Russell ontdekt, dat de logica tot tegenspraken leidde, zonder dat er een duidelijke fout gemaakt was. Het zou mij te ver voeren, hier op die zogenaamde logische paradoxen en op de pogingen, ze op te lossen, in te gaan, maar zoveel is duidelijk, dat zij het onbeperkte vertrouwen in de logica moesten ondergraven, en dat zij dwongen tot een hernieuwde bezinning op de grondslagen der wiskunde. Poincaré meende nog, dat deze paradoxen de eigenlijke wiskunde onberoerd zouden laten; voor hem was de verzamelingsleer van Cantor nog geen essentieel onderdeel van de wiskunde.

Behalve de logische paradoxen kwam in het begin van deze eeuw nog een tweede bezwaar tegen de axiomatische methode naar voren. Bij die methode worden alle stellingen door logische redenering uit de axioma’s afgeleid; dit houdt in, dat uit de geldigheid van de axioma’s voor zekere objecten mag worden geconcludeerd, dat ook de stellingen voor die objecten gelden. Het onaangename is nu, dat er, behalve in enkele bijna triviale gevallen, helemaal geen objecten zijn waarvoor de axioma’s gelden. Wij kennen, bijvoorbeeld, geen punten en rechte lijnen, die volkomen nauwkeurig aan de eis voldoen, dat door twee verschillende punten één en slechts één rechte lijn gaat. Van de punten en lijnen uit de ervaring kan men hoogstens zeggen, dat zij bij hoge benadering aan de axioma’s van de meetkunde voldoen. De Deense wiskundige Hjelmlev heeft de consequenties uit dit inzicht getrokken, en een meetkunde opgebouwd, waarin slechts ondersteld wordt, dat de axioma’s met een zekere benadering gelden, ongeveer zoals de uitkomst van een natuurkundige proef slechts binnen zekere foutengrenzen vaststaat. Maar om die foutengrenzen vast te leggen, dient men toch weer over een exacte wiskunde te beschikken. En zelfs al zou het lukken, dit laatste bezwaar te overwinnen, dan is het toch van de wiskundigen teveel gevergd, het ideaal van een strenge wiskunde op te geven. De moeilijkheid is dus, dat er geen objecten te vinden zijn, die aan de axioma’s voldoen.

Zo dreigde de wiskunde weer een kolos met lemen voeten te worden, zoals zij aan het begin van de 19e eeuw was geweest.

Enerzijds werd de verzamelingsleer tot een onmisbaar onderdeel van de wiskunde, anderzijds waren haar grondslagen hoogst onzeker en bestond er in 't geheel geen overeenstemming over de vraag, hoe zij zonder gevaar voor tegenspraak, gegrondvest moest worden. En tegen de axiomatische methode konden twee bezwaren worden aangevoerd. Ten eerste is het niet duidelijk, welke zin zij heeft, wanneer in de werkelijkheid geen objecten bestaan, die aan de axioma's voldoen. Ten tweede rees de vraag, hoe men zich kan verzekeren, dat uit de axioma's geen contradictie kan worden afgeleid, wanneer men niet beschikt over een te voren opgebouwde wiskunde, waaraan modellen voor de axioma's kunnen worden ontleend.

Zo diende zich op allerlei wijzen de vraag aan naar het object van de wiskunde. Wat is de aard van de verzamelingselementen, waarover men het in de verzamelingsleer heeft? Wat zijn de dingen, die Hilbert zich denkt en die aan de axioma's voldoen? Kort gezegd: Waarover hebben wij het eigenlijk in de wiskunde?

Twee antwoorden zijn op deze vraag gegeven. Van beide is de kiem bij Poincaré te vinden, maar van geen van beide heeft hij de consequenties doorzien.

Het eerste antwoord is dat van de formalisten. Het luidt: „Over niets”. Zoals bekend, brengen de formalisten de hele logica en wiskunde terug tot een rekenen met symbolen. Of de formules, die bij dit rekenen ontstaan, enige zin hebben, is voor de eigenlijke wiskunde volkomen irrelevant. Hierdoor is de eerste moeilijkheid opgelost. Ook voor het tweede probleem vond Hilbert, nadat hij zich er vele jaren mee had bezig gehouden, een bevredigende oplossing. In zijn formele systeem kon de contradictie als een bepaalde formule gedefinieerd worden, bijv. $0 = 1$. Het komt er dus op aan, te bewijzen, dat die formule niet afleidbaar is. Dat bewijs kan natuurlijk niet met behulp van het formele systeem zelf gevoerd worden. Hilbert schept voor dit doel een nieuwe wetenschap, de metamathematica, die het formele systeem, of verschillende formele systemen, tot object heeft. Op de vraag naar de aard van deze metamathematica kom ik straks nog terug.

Heeft het zin, wiskunde te bedrijven als een spel met in principe zinloze tekens? Het lijkt bijna een tautologie, deze vraag ontkenkend te beantwoorden. Evenwel, ook al zijn de tekens op zichzelf zinloos, het spel er mee kan zin verkrijgen in de zin van esthetische waarde. Bovendien zijn de tekens slechts in principe, d.w.z. binnen de zuivere wiskunde, zinloos. De praktijk heeft meer dan voldoende bewezen, dat formele wiskunde een machtig hulpmiddel

kan zijn voor de natuurwetenschap. Volgens sommige wiskundigen is een formeel systeem door zijn empirisch gebleken toepasbaarheid voldoende gerechtvaardigd en is een bewijs van niet-tegenstrijdigheid voor zulk een systeem eigenlijk een overbodige luxe.

Reeds in 1907 is Brouwer fel tegen de formalistische tendenzen, die zich toen begonnen af te tekenen, in het geweer getreden en hij heeft deze strijd des te heftiger gevoerd, naarmate de formalistische wiskunde geperfectioneerd werd. Nu kan men zich inderdaad moeilijk van het gevoel bevrijden, dat de formalistische wiskunde toch niet helemaal dekt, wat een wiskundige, die zich niet speciaal met de grondslagen bezig houdt, zich bij het woord „wiskunde” denkt. Wiskundigen hebben steeds gemeend, dat wat zij deden een zin in zichzelf had. Het feit, dat deze zingeving niet lukt op de wijze, die men zich in de vorige eeuw voorstelde, behoeft ons niet te doen wanhopen, deze zin bevredigend te definiëren.

Alvorens op Brouwers standpunt dieper in te gaan, merk ik op, dat de strijdbijl tussen formalisten en intuitionisten nu wel definitief begraven is. Niemand kan het goede recht van de formalist ontkennen, wiskunde te bedrijven zoals hij dat doet. Op de vraag, of hij het recht heeft, die bedrijvigheid wiskunde te noemen, heeft de geschiedenis bevestigend geantwoord. Omgekeerd heeft een formalist voor zijn metamathematische beschouwingen althans de meest fundamentele begrippen en redeneermethoden uit de intuitionistische wiskunde nodig. Slechts zij, die minder behoefte voelen aan een bewijs van niet-tegenstrijdigheid, kunnen het goede recht der intuitionisten bestrijden. Zij vallen in twee groepen uiteen: ten eerste diegenen, wier standpunt ik zoeven geschetst heb, die de practische toepasbaarheid van het formele systeem als voldoende rechtvaardiging beschouwen; ten tweede zij, die de geijkte methodes der klassieke wiskunde blijven gebruiken, daarbij die min of meer excentrieke methodes, die tot tegenspraken hebben geleid, vermijdende, in de overtuiging dat het met de contradictoriteit van de meer gewone methodes wel zo'n vaart niet zal lopen. Men vindt in deze beide categorieën nog vele wiskundigen, die de verwerping door Brouwer van sommige klassieke methodes als een willekeurige verbodsbepaling beschouwen.

Brouwer ziet als uitgangspunt van de wiskunde natuurlijke getallen. Is het begrip „natuurlijk getal” werkelijk niet tot eenvoudiger begrippen terug te brengen? Dit is zeker mogelijk, en Brouwer heeft zelf een analyse van het begrip „natuurlijk getal” uitgevoerd. Hij vindt als constituerende begrippen die van „stellen van een eenheid”, „toevoegen van een eenheid” en „onbepaalde

herhaling van het laatstgenoemde proces". Het zou eventueel onjuist zijn, deze drie begrippen als een soort psychologische atomen te zien, die door hun verbinding het natuurlijke getal opleveren. Psychologische atomen zijn nooit gevonden, al heeft men er dikwijls naar gezocht. De bedoeling van Brouwers analyse is dan ook niet, de drie genoemde begrippen als onmiddellijk duidelijk en irreducibel voorop te stellen, maar om helder in 't licht te stellen, wat in de intuïtionistische wiskunde onder natuurlijke getallen verstaan wordt. Zij geeft aan, hoe wij in onze geest de natuurlijke getallen één voor één opbouwen en ons er daarbij van bewust zijn, dat deze opbouw onbepaald kan worden voortgezet.

Een andere vraag is, of het getalbegrip niet van empirische oorsprong is en door abstractie verkregen wordt uit het tellen van stoffelijke voorwerpen. Het standpunt van Brouwer tegenover deze tegenwerping is het volgende. Het stellen van een voorwerp als op zichzelf staand, zodat het geteld kan worden, veronderstelt al het begrip van een eenheid, zoals dat bij de analyse van het begrip „natuurlijk getal" voorkwam (hierdoor wordt tevens dit begrip „eenheid" nader toegelicht). Om verder te tellen, moet men het toevoegen van een eenheid aan reeds gedachte eenheden reeds begrepen hebben. De onbepaalde voortzetbaarheid van het proces is een voor de wiskunde karakteristieke toevoeging, die in de ervaring, waar wij steeds met eindige hoeveelheden te maken hebben, geen steun vindt. Volgens Brouwer gaat dus de vorming van het getalbegrip in onze geest vooraf aan het tellen.

