

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT

VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN

DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN

IN BINNEN- EN BUITENLAND

32^E JAARGANG 1956/57

I - 1 SEPTEMBER 1956

INHOUD

	BLZ.
Dr. J. H. WANSINK, Een nieuwe fase in het bestaan van Euclides	1
Kalender	4
Prof.Dr.F.LOONSTRA, Beschouwing over „Eléments de mathématique par N. Bourbaki”	5
Dr. J. DE MIRANDA, Het afbeelden van getallenrijen en het werken met grafieken in de wiskundeleergang van de eerste klasse M.O.	15
Eindexamens-Luxemburg 1956	28

Het tijdschrift *Euclides* verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang / 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs / 6,75.

REDACTIE.

Dr. JOH. H. WANSINK, Julianalaan 84, Arnhem, tel. 08300/20127; voorzitter;
H. W. LENSTRA, Kraneweg 71, Groningen, tel. 05900/34996; secretaris;
Dr. W. A. M. BURGERS, Santhorstlaan 10, Wassenaar, tel. 01751/3367;
Dr. H. MOOY, Churchilllaan 107III, Amsterdam, tel. 020/98498;
Dr. H. TURKSTRA, Sophialaan 13, Hilversum, tel. 02950/2414;
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, Bakenbergseweg 158, Arnhem, tel. 08300/21960.

VASTE MEDEWERKERS.

Prof. dr. E. W. BETH, Amsterdam;	Dr. J. KOKSMA, Haren;
Prof. dr. F. VAN DER BLIJ, Utrecht;	Prof. dr. F. LOONSTRA, Delft;
Dr. G. BOSTEELS, Antwerpen;	Prof. dr. M. G. J. MINNAERT, Utrecht;
Prof. dr. O. BOTTEMA, Rijswijk;	Prof. dr. J. POPKEN, Amsterdam;
Dr. L. N. H. BUNT, Utrecht;	Prof. dr. D. J. VAN ROOY, Potchefstr.
Prof. dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Bilth.;	G. R. VELDKAMP, Delft;
Prof. dr. H. FREUDENTHAL, Utrecht;	Prof. dr. G. WIELENGA, Amsterdam.
Prof. dr. J. C. H. GERRETSEN, Gron.;	

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (f 8,00 per jaar, te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en f 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Den Haag.

Vaste medewerkers krijgen het tijdschrift gratis.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. H. Mooy te Amsterdam.
Artikelen ter opname aan dr. Joh. H. Wansink te Amsterdam.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

EEN NIEUWE FASE IN HET BESTAAN VAN EUCLIDES.

In juni 1956 hebben WIMECOS en LIWENAGEL met de N.V. ERVEN P. NOORDHOFF's Uitgeverszaak een overeenkomst gesloten, waarin wordt vastgesteld, dat het tijdschrift EUCLIDES, tijdschrift voor de didactiek van de exacte vakken, officieel orgaan van WIMECOS en LIWENAGEL, als zodanig uitsluitend geredigeerd zal worden door redacteuren van deze beide verenigingen. De nieuwe redactie zal alleen verantwoording schuldig zijn aan de leden van WIMECOS en LIWENAGEL.

Door deze overeenkomst is EUCLIDES met het eerste nummer van de tweeëndertigste jaargang een nieuwe fase van zijn bestaan ingetreden. Het zou echter onjuist zijn te veronderstellen dat EUCLIDES eerst nu tot officieel orgaan van de beide verenigingen wordt. Reeds met ingang van de 17e jaargang (1 september 1940) leest men op de titelpagina van het tijdschrift, dat dit officieel orgaan is van beide verenigingen. En met ingang van de 25e jaargang (1949—1950) treft men naast de redacteuren die namens NOORDHOFF optreden redacteuren aan die door WIMECOS en LIWENAGEL zijn aangewezen.

Uit organisatorisch oogpunt is het echter van betekenis, dat EUCLIDES vanaf heden duidelijk als onafhankelijk tijdschrift voor de dag treedt, waarvan de redacteuren zich voor de leden van de beide verenigingen en voor deze alleen te verantwoorden zullen hebben over het door hen gevoerde beleid. We hopen dat op deze wijze de belangstelling voor en de medewerking aan het tijdschrift op krachtige wijze zal kunnen worden gestimuleerd. De verantwoordelijkheid voor de inhoud komt nu uiteindelijk te berusten bij de verenigingen van de wiskundeleraren zelf. Dit achten we een belangrijke vooruitgang. En wij zijn de firma NOORDHOFF dankbaar voor de royale wijze waarop zij de huidige verandering in de redactie mogelijk heeft gemaakt.

Wij willen de nieuwe fase van EUCLIDES niet ingaan zonder duidelijk uitdrukking te hebben gegeven aan onze dankbaarheid voor al wat er in de afgelopen decennia door NOORDHOFF's tijdschrift is tot stand gebracht. Er is in de twintiger jaren pioniersarbeid verricht in een periode waarin het verenigingsleven van de wiskundeleraren nog in de kinderschoenen stond. Tot goed begrip van de situatie van destijds is het niet van belang ontbloomt er op te wijzen dat men er bijna over zou kunnen twisten wie er eerder geweest is, de vereniging WIMECOS of haar orgaan EUCLIDES. Immers, in

1924 verscheen het eerste nummer van het „Bijvoegsel” van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, dat in 1927 in „EUCLIDES” zou worden omgedoopt, en tussen deze beide jaartallen in ligt het oprichtingsjaar van WIMECOS (1925). LIWENAGEL is enige jaren ouder, bestaat reeds sinds 1921. Het initiatief tot de uitgave van een nieuw didactisch tijdschrift in 1924 is een verheugend verschijnsel geweest in de strijd voor een goed onderwijs in de wiskunde bij het V.H.M.O. hier te lande. Vanaf dit jaar hebben de wiskundedocenten op efficiënter wijze dan door artikelen in de diverse „Weekbladen” mogelijk was hun ideeën op didactisch gebied aan hun collega’s kunnen voorleggen. Voor de goede lezer zal het reeds duidelijk zijn dat onze dankbaarheid niet slechts de uitgever van EUCLIDES geldt, die zich voor de uitgave van het tijdschrift grote financiële offers getroostte, maar evenzeer de beide eerste redacteuren die het tijdschrift spoedig op een hoog niveau wisten te brengen. Die eerste redacteuren waren J. H. SCHOGT en P. WIJDENES, waarvan de eerste ruim 24 jaren en de tweede precies 25 jaren zijn beste krachten aan EUCLIDES heeft gegeven. Aan de kritische geest van de eerste heeft menig leraar in Nederland veel te danken. De verdiensten van de tweede zijn in het eerste nummer van de 26e jaargang uitvoerig naar voren gebracht. SCHOGT werd opgevolgd door Dr. H. STREEFKERK, die op zijn verzoek niet in de nieuwe redactie is opgenomen en die we op deze plaats van harte danken voor al wat hij met toewijding zo vele jaren belangeloos voor het tijdschrift heeft gedaan.

De samenstelling van de redactie is thans als volgt.

Dr. Joh. H. Wansink, Julianalaan 84, Arnhem; voorzitter;

Dr. P. G. J. Vredenduin, Bakenbergse weg 158, Arnhem; vice-voorzitter;

H. W. Lenstra, Kraneweg 71, Groningen; secretaris;

Dr. W. Burgers, Santhorstlaan 10, Wassenaar;

Dr. H. Mooy, Churchill-laan 107 III, Amsterdam;

Dr. H. Turkstra, Sophialaan 13, Hilversum.

De redactie stelt zich voor de volgende rubrieken tot hun recht te laten komen:

- a. vakwetenschappelijke artikelen; hierin zullen in de eerste plaats die onderwerpen uit de hogere wiskunde aan de orde worden gesteld, die voor de school betekenis hebben of betekenis

kunnen krijgen, „hogere wiskunde, van elementair standpunt beschouwd”;

- b. didactische artikelen in de ruimste zin van het woord; we denken hierbij ook aan bijdragen die op kritische wijze ervaringen uit het schoollokaal doorgeven en aan examenopgaven uit binnen- en buitenland, liefst met een kritische analyse;
- c. de opleiding tot wiskundeleraar in een nabij verleden, in het heden en in een nabije toekomst;
- d. buitenlandse contacten;
- e. recreatieve wiskunde; mathematische varia; korrels en verscheidenheden;
- f. boek aankondigingen en recensies; deze zullen zowel schoolboeken betreffen als didactische lectuur en al wat voor de leraar in functie van belang kan worden geacht;
- g. officiële mededelingen; notulen van vergaderingen en jaarverslagen; adressen aan autoriteiten; kalender van activiteiten op wiskundig gebied.

Voor de uitvoering van dit program heeft de redactie de medewerking van velen nodig. Ze is dan ook buitengewoon verheugd dat een groot aantal wiskundigen zich bereid heeft verklaard als vast medewerker aan EUCLIDES te willen optreden.

Doordat EUCLIDES voortaan tien maal per jaar zal verschijnen op vastgestelde data zal de genoemde kalender meer zin hebben dan in het verleden bij de onregelmatige verschijning die we gekend hebben mogelijk zou zijn geweest. Het aantal vellen druks zal met de nieuwe jaargang tot 20 stijgen. De abonnementsprijs, die door het stijgende tekort op de exploitatie ook reeds omhoog zou hebben moeten gaan als er in de status van EUCLIDES niets was veranderd, is nu gebracht op / 5,— per jaar voor de leden van LIWENAGEL; voor de leden van WIMECOS blijft de abonnementsprijs in de contributie begrepen.

Tegelijk met de nieuwe status van EUCLIDES begint ook voor WIMECOS een nieuwe fase; WIMECOS is thans een algemene vereniging van leraren, waarvan niet alleen leraren aan hogereburgerscholen en lycea, maar ook leraren aan gymnasia lid kunnen zijn. We verwachten dat het algemene karakter dat WIMECOS daardoor gekregen heeft, aan de samenwerking van alle wiskundeleraars, ook in het tijdschrift EUCLIDES, ten goede zal komen.

Van de tegenwoordige redactie zijn Dr. Vredenduin en Dr. Burgers door het bestuur van LIWENAGEL aangewezen, de overigen door het bestuur van WIMECOS.

We vertrouwen dat EUCLIDES in de nieuwe fase van zijn bestaan een waardevol tijdschrift zal blijven voor allen wie de didactiek van de exacte vakken bij ons V.H.M.O. ter harte gaat.

Namens de redactie:

JOH. H. WANSINK.

KALENDER.

De redacte is gaarne bereid, maandelijks een „kalender” op te nemen, waarin vergaderingen, congressen e.d. op wiskundig gebied worden aangekondigd.

