

EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

32^e JAARGANG 1956/57

IX — 1 JUNI 1957

INHOUD

Prof. Dr. G. MANNOURY, De Einstein-expres	289
Prof. Dr. A. HEYTING, Toelichting.. . . .	295
Het schriftelijk eindexamen	297
Prof. Dr. E. W. BETH, In memoriam Gerrit Mannoury	298
Boekbespreking	300
H. W. LENSTRA: Einführung in die mathematische	
Statistik door Prof. Dr. L. SMETTERER	300
Analitische meetkunde I door Prof. Dr. D. J. VAN ROOY	301
J. F. HUFFERMAN: Planimetrie voor M.O. en V.H.O.	
door C. J. ALDERS	301
Dr. J. H. WANSINK, Mathesis en Maatschappij door	
Prof. Dr. J. POPKEN	301
Dr. G. BOSTEELS, Meetkundige transformaties als in-	
tuitieve inleiding tot de hogere wiskunde	302
Kalender	320
Vakantiecursus 1957.	320
met foto van Prof. Dr. G. Mannoury	

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang f 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs f 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. H. MOOY, Monrovia;
Dr. D. N. VAN DER NEUT, Homeruslaan 35, Zeist, tel. 03404/3532;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2414;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Bakenbergseweg 158, Arnhem, tel. 08300/21960.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, s'-Gravenhage;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Delft;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.;
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (f 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en f 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender” in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

Dat is handig !

Dat is praktisch !

Noordhoff's Aanteekenboekje

NAAMLIJST DER LEERLINGEN
gebonden in kunstleren bandje.

Bij de 12de druk.

De enkele uitgave heeft 13 folio bladen van leerlingen, de dubbele 21; beide hebben bovendien een laatste bladzijde voor een beknopt overzicht van de uren, waarop de leraren lesgeven, ingericht voor een personeel van 50 man.

De naamlijst kan door ieder naar zijn eigen behoefte worden ingericht.

De directeur van een H. B. S. of Lyceum enz., het hoofd van een U. L. O. - school, zal elke bladzijde invullen met de namen der leerlingen; er is ruimte genoeg achter elke naam om aan te tekenen, wat hij wenst vast te leggen b.v. het aantal onvoldoenden, het aantal strafbriefjes en wat hij zo eens opvangt omtrent vlijt en gedrag.

Een leraar met één vak b.v. tekenen of natuurlijke historie zal voor elke klas een bladzijde gebruiken.

Een leraar met b.v. drie vakken, Rekenen, Algebra en Meetkunde in dezelfde klas (hij heeft slechts 4 klassen) knipt de 2e en 3e klasselijst weg (6 cm links) en heeft dus elke klas slechts één keer op te schrijven.

Enkele editie f 1.25

Dubbele editie - 1.50

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Ook via de boekhandel verkrijgbaar.

Ondergetekende verzoekt te zenden

rechtstreeks per post:

door bemiddeling van boekhandel:

.....
..... ex. **NOORDHOFF'S AANTEKENBOEKJE** $\frac{\text{enkel}}{\text{dubbel}}$ $f \frac{1.25}{- 1.50}$

Naam en adres :

.....

.....

DE EINSTEIN-EXPRES

Een leermiddel voor de speciale relativiteitstheorie

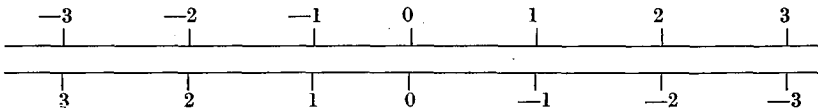
(voor de hogere klassen van H.B.S. en Gymnasium
en voor zelfstudie)

door

Prof. Dr. G. MANNOURY

I. Toelichting.

§ 1. Een zeer lange trein met genummerde treinpalen op 1 treinmijl afstands passeert met een snelheid van 1 wegmijl per treinuur een weg met genummerde wegpalen (op 1 wegmijl afstands); de trein bestaat uit wagens van 1 treinmijl lengte. Als de trein stilstaat is 1 treinmijl = 1 wegmijl, maar de nummeringen lopen in tegen-gestelde richting:



Zodra echter de trein rijdt, ontstaat er een *gezichtsbedrog*, waardoor de treinmijlen van de weg af gezien korter schijnen dan de wegmijlen en omgekeerd („verkortingsverhouding”), terwijl tevens een *tijdschattingsbedrog* ontstaat, waardoor de treinklokken (bij iedere paal op de trein en op de weg staat een wachter met een grote klok) van de weg af gezien langzamer schijnen te lopen dan de wegklokken (die verondersteld worden op volkomen dezelfde wijze te zijn gekonstrueerd) en omgekeerd („vertragingsverhouding”). Voor „aardse” snelheden zijn deze verkortingen en vertragingen niet waarneembaar, maar voor de zeer grote snelheden in de sterrenwereld heeft men deze (zij het dan niet door middel van treinen!) duidelijk kunnen waarnemen en nauwkeurig berekenen, waarbij bleek, dat beide verhoudingen steeds gelijk moeten zijn. Zo zouden voor een bepaalde snelheid (van ± 280.000 kilometer *per sekunde*) beide verhoudingen gelijk zijn aan $\frac{1}{3}$ en zouden voor de denkbeeldige trein- en wegwachters (die verondersteld worden bij het voorbijflitsen elkanders paalnummers en elkaanders klokaanwijzingen te kunnen waarnemen) de volgende dienstregelingen gelden:

$$\begin{cases} t_{mm'} = 3m + m', \\ t'_{mm'} = m + 3m', \end{cases}$$

waarbij t = wegtijd, t' = treintijd, m = wegpaalnummer m' = treinpaalnummer en $t_{mm'}$ = de wegtijd en $t'_{mm'}$ de treintijd voorstelt, als treinpaal m' wegpaal m passeert („passering” mm').

§ 2. Dat bij deze dienstregelingen de verkortings- en de vertragsverhouding beide $\frac{1}{3}$ zijn, blijkt nu uit de volgende overweging, waarbij verondersteld is, dat bij de „passering” 0;0 de treinwachter en de wegwachter hun klokken op 0 uur zetten en tevens (ieder op *zijn* wijze) zijn kollega-wachters seinen, hun klokken eveneens op 0 uur te zetten.

a. In de „wegtaal” (dat is: van de weg af gezien) is dan om 0 uur wegtijd de toestand aldus:

t' =	-24 u	-16 u	-8 u	0 u	8 u	16 u	24 u
m' =	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3
	-2	-1	0	1	2	3	4
	5	6	7	8	9		
m =	3	2	1	0	-1	-2	-3
t =	0 u	0 u	0 u	0 u	0 u	0 u	0 u

terwijl in de „treintaal” (dat is: van de trein uitgezien) om 0 uur treintijd de toestand aldus is

t' =	0 u	0 u	0 u	0 u	0 u	0 u	0 u
m' =	-3	-2	-1	0	1	2	3
	4	5	6	7	8	9	
m =	9	8	7	6	5	4	3
t =	24 u	16 u	8 u	0 u	-8 u	-16 u	-24 u

zodat in *beide* talen de verkortingsverhouding $\frac{1}{3}$ is.

b. Wat de vertragsverhouding betreft, kunnen wij ons een konflikt voorstellen tussen treinwachter $m' = 0$ (Jansen) en wegwachter $m = 3$ (Pieterse), die elkander om $t'_{3;0} = 3$ uur treintijd, dat is: om $t_{3;0} = 9$ uur wegtijd, passeren:

$t'_{3;0} = 3$ uur
$m' = 0$ (Jansen)
—
$m = 3$ (Pieterse)
$t_{3;0} = 9$ uur

Pieterse zegt dan, dat Jansen's klok 6 uur achter is en dat in de 9 uur die er (in *zijn* taal) verlopen zijn sinds de passering 0;0 Jansen's klok slechts 3 uur is voortgelopen en dus *achter* loopt met een

vertragingsverhouding $\frac{1}{3}$. Jansen echter ontkent dit en zegt (in *treintaal*): „Drie uur geleden, tijdens de passering 0;0, passeerde treinwachter $m' = -1$ (Mulder) juist uw wegpaal $m = 3$:

$$\begin{array}{c} t'_{3;-1} = 0 \text{ uur} \\ m' = -1 \text{ (Mulder)} \\ \hline \\ \hline m = 3 \text{ (Pieterse)} \\ t_{3;-1} = 8 \text{ uur} \end{array}$$

en zag in het voorbijgaan uw klok op 8 uur staan” (wat Pieterse toestemt). „Uw klok was dus toen 8 uur vóór. En nu staat uw klok op 9 uur en is dus in die 3 uur slechts 1 uur voortgelopen en loopt dus achter met de vertragingsverhouding $\frac{1}{3}$ ”.

§ 3. De konklusie moet dus zijn, dat „gelijktijdigheid” een betrekkelijk begrip is; dat wil zeggen, dat twee ongelijkplaatsige gebeurtenissen, die voor de één gelijktijdig schijnen, voor een ander ongelijktijdig kunnen zijn, evenals trouwens „gelijkplaatsigheid” een betrekkelijk begrip is, omdat twee ongelijktijdige gebeurtenissen die voor de een gelijkplaatsig schijnen, door een ander ongelijkplaatsig kunnen worden genoemd.

II. Gebruiksaanwijzing.

Het bijgevoegde model ¹⁾ stelt de dienstregelingen voor wegpост $m = 3$ (Pieterse) en voor treinpost $m' = 0$ (Jansen) voor. Die voor Pieterse krijgt men door de beide stroken voor zich te leggen met de opschriften „Dienstregeling voor wegpост $m = 3$ ” *boven* en vervolgens de smalle strook (die de *trein* voorstelt) door de staande sleuven van de brede strook (de *weg*) te steken (aan de ene kant *in* en aan de andere kant *uit*), zó, dat men de trein voorbij kan zien

¹⁾ Het bedoelde model is afgedrukt op blz. 293. Om het te kunnen gebruiken, vouwt u het blad om om de lijn AB. Door het papier tegen het licht te houden kunt u er voor zorgen, dat de grote rechthoeken met gearceerde stroken en cirkeltjes precies tegen elkaar vallen. Daarna plakt u de beide delen van het blad aan elkaar vast, eventueel na er een stuk kaartcarton (b.v. van het omslag, als u „Euclides” toch in laat binden!) tussen te hebben gelegd. Om te voorkomen, dat deze aflevering onleesbaar wordt doordat alle bladen aan elkaar vast plakken, legt u aan weerskanten van het geplakte een stuk papier, slaat het tijdschrift dicht en legt het onder een zwaar boek. Als het droog is, knipt of snijdt u langs CD de strook er af en u verwijdert de gearceerde delen uit de rechthoek, die dus aan het tijdschrift vast blijft zitten. — De heer P. Knigge te Groningen was zo vriendelijk de figuren te tekenen.

schuiven en dan telkens de bij iedere „passering” behorende tijdsaanwijzingen door de ronde openingen kan aflezen. — De dienstregeling voor Jansen krijgt men dan door de stroken los te maken en om te keren, zodat de opschriften „Dienstregeling voor de treinpost $m' = 0$ ” boven komen te liggen en vervolgens de smalle strook (die nu de *weg* voorstelt, zoals Jansen die vanuit zijn trein voorbij ziet schuiven) door de staande sleuven van de brede strook (de *trein*) te steken waarna men wederom de bij iedere „passering” behorende tijdsaanwijzingen door de ronde openingen kan aflezen.

De gebruiker kan nu gemakkelijk op dezelfde wijze modellen maken voor de dienstregelingen van andere weg- of treinposten. — Voor klasgebruik of lezingen make men het model in het groot.

Naschrift.