Het lijkt mij echter niet nodig, deze kwestie uit te maken alvorens intuïtionistische wiskunde te bedrijven. Ongetwijfeld vinden wij begrippen, die bij de vorming van het begrip „natuurlijk getal" een rol spelen, terug bij het gewone tellen. Of zij eerst voor het tellen gebruikt zijn en daaruit in zuivere vorm geabstraheerd zijn, dan wel in abstracte vorm in onze geest gereed lagen en daarna voor het tellen nuttig gemaakt werden, dat is een vraag, die wij niet behoeven te beantwoorden, en waaraan het, als wij nauwkeurig toezien, niet zo gemakkelijk is, een zin te verbinden.

Practisch komt het hier op neer, dat in de intuïtionistische wiskunde de natuurlijke getallen, in de zin waarin een kind, dat heeft leren rekenen, die opvat, bekend verondersteld worden. Het rekenen met meetbare getallen en de definities en bewijzen uit de rekenkunde der meetbare getallen geven geen aanleiding tot moeilijkheden. Men moet echter bedenken, dat een natuurlijk getal, volgens de verklaring die ik zoeven van dit begrip heb gegeven, in onze geest uit eenheden wordt opgebouwd. Het komt voor dat een definitie, die

volgens de geijkte opvattingen een natuurlijk getal definieert, ons niet in staat stelt, dit getal werkelijk op te bouwen, zodat ze intuïtionistisch niet als definitie van een natuurlijk getal kan gelden. Een voorbeeld: Het getal k wordt als volgt gedefinieerd:

k is het grootste priemgetal met de eigenschap, dat $k+2$ eveneens een priemgetal is, of, indien een zodanig priemgetal niet bestaat, is $k = 1$. Volgens de klassieke opvatting is dit de definitie van een natuurlijk getal. Immers er zijn twee gevallen mogelijk:

- I Er is een eindig aantal priemgetaltweelingen $p, p + 2$. Dan is er een grootste tweeling $q, q + 2$ en $k = q$.
- II Er zijn oneindig veel priemgetaltweelingen; dan is $k = 1$.

k is dus een volkomen bepaald natuurlijk getal. Maar de definitie geeft niet aan, hoe wij k uit eenheden moeten opbouwen en kan dus intuïtionistisch niet als definitie van een natuurlijk getal worden erkend.

Veel interessanter is de theorie van het reële getal. Ik kies van de vele methodes, waarmee men die theorie kan opbouwen, die van Cantor. Een rij $\{a_n\}$ van rationale getallen heet een Cauchy-rij, als bij ieder natuurlijk getal k een natuurlijk getal n gevonden kan worden, zodat voor ieder natuurlijk getal p geldt $|a_{n+p} - a_n| < \frac{1}{k}$.

Natuurlijk moet deze definitie zo opgevat worden, dat het getal k werkelijk berekend kan worden, als n gegeven is. De rij $a \equiv \{2^{-n}\}$ is een Cauchy-rij. Laten wij een rij $b \equiv \{b_n\}$ als volgt definiëren: $b_n = 2^{-n}$, als onder de eerste n decimalen van π geen „rijtje” 0123456789 voorkomt; $b_n = 1 - 2^{-n}$ als dit wel het geval is. Volgens de klassieke opvatting is b een Cauchy-rij, voor ons echter zal dit eerst bewezen zijn, als óf in π een „rijtje” gevonden is, of bewezen is, dat er geen „rijtje” in voor kan komen.

De rij b heeft echter wel een iets zwakkere eigenschap, die veel op de definitie van een Cauchy-rij lijkt. Laat ik eens aannemen, dat er voor zekere waarde n_1 van n geen k bestaat, zodat voor iedere p geldt:

$$(1) \quad |b_{n_1+p} - b_{n_1}| < \frac{1}{k}.$$

Dan kan in π geen „rijtje” voorkomen, want als dat het geval was, zou ik $k(n_1)$ kunnen vinden, zodat wel aan (1) voldaan is. Maar als in π geen „rijtje” voorkomt, kan ik $k(n_1)$ ook vinden. Ik ben dan tot een tegenstrijdigheid gekomen. Het is dus voor iedere n onmogelijk, dat er geen k kan bestaan, zodat voor iedere p geldt $|b_{n+p} - b_n| < \frac{1}{k}$.

Deze eigenschap verschilt van de definitie van een Cauchy-rij alleen door de invoeging van een dubbele negatie. Blijkbaar mogen wij die dubbele negatie niet zomaar weglaten.

Een ander voorbeeld hiervan is het volgende. Ik bepaal een reëel getal ϱ door een oneindige decimaalbreuk als volgt:

$\varrho = 0,333333 \dots$. De stippeltjes betekenen: net zolang een 3, tot de overeenkomstige decimaal uit π de 9 van een „rijtje” 0123456789 is; breek daar af. ϱ is een reëel getal, want de eindige beginsegmenten van ϱ vormen een Cauchy-rij. Is ϱ een rationaal getal, d.w.z. kan het als quotient van twee natuurlijke getallen $\frac{p}{q}$ geschreven worden? Als in π geen „rijtje” voorkomt, is $\varrho = \frac{1}{3}$. Als in π de 9 van het eerste „rijtje” op de k de plaats staat, is $\varrho = \frac{10^k - 1}{3 \cdot 10^k}$.

Volgens klassieke opvatting is ϱ dus in ieder geval een rationaal getal. Maar intuitionistisch gesproken mogen wij dit niet beweren, want wij zijn niet in staat, p en q werkelijk te berekenen.

Echter, ook voor ons is het onmogelijk, dat ϱ onmogelijk een rationaal getal kan zijn. Om dit te bewijzen, nemen wij een ogenblik aan, dat ϱ onmogelijk rationaal kan zijn. Dan is het onmogelijk, dat wij in π ooit een „rijtje” vinden; immers zodra wij zo'n „rijtje” hebben, kunnen wij p en q berekenen, zodat $\varrho = \frac{p}{q}$. Maar nu wij weten, dat in π geen „rijtje” voorkomt, weten wij ook, dat $\varrho = \frac{1}{3}$, in strijd met de onderstelling, dat ϱ niet rationaal kan zijn. Die onderstelling voert dus tot een tegenstrijdigheid, hetgeen te bewijzen was.

Uit dergelijke voorbeelden blijkt, dat dubbele negaties niet zomaar weggelaten mogen worden. Dit kan men ook zo uitdrukken, dat het logische principe van het uitgesloten derde niet onbeperkt gebruikt mag worden. Dit principe houdt in, dat iedere bewering of juist, of onjuist is. Daaruit volgt natuurlijk, dat iedere bewering, die onmogelijk onjuist kan zijn, juist moet zijn. Het is onbekend, of de bewering „ $\varrho = \frac{1}{3}$ ” juist is of niet. Wij mogen nu niet zeggen, dat zij òf juist, òf onjuist is.

In enkele bijzondere gevallen mag men dubbele ontkenningen wel weglaten. Dit mag bijv., indien de dubbele ontkenning staat vóór een bewering van de vorm $a = b$, waarin a en b reële getallen zijn. Als zulk een bewering onmogelijk onjuist kan zijn, dan is zij juist. Om dit te bewijzen, neem ik aan, dat a en b resp. gegeven zijn door de Cauchy-rijen $\{a_n\}$ en $\{b_n\}$ van rationale getallen. Laat k een willekeurig gegeven natuurlijk getal zijn. Ik kan, volgens de definitie van een Cauchy-rij, een getal n vinden zodat

$$|a_n - a_{n+p}| < \frac{1}{4k} \text{ en } |b_n - b_{n+p}| < \frac{1}{4k} \text{ voor iedere } n.$$

Stel, dat $|a_n - b_n| \geq \frac{1}{k}$ was. Dan was

$$|a_{n+p} - b_{n+p}| > \frac{1}{2k} \text{ voor iedere } p, \text{ dus } a \neq b.$$

(De voor de hand liggende definitie van $a = b$, die hier gebruikt wordt, vulle de lezer zelf aan).

Daar $a \neq b$ volgens onderstelling ongerijmd is, is $|a_n - b_n| \geq \frac{1}{k}$ onjuist, dus $|a_n - b_n| < \frac{1}{k}$, en $|a_{n+p} - b_{n+p}| < \frac{1}{2k}$ voor iedere p .

Bij iedere k kan ik n vinden zodat dit geldt, dus $a = b$.

De relatie $a \neq b$ heeft voor de analyse minder belang dan de corresponderende positieve relatie $a \neq b$, (a is verwijderd van b), die ik nu zal definiëren. $a = \{a_n\}$, $b = \{b_n\}$, a_n en b_n rationaal. $a \neq b$, als n en k zo gevonden kunnen worden, dat $|a_{n+p} - b_{n+p}| > \frac{1}{k}$ voor iedere p .

Het belang van de verwijderingsrelatie berust hierop, dat alleen door een van 0 verwijderd getal gedeeld kan worden. De relatie $a > b$ wordt zo gedefinieerd, dat zij $a \neq b$ inhoudt. Uit $a \neq b$ volgt, dat $a > b$ of $a < b$.

Om te laten zien, hoe fundamenteel deze kritiek op de theorie van het reële getal is, wil ik even ingaan op de stelling, dat een product alleen nul kan zijn als minstens een van de factoren nul is. Laat ik een getal k , zodat de k -de decimaal in π juist de 9 van een „rijtje” 0123456789 is, even een „rijtjesgetal” noemen. Nu definieer ik twee reële getallen $a \equiv \{a_n\}$ en $b \equiv \{b_n\}$ als volgt:

Komt onder de eerste n decimalen van π geen rijtje voor, dan is $a_n = b_n = 2^{-n}$. Komt onder de eerste n decimalen van π wel een rijtje voor, en is het eerste rijtjesgetal, dat ik k_1 noem, even, dan is

$$a_n = 2^{-k_1}, \quad b_n = 2^{-n}; \text{ is } k_1 \text{ oneven, dan is } a_n = 2^{-n}, \quad b_n = 2^{-k_1}.$$

In ieder geval is $a_n b_n < 2^{-n}$, dus $ab = 0$; toch is niet bekend dat $a = 0$, en evenmin dat $b = 0$.

Op de onderwerpen, die tot de stof van de middelbare school behoren, heeft de intuïtionistische kritiek betrekkelijk weinig vat. Ik heb al enkele punten aangewezen, waar de gebruikelijke behandeling niet aan de intuïtionistische eisen voldoet, en ik wil daar nu nog enkele voorbeelden aan toevoegen.