Indien men opgaven voor deze rubriek direct na het ontvangen van een nummer van „Euclides” post, kan in het algemeen op plaatsing in het volgende nummer worden gerekend. Te adresseren aan de secretaris der redactie, Kraneweg 71, Groningen.

BESCHOUWING OVER
„ELEMENTS DE MATHEMATIQUE PAR N. BOURBAKI”.¹⁾

door

Prof. Dr. F. LOONSTRA

Wanneer een recensent voor de taak wordt geplaatst om over de inhoud van een boek ²⁾ een recensie te schrijven, zal er — op zijn minst genomen — van hem worden verwacht, dat hij het boek in zijn geheel leest en misschien herleest. Deze gedachten speelden mij door het hoofd, toen ik Uw voorzitter berichtte, dat ik gaarne bereid was gevolg te geven aan zijn uitnodiging om een voordracht over de werken van Bourbaki te houden. Wat ben ik begonnen! Deze „*Eléments de mathématique*” nl., waarin men zich — tot dusverre — beperkt tot de behandeling van de grondslagen van de wiskunde, de algebra en de analyse, zijn verdeeld over 18 delen, waarvan elk deel tussen de 100 en 200 bladzijden beslaat. Op de eerste bladzijde van elk deel vindt U: „*Ouvrages du même auteur*” en dan volgt een complete lijst van alle thans verschenen delen. Die auteur nu is Nicolas Bourbaki en de argeloze lezer moet wel diep onder de indruk komen van de grote wijsheid van M. Bourbaki; alleen hij zou de aangewezen man zijn, die U over het volledige werk kon inlichten. De eerlijkheid gebiedt me echter om U mede te delen, dat de persoon Nicolas Bourbaki niet bestaat.

Charles Bourbaki was een Frans generaal (1816—1897), die in 1871 een frans leger aanvoerde. Een aantal jonge franse wiskundigen heeft zich thans verenigd en zij geven gezamenlijk de genoemde „*Eléments*” uit onder de schuilnaam Nicolas Bourbaki. Ik meen begrepen te hebben, dat Uw belangstelling in dezen gericht is op de opbouw van de door hen behandelde onderwerpen. Ik zal mij dus allereerst bepalen tot het formuleren van de grondgedachten, die de Bourbakisten hebben geleid.

De thans verschenen stof is verdeeld over „*Livres*” I tot en met VI:

¹⁾ Lezing gehouden op de algemene vergadering van Wimecos op 29 december 1955 te Amsterdam.

²⁾ *Actualités Scientifiques et Industrielles*, Hermann et Cie, Paris.

- Livre I Théorie des ensembles (2 delen),
- „ II Algèbre (4 delen),
- „ III Topologie générale (6 delen),
- „ IV Fonctions d'une variable réelle (2 delen),
- „ V Espaces vectoriels topologiques (2 delen),
- „ VI Intégration (1 deel).

Elk „Livre” is verdeeld in een aantal hoofdstukken en men heeft telkens één of meer hoofdstukken van één „Livre” in één band verenigd; in totaal zijn thans 18 banden verschenen. Welke zijn nu de leidende beginselen geweest? Allereerst de uitspraak, dat een wiskundige tekst — zoveel als mogelijk is — met behulp van een conventionele taal moet worden opgesteld. Een dergelijke taal zou uit een klein aantal „woorden” of symbolen moeten bestaan, waarvan het gebruik door een klein aantal voorschriften, de syntaxis, wordt beheerst. Een tekst, in deze taal geschreven, noemt men geformaliseerd. We kennen de beschrijving van een schaakpartij met behulp van de gebruikelijke notatie's, verder de logaritmen-tafel.

Is een tekst niet geformaliseerd, dan stelt men zich bloot aan fouten in de redenering, die soms een gevolg zijn van een verkeerd gebruik van de intuïtie en soms te wijten zijn aan een foute redenering door analogie. Wanneer het om het schrijven of lezen van een geformaliseerde tekst gaat, dan is het niet zo zeer de betekenis, die men aan de gebruikte symbolen hecht (misschien hecht men er in het geheel geen betekenis aan); belangrijker is een correcte toepassing van de syntactische regels. Dan kan bijv. eenzelfde rekenvoorschrift dienst doen om vraagstukken over grammen of over guldens op te lossen, over parabolen of over eenparig versnelde bewegingen. Dat vermogen om velerlei inhoud aan symbolen of aan eerste begrippen toe te kennen is een zeer belangrijk hulpmiddel bij de moderne wiskunde. Bourbaki begint in zijn eerste deel met een beschrijving van een geformaliseerde taal, gevolgd door een uiteenzetting van algemene beginselen, die later op vele bijzondere gevallen kunnen worden toegepast.

Eén dergelijke taal is voor dat doel toereikend; vroeger meende men, dat elke tak van wiskunde afhankelijk was van particuliere intuïties — op grond waarvan men voor elke tak de noodzaak van een geformaliseerde eigen taal voelde. Men weet thans, dat het voldoende is om de beginselen van één enkele geformaliseerde taal te ontwikkelen en om vervolgens aan te geven hoe men in die taal de theorie van de verzamelingen uiteen kan zetten. Dààruit

laten zich dan de verschillende gebieden van de wiskunde weer afleiden. Problemen van psychologische of van methaphysische aard worden buiten beschouwing gelaten.

De geformaliseerde taal van de wiskunde is echter niet zo eenvoudig als die van het schaakspel; het kleinste bewijs uit het begin van de theorie der verzamelingen zou reeds honderden symbolen vereisen om volledig geformaliseerd te zijn. Men is daarom genoodzaakt om in het eerste deel de geformaliseerde taal te bekorten door de invoering van nieuwe zg. bekortingssymbolen en van aanvullende syntactische regels. Eerst dan krijgt men een taal, die nuttig blijkt te zijn.

Met grote voorzichtigheid wordt de vraag van de non-contradictie onder ogen gezien; een van die problemen, die de moderne logistici veel zorgen baarden. Men zegt, dat een wiskundige theorie contradictoir is, als men² de juistheid van een stelling — zowel als die van zijn negatie kan bewijzen. In geformaliseerde taal zou een contradictie neerkomen op een formeel-correct bewijs, dat tot de conclusie $0 \neq 0$ leidde. Daar elke wiskundige theorie op logische wijze met de theorie van de verzamelingen is verbonden, moet elke contradictie reeds aanleiding geven tot een contradictie in de verzamelingsleer. Men heeft de laatste 40 jaren zeer veel zorg besteed aan een juiste formulering van de axioma's van de theorie der verzamelingen en tot dusverre is nooit een contradictie gevonden. Laten we hopen, dat zich zoiets nimmer zal voordoen.

We geloven met Bourbaki, dat de wiskunde voorbestemd is om voort te leven, dat nimmer essentiële delen van dit majestueuze bouwwerk ten gevolge van contradicties plotseling in één zouden storten. Sceptici halen voor deze bewering — die uitsluitend op ervaring steunt — de schouders op.

Bedenk echter, dat vijftientwintig eeuwen de wiskundigen in de gelegenheid zijn geweest om hun fouten te herstellen en om hun wetenschap verrijkt in plaats verarmd te zien. Dat geeft hun zeker enig recht om de toekomst met vertrouwen tegemoet te zien.

Nadat in Chap. I de formele taal is ontwikkeld, sluit — in Chap. II — op volmaakte wijze de theorie van de verzamelingen aan, een theorie waarin uitsluitend de tekens $=$, ε en C optreden. Reeds uit een vluchtig lezen blijkt onmiddellijk, hoe het tweede hoofdstuk van het eerste afhankelijk is. Voor zover mij bekend is dit tevens het eerste boek, dat een systematische ontwikkeling geeft van de axiomatische verzamelingsleer en dat zeker een leemte in de litteratuur aanvult. Natuurlijk vindt men hier geen nieuwe stellingen. Voor de lezer echter, die al eens eerder kennis maakte met

de beginselen van de verzamelingsleer, is dit boek bijzonder leerzaam, omdat het aan zijn min of meer intuïtieve kennis een goede ondergrond geeft. Merkwaardig genoeg is dit deeltje een van de laatst verschenen; het is zeer verstandig, dat de Bourbakisten reeds in 1939 een „fasciculé de résultats” van de verzamelingsleer gaven, een boekje van 45 bladzijden, dat men vlug kan lezen en waarin het essentiële staat, wat men voor volgende onderwerpen nodig heeft.

Een juiste terminologie heeft bij het samenstellen van alle werken een bijzondere rol gespeeld: men wijkt alleen bij hoge uitzondering van een éénmaal gekozen terminologie af. Elk „Livre” heeft een dictionnaire, waarin men de gebruikte termen in enkele andere talen vindt.

In de tekst vindt men zelden een literatuuropgave: die geeft men steeds aan het einde in de vorm van een „exposé historique” met vermelding van eventueel onopgeloste problemen van het betreffende onderwerp. Men streeft niet naar volledigheid, doch noemt enkele oorspronkelijke werken, die voor de lezer het meest aanbevelenswaardig zijn. Opvallend is het grote aantal opgaven; ook aan dit onderdeel is veel zorg besteed; men treedt nimmer in een herhaling van moeilijkheden.

Livre II — Algèbre.

Algebra bedrijven betekent zoveel als „rekenen”, d.w.z. het toepassen van algebraïsche operaties op elementen van een verzameling, zoals ons dat bekend is van de vier rekenregels van de elementaire rekenkunde.

Het is niet mijn bedoeling om hier het voortschrijdende abstractieproces na te gaan, waardoor het begrip algebraïsche operatie — oorspronkelijk beperkt tot natuurlijke getallen — langzaam maar zeker zijn toepassingsgebied heeft uitgebreid, naarmate — parallel daarmee — het begrip getal zich uitbreidde, zover zelfs, totdat men bewerkingen toepaste op elementen, die geen enkel numeriek karakter meer bezaten, zoals op permutaties van een verzameling. Ondanks die mogelijkheid van de opeenvolgende uitbreidingen bleef de vorm van de rekenregels veelal gelijk, terwijl juist de aard van de mathematische objecten, die men aan die rekenregels onderwierp, aanzienlijk varieerde. Dit heeft ons hoe langer hoe meer tot het leidende beginsel van de moderne algebra gebracht, nl. dat de mathematische objecten op zich zelf minder belangrijk zijn, doch dat het hun onderlinge betrekkingen zijn, die ons belang inboezemen. Men beschouwt thans de algebra niet anders dan de studie van de algebraïsche operatie onafhankelijk van de betekenis van de mathe-

matische objecten, waarop men de operaties toepast. Het toepassen van een algebraïsche operatie op twee elementen a en b van één-zelfde verzameling V betekent niets anders dan dat men aan het paar (a, b) één bepaald derde element c van V toevoegt. Het geven van een algebraïsche operatie betekent dus: het geven van een functie, die gedefinieerd is op het product $V \times V$ en die waarden aanneemt in V . De enige bijzonderheid ligt dus in het feit, dat men voor de definierende verzameling van de functie het product van twee verzamelingen, elk identisch met V , kiest. Een dergelijke functie noemt Bourbaki een interne compositie-wet. Behalve deze interne voorschriften is men — voornamelijk onder invloed van de meetkunde — gekomen tot een ander soort bewerkingen: de zg. externe compositiewetten; behalve de verzameling V is nog een tweede verzameling Ω in het spel, waarvan de elementen $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ operatoren heten.