1. Het bovenstaande heeft enkel betrekking op de (allereerste) beginselen van de z.g. „speciale relativiteitstheorie”, waarin uitsluitend met éénparige- rechtlijnige bewegingen rekening wordt gehouden. Deze theorie werd door Albert Einstein in 1905 gepubliceerd, ofschoon het *feit* van de (schijnbare) wederzijdse *verkorting van lengteafmetingen* en *vertraging van tijds aanduidingen* (die wij gevoegelijk als „snelheidsperspektief” zouden kunnen aanduiden) reeds eerder was ontdekt. De „algemene relativiteitstheorie”, waarin ook andere bewegingsvormen worden beschouwd, is door Einstein enige jaren later uitgewerkt en heeft op de ontwikkeling van de moderne natuurkunde in de laatste halve eeuw grote invloed gehad.

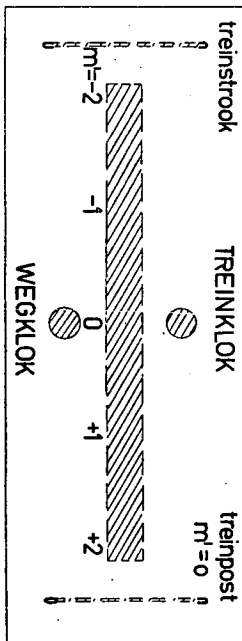
2. Voor wie nog iets naders over de speciale relativiteitstheorie mocht willen weten, zij vermeld, dat tussen de snelheid van de „Einstein-expres” en de verkortings- en vertragingsverhouding (in de natuurkunde als „Lorentzkontractie” bekend) een eenvoudige algebraïsche betrekking bestaat, namelijk:

$$L^2 + v^2 = 1,$$

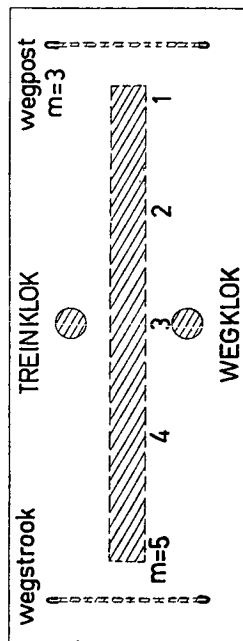
waarin L de Lorentzkontractie en v de treinsnelheid voorstelt, wanneer deze in zekere lengtematen van ± 300.000 kilometer (laten wij zeggen: in „Einsteinmijlen”) per sekunde wordt uitgedrukt. Dit geeft dan b.v. (enigszins afgerond):

voor $L = \frac{1}{2}$,	$v = 0,87$	Einst.mijl of	260.000	km	per	sekunde,
„ $L = \frac{1}{3}$,	$v = 0,94$	„ „ „	280.000	„ „ „	„ „	„
„ $L = \frac{1}{4}$,	$v = 0,97$	„ „ „	290.000	„ „ „	„ „	„

terwijl een snelheid van 1 Einsteinmijl per sekunde een Lorentzkontractie gelijk *nul* zou geven en dan ook fysisch onmogelijk bereikt of overtroffen zou kunnen worden.



		wegstrook		wegpost m=3	
		t=	t'=	t=	t'=
m=	0	+18 +15 +12 +9 +6 +3 0 -3 -6 -9 -12 -15 -18	+6 +5 +4 +3 +2 +1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6	+9 +5 +4 +3 +2 +1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6	+6 +5 +4 +3 +2 +1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6
	1				
	2				
	3				
m=	4				
	5				
	6				
	7				
m=	8				
	9				
	10				
	11				
m=	12				
	13				
	14				
	15				



TOELICHTING

door

Prof. Dr. A. HEYTING

Het bovenstaande stukje werd in de nalatenschap van Prof. Mannoury gevonden. Het leek mij, als karakteristiek voorbeeld van zijn originele didactische methode, waard gepubliceerd te worden.

Uit enige kladblaadjes blijkt, dat Mannoury de bedoeling had, in een toelichting voor de docent te laten zien, dat zijn „dienst-regelingsformules” uit de gebruikelijke vorm van de Lorentz-transformatie volgen. Nu deze toelichting nooit geschreven is, lijkt het mij nuttig, te laten zien hoe de voorstellingswijze van Mannoury samenhangt met de wijze, waarop ik 30 jaar geleden de beginselen van de speciale relativiteitstheorie eens aan een hoogste klas heb uitgelegd.

Ik begon dan natuurlijk met een verhaaltje over de proeven, waarmee men de beweging van de aarde had trachten aan te tonen, en ging iets dieper in de proef van Michelson. Daarna vermeldde ik, dat Lorentz het negatieve resultaat van die proeven had verklaard met behulp van twee hypothesen:

- I. Een bewegend lichaam wordt in de lengterichting verkort in de verhouding

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad l' = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

- II. Een bewegende klok loopt achter in de verhouding

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \quad t' = t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

(v = snelheid van de trein, c = lichtsnelheid).

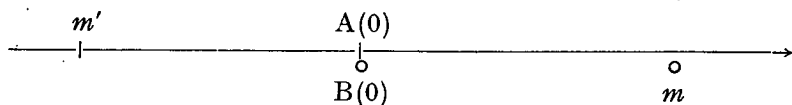
Daarna voerde ik de trein in, waarvan de conducteur A tegenover de overwegwachter B hardnekkig volhoudt, dat de trein stilstaat en de hele omgeving beweegt. Door lengtemetingen kan hij de beweging niet constateren, want zijn meetstaven zijn in dezelfde verhouding verkort als de trein. Wij gaan nu over tot de tijdmeting in de trein. Op zeker ogenblik passeert A de overweg van B; dit punt en dit moment worden door beiden als nulpunt van de weg- en tijdmeting gekozen. Om de andere klokken in de trein gelijk te laten zetten door de hulpconducteurs, gebruikt A lichtsignalen. Ten tijde $t = 0$ zendt hij een signaal uit. Op het ogenblik, dat dit de klok bereikt, die bij de treinpaal m' staat, wordt deze klok gesteld op

$t'_0 = \frac{m'}{c}$. Van het standpunt van A, die meent, dat de trein stilstaat is dit juist. Maar B ziet iets anders gebeuren. Hij redeneert zo: Het licht gaat de trein tegemoet en heeft t.o.v. de trein een snelheid $c+v$. Bovendien is de trein verkort, zodat de afgelegde weg slechts $m' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ bedraagt. Het signaal bereikt paal m' dus op de tijd

$$t_0 = \frac{m' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c + v}.$$

Dus op het ogenblik, dat klok m' de treintijd $t'_0 = \frac{m'}{c}$ aanwijst,

staat de wegklok op $t_0 = \frac{m' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{c + v}$.



In de figuur is de stand van de trein aangegeven ten tijde $t = t' = 0$. Hoe staan nu de klokken m en m' op het ogenblik, dat deze palen elkaar passeren? Laten wij ons eerst op het standpunt van B stellen. Het stuk trein van 0 tot m' is wegens de verkorting slechts

$m' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ lang. Treinpaal m' doorloopt dus een afstand

$m' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + m$, in de tijd

$$(1) \quad t_{mm'} = \frac{m + m' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{v}$$

Sinds het ogenblik t_0 is dus verlopen $t_{mm'} - t_0$. Daar klok m' achterloopt, is deze in die tijd verder gekomen: $(t_{mm'} - t_0) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$,

zodat $t'_{mm'} = t'_0 + (t_{mm'} - t_0) \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Na enige herleiding wordt dit:

$$(2) \quad t'_{mm'} = \frac{m \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + m'}{v}.$$

De formules van Mannoury verkrijgt men hieruit, door $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{1}{3}$ te kiezen, en bovendien te zorgen, dat de lengte- en tijdseenheden zo gekozen zijn, dat tegelijk $v = \frac{1}{3}$. Deze keuze der eenheden (afhankelijk van v !) ligt verborgen in het gegeven, dat de snelheid 1 wegmijl per treinuur is; dit komt neer op de voorwaarde $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = v$. Daar deze niet homogeen in de dimensie is, legt zij, bij gegeven c en v , de snelheidseenheid vast.

Uit de symmetrie van de formules (1) en (2) volgt, dat A niet van zijn ongelijk overtuigd kan worden door vergelijking van twee elkaar passerende klokken. Men kan een lange discussie tussen A en B verzinnen, waarbij B tracht, A te overtuigen, dat hij beweegt, en A zijn argumenten telkens weet te weerleggen. Zo kan A volhouden, dat B's meetstaven verkort zijn, omdat hij de beide uiteinden van een B-meetstaaf beschouwt op ogenblikken, die in treintijd gelijktijdig zijn. Bijvoorbeeld: $t'_{1m} = 0$ voor $m' = -\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Daarmee is een goede grondslag verkregen voor het begrijpen van Einstein's relativiteitsbeginsel. Ik ga hier nu niet verder op in, omdat ik slechts een toelichting bij het stukje van Mannoury wil geven.

HET SCHRIFTELIJK EINDEXAMEN

Nu de schriftelijke eindexamens weer achter de rug zijn, zij herinnerd aan het besluit van de algemene vergadering van Wimecos van 5 januari 1949, „om (natuurlijk gezonde) critiek op eindexamenvraagstukken te verzamelen en ter kennis van de Inspectie te brengen”. Opmerkingen kunnen worden ingezonden bij de secretaris, de heer J. F. Hufferman, Wilhelminalaan 19 te Zeist.

IN MEMORIAM GERRIT MANNOURY

door

E. W. BETH

Het heengaan van Dr Gerrit Mannoury, in leven hoogleraar in de wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam, op de hoge leeftijd van ruim 88 jaar, zal door de lezers van Euclides met ontroering zijn vernomen. Hoewel hij tot het einde niet alleen een zeldzame frisheid van geest maar ook een ongewone werkkraft en productiviteit had bewaard, bewoog hij zich sedert 1940 maar zelden meer in het openbaar. Juist door het samengaan van deze beide omstandigheden was hij reeds bij zijn leven een min of meer legendarische figuur geworden, wiens persoonlijkheid na zijn verscheiden in veler herinnering onverbleekt zal voortleven.

Mannoury werd op 17 mei 1867 te Wormerveer geboren en had, toen hij in 1917 het professoraat aanvaardde, al een loopbaan achter zich; hij was achtereenvolgens als onderwijzer, leraar en accountant werkzaam geweest en had in 1903 toelating verkregen als privaatsdocent voor de logische grondslagen der wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam. De opsomming van deze nogal uiteenlopende bedieningen geeft reeds een indruk van de beweeglijkheid van zijn geest. Een adaequaat beeld van de buitengewone veelzijdigheid van Mannoury geeft ze echter nog allerminst; want deze beoefende niet alleen de wiskunde, waarvan hij de grondslagen diepgaand bestudeerde, en de wijsbegeerte, maar werd tevens de eigenlijke grondlegger van de *significa*, een geheel nieuwe tak van wetenschap, waarvoor hij de gegevens, behalve in de beide reeds genoemde gebieden, moest zoeken in psychologie en sociologie. En, alsof dit alles niet genoeg was, ontplooiëde hij, als vurig voorstander van een radicaal socialisme, ook een grote activiteit op politiek gebied.

Een lange reeks van kleinere en grotere geschriften, van zeer uiteenlopende aard, verscheen in de loop der jaren van Mannoury's hand. Ik noem hier, zonder naar volledigheid te streven, het voornaamste om, zo nodig door toevoeging van een nadere omschrijving, een samenvattend overzicht te geven van Mannoury's wetenschappelijk werk.

[1903] *Over de Beteekenis der Wiskundige Logica voor de Philosophie*. Openbare Les, Rotterdam 1903. — Dit geschriftje bevat niet alleen

het programma voor Mannoury's arbeid als privaat-docent, maar ook, zij het in embryonale vorm, tal van door Mannoury later uitgewerkte ideeën.

[1909] *Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik*, Haarlem 1909. — Bevat de stof van Mannoury's colleges, die hij in meer beknopte vorm vanaf 1906 ook in een vacantie-cursus voor leraren in de wiskunde had voorgedragen. Het boek heeft nog steeds grote waarde. Lang vóór zulk een stap elders werd ondernomen, verbindt Mannoury hier het formalisme van de school van Peano met het door Mach verdedigde empirisme en positivisme.

[1917] *Over de Sociale Betekenis van de Wiskundige Denkvorm*. Rede, Groningen 1917. — Hier gaat Mannoury uitvoerig in op de significa.

[1919] *Wiskunst, Filosofie en Socialisme*, Groningen 1919. Tweede, vermeerderde uitgaaf, Groningen 1924. — Bloemlezing van kleine fragmenten uit allerlei verspreide geschriften.

[1925] *Mathesis en Mystiek*. Een significatie studie van kommunisties standpunt, Amsterdam z.j. — Geestig geschreven, maar moeilijk te volgen, uiteenzetting. Hoewel bij de Wereldbibliotheek uitgegeven voor rekening van de schrijver, verscheen het werkje later (in 1932) ook in een Franse vertaling door L. Roelandt onder de titel: *Les deux Pôles de l'Esprit*.

[1931] *Woord en Gedachte*, Groningen 1931. Eerder verschenen in *Euclides* onder de titel: Een inleiding tot de significa, inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde. — Nog steeds lezenswaardig.

[1934] Die significativen Grundlagen der Mathematik, *Erkenntnis* 4 (1934). Franse vertaling: *Les fondements psycho-linguistiques des mathématiques*, Neuchâtel-Bussum 1947. — Door deze publicatie in het orgaan der neo-positivistische wijsbegeerte kwam het contact tussen deze laatste en Mannoury's significa tot stand.

[1939] *Signifische Dialogen* (samen met L. E. J. Brouwer, Fred. van Eeden en Jac. van Ginniken S. J.), Utrecht 1939. — Verg. een reeks bijdragen in *Synthese* 2-4 (1937—39).

[1946] *Relativisme en Dialektiek*. Schema ener filosofisch-sociologische grondslagenleer, Bussum 1947.

[1947—48] *Handboek der Analytische Signifika*, I en II, Bussum 1947 en 1948.

[1949] *Signifika*. Een inleiding, den Haag 1949. — Zeer beknopt werkje.

[1953] *Polairpsychologische Begripssynthese*, Bussum 1953. — Samen met de beide delen van het eerder genoemde Handboek is dit laatste boek van Mannoury te beschouwen als zijn hoofdwerk,

dat een volledige samenvatting levert van zijn denkbeelden op het gebied van de significa.

Hoewel ik persoonlijk niet in eigenlijke zin een volgeling ben van Mannoury en ik tegen sommige van zijn denkbeelden zelfs ernstige bezwaren koester, wil ik hier toch gaarne nogmaals getuigen van mijn grote bewondering en diepe erkentelijkheid voor zijn werk dat op mij, evenals op vele anderen, een sterk stimulerende en inspirerende invloed heeft uitgeoefend en is blijven uitoefenen. Ik wil daaraan toevoegen de verzekering van mijn vaste overtuiging dat, nu achter dit werk niet langer de levende persoonlijkheid van de schrijver staat, de invloed ervan wel een ander karakter zal aannemen, maar daarom niet minder zal worden. De affectieve beaming of verwerping van Mannoury's denkbeelden zal op de duur plaats gaan maken voor een zorgvuldig afwegen van het voor en tegen, maar dat deze denkbeelden tot in de lengte van dagen telkens opnieuw zullen moeten worden doordacht lijdt voor mij geen twijfel.

Wij bezitten in Mannoury een wijsgeer van groot formaat, die later erkend zal worden als één der wegbereiders voor het denken van een tijd, die nu nog toekomst is.

De redactie dankt de heer P. Wijdenes voor het beschikbaar stellen van een cliché, waardoor aan dit nummer een foto van Prof. Mannoury kon worden toegevoegd.

BOEKBESPREKING

Prof. Dr. L. Smetterer, *Einführung in die mathematische Statistik*, Wien, Springer-Verlag, 1956, 400 pag., geb. \$ 11.65.

Een degelijk leerboek ter inleiding in de moderne statistiek. Het is bijgewerkt tot ongeveer 1954; wie het bestudeerd heeft, zal m.i. de meeste publicaties over statistiek kunnen volgen. Om het boek te kunnen bestuderen is ten naaste bij een kennis van de wiskunde vereist, die bij het kandidaatsexamen is bereikt. De schrijver stelt prijs op een exacte behandeling, wat o.a. blijkt uit het gebruik, dat hij maakt van de methode van Kolmogoroff, terwijl, wanneer het bewijs voor een bewering ontbreekt, dit ook uitdrukkelijk wordt vermeld. Voor zo ver ik heb kunnen nagaan, komt dit alleen voor in het inleidende hoofdstuk over de waarschijnlijkheidsrekening; bij de behandeling van de eigenlijke wiskundige statistiek zijn alle bewijzen volledig gegeven. Het boek laat zich prettig bestuderen en het lijkt mij geschikt voor wie straks behoorlijk „boven de stof” wil staan, die op onze scholen aan de orde zal komen.

Prof. Dr. D. J. van Rooy, *Analitiese meetkunde I*, 2de druk; Pro Rege, Potchefstroom, 1956, VIII + 238 pag; prijs niet opgegeven.

Een duidelijke en overzichtelijke inleiding, bestemd voor het eerste jaar aan de

universiteit in Zuid-Afrika. Het omvat niet veel meer dan bij ons op het gymnasium wordt behandeld.

H. W. Lenstra

C. J. Alders, *Planimetrie* voor M.O. en V.H.O. Uitgave van P. Noordhoff, Groningen-Djakarta. Ing. f 3,30; geb. f 4,25.

Dit boekje onderscheidt zich van het andere werkje „Vlakke Meetkunde” voor M.O. en V.H.O. van dezelfde schrijver doordat nu begonnen wordt met een z.g. intuïtieve inleiding. Hieraan is het gehele eerste hoofdstuk (44 paragrafen op 37 pagina's) gewijd. Hierin worden o.a. de elementaire constructies van het overbrengen van een hoek, de bisectrix enz. geleerd. Ook worden hier de 5 constructiegevallen van een driehoek besproken en aan de hand hiervan worden de congruentiegevallen bij driehoeken behandeld. Ook symmetrie en spiegeling vinden in deze inleiding een plaats.

Vanaf hoofdstuk III wordt de stof op de meer „traditionele” wijze aangeboden. De behandeling is dan zoals we die kennen uit de bovengenoemde „Vlakke Meetkunde”.

Een kritiese opmerking n.a.v. paragraaf 26, waar het gaat over de figuur van 2 evenwijdige lijnen, gesneden door een derde. M.i. komt hier onvoldoende uit dat overeenkomstige hoeken enz. *alleen* maar gelijk zijn als de 2 lijnen inderdaad evenwijdig zijn. Als de leerlingen de stellingen leren zoals ze staan geformuleerd, is het gevaar groot dat ze gaan denken dat *alle* overeenkomstige hoeken enz. gelijk zijn.

Overigens een goed werkje dat zijn weg op onze scholen voor M.O. en V.H.O. zeker zal vinden.

J. F. Hufferman

Dr. J. Popken, *Mathesis en Maatschappij*; rede 11 maart 1957, Universiteit van Amsterdam; 24 blz, f 1,25; J. B. Wolters, Groningen-Djakarta.

Het gevaar is niet denkbeeldig dat wiskundige oraties door hun vaktechnisch karakter voor sommige toehoorders moeilijk te verteren zijn en door deze toehoorders bijgevolg ook maar matig worden geapprecieerd. Van hoe geheel andere aard is de Amsterdamse oratie van Prof. Popken, die zich in een rijk gedocumenteerd betoog ook speciaal tot de niet-wiskundigen onder zijn gehoor richt.

Het werk van de mathematicus is om nieuwe wegen in de wiskunde te ontdekken, wegen die soms van beslissende betekenis zijn voor de gang van de mensheid, ook al moge dan de wiskundige zijn tijd misschien ver vooruit geweest zijn. Deze stelling wordt door pakkende voorbeelden geïllustreerd. De oratie schetst verder, hoe het tragische isolement en de impopulariteit van de wiskunde vooral in de 19de eeuw zijn gegroeid, in een periode toen vele invloedrijke buitenstaanders de wiskunde niet zelden vereenzelvigden met de totaal versteende schoolwiskunde. In de twintigste eeuw komt er een kentering; er ontstaat begrip voor de betekenis van de wiskunde in de filosofie. In de tweede industriële revolutie waarin we thans leven, wordt enthousiast en met succes gezocht naar nieuwe wegen waarop de wiskunde kan worden toegepast.

Niemand late deze oratie ongelezen.

Wansink

MEETKUNDIGE TRANSFORMATIES ALS INTUÏTIEVE INLEIDING TOT DE HOGERE WISKUNDE

door

Dr. G. BOSTEELS

(Koninklijk Atheneum, Berchem)

Voorwoord.

De tekst die hieronder volgt, werd geschreven naar aanleiding van ons referaat op het Congres van de Belgische Wiskundeleraren te Berchem.

Wij wensen hier reeds nadrukkelijk te vermelden dat de theorie der transformaties, zoals we ze behandelen, geen verplichte leerstof van onze programma's is, maar gedeeltelijk als vrijwillig tekenwerk werd gemaakt en dat de theoretische beschouwingen, met matrices, die we er aan vastknoopten tijdens de vrije uren aan vrijwilligers werden gegeven. Toch menen we er goed aan te doen onze Nederlandse collega's er aan te herinneren dat de determinanten vrij grondig behandeld worden in onze programma's en dat ook het product van twee determinanten van de derde orde aangeleerd wordt. Voor wat de meetkunde betreft zijn in het programma de homothetie, de inversie, de symmetrie, de cirkelbundels, dubbelverhoudingen, pool en poollijn, harmonische verwantschappen opgenomen.

1. De intuïtieve meetkunde bereidt onze leerlingen van de Zesde Klasse voor op de beredeneerde meetkunde.

Een der punten van haar programma is de studie van de symmetrie, die men ruimtelijk of vlak kan beschouwen, maar die in elk geval bij de jonge leerling een bewegingsidee wekt.

Wil men ver vooruitzien, dan kan men reeds van de Zesde Klasse af (eventueel slechts van in de Vijfde) de leerlingen voorbereiden op een dieper inzicht in de meetkundige transformaties.

2. De enkele beschouwingen die wij ter overweging willen geven, bestrijken een zeer grote periode van ons M. O. en wij menen in de mogelijkheid te verkeren U te laten zien dat, systematisch doorgevoerd, ons plan zelf een zeer hoge vlucht kan nemen, zo hoog dat het de weg tot het Hoger Onderwijs veilig openstelt en vooral bij de leerling enthousiasme tot verdere studie wekt.

Ik wil er echter van bij dit begin de nadruk op leggen dat we helemaal niet wensen dat deze zaken op het programma zouden opge-

nomen worden en nog veel minder dat wij de misplaatste pretentie zouden koesteren dat wij iets voorbrengen dat volkomen nieuw zou zijn. Veeleer menen wij dat tijdens ontspanningsuurtjes aan „vrijwilligers” dergelijk studiemateriaal zou voorgelegd worden.