Laat ik beginnen met de bepaling van de hoofdasrichtingen van een kegelsnede

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Volgens de bekende formule maakt een hoofdas een hoek φ met de X -as, zodat

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2b}{a-c}, \quad \operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{a-c}{2b}.$$

Men kan dus φ berekenen, als $a-c \neq 0$ of $b \neq 0$.

Voor $a=c$ en $b=0$ zijn er geen bepaalde hoofdasrichtingen. Naar klassieke opvatting zijn hiermee alle gevallen uitgeput. Wij moeten er echter rekening mee houden, dat het wel eens onbekend kan zijn of $a=c$ en of $b=0$. In zo'n geval kunnen wij geen hoofdasrichtingen vinden.

Beschouw de kegelsnede

$$(1) \quad x^2 + y^2 + (ax + by)^2 = 1.$$

Laat a en b hierin getallen zijn, waarvoor niet bekend is of zij 0 zijn of niet, terwijl evenmin bekend is of $a=b$ of niet. Dan verkeert men juist in het twijfelgeval. Merkwaardig is, dat men de lengten der assen wel nauwkeurig kent. Deze worden namelijk gevonden uit de wortels der vergelijking

$$\begin{vmatrix} 1+a^2-\lambda & ab \\ ab & 1+b^2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Deze wortels zijn $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + a^2 + b^2$.

De aslengten zijn dus 1 en $\frac{1}{1+a^2+b^2}$.

Dezelfde aslengten vindt men voor de kegelsnede

$$(2) \quad x^2 + (1+a^2+b^2)y^2 = 1.$$

Toch mag men niet zeggen, dat de kegelsneden (1) en (2) congruent zijn. Het is onmogelijk, dat zij niet congruent zijn. Dit wil ik nog bewijzen. Neem aan, dat (1) en (2) niet congruent zijn (onderstelling A). Neem verder een ogenblik aan, dat $a \neq 0$ en

$b \neq 0$. Dan kan men φ berekenen uit $\operatorname{cotg} 2\varphi = \frac{a^2-b^2}{4ab}$, dus (1)

en (2) zouden congruent zijn. Uit onderstelling A volgt dus: als $a \neq 0$, dan is $b \neq 0$ onmogelijk, dus $b=0$. Maar als $b=0$, dan is direct te zien, dat (1) en (2) congruent zijn, in strijd met onderstelling A. Hiermee is bewezen, dat $a \neq 0$ onmogelijk is, dus dat $a=0$. Maar ook dan is direct te zien, dat (1) en (2) congruent zijn.

Nu heeft onderstelling A tot een ongerijmdheid gevoerd, waarmee de stelling bewezen is.

Ook op de elementaire theorie der vergelijkingen, zelfs in de eerste graad, is nog wel kritiek mogelijk. Zo heeft de vergelijking $ax + by = 0$ niet altijd een van $(0,0)$ verschillende oplossing. Men kan die namelijk niet vinden, als a en b getallen zijn, waarvan men niet weet of zij 0 zijn, terwijl ook over hun verhouding niets bekend is.

Aan de andere kant vindt men hier stellingen, die intuïtionistisch verscherpt kunnen worden. Beschouw de vergelijkingen

$$ax + by = c$$

$$dx + ey = f.$$

Ik neem aan, dat $ae - bd \neq 0$. Dan voldoet blijkbaar

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}, \quad y = \frac{af - cd}{ae - bd},$$

en dit is de enige oplossing. Deze eenduidigheid nu kan als volgt verscherpt worden:

$$\text{Is } p \neq \frac{ce - bf}{ae - bd} \text{ of } q \neq \frac{af - cd}{ae - bd}, \text{ dan is}$$

of $ap + bq \neq c$, of $dp + eq \neq f$.

Van klassiek standpunt, waar $\neq$ hetzelfde is als $\neq$, is dit helemaal geen verscherping, maar intuïtionistisch wel.

Behoort de theorie der continue functies nog tot de elementaire wiskunde? Hier begint de intuïtionistische wiskunde op meer essentiële punten van de klassieke af te wijken. Zo geldt niet meer de stelling, dat een continue functie $f(x)$, waarvan $f(a) > 0$ en $f(b) < 0$, ergens tussen a en b nul wordt. Verbind de punten $(0, -1)$, $(1, a)$, $(2, a)$, $(3, 1)$ door rechte lijnstukken en laat de zo gevormde gebroken lijn de grafiek van $f(x)$ voorstellen. Wanneer niet bekend is, of $a > 0$, $a < 0$, dan wel $a = 0$, dan kan men geen snijpunt van de grafiek met de X -as aanwijzen.

Laat ik de functie $f(x) = -3x^4 + 4cx^3 + 6x^2 - 12cx$ beschouwen.

Men heeft $f'(x) = -12x^3 + 12cx^2 + 12x - 12c = -12(x^2 - 1)(x - c)$. Eventuele extrema moet men dus zoeken bij $x = \pm 1$, $x = c$.

$$f(1) = 3 - 8c; \quad f(-1) = 3 + 8c; \quad f(c) = c^4 - 6c^2.$$

Is c een getal, waarvoor men niet weet, of $c > 0$, $c < 0$, dan wel $c = 0$ (zodat c in ieder geval dicht bij 0 ligt), dan bereikt $f(x)$ een relatief minimum voor $x = c$, en relatieve maxima bij $x = 1$ en $x = -1$. Het is evenwel niet bekend, of het absolute maximum bereikt wordt voor $x = 1$ of voor $x = -1$. De absolute maximum-waarde is wel bekend, n.l. $3 + 8|c|$.

Ik heb hier de functie $|x|$ gebruikt. Over de definitie van deze functie valt nog een opmerking te maken. Men kan niet definiëren: $|x| = x$ als $x \geq 0$; $|x| = -x$ als $x < 0$, want dan zou $|c|$ hierboven niet bepaald zijn. Een betere definitie is: Laat het reële getal a bepaald zijn door de Cauchy-rij $\{a_n\}$, dan wordt $|a|$ bepaald door $\{|a_n|\}$. Een dergelijke verbeterde definitie is niet mogelijk voor de functie $f(x)$, gedefinieerd door $f(x) = 1$ voor $x \geq 0$, $f(x) = -1$ voor $x < 0$. Men kan in het algemeen bewijzen, dat een functie, die in ieder punt van een gesloten interval bepaald is, in dat interval gelijkmatig continu is. Met deze stelling verlaten wij echter zeker het gebied van de elementaire wiskunde.

Na de voordracht, waarvan het voorgaande een uittreksel is, werd de vraag gesteld, in hoeverre de intuïtionistische kritiek invloed dient te hebben op het onderwijs. Dr. Vredenduin bracht in verband hiermee drie punten naar voren, waarop ik even wil ingaan.

1. „De intuïtionistische invoering van het natuurlijke getal staat veel dichter bij de methode, die in de schoolwiskunde gebruikt wordt, dan de formalistische.”

Dit is juist en naar mijn mening terecht. Het intuïtionistische begrip „natuurlijk getal” is bedoeld als precisering van een begrip, dat in het dagelijks leven, ja bij ieder denken een belangrijke rol speelt. Dit begrip is bij iedere leerling aanwezig en behoeft slechts verder ontwikkeld en bewust gemaakt te worden.

2. „De voor de leraar meest frappante zonde in zijn methode, die hij tegen de intuïtionistische opvattingen begaat, is het bewijs uit het ongerijmde. Speciaal als het de omkeringen betreft van een gesloten systemen van stellingen, faalt de schoolwiskunde, althans intuïtionistisch gesproken.”

Hoewel uit de gegeven voorbeelden blijkt, dat de kritiek zich niet uitsluitend tegen bewijzen uit het ongerijmde richt, vormen deze inderdaad het meest in het oog lopende aangrijpingspunt voor die kritiek. Wat betreft de gesloten stellingen faalt het bewijs uit het ongerijmde, omdat men uit de onmogelijkheid zowel van $a < b$ als van $a = b$, niet tot $a > b$ mag besluiten. Ik zou ook op didactische gronden willen bepleiten, deze bewijzen zoveel mogelijk direct te voeren.

Een stelling, waarvan het gestelde negatief is, kan steeds uit het ongerijmde bewezen worden. Dit geldt ook, naar Dr. Vredenduin opmerkt, voor die gevallen, waarin het gestelde positief geformuleerd is, maar negatief geformuleerd kan worden, bijv. wanneer

bewezen moet worden, dat twee vlakken evenwijdig zijn. Dit betekent immers, dat zij geen punt gemeen hebben.

3. „Het is didactisch niet verantwoord, in de schoolwiskunde met intuïtionistische opvattingen rekening te houden”.

Ik ben het ook hiermee eens, alleen al om deze reden, dat de intuïtionistische wiskunde eerst merkbaar van de klassieke afwijkt, nadat de reële getallen zijn ingevoerd. Nu kan het reële getal op school nauwelijks bevredigend behandeld worden en is het zeker niet mogelijk, die behandeling nog met subtiliteiten te belasten. Toch zou op enkele punten, waar zij niet tot grote complicaties aanleiding geeft, de intuïtionistische methode misschien de voorkeur verdienen. Ik denk aan gevallen als de definitie van $|a|$ of de omkering van een gesloten systeem van stellingen. Wie echter zou proberen, de leerlingen met intuïtionistische subtiliteiten lastig te vallen, zou weinig succes hebben. Zij zijn hiervoor eerst rijp na enige jaren training in abstracte wiskunde op de Universiteit.

BOEKBESPREKING

Jacques Nicolle, *La symétrie*. Presses universitaires de France (collection „Que sais-je?”), Paris, 1957, 120 pag., fr. 156.

Het boekje bevat een theoretisch gedeelte over ruimtelijke symmetrie en een gedeelte, waarin toepassingen in de kristallografie, de biologie, de scheikunde en de natuurkunde worden behandeld. Ten slotte noemt het in het kort enkele andere met de symmetrie samenhangende problemen, o.a. in de kunst, kwesties van rechts en links enz. Naar mijn mening had aan de figuren wat meer zorg moeten zijn besteed.