Een externe compositiewet nu voegt aan een paar (α, a) , gevormd door een operator $\alpha \in \Omega$ en een element $a \in V$, een element $\alpha a = b$ uit V toe. Bekend is bijv. het geval, waarin V de verzameling van de vectoren $a = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ met reële componenten voorstelt, terwijl Ω de verzameling van de reële getallen voorstelt; αa is dan de vector $(\alpha a_1, \alpha a_2, \dots, \alpha a_n)$.

Wanneer in een verzameling V dergelijke interne en externe compositiewetten zijn gedefinieerd, spreekt Bourbaki van een „algebraïsche structuur” in V . Met deze algebraïsche structuren nu houdt de algebra zich bezig. Er zijn velerlei soorten algebraïsche structuren, enerzijds gedefinieerd met behulp van compositiewetten, anderzijds met behulp van axioma's, waaraan die compositiewetten zijn onderworpen. Deze axioma's zijn natuurlijk niet willekeurig gekozen: ze zijn in hoofdzaak die compositiewetten, die in de toepassingen voorkomen, zoals de associativiteit, de commutativiteit, de distributiviteit, enz. Het eerste deel van de algebra van Bourbaki nu is geheel gewijd aan een uiteenzetting van deze axioma's en van hun onmiddellijke gevolgtrekkingen. Bijzondere aandacht besteedt men aan het begrip *groep* (waar sprake is van één interne compositiewet), aan het begrip *ring* (met twee interne compositiewetten) en aan het begrip *lichaam*; het begrip *lichaam* is een bijzonder geval van de twee eersten. Eveneens worden in Chap. I de groepen met operatoren en de ringen met operatoren behandeld. Van de groepen met operatoren zijn de moduli de belangrijkste: daartoe behoren de vectorruimte's, die zowel in de meetkunde als in de analyse een grote rol spelen. De studie van die moduli vindt zijn oorsprong in die van de lineaire vergelijkingen, daarom vat men haar behandeling

in Chap. II ook samen tot „Algèbre linéaire”. In Chap III en IV maakt men studie van twee bijzondere algebra's: „L'algèbre extérieure”, die, tesamen met de theorie van de determinanten, die er uit voortvloeit, een onmisbaar hulpmiddel voor de lineaire algebra is en verder de ring van de veeltermen, die de grondslag van de theorie van de vergelijkingen is.

Daar de natuurlijke getallen twee interne compositiewetten bevatten, de optelling en de vermenigvuldiging, moet men de klassieke rekenkunde — die toch de studie van de natuurlijke getallen is — ondergeschikt maken aan de algebra.

Telkenmale worden die stelsels met twee compositiewetten begeleid door een structuur, die door een orde-relatie gedefinieerd is, nl.: „ a is deler van b ”; het eigen karakter van de klassieke rekenkunde is juist de studie van de betrekkingen tussen deze geassocieerde structuren. De natuurlijke getallen zijn niet het enige voorbeeld, waar men een ordestructuur kan associëren met een algebraïsche structuur door een deelbaarheidsrelatie: deze koppeling speelt een even grote rol in de ring van veeltermen en in de theorie van de algebraïsche getallen. Men vindt deze problemen in Chap. V. Tenslotte volgt nog een algemene opbouw van commutatieve lichamen — een volledige classificatie van alle mogelijke structuren van dat type.

Merkwaardig genoeg vindt deze theorie zijn oorsprong in de studie van de algebraïsche vergelijkingen met één onbekende: zij zijn de oorzaak geweest van de studie der commutatieve lichamen, van de theorie van Galois, terwijl het eigenlijke *oplossen* van de vergelijkingen veel meer op de achtergrond is komen te staan. De belangrijkste resultaten over niet-commutatieve lichamen vindt men in Chap. VII.

Naast algebraïsche structuren — zoals groepen, ringen en lichamen — die in Livre II het onderwerp van studie zijn, treden in alle delen van de analyse structuren van een geheel ander karakter op: dat zijn die, waar men de begrippen limiet, continuïteit en omgeving in de studie betreft. Die structuren nu zijn de onderwerpen van Livre III. Men ontmoet de begrippen limiet en continuïteit al erg vroeg in de wiskunde, nl. in de meetkunde en hun betekenis is — met de ontwikkeling van de analyse — steeds meer toegenomen. Het is echter niet zo lang geleden, dat men heeft ingezien, dat de draagwijdte van deze begrippen ver boven de reële en complexe getallen uit de klassieke analyse — waar ze toch het meeste toepassing vonden — uitgaan. Door een verregaande abstractie is men tenslotte tot een onderwerp uit de moderne wiskunde gekomen, dat

zijn bestaansrecht dubbel en dwars heeft bewezen. Vestigen we nl. een ogenblik de aandacht op het begrip „omgeving” van een punt P , d.i. de verzameling van de punten, die dicht bij P , of die in de nabijheid van P liggen. Die definitie krijgt een scherpere betekenis, als men „nabijheid” preciseert met behulp van het begrip afstand van twee punten met behulp van een niet-negatief reëel getal. Wil men deze gedachte tot iets bruikbaar ontwikkelen, dan dient dat begrip afstand aan zekere eisen, dus aan zekere axioma's te voldoen; ik denk aan de zg. driehoeksongelijkheid. Men krijgt op deze wijze een generalisatie van de euclidische meetkunde: men gaat er zelfs toe over om ook de elementen van zijn verzameling punten te noemen en om het geheel der punten „ruimte” te noemen. U merkt, dat men zich hier nog niet los van de reële getallen heeft weten te maken. Toch bezitten deze zg. metrische ruimte's eigenschappen, die men geheel los van de metriek kan uitspreken, zoals: elke deelverzameling, die een omgeving van a bevat, is ook een omgeving van a . De doorsnede van twee omgevingen van a bevat een omgeving van a . Deze eigenschappen nu — en andere — leiden tot een aantal consequenties, die men zonder dat begrip „afstand” — dat juist tot die omgevingen aanleiding gaf — kan afleiden. Dat brengt ons tot het begrip topologische ruimte — een begrip, dat onafhankelijk is van een theorie van de reële getallen. De keuze van de axioma's van de omgevingen bevat enige willekeur en men constateert — historisch — ook enige aarzeling. Het thans gebruikte stelsel axioma's dekt zeker de behoefte van de tegenwoordige wiskunde zonder dat men in dwaze algemeenheden vervalt.

Heeft men eenmaal de topologische structuren gedefinieerd, dan kan men het begrip continuïteit evenals het begrip limiet eenvoudig definieren. Het is vermeldenswaard, dat Bourbaki deze begrippen behandelt aan de hand van een begrip, nl. het begrip „filter”, dat voor zover mij bekend, nergens eerder is gebruikt, doch dat stellig niet zo consequent is doorgevoerd in de volgende hoofdstukken.

De andere Chap. van Livre III zijn gewijd aan problemen, waar men, behalve topologische structuren gelijktijdig het bestaan van andere structuren veronderstelt. Ik noem hier bv. de topologische groep, d.i. een verzameling G , die gelijktijdig alle eigenschappen van een groep en die van een topologische ruimte bezit, terwijl bovendien het groeps karakter en het topologische karakter verbonden zijn door eisen, die men samenvat met de woorden: „de groepoperaties moeten continu zijn”.

Verdere details over Livre III laat ik achterwege.

Livre IV bevat de elementaire analyse van functies van één

veranderlijke; de kennis van tien voorafgaande delen is dan voldoende om deze behandeling van de differentiaal- en integraalrekening te volgen.

Livre V en VI behandelen onderwerpen van een sterk specialistisch karakter: verdere aandacht voor de inhoud hiervan is op dit ogenblik niet nodig. Ik zou in mijn opdracht tekortschieten, indien ik U niet een en ander mededeelde over de wijze, waarop deze werken zijn geschreven. Moet men een leerboek over de algebra voor middelbaar onderwijs beoordelen, dan let men eensdeels op de behandelde stof, veel meer echter richt de kritiek zich tot de behandeling van de onderwerpen, met inachtnemen van de groep mensen, waarvoor het boek bestemd is. Hoe ligt dat probleem bij Bourbaki? Het antwoord, dat ik zou willen geven, luidt: de werken van Bourbaki zijn voor de student in de wiskunde, die in een zestal jaren van de belangrijkste gebieden van de wiskunde kennis moet nemen, als systematische bron van studie ongeschikt op grond van de zo brede basis, die men eerst dient te leggen, alvorens men tot de behandeling van de gebruikelijke onderwerpen overgaat. Bedenkt dat de werken van Bourbaki zich beperken tot de grondslagen, de algebra en de analyse. Ik zou deze bewering willen toelichten aan één voorbeeld, nl. de behandeling van de exponentiële functie a^x . Wij hebben voor ons Chap. V van Livre III en U dient te bedenken, dat de grondslagen, de algebraïsche structuren en de topologie voorafgingen. Ik laat nu de vertaling van de tekst volgen:

„Stelling 1. De multiplicatieve groep R_+^* van de reële getallen > 0 is een topologische groep, die isomorph is met de additieve groep R van de reële getallen.” (Het begrip groep, topologische groep en het begrip isomorphie wordt dus bekend verondersteld). De toelichting luidt nu: „Inderdaad, $R_+^* = (0; \infty)$ is een geopend interval van R en is dus homeomorph met R (zie Chap. IV, § 4) en volgens stelling 2 van § 3 is dus R_+^* een topologische groep, die isomorph met R is.” Deze laatste zinsnede vooronderstelt bekendheid met het begrip topologische afbeelding. De conclusie luidt dan: „Voor elk getal $a > 0$ bestaat dus één enkele continue afbeelding f_a van R op R_+^* , zodat $f_a(1) = a$. Men heeft *dus*:

$$f_a(x+y) = f_a(x) \cdot f_a(y) \text{ voor alle reële } x \text{ en } y, f_a(-x) = \frac{1}{f_a(x)},$$

waaruit in het bijzonder volgt, dat voor een geheel getal n geldt $f_a(n) = a^n$, enz.”

Deze behandeling is zonder twijfel voortreffelijk ¹⁾, doch — voor-

¹⁾ Zie ook: Dr. A. F. Monna: „Beschouwingen over de reële getallen” en „De invoering van de logarithme”, „Euclides” 28e jaarg. 1952—53.

opgesteld dat men in het eerste of in het tweede studiejaar toch de functie a^x behoorlijk moet kennen, dan zal men met mij instemmen, dat deze eerste- of tweede-jaarsstudent onmogelijk zoveel kennis in de achter hem liggende tijd kan hebben vergaard, dat hij in staat is om — zelfs met hulp — deze uiteenzettingen te volgen. Dat is echter in geen enkel opzicht als een bezwaar tegen deze Bourbaki-werken aan te voeren; de schrijvers hebben nergens te kennen gegeven, dat hun „Eléments de Mathématique” voor een eerste inleiding moesten dienen. Een ieder, die zich voor de moderne behandeling van één van de behandelde onderwerpen interesseert, die de moeite en de tijd er voor over heeft om het noodzakelijkste uit de daaraan voorafgaande delen te bestuderen, zal — ook door het gebruik van de franse taal, die zich voor dat doel zo goed leent — onder de indruk komen van de zorgvuldige, voortreffelijke behandeling.

Ik hoop, dat met deze enkele gegevens een kennismaking met de mysterieuze figuur Bourbaki voor U gemakkelijker is gemaakt; U zult er geen spijt van hebben.

ELÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

LIVRE I THEORIE DES ENSEMBLES

846, 1141 Fascicules de résultats

1212 { Chap. I Description de la mathématique formelle
 „ II Théorie des ensembles

LIVRE II ALGÈBRE

934, 1144 Chap. I Structures algébriques

1032, 1236 „ II Algèbre linéaire

1044 „ III Algèbre multilinéaire

1102 { „ IV Polynômes et fractions rationnelles
 „ V Corps commutatifs

1179 { „ VI Groupes et corps ordonnés
 „ VII Modules sur les anneaux principaux

LIVRE III TOPOLOGIE GÉNÉRALE

858, 1142 { Chap. I Str. topologiques
 „ II Str. uniformes

916, 1143 { „ III Groupes top.
 „ IV Nombres réels

1029, 1235 { „ V Groupes à un paramètre
 „ VI Esp. numériques et esp. projectifs
 „ VII Les groupes additifs R^n
 „ VIII Nombres complexes

1045 „ IX Utilisation des nombres réels en top. générale

1084 { „ X Espaces fonctionnels
 Dictionnaire

1196 Fascicule de résultats

LIVRE IV FONCTIONS D'UNE VARIABLE REELLE

1074	{	Chap. I	Dérivées
		„ II	Primitives et intégrales
		„ III	Fonctions élémentaires
1132	{	„ IV	Equations différentielles
		„ V	Etude locale des fonctions
		„ VI	Développements taylorieus généralisées; formules sommatoires d'Euler-Maclaurin
		„ VII	La fonction gamma

LIVRE V ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

1189	{	Chap. I	Esp. vectoriels topol. sur un corps valué
		„ II	Ensembles convexes et espaces localement convexes
1229	{	„ III	Espaces d'applications linéaires continues
		„ IV	La dualité dans les espaces vectoriels topologiques
		„ V	Espaces Hilbertiens (théorie élémentaire)

Dictionnaire

1230 Fascicule de résultats

LIVRE VI INTEGRATION

1175	{	Chap. I	Inégalités de convexité
		„ II	Espaces de Riesz
		„ III	Mesures sur les espaces localement compacts
		„ IV	Prolongement d'une mesure. Espace L^p

HET AFBEELDEN VAN GETALLENRIJEN EN HET WERKEN MET GRAFIEKEN IN DE WISKUNDELEERGANG VAN DE EERSTE KLAS M.O.

door

Dr. J. DE MIRANDA

Hoe kan het werken met algebraïsche vormen betekenis krijgen voor leerlingen aan het begin van de wiskundeleergang? Uitgaande van deze vraag kreeg ik bij de behandeling van Hst. Ia van de algebra van de Van Hiele's het idee, dat de regelmaat in getallenrijen kan uitlokken tot afbeelden, vinden van een formule, substitueren, extrapoleren, oplossen van een vergelijking en tenslotte tot het werken met grafieken.

Als grondslag voor het leren beheersen van deze belangrijke werkmethoden legde ik, bij de behandeling van Hst. Ia de nadruk op de naamgeving: de rij der oneven getallen, de rij der viervouden, de rij der machten van vijf enz. Aan deze rijen oefenden de leerlingen het formuleren van b.v. „de zesde term van de rij van de machten van 10” in cijfers of het vinden van de formule van deze rij 10^n , enz. (Het begrijpen van deze „woordenstroom” eist: taalbeheersing!) In de slechtste klas (Ic) was herhaalde uitleg en oefening nodig, voordat een dragelijk resultaat bereikt werd; in de klassen Ia en Ib kwam ik bij de eerste proef reeds zo ver.

Juist het *vinden van de formule*, dat b.v. bij de eerstgenoemde rijen zonder veel moeite gelukt, acht ik van groot belang. In al deze formules is *slechts* n variabel, n stelt ook slechts de rij der natuurlijke getallen voor. In deze eenvoudige vorm lukt het vinden van formules als een omschrijving in woorden gegeven is. De leerlingen met taalmoeilijkheden, woordblindheid edgl. vinden hier goede oefeningen. Ik maakte de intense vreugde mee van de ontdekking, dat „de rij der veelvouden van drie” hetzelfde betekende als „de rij der drievouden”, terwijl het vinden van de „rij der veelvouden van een derde” een hoogst boeiende opgave bleek te zijn. Ook moet de formule gevonden worden als van een getallenrij, b.v. de eerste vier termen gegeven worden. De formule kan vervolgens meteen gebruikt worden om b.v. de 25e term uit te rekenen. Aanvankelijk achten veel leerlingen het opschrijven van alle 25 termen de veiligste weg, maar langzamerhand — b.v. ook door de 360e term

te vragen! — komen toch alle leerlingen ertoe, om eerst de formule op te zoeken. Het woord „substitutie” gebruikte ik hier nog niet, omdat nog geen alternatief (oplossen van een vergelijking) ter sprake kwam.

Na deze eerste kennismaking (eind September, begin October) volgde eerst een concentratie op andere onderwerpen (o.a. symmetrie). Na een afronding hiervan begon ik op 7 November met een nieuw onderwerp: „*Grafieken*”. De leerlingen moesten hiervoor slechts een ruitjesschrift meebrengen (en het normale tekengereedschap). De verwachting werd juist gespannen door dit begin zonder boek of gestencilde opgaven. Ik begon ermee op te merken, dat dit nu echt wiskunde was: zo te beginnen met een blanco schrift. Verder moesten wij alles zelf bedenken! (Bij symmetrie moest je symmetrievlakken en -assen er ook bij denken, hetgeen toch niet een willekeurige fantasie werd.) Om nu te komen tot een duidelijke opgave bracht ik in herinnering wat we nu bij getallenrijen hadden gevonden; de rij der even getallen b.v. neemt gelijkmatig toe (verduidelijkt door een armbeweging) terwijl b.v. de rij der kwadraten steeds sneller toeneemt (ander gebaar). Welnu: deze armbewegingen willen we gaan afbeelden. Zo zien we die getallenrijen a.h.w. vóór ons en zo kunnen wij ze veel beter begrijpen. Als *eerste hoofdstuk* (in het boek dat we gaan schrijven) komen we dus tot: „*Het Afbeelden van Getallenrijen*”. Aldus is, weliswaar onder mijn leiding, maar toch onder algemene „adhaesie-betuigingen”, een nieuwe gezamenlijke *opgave* gesteld. Nu komen de bijdragen uit de klas: we beginnen „natuurlijk” met de rij der even getallen. Mijn suggestie is nodig om een „visgraatje” te maken: zie fig. 1a.

Het is nodig de *gegevens* op een dergelijke wijze te *classificeren* en te *ordenen*. Latere moeilijkheden komen dikwijls hieruit voort, dat de leerlingen zich niet realiseren, dat dit „een rangnummer” is en dat „een term van de rij”. Dit is moeilijker dan b.v. het classificeren van bladen volgens nervatuur, want het kenmerk is nu niet visueel aanwijsbaar¹⁾. Zo kan het getal 4 zowel rangnummer zijn als term van de rij; door plaatsing in het „visgraatje” vindt genoemde classificatie echter plaats.

Nu wordt op ruitjespapier de betreffende tekening gemaakt (fig. 1b). Bij ieder rangnummer wordt de term aangegeven door een verticale streep met bovenaan een dikke stip. Uit de klas komen uitroepen: die punten liggen op een rechte lijn! Die lijn trekken we,

¹⁾ Met het classificeren van bladen volgens een zestal gezichtspunten begon ik het plantkunde-onderwijs teneinde later transfer mogelijk te maken van deze methode op andere objecten met minder aanschouwelijke kenmerken.

maar in een andere kleur. Want — in klasgesprek — realiseren we ons de betekenis van deze lijn: we zien *slechts* dat die punten op deze rechte lijn liggen. Maar we mogen dit niet omkeren: niet alle punten van die rechte lijn stellen even getallen voor. (Alle mensen zijn zoogdieren, maar onder de zoogdieren komen ook paarden, koeien enz. voor). „En, wat zou de volgende opgave zijn

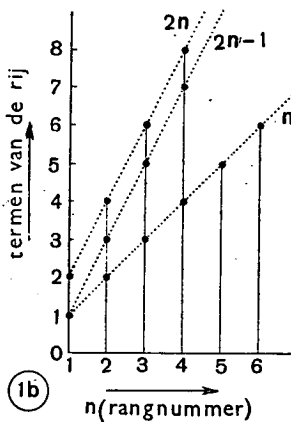
Fig. 1.

Rij der even getallen

(1a)	n	1	2	3	4	rangnummer
formule	$2n$	2	4	6	8	termen v. d. rij

Rij der oneven getallen

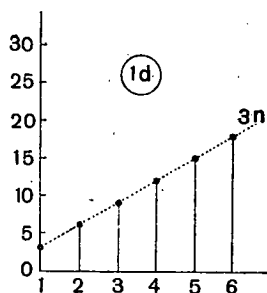
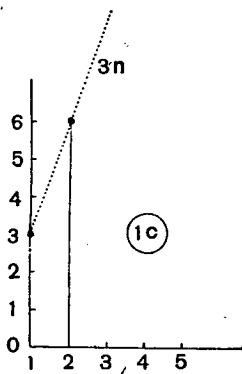
n	1	2	3	4
$2n-1$	1	3	5	7



Rij der natuurlijke getallen

Rij der drievouden

n	1	2	3	4
$3n$	3	6	9	12



in het boek dat we niet hebben?”, zo vraag ik aan één van de leerlingen. “Laten we eens de rij der oneven getallen afbeelden.” Zo gezegd, zo gedaan. (Hoe eenvoudig en voor de hand liggend dit ook is, toch acht ik het van *zeer groot belang de leerlingen er toe te brengen, zelf hun opgaven te vinden*. Behalve op methoden van werken moet ons onderwijs gericht zijn op de vorming van *probleemgevoeligheid*; zou dit eigenlijk niet haast 't allerbelangrijkste zijn?)

Als resultaat verkrijgen we een lijn die evenwijdig loopt aan de lijn door de even getallen, telkens één lager (fig. 1b). Uit de klas komt (soms): maar dat kon je aan de formule $(2n-1)$ wel zien! Het *leggen van verband tussen afbeelding en formule* is weer van 't grootste belang, methodisch gezien.

Als volgende opgave beelden wij de rij der natuurlijke getallen af (fig. 1b). De lijn loopt minder steil. Bij de drievouden (fig. 1c) en viervouden daarentegen loopt de lijn steeds steiler. We kunnen deze ervaring pas eenvoudig formuleren, nadat we in de formules $1n$, $2n$, $3n$ en $4n$ het cijfer een *naam* gegeven hebben (coëfficiënt): „de lijnen lopen steiler naarmate de coëfficiënt groter wordt”. Tevens staan we nu voor de vraag: „hoe beelden wij getallenrijen met grote coëfficiënten af?” Uit de klas komt het antwoord: „op schaal tekenen” (fig. 1d). (In de aardrijkskundelessen waren de leerlingen uitvoerig bezig met vragen over de betekenis van een kaart, hoe deze tot stand komt, wat wij er uit kunnen aflezen edgl. Hier vond een duidelijke „*transfer*” van *oplossingsmethode* plaats). Nu moeten de termen „abscis” en „ordinaat” ingevoerd worden. In het algemeen moeten wij de maateenheid op de ordinaat aanpassen aan de getallenrij die we willen afbeelden. We zien dit aan het visgraatje. Nu we deze regel en werkwijze gevonden hebben, is het zelfvertrouwen duidelijk zichtbaar: nu kunnen we ook de rij der b.v. vierentwintigvouden afbeelden — of welke rij ook die opgegeven wordt! (Inderdaad kunnen vrijwel alle leerlingen dit).

Wat is de volgende opgave? De rij der kwadraten komt aan de beurt. (Dikwijls werd al veel eerder hiernaar gevraagd, maar dan wees ik er op, dat eerst nog eenvoudiger opgaven om een oplossing vroegen. Ik geef wel degelijk leiding aan de probleemontwikkeling — maar verantwoord me steeds tegenover de klas).

Sommige vlugge leerlingen hebben het kunstje door: ze tekenen de eerste en de zevende term (b.v.) en trekken een rechte lijn. Vervolgens trekken ze bij ieder rangnummer een lijn omhoog! „Hoe groot is dus de vierde term?” vraag ik — en dan wordt de fout gevonden. In een andere klas kwam spontane critiek van leerlingen die deze rechte lijn zagen. Voor velen is het inderdaad een verrassing dat hier een kromme lijn ontstaat. In iedere klas waren er ook leerlingen die meteen zich herinnerden dat de „rij der verschillen” die was van de oneven getallen (Hst. 1a algebra). Het verband tussen afbeelding en formule wordt (door sommigen) spontaan gelegd en door de meeste leerlingen onder bijval opgenomen. De vorming tot „wiskundig denken” wat betreft instelling, habitus, denkwijze, is duidelijk aan de gang! De meeste kinderen

zijn volkomen geboeid door het verrassende perspectief dat iedere nieuwe opgave blijkt te bieden.

Zo worden ook de rijen der derde en vierde machten afgebeeld, waarbij steeds de juiste maateenheid op de ordinaat gekozen moet worden. We vinden dat de lijnen sneller omhoog lopen naarmate de „exponent” groter is. Op ongedwongen wijze wordt het vinden van een formule en het gebruik van technische termen gerepeteerd!

Tenslotte vormen ook de rijen der machten van twee, drie enz. dergelijke kromme lijnen, des te steiler naarmate het „grondtal” groter is.

Hiermee is ons onderzoek voorlopig afgesloten. Ter oefening en ook als uitbreiding van hun ervaring, *geef* ik nu nog enkele andere interessante getallenrijen. Vooreerst: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ enz. Als formule vinden de leerlingen na enige pogingen: $\frac{1}{n}$.

Ik vertel, dat men $\frac{1}{2}$ „het omgekeerde van 2” noemt (n.l. van $\frac{2}{1}$). Dit is dus de „rij der omgekeerden”. We zien dat het „een afdalende rij” is, in tegenstelling met de „opklimmende rijen”, die wij tevoren onderzochten. We moeten dus op de ordinaat bovenaan met 1 beginnen en vervolgens een tiendelige indeling maken. (Allemaal „nieuwe” gezichtspunten, die in een geanimeerd klasgesprek, volgende op besprekingen in ieder werkgroepje, zorgvuldig ontwikkeld moeten worden! Verscheidene leerlingen hebben nog moeite met het tiendelig maken van deze breuken...) Vervolgens geef ik de rij $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ enz. We maken een visgraatje en zoeken dan naar een formule. Na enig zoeken komt deze inderdaad uit de klas: $\frac{n-1}{n}$. Zoeken wij nu ook naar een naam voor de rij, dan blijkt

niemand een korte eenvoudige naam te kunnen bedenken (ik ook niet)! Hier hebben we m.a.w. het punt bereikt, waar de *algebraïsche formule duidelijker is dan elke (ingewikkelde) omschrijving in woorden*. We zitten „midden” in de algebra. (Ik heb hier het gevoel van de zeeman die de kust niet meer kan zien en op zijn kompas vertrouwt).

Gaan we deze rij nu afbeelden in dezelfde figuur als de vorige rij, dan ontstaat een symmetrische figuur, met een symmetrieas door 0,5 (fig. 2).

Dit weerzien met het vorige onderwerp (symmetrie) is zeer verrassend! We kunnen ook inzien, waarom de figuur symmetrisch is: de aanvulling van b.v. $\frac{3}{4}$ tot 1 bedraagt juist $\frac{1}{4}$ enz. Het herkennen van symmetrie leidt dus tot nieuw inzicht: de figuur en de beide getallenringen hebben we nu beter begrepen.

Teneinde de waarde van de algebraïsche formule goed te laten

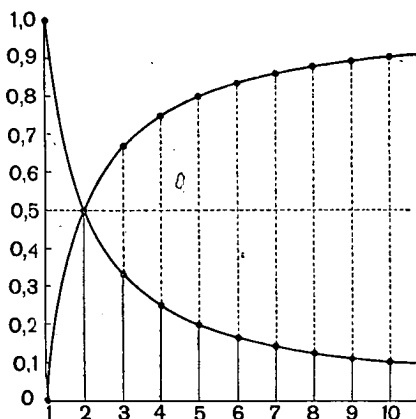
uitkomen, geef ik nu de rij: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13. . . . der rij der ondeelbare getallen (priemgetallen). Ik vertel dat dit een beroemde („beruchte”!) rij is die reeds de oude Grieken bezig hield. (In de geschiedenislessen werd, via historische resten in de omgeving, een grove periodisering der geschiedenis in gezamenlijk onderzoek vastgesteld. Vervolgens werden o.a. de Grieken als voorlopers van de Romeinen ontdekt). De zeef van Eratosthenes passen wij toe

Fig. 2.

Rij der omgekeerden

n	1	2	3	4
$\frac{1}{n}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
	1	0,5	0,33	0,25

n	1	2	3	4
$\frac{n-1}{n}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$



op de eerste 100 natuurlijke getallen en we houden — na vergelijking van uiteenlopende resultaten der afzonderlijke werkgroepjes — 26 priemgetallen over. Van deze rij maken wij een afbeelding: er ontstaat geen „vloeiende” lijn. Ook wanneer ik vertel, dat het zoeken naar regelmaat (formule) door de eeuwen heen vruchteloos bleef, gaan sommige leerlingen hardnekkig door met zoeken! Juist deze uitzondering bevestigt dus de regel, dat getallenrijen i.h.a. door een formule kunnen worden samengevat. Ontbreekt echter de formule, dan kunnen we niet uitrekenen, hoe groot b.v. de 150e term zal zijn. De *formule* is dus veel belangrijker dan de naam (vgl. de rij $\frac{n-1}{n}$ zonder naam maar met een formule). Al

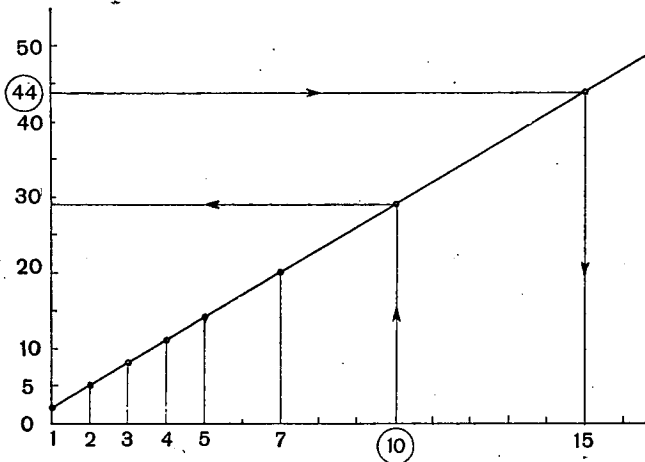
doende is de aandacht dus gevestigd op het gebruiken van de formule voor „*extrapolatie*”. Deze term voer ik nu ook in en dit wordt ons tweede hoofdstuk. Als proef liet ik b.v. de aantallen diagonalen in regelmatige veelhoeken als rij afbeelden, of de rij van de machten van $\frac{1}{2}$, naast een meer „gewone” getallenrij voor de minder inventieve ll. Maar het waren *nieuwe* opgaven, waaraan de methode

van werken („kunde” gesteund door „kennis” en . . . „houding”) getoetst werd.

Hst. II „*Extrapolatie*” begon ik met een reeds bekende getallenrij: 2, 5, 8, 11 . . . Hiervan maakten we een visgraatje en vervolgens een afbeelding (fig. 3).

Het is voor de leerlingen duidelijk, dat we nu b.v. vragen: hoe groot is de 10e term? Uit de afbeelding lezen we af: ongeveer 30 (tekenonnauwkeurigheden). Om een nauwkeurig antwoord te krijgen, moeten we òf nauwkeuriger tekenen, òf berekenen uit de

Fig. 3.



n	1	2	3	4	5
?	2	5	8	11	14

10^e term = ?

Formule $2 + (n-1)3$ $n = 10$

↑

Substitutie

$$\begin{aligned}
 2 + (10-1)3 &= 2 + 9 \times 3 \\
 &= 2 + 27 \\
 &= 29
 \end{aligned}$$

Is 44 een term? De hoeveelste?

$$2 + (n-1)3 = 44 \quad \text{vergelijking}$$

$$(n-1)3 = 42$$

$$n-1 = 14$$

$$n = 15$$

formule. Na enig zoeken wordt deze gevonden: $2 + (n-1)3$. (Het vinden en doorzien van zo'n formule is voor veel leerlingen heel moeilijk, maar na enige lessen, waarin we aldoor met dit soort rijen en formules bezig zijn, lukt 't toch iedereen). De methode van invullen in de formule, die we vroeger reeds in eenvoudige gevallen toepasten, krijgt nu ook een naam: *substitutie*.

De 10e term blijkt 29 te zijn. We vinden dus twee werkwijzen (grafische extrapolatie en substitutie) die tot hetzelfde resultaat moeten voeren. Hierdoor wordt *zelfcontrôle* mogelijk, hetgeen methodisch en algemeen vormend van groot belang is!

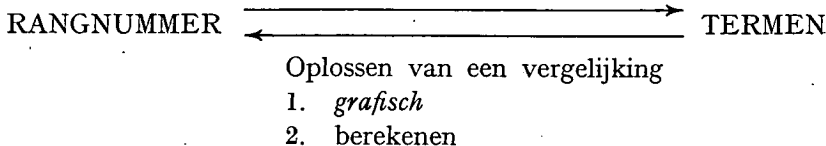
We kunnen ook een *ander soort vraag* stellen: is 44 een term van de rij? Zo ja, de hoeveelste? (Deze vraag sluit aan bij wat we opmerkten bij de rij der even getallen: niet alle punten van de lijn stellen even getallen voor).

Grafisch bewandelen wij nu dezelfde weg in omgekeerde richting: (fig. 3) en we vinden: 44 is waarschijnlijk(!) de 15e term. Kunnen we dit ook uitrekenen? De formule stelt „een” term van de rij voor, dus óók *deze* term: $2 + (n-1)3 = 44$ $n = ?$ Dit is een „*vergelijking*”, de n heeft nu één bepaalde waarde — we weten alleen niet welke. De n is nu „de onbekende” die we gaan berekenen. Zonder moeite vindt de klas $n = 15$. Nieuwe rekenregels zijn hierbij niet nodig. Daarom kan de volle aandacht vallen op de methode „*het oplossen van een vergelijking*”. Hierin kwam de onbekende „*impliciet*” voor, door „*uitpellen*” wordt de n „*expliciet*”, d.i. bekend.

In klasgesprek realiseren we ons goed, dat de n in een vergelijking een andere betekenis heeft dan in een formule. In de formule betekent n „een” rangnummer: we mogen ieder natuurlijk getal substitueren. In de vergelijking daarentegen betekent n „*één*” rangnummer; substitutie is nu natuurlijk zinloos, we kunnen alleen de onbekende uitrekenen.

Op deze wijze ontstaat op een voor de ll. zinvolle en begrijpelijke wijze een logisch afgerond geheel van twee soorten vragen en bij ieder twee oplossingswijzen.

1. *grafische extrapolatie*
2. substitutie en uitrekenen



Het leren werken met zulk een (min of meer) gesloten geheel van werkwijzen acht ik van groot belang. Alleen op zulk een afgegrensd gebied kunnen de ll. tot volledige „beheersing” komen.²⁾

In de eerste plaats gaat het hier om het herkennen (classificeren) van de rol die bepaalde getallen of letters spelen (b.v. „44 is een term van de rij” of „ n is nu de onbekende, d.w.z. de n heeft een bepaalde waarde, ik weet alleen niet welke”, enz.) In de tweede plaats gaat het ook om het classificeren van opgaven en bijbehorende werkmethoden (b.v. een term van de rij is bekend — 44 — en het rangnummer wordt gevraagd, ik moet „dus” een vergelijking oplossen, enz.) Juist het leren classificeren op deze tweede manier hebben veel ll. hard nodig.

Voor de ll. blijkt het belang door vervolgens een afdalende rij te onderzoeken: 156, 150, 144, 138 . . . Bij deze afbeelding zetten wij de abscis willekeurig (!) bij 100, omdat we anders te veel papier nodig hebben. De lijn door deze vier punten snijdt deze abscis even voorbij de 10e term. Inderdaad blijkt bij substitutie de 10e term 102 te zijn. (100 is dus géén term van de rij!) Ook met deze afdalende rij kunnen wij blijkbaar omgaan. We stellen daarom ook een vraag van de andere soort: is b.v. 72 een term van de rij? Diverse ll. zien direct dat dit het geval moet zijn, want 72 ligt 30 lager dan 102 en 30 is een zesvoud. Dit *directe zien* is van groot belang — maar toch gaan we ook de vergelijking proberen op te lossen. (Het resultaat telt minder dan het leren van methoden: als we het niet direct zien, *moeten* we immers de methode „oplossen van een vergelijking” gebruiken). Het opstellen van de vergelijking kan iedereen: $156 - (n-1)6 = 72$ $n = ?$ Maar nu komen, wegens het min-teken, allerlei wilde voorstellen los: „Nu moet je optellen!” „Nu eerst delen door zes!” enz. Toch voelt niemand zich zeker van zijn zaak; zo vanzelfsprekend als het met een plusteken ging, lukt 't hier niet, omdat we niet 156 van 72 kunnen aftrekken. We laten het er even bij en zoeken een andere weg. Grafisch lukt 't wel: 72 is waarschijnlijk (!) de 15e term. (Wij maken een afbeelding, waarbij de waarden 0—100 op de ordinaat voorkomen.)

Na cōntrole door substitutie weten we het zeker: De ll. *leren hier uit hun arsenaal van werkwijzen de juiste te kiezen*. Vervolgen wij de afdalende rij, dan komen we op de abscis, die nu gewoon bij nul getekend is, ongeveer uit bij de 27e term. Door substitutie blijkt de 27e term inderdaad nul te zijn. Kunnen we nu in dit geval

²⁾ Vgl. mijn „Verkenning van de „Terra Incognita” tussen praktijk en theorie in Middelbaar (Scheikunde-)Onderwijs” (Wolters, 1955) p. 143.

de vergelijking oplossen? $156 - (n-1)6 = 0$. Door handopleggen wordt dit $156 - \dots = 0$. en ieder herinnert zich ritsen sommetjes uit de 2e klas L.S. Dus $(n-1)6 = 156$ enz. Maar ik wil het werken met technische termen bevorderen en ik bekijk deze vergelijking nog eens. We classificeren het stuk vóór het gelijktteken als „een verschil van twee termen” en er staat nu dat dit verschil gelijk aan nul is. (De klas zit nog zwaar te denken, want het is moeilijk om $(n-1)6$ als één term te zien.) Ik zeg hetzelfde anders: „er is dus geen verschil tussen die termen — dus zijn ze gelijk!” Opeens breekt overal het inzicht door: ja, zo is 't; 't is eigenlijk heeleenvoudig. (Dit doorbreken van inzicht was een moment van heel intense, gezamenlijk beleefde, vreugde! Ook voor mij kwam deze draai eerst als een onvoorbereide flits; in de beide andere klassen bereikte ik echter met enig acteren toch hetzelfde). Hier vinden we een mooi voorbeeld van *taaldenken t.o. wiskundig denken*. Wiskundig is „het verschil tussen twee termen is nul” geheel duidelijk; voor de kinderen is 't echter een *grote* stap naar beter begrip als ik zeg: er is dus geen verschil tussen beide termen. Zulke ervaringen kunnen ons opeens duidelijk maken, waarom de kinderen soms zo weinig vasthouden van onze „*zorgvuldige*” uitleg!

Tenovervloede liet ik nog in woorden formuleren $156 - \dots = 0$. Niemand — zelfs niet toen ik dat terloops tevoren reeds gezegd had — kwam tot: „wat moet ik van 156 aftrekken om niets over te houden”. Hier bleek wel heel duidelijk, hoezeer op laag niveau nog zeer veel verbeterd moet worden aan gewone taalbeheersing. Anders moet straks de meer ingewikkelde wiskunde bij veel leerlingen ontaarden in het leren van maniertjes, foefjes.

Intussen is het duidelijk, dat wij nu die vergelijking $156 - (n-1)6 = 72$ wel kunnen oplossen: $156 - \dots = 72$, „wat moet ik van 156 aftrekken om 72 over te houden?” Dus $(n-1)6 = 84$. $\dots \times 6 = 84$. „Wat moet ik met zes vermenigvuldigen om 84 te krijgen?” $n-1=14$ en $n=15$. *De formulering in gewone taal kan hier een duidelijke steun zijn bij het wiskundig denken*, omdat die cijfers dan pas eigenlijk „spreken”. — Wie het oplossen van een vergelijking werkelijk beheerst, heeft deze „omweg” over de taal niet meer nodig. Maar komt hij in moeilijkheden, dan moet hij deze omweg kunnen gaan, want dikwijls komt dan pas de oplossing in zicht. Wie deed niet de ervaring op, bij zichzelf en bij anderen: „ik begrijp 't niet”, „wat begrijp je niet?” ... en tijdens de uiteenzetting wordt het onbegrepene opeens duidelijk!

Tenslotte volgen wij de afdalende rij beneden nul, in een aparte afbeelding. Beide soorten vragen worden door II. gesteld en (in

wergroepjes en klasseggesprek) beantwoord. De ordinaat fungeert vanzelf als getallenlijn, waarop we aflezen bijv. $+156-234 = -78$.

Illustraties met bergbeklimmen, wassen en dalen van water, bezit en schuld, maken een en ander beleefbaar duidelijk. N.B.: ieder spoor van het formalisme $++ = +$, $+ - = -$ enz. liet ik angstvallig weg, ook waar het uit de klas kwam (recidivisten). Dit zou hier m.i. slechts verwarrend werken.

Nu is een merkwaardig soort opgave mogelijk: „bedenk een getallenrij (die je kunt extrapoleren); bedenk hierbij een vraag; beantwoord deze en controleer jezelf; bedenk dan een andere soort vraag en doe hiermee hetzelfde.”

Het is bijzonder belangrijk dat de leerlingen zèlf hun opgaven bedenken en volledig uitwerken! Dit is vooral in zulk een logisch afgerond geheel mogelijk.

Het afbeelden van getallenrijen is hiermee afgesloten. De overgang naar echte *grafieken* maakte ik via een plantkunde-natuurkunde-practicum.

In de plantkundelessen³⁾ werd de vraag gesteld: waarvoor dienen bladeren? Hoe werken ze? Hierbij werd het duidelijk dat water hier een grote rol speelt. We droogden bladeren reeds tussen filtreerpapier. Nu gaan we na, hoeveel water in verschillende bladen voorkomt en hoeveel ze uitdrogen. We moeten dus wegen.⁴⁾ Iedere leerling maakt (in de handenarbeidles) een eenvoudige brievenweger van dun karton en koperdraad.⁵⁾ Voor het ijken gebruiken we centen, die vrijwel 2 gr. wegen. (Iedere weging is slechts relatief, precies 2 gr. is dus niet nodig om tòch tot een juist percentage drooggewicht te komen. Methodisch is deze overweging héél belangrijk!) Een hoeveelheid bladen van een bepaalde soort wordt op het schaalteje gelegd of aan draadjes geregen en opgehangen. Twee ll. doen telkens dezelfde proef (met twee balansjes; contrôle!) Hetzelfde soort bladen wordt door andere leerlingen eerst stukgeknipt. Weer anderen wegen lange stukken steel er aan. Zo worden ook verschillende soorten onderzocht. We zetten m.a.w. een planmatig gevarieerde experimentenreeks in. Op ongeregelde tijden worden de gewichten (en tijden) afgelezen. Terwijl deze proef aan de gang is, volgt een andere. Ieder groepje van twee leerlingen krijgt een erlenmeijer (500 ml.), een maatglas (100 ml.) en een bekersglas (400 ml.). De vorm van de erlenmeijer

³⁾ Na het classificeren van bladvormen.

⁴⁾ K. Baur, Eine einfache Methode zur Beurteilung der Feuchtigkeitsansprüche der Pflanzen, Math. u. N.W. Unterr. 8. 81, 1955—'56.

⁵⁾ Zie: Proevenboek, G. H. Frederik en A. W. Middeldorp uitg. Luctor, Baarn.

lokt nu a.h.w. uit tot de voorstelling: bij gelijkmatig vullen met water zal het oppervlak steeds sneller stijgen. We gaan dit nu ook meten. Er is dus om te beginnen een (vrij) duidelijke opgave en een verwachting van een resultaat. Het schijnt ook ieder duidelijk, dat het maatglas ervoor dient om telkens *gelijke* porties water in de erlenmeijer te doen (b.v. telkens 50 ml.). Proberen we dan echter *precies* b.v. 50 ml. in het maatglas af te passen, dan blijkt dit niet zo eenvoudig te zijn. Vooreerst moeten we de *onderkant* van het oppervlak aflezen (moeilijk te zien), ons oog moet op dezelfde hoogte staan als het oppervlak en we moeten tot 0.1 ml. schatten. Meestal bevat het maatglas *iets* te veel of te weinig. Nu dit afpassen van precies gelijke porties moeilijk en tijdrovend blijkt te zijn, realiseren we ons dat het ook *overbodig* is! Doen wij b.v. slechts 48,3 ml. water in de erlenmeijer, dan zal diens vorm er vanzelf voor zorgen dat het oppervlak iets minder stijgt (dan met 50 ml.) en als wij een grafiek maken krijgen we toch een goed meetpunt. (Sommigen begrijpen dit direct, anderen zien het pas al doende of achteraf). Teneinde iets van de afronding bij de bodem in de grafiek te zien, spreken we af, in het begin met porties van ongeveer 20 à 30 ml. te werken (maar wel precies afgelezen), terwijl later porties van ongeveer 50 ml. genomen worden, tot de erlenmeijer vol is. In de erlenmeijer wordt een liniaaltje gezet om de stijghoogte te meten.

In de eerste les is nog tijd om even te proberen, hoe 't gaat.

In de volgende les (blokuur) wordt de meting verricht. De meeste leerlingen gaan meteen zeer doelbewust en geconcentreerd aan het werk. De resultaten moeten in een zelf ingedeelde(!) tabel worden bijgehouden.

Groepjes die vlug klaar zijn, zoeken al vast uit, hoe nu die tabel omgewerkt moet worden tot grafiek. Tenslotte, als ieder met meten klaar is, komt dit punt in een algemeen klasseggesprek aan de orde. Hierbij wordt onze opgave duidelijker: „hoe hangt de stijghoogte af van de hoeveelheid water in de erlenmeijer”? (Enkele leerlingen kwamen zelf tot een dergelijke formulering). Het gebruik van mm papier, de indeling op abscis en ordinaat enz. vormen punten van klasseggesprek (waarin ik inderdaad vrij veel moet „uitleggen”, maar nadat de behoefte gerezen is). Voor veel ll. is het eerst raadselachtig, hoe ik aan hun grafiek kan zien, waar reken- of opzoekfouten zijn gemaakt. Langzamerhand komen ze echter zelf uit onregelmatigheden tot: dat moet ik nog eens nagaan. Tenslotte zijn er leerlingen die de meetpunten door rechte lijnen met elkaar verbinden en anderen die een vloeiende (veelal: golvende) lijn dóór hun meetpunten trekken. In klassediscussie wordt dan het verschil

tussen het afbeelden van een getallenrij en een grafiek duidelijk: nu horen de tussengelegen punten er wél bij. Vandaar het *interpoleren*. Door interpolatie stellen we achteraf een tabel op die we gevonden zouden hebben als we telkens gelijke porties van 50 ml. hadden toegevoegd!

Ik vertel nu, dat men de grafiek steeds zo inricht, dat de „onafhankelijk veranderlijke” op de abscis en de „afhankelijk veranderlijke” op de ordinaat wordt afgezet. Vanuit onze opgave: „hoe hangt de stijghoogte af van de hoeveelheid water” worden deze termen duidelijk. Op dezelfde wijze kunnen we nu ook onze weegproef begrijpen: hoe hangt het gewicht af van de droogtijd? (En niet omgekeerd!) Hiervan wordt nu ook een tabel en grafiek gemaakt. Het vergelijken en interpreteren van zulke grafieken is zeer belangrijk en vormend.

In een voortgaand, boeiend, onderzoek kwamen wij dus min of meer „terloops” tot een derde (en voorlopig laatste) deel van het hoofdstuk „grafieken”.

Als resultaat in de II. werd niet alleen de beheersing van belangrijke werkmethoden, begrippen, ordeningsmiddelen (zgn. „kunde”) bereikt, maar ook de „houding” tot dit soort onderwerpen en tot deze wijze van denken werd positief gevormd. Bovendien voerde het onderzoek tot bepaalde resultaten. De „kennis” hiervan werd onder de meest gunstige omstandigheden verworven en bleek dan ook in de loop van het jaar in veel opzichten „blijvend” te zijn. Behalve deze driedelige vormende waarde (vgl. mijn „Verkenning . . enz.” Hst. III) werden hier ook resultaten verkregen waarop de leergang verder kan bouwen. De meetresultaten van de droogproeven kunnen immers direct biologisch gebruikt worden (vgl. het genoemde artikel van Baur). En de curve bij het vullen van de erlenmèijer zal later een liggende parabool blijken te zijn wegens het kwadratisch verband tussen straal en hoogte, als wij afgeknotte kegels vergelijken met gelijke inhoud.

EINDEXAMENS-LUXEMBURG 1956

De redactie ontving van Dr. A. Gloden, Luxemburg, de opgaven van de eindexamens der middelbare scholen van dit jaar. Aan het begeleidend schrijven ontnemen we:

„Je me fais un plaisir de vous adresser ci-inclus l'ensemble des Questions posées en Mathématiques à notre examen de fin d'études secondaires dans les Lycées classiques du Grand-Duché, juin 1956 (élèves âgés de 19 ans), estimant qu'elles présenteront peut-être quelque intérêt pour vous.

Dans nos Lycées classiques il y a *trois* examens différents:

I. les Sections *gréco-latine* et *latine A* composent en „Algèbre et Géométrie” (coefficient 2), et en Trigonométrie (coefficient 1);

II. les élèves de la Section *latine C* (sciences naturelles) ont à faire, en dehors des compositions précédentes, où les questions sont *communes*, une composition de calcul différentiel et intégral et une composition de Géométrie analytique;

III. ceux de la Section *latine B* (mathématiques spéciales) composent

- 1) en Calcul différentiel et intégral;
- 2) en Géométrie analytique;
- 3) en Compléments de Géométrie.

Les questions pour cette section sont *toutes distinctes* de celles pour la Section *latine C*.”

We zijn Dr. Gloden dankbaar voor de moeite die hij zich heeft getroost om de Nederlandse collega's van de Luxemburgse eisen op de hoogte te brengen.

Hieronder volgen de opgaven.

Grand-Duché de Luxembourg

Lycées classiques

Examen de fin d'études secondaires

juin 1956

I. Questions communes aux Sections *gréco-latine*, *latine A* et *latine C*.

Algèbre et Géométrie

1. Trouver les dérivées de:

$$y = \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 7 \text{ pts}$$

$$y = \frac{\cotg x \cdot \sin x}{\sqrt{2 \cos^2 x - \sin^2 x}}. \quad 7 \text{ pts}$$

2. Intégrer:

$$\int (\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x^3})^2 \sqrt[5]{x} dx; \quad 7 \text{ pts}$$

$$\int \left(\frac{1}{\cos} x - \operatorname{tg} x \right)^2 dx. \quad 7 \text{ pts}$$

3. Etudier les variations de la fonction:

$$y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 1}. \quad 10 \text{ pts}$$

4. Etudier les variations de la surface totale du cône droit circonscrit à une sphère. 8 pts

5. Trouver l'aire comprise entre la courbe $y^2 = 4x$ et la bissectrice du premier quadrant. 8 pts

Trigonométrie

1. Rendre calculable par logarithmes: $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c$, sachant que $a + b + c = 90^\circ$. 6 pts

Réduire à sa plus simple expression:

$$1 - \frac{1}{\operatorname{tg} a} + \frac{2}{\operatorname{tg} 2a}.$$

Trouver, sans tables, la valeur du résultat, si $a = 15^\circ$. 12 pts

2. Résoudre l'équation trigonométrique:

$$4 \sin^3 x + \cos x \sin 2x - 6 \sin^2 x \cos x = 0. \quad 18 \text{ pts}$$

3. Un avion avance horizontalement dans un même plan vertical avec deux tours distantes l'une de l'autre de 5 km. De l'avion on voit, à un certain moment, les pieds de ces deux tours sous les angles d'inclinaison de $30^\circ 18'$ et $41^\circ 25'$.

Quelle est alors la distance de l'avion à la tour la plus proche? Après combien de temps survolera-t-il cette tour, si la vitesse de l'avion est de 400 km/h? 18 pts

II. Sous-section latine C (section des sciences naturelles).

Compléments de Mathématiques
Calcul différentiel et intégral

1. Calculer les dérivées des fonctions suivantes:

a) $y = \text{Log } \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}};$

b) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}};$

c) $y = \text{Log } \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} - x}.$

2. Intégrer:

a) $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)};$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x \, dx;$

c) $\int x^2 e^{ax} dx. \quad (9 \text{ pts par question})$

Géométrie analytique

1. Trouver les points où la droite $y = 7x$ coupe le cercle: $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$. Etablir les équations des tangentes en ces points. Calculer leur point d'intersection ainsi que l'angle qu'elles forment.

2. On donne l'ellipse $16x^2 + 25y^2 = 400$. Trouver l'équation de la tangente au point $P(0, y < 0)$. Trouver ensuite les équations des tangentes à l'ellipse qui sont parallèles à la droite $3x - 2y - 6 = 0$ et calculer les coordonnées des points d'intersection de ces tangentes avec la précédente.

3. Indiquer le genre de la conique: $3x^2 - 8xy + 4y^2 + 6x - 4y + 1 = 0$. Trouver les équations des asymptotes éventuelles et construire la courbe.

18 pts par question

III. Sous-section latine B (mathématiques spéciales).

a. Calcul différentiel et intégral

1. Etudier au point de vue de la convergence les séries suivantes:

$$\text{a) } \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3^2}{3 \cdot 4} + \frac{3^3}{4 \cdot 5} + \dots \quad 4 \text{ pts}$$

b) $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$ 4 pts

2. Calculer la dérivée de la fonction:

$$y = \arccos \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad 5 \text{ pts}$$

3. Trouver la limite de

$$\frac{(x - \sin x)^2}{(1 - \cos x)^3}, \text{ pour } x = 0. \quad 5 \text{ pts}$$

4. Etudier les variations de la fonction:

$$y = \frac{3x^2 - 4}{(x - 2)^2(x + 1)}$$

et construire la courbe. 9 pts

5. Une lampe électrique doit être suspendue au-dessus du centre d'une pelouse circulaire de 100 m de diamètre. En supposant que l'intensité de la lumière varie en raison directe du cosinus de l'angle d'incidence et en raison inverse du carré de la distance, on demande à quelle hauteur doit être suspendue la lampe pour que le bord de la pelouse soit éclairé le mieux possible. 9 pts

6. Calculer

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + x^2}. \quad 9 \text{ pts}$$

7. Trouver le volume du tore engendré par la révolution du cercle $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ autour de l'axe des x . On suppose $b > a$. 9 pts

b. Géométrie analytique

1. Déterminer la nature et construire la conique:

$$\rho = \frac{8}{1 - 2 \cos \theta}.$$

Trouver l'excentricité et la distance du foyer à la directrice. 9 pts

2. Trouver l'équation du cercle inscrit au triangle formé par l'axe des x et les droites $y = \frac{3}{4}x + 3$ et $5x + 12y = 100$.

Construire. 11 pts

3. Calculer la distance du centre de la conique:

$$x^2 + 4xy + 6x + 8 = 0$$

à la tangente au point de la courbe qui a pour abscisse $x = -2$.
11 pts

4. Réduire à ses axes; puis construire la courbe:

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 26x - 22y + 29 = 0. \quad 16 \text{ pts}$$

5. Trouver l'équation du diamètre de la parabole $y^2 = 18x$ qui est conjugué aux cordes formant l'angle de 45° avec l'axe des x positifs.

Trouver l'équation de la normale menée par le point d'intersection de ce diamètre et de la courbe.
7 pts

c. Compléments de Géométrie

1. Construire un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois circonférences concentriques données de rayons a, b, c ($a < b < c$).
10 pts

2. a) Démontrer que le produit de deux homothéties est une homothétie et que les centres d'homothétie sont en ligne droite.

b) Démontrer que ce produit n'est pas commutatif.

c) Application. Démontrer que le centre de gravité G d'un triangle, son orthocentre H et le centre O du cercle circonscrit sont en ligne droite (*droite d'Euler*) et que l'on a $\overrightarrow{HG} = 2\overrightarrow{GO}$.
18 pts

3. a) Définir le faisceau harmonique.

b) Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un faisceau soit harmonique est que la parallèle à l'un des rayons soit divisée en deux parties égales par les trois autres rayons.

c) Démontrer que si deux rayons conjugués d'un faisceau harmonique sont perpendiculaires, ils sont les bissectrices des angles formés par les deux autres rayons.
14 pts

4. Construire un cercle tangent à une droite donnée D_1 et tel que la polaire d'un point donné P par rapport à ce cercle soit une droite donnée D_2 .
12 pts

Juist verschenen:

P. WIJDENES

Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie

9de druk — 360 blz., met register
en 205 figuren — gebonden f 14.—
Antwoorden en uitwerkingen f 2.90

P. WIJDENES

Algebra voor examens in Handelsrekenen

5de druk — verzorgd door
H. Pleysier
Docent aan de Ned. Econ. Hogeschool, Rotterdam
f 5.90 gebonden f 7.25

Bestudering van dit boek eist de nodige voorkennis. Wie de nodige algebra eerst nog moet leren, zij gewezen op „Algebra voor M.H.S.”, twee delen, en „Algebra en financiële rekenkunde voor H.B.S.-A” van P. Wijdenes en P. Wijdenes en dr. P. G. van de Vliet.

Vreemde woorden in de natuurkunde

en namen der chemische elementen
door
PROF. Dr P. H. VAN LAER
f 3.75 gebonden f 4.50

Hoofddoel van dit werkje is een etymologische verklaring te geven van de vreemde woorden, gevolgd door een korte zaakbepaling, waarin de betekenis van de naam in de physica of chemie tot uitdrukking komt. In veel gevallen is een historische opmerking toegevoegd.

Ook bij de boekhandel verkrijgbaar

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Statistiek

PROF Dr. O. BAKKER en
A. BAKKER

Beginnelsen van de Statistiek

f 5.25 gebonden f 6.—

Dit boekje is bestemd voor hen, die nog geen studie van de statistiek hebben gemaakt. Het is geschikt voor hen, die zich voorbereiden voor een examen praktijk-diploma boekhouden voor leerlingen voor de hoogste klassen van de h.b.s.-A en voor de Studie akte handelskennis i.o.

Uitstekend schoolboek, klaar, bevattelijk, geleidelijk voortschrijdend, met talrijke concrete voorbeelden.

Economisch en Sociaal tijdschrift.

PROF. Dr O. BAKKER

Statistische methode Economische statistiek Bedrijfs-economische statistiek

Deel I — 10de druk, bewerkt door
A. Bakker
Directeur van de Nederlandse
Stichting voor Statistiek
186 blz., met vele figuren en tabellen f 4.50, gebonden f 5.50
Deel II — Bedrijfsstatistiek
4de geheel herziene druk, door
A. Bakker
138 blz., met 34 fig. en 42 tabellen
f 3.75

Prof. Dr. O. BAKKER
Prof. P. DE WOLFF en
Drs P. E. VENEKAMP

Oefeningen in elementaire statistiek

Deel I - Opgaven - 4de herz. druk
f 2.90
Deel II - Uitwerkingen - 4de herz.
druk. f 5.90

Ir F. HARKINK

INLEIDING TOT HET PRAKTISCH REKENEN

2de druk

227 blz., met 186 opgaven en ant-
woorden / 5.25 — gebonden / 6.—

Dat reeds zo spoedig na het verschijnen van dit boek een tweede druk het licht ziet, bewijst wel dat het — zoals ik reeds in mijn bespreking van de eerste druk voorspelde — in een „bestaande behoefte voorziet.”

Een ieder, die in zijn beroep te maken krijgt met reken- en cijferwerk, vindt in dit boekje handige en nuttige aanwijzingen en voorschriften niet alleen om dit cijferwerk systematisch en efficiënt op te zetten, maar vooral ook methoden om zich een oordeel te vormen omtrent de nauwkeurigheid van zijn uitkomsten in verband met de nauwkeurigheid van de gegevens. Ook omgekeerd wordt aangegeven hoe men bij voorgescreven nauwkeurigheid der resultaten, de vereiste nauwkeurigheid der waarnemingen, die daartoe leiden, kon bepalen. Het boekje is daarom wel in de eerste plaats van belang voor onze ingenieurs en a.s. ingenieurs, die in hun dagelijkse arbeid nog al eens met langdradige en ingewikkelde bereijningen te doen krijgen en die zich nog maar al te vaak te weinig rekenschap geven van de daarbij bereikte of bereikbare nauwkeurigheid.

Voor a.s. ingenieurs in de richting civiel, geodesie, landmeten o.a. is het „praktisch rekenen” dan ook al een examenvak, terwijl ook in andere richtingen der ingenieursstudie het belang van het „numerieke” rekenen steeds meer wordt ingezien. De vele opgaven in het boek van Harkink — met de antwoorden — maken dit boek voor de studenten tot een geschikt en nuttig studieboek.

Voor al belangrijk in deze tweede druk is de grote uitbreiding, die het hoofdstuk „Interpolatie” heeft ondergaan. Men vindt daarin behalve de interpolatieformules

van Newton en Lagrange ook die van Gregor Newton, van Gauss, Stirling, Bessel en Everett. Ook de teruginterpolatie wordt besproken.

Ook de leraren bij het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs vinden in dit boek — vooral in de begin-hoofdstukken — verschillende dingen, die ze bij hun onderwijs kunnen gebruiken; voor de leerlingen zelf is het niet bedoeld.

W. J. Vollewens.

Uit voorraad leverbaar:

THIRTEEN CUTS IN CALCULATIONS

by

D. R. KAPREKAR

Second edition 1955. . . . / 1.90

Preface: I have been able to discover several short ways of doing arithmetic calculations very quickly. It has been my constant desire to lighten the labour of the already overburdened student of today by giving him the advantage of what has been my privilege to discover.

... In publishing these cuts, I have tried to explain in the simplest words, the method to be followed.

Illustrations are given after each cut, to make the student understand the method. At the end of each cut are added suitable exercises, which the students are recommended to solve and verify by actual calculation.

NOORDHOFF's WISKUNDIGE TAFELS

in 5 decimalen

5de vermeerderde druk van Versluys' Tafel H. Tekst in 6 talen: Nederlands, Indonesisch, Frans, Engels, Duits en Spaans.

Gebonden / 8.75

Ook bij de boekhandel verkrijgbaar

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN
