EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

32E JAARGANG 1956/57
X — 15 JULI 1957

INHOUD

ERVEN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN-DJAKARTA

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang ƒ 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs ƒ 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (ƒ 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en ƒ 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

AXIOMATIEK

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

1. Volgens het Wimecos-programma dient het onderwijs in de planimetrie aan te vangen met een intuïtieve inleiding. De term „axioma" verdwijnt daarmee automatisch uit het planimetrie-onderwijs, tenzij men over wil gaan tot een, m.i. ongewenst, tweerondensysteem. In verband hiermee vermeldt het programma bij de aanvang van de stereometrie „axioma's en grondbegrippen". Er wordt hier dus expliciet gewezen op de mogelijkheid rijpere leerlingen het wezenlijke van de mathematische (axiomatische) denkwijze bij te brengen. De vraag is op welke wijze dit zou kunnen geschieden.[1])

Er is echter nog een andere reden, die er mij toe gebracht heeft iets over axiomatiek te schrijven. Prof. Dr. A. Heyting heeft toegezegd in een volgend nummer een artikel te publiceren over intuïtionistische wiskunde. Het leek mij niet ongewenst in verband hiermee iets nader in te gaan op de klassieke axiomatisch-formalistische fundering van de wiskunde. De verschilpunten met de intuïtionistische denkwijze zullen dan misschien gemakkelijker begrepen worden.

2. Dat wiskunde een deducerende (d.i. bewijzende) wetenschap is, mag wel als bekend aangenomen worden. Moeilijker is echter onder woorden te brengen, wat deduceren precies betekent. Aan de hand van voorbeelden wil ik trachten dit duidelijk te maken.

Een bekend voorbeeld van een deductie is het volgende:

Alle mensen zijn sterfelijk
Socrates is een mens
dus: Socrates is sterfelijk.

[1]) Persoonlijk ben ik op enigszins andere wijze met dit probleem in aanraking gekomen. Bij het onderwijs in de geschiedenis van de wiskunde aan de A-leerlingen van het gymnasium gebruik ik het boek van Dr. L. N. H. Bunt c.s., Van Ahmes tot Euclides. Dit boek eindigt met een bespreking van het eerste boek van de Elementen van Euclides inclusief kritiek op de daarin gevolgde methode. Dit betrekkelijk negatieve slot van een behandeling van de oorsprong en methode van de wiskunde deed bij mij de wens opkomen iets te vertellen over de wijze, waarop tegenwoordig de lacunes in de Euclidische methode worden vermeden. Na twee vergeefse pogingen gedaan te hebben de leerlingen hiervan iets duidelijk te maken, ben ik tot de onderstaande methode gekomen, die m.i. wel begrijpelijk is.

Onderstel, dat dit gezegd wordt tegen een Engelsman, die de Nederlandse taal onvoldoende beheerst en niet op de hoogte is van de betekenis van het woord „sterfelijk". Voor deze Engelsman zal het bovenstaande de volgende inhoud hebben:

Alle mensen zijn ....
Socrates is een mens
dus: Socrates is .....

Hij neemt waar, dat op de plaats van de stippeltjes een of ander voor hem niet te begrijpen woord geuit wordt en wel beide keren hetzelfde woord. Zal onze Engelsman nu nog in staat zijn de juistheid van de conclusie in te zien? Zonder twijfel wel. Voor de verificatie van de juistheid van de conclusie is kennis van de betekenis van het woord „sterfelijk" overbodig. We kunnen zelfs verder gaan. Als onze Engelsman een nog summierdere kennis van onze taal heeft, is het denkbaar, dat hij ook de betekenis van het woord „mens" niet kent en ten gevolge van de uitspraak „Socrates" niet als een eigennaam herkent. Het schema wordt voor hem dan:

Alle — — — — zijn ....
— . — . — . — is een — — — —
dus: — . — . — . — is .....

Als deze imaginaire Engelsman intelligent genoeg is, zal hij ook nu nog de juistheid van de conclusie kunnen inzien. Of, in minder denkbeeldige bewoordingen: voor de verificatie van de juistheid van de conclusie is het niet noodzakelijk de betekenis van de woorden „mens", „sterfelijk" en „Socrates" te kennen. Wel is een conditio sine qua non, dat de betekenis van de resterende woorden begrepen wordt. Deze woorden hebben echter geen betrekking meer op de aard van het object, waarop de uitspraken betrokken zijn, maar zijn z.g. logische termen.

Van belang is er in dit verband op te wijzen, dat ook de volgende conclusie juist is:

Alle koeien zijn viervoeters
Socrates is een koe
dus: Socrates is een viervoeter.

Onze Engelsman is hier belangrijk in het voordeel, als hij niet begrijpt, wat koeien, viervoeters en Socrates zijn. Een Nederlander is altijd nog even geneigd om met enige wrevel op te merken, dat dit niet klopt, omdat Socrates geen viervoeter is. Het is er mij echter geenszins om begonnen Socrates dit predikaat aan te wrijven. Het enige, wat namelijk beweerd wordt, is, dat als het waar is, dat alle koeien viervoeters zijn (hetgeen klopt), en het ook waar is, dat Socrates een koe is (hetgeen niet klopt), Socrates dan ook een viervoeter moet zijn. En hoewel dit laatste niet het geval is, kan niet ontkend worden, dat uit de eerste twee beweringen de laatste volgt. Een mathemaat zou zelfs de neiging kunnen vertonen op deze manier uit het ongerijmde te bewijzen, dat Socrates geen koe is.

Nog kort een tweede voorbeeld. Onderstel de trein van Arnhem naar Amsterdam gaat volgens de dienstregeling om 13.00 uur. Onderstel verder, dat ik op een keer omstreeks 13 uur het perron op kom rennen en ontdek, dat de bewuste trein al weg is. Dan kan ik de volgende conclusie trekken:

Als het voor 13.00 is, dan is de trein naar A. niet weg
De trein naar A. is weg
dus: Het is niet voor 13.00.

Willen we de juistheid van de conclusie verifiëren, dan moeten we weer alles, waarvan de betekenis irrelevant is, uit de formulering verwijderen. Gebruiken we daartoe onze stippeltjes en streepjes, dan krijgen we:

Als — — — —, dan niet . . . .
. . . .
dus: Niet — — — — .

Het doet er dus niets toe, of ik op de klok kan kijken, of ik weet wat een trein is, enz. Zonder al deze kennis kan ik, alleen afgaande op de structuur van de drie oordelen en met begrip van de logische termen „als . . . dan" en „niet", de juistheid van de conclusie verifiëren. Zelfs ziet men, dat hetgeen in de aanhef van dit voorbeeld gezegd is, eigenlijk doelloos was. Ook als de trein naar Amsterdam helemaal niet om 13.00 gaat, als ik het perron niet kom oprennen, de trein er wel staat en het zes uur 's morgens is, is de conclusie juist. De conclusie (waarmee ik het drietal beweringen in hun onderlinge samenhang bedoel) is namelijk juist, onafhankelijk van de feitelijke omstandigheden en alleen op grond van de structuur van de beweringen.

We begrijpen nu, wat deduceren is. *Deduceren is aantonen, dat bepaalde oordelen waar zijn, indien een of meer andere oordelen waar zijn. Dit aantonen moet zodanig geschieden, dat geen gebruik gemaakt wordt van de betekenis van de objecten, waarop de oordelen betrokken zijn.*

3. Welke consequenties heeft dit inzicht in het wezen van de deductie voor de wiskunde en in het bijzonder voor de meetkunde? De objecten, waarop onze planimetrische oordelen in de schoolmeetkunde betrokken zijn, zijn punten, rechte lijnen, lijnstukken, halve rechten, cirkels, e.d. Als we een meetkundige stelling bewijzen, moeten we dus doen, alsof we niet weten, wat een punt, een rechte lijn, een cirkel, enz. is. Een wiskundeleraar zal dit uiteraard zijn leerlingen nimmer voorhouden, maar zal wel iets anders zeggen, dat op hetzelfde neerkomt. Hij zal zijn leerlingen namelijk verbieden „van de figuur gebruik te maken". De betekenis van dit verbod wordt door de voorgaande analyse van deduceren gepreciseerd. Het ongeluk wil echter, dat dezelfde wiskundeleraar, die dit verbod uitvaardigt, het dagelijks moet overtreden en lijdzaam moet toezien, dat ook zijn leerlingen dit doen. Zodra het echter te erg wordt, grijpt hij in en komt weer met zijn verbod te voorschijn. In vele gevallen realiseren we onszelf niet of nauwelijks, dat we in overtreding zijn. Dit is echter b.v. reeds het geval, als we

een punt op een zijde van een driehoek kiezen, dat niet met een uiteinde samenvalt (is er zo'n punt?),

beweren, dat twee punten een rechte lijn in drie delen verdelen en een cirkel in twee delen (bogen),

beweren, dat een buitenbissectrix van een driehoek de overstaande zijde niet snijdt en dat een binnenbissectrix de overstaande zijde wel snijdt,

beweren, dat er punten zijn, die een gegeven afstand tot een gegeven punt hebben, en dat de meetkundige plaats van deze punten een kromme is, die door elke rechte door het gegeven punt in twee punten gesneden wordt,

beweren, dat een rechte lijn en een cirkel de eigenschap hebben het vlak in twee delen te verdelen,

iets vertellen over congruentie van driehoeken,

beweren, dat alle gestrekte hoeken even groot zijn en dat dus alle graden even groot zijn.

Al deze beweringen zijn gemakkelijk te staven, als we maar weten, wat een punt, een rechte lijn, een lijnstuk, een cirkel is. Maar als het officieel strikt verboden is te tonen, dat men hier enig benul van heeft, dan ziet het er lelijk voor ons uit. Hieruit blijkt wel, dat zuiver deductief meetkunde-onderwijs een didactische onmogelijkheid is. Zelfs moet het verwarrend werken op de beginnende leerling, als de docent het deductieve standpunt openlijk gaat aannemen, voordat hij het ook maar bij benadering kan handhaven. Een intuïtieve inleiding, minstens tot en met de congruentie van driehoeken, is dus gewenst. Dit alles neemt niet weg, dat het verhelderend moet zijn na het einde van de leergang in planimetrie erop te wijzen, hoe we de meetkunde eigenlijk hadden moeten opbouwen en hoever we van dat ideaal verwijderd zijn gebleven. Bij de opbouw van de stereometrie zal de leerling dan zien, dat we, als we de planimetrie met zijn gebrekkige fundering aanvaarden, verder slechts betrekkelijk weinig behoeven te zondigen.

4. Hoe moet de meetkunde dus eigenlijk gefundeerd worden? Het is duidelijk, gezien onze omschrijving van deduceren, dat we langs deductieve weg nooit tot de geldigheid van oordelen kunnen komen, als we er niet van uitgaan, dat we bepaalde oordelen zonder meer als juist aanvaarden. Deze oordelen, waarvan we de juistheid zonder bewijs aanvaarden, noemen we *axioma's*. Verder is duidelijk, dat we bij het definiëren van begrippen en relaties uit moeten gaan van enige begrippen en relaties, die we niet definiëren en waartoe we toch alle andere door middel van definities terugbrengen. Deze begrippen en relaties noemen we de *grondbegrippen* en *grondrelaties*. Deze grondbegrippen en grondrelaties zullen voor het eerst alleen in een axioma kunnen voorkomen. Zou immers een grondbegrip of een grondrelatie de allereerste keer, dat het in het meetkundige systeem voorkwam, in een stelling voorkomen, dan zou het onmogelijk zijn deze stelling te bewijzen.

Uitgangspunt van de meetkunde moet dus zijn een aantal axioma's, waarin de grondbegrippen en de grondrelaties voorkomen. Er zijn verschillende mogelijkheden om de grondbegrippen en -relaties en de axioma's van de euclidische planimetrie te kiezen. Een volkomen strenge axiomatische fundering is voor het eerst gegeven door Hilbert in zijn Grundlagen der Geometrie (1899). Hij kiest als grondbegrippen punt en rechte lijn en als grondrelaties ligt op, tussen en congruent. Een 15-tal axioma's blijken dan nodig voor het geven van een strenge basis aan de planimetrie. Het behandelen van de Hilbertse opbouw van de planimetrie zou veel te tijdrovend zijn [1]). Om de leerlingen toch een inzicht te geven in de afleiding van een systeem uit een stel axioma's, verdient het aanbeveling een eenvoudig voorbeeld te construeren.

5. We gaan uit van:
Grondbegrippen. Punt, lijn.
Grondrelatie. Gaat door.

[1]) Ik heb dit wel eens geprobeerd in de vierde klasse van het gymnasium. Het bleek, dat men in de aanvang veel weerstanden moet overwinnen; daarna lukt het wel de leerlingen te doen inzien, waar het om gaat.

Axioma's.

A1. Door twee punten gaat een lijn.

A2. Door twee punten gaat niet meer dan één lijn.[1])

A3. Als de lijn l niet door het punt P gaat, dan is er een lijn, die door P gaat en evenwijdig aan l is.

A4. Er is niet meer dan één lijn, die door een punt P gaat en evenwijdig aan een lijn l is.

A5. Er zijn drie punten A, B en C, die de eigenschap hebben, dat er geen lijn is, die door A, B en C gaat.

In de axioma's komen behalve logische termen (die dus geen specifiek meetkundige betekenis hebben) alleen voor de begrippen punt en lijn en de relaties gaat door en is evenwijdig aan. De laatste relatie is geen grondrelatie en moet dus gedefinieerd worden.

Definitie. De lijn l is evenwijdig aan de lijn m betekent: er is geen punt, waar l en m beide door gaan.

Verder definiëren we nog:

Definitie. De lijn l snijdt de lijn m betekent: er is een punt, waar l en m beide door gaan.

We zullen nu een serie stellingen uit de axioma's afleiden.

Stelling 1. Er zijn minstens drie lijnen.

Bewijs. Kies drie punten A, B en C, die de eigenschap hebben, dat er geen lijn bestaat, die door alle drie gaat. Dit kan volgens A5.

Door B en C gaat een lijn l, door C en A een lijn m en door A en B een lijn n (A1).

De lijnen l en m zijn verschillend, omdat de lijn l anders door A, B en C zou gaan, in strijd met de gemaakte onderstelling. Evenzo zijn de lijnen m en n en de lijnen n en l verschillend.

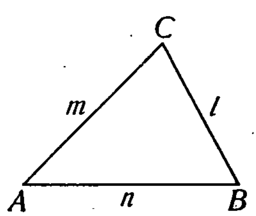

Fig. 1

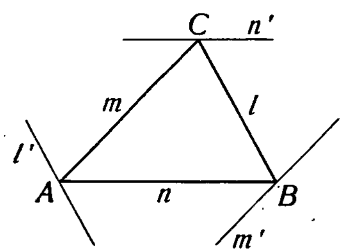

Fig. 2

Stelling 2. Er zijn minstens zes lijnen.

Bewijs. A, B, C, l, m en n hebben dezelfde betekenis als in het bewijs van stelling 1.

[1]) Met twee punten, twee lijnen, enz. zijn steeds verschillende punten resp. lijnen bedoeld.

Er is een lijn l', die door A gaat en evenwijdig is aan l (A3). De lijnen l' en l zijn verschillend, want l' gaat door A en l niet. De lijnen l' en m zijn verschillend, want m gaat door C en l' niet (omdat l door C gaat en l' evenwijdig aan l is). Evenzo zijn l' en n verschillend.

Er is een lijn m', die door B gaat en evenwijdig is aan m, en een lijn n', die door C gaat en evenwijdig is aan n.

De lijnen l' en m' zijn verschillend, want m' gaat door B en l' niet (omdat l door B gaat en l' evenwijdig is aan l).

Zo voortgaande bewijzen we, dat de lijnen l, m, n, l', m' en n' alle zes verschillend zijn.

Stelling 3. Er zijn minstens vier punten.

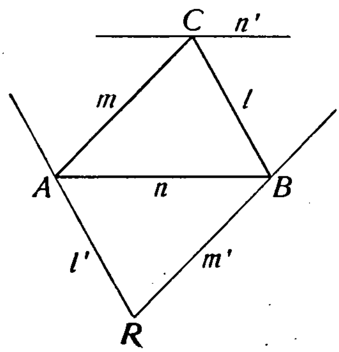

Fig. 3

Bewijs. We bewijzen eerst, dat de lijnen l' en m' elkaar snijden. De lijn m' gaat door B en de lijn l eveneens. De lijn l is evenwijdig aan l'. Door B gaat niet meer dan één lijn, die evenwijdig aan l' is (A4). Dus is m' niet evenwijdig aan l'. En dus snijden l' en m' elkaar.

Noem het punt, waar l' en m' beide door gaan, R. We bewijzen nu, dat R verschilt van A, B en C. R en A zijn verschillend, omdat m door A en m' door R gaat en m' evenwijdig is aan m. Evenzo bewijzen we, dat R en B verschillend zijn en dat R en C verschillend zijn.

Opmerking. Op dezelfde manier bewijzen we, dat er een punt P is, waar m' en n' beide door gaan, en een punt Q, waar n' en l' beide door gaan. We hebben nu de neiging te menen, dat hiermee bewezen is, dat er zes punten zijn. Dit is niet juist. Er is namelijk nog niet bewezen, dat de punten P, Q en R verschillend zijn, en het is ook niet mogelijk dit uit de axioma's A1—5 af te leiden. (Zie onder 6.) We voegen daarom nog een zesde axioma toe, dat inhoudt, dat deze drie punten verschillend zijn.

Axioma.

A6. Als A, B en C drie punten zijn, die de eigenschap hebben, dat er geen lijn is, die door A, B en C gaat, als verder l door B en C, m door C en A, n door A en B gaat, l' door A gaat en evenwijdig is aan l, m' door B gaat en evenwijdig is aan m, n' door C gaat en evenwijdig is aan n, l' en m' beide door R, m' en n' door P en n' en l' door Q gaan, dan zijn P, Q en R verschillend.

Uit A6 en stelling 3 volgt onmiddellijk:

Stelling 4. Er zijn minstens zes punten.

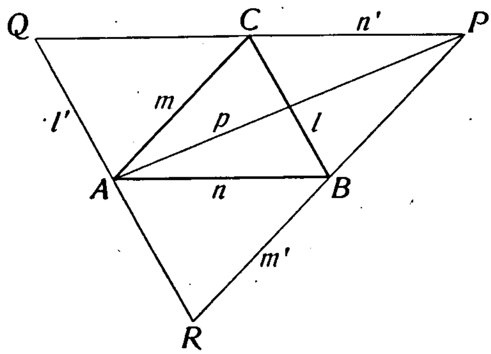

Fig. 4

Stelling 5. Door A gaan minstens vier lijnen.

Bewijs. Er is een lijn p, die door A en P gaat (A1). We bewijzen, dat deze lijn verschilt van de drie lijnen, waarvan we al weten, dat ze door A gaan, nl. l', m en n.

De lijnen p en m zijn verschillend, omdat p door P gaat en m niet (want m' gaat door P en m is evenwijdig aan m'). Evenzo zijn p en n verschillend.

Als p dezelfde lijn was als l', dan zou l' door P gaan. Omdat l'en m' dan beide door P en R zouden gaan, zou l' dezelfde lijn zijn als m' (A2). Dit is niet het geval (stelling 2). Dus zijn p en l' verschillend.

Stelling 6. Door elk punt gaan minstens vier lijnen.

Bewijs. Onderstel, dat S een punt is, waar geen van de vier lijnen l', m, n en p door gaan. Dan gaan door S lijnen, die resp. evenwijdig aan l', m, n en p zijn (A3). Deze zijn verschillend, hetgeen gemakkelijk met behulp van A4 te bewijzen is.

Onderstel, dat een van de vier lijnen, b.v. l', door S gaat, maar dat S van A verschilt. Dan gaan geen twee van deze lijnen door S (A2). Door S gaan nu lijnen, die resp. evenwijdig aan m, n en p zijn (A3). Deze drie lijnen zijn verschillend (A4) en verschillend van l' (omdat l' de drie lijnen m, n en p snijdt).

Als S hetzelfde punt is als A, volgt de juistheid van de bewering direct uit stelling 5.

Stelling 7. Elke lijn gaat door minstens drie punten.

Bewijs. Onderstel, dat s een lijn is, die niet door A gaat. Van de vier lijnen l', m, n en p snijden er dan minstens drie de lijn s (A4). Onderstel, dat b.v. m en s beide door D, n en s beide door E en p en s beide door F gaan. Dan zijn D, E en F verschillend (A2).

Het bewijs is analoog, als s niet door B of niet door C gaat. Omdat het onmogelijk is, dat s door A, B en C gaat (wegens de keuze van deze punten conform A5), is hiermee het bewijs algemeen geleverd.

We vermelden verder nog zonder op de bewijzen in te gaan, dat er een lijn q is, die door B en Q gaat, en een lijn r, die door C en R gaat, en dat de zo verkregen negen lijnen l, m, n, l', m', n', p, q en r alle verschillend zijn. Bovendien snijden de lijnen p en l elkaar en eveneens de lijnen m en q, n en r. De „snijpunten" noemen we resp. K, L en M. De negen punten A, B, C, P, Q, R, K, L en M zijn dan alle verschillend.[1])

De vraag doet zich nu voor, of we zo onbegrensd verder kunnen gaan en kunnen aantonen, dat er onbegrensd veel punten en lijnen zijn. Voordat we deze vraag beantwoorden, willen we eerst een stap terug doen in de ontwikkeling van ons stelsel en ons afvragen, waarom A6 niet met behulp van A1—5 te bewijzen was.

[1]) Dat axiomatische beschouwingen bij het middelbaar onderwijs in het buitenland wel eens belangstelling ondervinden, blijkt uit de volgende opgave, die gesteld is op een „Los Angelos City College Mathematics Prize Competition" en bestemd was voor leerlingen van de high school.

„De volgende axioma's, samen met de niet gedefinieerde begrippen „punt" en „lijn", bepalen een soort meetkunde, die wezenlijk verschilt van de euclidische vlakke meetkunde.

1. Er bestaat ten minste één punt.
2. Niet alle lijnen gaan door hetzelfde punt.
3. Twee verschillende lijnen hebben ten hoogste één punt gemeen.
4. Er gaan precies drie lijnen door elk punt.
5. Voor elke lijn l en elk punt P, dat niet op l gelegen is, bestaat er één en niet meer dan één lijn l', die door P gaat en geen punt met l gemeen heeft.
6. Voor elk punt P en elke lijn l, die niet door P gaat, bestaat er één en niet meer dan één punt P′, dat op l gelegen is en de eigenschap heeft, dat er geen lijn is, die door P en P′ gaat.

Gevraagd met behulp van deze axioma's te bewijzen:

A. Er bestaat ten minste één lijn.
B. Niet alle punten liggen op dezelfde lijn.
C. Elke lijn gaat door precies drie punten."

Overgenomen uit Mathematica & Paedagogica 9 (1955—'56), p. 83—84.

In ons land zou dit eerder een aardige opgave voor leraren dan voor leerlingen betekenen.

6. We hebben bij de voorgaande bewijzen vier figuren getekend. Dit schijnt een flagrante schending in te houden van onze voorschriften omtrent deduceren; we moesten immers doen, alsof we niet weten, wat de termen „punt", „lijn" en „gaat door" betekenen. En het tekenen van een figuur houdt in, dat we stiekum of misschien wel openhartig aan deze termen een bepaalde betekenis gehecht hebben en dat deze betekenis ons voor ogen gestaan heeft. Essentieel is echter niet, dat we een figuur tekenen, maar of we deze figuur gebruiken, d.w.z. of we bij het trekken van conclusies ons op eigenschappen van deze figuur beroepen.

Dit is niet geschied. In de tekst is nergens naar de figuur verwezen; de bewijzen vormen evenzeer een sluitend betoog, als er geen figuren bij getekend worden. De figuren waren wel gemakkelijk, omdat ze de feiten, die bewezen waren, als het ware catalogiseerden. Maar het was een vreemd soort catalogus: alles wat gevonden was, was in de catalogus aan te treffen, maar vond men iets in de catalogus, dan moest men zich toch eerst argwanend afvragen, of het inderdaad wel gevonden was. Vergeet men dit laatste, dan overschrijdt men de grenzen van het deduceren.

Uit de vorm, waarin we onze „catalogus" gegoten hebben, blijkt, dat we bepaalde bijgedachten gehad hebben bij de termen „punt", „lijn" en „gaat door". Het is duidelijk welke; bij „lijn" hebben we gedacht aan een rechte lijn, terwijl de gebruikte term eigenlijk niet tracht deze betekenis te suggereren. Nu we ons zelf deze bijgedachten eenmaal toegestaan hebben, wordt het tijd de zin daarvan op het spoor te komen. Het is ons gebleken, dat we, als we bij de term „punt" aan een punt, bij de term „lijn" aan een rechte lijn denken en aan „gaat door" de gebruikelijke betekenis geven, geen ongelukken veroorzaken. Dat wil zeggen, dat onze zes axioma's voor deze door ons gedachte punten en rechte lijnen juist blijken te zijn. Dan zullen dus ook alle beweringen, die eruit gededuceerd kunnen worden, voor deze punten en rechte lijnen geldig zijn. Onze axioma's stellen ons dus in staat eigenschappen van deze door ons gedachte punten en rechte lijnen op te sporen. We zeggen dan ook wel, dat het samenstel van deze punten en rechte lijnen een *model* voor de axioma's vormt.

We hadden net zo goed kunnen proberen aan iets anders te denken. We hadden b.v. „punt" en „gaat door" op de gebruikelijke manier kunnen interpreteren, maar bij „lijn" aan een cirkel kunnen denken. En dan was het subiet misgegaan; bij A2 waren al ongelukken gebeurd. Of we hadden bij punt kunnen denken aan een punt, bij lijn aan een rechte lijn door een vast punt A of een cirkel door dit punt A, waarbij we bij deze cirkel nog een restrictie moeten maken: het punt A zelf telt als punt van de cirkel namelijk niet mee. Deze cirkels zijn dus normale cirkels met een gat erin. Rechte lijnen of cirkels, die niet door A gaan, tellen niet mee. En ten overvloede zij nog meegedeeld, dat de rechte lijnen geen gat hebben bij A. De axioma's blijken nu keurig te kloppen. (Dit is eenvoudig te verifiëren; men moet er alleen even aan denken, dat evenwijdige lijnen nu cirkels zijn, die elkaar in A raken of een rechte lijn en een cirkel, die elkaar in A raken. Twee rechte lijnen door A snijden elkaar in A, omdat alleen voor hen het punt A een punt is, waar ze door gaan. We hebben hier dus weer een model gekregen voor onze axioma's, dat door boze tongen wel eens pathologisch genoemd wordt. Waarmee alleen bedoeld wordt, dat de persoon, die aan dit model denkt, aan iets gedacht heeft, waar de meeste mensen niet aan denken, en dan nog wel hardop. Maar mathematisch gezien, heeft de maker van het laatste model evenveel recht het eerste model pathologisch te noemen. Is het in het dagelijkse leven ook niet vaak zo? Maar, pathologisch of niet, de stellingen, die uit de axioma's gededuceerd kunnen worden, zijn ook voor dit model van kracht.

Nu we ingezien hebben, dat een model voor het axiomastelsel op verschillende manieren tot stand kan komen, willen we het nog eens op een andere en nu zeer huiselijke manier proberen. We nemen een stel knopen en wat touwtjes. De knopen bevestigen we op de een of andere manier aan de touwtjes. Bij „punt" denken we aan een knoop, bij „lijn" aan een touwtje en bij „een lijn gaat door een punt" denken we daaraan, dat de betreffende knoop aan het betreffende touwtje vastgemaakt is. We rangschikken onze knopen en touwtjes niet zo maar willekeurig, maar nemen vier knopen en zes touwtjes en maken de knopen aan de touwtjes vast op een manier, zoals in fig. 5 is weergegeven.

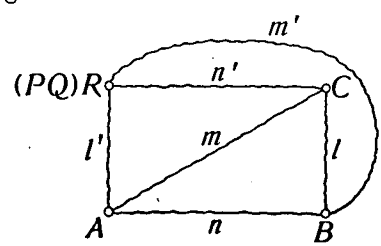

Fig. 5

Voor het gemak hebben we de knopen en de touwtjes namen gegeven. De knopen zijn A, B, C en R gedoopt en de touwtjes *l*, *m*, *n*, *l'*, *m'* en *n'*. Deze namen zijn zo gekozen, dat ze overeenstemmen met de namen, die we aan de punten en lijnen gegeven hebben in fig. 1—3. Hierdoor wordt het vergemakkelijkt te verifiëren, dat ons stel knopen en touwtjes inderdaad een model is voor de axioma's A1—5. Alles, wat uit deze axioma's deduceerbaar is, moet dus voor ons model ook opgaan.

Laten we nu nog eens onderzoeken, of ons model ook aan A6 voldoet. Wil dit het geval zijn, dan moeten de touwtjes l' en m' samen aan dezelfde knoop vastzitten. Dit klopt, deze knoop is knoop R. Bovendien moeten m' en n' samen aan een knoop P vastzitten en n' en l' aan een knoop Q en moeten deze drie knopen P, Q en R drie verschillende knopen zijn. Dit is in ons voorbeeld niet het geval; de touwtjes l', m' en n' zitten alle drie aan knoop R vast. Ons model is dus wel een model voor A1—5, maar niet voor A1—6. We zeiden reeds, dat alles, wat uit A1—5 deduceerbaar is, voor het model moet opgaan. Verder zagen we, dat A6 niet voor het model opgaat. En zo hebben we met behulp van een stel huiselijke hulpmiddelen aangetoond, dat het onmogelijk is A6 uit A1—5 te deduceren.

We kunnen, om goed te doen uitkomen, dat het volkomen onverschillig is, waaraan we denken als we het over „punten" en „lijnen" hebben, ook andersoortige modellen van A1—5 maken.

a. Een directeur van een trambedrijf wenst het overstappen overbodig te maken. Daarom wenst hij, dat elke twee tramhaltes door een tramlijn verbonden zijn. Bovendien acht hij het niet efficiënt, dat twee tramhaltes door meer dan één tramlijn verbonden zijn; dit verbiedt hij dus. Verder wil hij zijn tramnet zo inrichten, dat, als een tramhalte P niet aan een bepaalde tramlijn, b.v. lijn 4, ligt, er precies één tramlijn is, die langs halte P gaat en met lijn 4 geen enkele halte gemeen heeft. Ik weet werkelijk niet, welke overwegingen de directeur hiertoe hebben genoopt, maar hij wil het nu eenmaal zo. En om de triviale oplossing, dat er slechts één tramlijn zou zijn, onmogelijk te maken, stellen we nog vast, dat er in elk geval drie tramhaltes zijn, die niet aan dezelfde tramlijn liggen. Ziehier weer een model van A1—5. Er is geen enkele reden dit model pathologisch te noemen, al zou ik er geen bezwaar tegen maken dit predikaat aan de directeur te verlenen.

b. Een fabrieksdirecteur heeft een nieuw systeem bedacht om arbeiders aan bazen onder te ordenen. In hun vrije tijd moeten arbeiders toch iets te roddelen hebben; hij zorgt er daarom voor, dat elk paar arbeiders een gemeenschappelijke baas heeft. Maar het roddelen moet binnen de perken blijven en dus mag een paar arbeiders niet meer dan één gemeenschappelijke baas hebben. Als b.v.

arbeider Jansen baas Pieterse niet als baas boven zich heeft, dan heeft hij precies één baas, die geen enkele arbeider onder zich heeft, die ook onder baas Pieterse werkt. En om te voorkomen, dat men vermoedt, dat in deze fabriek slechts één baas werkt, die alle arbeiders onder zich heeft (hetgeen in feite de enige praktische oplossing van dit probleem zou zijn), voegen we er nog aan toe, dat er in de fabriek in elk geval drie arbeiders werken, die niet met zijn drieën onder één baas werken. Ik ben bang, dat de wiskunde door dit voorbeeld meer gebaat is dan de industrie, maar, hoe het ook zij, het is in elk geval een goed model voor A1—5. En het verhindert ons toch wel volkomen aan iets te denken, wat ook maar in de verste verte op een punt of een lijn lijkt.

c. Iemand wil knikkers gaan kleuren. Hij wil dit zo doen, dat elk paar knikkers een gemeenschappelijke kleur heeft, maar niet meer dan één gemeenschappelijke kleur. Ik vermoed, dat het niet nodig is meer te zeggen. Ieder kan zelf wel invullen, aan welke eisen onze schilder moet voldoen om de knikkers met hun kleuren tot een model van A1—5 te maken.

7. Ik wil nu trachten een model voor A1—6 te gaan maken. Naar believen kunnen we hiervoor punten en lijnen, knopen en touwtjes, tramhaltes en tramlijnen, arbeiders en bazen of knikkers en kleuren gebruiken. Ik zal mij maar met de knopen en touwtjes behelpen. We nemen 9 knopen en 12 touwtjes. De knopen bevestigen we aan de touwtjes op een manier, zoals weergegeven in fig. 6. Voor de duidelijkheid hebben we de touwtjes op vier verschillende manieren in de figuur aangegeven, door getrokken lijnen, door stippellijnen, door gestreepte lijnen en door streep-stip lijnen. Kleuren zouden duidelijker zijn, maar duurder. We zien nu, dat de drie „getrokken" touwtjes geen enkele knoop gemeen hebben en dus „evenwijdig" zijn. Hetzelfde geldt voor de drie „gestippelde" touwtjes, de drie „gestreepte" touwtjes en de drie „streep-stip" touwtjes. De touwtjes en de knopen hebben we weer namen gegeven, die overeenkomen met de namen, die we vroeger aan de punten en lijnen gegeven hebben. Gemakkelijk is nu te verifiëren, dat dit model aan de axioma's A1—6 voldoet.

Het enige nieuwe in deze figuur zijn de touwtjes l'', m'' en n''. Uit A1—6 volgt namelijk niet, dat de punten M, L en P op één lijn moeten liggen. Er volgt echter evenmin uit, dat ze niet op één lijn liggen [1].

[1] Dat uit de axioma's niet afgeleid kan worden, dat er een lijn gaat door M, L en P, volgt daaruit, dat de euclidische planimetrie een model is, dat aan A1—6 voldoet. En in de euclidische planimetrie gaat er geen rechte lijn door deze drie punten.

Als we van A1—6 een model maken, kunnen we dit naar believen zo inrichten, dat M, L en P wel of niet op één lijn liggen. We hebben hier de eerste mogelijkheid gekozen en een touwtje aangebracht,

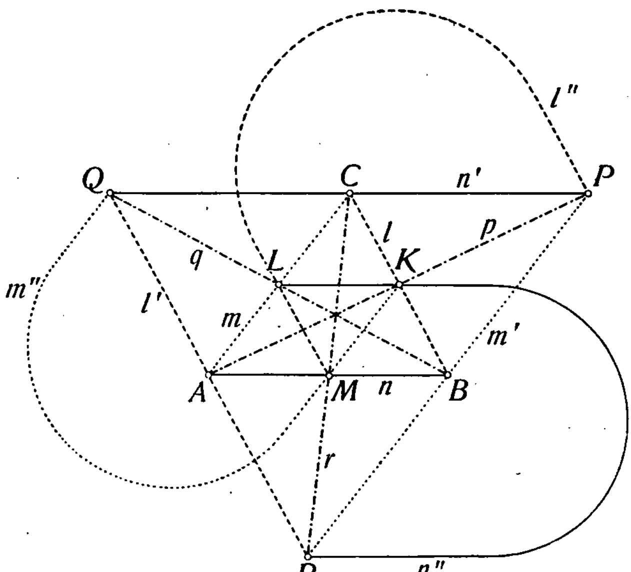

Fig. 6

waaraan de knopen M, L en P bevestigd zijn. Hetzelfde hebben we gedaan met K, M en Q en met L, K en R. Verder zijn *p*, *q* en *r*, tegen de verwachting in, „evenwijdig" geworden. We zien dus, dat we met behulp van 9 knopen en 12 touwtjes een model van het stelsel A1—6 kunnen maken. Hieruit volgt, dat we onmogelijk uit A1—6 zouden kunnen afleiden, dat er meer dan 9 punten en meer dan 12 lijnen zijn. Ons axiomastelsel is dus stellig nog niet toereikend om de euclidische planimetrie op te bouwen.

Hier willen we het bij laten. Wat men hiervan al of niet aan leerlingen zou willen vertellen, is een kwestie van persoonlijke smaak en geaardheid. Ook als men slechts een deel ervan meedeelt, is het toch gewenst zelf het geheel helder voor ogen te hebben. Men kan dan aan de omstandigheden overlaten, waar men de grens zal trekken.

8. Hier had ik gevoeglijk het artikel kunnen afsluiten, als ik mij niet tevens als doel had gesteld de lezer op het artikel van Prof. Heyting voor te bereiden.

Onder 2 zijn enige conclusieschema's ter sprake gebracht. In deze schema's zijn met stippeltjes of streepjes de termen aangegeven, waarvan de betekenis voor de verificatie van de juistheid van de conclusie irrelevant was. Deze stippeltjes resp. streepjes kunnen dus door (binnen zekere grenzen) willekeurige objecten, begrippen, eigenschappen of oordelen vervangen worden, of anders gezegd, het zijn variabelen. Nu zijn we in de wiskunde en ook in de logica gewoon variabelen door letters voor te stellen. Doen we dit, dan worden onze schema's:

	Alle A zijn B
	C is een A
dus:	C is B,

resp.

	Als P, dan niet Q
	Q
dus:	Niet P.

In het eerste schema moeten we voor A een begrip, voor B een eigenschap, voor C een object invullen en in het tweede schema voor P en Q oordelen.

Hieronder volgen nog enkele schema's van het tweede type:

	P of Q
	Niet P
dus:	Q,
	Als P, dan Q
	P
dus:	P en Q.

Het schema van het eerste type laten we voorlopig buiten beschouwing om onze aandacht alleen te concentreren op die schema's, waarin de variabelen oordelen voorstellen. We zien, dat in deze schema's bepaalde logische termen voorkomen, t.w. „als . . . dan", „en", „of", „niet". Van dit soort schema's zouden we er onbeperkt veel kunnen ontwerpen. Hoe kunnen we verifiëren, welke schema's toelaatbaar zijn voor het trekken van conclusies? We zouden ons daarbij kunnen beroepen op ons intuïtief begrijpen van de betekenis van deze logische termen. Voor een mathematicus, die erin geslaagd is om met zorg de planimetrie op te bouwen zonder officieel begrip te hebben van de betekenis van de gebruikte mathematische termen, is er echter een andere weg, die hem meer aanlokt. De vraag naar de betekenis van de begrippen punten rechte lijn heeft hij omzeild door een axiomastelsel op te bouwen en de deductieve methode te volgen, die de vraag naar deze betekenis overbodig maakt.

Zou het nu niet mogelijk zijn een systeem op te stellen, waarin de toelaatbare conclusieschema's met „als ... dan", „en", „of", „niet" opgespoord worden, zonder dat de betekenis van deze termen officieel in dit systeem een rol speelt? Dit blijkt inderdaad mogelijk. We gaan dan b.v. als volgt te werk [1]).

Allereerst vervangen we de vier genoemde termen door symbolen (hetgeen niet essentieel is, maar het overzicht bevordert). De symbolen zijn:

$P \rightarrow Q$	voor als P, dan Q,
$P \& Q$	voor P en Q,
$P \vee Q$	voor P of Q,
$\overline{P}$	voor niet P.

Van deze vier logische termen leiden we er twee door definities uit de andere twee af. De definities zijn:

Definitie: $P \& Q =_{df} \overline{\overline{P} \vee \overline{Q}}$

$P \rightarrow Q =_{df} \overline{P} \vee Q.$

Letten we op de ons vertrouwde betekenis, dan wil dit dus zeggen, dat $P \& Q$ betekent, dat P en Q niet een van beide (of allebei) fout zijn, en dat $P \rightarrow Q$ betekent, dat P fout of Q juist is. (Inderdaad kunnen we „als P, dan Q" alleen maar weerleggen door een voorbeeld te geven, waarin P juist en Q fout is. Is „als P, dan Q" niet weerlegbaar en dus juist, dan moet dus P fout of Q juist zijn.)

De *ongedefinieerde grondsymbolen* van ons systeem zijn $\vee$ (of) en $\overline{}$ (niet).

We gaan uit van vier *axioma's*, t.w.

A1. $(P \vee P) \rightarrow P$
A2. $P \rightarrow (P \vee Q)$
A3. $(P \vee Q) \rightarrow (Q \vee P)$
A4. $(P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \vee P) \rightarrow (R \vee Q))$.

Het is nu nog een volslagen mysterie, wat we met deze axioma's kunnen beginnen. Het geheel is te vergelijken met een stoommachine zonder gebruiksaanwijzing of met een stel schaakstukken zonder spelregels. Welnu de gebruiksaanwijzing wordt samengevat in twee *regels*:

R1. Als P en $P \rightarrow Q$, dan Q.
R2. Deze regel is een substitutieregel, waarvan ik de inhoud

[1]) Het hier volgende systeem is dat van Hilbert en Ackermann. Men kan het vinden in hun Grundzüge der theoretischen Logik.

maar niet in extenso zal weergeven. Hij is vergelijkbaar met de substitutieregels uit de algebra. Volgens deze regel mogen we b.v. P vervangen door $Q \vee R$, $Q \,\&\, R$, enz.

Aan de hand van een enkel voorbeeld wil ik trachten te illustreren, hoe uit de axioma's deductieregels afgeleid kunnen worden. We willen de toelaatbaarheid aantonen van het volgende conclusieschema:

	Als P, dan Q
	P of R
dus:	Q of R,

of in een formulering, die aangepast is aan de notaties van ons nieuwe systeem:

$$\text{als } P \rightarrow Q \text{ en } P \vee R, \text{ dan } Q \vee R.$$

Bewijs.

$P \vee R$	(tweede onderstelling)
$(P \vee R) \rightarrow (R \vee P)$	(A3, R2)
$R \vee P$	(R1)
$P \rightarrow Q$	(eerste onderstelling)
$(P \rightarrow Q) \rightarrow ((R \vee P) \rightarrow (R \vee Q))$	(A4)
$(R \vee P) \rightarrow (R \vee Q)$	(R1)
$R \vee Q$	(R1)
$(R \vee Q) \rightarrow (Q \vee R)$	(A3, R2)
$Q \vee R$	(R1) q.e.d.

Door een geringe uitbreiding van het aantal axioma's en regels kunnen we ook schema's van het eerste type, d.z. schema's, waarin de variabelen begrippen, eigenschappen of objecten voorstellen en logische termen voorkomen als „alle", „er is een" of „is een", afleiden.

Hoe deze afleidingen in zijn werk gaan, zal ik hier niet uiteenzetten. Degene, die hiervoor belangstelling heeft, kan het beste een inleidend werkje over logistiek raadplegen [1]). Waar het ons hier om gaat, is alleen het volgende. Iemand, die b.v. de meetkunde axiomatisch wil opbouwen, behoeft vrijwel niets meer te begrijpen. Niet alleen behoeft hij niet meer te begrijpen, wat punten en rechte lijnen zijn, hij behoeft ook niet eens meer te begrijpen, wat de logische termen betekenen. Hij mag echter niet volstrekt imbeciel

[1]) Behalve het genoemde werk van Hilbert en Ackermann is aan te bevelen: Alfred Tarski, Introduction to Logic, Oxford University Press, 1951 (er bestaat van dit boek ook een Duitse en een Nederlandse uitgave), E. W. Beth, Summulae Logicales, Noordhoff, 1942, id., Symbolische Logica, Servire 1950.

zijn, want hij moet de regels R1 en R2 en eventueel nog enkele regels kunnen lezen en begrijpen. De toepassing van deze regels is echter een mechanisch procedé. Zo leert R1 hem, dat als hij onder de formules, die hij afgeleid heeft, ergens een formule van de vorm $P \rightarrow Q$ tegenkomt en elders een formule P, hij ook de formule Q tot de afgeleide formules mag rekenen. Meer kennis van zaken is niet nodig om wiskunde te bedrijven. Wiskunde bestaat dan alleen uit het uitgaan van enkele formules (de axioma's) en het volgens bepaalde regels jongleren met de daarin voorkomende symbolen, waardoor stellingen tevoorschijn komen. Maar wat is dan het object van de wiskunde? Dat is er niet; wiskunde is niet anders dan het bovengenoemde jongleren met symbolen, waarvan de betekenis volmaakt irrelevant is.

Dat men toch nog hersens nodig heeft om wiskunde te bedrijven, komt alleen daardoor, dat men zich telkens als doel stelt een bepaalde stelling af te leiden, d.w.z. een bepaalde symbolenreeks uit de axioma's af te leiden. De controle achteraf, of het geleverde bewijs wel juist is, d.w.z. conform de regels uitgevoerd is, kan in principe door een robot geschieden.

Dit is het op zichzelf uiterst consequente standpunt van het formalisme. Tegen dit standpunt van de maximale eliminatie van de betekenis van de symbolen is door het intuïtionisme, m.i. terecht, protest aangetekend.

BENADERINGS-CONSTRUCTIES

door

G. SCHRÖDER ('s-Gravenhage)

Vele irrationele waarden (zoals $\pi \times a$, $\sqrt[3]{2} \times a$, etc.) kunnen met behulp van passer en liniaal meetkundig niet exact worden geconstrueerd; men kan daarmede slechts benaderings-constructies uitvoeren.

De volgende methode, die door samensmelting van de woorden „radical" en „calculus" zou kunnen worden aangeduid met „radicalculus", kan tot benaderingen met een uiterst kleine relatieve fout leiden. Zij is ten dele empirisch, ten dele synthetisch.

Uitgegaan wordt van de gedachte, dat *alle* vierkants-wortels meetkundig kunnen worden geconstrueerd door toepassing van de stelling van Pythagoras en de formule:

$$(\sqrt{n})^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Het gaat er nu om een vierkants-wortel op te sporen, die de te benaderen waarde zo dicht mogelijk nabij komt.

Wenst men een benadering, die eerst in de 8e decimaal afwijkt, dan blijkt, dat de kans op het vinden daarvan als nihil mag worden beschouwd.

Deze kans kan belangrijk worden vergroot door enerzijds een „schietschijf" op te stellen, voorzien van „doelwitten", die gevormd zijn uit: 1. de te benaderen waarde, 2. veelvouden daarvan, 3. breuken daarvan, anderzijds daarop „pijlen" af te schieten, gevormd door diverse vierkants-wortels en breuken daarvan. Dit „afschieten" bestaat in het vergelijken van „doelwit" en „pijl".

De trefkans neemt toe recht evenredig aan het aantal van de in de „schijf" tot „doelwitten" verwerkte getallen.

Voorziet men de schijf van een irrationeel getal (bijv. π) en

1. de veelvouden tot en met 10 daarvan,
2. de echte breuken daarvan met noemer $\leqq 20$,
3. enkele andere breuken daarvan, nl. $^3/_2$, $^5/_2$, $^7/_2$, $^9/_2$, $^4/_3$, $^5/_3$, $^7/_3$, $^8/_3$, $^{10}/_3$, $^{11}/_3$, $^5/_4$, $^7/_4$, $^9/_4$, $^{11}/_4$, $^6/_5$, $^7/_5$, $^8/_5$, $^9/_5$, $^{11}/_5$, $^7/_6$, $^{11}/_6$, $^{13}/_6$, $^8/_7$, $^9/_7$, $^{10}/_7$, $^{11}/_7$, $^{12}/_7$, $^{13}/_7$, $^9/_8$, $^{11}/_8$, $^{13}/_8$, $^{15}/_8$, $^{10}/_9$, $^{11}/_9$, $^{13}/_9$, $^{14}/_9$, $^{16}/_9$ en $^{17}/_9$, dan verkrijgt men een „schijf", die 175 trefkansen biedt aan elke daarop afgeschoten „pijl".

Op deze „schijf" worden nu als „pijlen" de vierkants-wortels van de getallen 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19 en 20, alsmede de echte breuken met noemer $\leqq 10$ van deze getallen, afgeschoten.

Dit levert een totaal op van $16 \,.\, 32 - 66 = 446$ „pijlen" [1]), die tezamen $446 \,.\, 175 = 78.050$ kansen bieden voor een „contact" met de te benaderen waarde.

Eenvoudigheidshalve wordt hierna gesproken van de schijf, de doelwitten, de pijlen en de schoten. Voorts zal bij de getallen het deel vóór het decimaalteken de caput worden genoemd, en het deel achter het decimaalteken de cauda (vgl. wijzer en mantisse bij loga-

[1]) Doordat $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ en $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, komen er onder de 16 . 32 „pijlen" enige doublures voor, zoals $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ en $\frac{1}{3}\sqrt{8}$. Daarom moet van dit aantal nog 66 afgetrokken worden.

ritmen). De capita kunnen dus uit één of meer cijfers bestaan, terwijl de caudae kunnen worden afgerond op bijv. 10 decimalen.

De doelwitten en pijlen worden *gezamenlijk* in een kaartsysteem ondergebracht; de rangschikking geschiedt uitsluitend *volgens de caudae.*

Hierdoor komen automatisch *die* doelwitten en pijlen naast elkaar in het kaartsysteem te staan, waarvan de *caudae* de geringste afwijking vertonen. Weliswaar zullen in de meeste gevallen de capita verschillen, doch dit is onbelangrijk, daar elk verschil der capita in de meetkundige constructie kan worden gecorrigeerd door, waar nodig, één of meer lijn-eenheden bij te voegen of af te trekken.

Een voorbeeld moge dit verduidelijken:

$$\begin{aligned} {}^1/_5\sqrt{3} &= 0{,}3464101615 \\ {}^3/_7\,\pi &= \underline{1{,}3463968515} \\ \text{verschil der } \textit{caudae} &= 0{,}0000133100 \end{aligned}$$

De constructie van de benadering van $\pi \times$ een gegeven lijnstuk AB verloopt nu als volgt:

Construeer $\sqrt{3} \times$ AB, deel deze lijn in 5 gelijke lijnstukken, *verleng zulk een lijnstuk met* AB (ter gelijkmaking van de capita), dan is ${}^7/_3 \times$ het aldus gevonden lijnstuk een benadering van $\pi \times$ AB. De relatieve fout bedraagt in dit geval:

$$\frac{7}{3}\cdot\frac{1}{3{,}14}\cdot\frac{1331}{10^8} \approx \frac{1}{100.000}.$$

Het aantal doelwitten op de schijf kan natuurlijk worden uitgebreid, en de hoeveelheid pijlen kan worden opgevoerd, door het aantal veelvouden en/of breuken te vergroten, doch dit gaat dan ten koste van de constructie-tekening, die hetzij veel ruimte zou gaan vragen, hetzij minder duidelijk worden door een te ver doorgevoerde maat-verdeling.

Het is niettemin interessant, dat bijv. $\sqrt{53}$ een goede benadering van $\sqrt{\pi} \times$ een gegeven lijnstuk AB aan de hand doet:

$$\begin{aligned} \sqrt{53} &= 7{,}2801098893 \\ {}^{13}/_{18}\sqrt{\pi} &= \underline{1{,}2801055590} \\ \text{verschil in } \textit{caudae} &= 0{,}0000043303 \end{aligned}$$

De benaderings-constructie van een lijnstuk, gelijk aan $\sqrt{\pi} \times$ een gegeven lijnstuk AB, geschiedt nu volgens de formule:

Benadering van $\sqrt{\pi} \times \text{AB} = {}^{18}/_{13}\,(\sqrt{53} - 6) \times \text{AB}$.

De relatieve fout hierbij bedraagt:

$$\frac{18}{13} \cdot \frac{1}{1{,}77} \cdot \frac{43303}{10^{10}} = \frac{3{,}4}{1.000.000}.$$

Een doeltreffend middel tot opvoering van het aantal pijlen is de combinatie van twee (of desgewenst meer) pijlen tot een nieuwe pijl.

Door de sommen en verschillen te vormen van de vierkants-wortels der 16 hiervoor genoemde getallen (bijv. $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, $\sqrt{5} + \sqrt{2}$, $\sqrt{5} - \sqrt{2}$, $\sqrt{5} + \sqrt{3}$, $\sqrt{5} - \sqrt{3}$, etc.) verkrijgt men $15 \,.\, 16 - 6 = 234$ nieuwe pijlen [1]).

Combineert men aldus *alle* reeds aanwezige 446 pijlen, dan krijgt men ongeveer 200.000 nieuwe pijlen, die op hun beurt voor elke te benaderen waarde ongeveer $200.000 \,.\, 175 = 35.000.000$ nieuwe trefkansen opleveren.

Na afschieting van de hiervoor genoemde 446 pijlen + de eerste groep van 234 door combinatie ontstane pijlen, dus na $680 \,.\, 175 = 119.000$ trefkansen, bleek (in het geval van een poging tot benadering van π) de kleinste afwijking tussen de caudae der doelwitten en de caudae der pijlen 0,000005 (in absolute zin) te bedragen, namelijk:

$$\begin{array}{rl} {}^6/_7\,\sqrt{6} & = 2{,}0995626367 \\ {}^7/_{20}\,\pi & = \underline{1{,}0995574287} \\ \text{verschil der } \textit{caudae} & = 0{,}0000052080 \end{array}$$

In dit geval is de relatieve fout:

$$\frac{20}{7} \cdot \frac{1}{3{,}14} \cdot \frac{5}{10^6} \approx \frac{5}{1.000.000}.$$

Tenzij het „toeval" te hulp zou komen, dienen belangrijk meer pijlen te worden afgeschoten om de relatieve fout tot bijv. 1/100.000.000 terug te dringen. Dit zou echter een langdurige taak kunnen betekenen.

De uitweg bestaat in de combinatie van twee schoten, die, *onafhankelijk van elkaar*, nagenoeg gelijke verschillen in caudae opleveren. Ook mogen deze verschillen elkaars veelvoud zijn (doch alweer, tenzij ontstaan door vermenigvuldiging met dezelfde factor van doelwit en pijl), aangezien men dan door vermenigvuldiging resp. deling der gelijkheden die caudae-verschillen grotendeels kan elimineren.

[1]) Weer komen enkele doublures voor, zoals $\sqrt{8} - \sqrt{2}$ en de reeds aanwezige pijl $\sqrt{2}$. Vandaar, dat van 15 . 16 nog 6 afgetrokken moet worden.

Door het aanleggen van een register van de uitslagen der schoten verkrijgt men een gemakkelijk overzicht ten behoeve dezer combinaties. Om redenen van praktische aard is het voldoende slechts *die* uitslagen op te nemen, waarbij het verschil in caudae voorbij de derde decimaal optreedt, dus in absolute zin minder bedraagt dan één duizendste.

Enige voorbeelden ter illustratie van combinaties:

Voorbeeld I.

(a)	$^1/_3\sqrt{5}$	$= 0{,}7453559925$
(b)	$^5/_9\,\pi$	$= 1{,}7453292519$
(a — b) = (c)	$^1/_3\sqrt{5} - {}^5/_9\,\pi$	$= 0{,}0000267406 - 1$
(d)	$^2/_5\sqrt{3}$	$= 0{,}6928203230$
(e)	$^6/_7\,\pi$	$= 2{,}6927937031$
(d — e) = (f)	$^2/_5\sqrt{3} - {}^6/_7\,\pi$	$= 0{,}0000266199 - 2$
(c — f)	$^1/_3\sqrt{5} - {}^2/_5\sqrt{3} + {}^{19}/_{63}\,\pi$	$= 0{,}0000001207 + 1$

$$\pi = {}^{63}/_{19}\left({}^2/_5\sqrt{3} - {}^1/_3\sqrt{5} + 1 + \frac{12}{10^8}\right).$$

$$\pi = {}^{63}/_{19}\,({}^2/_5\sqrt{3} - {}^1/_3\sqrt{5} + 1) + \frac{4}{10^7}.$$

Benadering van $\pi = {}^{63}/_{19}\,({}^2/_5\sqrt{3} - {}^1/_3\sqrt{5} + 1)$.

Relatieve fout $= \dfrac{1}{3{,}14}\cdot\dfrac{4}{10^7} \approx \dfrac{1\frac{1}{4}}{10.000.000}$.

Voorbeeld II.

(a)	$^7/_6\sqrt[3]{2}$	$= 1{,}4699078915$
(b)	$^5/_9\sqrt{7}$	$= 1{,}4698618395$
(a — b) = (c)	$^7/_6\sqrt[3]{2} - {}^5/_9\sqrt{7}$	$= 0{,}0000460520$
(d)	$^7/_5\sqrt{2}$	$= 1{,}9798989874$
(e)	$^{11}/_7\sqrt[3]{2}$	$= 1{,}9798759356$
(d — e) = (f)	$^7/_5\sqrt{2} - {}^{11}/_7\sqrt[3]{2}$	$= 0{,}0000230518$
2(d — e) = (g)	$^{14}/_5\sqrt{2} - {}^{22}/_7\sqrt[3]{2}$	$= 0{,}0000461036$
(g — c)	$^{14}/_5\sqrt{2} + {}^5/_9\sqrt{7} - {}^{181}/_{42}\sqrt[3]{2}$	$= 0{,}0000000516$

$$^{181}/_{42}\sqrt[3]{2} = {}^{14}/_5\sqrt{2} + {}^5/_9\sqrt{7} - \frac{516}{10^{10}}.$$

Benadering van $\sqrt[3]{2} = \frac{42}{181}\left({}^{14}/_{5}\sqrt{2} + {}^{5}/_{9}\sqrt{7}\right)$.

Relatieve fout $= \frac{42}{181} \cdot \frac{1}{1,26} \cdot \frac{516}{10^{10}} = \frac{95}{10^{10}} < \frac{1}{100.000.000}$.

(Deze formule kan dienen voor een benaderings-constructie van de verdubbeling van de kubus, het Delische probleem van Minos van Kreta.)

Voorbeeld III.

In een vorig nummer van dit tijdschrift verscheen een benaderings-constructie van $\pi \times$ een gegeven lijnstuk. Deze is gebaseerd op de volgende gegevens:

(a)	$\sqrt{7} + \sqrt{3}$	$= 4,3778021187$
(b)	${}^{8}/_{3}\pi$	$= 8,3775804096$
(a — b) = (c)	$\sqrt{7} + \sqrt{3} - {}^{8}/_{3}\pi$	$= 0,0002217081 - 4$
(d)	7π	$= 21,9911485752$
(e)	$\sqrt{10} + 2\sqrt{2}$	$= 5,9907047850$
(d — e) = (f)	$7\pi - (\sqrt{10} + 2\sqrt{2})$	$= 16,0004437902$
½ (d—e) = (g)	${}^{7}/_{2}\pi - ({}^{1}/_{2}\sqrt{10} + \sqrt{2})$	$= 8,0002218951$

(g — c) $\quad {}^{7}/_{2}\pi - {}^{1}/_{2}\sqrt{10} - \sqrt{2} - \sqrt{7} - \sqrt{3} + {}^{8}/_{3}\pi =$
$$= 8,0002218951 - 0,0002217081 + 4.$$

$${}^{37}/_{6}\pi = \sqrt{7} - \sqrt{3} - {}^{1}/_{2}\sqrt{10} - \sqrt{2} =$$
$$= 12 + 0,0000001870.$$

$${}^{37}/_{6}\pi = \sqrt{7} + \sqrt{3} + {}^{1}/_{2}\sqrt{10} + \sqrt{2} + 12 + \frac{187}{10^{9}}.$$

Benadering van $\pi = {}^{6}/_{37}(\sqrt{7} + \sqrt{3} + {}^{1}/_{2}\sqrt{10} + \sqrt{2} + 12)$.

Relatieve fout $= \frac{6}{37} \cdot \frac{1}{3,4} \cdot \frac{187}{10^{9}} = \frac{1122}{1162} \cdot \frac{1}{10^{8}} < \frac{1}{100.000.000}$.

Het in het kaartsysteem aanwezige arsenaal van pijlen kan voor de benadering van elke willekeurige irrationele waarde worden gebruikt. Men behoeft slechts een nieuwe schijf samen te stellen, waarvan de doelwitten op de te benaderen waarde zijn gebaseerd. Die doelwitten worden dan, volgens hun caudae gerangschikt, in het kaartsysteem geplaatst, waardoor de minimum-verschillen der caudae vanzelf naar voren komen. Deze kunnen dan zo nodig worden gecombineerd.

HET EINDEXAMEN MECHANICA 1957

Naar aanleiding van de opgaven voor het schriftelijk eindexamen mechanica van de h.b.s.-B is het volgende schrijven door het Bestuur van Wimecos aan de inspectie verzonden.

Zeist, 4 juni 1957

Aan het College van Inspecteurs
van het V.H.M.O.

Hoogedelgestrenge Heren,

De ervaringen opgedaan bij het werk voor mechanica op het schriftelijk eindexamen van de h.b.s.-B, de opmerkingen die van verschillende zijden het bestuur van Wimecos hebben bereikt en de actie uitgegaan van een groep Haagse leraren ter verzachting van de aanbevolen rijksnormen, brengen het Bestuur ertoe aan Uw College zijn mening over het desbetreffend examenwerk kenbaar te maken.

Het Bestuur is van oordeel, dat de hoeveelheid werk voor mechanica opgegeven zo groot is, dat de kandidaten geen voldoende tijd hebben gehad om zich in de gestelde problemen te verdiepen, zodat de betrouwbaarheid van de oplossingen als maatstaf voor kennis en inzicht van de kandidaten in het gedrang is gekomen.

Naar de mening van het Bestuur zou het de voorkeur hebben verdiend drie i.p.v. vier opgaven op te geven. Dat vele kandidaten wel in tijdnood hebben moeten verkeren, wordt waarschijnlijk gemaakt door de vorm waarin ze hun oplossingen hebben ingeleverd, maar ook door de omstandigheid dat vele leraren meer dan 50 % van de beschikbare examentijd hebben nodig gehad om de volledige oplossing van alle opgaven te vinden, daarbij nog afgezien van een in het net schrijven van de gevonden oplossingen. Het Bestuur meent hierbij te mogen wijzen op de omstandigheid, dat de auteur van de oplossingen van de mechanica-vraagstukken in het „Vaderland" er niet in is geslaagd van opgave IV een feilloze oplossing te geven, hoewel hem stellig meer tijd ter beschikking heeft gestaan dan de examen-kandidaten en hij in de gelegenheid is geweest ruggespraak te houden met zijn collega's.

Het Bestuur dringt er daarom met klem bij Uw College op aan, te willen bevorderen dat in volgende jaren de omvang van het werk voor mechanica aanzienlijk wordt beperkt. Het lofwaardig streven van de samenstellers der mechanica-opgaven om zich niet uitsluitend met cliché-typen tevreden te stellen, dient ertoe te leiden de kandidaten zoveel tijd te geven dat ze rustig over de opgaven kunnen nadenken.

Naar de mening van het Bestuur moet opgave IV van dit jaar als een mislukking worden beschouwd. Deze opgave betekende een nieuw type en was bovendien zeer gecompliceerd en bewerkelijk. Ze is van een stapelstructuur, die uit de examenopgaven dient te worden verbannen. Een kandidaat die onder *b.* en *c.* enkele consequenties over het hoofd ziet, geeft daarmee nog geen blijk van een laakbaar gebrek aan inzicht. Het Bestuur wijst erop dat het nieuwe aspect dat in het vraagstuk optreedt (ring of kraaltje aan een draad) in het merendeel der in ons land gebruikte mechanicaboeken niet wordt aangeroerd.

Voorts wordt de gecompliceerdheid van de opgave geïllustreerd door het feit dat bij de beantwoording van vraag *c.* voor het ene gebied (waarde van p hoogstens 1/10) de stand van de slinger voor de amplitude 0° de kritieke stand is, terwijl voor het andere gebied (waarde van p minstens 10) de stand van de slinger voor de amplitude 60° de kritieke stand is.

Het is volkomen begrijpelijk dat een eindexamenkandidaat niet voor alle verrassende consequenties van deze opgave in de afgemeten tijd oog heeft.

Tot slot veroorlooft het Bestuur zich nog enige detailopmerkingen t.a.v. de gestelde opgaven.

Opgave I.

Het ware beter geweest in regel 4 te schrijven: „in elk van de gevallen *a.*, *b.* en *c.*". Nu zijn er kandidaten geweest die negen gevallen hebben onderscheiden. De redactie wekte de indruk dat in elk der opgaven *a.*, *b.* en *c.* drie zinnen staan, door een puntkomma gescheiden, maar telkens met een hoofdletter beginnend.

Opgave II.

De mededeling „ook in het scharnier treedt geen wrijving op" is een overbodig gegeven, dat sommige kandidaten op een dwaalspoor heeft gebracht. Ze hebben er namelijk aanleiding in gevonden de scharnierreactie weg te laten, omdat ze toch iets wilden weglaten. In dit evenwichtsvraagstuk speelde de wrijving echter geen rol.

Het zou voorts aanbeveling hebben verdiend de zin „Construeer uitgaande van . . ." te vervangen door „Construeer zonder voorafgaande berekening uitgaande van . . .". Daardoor zou een meetkundige constructie naar aanleiding van berekende waarden zijn voorkomen.

Opgave III.

Voor de beantwoording der onder *b.* gestelde vraag ontbreekt een gegeven. Zoals nu de redactie luidt is het geenszins zeker, dat de beide punten elkaar ontmoeten. De door de Haagse leraren gegeven redactie: „Als de punten elkaar ontmoeten, bereken dan de coördinaten van het ontmoetingspunt", verdient de voorkeur boven de gegeven redactie.

Opgave IV.

Het Bestuur vraagt zich af, waarom de stellers van deze opgave, indien ze inderdaad van de kandidaten een oplossing hebben verwacht die met alle consequenties rekening houdt, niet in de opgave zelf een paar voorzichtige suggesties hebben ingelast. Zo zou de volgende rij vragen de kandidaten op meer aanvaardbare wijze voor de moeilijkheden van het probleem hebben gesteld.

. . . .

a. Bewijs dat het ringetje in evenwicht is.

. . . .

b. Bewijs dat voor $p = 1$ het ringetje niet in evenwicht is.

c. Zijn er waarden van p kleiner dan 1, waarvoor evenwicht van het ringetje mogelijk is? Zo ja, welke?

d. Zijn er waarden van p groter dan 1, waarvoor evenwicht van het ringetje mogelijk is? Zo ja, welke?

. . . .

e. Bepaal opnieuw de waarden van p, waarvoor het ringetje in evenwicht is.

Door deze opsomming springt reeds de ontoelaatbare gecompliceerdheid van deze opgave in het oog.

Ten slotte wijzen we nog op de aanvechtbaarheid van de uitdrukking: „het ringetje is in evenwicht".

Het Bestuur merkt op, dat ook al zou elk der vier opgaven bij een correcte redactie als een goede opgave mogen worden gekwalificeerd (wat t.a.v. opgave IV stellig niet het geval is), het werk in zijn geheel toch te zwaar is, doordat een eenvoudig routinevraagstuk, dat op een schoolexamen stellig op zijn plaats is, of een eenvoudige theorievraag ontbreekt. Het karakter van routinevraagstuk wordt het meest benaderd door opgave II, die in verband daarmee beter als nummer I geplaatst had kunnen worden. Opgave I wekt bij eerste lezing de indruk een routine-vraagstuk te zijn, doch is het echter niet.

Tot slot deelt het Bestuur U mede, dat een van zijn leden de bezwaren uit dit schrijven, voor zover het de zwaarte van de opgaven betreft, niet kan delen.

Hoogachtend,

(w.g.) J. F. Hufferman
secretaris Wimecos

BOEKBESPREKING

R. W. Weitzenböck, *Der vierdimensionale Raum*. Birkhäuser Verlag Basel u. Stuttgart. 1956. 223 pag. ZFr. 19.55.

De schrijver zegt in zijn voorwoord dat hij zich in dit boek ten doel stelt de meest markante gedachten over „de vierde dimensie" of beter „de vierdimensionale ruimte" uit de wetenschappelijke, halfwetenschappelijke en fantastische literatuur tot een afgerond geheel samen te stellen, en in gemakkelijk te begrijpen vorm uiteen te zetten op welke wijze de idee van een vierdimensionale ruimte de activiteit van de menselijke geest tot nu toe heeft kunnen beïnvloeden.

In het eerste en het tweede hoofdstuk geeft hij in eenvoudige vorm het wiskundig fundament.

In het derde hoofdstuk gaat het over de tijd als vierde dimensie, in welk verband de relativiteitstheorie ter sprake komt.

In het vierde hoofdstuk bespreekt de schrijver de vierdimensionale ruimte in verband met fysica, chemie en astronomie, terwijl verder in dit hoofdstuk en in het vijfde allerlei fantasieën over de vierdimensionale „wereld" worden besproken. Dit gedeelte omvat 66 pagina's, d.i. een derde deel van het tekstgedeelte van het boek.

Het werk wordt besloten met een literatuurlijst van 239 titels en een index. Er kan worden geconstateerd dat de schrijver er in is geslaagd het doel dat hij zich met dit boek heeft gesteld te bereiken.

P. Wijdenes, *Middel-Algebra*. Leerboek voor akte-studie en inleiding tot de analyse. Deel I, 6e druk. P. Noordhoff N.V. Groningen. 1957. 420 pag. *f* 17,—, geb. *f* 19,—.

Het mag overbodig genoemd worden dit bekende boek, waarvan thans de zesde druk is verschenen, uitvoerig te bespreken. Het is een betrouwbare gids voor hen, die op de basis van de middelbare-school-leerstof in de „klassieke" algebra verder willen gaan.

Prof. Dr. J. P. van Rooyen, *Het Nederlandse Bevolkingsvraagstuk*. N.V. Gebr. Zomer en Keunings Uitg. Mij. Wageningen. 1956. 188 pag. *f* 8,90.

Aangezien het onderwerp dat in dit overigens duidelijk geschreven boek wordt behandeld geen aanrakingspunten heeft met het gebied, waarop „Euclides" zich beweegt, is een integrale bespreking van dit werk in „Euclides" niet op haar plaats.

Het boek wordt hier vermeld, omdat er vele statistische gegevens in worden verwerkt: het biedt daarom de mogelijkheid kennis te nemen van de toepassing van statistische methoden bij de wetenschappelijke aanpak van een practisch — en interessant — probleem.

C. Attwood, *Practical five-figure mathematical tables*. Macmillan and Co. Ltd. London, 1953. 74 pg. 5/—.

Deze Engelse logaritmentafel wijkt op enkele punten af van de in Nederland gebruikelijke.

1. Er komen tafels in voor van „antilogaritmen" (d.w.z. voor het „terugzoeken") en van „cologaritmen" (de cologaritme van een getal is de logaritme van het omgekeerde van het getal).
2. De methode van interpolatie berust op het *gemiddelde* verschil van de getallen die op één regel voorkomen. Aan het eind van elke regel zijn de evenredige delen van dit gemiddelde verschil opgegeven. Wanneer de verschillen op één regel te zeer uiteenlopen is de regel met het oog op de interpolatie in twee gelijke delen gebroken.

T. S. Usherwood and C. J. A. Trimble, *Intermediate Mathematics (Analysis)*. Macmillan and Co. Ltd. London, 1954. 482 pag. 8/6.

Dit boek behandelt de leerstof voor algebra, trigonometrie, analytische meetkunde en infinitesimaalrekening ongeveer overeenkomend met die welke ten onzent wordt behandeld — of ter behandeling wordt voorgesteld — in de hogere klassen van de middelbare scholen.

Het boek geeft een zakelijke uiteenzetting; didaktisch commentaar ontbreekt vrijwel geheel.

D. N. van der Neut

Dr. Joh. H. Wansink, *Algebra* voor V.H.O. en M.O. Deel I. Uitgave van J. B. Wolters, Groningen-Djakarta. Ing. *f* 3,40; geb. *f* 3,90.

Dit is een werkje van eenvoudiger structuur en geringer omvang dan de „Reken- en Stelkunde" van dezelfde schrijver. Het is bewerkt in de geest van de voorstellen van de leerplan-commissie van „Wimecos" (1955). Volgens het voorbericht onderscheidt dit nieuwe leerboek wat deel I betreft zich in het volgende van de genoemde „Reken- en Stelkunde":

a. Een groot deel van de leerstof voor rekenkunde, met name die over de kenmerken van deelbaarheid, over g.g.d. en k.g.v., over talstelsels, over samengesteld evenredige afhankelijkheid, is met de verzameling vraagstukken over praktisch rekenen vervallen;

b. het hoofdstuk over merkwaardige produkten en ontbinding in factoren is van bescheiden omvang gehouden overeenkomstig de Wimecos-voorstellen.

c. het hoofdstuk over evenredigheden is opnieuw geschreven; de recht evenredige en omgekeerd evenredige getallenrijen zijn op de voorgrond geplaatst; de leerstof over gewone evenredigheden is sterk ingeperkt;

d. door vereenvoudiging van de theorie over breuken is deze leerstof voor jonge leerlingen bevattelijk gemaakt.

Het boekje is duidelijk en goed geschreven. Aardig is hoe de vermenigvuldiging van 2 negatieve getallen begrijpelijk wordt gemaakt. (Waarom niet op dezelfde wijze de aftrekking verduidelijkt?)

Een paar opmerkingen. Bij de behandeling van de negatieve getallen onderscheidt schr. „bewerkings- en toestandstekens" door de eerste met $\dot{+}$ en $\dot{-}$ aan te duiden, de tweede met + en —. Zou het gebruik van een vette letter in het eerste geval niet eenvoudiger geweest zijn?

Bij de behandeling van de vergelijkingen gebruikt schr. de notatie $ax+b \doteq cx+d$. Het is zeker gewenst erop te wijzen dat het = teken hier een andere betekenis heeft dan in $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$. Had dan niet in het laatste geval het identiteitsteken $\equiv$ en in het eerste geval het „gewone" =teken gebruikt kunnen worden? Een vraag: zijn er in de voorbeelden van §81 een paar drukfouten geslopen? In het eerste staat $+6 \doteq +6$. In het tweede staat $-b = -b$. M.i. moet het de eerste keer ook zijn $+6 = +6$.

Weer in het eerste voorbeeld: $-x = -x$; in het tweede: $-cx \doteq -cx$.

Moet het nu de tweede keer niet zijn: $-cx = -cx$?

Ook vraag ik mij af of de leerlingen de begrippen recht- en omgekeerd evenredig na de behandeling op de wijze als in dit boek geschiedt, zo duidelijk geworden zijn, dat ze deze met vrucht in de 2e klas bij de natuurkundeles kunnen hanteren. Daarom zou ik toch de voorkeur geven aan de misschien wat meer ouderwetse definitie: 2 grootheden a en b heten recht (omgekeerd) evenredig als het $n\times$ zo groot worden van a het $n\times$ $(1/n\times)$ zo groot worden van b tengevolge heeft.

Maar deze meer kritische opmerkingen verminderen mijn waardering voor het boek niet. Een degelijk boek.

J. F. Hufferman

J. Bass, *Cours de Mathématiques*; éd. Masson et Cie, Paris 1956. 916 pag. 8500 fr.

Deze „Cours" is ontstaan uit colleges aan de Ecole Normale Supérieure de l'Aéronautique en aan de E.N.S. des Mines. Wanneer we de omvang van de stof in deze Cours vergelijken met b.v. het Delftse programma voor de mijnbouwers (kleine cursus), dan krijgen we een diep respect voor de franse opleiding, voorzover het de wiskunde betreft.

De omvang van bijna duizend bladzijden zou de lezer op het eerste gezicht af kunnen schrikken, maar bij nadere kennismaking zal hij zeker de moeite willen nemen dit werk door te lezen, en voor deze moeite rijkelijk beloond worden.

Een elementaire kennis van de infinitesimaalrekening en de klassieke analytische meetkunde wordt bekend verondersteld, evenals de beginselen van de complexe getallen. Daarop voortbouwend wordt op een in de meeste gevallen van wiskundig standpunt zeer verantwoorde wijze, een overzicht gegeven van de analytische hulpmiddelen van de ingenieur. Wij vroegen ons alleen af of van het zo fundamentele en in vele varianten voorkomende begrip Riemann-integraal niet een iets bevredigender introductie, hetzij met boven en onder integralen hetzij met convergente rijen van tussensommen gegeven had kunnen worden. We vinden in dit boek, waardoor het zich onderscheidt van de andere franse „cours", zoals van Valiron of Goursat, zeer vele toepassingen op natuurkundig en technisch gebied, terwijl numerieke problemen steeds veel aandacht krijgen. Zo vinden we als toepassing van de tensorrekening, want dit boek begint volgens het „Gebot der Stunde" met een bijna 100 bladzijden tellende inleiding in de *lineaire algebra* beschouwingen over piézo-electrische verschijnselen van kristallen.

Na de lineaire algebra komt dan (*reële*) *functietheorie* van *één variabele.* Naast numerieke bizonderheden vinden we ook beschouwingen over Fourier reeksen. Bij de theorie van de lijn-integralen worden de verschillende eenvoudige mathematische instrumenten zoals *planimeters* en *integratoren* besproken.

Terloops merken we nog op dat ieder van de acht hoofdstukken wordt besloten met literatuur verwijzingen en een fraaie collectie opgaven, die de lezer oefenstof geven en vaak nog een verdere uitbouw van de theorie opleveren.

Bij de theorie van *functies van meer variabelen* wordt aandacht besteed aan de transformatie theorie. Men heeft het gevoel, dat het bij dit onderwerp mogelijk geweest zou zijn meer profijt te trekken van de inleiding in de lineaire algebra om overzichtelijker notaties te verkrijgen. Wel wordt gewezen op de mogelijkheid om uitwendige differentiaalvormen te gebruiken.

In de *complexe functietheorie* komen natuurlijk de toepassingen van de residuenrekening naar voren, en tenslotte volgen nog twee hoofdstukken (van totaal ± 175 bladzijden) over *differentiaal vergelijkingen.* Hierbij wordt natuurlijk gebruik gemaakt van de methoden van de lineaire algebra.

Het boek besluit met twee aanhangsels (over variatie-rekening en over nomogrammen), een naamlijst van een 100-tal geciteerde wiskundigen voorzien van de jaartallen van geboorte en dood en de nationaliteit en een alfabetische index.

Wij willen dit boek ieder, die kennis wil nemen van de wiskundige methoden, zoals die in de natuurkunde en techniek gebruikt worden, van harte aanbevelen. Maar ook degenen die zuiver in de wiskunde geinteresseerd zijn, zullen zeer veel waardevols er in aantreffen. Naast de bekende werken zoals b.v. van Courant (Differentiaal and Integral calculus) en Courant-Hilbert (Methoden der mathematischen Physik) neemt dit werk een geheel eigen plaats in.

F. van der Blij

OFFICIËLE MEDEDELING VAN LIWENAGEL.

Ledenvergadering op vrijdag 30 augustus 1957 om 14.30 uur
in het Eykmanhuis te Driebergen.

Agenda:

1. Opening.
2. Notulen van de vorige ledenvergadering. (Deze zijn gepubliceerd in het Weekblad no. 25 van 1 maart 1957 en in EUCLIDES no. VII van 1 april 1957.)
3. Inleiding door de heer L. DE VRIES, direkteur van de Stichting Technisch Filmcentrum, Den Haag, over: Mogelijke toepassingen van filmstrip en film bij het onderwijs in de wiskunde.
4. Bespreking van de opgaven voor wiskunde op het schriftelijk eindexamen gymnasium - B 1957 door de heer N. SLOTBOOM, Hilversum.
5. Rondvraag.
6. Sluiting.

De secretaris,
D. LEUJES.

UIT EEN BRIEF VAN 26 NOVEMBER 1956

L'Académie des Sciences,

émue par la situation très grave que créent, pour l'avenir français, la pénurie croissante d'hommes de science, d'ingénieurs, de techniciens, et la proportion insuffisante des jeunes qui se destinent à une carrière scientifique;

constatant que les diverses disciplines scientifiques ou techniques ont besoin de recruter, non seulement des éléments doués de réelles aptitudes pour les sciences abstractes, spécialement les Mathématiques, mais encore, des hommes aptes à l'observation et à l'expérimentation, émet le voeu:

1. que les concours ou examens post-secondaires soient conçus de telle sorte qu'ils permettent de satisfaire à ce double besoin, et que ne soient pas, à priori, détournés des carrières scientifiques les jeunes qui ne semblent pas spécialement doués pour les Mathématiques;

2. que l'enseignement des sciences dans les établissements secondaires se préoccupe moins de dispenser une instruction détaillée, que de faire acquérir des connaissances durables, qu'il s'efforce d'attirer les élèves vers les sciences, d'éveiller leur vocation et de leur donner une ébauche de formation, en les initiant, dès le jeune âge, à l'observation et à la méthode expérimentale par des exercices pratiques et des exemples caractéristiques; que soient rétablies, dans l'Enseignement du Deuxième Degré, des sections à prédominance scientifique effective;

3. que les initiatives visant à recruter pour l'enseignement un personnel compétent, même sans diplôme, acceptant des élèves, même sans concours, s'efforçant de donner une spécialisation suffisante, soient encouragées et fassent l'objet de réalisations rapides, en présence de l'urgence des besoins.

Signé

Louis de Broglie; R. Courrier

Dat een noodzakelijk geworden industrialisatie in Europa problemen oproept, die ten nauwste samenhangen met onderwijsproblemen, zal niemand ontkennen.

Hoe groot de zorgen in Frankrijk zijn blijkt wel uit bovenstaande brief. Dat „L'Académie des Sciences" zelfs durft te adviseren in het onderwijs „competente" docenten te betrekken zonder diploma is ongelooflijk. Hoe wil men deze competentie vaststellen? Of zou men alleen gedacht hebben: Hoe „fabriceren we voldoende machinevoer"?

W. A. M. B.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Kraneweg 71 te Groningen.

VAKANTIECURSUS 1957

Op blz. 320 van het vorige nummer werd deze cursus reeds voorlopig aangekondigd. Het programma luidt:

Maandag 26 augustus 1957:
10.30 Opening.
10.45—11.45 Prof. Dr. E. M. Bruins: Voorgriekse en Griekse meetkunde.
14.00—15.00 Prof. Dr. S. C. van Veen: Meetkunde en ervaring in de 19e eeuw.
15.30—16.30 Prof. Dr. H. Freudenthal: Het Erlanger Program.

Dinsdag 27 augustus 1957:
10.00—11.00 Prof. Dr. J. J. Seidel: Afstandsmeetkunde.
11.30—12.30 Prof. Dr. N. H. Kuiper: Differentiaalmeetkunde.
14.30—15.30 Prof. Dr. J. de Groot: Topologie.
16.00 Sluiting.

Van iedere voordracht wordt een syllabus verstrekt. Deelnemingskosten *f* 2,50, inclusief syllabus. Aanmelding vóór 1 augustus 1957 bij het Mathematisch Centrum te Amsterdam-O., 2de Boerhaavestraat 49, door storting van het cursusgeld (postrekening 462890; gem. giro Amsterdam M 2138) met vermelding „vakantiecursus 1957". De cursus wordt te Amsterdam gegeven op een nader mee te delen plaats.

AVONDCURSUSSEN WISKUNDE

Het is de bedoeling om ook weer in 1957/58 avondcursussen in de wiskunde voor afgestudeerden, speciaal voor leraren, aan de Rijks-universiteit te Utrecht te organiseren.

Belangstellenden wordt verzocht eventuele wensen ten aanzien van onderwerpen kenbaar te maken, ook mede te delen of de tijd vóór dan wel ná Kerst het meest geschikt is.

Mathematisch Instituut
der Rijksuniversiteit
Boothstraat 17, Utrecht

ADRESWIJZIGING VAN DE SECRETARIS VAN „WIMECOS"

Het adres van de secretaris van „Wimecos" is vanaf 20 juni:
Charlotte de Bourbonlaan 64, Zeist

J. F. Hufferman, secretaris