H. W. Lenstra.

M. Denis Papin et A. Kaufmann, *Cours de calcul opérationnel appliqué*, 2e édition. Editions Albin Michel, Paris 1957; 237 pp.

Dit is een tweede druk van een leerboek over de Laplace-transformatie, dat reeds bij het eerste verschijnen in 1950 een goede indruk maakte.

Dit werk is in de eerste plaats bedoeld voor hen die de wiskunde toepassen en er is dan ook niet gestreefd naar een strenge opbouw. Voor technici en voor hen die snel in deze moderne en vruchtbare theorie willen worden ingevoerd kan dit boek echter zeker worden aanbevolen. De stof is overzichtelijk gerangschikt en de stellingen worden door een groot aantal voorbeelden toegelicht. Er zijn tal van toepassingen op problemen uit de mechanica, uit de electriciteitsleer, de warmteleer en zelfs uit de biologie. In vele gevallen zijn deze door tekeningen verduidelijkt.

Aan het slot vindt men een repertorium van de voornaamste stellingen en verder een uitgebreide „dictionnaire” van paren object- en beeldfuncties, waarbij de laatste voorop staan. Er is een uitvoerige literatuurlijst.

J. Popken.

$$\text{OVER } \sum_{i=1}^n i^p$$

door

H. W. LENSTRA en J. C. KOK
(Groningen)

Vaak is het gemakkelijk te kunnen beschikken over de bekende formules $\sum_{i=1}^n i = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$, $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$ enz., waarin n uit de aard der zaak een natuurlijk getal is. Dit komt b.v. voor bij sommige statistische vraagstukken, ook bij elementaire afleidingen van inhoudsformules, traagheidsmomenten, formules voor de algemene term en voor de som van een aantal termen van rekenkundige reeksen van hogere orde e.d. In de algebra worden ze vaak gebruikt als oefenstof voor de bewijzen door volledige inductie. In dit geval moet men echter de formule „uit de lucht laten vallen” en niet ingaan op de vraag, hoe men er aan komt.

In het onderstaande is een eenvoudige methode aangegeven voor het bepalen van de genoemde veeltermen, welke methode naar onze mening in voorkomende gevallen wel op onze scholen zou kunnen worden behandeld en dan zeer geschikt is om wat inzicht te verschaffen in het werken met het sigma-teken. De methode is vervolgens toegepast op het algemene geval en leidt dan tot een teruglopende betrekking, waarbij ook de gezochte som expliciet in de reeds gevonden sommen (van lagere graad) kan worden uitgedrukt. Nadat met behulp hiervan een aantal van de bedoelde formules is „uitgeschreven”, blijkt een zeer eenvoudig verband te bestaan tussen de achtereenvolgens gevonden veeltermen en blijken deze veeltermen enkele eigenaardigheden te vertonen. Zowel dit verband als deze eigenaardigheden worden aangetoond; ze geven aanleiding tot een zeer vlotte rekenwijze, waardoor onze functies direct kunnen worden neergeschreven.

We noemen $\sum_{i=1}^n i^p = S_p(n)$ en onderstellen p geheel en niet negatief.

Duidelijk is, dat

$$\boxed{S_0(n) = n} \quad (1)$$

Nu geldt:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (i+1)^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)^2 + (n+1)^2 = \sum_{i=2}^n i^2 + (n+1)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n i^2 - 1 + (n+1)^2 = S_2(n) + n^2 + 2n.\end{aligned}\quad (2)$$

En ook:

$$\sum_{i=1}^n (i+1)^2 = \sum_{i=1}^n i^2 + 2 \sum_{i=1}^n i + n = S_2(n) + 2S_1(n) + n. \quad (3)$$

Uit (2) en (3) volgt: $n^2 + 2n = 2S_1(n) + n$ en

$$\boxed{S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n}, \quad (4)$$

wat natuurlijk ook door toepassing van de som-formule voor de rekenkundige reeks kan worden gevonden.

Voorts:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (i+1)^3 &= \sum_{i=1}^{n-1} (i+1)^3 + (n+1)^3 = \sum_{i=2}^n i^3 + (n+1)^3 \\ &= \sum_{i=1}^n i^3 - 1 + (n+1)^3 = S_3(n) + n^3 + 3n^2 + 3n.\end{aligned}\quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n (i+1)^3 = \sum_{i=1}^n i^3 + 3 \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \sum_{i=1}^n i + n = S_3(n) + 3S_2(n) + 3S_1(n) + n. \quad (6)$$

Uit (5) en (6) volgt:

$$n^3 + 3n^2 + 3n = 3S_2(n) + 3S_1(n) + n = 3S_2(n) + 1\frac{1}{2}n^2 + 2\frac{1}{2}n,$$

zodat

$$\boxed{S_2(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}. \quad (7)$$

Op deze wijze kunnen achtereenvolgens $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$, ... worden afgeleid.

In het algemeen voor $p \geq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (i+1)^{p+1} &= \sum_{i=2}^{n+1} i^{p+1} = \sum_{i=1}^n i^{p+1} + (n+1)^{p+1} - 1 \\ &= S_{p+1}(n) + (n+1)^{p+1} - 1.\end{aligned}\quad (8)$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (i+1)^{p+1} &= \sum_{i=1}^n \sum_{h=0}^{p+1} \binom{p+1}{h} i^h = \sum_{h=0}^{p+1} \left\{ \binom{p+1}{h} \sum_{i=1}^n i^h \right\} \\ &= \sum_{h=0}^{p+1} \binom{p+1}{h} S_h(n) = S_{p+1}(n) + \sum_{h=0}^p \binom{p+1}{h} S_h(n).\end{aligned}\quad (9)$$

Uit (8) en (9) volgt:

$$\sum_{h=0}^p \binom{p+1}{h} S_h(n) = (n+1)^{p+1} - 1 = \sum_{h=0}^{p+1} \binom{p+1}{h} n^h - 1,$$

zodat

$$\sum_{h=0}^p \binom{p+1}{h} \{S_h(n) - n^h\} = n^{p+1} - 1. \quad (10)$$

Met behulp van deze recurrente betrekking kan $S_p(n)$ dus worden gevonden uit $S_0(n), S_1(n), \dots, S_{p-1}(n)$. Als men $S_p(n)$ expliciet schrijft, gaat (10) over in

$$S_p(n) = \frac{n^{p+1}}{p+1} + n^p - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{h=0}^{p-1} \binom{p+1}{h} \{S_h(n) - n^h\}. \quad (11)$$

Men vindt:

$$\begin{aligned} S_0(n) &= n & (1) \\ S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n & (4) \\ S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n & (7) \\ S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 & (12) \\ S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n & (13) \\ S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 & (14) \\ S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n & (15) \\ S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 & (16) \\ S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n & (17) \\ S_9(n) &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 & (18) \\ S_{10}(n) &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n & (19) \end{aligned}$$

Er vallen nu verschillende dingen op.

1^o. De ontwikkeling begint steeds met $\frac{1}{p+1} n^{p+1}$. Dat dit zo is, volgt zonder moeite uit (10) of (11).

2^o. De tweede term is steeds $\frac{1}{2}n^p$, terwijl verder steeds de termen van even rangorde wegvallen. Dit kan als volgt worden bewezen. Het is duidelijk, dat voor elk natuurlijk getal n geldt

$$S_p(n) = S_p(n-1) + n^p. \quad (20)$$

Daar (20) betekent, dat de coëfficiënten van de gelijknamige machten van n links en rechts aan elkaar gelijk zijn, wanneer voor

$S_p(n)$ en $S_p(n-1)$ de boven afgeleide veeltermen worden ingevuld, geldt ook voor elke reële x

$$S_p(x) = S_p(x-1) + x^p. \quad (21)$$

Onder $S_p(x)$ verstaan we steeds de van $S_p(n)$ afgeleide veelterm, als n door x wordt vervangen. Voor de natuurlijke getallen vallen de waarden dan samen met die van onze beschouwde functies.

Uit (21) volgt nu voor $x=1$: $S_p(1) = S_p(0) + 1$, $S_p(0) = 0$; voor $x=0$: $S_p(0) = S_p(-1) + 0$, $S_p(-1) = 0$; voor $x=-1$: $S_p(-1) = S_p(-2) + (-1)^p$, $S_p(-2) = -(-1)^p$; voor $x=-2$: $S_p(-2) = S_p(-3) + (-2)^p$, $S_p(-3) = -(-1)^p - (-2)^p$. Door volledige inductie toe te passen, ziet men gemakkelijk in, dat

$$S_p(-n) = - \sum_{i=1}^{n-1} (-i)^p, \text{ of}$$

$$S_p(-n) = -(-1)^p S_p(n-1). \quad (22)$$

Uit (22) volgt nu

$$S_p(n) + S_p(n-1) = S_p(-n) + S_p(-n-1) \quad (23)$$

voor oneven waarden van p , en

$$S_p(n) + S_p(n-1) = -S_p(-n) - S_p(-n-1) \quad (24)$$

voor even waarden van p , wat weer uit te breiden is tot

$$S_p(x) + S_p(x-1) = S_p(-x) + S_p(-x-1) \quad (25)$$

voor oneven p , en

$$S_p(x) + S_p(x-1) = -S_p(-x) - S_p(-x-1) \quad (26)$$

voor even p .

Volgens (25) is voor oneven p 's dus $S_p(x) + S_p(x-1)$ een even functie. Nu geldt

$$S_p(x) = C_1 x^{p+1} + C_2 x^p + C_3 x^{p-1} + C_4 x^{p-2} + \dots$$

en wegens (21)

$$S_p(x-1) = C_1 x^{p+1} + (C_2 - 1)x^p + C_3 x^{p-1} + C_4 x^{p-2} + \dots$$

Door optellen volgt:

$$\begin{aligned} S_p(x) + S_p(x-1) &= 2C_1 x^{p+1} + (2C_2 - 1)x^p \\ &\quad + 2C_3 x^{p-1} + 2C_4 x^{p-2} + \dots \end{aligned} \quad (27)$$

De coëfficiënten van de oneven machten zijn nu nul. Dus

$$2C_2 - 1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}; 2C_4 = 0, C_4 = 0; 2C_6 = 0, C_6 = 0 \text{ enz.}$$

In het algemeen:

$$C_2 = \frac{1}{2}; C_{2q} = 0 \quad (q \neq 1). \quad (28)$$

Is p even, dan is (27) een oneven functie van x . De coëfficiënten van de even machten zijn dus nul en men krijgt hetzelfde resultaat (28).

3°. De bekende term is nul, want natuurlijk moet steeds $S_p(0) = 0$.

4°. De som der coëfficiënten is 1, want $S_p(1) = 1^p = 1$.

5°. $S_3(n) = \{S_1(n)\}^2$.

6°. Steeds volgt S_{p-1} uit S_p door formeel te differentiëren, door p te delen en de constante term weg te laten.

Uit (11) is dit te bewijzen. (11) is namelijk een betrekking tussen veeltermen in de variabele n (natuurlijk getal), die weer evenals (20) te herleiden is tot betrekkingen tussen de coëfficiënten. Vervangt men in (11) n door de reële variabele x , dan blijft (11) wegens deze betrekkingen tussen de coëfficiënten dus gelden:

$$S_p(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} + x^p - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+1} \sum_{h=0}^{p-1} \binom{p+1}{h} \{S_h(x) - x^h\}. \quad (29)$$

Met $S_p(x)$ wordt dus weer de gehele rationale functie van x bedoeld, die men krijgt door in de formules voor $S_p(n)$ n door x te vervangen. Nu geldt

$$\begin{aligned} \frac{dS_p(x)}{dx} &= x^p + px^{p-1} - \frac{1}{p+1} \sum_{h=0}^{p-1} \binom{p+1}{h} \left\{ \frac{dS_h(x)}{dx} - hx^{h-1} \right\}, \\ \frac{1}{p} \cdot \frac{dS_p(x)}{dx} &= \frac{1}{p} x^p + x^{p-1} - \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{p-1} \binom{p}{h-1} \left\{ \frac{1}{h} \cdot \frac{dS_h(x)}{dx} - x^{h-1} \right\} - \frac{1}{p(p+1)}. \end{aligned} \quad (30)$$

En:

$$\begin{aligned} S_{p-1}(x) &= \frac{1}{p} x^p + x^{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p} \sum_{h=0}^{p-2} \binom{p}{h} \{S_h(x) - x^h\} \\ &= \frac{1}{p} x^p + x^{p-1} - \frac{1}{p} \sum_{h=1}^{p-1} \binom{p}{h-1} \{S_{h-1}(x) - x^{h-1}\} - \frac{1}{p}. \end{aligned} \quad (31)$$

Uit (30) en (31) volgt:

$$\frac{1}{p} \cdot \frac{dS_p(x)}{dx} - S_{p-1}(x) = -\frac{1}{p} \sum_{h=1}^{p-1} \binom{p}{h-1} \left\{ \frac{1}{h} \cdot \frac{dS_h(x)}{dx} - S_{h-1}(x) \right\} + \frac{1}{p+1}. \quad (32)$$

Toepassing van het principe van volledige inductie geeft nu zonder moeite, dat het linkerlid van (32) een constante is, waarmee het gestelde bewezen is.

De tellers van de breuken zijn steeds p , de noemers nemen af van $p + 1$ tot 2. De coëfficiënten in de ontwikkeling van $S_{p-1}(n)$ worden nu achtereenvolgens vermenigvuldigd met de achter een bepaalde p geplaatste breuken en men krijgt de coëfficiënten in de ontwikkeling van $S_p(n)$, telkens voor de macht, waarvan de exponent één hoger is dan in $S_{p-1}(n)$. De dan nog ontbrekende coëfficiënt van n is omlijnd aangegeven; de berekening geschiedt uit de overweging, dat, zoals al onder 4^o is opgemerkt, de som der coëfficiënten 1 is. Deze omlijnde getallen zijn de z.g. getallen van Bernoulli.

Hieruit is ten slotte nog af te lezen, dat

$$\begin{aligned} S_p(n) = & \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \frac{1}{12} \binom{p}{1} n^{p-1} - \frac{1}{120} \binom{p}{3} n^{p-3} \\ & + \frac{1}{252} \binom{p}{5} n^{p-5} - \frac{1}{240} \binom{p}{7} n^{p-7} + \frac{1}{132} \binom{p}{9} n^{p-9} \\ & - \frac{691}{32760} \binom{p}{11} n^{p-11} + \dots, \end{aligned} \quad (36)$$

waarbij de ontwikkeling steeds na de 2de of 1ste macht van n moet worden afgebroken. (36) is alleen een samenvatting van de resultaten, waaruit zij terug kunnen worden gevonden; om de er in voorkomende coëfficiënten te bepalen moeten eerst de veeltermen, waar het om gaat, worden uitgeschreven. Helaas lijkt het nog niet eenvoudig, de coëfficiënten $\frac{1}{12}$, $-\frac{1}{120}$, $\frac{1}{252}$ enz. op een vlottere dan de boven aangegeven wijze te vinden.

Voor $p = 11$ en 12 betekent (36) dus:

$$S_{11}(n) = \frac{1}{12} n^{12} + \frac{1}{2} n^{11} + \frac{11}{12} n^{10} - \frac{11}{8} n^8 + \frac{11}{6} n^6 - \frac{11}{8} n^4 + \frac{5}{12} n^2 \quad (37)$$

en

$$S_{12}(n) = \frac{1}{13} n^{13} + \frac{1}{2} n^{12} + n^{11} - \frac{11}{6} n^9 + \frac{22}{7} n^7 - \frac{33}{10} n^5 + \frac{5}{3} n^3 - \frac{691}{2730} n. \quad (38)$$

Voor vele toepassingen, waarbij zoals bij berekening van inhouden en traagheidsmomenten n onbepaald toeneemt („verkappt” integreren), is het meer dan voldoende de eerste termen te kennen:

$$S_p(n) = \frac{1}{p+1} n^{p+1} + \frac{1}{2} n^p + \frac{p}{12} n^{p-1} + \dots \quad (39)$$

DE INSTRUCTIE AAN DE TECHNISCHE HOGESCHOOL TE DELFT ¹⁾

door

Dr. W. K. BAART

Doel van de instructie.

De geschiedenis van de instructie begint met een bijeenkomst belegd in het voorjaar van 1947 door de tegenwoordige rector magnificus prof. Dr. O. Bottema. Doel van deze bijeenkomst was de belangstelling der leraren in de wiskunde te wekken voor een instituut op het gebied van het hoger onderwijs, de instructie, welk instituut in het buitenland reeds bestond, maar voor Nederland nieuw was. Speciaal ging het in deze bijeenkomst over de instructie in de wiskunde. Sinds vele jaren waren de propaedeutische examens in de wiskunde het grote struikelblok voor de aankomende studenten. De instructie zou de overgang van het gebonden middelbare onderwijs naar het vrije hoger onderwijs moeten vergemakkelijken. Het doel zoals dit door prof. Bottema gesteld werd, is onveranderd gebleven en is uitvoerig beschreven in het programma voor de T. H. Het luidt als volgt:

Om de moeilijkheden van de overgang van het M.O. en V.H.O. naar de hogeschool te overwinnen en vooral om de studenten daadwerkelijk bij hun studie te steunen, is met ingang van september 1947 het instituut van instructeurs ingesteld. Voor verschillende vakken, met name de wiskunde, de natuurkunde, de toegepaste mechanica en elasticiteit, de scheikunde en de technologie houden de instructeurs de gehele cursus oefeningen met kleine groepen studenten. Wat de instructie wiskunde en toegepaste mechanica betreft, is aan het deelnemen dezer oefeningen het voordeel verbonden dat geregeld tentamina worden afgenomen. Door het werk der instructeurs wordt een beter contact tussen docenten en studenten verkregen en een betere beoordeling mogelijk gemaakt dan door een enkel examen.

Voor de instructie in de wiskunde geeft het programma de volgende nadere precisering:

¹⁾ Voordracht gehouden op 27 december 1956 tijdens de algemene vergadering van „Wimecos“.

Gedurende de eerste oefeningen wordt die leerstof van het V.H.O. nog eens onder de aandacht gebracht, die voor het komende studiejaar van bijzonder belang is en waarvan de kennis voor het kunnen volgen van de wiskundecolleges een eerste vereiste is. Vervolgens worden de studenten in nauwe aansluiting met de gegeven colleges geoefend in het maken van vraagstukken. Het grote voordeel van deze oefeningen is, dat hier de student de gelegenheid krijgt vragen te stellen over de theorie die hij bestudeerd, maar nog niet begrepen heeft en dat hij vraagstukken ter sprake kan brengen, die hij niet uit eigen kracht heeft kunnen oplossen. Daarnaast worden hem voortdurend vragen gesteld door de instructeur. Bovendien wordt in de loop van de cursus voor elk onderdeel (analyse, analytische meetkunde, beschrijvende meetkunde) enige malen een tentamen afgenomen. De uitslagen van deze tentamina, mits gesteund door een goed judicium, verkregen gedurende de instructie, kunnen leiden tot een vrijstelling voor een of meer onderdelen van de P-examens.

Ook buiten de eigenlijke instructie-uren kan elke student zich persoonlijk tot zijn instructeur om voorlichting wenden.

Beginmoeilijkheden.

De instructie in de wiskunde startte in sept. 1947 met vijf instructeurs onder leiding van Dr. W. L. v. d. Vooren, welk aantal begin 1948 tot acht was aangegroeid, een te klein aantal om aan de overweldigende belangstelling te voldoen. De genoemde „kleine” groepen bevatten het eerste jaar dan ook tot vijftig studenten. Dat het aantal instructeurs zo gering was, vergeleken met het groot aantal aanwezigen op de door prof. Bottema belegde bijeenkomst, had verschillende oorzaken. Hiervan worden de volgende genoemd:

De betrekking moest voorlopig tijdelijk zijn, want de rechtspositie was nog niet geregeld. Daardoor moest aan de vast aangestelde leraren verlof verleend worden. Het Rijk verleende dit verlof onmiddellijk, gemeente- en schoolbesturen waren niet geneigd ervaren leerkrachten te laten gaan, mede omdat zij geen nieuwe vaste leerkrachten konden aanstellen.