3. Hoe zijn onze gedachten over dit onderwerp gegroeid?

De kiemen er van werden op congressen gelegd. Een eerste aanleiding vonden wij bij het aanschouwen van zeer realistisch materiaal dat door een Frans leraar T.O. werd samengesteld. Op een congres te Sèvres, zowat vier jaar geleden, zagen we een reeks mooie realisaties van de heer Biguenet, die zo vriendelijk was dit materiaal ook op onze tentoonstelling te brengen.

Een tweede aanleiding was nogmaals een congres te Sèvres, waar door enkele vooraanstaande Franse wiskundigen werd aangetoond dat ook de meer moderne theorieën stilaan bestaansrecht in ons M. O. moeten verkrijgen.

Zo kwam het dat ik in februari jl. het plan opvatte om ook op onze school te experimenteren. Ik ben niet de enige die zich aan 't werk gezet heeft. Ik denk hierbij o. m. aan onze collega M. Soens, die op briljante wijze te Gent, op het Mac Leod Congres van augustus zijn werkplan uiteenzette, werkplan dat U kunt lezen in nr. 7 van ons tijdschrift.

4. Veel van onze leerlingen kennen bij het einde van de humaniora de drie klassieke bewegingen: symmetrie, translatie en rotatie. Maar hoevelen hebben een idee van wat er gebeurt als er meerdere bewegingen (van dezelfde of van verschillende soort) achtereenvolgens toegepast worden? Hoeveel leerlingen hebben ooit horen spreken over een produkt van transformaties?

Onze leerlingen kennen de bewerkingen met getallen en kennen de commutatieve eigenschap. Niet-commutatieve eigenschappen schrikken hen af.

Is het geen bekend feit dat onze eerste-jaars-studenten aan de Universiteit veel last hebben met begrippen als transformatie, dubbelpunt van een transformatie, om niet te spreken van een operator?

5. Wat wil ons werkplan dan zijn?

In de eerste plaats willen we een coördinatie zien tot stand komen met het tekenen.

Zesde Klasse: de leerlingen tekenen een eenvoudige figuur — liefst een concave vijfhoek — en spiegelen deze figuur ten opzichte van

een as, daarna ten opzichte van een punt. De gespiegelde figuur wordt daarna uit bristol-papier gesneden en de leerlingen onderzoeken of de gespiegelde figuren rechtstreeks of tegengesteld congruent zijn met de oorspronkelijke figuur. Als tweede toepassing tekenen ze het spiegelbeeld van een figuur F_0 ten opzichte van een as $x'x$, en daarna het spiegelbeeld van de verkregen figuur F_1 ten opzichte van een tweede as $y'y$, die loodrecht op de eerste staat. Men vraagt hen dan te onderzoeken hoe men rechtstreeks van de figuur F_0 op de figuur F_2 kan overgaan (eventueel kan men suggereren dat het snijpunt der twee assen een rol zal spelen).

Wie de zaak nog verder wil doordrijven kan nog andere eenvoudige produktfiguren van spiegelingen laten tekenen en onderzoeken.

Voelt men dat de leerlingen zich interesseren aan deze tekeningen, dan zal men niet aarzelen ze nog enkele transformatiefiguren te laten tekenen, uitgaande van een hoofdfiguur, die men best asymmetrisch kiest.

Wat zo iets kan opleveren heeft U in de tentoonstelling kunnen zien.

Vijfde Klasse: eventueel kan men het daareven geschetste programma maar in de vijfde klasse inzetten. Voor een vijfde kan men uit een gegeven figuur een tweede figuur door translatie laten tekenen. Men tekene eveneens de produktfiguur van twee translaties, waarbij men een mooi aanknopingspunt kan vinden met de mechanica uit de natuurkunde: men kan inderdaad vrij gemakkelijk laten zien dat de translatievector van de overgang van F_0 op F_2 niets anders is dan de resultante van de translatievectoren der overgangen van F_0 op F_1 en van F_1 op F_2 .

De tekenlessen in de vijfde kunnen trouwens op een vrij handige manier de meetkunde helpen voor het opbouwen van kleine synthesesen. Ik denk hierbij b.v. aan een synthese over de vierhoek, waarbij men vertrekt van een willekeurige vierhoek en opklimt tot het vierkant. Zeer prettig, en bovendien esthetisch verantwoord — ook als kleuroefening — zijn de tekeningen van roosters bij vertrek van een vierkant, een rechthoek, een parallellogram, een ruit. Wat een verrassing als men een vlieger — of een willekeurige vierhoek — als vertrekpunt kiest.

Vierde klasse: hier zijn vanzelfsprekend nieuwe mogelijkheden. Homothetie, affiniteit, rotatie en glijspiegeling kunnen nu uitgewerkt worden en allerlei produktfiguren van twee achtereenvolgende transformaties kunnen aanleiding teven tot vruchtbare besprekingen met de leerlingen.

Stellen de leerlingen werkelijk belang in deze tekenstudies, dan aarzele men niet reeds in de vierde te wijzen op het niet-commutatief zijn van sommige produkten, zoals de transformaties rotatie-translatie en translatie-rotatie.

Het hoeft geen betoog dat in de Latijns-wiskundige en in de wetenschappelijke afdelingen machtige kansen geboden worden om de zaak grondig uit te diepen.

Het komt er echter op aan het vroeger geconstrueerde materiaal niet uit het oog te verliezen en een synthese op te bouwen.

In de derde klasse kan men een eerste contact leggen met het opstellen van de lineaire transformatieformules die bij sommige transformaties behoren.

In de tweede klasse kan men verder laten uitwerken, nieuwe produktvormen in het leven roepen om dan tenslotte in de eerste klasse tot een algemene synthese te komen, waarbij men gebruik zal maken van het complexe vlak, nadruk zal leggen op dubbelelementen en het begrip operator zal invoeren.

Door operator verstaan we hier de matrix van de transformatie. Ziehier dan hoe wij het bij het begin van dit schooljaar probeerden met de leerlingen van onze eerste klassen.

6. Wij definiëren een nieuw begrip: de matrix.

Definitie. Een matrix is een tabel van getallen of veranderlijken (elementen genoemd) met k kolommen en r rijen. Zo is

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

een matrix met 2 rijen en 3 kolommen. Wij spreken van een rechtehoekige matrix als $k \neq r$ en van een vierkante als $k = r$.

Bij deze elementaire studie zullen wij ons beperken tot matrices van de gedaante

$$\begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix} \text{ en } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Aan welke bekende begrippen kunnen matrices gekoppeld worden?

Voorbeeld 1. De coördinaten (x_1, y_1) van een punt, betrokken op een recht of scheef assenkruis, kunnen in matrixvorm opgetekend worden als

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}.$$

Ook de beide coördinaatprojecties van een vector kunnen op die manier geschreven worden.

Voorbeeld 2. De coördinaten van de drie hoekpunten van een driehoek kunnen aanleiding geven tot een van de volgende twee matrices

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \text{ of } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

Voorbeeld 3. Nemen we het stelsel

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 + by_0 \\ y_1 = cx_0 + dy_0 \end{cases} \quad (1)$$

dan kunnen we een vierkante matrix opstellen waarvan de vier termen precies de vier coëfficiënten a, b, c, d zijn:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Kennen we de matrix, dan kunnen we ook het stelsel (1) opschrijven. Gebruikt men dubbele indices, en schrijft men het stelsel (1) als

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 \\ y_1 = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 \end{cases} (1'),$$

dan is de bijbehorende matrix

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Men spreekt af dat in het element a_{rk} het getal r op het rangnummer der vergelijking en k op het rangnummer van de onbekende wijst (mnemotechnisch: denk aan $rijk$).

a_{ii} zijn de diagonaalelementen van de matrix, $a_{11} + a_{22}$ is haar spoor. Zijn alle elementen a_{rk} ($r \neq k$) nul, dan spreekt men van een diagonaalmatrix.

Voorbeeld:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix}.$$

De diagonaalmatrix waarin $a_{ii} = 1$ heet een eenheidsmatrix.

Voorbeeld:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Symbolisch schrijft men voor de eenheidsmatrix $\| 1 \|$.

In dit geval is het stelsel (1):

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \\ y_1 = y_0 \end{cases} \quad (2).$$

Het stelsel (2) definieert de identieke transformatie, en haar matrix is dus de eenheidsmatrix.

Analoog is $\parallel 0 \parallel$ de matrix waarvan al de elementen nul zijn; het is de nulmatrix.

Een diagonaalmatrix waarvan alle termen gelijk zijn, is een scalaire matrix. Voorbeeld:

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}.$$

Zij is gelijk aan het produkt van de term a met de eenheidsmatrix.

Wij willen er nu reeds met nadruk op wijzen dat wij aan een matrix geen getalwaarde toekennen, wat wel het geval was met een determinant. Aan elke matrix

$$\parallel a_{rk} \parallel$$

kan een determinant

$$| a_{rk} |$$

toegevoegd worden.

Is de determinant

$$| a_{rk} | = 0,$$

dan wordt de corresponderende matrix een singuliere matrix genoemd.

7. Twee matrices zijn gelijk als de overeenkomstige elementen gelijk zijn. Vallen b.v. de twee driehoeken (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) en (x'_1, y'_1) , (x'_2, y'_2) , (x'_3, y'_3) samen, dan zijn vanzelfsprekend de twee matrices

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \text{ en } \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 & x'_3 \\ y'_1 & y'_2 & y'_3 \end{vmatrix}.$$

gelijk.

8. Bewerkingen met matrices. — A. Optelling. — Intuïtief kan men reeds toelichten door de som van twee vectoren te schrijven in de vorm

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{vmatrix}.$$

Daarna definieert men: de som van twee matrices

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \text{ en } \begin{vmatrix} p & q \\ v & w \end{vmatrix}$$

is de nieuwe matrix

$$\begin{vmatrix} a+p & b+q \\ c+v & d+w \end{vmatrix}.$$

Voorbeeld:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}.$$

Men ziet onmiddellijk in dat de optelling van matrices commutatief is.

Men kan dan controleren dat de bewerking eveneens associatief is.

Als toepassing kan men wijzen op de translatie, die dan te schrijven is:

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Meteen volgt dan een tekentoeppassing: een som van twee translaties, met het bewijs van de commutativiteit, die we symbolisch kunnen schrijven:

$$t_1 + t_2 = t_2 + t_1.$$

Als tweede toepassing kan men de som maken van twee gelijke matrices. Uit

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{vmatrix}$$

en $M + M = 2M$ besluiten we algemeen dat

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

en omgekeerd.

Men kan dit, trouwens nog verduidelijken door te denken aan het produkt van een vector met een scalaar. De vector $\vec{V}$

$$\begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix}$$

geeft na vermenigvuldiging met de scalaar a de vector $a \cdot \vec{V}$ met coördinaten

$$\begin{vmatrix} aX \\ aY \end{vmatrix}$$

zodat

$$a \begin{vmatrix} X \\ Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} aX \\ aY \end{vmatrix}.$$

Vrij eenvoudige toepassingen zijn de homothetie met

$$\left\| \begin{matrix} x' \\ y' \end{matrix} \right\| = k \left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\|,$$

en de parametervoorstelling van de rechte

$$\left\| \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\| + k \left\| \begin{matrix} X_1 \\ Y_1 \end{matrix} \right\|,$$

9. Hoe kunnen we nu reeds aansluiten met het vroeger geleerde? Enkele voorbeelden mogen dit illustreren.

Voorbeeld 1. Neem in een rechthoekig assenkruis het punt $A_0(x_0, y_0)$; neemt men nu het spiegelbeeld $A_1(x_1, y_1)$ van A_0 ten opzichte van de x -as, dan heeft men de overgangsformules

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 = x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{matrix} \right. \quad (3).$$

De meetkundige bewerking (spiegeling t. o. v. Ox) geeft dus aanleiding tot de matrix

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\| (M).$$

De vergelijkingen (3) definiëren volledig de overgang van een figuur F_0 op het spiegelbeeld F_1 t. o. v. de x -as; men kan dus gerust zeggen dat de matrix (M) een soort operator is, die toelaat om uit de meetkundige figuur F_0 de nieuwe figuur F_1 af te leiden.

Meetkundig bekomt men door spiegeling van de figuur F_0 t. o. v. de x -as, de figuur F_1 . Algebraïsch kleedt men het nu zo in:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\|,$$

en leest: de coördinaten (x_1, y_1) worden door de diagonaalmatrix

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix} \right\|$$

uit de coördinaten (x_0, y_0) afgeleid.

Voorbeeld 2. Neemt men het spiegelbeeld van $A_0(x_0, y_0)$ t. o. v. de y -as, dan heeft men de overgangsformules

$$\left\{ \begin{matrix} x_1 = -x_0 \\ y_1 = y_0 \end{matrix} \right. \text{ met de matrix } \left\| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Algebraïsch: de transformatie wordt gekenmerkt door de bewerking

$$\left\| \begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right\|.$$

Voorbeeld 3. Neemt men het spiegelbeeld van $A_0(x_0, y_0)$ t. o. v. de oorsprong O , dan gelden de overgangsformules

$$\begin{cases} x_1 = -x_0 \\ y_1 = -y_0 \end{cases} \text{ en de matrix } \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Algebraïsch wordt de transformatie gekenmerkt door

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Uit deze eerste reeks voorbeelden moge reeds blijken dat een matrix een operator is, en niet een getal, zoals een determinant.

10. Als tweede bewerking definiëren we de vermenigvuldiging van twee matrices. Neemt men de twee lineaire transformaties

$$\begin{cases} x_1 = ax_0 + by_0 \\ y_1 = cx_0 + dy_0 \end{cases} \text{ en } \begin{cases} x_2 = mx_1 + ny_1 \\ y_2 = px_1 + qy_1 \end{cases}$$

dan voert eliminatie van x_1 en y_1 tot het nieuwe stelsel

$$\begin{cases} x_2 = (am + cn)x_0 + (bm + dn)y_0 \\ y_2 = (ap + cq)x_0 + (bp + dq)y_0 \end{cases}$$

Bij deze drie stelsels behoren respectievelijk de matrices

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} am + cn & bm + dn \\ ap + cq & bp + dq \end{vmatrix}.$$

Hieruit volgt nu gemakkelijk de volgende definitie te verklaren: Het produkt van twee in een bepaalde volgorde gegeven matrices

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \text{ en } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

is de nieuwe matrix

$$\begin{vmatrix} am + cn & bm + dn \\ ap + cq & bp + dq \end{vmatrix}.$$

Men schrijft hierbij

$$\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} am + cn & bm + dn \\ ap + cq & bp + dq \end{vmatrix}.$$

Voor de vorming van de elementen van het produkt kan men denken aan het tabelletje

$$\begin{array}{cc} r_1 k_1 & r_1 k_2 \\ r_2 k_1 & r_2 k_2 \end{array}$$

Voorbeelden:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+14 & 6+16 \\ 15+28 & 18+32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5+18 & 10+24 \\ 7+24 & 14+32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{vmatrix}.$$

Uit deze elementaire voorbeelden volgt onmiddellijk dat de vermenigvuldiging van twee matrices een niet-commutatieve bewerking is.

11. *Toepassing 1.* Uit de definitie van het produkt van twee matrices blijkt dat het tweede lid van de transformatiebetrekking

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$$

van een radiale transformatie werkelijk mag opgevat worden als een produkt van twee matrices.

Toepassing 2. Een willekeurige transformatie kan nu algebraïsch gedefinieerd worden door de betrekking

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix},$$

waarbij we nog even herinneren aan de identiteitstransformatie

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}.$$

zodat ook de translatie nu algebraïsch kan vastgelegd worden door de betrekking

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Toepassing 3. Gelet op de scalaire matrix

$$a \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

kan de homothetie met middelpunt in de oorsprong vastgelegd worden door

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix},$$

en de homothetie met willekeurig middelpunt door

$$\begin{vmatrix} x' \\ y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Toepassing 4. Onderwerpt men een figuur F_0 aan een spiegeling t. o. v. de x -as, dan bekomt men de figuur F_1 ; algebraïsch wordt de transformatie gekenmerkt door

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Onderwerpt men nu F_1 aan een spiegeling t. o. v. de y -as (loodrecht op Ox b.v.), dan bekomt men een figuur F_2 ; algebraïsch wordt deze tweede transformatie gekenmerkt door

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Uit (4) en (5) volgt:

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

en dit betekent dat F_1 het spiegelbeeld van F_0 is t. o. v. het snijpunt O der twee loodrechte assen.

Aan de hand van deze uiteenzetting begrijpt men nu ook waarom men in de meetkunde spreekt van het „produkt” van de twee spiegelingen.

Spiegelt men eerst t. o. v. de y -as en pas daarna t. o. v. de x -as, dan bekomt men dezelfde eindfiguur; de volgorde van de spiegelingen heeft dus geen invloed op het eindresultaat.

12. Verdere toepassingen. — 1. *Symmetrie t. o. v. een rechte.* — In het assenkruis xOy geeft men de as d door O , gekenmerkt door de richtingshoek u . Neemt men het spiegelbeeld van een punt $A_0(x_0, y_0)$ t. o. v. deze rechte, dan zijn de coördinaten (x_1, y_1) van dit spiegelpunt A_1 gegeven door het stelsel

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos 2u + y_0 \sin 2u \\ y_1 = x_0 \sin 2u - y_0 \cos 2u \end{cases} \text{ met matrix } \begin{vmatrix} \cos 2u & \sin 2u \\ \sin 2u & -\cos 2u \end{vmatrix},$$

zodat de transformatiebetrekking is

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2u & \sin 2u \\ \sin 2u & -\cos 2u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Bijzonder geval. — Gaat het om een symmetrie t. o. v. de eerste bissectrice van het assenkruis, dan is $u = 45^\circ$, $2u = 90^\circ$, zodat dan

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Past men deze transformatieformule tweemaal achtereen toe, dan

vindt men de oorspronkelijke figuur terug. Nu is

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix},$$

wat wel degelijk de identiteitstransformatie is.

2. *Rotatie van een figuur om een punt, over een hoek u .* — Is O de oorsprong van het assenkruis, $A_0(x_0, y_0)$ een punt van de oorspronkelijke figuur en $A_1(x_1, y_1)$ het corresponderende punt na de rotatie, dan gelden de formules

$$\begin{cases} x_1 = x_0 \cos u - y_0 \sin u \\ y_1 = x_0 \sin u + y_0 \cos u \end{cases},$$

zodat de transformatie gekenmerkt wordt door de betrekking

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

Laat men de figuur F_1 om O een tweede rotatie over een hoek v ondergaan, dan bekomt men een figuur F_2 welke uit F_0 afgeleid wordt volgens de regels van de transformatie

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \cos v & -\sin v \\ \sin v & \cos v \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \cos(u+v) & -\sin(u+v) \\ \sin(u+v) & \cos(u+v) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

en dit bewijst dat men F_2 uit F_0 kan afleiden door één enkele rotatie om O over een hoek $(u+v)$.

Is $u+v = 90^\circ$, dan vindt men

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

zodat F_2 dan de symmetrische figuur van F_0 is t. o. v. het punt O , wat een bekend resultaat is.

Prettig lijkt ons wel de dubbele interpretatie van de rotatie-betrekking:

1°) onderstelt men de goniometrische somformules bekend dan lezen we uit de formule af: het produkt van twee rotaties (O, u) en (O, v) is een rotatie $(O, u+v)$;

2°) onderstelt men het produkt van twee rotaties bekend, dan levert de formule een bewijs van de somformules voor de sinus en de cosinus.

3. *Homothetie.* — (Het homothetisch middelpunt valt samen met de oorsprong van het assenkruis). — Neem in een rechthoekig

assenkruis xOy een punt $A_0(x_0, y_0)$ en leidt daaruit het punt $A_1(x_1, y_1)$ af dat op OA_0 ligt. Is k een constante (verschillend van 1) dan is het punt $A_1(kx_0, ky_0)$ het homothetische punt van A_0 .

De homothetie wordt dus gekenmerkt door

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

4. *Affiniteit*. — Neem in een rechthoekig assenkruis het punt $A_0(x_0, y_0)$ en doe daarmee het punt $A_1(x_0, ky_0)$ corresponderen. Deze orthogonale affiniteit wordt dus gedefinieerd door

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}. \quad k \neq 0.$$

5. Men kan nu allerlei produkten van transformaties opschrijven. Als voorbeeld kiezen we een homothetie gevolgd door een affiniteit. De algebraïsche betrekking is

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & km \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

Is deze transformatie commutatief?

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & km \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

en het antwoord is dus bevestigend, wat op het eerste gezicht wel niet zo duidelijk was.

13. *Tekeningen*. — Door onze leerlingen werden verschillende transformaties getekend, evenals produkten van transformaties: produkt van twee translaties, translatie gevolgd door spiegeling (glijspiegeling), produkt van twee spiegelingen t. o. v. twee onderling loodrechte assen en t. o. v. twee willekeurig snijdende assen, produkt van twee centrale spiegelingen, produkt van twee rotaties, produkt van een translatie met een rotatie, produkt van een symmetrie t. o. v. een as en een homothetie, produkt van een rotatie met een homothetie, produkt van twee homothetieën met verschillende centra, een algemene orthogonale affiniteit, een scheve afschuiving, een produkt van twee orthogonale affiniteiten, een produkt van een homothetie met een orthogonale affiniteit, een produkt van een rotatie met een orthogonale affiniteit en een produkt van twee afglijdingen.

Als besluit van deze studie werd dan een overzichtelijke tabel opgesteld, waarbij in de eerste kolom de transformatie, in de tweede de corresponderende matrix werd opgetekend.

14. Overzichtelijke tabel.

<i>Transformatie</i>	<i>Matrix</i>	<i>Determinant</i>
identiteit	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1
symmetrie t. o. v. Ox	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	-1
symmetrie t. o. v. Oy	$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	-1
symmetrie t. o. v. O	$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$	1
symmetrie t. o. v. een rechte door O	$\begin{vmatrix} \cos 2u & \sin 2u \\ \sin 2u & -\cos 2u \end{vmatrix}$	-1
rotatie om O	$\begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix}$	1
symmetrie t. o. v. 1e bissectrice	$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$	-1
homothetie met centrum O	$\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}$	k^2
orthogonale affiniteit	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}$	k

Naast de vijf matrices

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

moeten we volledigheidshalve nog de drie matrices

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$

beschouwen. Past men in deze volgorde, de transformaties op een meetkundige figuur toe (rechthoekig assenkruis) dan krijgen we achtereenvolgens: 1° de gegeven figuur terug, 2° de symmetrische figuur t. o. v. de x -as, 3° de symmetrische figuur t.o. v. de y -as, 4° de symmetrische figuur t. o. v. de oorsprong, 5° het spiegelbeeld t. o. v. de eerste bissectrice, 6° een rotatie in tegenwijzerzin over 90° , 7° een rotatie in wijzerzin over 90° , 8° de symmetrische figuur t. o. v. de tweede bissectrice.

Deze acht transformaties vormen een gesloten stelsel, d.w.z. dat een willekeurig aantal van deze transformaties, als produkt, een

transformatie uit de groep geeft. Duiden we de acht gegeven transformaties respectievelijk door

I, X, Y, C, B, T, W, T' aan,

dan kan men produkten van transformaties maken met de matricerekening en controleren op de figuur. Alleen moet men er op letten dat men de volgorde van de meetkundige transformaties van rechts naar links moet lezen.

Voorbeeld.

$$\begin{aligned} \text{XYT} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = W \end{aligned}$$

en meetkundig betekent dit: laat een figuur eerst een rotatie in tegenwijzerzin (90°) ondergaan, spiegel daarna t. o. v. de y -as en spiegel tenslotte t. o. v. de x -as dan kan deze eindfiguur rechtstreeks uit de eerste afgeleid worden door één enkele rotatie in wijzerzin.

Oefenmateriaal. — Bewijs met matrices (en controleer op uw grafiek) dat de volgende produkten commutatief zijn:

TW, YC, XC, XY, BB', CD', CW, CT, CD.

Bewijs dat de volgende produkten niet commutatief zijn:

XB, XB', XT, XW, YC, YB, YB', YT, YW, BW, BT, B'T, B'W.

Bewijs dat $BB' TWXYC = C$.

Bewijs dat $XYT = W$; $XTY = T$; $TXY = W$;

$YXT = W$; $YTX = T$; $TYX = W$.

Bewijs dat $BWY = WBX = I$.

Bewijs dat $BTY = C$.

Bewijs dat $CBB'X = X$, $CYWC = B'$.

Bewijs dat $W^4 = I$, $T^4 = I$, $BW = X$, $WB = Y$, $B^2 = I$.

15. We willen nu nog even onderzoeken of er onder de matrices ook geen zouden zijn die de rol spelen van het getal $\sqrt{-1}$.

Om daartoe te komen denken we even terug aan de goniometrische vorm van een complex getal en herinneren we aan de meetkundige vertolking van een complex getal, en meer speciaal aan de eigenschap dat (meetkundig gezien) uit een beeldpunt van een reëel getal een beeldpunt van een zuiver imaginair getal afgeleid wordt door een rotatie om O, over een hoek van 90° .

De rotatiematrix

$$\begin{vmatrix} \cos u & -\sin u \\ \sin u & \cos u \end{vmatrix}$$

kan als som van twee matrices geschreven worden:

$$\begin{vmatrix} \cos u & 0 \\ 0 & \cos u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\sin u \\ \sin u & 0 \end{vmatrix} \text{ of} \\ \cos u \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \sin u \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

De eerste matrix is de eenheidsmatrix. Hoe kan men nu de tweede vertolken?

Zij komt in het voorgaande tabelletje niet voor. Vermenigvuldigt men ze echter met zichzelf, dan vindt men als produkt

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \text{ of } - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

De tweede matrix schijnt dus zowat de rol te willen spelen van het getal $\sqrt{-1}$ in het complexe getallengebied. Inderdaad is het kwadraat van de tweede matrix gelijk aan het tegengestelde van de eenheidsmatrix. Noemt men de eenheidsmatrix dus $\|1\|$, en de tweede matrix $\|i\|$, dan is de rotatiematrix te schrijven als:

$$\|1\| \cdot \cos u + \|i\| \cdot \sin u$$

vorm die ons wel zeer goed herinnert aan de goniometrische vorm van een complex getal. Zo verwonderlijk is dit echter niet.

16. Bij de definities hebben we aan elke matrix een determinant toegevoegd. Heeft die determinant nu een bijzondere betekenis?

Wij aanschouwen nog eens de getekende figuren en berekenen de determinanten van de verschillende transformaties (opgetekend in de tabel onder nr. 14).

Besluit: de transformaties 1 à 7 geven steeds congruente figuren; 1, 4 en 7 geven rechtstreeks congruente figuren, terwijl 2, 3, 4, 5 tegengesteld congruente figuren opleveren.

Homothetische figuren zijn gelijkvormig (factor k) en de verhouding der oppervlakten is k^2 . Affiene figuren hebben oppervlakten die zich verhouden als 1 en k .

Uit dit eerste inzicht zou blijken dat de determinant van de matrix aangeeft met welk getal men de oppervlakte van de primitieve figuur moet vermenigvuldigen om die van de getransformeerde figuur te vinden.

Dat dit nu werkelijk zo is moge blijken uit de volgende beschouwingen:

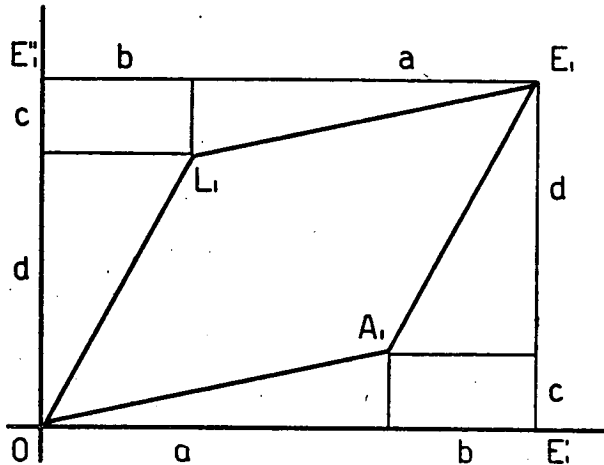
Neem de matrix

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

en de transformatie gedefinieerd door

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}.$$

De punten $A_0(1, 0)$, $B_0(2, 0)$, $C_0(3, 0)$, ... van de x -as worden $A_1(a, c)$, $B_1(2a, 2c)$, $C_1(3a, 3c)$, ... Deze punten liggen collineair met O .



De punten $L_0(0, 1)$, $M_0(0, 2)$, $N_0(0, 3)$, ... van de y -as worden $L_1(b, d)$, $M_1(2b, 2d)$, $N_1(3b, 3d)$, ... en ze liggen ook op één rechte met O .

Het punt $E_0(1, 1)$ wordt $E_1(a + b, c + d)$.

Met het vierkant $OA_0E_0L_0$ correspondeert een vierhoek $OA_1E_1L_1$ met hoekpunten $(0, 0)$, (a, c) , $(a + b, c + d)$, (b, d) . De richtingscoëfficiënten van OA_1 en E_1L_1 , evenals die van OL_1 en A_1E_1 zijn gelijk en de getransformeerde is dus een parallelogram.

Kent men de matrix M , dan kan men onmiddellijk het parallelogram $OA_1E_1L_1$ construeren en dus ook heel de getransformeerde figuur.

Kent men omgekeerd de getransformeerde figuur die met het vierkant $OA_0E_0L_0$ correspondeert, dan kan men de matrix opstellen, uit de coördinaten van de punten A_1 en L_1 .

Projecteert men nu E_1 in E'_1 op Ox en in E''_1 op Oy , dan is

$$\text{Opp. } OE'_1E_1E''_1 = (a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd,$$

$$\text{Opp. } OA_1E_1L_1 = ad - bc,$$

zodat ten slotte

$$\frac{\text{Opp. OA}_1\text{E}_1\text{L}_1}{\text{Opp. OA}_0\text{E}_0\text{L}_0} = \frac{ad - bc}{1} = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{1} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} -$$

de determinant van de transformatiematrix.

Besluit: de oppervlakte der getransformeerde figuur is gelijk aan de oppervlakte der oorspronkelijke figuur vermenigvuldigd met de determinant van de transformatiematrix, m.a.w. die determinant is het getal dat aangeeft in welke verhouding de transformatie matrix een oppervlakte bij een transformatie wijzigt.

Bij de definitie hebben we gesproken over een singuliere matrix, dit was een matrix waarvan de determinant nul is.

Hoe zit het in zo'n geval met de oppervlakte der getransformeerde figuur?

Wij beschouwen b.v. de transformatie gedefinieerd door

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

De punten O (0, 0), A(1,0), B(1, 1), C(0, 1) worden omgezet in O'(0, 0), A'(1, 1), B'(2,2), C'(1, 1) en deze laatste vier punten liggen allen op de rechte met vergelijking $y = x$. Elke oppervlakte wordt dus nul, wat volledig strookt met onze verwachtingen. Analoog liggen bij de transformatie

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k & k \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$$

al de punten op de rechte $y = kx$ en de oppervlakte der getransformeerde figuren is nul.

17. Als eerste besluit menen we dan het volgende te kunnen zeggen:

Het tekenen van eenvoudige transformaties en het tekenen van produktfiguren met de daarbij passende algebraïsche inkleding kan een goede voorbereiding zijn tot de matrixrekening in 't bijzonder en tot de moderne algebra in 't algemeen.

Een tweede aanknopingspunt met het hoger onderwijs is nog gemakkelijk te vinden voor diegenen die de groepentheorie willen inschakelen.

Inderdaad is het niet moeilijk om in te zien dat de transformaties kunnen ingedeeld worden in: 1° congruente groepen, 2° gelijkvormige groepen, 3° affiene groepen, en eventueel 4° projectieve groepen.

Hierbij vermelden we dan eerst onder welke voorwaarden transformaties een groep vormen:

1°) het produkt van twee transformaties moet weer een transformatie van deze groep opleveren $T_1 T_2 = T$;

2°) het produkt moet associatief zijn: $T_1(T_2 T_3) = (T_1 T_2) T_3$;

3°) de groep moet de identiteit bevatten;

4°) bij elke transformatie moet een omgekeerde behoren.

Is bovendien in een groep de commutatieve eigenschap geldig, dan spreekt men van een abelse groep.

Voorbeelden: rotaties om eenzelfde punt vormen een groep, verschuivingen in dezelfde zin en richting vormen een groep, assenaffiniteiten volgens eenzelfde as vormen een groep (zolang zij in dezelfde zin plaats grijpen).

Rotaties om verschillende punten vormen geen groep, spiegelingen om concurrente assen ook niet.

18. Ten slotte menen we nog dat het de moeite loont de leerlingen te wijzen op de invarianten die bij de verschillende transformaties optreden. Wij wijzen b.v. op: invariantie van de deelverhouding, van de evenwijdigheid en van de oppervlakteverhouding bij de affiene figuren; invariantie van de hoeken en van de verhouding van lijnstukken in de gelijkvormigheid; invariantie van de lengte van lijnstukken en van de oppervlakten in de congruentiegroep.

Wij hopen dat wij er U hebben van kunnen overtuigen dat er met vrij eenvoudig materiaal heel wat te bereiken is. Deze overtuiging, vermenigvuldigd met de liefde die U ten opzichte van uw leerlingen koestert, zal een nieuwe transformatie in het leven roepen, onze geliefde wiskunde ten goede.

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Kraneweg 71 te Groningen.

VAKANTIECURSUS 1957

De vakantiecursus 1957 vanwege het Mathematisch Centrum vindt plaats op maandag 26 en dinsdag 27 augustus 1957 te Amsterdam. Zes voordrachten zullen worden gehouden met als thema „Historische en methodische aspecten van de meetkunde”. Nadere mededelingen over sprekers enz. volgen.

Men kan zich aanmelden bij het Mathematisch Centrum te Amsterdam-O., 2de Boerhaavestraat 49. Cursusgeld, inclusief syllabus, f 2,50, te storten op postrekening nr. 462890 ten name van het Mathematisch Centrum onder vermelding „vakantiecursus 1957”.

NIEUWE OPGAVEN

(Deel XX no. 121—160).

De oplossingen der vraagstukken 121—160 kunnen tot 1 februari 1958 worden gezonden aan de redacteur N. G. de Bruijn, Brink 13b, Muiderberg (N.H.). Publicatie der daartoe geschikte oplossingen zal plaats vinden in „Wiskundige Opgaven met de Oplossingen”, 20 (4) 1958.

Beknoptheid der oplossingen wordt ten eerste op prijs gesteld. Het is niet nodig de oplossing te geven in de taal waarin de opgave is gesteld.

Men beschrijve het papier slechts aan één kant.

Nieuwe opgaven (met oplossingen) zijn steeds welkom.

No. 121. In een plat vlak, waarin men het rechthoekige assenstelsel OXY heeft aangenomen, is een krachtveld gegeven; de componenten van de veldsterkte zijn

$$K_x = ax + by, \quad K_y = cx + dy \quad (ad - bc \neq 0).$$

Bewijs dat geen enkel in het vlak verplaatsbaar vast lichaam zich in evenwicht kan bevinden als $P \equiv (a - d)^2 + 4bc < 0$; bepaal de lichamen, die een evenwichtsstand hebben als $P \geq 0$; toon aan, dat elk lichaam een evenwichtsstand heeft dan en alleen dan, als het veld conservatief is.

(O. Bottema).

No. 122. Tussen de vaste punten P_0 en P_{n+1} is een snaar gespannen, waarvan de massa verwaarloosd wordt; de spanning is S . Aan de snaar zijn stoffelijke punten $P_1, P_2, \dots, P_n$ bevestigd, die elk de massa m hebben. De afstand $P_0 P_k = ka$ ($k = 1, \dots, n+1$). Men beschouwt de bewegingen van het stelsel waarbij de stoffelijke punten kleine transversale uitwijkingen krijgen. De uitwijking van P_k wordt met y_k aangeduid. Op een ogenblik dat het systeem zich in de evenwichtsstand en in rust bevindt, gaat op P_1 de transversale kracht K werken.

Bewijs dat voor de beginstand geldt $\frac{d^p y_k}{dt^p} = 0$ ($p = 0, 1, \dots, 2k - 1$) en bereken $\frac{d^{2k} y_k}{dt^{2k}}$.

(O. Bottema).

No. 123. In een n -dimensionale euclidische ruimte ligt een $(n - 1)$ -dimensionale variëteit V en daarop een gewoon punt O . Op de normaal in O kiest men een punt P en men beschouwt de afstanden van P tot de punten van V . Voor welke standen van P is PO van deze afstanden een maximum en voor welke een minimum?

(O. Bottema).

No. 124. Een vlak vast lichaam (massa m , zwaartepunt Z , het traagheidsmoment t.o.v. Z is mR^2) kan zich in een verticaal vlak onder invloed van de zwaartekracht (versnelling g) zodanig bewegen, dat het punt A ($ZA = l$) op een horizontale rechte a blijft; er is geen wrijving. Bewijs, dat de oplossing der bewegingsvergelijking gegeven wordt door een hyperelliptische integraal. Wanneer in een horizontale stand van ZA de hoeksnelheid van het lichaam gelijk is aan $q^{-1}\sqrt{gl}$, waarbij $q^2 = R^2 + l^2$, dan is de omwentelingstijd $T = 4\sqrt{(l + q)/g} \varepsilon(k)$, waarin $\varepsilon(k)$ de volledige elliptische integraal van de tweede soort aanduidt met $k^2 = 2l/(l + q)$. Bepaal de beweging voor het geval van een mathematische slinger ($R = 0$).

(O. Bottema).

No. 125. Als (α_{ij}) en (β_{ij}) orthogonale matrices zijn van dezelfde oneven orde en $\det(\alpha_{ij}) - \det(\beta_{ij}) = 0$, dan is $\det(\alpha_{ij} - \beta_{ij}) = 0$. Bewijs dat.

(O. Bottema).

No. 126. Volgens een bekende stelling bestaat de doorsnede van een torus met een dubbelraakvlak uit twee cirkels. Zijn P_1 en P_2 twee punten van zo'n cirkel dan is de cirkelboog P_1P_2 gelijk aan het verschil der hoeken, die de normalen in P_1 en P_2 met de as van de torus maken. Bewijs dat.

(O. Bottema).

No. 127. Wij beschouwen twee homogene kwadratische functies $Q_1 \equiv \sum a_{ij}x_i x_j$ en $Q_2 \equiv \sum b_{ij}x_i x_j$ in n veranderlijken met reële coëfficiënten. Van twee reële punten $A \equiv (y_1, y_2, \dots, y_n)$ en $B \equiv (z_1, z_2, \dots, z_n)$, (die ook mogen samenvallen) zullen wij zeggen, dat zij door Q worden gescheiden, als $Q(A) + Q(B) = 0$ ($(0, \dots, 0)$ wordt niet als een punt beschouwd).

Bewijs de volgende stelling: als er geen puntenpaar bestaat dat zowel door Q_1 als door Q_2 wordt gescheiden, dan zijn de wortels van de seculaire vergelijking $|\lambda a_{ij} + b_{ij}| = 0$ alle reëel. (Als bijzonder geval volgt hieruit, dat de wortels reëel zijn, als één der beide kwadratische functies definit is.)

(O. Bottema).

No. 128. Te bewijzen voor $-1 < r < 1$

$$\int_0^\pi \log(1 - 2r \cos k\theta + r^2) \log(1 - 2r \cos l\theta + r^2) d\theta = 2\pi a^{2k-1} l^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} m^{-2} r^{m(k+l)/a},$$

waarin k en l gehele positieve getallen zijn en a hun grootste gemene deler.

(H. Bremekamp).

No. 129. Te bewijzen

$$\int_0^\pi (\log \sin \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{12} \pi^3 + \pi (\log 2)^2.$$

(H. Bremekamp).

No. 130. Men vraagt de oplossing van de differentiaalvergelijking

$$yqr(y + qz) - sy(qx + 2pqz + py) + ypt(x + pz) - pq(x + pz) = 0,$$

waarbij voor $x = 0$ geldt $z = y$ en $p = y$.

(H. Bremekamp).

No. 131. If $|x| < 1$, show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} (x^{n^2} - x^n + x^{n^2+n}) / (1 - x^n) = 0.$$

(N. G. de Bruijn).

No. 132. If $|x| < 1$, show that

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{\frac{1}{2}n(n+1)} / (1 - x^n) = x / (1 - x) + x^3 / (1 - x^3) + x^5 / (1 - x^5) + \dots$$

(N. G. de Bruijn).

No. 133. Let S_k be the k -th elementary symmetrical function of the variables $e^{2\pi i t_1}, \dots, e^{2\pi i t_n}$ ($0 \leq k \leq n$). Show that

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 |S_k|^2 \cdot \prod_{1 \leq h \leq j \leq n} \sin^2 \frac{1}{2} \pi (t_h - t_j) \cdot dt_1 \dots dt_n = 2^{-n(n-1)/2} n!.$$

(N. G. de Bruijn).

No. 134. Let the real sequence $a_1, a_2, a_3, \dots$ have the property that to any $\varepsilon > 0$ there exists a number $k(\varepsilon)$ such that $k(\varepsilon) < n < m$ always implies $a_n - a_m < \varepsilon$. Show that a_n can be written in the form $a_n = b_n + c_n$, where $b_n \geq 0$, $b_n \rightarrow 0$, and $c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots$ (N. G. de Bruijn).

No. 135. Show that for sequences $\{\vartheta_n\}$, with

$$0 < \vartheta_n < 1 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

the following two conditions are equivalent:

(1) There exists a real number s such that $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-s\lambda_n}$ converges ($\lambda_n = (1 - \vartheta_n)^{-1}$).

(2) If $a_1, a_2, \dots$ are positive and such that $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converges, then $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \vartheta_n$ converges as well.

(N. G. de Bruijn and H. Freudenthal).

No. 136. Prove for each integer $n > 1$

$$\frac{1}{2^{2n-2}} \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} < \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} - \frac{\pi^{2n-3}}{(2n-3)!} + \frac{\pi^{2n-5}}{(2n-5)!} - \dots \pm \frac{\pi}{1!} < \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

(J. G. van der Corput).

No. 137. Prove for each integer $n > 1$

$$3^{3-2n} \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} < \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!} \left(4 - \frac{1}{2^0}\right) - \frac{\pi^{2n-3}}{(2n-3)!} \left(4 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{\pi^{2n-5}}{(2n-5)!} \left(4 - \frac{1}{2^4}\right) - \dots \pm \frac{\pi}{1!} \left(4 - \frac{1}{2^{2n-2}}\right) < 3 \frac{\pi^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

(J. G. van der Corput).

No. 138. If x and y denote real numbers with $-1 < y < 1$, then $(y \sin \pi x)/(x \sin \pi y)$ can be represented by a power series in $y^2 - x^2$ in which each coefficient is a positive function of y .

(J. G. van der Corput).

No. 139. If x and y denote real numbers with $x + y > -1$, then $\Gamma(x + y + 1)/(\Gamma(x + 1) \Gamma(y + 1))$ can be represented by a power series in xy in which each coefficient is a positive function of $x + y$.

(J. G. van der Corput).

No. 140. In the Maclaurin expansion of $\cos(\frac{1}{2}\pi\sqrt{1-w})$ the coefficient of w^n lies for each integer $n > 1$ between

$$2^{1-3n}\pi^{2n-1}/(2n-1)! \text{ and } 2^{-2n}\pi^{2n-1}/(2n-1)!$$

(J. G. van der Corput).

No. 141. In the Maclaurin expansion of the function $\cosh(\frac{1}{2}\pi(1-w)^{\frac{1}{2}}) \cos(\frac{1}{2}\pi(1-w)^{\frac{1}{2}})$ each coefficient, apart from the constant term, is positive.

(J. G. van der Corput).

No. 142. The Maclaurin expansion mentioned in the preceding problem has the property that the coefficient of w^n is for each integer $n > 1$ less than $\frac{1}{8} \cosh(\frac{1}{2}\pi) 80^{1-n} \pi^{2n}/(2n-1)!$; for $n = 1$ we have equality instead of inequality.

(J. G. van der Corput).

No. 143. Let S_n and $\{n\}!$ be defined by

$$S_n = \sum_{k=1}^n X^{-n-1+2k}, \quad \{n\}! = \prod_{k=1}^n S_k \quad (n \geq 1), \quad \{0\}! = 1.$$

Then we have the following generalization of the binomial theorem (arising if $X = 1$):

$$\sum_{k=0}^n \frac{\{n\}!}{\{k\}! \{n-k\}!} Z_1^k Z_2^{n-k} = \prod_{k=1}^n (Z_1 X^{1n+1-k} + Z_2 X^{-1n-1+k}).$$

(D. van Dantzig).

No. 144. De functies $v(x, y, t)$ en $h(x, y, t)$ voldoen voor de waarden van x en y in een enkelvoudig samenhangend gebied G en $t_0 \leq t < t_1$ aan de differentiaalvergelijkingen:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} - \Omega v_y + \lambda v_x = -g \frac{\partial h}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \Omega v_x + \lambda v_y = -g \frac{\partial h}{\partial y}$$

$$a(x, y) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) = - \frac{\partial h}{\partial t}.$$

De grootheden Ω , λ en g zijn positieve constanten. Gevraagd wordt om te bepalen voor een gesloten Jordankromme Γ binnen G :

1°. De waarde van $\oint v \cdot dx$, uitgedrukt in de waarden binnen Γ van de scalaire functie h en die van zijn partiële afgeleiden.

2°. De waarde van deze lijnintegraal voor het geval dat h een periodieke functie van de tijd is met gegeven periode T . Deze integraal kan dan worden uitgedrukt in de waarden van h binnen T , terwijl zijn partiële afgeleiden niet meer voorkomen.

(J. J. Dronkers).

No. 145. Gevraagd wordt om de functies F_1 en F_2 zo te bepalen, dat voldaan is aan de betrekking:

$$x \sinh x \cos y = F_1 + (x^2 + y^2)F_2,$$

terwijl F_1 en F_2 oplossingen zijn van $\Delta u = 0$.

(J. J. Dronkers).

No. 146. De functie $z(x, y)$ te bepalen, die voldoet aan de vergelijking:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y \cos x \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \cos x \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

en de randwaarden $z(0, y) = y$ en $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=0} = y$.

(J. J. Dronkers).

No. 147. Let $a_1, a_2, \dots$ be an infinite sequence of integers a_k , where $|a_k| > 1$, $\limsup |a_k| = \infty$. Then $\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 a_2 \dots a_k)^{-1}$ is irrational.

(P. Erdős).

No. 148. Prove the following statements:

- A topological space with a countable base may have more than continuously many points.
- A T_0 -space with a countable base has at most continuously many points.
- A normal countable space need not have a countable base.

(J. de Groot).

No. 149. The periodic part P of a mixed abelian group G is a direct summand of G if and only if G has a subgroup which is both closed and maximal torsionfree (a subgroup T is called closed if $nG \cap T = nT$ for every integer n).

(J. de Groot).

No. 150. Die reellen Punkte A, B, C , $((ABC) = 1)$ $D = A + B + C$, $E = \alpha A + \beta B + \gamma C$ bestimmen eine Kurve zweiten Grades Φ . (Eine explizite Darstellung durch homogene Koordinaten ist z.B. $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$; $D = (1, 1, 1)$, $E = (\alpha, \beta, \gamma)$).

Ist $X = (X_1, X_2, X_3)$ und $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$, dann ist

$$\lambda X + \mu Y = (\lambda X_i + \mu Y_i) \quad (i = 1, 2, 3):$$

Ferner ist

$$(XYZ) = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

1. Welche Bedingungen müssen erfüllt werden, damit die Kurve nicht entartet ist?
2. Welche Bedingungen müssen erfüllt werden, damit die gegebenen Punkte in der zyklischen Reihenfolge A, B, C, D, E auf der Kurve Φ liegen?

(R. Lauffer):

No. 151. Let $\psi_k(x)$ ($k \geq 3$) denote a polynomial with integral coefficients, of degree $\frac{1}{2}\varphi(k)$, whose zeros are $\theta + \theta^{-1}$ (θ runs through the primitive k -th roots of unity). An element of a finite field is called primitive if it is a generator of the multiplicative group of this field. Prove that a zero of the polynomial $x^2 + ax + b$ with $a, b \in GF(p)$ is a primitive element of $GF(p^2)$ if and only if the following conditions are both satisfied:

1°. b is a primitive element of $GF(p)$,

2°. $a^2b^{-1} - 2$ is a zero of $\psi_{p+1}(x)$.

(W. Peremans).

No. 152. Evaluate

$$\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos \varphi \cos \psi}{\cos \varphi + \cos \psi} \cos 2n\varphi \cos 2n\psi \, d\varphi \, d\psi,$$

where n is an integer.

(R. B. Potts and G. Szekeres).

No. 153. Let $f(x)$ be four times continuously differentiable and $\neq 0$ in an open interval J , $f'(x) \neq 0$. For every t in J , write

$$g(x, t) = \frac{1}{f'(t)} [f(x+t) - f(t)],$$

and suppose that for each $g(x) = g(x, t)$ there exists a solution $G(x) = G(x, t)$ of the functional equation

$$G(x) dg(x)/dx = g(x) + G(g(x)),$$

such that $G(x)$ is three times continuously differentiable with respect to x .

Prove that the only functions $f(x)$ which have the above properties are

- (i) $f(x) = ae^{\alpha x} + c$ ($\alpha \neq 0$),
- (ii) $f(x) = a \log(x+b) + c$,
- (iii) $f(x) = a(x+b)^\alpha + c$ ($\alpha \neq 0, \alpha \neq 1$). (G. Szekeres).

No. 154. Let

$$t_n = \sum_{k=1}^n (2kn^{-1} - 1)s_k, \quad n = 1, 2, \dots$$

Prove that the existence of $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t$ implies the existence of $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = s$.

(G. Szekeres).

No. 155. Gegeven de driehoek ABC (zwaartepunt Z) en een kegelsnede γ , die raakt aan de zijden BC, CA, AB in A_0, B_0, C_0 ; de lijnen AA_0, BB_0, CC_0 gaan door één punt L .

Bewijs, dat de lijnen AZ, BZ, CZ de zijden B_0C_0, A_0C_0, A_0B_0 zodanig snijden in A_1, B_1, C_1 , dat de lijnen A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 door het middelpunt M van de kegelsnede γ gaan.

(J. H. Tummers).

No. 156. Als A_0, B_0, C_0 de middens zijn van de zijden BC, CA, AB van driehoek ABC , en L is een willekeurig punt in het vlak van driehoek ABC , dan zullen de lijnen, door A, B, C evenwijdig getrokken met de lijnen LA_0, LB_0, LC_0 , door één punt S gaan. Leid in normaalcoördinaten de transformatievergelijkingen af, die (bij vaste A, B, C) L in S overvoeren, en bewijs met behulp daarvan, dat de normaalcoördinaten van het middelpunt van de negen-puntscirkel van driehoek ABC gegeven zijn door de vergelijkingen:

$$x = (b \cos B + c \cos C)/a,$$

$$y = (a \cos A + c \cos C)/b,$$

$$z = (a \cos A + b \cos B)/c.$$

(Hierbij is driehoek ABC als fundamentealdriehoek aangenomen; en de lijnstukken BC , CA , AB zijn vervangen door a , b en c .)

(J. H. Tummers).

No. 157. Wij beschouwen de verzameling V van kegelsneden, welke gaan door de hoekpunten A , B , C van driehoek ABC , en bovendien de eigenschap bezitten, dat de normalen in A , B en C door één punt N gaan. Zij γ één der kegelsneden en zij L het aan γ toegevoegde punt (voor toevoeging van een punt L aan een kegelsnede, beschreven om driehoek ABC , zie Vraagstuk No. 119, Nieuwe Opgaven Deel XX). Bewijs, dat de lijn, welke L met het aan L isogonaal toegevoegde punt L' verbindt, om het zwaartepunt van driehoek ABC zal draaien, als γ de verzameling V doorloopt. De meetkundige plaats van L en L' is een bekende kromme van de derdegraad, die invariant is voor isogonale inversie (welke kromme?). Bepaal verder de meetkundige plaats van de middelpunten der kegelsneden van de verzameling V .

(J. H. Tummers).

No. 158. In een orthocentrisch viervlak, waarvan geen drie in één zijvlak liggende ribben gelijk zijn, raakt de rechte van Euler van elk der begrenzende driehoeken aan de hyperboloïde, bepaald door de rechten van Euler van de drie andere zijvlakken.

(J. Wichers).

No. 159. Let μ^* be an exterior measure in the point set X (μ^* is defined for all subsets of X). Let Ω be a collection of subsets of X such that (i) $A \in \Omega$, $B \subset A$ imply $B \in \Omega$, and (ii) $A \in \Omega$, $B \in \Omega$ imply that the union $A \cup B \in \Omega$.

Let, for all $S \subset X$, $\mu_1^*(S)$ be defined as $\sup_{T \in \Omega, T \subset S} \mu^*(T)$.

Show that

- μ_1^* is also an exterior measure.
- If $\mathcal{A}$ and $\mathcal{A}_1$ are the collection of all μ -measurable sets and of all μ_1^* -measurable sets, respectively, then $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}_1$.
- If moreover Ω contains all sets S with finite $\mu^*(S)$, then $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1$.

(A. C. Zaanen).

No. 160. Let μ and ν be (not necessarily σ -finite) measures on a semi-ring Γ of subsets of X . Show that $\tau = \mu + \nu$ is also a measure

on Γ . The measures μ, ν, τ are extended to exterior measures μ^*, ν^*, τ^* in the following way (described for μ): If $S \subset X$, and if S cannot be covered by a union of countably many sets of Γ , then $\mu^*(S) = \infty$. If, on the other hand, S can be covered by such unions, then $\mu^*(S) = \inf \sum \mu(A_n)$, where $A_n \in \Gamma$, and the inf is taken over all sequences $\{A_n\}$ whose union covers S .

Show that $E \subset X$ is τ -measurable if E is μ -measurable as well as ν -measurable. The converse is not necessarily true (example?), but if we have, for all $A \in \Gamma$, that $\mu(A) < \infty$ if and only if $\nu(A) < \infty$, then τ -measurability implies μ -measurability and ν -measurability. (Literature: P. Halmos, Measure Theory, New York 1950; A. C. Zaenen, Linear Analysis, Amsterdam-Groningen 1953).

(A. C. Zaenen).

Voor de Kweekschool

C. J. Alders en G. J. Hietbrink

ALGEBRA voor kweekscholen

f. 2,90

De beginstof, die de leerlingen al eens in een of andere vorm hebben doorgewerkt, is daarom in een eerste hoofdstuk, aangevuld met ruim honderd vraagstukken, samengevat.

B. Marius

CONTACT meetkunde voor kweekscholen

met 109 figuren f 3,50

STEREOMETRIE voor kweekscholen

2e druk, met 66 figuren f 2,25

Een eenvoudig boekje dat voor het beoogde doel stellig genoeg leerstof en oefenmateriaal biedt. Het is met zorg uitgevoerd.
Weekblad A.V.M.O.

Dit boekje zal zeker ook bij andere studie (N-akten) goede diensten kunnen bewijzen.

Het Nijverheidsonderwijs

NOORDHOFF's KLEINE LOG.TAFEL

voor kweekscholen - in 4 dec. f 0,75

B. Marius en J. H. H. Grooten

NATUURKUNDE voor kweekscholen

deel 1 - krachten- en bewegingsleer - vloeistoffen
gassen - warmte - 5de druk 162 figuren . . f 3,50

deel 2 - geluid - licht - magnetisme - elektriciteit
4e druk - 260 figuren , f 4,25

NATUURKUNDE VRAAGSTUKKEN voor kweekscholen

1 - 280 vraagstukken - 3de druk f 0,85

2 - 275 vraagstukken - 3de druk f 0,85

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook bij de boekhandel verkrijgbaar

Zojuist verschenen:

Cijfergeving als probleem

Openbare les, gegeven op 14 mei 1957

door **Dr W. H. A. KOENRAADS**, Privaat-docent in de
didactiek en methodiek der Duitse taal- en letterkunde
aan de Universiteit van Amsterdam **f 1.25**

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

ook via de boekhandel verkrijgbaar

J. B. WOLTERS — GRONINGEN, DJAKARTA

Zojuist verschenen:

G. R. VELDKAMP

Wetensch. hoofdamtenaar A aan de technische hogeschool te Delft

Inleiding tot de analyse

*Leerboek der differentiaal- en integraalrekening met
inbegrip van de theorie der reeksen*

Met 542 opgaven en met twee aanhangsels

Bestemd voor studerenden Wiskunde M.O. A en B (K V),
K I, eerste- en tweedejaarsstudenten aan universiteiten en
aan de technische hogescholen

XV + 552 blz. - Gebonden f 28,50



Verkrijgbaar bij de Boekhandel en bij de Uitgever



Aan de **ACADEMIE MINERVA** (afd. H.T.S.) wordt gevraagd een

LERAAR WIS- EN NATUURKUNDE OF WISKUNDE EN MECHANICA

(bevoegd: dr(s). wis- en natuurkunde, of Delfts ingenieur: c.i., w.i., s.i., e.i.,
of n.i.). 27 lessen per week.

Salaris f. 755,— (bij 6 dienstjaren) tot f. 1.147.— p.m., afhankelijk van
diensttijd en leeftijd.

Sollicitaties binnen 10 dagen na het verschijnen van dit blad aan burg. en
weth.

Inlichtingen verstrekt de directeur, Petr. Driessenstraat 3.