In de tweede plaats waren en zijn er nog steeds de huisvestingsmoeilijkheden. In Delft is nog steeds een groot woningtekort. Hoewel het Rijk reis- en verblijfskosten vergoedde volgens het verplaatsingskostenbesluit, werden verschillende instructeurs gedurende de werkweek van hun gezin gescheiden.

Andere beginmoeilijkheden waren er door een actie van ouderejaarsstudenten tegen de instructie. Zij vreesden dat de hooggeroem-

de vrijheid van studeren in het gedrang zou komen en de T. H. tot een „schooltje” zou degraderen. Deze actie is thans geheel verdwenen. De afgestudeerden van thans zijn in het algemeen zeer dankbaar voor hun ervaringen opgedaan bij de instructie. Wat de vrijheid van studie betreft, merken we op dat de student geheel vrij is om de instructie al dan niet te volgen. Het niet-volgen heeft geen enkele onaangename consequentie voor het P-examen. Heeft echter de student besloten de instructie te volgen, dan moet hij daar ook geregeld aan deelnemen, omdat het effect anders te gering zou zijn. Door groot absenteïsme verspeelt hij zijn kans op vrijstellingen.

Indeling der studenten.

Afhankelijk van het wiskunde-onderwijs dat zij volgen worden de studenten in twee groepen onderscheiden, zij die de „grote” cursus en zij die de „kleine” (speciale) cursus volgen. Tot de grote cursus behoren de afdelingen werktuigbouwkunde, scheepsbouwkunde en vliegtuigbouwkunde (W, S, V); en de afdelingen weg- en waterbouwkunde en geodesie (C.G.). De studenten van deze afdelingen krijgen onderwijs in analyse, analytische meetkunde en beschrijvende meetkunde. Verder behoren tot de grote cursus de electrotechnici, de natuurkundigen en de metaalkundigen (E, N, MT), die onderwijs in analyse en analytische meetkunde ontvangen. Tot de kleine cursus behoren de technologiën (T), de bouwkundigen (B) en de mijnbouwkundigen (M). De T's krijgen onderwijs in analyse en an. meetk., de B's in analyse, an. meetk. en perspectief, de M's in analyse, an. meetk. en beschrijvende meetk. Bij het onderwijs van de kleine cursus gaat de leerstof minder ver dan bij de grote cursus.

De studenten van de grote cursus hebben twee middagen van 3 uur per week instructie in analyse en an. meetk. en voor zover zij dit vak hebben één morgen van 2 uur instructie en college in beschrijvende meetkunde. Het college beschr. meetk. wordt door instructeurs gegeven.

De studenten van de kleine cursus hebben meestal 's morgens instructie, de technologiën in totaal 4 uur, de bouwkundigen 5 uur, de mijnbouwkundigen gemiddeld 6 uur. In deze uren is begrepen het college an. meetk. voor de T's, de colleges analyse, an. meetk. en perspectief voor de B's, welke colleges door de betreffende instructeurs gegeven worden.

De studenten van de grote cursus leggen het propaedeutisch examen gesplitst af, nl. het examen P_1 aan het eind van het eerste studiejaar en het examen P_2 aan het eind van het tweede jaar; de

studenten van de kleine cursus hebben een niet gesplitst P-examen na één jaar.

Het hiervoor vermelde heeft uitsluitend betrekking op de voorbereiding van het P_1 -(P)examen.

De instructie begint eind september en eindigt eind april, het aantal beschikbare weken is ongeveer 25.

Het aantal studenten dat gedurende de cursus 1956—57 de instructie volgt, is ± 1500 , het aantal instructeurs is thans 18. Mede doordat sommige instructeurs leeropdrachten hebben, is het aantal studenten per instructeur groot, nl. ± 45 .

Taak van de instructeur.

Het normale aantal uren dat een instructeur onderwijs geeft, bedraagt ± 14 . De taak die hij daarbij heeft, is in de loop van de jaren enigszins gewijzigd en niet voor alle instructeurs gelijk. Normaal geldt dat een instructeur van de grote cursus vier middagen van 3 uur instructie geeft en nog een morgen van 2 uur. Tegenwoordig worden de vraagstukkencolleges aan de 2e jaarsstudenten (2 uur per week) in hoofdzaak gegeven door instructeurs (vroeger door assistenten). Verder nemen de instructeurs als examinatoren deel aan de in mei en september plaats vindende propaedeutische en candidaatsexamens.

Resultaten.

Het gestelde doel, een betere aanpassing aan het M.O. en V.H.O. te verkrijgen, kan thans wel als bereikt worden beschouwd.

Volgens een onderzoek ingesteld door het Centraal Bureau voor Statistiek was in september 1948, 25 % van de lichting 1947 geslaagd voor het P_1 -(P-)examen en in september 1949 was 40 % van de lichting 1948 geslaagd voor dit examen. Uit een rapport over 1954 blijkt dat van de voor de cursus 1953/1954 voor de eerste maal aan de T. H. ingeschreven studenten, 547 (83 %) deelnamen aan de P_1 -(resp. P-)examens. Daarvan zijn geslaagd 348 (52½ %). De percentages voor de verschillende afdelingen afzonderlijk lopen hierbij enigszins uiteen. In 1954 werden de beste resultaten geboekt door de E's (65 %) gevolgd door de N's (62 %), terwijl de slechtste resultaten voorkwamen bij de scheepsbouwkundigen (41 %). Aangezien de afdeling S klein is, kan aan het laatste percentage geen grote betekenis worden toegekend.

Ook in de latere jaren blijkt het percentage geslaagden ± 55 % te bedragen, waarmede het optimum vrijwel bereikt is.

De hierboven gegeven resultaten betreffen alle voor het eerst ingeschreven studenten, dus ook de studenten die geen instructie

gevolgd hebben. Om de invloed van een goed resultaat op de instructie te laten uitkomen vermelden wij nog dat in 1954 voor het P_1 -(P)-examen van de 267 studenten met alle vrijstellingen er 240 (90 %) slaagden, terwijl van de 283 met niet alle vrijstellingen er slechts 98 (31 %) het examen behaalden. Ook uit latere peilingen blijkt dat de studenten met alle vrijstellingen 90—95 % kans hebben voor het P_1 -(P)-examen te slagen.

Het rapport van 1954 laat zien dat er een sterke correlatie bestaat tussen het wiskundecijfer van het examen der vooropleiding en het resultaat van het eerste T. H.-examen. Uit een uitvoerig onderzoek bleek voor de resultaten van het P_1 -(P)-examen in de jaren 1953 en 1954 het volgende:

gemiddeld wiskundecijfer bij eindexamen vooropleiding								
5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5
procentuele kans van het slagen voor het eerste T.H.-examen								
19	26	34	42	50	60	69	80	92
16	22	29	33	40	54	64	75	88

De vooruitgang in de resultaten van het P_1 -(P)-examen is niet uitsluitend aan de instructie te danken. Het V.H.O. levert de laatste jaren beter materiaal af dan in de eerste jaren na de oorlog. Dit blijkt uit het gemiddelde voor de exacte vakken op de eind-examenlijst. Dit is bijv. voor de natuurkundigen 8. Volgens bovenstaande tabel correspondeert hiermede een kans om te slagen van 57 %, wat door de hiervoor genoemde resultaten bevestigd wordt.

H.B.S. en instructie.

Hoewel gerealiseerd moet worden dat de H.B.S. geen opleidings-school is voor de T. H., merken we ieder jaar, ook bij jongelui met voldoende cijfers, verschillende tekortkomingen op, waarvan er hier enkele vermeld worden.

De goniometrische formules worden vaak onvoldoende gekend. Formules als $\sin^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$, $\cos^2 \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos \alpha)$, die bij het integreren vaak worden toegepast, blijken slechts bij een minderheid bekend te zijn. Zelfs de gewone dubbele-hoek-formules zijn dikwijls geen foutloos eigendom.

Merkwaardige quotiënten worden in het algemeen niet gekend. Het quotiënt $a^n - b^n / a - b$ wordt zelfs verward met $(a + b)^n$. Dientengevolge kunnen de meesten $a^3 - b^3$ en $a^3 + b^3$ niet foutloos in factoren ontbinden.

Op verschillende scholen wordt nog het tekenverloop van een gebroken rationale algebraïsche functie op een omslachtige wijze behandeld, terwijl dit tekenverloop met één getallenlijn eenvoudig kan worden duidelijk gemaakt.

Het zou gewenst zijn op de middelbare school wat meer aandacht te besteden aan het modulus-teken. Het zou van voordeel zijn dat de jongelui formules kenden als $\sqrt{a^2} = |a|$, $\sqrt{\sin^2 \alpha} = |\sin \alpha|$, $\log ab = \log |a| + \log |b|$; de equivalentie van $a^2 = b^2$ met $|a| = |b|$ en die van $a^2 < b^2$ met $|a| < |b|$.

Eveneens zou onder de aandacht te brengen zijn dat het teken $\leq$ iets anders is dan $<$ en niet bijna hetzelfde. Het is onmogelijk hogere wiskunde te leren, indien dit verschil niet begrepen is.

De leerling behoort zich bij de oplossing van een of ander probleem steeds zo scherp mogelijk te realiseren wat hij doet, wat hij bedoelt en wat de symbolen betekenen die hij opschrijft. Hij behoort te weten wat er wordt afgesproken als juist of als bekend en wat hij behoort te kunnen afleiden uit eenmaal opgestelde grondbeweringen (axioma's).

De instructeur in de hiërarchie der T.H.

We laten hier nog enige opmerkingen volgen omtrent de positie van de instructeur in de hiërarchie van de T. H.

De instructeur is geen zelfstandig docent. Omtrent de te behandelen leerstof pleegt hij overleg met de docent voor het betreffende vak. De tentamenopgaven moeten door de betreffende docent worden goedgekeurd. Ook bij de vakken beschrijvende meetkunde (grote cursus), analyse en analytische meetkunde (kleine cursus) die door instructeurs gegeven worden, heeft een hoogleraar de supervisie. Hoewel de samenwerking met de hoogleraren uitstekend is, is wel gepoogd meer eigen verantwoordelijkheid te verkrijgen; deze poging is tot nu toe niet gelukt. Wel zijn er enige instructeurs die een tijdelijke leeropdracht hebben. Deze opdracht hebben zij echter niet ambtshalve, maar ontvangen zij opnieuw ieder jaar bij Koninklijk Besluit.

Rechts- en salarispositie van de instructeur.

De functie van instructeur is niet in de hoger onderwijswet opgenomen. Bij hun vaste benoeming zijn de instructeurs ingepast in de schaal der wetenschappelijke ambtenaren resp. hoofdamttenaren. Zij hebben dus de rechten en plichten van deze ambtenaren. Zo heeft een wetenschappelijk hoofdamttenaar bijv. recht op 23 dagen vacantie per jaar.

Wat het salaris betreft heeft prof. Bottema op de vergadering van 1947 medegedeeld dat dit ε meer zou zijn dan dat van een leraar met volledige betrekking. Zijn streven hierbij was $\varepsilon = 10\%$ te doen zijn. Inderdaad is dit de eerste jaren het geval geweest. Toen de leraren per 1-I-1953 een belangrijke salarisverbetering kregen, zijn de ambtenaren niet verhoogd. Van 1-I-1953 tot 1-I-1955 is $\varepsilon < 0$ geweest. Sinds 1-I-'55 ligt het maximumsalaris van een instructeur $\pm 3\%$ boven dat van een leraar met volledige betrekking. Indien echter de Eerste Kamer accoord gaat met de voorgestelde verhoging voor de topfunctionarissen, zal eindelijk het salaris op een behoorlijk niveau gebracht zijn.

NULWAARDE, EEN ONJUIST WOORD

door

Dr. P. BRONKHORST

Een *witerste waarde* van een functie is een *waarde* van de functie.

Een *nulwaarde* van een functie $f(x)$ is *geen waarde* van de functie, maar een waarde van x , waarvoor de functie nul wordt. Daarom is het woord nulwaarde een onjuist woord. Dit blijkt nog sterker als we gaan uitbreiden:

De 5-waarde van $x-3$ is 8 en heel fraai: de „oneindig-waarde” van $1/x$ is nul, de nulwaarde is oneindig. Verstandige lieden hebben voor de „oneindig-waarde” van een functie het woord „pool” ingevoerd. Zeker, een pool is geen waarde van $f(x)$, maar dit hindert niet, omdat het woord „pool” geen waarde van $f(x)$ suggereert.

Nu spreekt Dr. B. L. v. d. Waerden in zijn „Moderne Algebra” over een „wortel” van een veelterm. (Tweede druk; 1e deel; blz. 68). Dit zou ik graag overnemen en dus voortaan zeggen: de wortels van $f(x)$ zijn de wortels van de vergelijking $f(x) = 0$. Dat het woord „wortel” er hierdoor een betekenis verkrijgt, acht ik geen bezwaar; het woord „pool” heeft ook verschillende betekenissen, maar niemand verwacht de pool van een functie, met de pool van een polair assenstelsel.

Stellig, liggen bij het begrip „wortel” de betekenissen dichter bij elkaar; in het ene geval is het een bijzondere waarde van een veranderlijke, in het andere een bijzondere waarde van een onbekende. In ieder geval lijkt het me veel beter dan de onjuiste betiteling „nulwaarde”.

DIE WISKUNDIGE VERHOUDINGSBEGRIP

door

A. J. VAN ROOY

(Florida, Suid-Afrika)

Dit is opvallend dat geskifte oor die wiskundige verhoudingsbegrip baie skaars is. Tog is dit van die grootste belang dat ons met die ondersoek van probleme in verband met die wiskundededaktiek besondere aandag sal gee aan die wiskundige begrippe en die wyse waarop die leerlinge dit begryp. In hierdie verband dink ek in besonder aan die probleem van die aansluiting van rekenkunde aan die laer skool en wiskunde aan die middelbare skool. In Suid-Afrika vorm die doen van verhoudingsomme die eindpunt van die laerskoolkursus in rekenkunde, sodat dit heel gepas is dat die wiskunde van die middelbare skool die verhoudingsbegrip as die sentrale tema van die aanvangswiskunde sal kies. Dit wil nog nie sê dat al die middelbare skole aan die verhoudingsbegrip die eer skenk wat daaraan toekom nie, maar tog gee m.i. die regte hantering van hierdie begrip die sleutel tot die oplossing van die hele aansluitingsvraagstuk tussen laer en middelbare wiskunde-onderwys.

Die belangrikheid van die verhoudingsbegrip kom selfs in die geskiedenis van die wiskunde tot openbaring. By gebrek aan 'n behoorlike getalbegrip het die antieke Griekse wiskundiges nie van die oppervlakte van 'n figuur gespreek nie, maar van die verhouding van twee vlakke. Die Pythagoreane het ontdek dat die diagonaal en die sy van 'n vierkant onderling onmeetbaar is — iets wat vir die Griekse meetkunde steeds 'n struikelblok gebly het, omdat die begrip „irrasionale getal” nooit deel van die ou Grieke se wiskunde was nie.

Die „uitputtingsmetode” wat deur Eudoxos ontwikkel is, het dit onnodig gemaak om die bestaan van oneindig klein groothede te veronderstel; dit is voldoende as ons 'n willekeurig klein grootheid deur die volgehoue verdeling van 'n gegewe grootheid kan bereik. Hierdie uitputtingsmetode lê ten grondslag van vergelykbaarheid en is as sodanig ook vir verhouding van belang.

Vir Euclides was verhouding nie 'n getal in die abstrakte rekenkundige sin nie; die behandeling van die irrasionale in sy „Elemente”

is heeltemal meetkundig. Euclides het verbasend baie aandag aan die rede of verhouding geskenk, veral in die vyfde boek van die „Elemente”. Dit word voortgesit in die sesde tot negende boeke. Vir hom was 'n getal die verhouding tussen een grootheid en 'n ander; die getalbegrip was dus eintlik 'n verhoudingsbegrip.

Gedurende die tweede helfte van die sestiende eeu het die werke van Archimedes weer groot belangstelling gewek. Die Arabiese algebra het in Italië besondere aandag geniet, en binne 'n kort tydsbestek het irrasionale, negatiewe en imaginêre getalle hul verskyning gemaak. Hierdeur was die uitbreiding van die getalbegrip tot meer as net 'n verhoudingsbegrip 'n voldonge feit.

Wanneer ons die „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica” van Newton bestudeer, dan bemerk ons dat hy in sy ontwikkeling van die differensiaalrekening toevlug neem tot die metode van die eerste en laaste verhoudinge:

„Indien ek dus in die vervolg groothede beskou as bestaande uit deeltjies, of krom lyntjies as reguit, dan wil ek daaronder geen indivisibilia verstaan nie, maar steeds verdwynende divisibilia, geen somme en verhoudings van bepaalde dele nie, maar die limiete van somme en verhoudings...”.

Reeds uit hierdie beknopte oorsig is dit duidelik dat die verhoudingsbegrip in die geskiedenis van die wiskunde 'n besondere en 'n baie belangrike plek beklee het.

Bertrand Russell het heelwat interessante beskouings oor breuke en verhoudings: 'n Verhouding is die betrekking tussen heel getalle, terwyl 'n breuk die betrekking is tussen versamelinge of liewer hul deelbaarheidsgroothede. 'n Verhouding is 'n betrekking; daarom is 'n verhouding nie 'n getal nie; die verhouding van 2 tot 1, byvoorbeeld, is heeltemal iets anders as 2.

So bring die verhoudingsbegrip ons intiem in aanraking met die denke self. Volgens Meumann is die sien van betrekkings die sine qua non vir intelligensie. In sy ondersoek oor die oordeel probeer Marbe die betrekking tussen inhouds bepaal. Volgens Sassenfeld bestaan die tweede laag van die denke uit die verhoudings van die aanskoulike, om in die derde laag dan die vorming van begrippe moontlik te maak. Vir Duncker is produktiewe denke die skepping van 'n sinvolle verband uit lêe betrekkings of verhoudings. Insig en „relatie-besef” is dieselfde. Vir Wertheimer is produktiewe probleemoplossing afhanklik van die verstaan van die strukturele en funksionele, die innerlike betrekkings.

Rekenkundig: Indien 'n persoon die betrekking tussen twee getalle kan sien, beskik hy oor 'n verhoudingsbegrip.

Denke: Kan iemand die innerlike betrekkings in 'n probleem raaksien, dan beskik hy oor 'n *nodige* voorwaarde vir die oplossing daarvan. Ons kan dus verwag dat 'n persoon se verhoudingsbegrip 'n aanduiding sal wees van sy vermoë om enige probleem, waar betrekkingsinsig belangrik is, op te los.

Hierdie gevolgtrekking is van groot belang vir die aansluitingsvraagstuk tussen rekenkunde in die laer skool en wiskunde in die middelbare skool. Hier is dit nie soveel die rekenvaardigheid wat van belang is nie, as die verhoudingsbegrip. 'n Leerling met 'n goeie verhoudingsbegrip behoort goed te vaar in wiskunde. Beskik hy egter nie daaroor nie, dan sal hy in die vak minder gelukkig wees, al is hy ook hoe vaardig met syferbewerkinge.

Graag verwys ek in hierdie verband na die artikel van dr. Turkstra in die Februarie-aflerwing van Euclides. Die toets Rekenen II op bladsy 167 gaan om die insien van betrekkings, terwyl die toets Rekenen I, op bladsy 166 meer met gewone rekenvaardigheid te doen het. Op bladsy 171 kom Turkstra tot die gevolgtrekking dat die „redactieopgaven” (Rekenen II) 'n beter toets is vir toekomstige wiskundige bekwaamheid as die toets vir vaardigheid met syfers. Dit klop dus met die teorie van die verhoudingsbegrip soos kortliks hierbo geskets.

Nieteenstaande veelvuldige misbruike in die verlede, veral met die sg. „denksomme” bly die verhoudings tog die belangrikste deel van die rekenkunde. Verhouding moet die sentrale begrip wees van ons rekenkunde-onderwys en ook van die aanvangsonderwys in algebra en meetkunde, d.w.s. van die hele wiskunde in die aanvangsklasse van die middelbare skool. Dit gee nie alleen 'n goeie aansluiting met die laerskoolrekenkunde nie, maar is 'n goeie fondament vir die funksiebegrip wat naas verhouding ook verandering op die voorgrond stel.

Hierdie opmerkings sinspeel veral op toestande in Suid-Afrika. Tog is die verhoudingsbegrip so universeel dat dit seker ook die moeite sal loon om in 'n Nederlandse tydskrif heel beskeie die aandag daarop te vestig.

HET BISSECTRIXLOODVLAK

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

In de schoolwiskunde wordt van de beide volgende meetkundige plaatsen:

a. de meetkundige plaats van de rechten door P, die gelijke hoeken maken met l en m ,

b. de meetkundige plaats van de rechten door P, die gelijke hoeken maken met α en β ,
gewoonlijk alleen de eerste behandeld.

Wil men beide behandelen, dan kan dat op de volgende eenvoudige manier geschieden. We beginnen met de tweede meetkundige plaats en kiezen daarbij P op de snijlijn van α en β . In fig. 1 is x een willekeurige rechte door P, $AB \perp \alpha$ en $AC \perp \beta$. Nu is

$$\angle P_1 = \angle P_2 \gtrless \triangle PAB \cong \triangle PAC \gtrless AB = AC \gtrless x \text{ ligt in het bissectrixvlak van een hoek } (\alpha, \beta).$$

De tweede meetkundige plaats bestaat dus uit twee waaiers in de bissectrixvlakken van de hoeken tussen α en β .

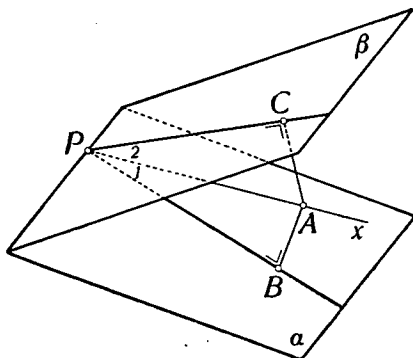


Fig. 1

Trek nu door P de rechten $l \perp \alpha$ en $m \perp \beta$. Omdat

$$\angle (x, l) = \angle (x, m) \gtrless \angle (x, \alpha) = \angle (x, \beta),$$

is de gevonden meetkundige plaats tevens die van de rechten door P, die gelijke hoeken maken met l en m .

EUCLIDES ALS LERAAR

In Oud-Hellas hebben de sophisten (omstreeks 400 v. Chr.) zich verdienstelijk gemaakt voor de volksontwikkeling. Zij hebben de bezoldiging voor het geven van onderwijs ingevoerd. De grote denkers en wetenschappelijke leiders gaven hun lessen en voordrachten namelijk zonder betaling te vragen: het werd als een soort ontwijding gezien de wetenschap te verlagen tot een bron van inkomen. Door het invoeren van een honorarium werd het nu ook voor niet-gefortuneerde Grieken mogelijk zich met wetenschappelijk werk bezig te houden; wat tengevolge had dat voor een groter aantal belangstellenden de mogelijkheid tot ontwikkeling aanwezig was. De wiskundige Hippias uit Elis ($\pm$ 400 v. Chr.) ging met de nieuwe richting mee: gaf in verschillende plaatsen betaalde voordrachten. Maar de „new look” vond niet algemeen ingang; sommigen vreesden van dit soort professionalisme een verlaging van het culturele peil; misschien is het ook daarom, dat Hippias in de dialogen van Plato minder gunstig getekend wordt. Voor de nieuwe richting voelde ook niet de meetkundige Euclides ($\pm$ 300 v. Chr. in Alexandrië): hield zich meer aan de oude opvatting „ars artis gratia wetenschap alleen terwille van de wetenschap”; dit zal ten minste wel de strekking zijn van de anecdote, die Stobaeus¹⁾ ons meedeelt:

Iemand, die bij Eukleides de meetkunde-studie was begonnen, vroeg hem, toen hij de eerste stelling had geleerd: wat word ik er beter van door deze dingen te leren?

Eukleides riep zijn slaaf en zei: geef hem een drieoboolstuk²⁾, want hij moet wat verdienen met zijn studie.

Dr. C. J. Vooy's

¹⁾ Stobaeus Ecl. II 228,25 Wachsmuth 1884.

Παρ' Εὐκλείδῃ τις, ἀρξάμενος γεωμετρῆν, ὡς τὸ πρῶτον θεώρημα ἔμαθεν, ἤρετο τὸν Εὐκλείδην· τί δέ μοι πλέον ἔσται ταῦτα μαθόντι; καὶ ὁ Εὐκλείδης τὸν παῖδα καλέσας δός, ἔφη, αὐτῷ τριώβολον, ἐπειδὴ δεῖ αὐτῷ ἐξ ὧν μαθάνει κερδαίνειν.

²⁾ 1 obool = 8 cent.

BOEKBESPREKING

E. J. F. Primrose M.A., *Plane Algebraic Curves* (Oxon); London, Macmillan & Co. Ltd.

Dit boekje van totaal 110 pagina's geeft een elementaire inleiding in de theorie van de vlakke algebraïsche krommen.

De stof is in een achttal hoofdstukken ingedeeld: I. Krommen in het reële Euclidische vlak; II. Rationale krommen; III. De vergelijking van de kromme in lijncoördinaten (dus de klassevergelijking); IV. Kwadratische transformaties; V. De snijpunten van 2 algebraïsche krommen (hierbij wordt het theorema van Bézout behandeld); VI. De vergelijkingen van Plücker (die de relaties aangeven tussen de graad, de klasse, de aantallen dubbelpunten, keerpunten, dubbele raaklijnen en buigraaklijnen van een vlakke algebraïsche kromme); VII. Krommen van de derde graad; VIII. Het geslacht van een kromme.

De behandeling is over het algemeen duidelijk; het boekje ontleent zijn waarde vooral aan de ruime verzameling voorbeelden, geschikt oefenmateriaal, waarmee elk hoofdstuk afgesloten wordt. De uitwerkingen volgen aan het eind van het gehele boek. Verder bevat het verwijzingen naar verder voerende literatuur. De prijs van het goedverzorgde werk bedraagt 15 shilling.

J. F. Hufferman.

H. G. A. Verkaart, *Gids voor het examen wiskunde l.o.*; 7e druk, bewerkt door H. Herreilers. 159 blz. Uitg. Noordhoff, Groningen. 1957. Prijs f 6.90, geb. f 8.25.

Men vindt in dit boek de schriftelijke opgaven van het examen wiskunde l.o. van 1940 t/m 1956, met antwoorden en aanwijzingen voor de oplossing aan het eind van het boek; verder vragen naar aanleiding van mondelinge examens in elk der onderdelen algebra, planimetrie, gonio- en trigonometrie, stereometrie, voor ieder onderdeel 250.

Het geheel geeft een degelijke voorbereiding op het genoemde examen.

D. N. van der Neut.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Kraneweg 71 te Groningen.

ORIËNTERENDE CURSUS STATISTIEK

Op maandagavond om de veertien dagen, te beginnen 7 oktober 20.00 uur (tot ongeveer 21.45 uur), wordt in het Casino te Geleen-Lutterade een oriënterende cursus over statistiek gegeven, voornamelijk bedoeld voor leraren. Cursusgeld f 10.—, inclusief syllabus. Men geeft zich op vóór 15 september 1957 door overmaken van het cursusgeld op postrekening nr. 462890 van het Mathematisch Centrum te Amsterdam onder vermelding „Cursus statistiek Sittard”.



Aan de Academie Minerva (afd. H.T.S.) wordt gevraagd een

leraar wis- en natuurkunde of wiskunde en mechanica

(bevoegd: dr(s) wis- en natuurkunde, of Delfts ingenieur: c.i., w.i., s.i., e.i., of n.i.) 27 lessen per week. Salaris f 755,— tot f 1147,—, afhankelijk van diensttijd en leeftijd. Verdere inlichtingen bij de directeur, Petr. Driessenstraat 3, Groningen. Volledige sollicitaties binnen 10 dagen na het verschijnen van dit blad aan burg. en weth.

Zo juist verschenen:

GIDS voor het examen WISKUNDE L.O.

door H. G. A. VERKAART

7de druk, bewerkt door H. Herreilers

Bevat o.a. schriftelijke opgaven 1940—1956 — mondelinge examenvragen algebra, planimetrie, gonio- en trigonometrie en stereometrie — antwoorden en aanwijzingen bij de schriftelijke opgaven.

Prijs, ingenaaid f 6,90; geb. f 8,25

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

NOORDHOFF'S AANTEKENBOEKJE

Naamlijst van de leerlingen

Ingericht voor 36 leerlingen, voor het aantekenen van cijfers, met voldoende ruimte voor een heel jaar.

Prima schrijfpapier. Gebonden in kunstleer.

12de druk

Uitgave A - met 13 lijsten f 1,25

Uitgave B - met 21 lijsten f 1,50

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar

Zo juist verschenen:

**NOORDHOFF's
LOGARITMENTAFEL**

in 4 decimalen
met Rentetafels
in 8 decimalen
21ste druk
Gebonden f 1,90

C. J. ALDERS

DRIEHOEKSMETING

voor M.O. en V.H.O.

21ste, ongewijzigde druk

f 1,90, gebonden f 2,75

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar

Verschenen: deel III van

Langzaam omhoog

Een meetkundeboek voor scholen met beperkt wiskunde-programma

door C. F. FREDERIK † en A. VAN OS

Deze uitgave is een op verzoek van de heer P. Wijdenes geheel vrij bewerkte 18de druk van diens „Meetkunde voor Mulo”.

Het derde deeltje geeft de z.g. B-stof. Het is naast elke andere methode als slotstukje te gebruiken.

Prijs f 3,90, geb. f 4,75

Deeltje 1 en 2 bevatten de stof voor Mulo-A.

Prijs deeltje 1 f 3,90, geb. f 4,65; deeltje 2 f 3,75
geb. f 4,50

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar