

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM

DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN

PROF. DR. O. BOTTEMA, DELFT - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT

PROF. DR. E. J. DIJKSTERHUIS, BILTHOVEN - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, AMSTERDAM

DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

31e JAARGANG 1955/56

V-VI

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 12,50) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan hogere burgerscholen en lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van f 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Den Haag. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr J. W. Schuyt, Middachtenweg 188, Den Haag. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1956 gewijzigd is in f 8,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 806593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen f 10,— per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchillaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Oranje Nassauplein 15, Zeist. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

I N H O U D.

JOH. H. WANSINK, Het ontwerp-leerplan voor wiskunde van de Wimecos-commissie	213
J. HEMELRIJK, Wat is en waarvoor dient de statistiek	233
J. SEIDEL, De betekenis van het leerplan voor de toekomstige student	245
P. G. J. VREDENDUIN, Statistiek bij het V.H.M.O.	257
L. N. H. BUNT, Samenvattende slotbeschouwing	269
Boekbespreking	280
Vernieuwing van de didactiek der wiskunde	282
Xme Rencontre Internationale de Professeurs de Mathématiques	293
Korrel CXIX	294
Avondcolleges in de natuurkunde	296
Wimecos-contributie	296
Notulen van L.I.W.E.N.A.G.E.L.	297
Vacantie cursus 1956	299

HET ONTWERP-LEERPLAN VOOR WISKUNDE VAN DE WIMECOS-COMMISSIE ¹⁾

door

Dr. JOH. H. WANSINK

1. *Inleiding.*

Over de inhoud van het rapport van de Wimecos-commissie kan ik kort zijn. Het Mathematisch Centrum is zo vriendelijk geweest de programma's uit het rapport²⁾ geheel in de syllabus voor deze conferentie op te nemen en ik kan dus volstaan met daarheen te verwijzen. Het leeuwendeel van de tot mijn beschikking staande tijd wil ik gaarne gebruiken om een overzicht te geven van enkele herzieningen en de pogingen tot herziening van de wiskundeprogramma's bij het V.H.M.O. in de 20e eeuw. Ik hoop dat het daarbij zal uitkomen, hoezeer de voorstellen van de Wimecos-commissie in de lijn liggen van de ontwikkeling der sinds 1900 gepropageerde modernere inzichten.

Ik stel me voor achtereenvolgens iets te zeggen over:

- a. de velerlei contacten die sinds 1945 het mogelijk en waarschijnlijk hebben gemaakt dat leden van de Wimecos-commissie door buitenlandse opvattingen zijn beïnvloed;
- b. FELIX KLEIN en de Duitse Reformbeweging met de aanwijsbare invloed ervan op Nederland;
- c. de strijd in Nederland om de infinitesimaalrekening;
- d. de plaats van de analytische meetkunde en de beschrijvende meetkunde op de schoolprogramma's;
- e. de meetkunde in de Meraner Vorschläge en de strijd om de intuïtieve meetkunde in Nederland;
- f. de rol van het vraagstuk in ons onderwijs;
- g. de betekenis van het ontwerp-leerplan voor het Nederlandse onderwijs.

Over de statistiek zou ik in deze inleiding zo goed als geheel willen zwijgen in verband met de belangrijke plaats die dit vak in het programma voor deze cursus reeds inneemt. In verband met de omstandigheid dat ook aan de meetkunde een aparte voordracht wordt gewijd, zal ik me voorts bij de punten d. en e. de uiterste beperking opleggen.

¹⁾ Voordracht, gehouden op 31 oktober 1955 gedurende de Vacantiecursus georganiseerd door het Mathematisch Centrum.

²⁾ Euclides XXX, blz. 163 e.v.

2. *Contacten met het buitenland in de laatste jaren.*

De Wimecos-commissie als zodanig heeft geen systematische studie gemaakt van het wiskunde-onderwijs en de evolutie van het leerplan in andere landen. Maar de gebeurtenissen in het buitenland hebben individueel de leden van de Commissie wel beïnvloed, zodat ze toch hebben kunnen doorwerken in de voorstellen van de Commissie. In de syllabus vindt U een opsomming van de wegen waarlangs direct of indirect beïnvloeding mogelijk is geweest, ev. aanwijsbaar is.

Er wordt in de syllabus die U voor U hebt verwezen:

- a. naar de internationale wiskunde-conferentie te Baarn (1950);
- b. naar de „journées internationales d'information sur l'enseignement mathématique” te Sèvres (1955);
- c. naar de oprichting van de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde als subcommissie van de C.I.E.M. (1953);
- d. naar het Internationaal Mathematisch Congres te Amsterdam (1954);
- e. naar het door GATTEGNO te Londen beoogde didactische reveil;
- f. naar de wiskunde-werkgroep der W.V.O.;
- g. naar de leesportefeuille van Wimecos en de „Didactische revue” in Euclides.

Over enkele van deze wegen wil ik iets naders zeggen.

a. De „Commission internationale de l'Enseignement mathématique” (C.I.E.M.; I.M.U.K.; I.C.M.I.), die in de periode tussen de beide wereldoorlogen zulk een belangrijke rol heeft gespeeld bij het leggen van internationale contacten, werd opgericht in 1908, terwijl in 1920 als gevolg van de eerste wereldoorlog de internationale samenhang verloren ging. De laatste levenstekenen van deze eerste C.I.E.M. kon men opvangen in 1936 op het Internationaal Mathematisch Congres te Oslo. In 1952 is de C.I.E.M. dank zij het initiatief van de International Mathematical Union (I.M.U.) herrezen. Ze telt thans minstens 15 nationale subcommissies. Nederland is in de C.I.E.M. vertegenwoordigd door FREUDENTHAL, GERRETSEN en WANSINK. Voorzitter was aanvankelijk de Fransman CHÂTELET, sinds 1 januari van dit jaar de Duitser BEHNKE. De nieuwe C.I.E.M. is reeds zeer actief geweest. Op het Internationaal Mathematisch Congres van 1954 te Amsterdam werden in sectie VII (filosofie, geschiedenis, onderwijs) op initiatief van de C.I.E.M. rapporten uitgebracht over de plaats van de wiskunde en de wiskundigen in de hedendaagse maatschappij en over het onderwijs in de wiskunde aan de 16-21 jarigen. Namens de

Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde traden als rapporteurs op VAN DANTZIG en BUNT. Van de rapporten van de diverse landen hebben de leden BUNT en WANSINK, die als voorzitter en secretaris van sectie VII alle vergaderingen van deze sectie meemaakten, kennis kunnen nemen.

b. Eveneens internationaal van karakter is een didactische werkgroep rondom GATTEGNO. Deze richtte in 1950 te Londen op: „la Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques”. Voorzitter is CHOQUET, professor aan de Sorbonne; vice-president PIAGET, psycholoog en bestuurder van het Internationale Bureau voor Opvoeding en van het Institut des Sciences de l'Education van de Universiteit te Genève. Secretaris en ziel van de commissie is GATTEGNO, docent aan het Institute of Education te Londen. Het aantal leden per land is beperkt tot maximaal vijf. Voor Nederland is tot dusver enkel BETH lid.

De commissie, steunend op experimenteel-psychologisch werk van PIAGET, wenst een radicale herziening van onderwijsmethoden en didactiek en tracht door het beleggen van internationale conferenties (een of twee per jaar) de geesten wakker te schudden, de docenten ervan bewust te doen worden dat er in hun onderwijs psychologische problemen op oplossing wachten. De commissie slaagt er in het gesprek tussen wiskundeleraren uit verschillende landen op gang te brengen. Haar betekenis moet in het huidige stadium minder afgewogen worden naar de kwaliteit van de oplossingen die ze in didactische problemen biedt, dan wel naar de mate van verontrusting die ze weet te wekken over de onvoldoende psychologische fundering van alle wiskunde-onderwijs, „traditioneel” zowel als „modern”.

In 1954 hield deze commissie een internationale conferentie op de Pietersberg bij Oosterbeek. Van de buitenlandse didactici daar aanwezig noem ik U in het bijzonder DRENCKHAHN uit Flensburg, hoogleraar aan de Pädagogische Hochschule aldaar, wiens theorie over de Strukturstufen der Schulmathematik, waarover hij ook te Amsterdam sprak, o.a. een rechtvaardiging betekent van de intuïtieve cursus in de meetkunde door de Wimecos-commissie voorgesteld.

c. Misschien zal het U verwonderen in de syllabus onder de internationale contacten de naam van de Wiskunde-werkgroep voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs aan te treffen. Door aard en structuur is deze Werkgroep echter internationaal georiënteerd. De Werkgroep heeft zich sinds haar oprichting in 1936

intensief bezig gehouden met didactische aspecten van het wiskunde-onderwijs in Nederland. In 1952 is onder leiding van FREUDENTHAL na een voorarbeid van vier jaren een Ontwerp-Wiskunde-Programma voor het V.H.M.O. gepubliceerd, waarmee het Wimecosrapport op vele essentiële punten overeenstemt. De leden BUNT, VREDENDUIN en WANSINK van de Wimecos-sommissie waren ook in het werk van de Werkgroep betrokken.

Door de aanwezigheid van internationaal georiënteerde personen zoals MEVROUW EHRENFEST en Prof. FREUDENTHAL in de werkgroep wordt de doorwerking van buitenlandse invloeden langs deze weg bevorderd.

Ik hoop door mijn mededelingen erin geslaagd te zijn aan te tonen dat één bezwaar door FELIX KLEIN geopperd ten aanzien van opstellers van nieuwe leerplannen voor de Nederlandse commissie niet geldt. KLEIN schreef n.l. in 1908:

„Ich möchte nur auf einen Umstand von allgemeinerer Bedeutung verweisen, der auch für die Literatur der anderen Länder Geltung hat. Ein grosser Teil der Leute, die über Unterrichtsfragen schreiben, kennt nämlich fast ausschliesslich die Schulliteratur des eigenen Landes und hat keine Ahnung von parallelen Bestrebungen in anderen Ländern, ...". (Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, II (3); 1925, 223)).

3. *Het hervormingsstreven van Klein e.a.*

KLEIN's ideeën ten aanzien van het wiskunde-onderwijs zijn van fundamentele betekenis geweest voor alle programma-herzieningen in de eerste helft van de 20e eeuw. Ze hebben hun betekenis voor ons in het Nederland van 1955 nog niet verloren.

Men kent de feiten. FELIX KLEIN (1849—1925), een Duits wiskundige van bijzonder formaat, oefende door zijn wetenschappelijke onderzoekingen en door zijn bezielend onderwijs op de ontwikkeling van de vakwetenschap en op de hervorming van het onderwijs in zijn vaderland een bijna ongeëvenaarde invloed uit. Zijn belangstelling voor onderwijsproblemen uitte hij reeds op jeugdige leeftijd. In één der stellingen bij zijn promotie (1868) lezen we: „Es ist wünschenswert, dass neben der euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den mathematischen Unterricht eingeführt werden". Beroemd is zijn „Erlanger Programm" (1872), dat de centrale betekenis van het groepsbegrip voor de onderscheidene meetkonden sterk op de voorgrond schuift en het meetkunde-onderwijs in en buiten Duitsland in hoge mate heeft beïnvloed, in ons land echter het meetkunde-onderwijs op H.B.S. en Gymnasium

opvallend weinig. Dit Erlanger Programm wordt het beste gekarakteriseerd door de uitspraak dat de meetkunde wordt beschouwd als een invariantentheorie van transformatiegroepen. In KLEIN's oratie van 1872 vinden we het verwijt dat de vormende waarde van het wiskunde-onderwijs dikwijls gering is, dat het dikwijls dient „zur Erlernung eines geistlosen Formalismus”, dat de leerlingen op oefjes getraind worden en niet zelfstandig leren denken. Ten onzent is KLEIN vooral bekend geworden door zijn driedelig werk: „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus” (1908), waarvan de beide eerste delen (I: Arithmetik, Algebra, Analysis; II: Geometrie) voor de a.s. leraar en voor de leraar in functie hun waarde tot op heden hebben behouden. Mede beïnvloed door KLEIN verschenen in 1905 in Duitsland de „Meraner Vorschläge”, opgesteld door een commissie uit de Förderungsverein („Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts”). Het in de Meraner leerplannen tot uitdrukking komend streven vormt de kern van de Duitse „Reformbewegung” uit het eerste kwart van de 20e eeuw, welke beweging ook als „KLEIN'sche Reform” te boek staat. Centraal in deze vernieuwing is de fundamentele betekenis die de ontwikkeling van het functiebegrip in het onderwijs krijgt. De ontwikkeling tot functioneel denken zal tot zijn recht moeten komen door onderwijs in de grafische voorstellingen, eventueel door onderwijs in de analytische meetkunde, alles „bis an die Schwelle der Infinitesimalrechnung”. KLEIN zelf had echter in 1904 de infinitesimaalrekening reeds voor de middelbare school verdedigd, maar om één lid van de voorbereidende commissie (n.l. PIETZKER) te ontzien werd in 1905 bovenstaande formule gebruikt, waardoor, zo spotte men later, de leerplannen voor jaren „verpietzkert” waren. In 1925 zouden de eisen van de KLEIN'sche Reform, analytische meetkunde en infinitesimaalrekening integraal in Duitsland worden ingewilligd.

De vernieuwingsbeweging in het begin dezer eeuw is geen zaak van loufer Duitse makelij. Ook in Frankrijk en in Engeland waren verwante strevingen. Ik ga daarop nu niet in maar noem ter oriëntatie de namen BOREL, TANNERY, PERRY, en later PERCY NUNN. Het is zelfs moeilijk te zeggen waar de wortels van de Duitse Reform liggen. In een rapport door Hongarije uitgebracht op het Internationaal Mathematisch Congres te Oslo (1936) lees ik dat alle principes van de KLEIN'sche Reform reeds te vinden zijn in het werk van W. BOLYAI, de vader van de U allen bekende BOLYAI (Arithmetik, 1834). Uit dit simple feit moge blijken hoe moeilijk het is om op didactisch gebied absolute prioriteit te constateren. We zullen door-

gaans met het vaststellen van relatieve prioriteit genoeg moeten nemen.

4. *De strijd om de differentiaal- en integraalrekening in Nederland (1904—heden).*

Welke invloed heeft de beweging van KLEIN gehad op het wiskunde-onderwijs in ons land? We kunnen deze invloed, die het sterkst was ten aanzien van het algebra-onderwijs, het gemakkelijkst volgen door na te gaan hoe de strijd om de differentiaal- en integraalrekening in Nederland is verlopen.

De invloed van KLEIN is reeds in de eerste jaren van deze eeuw in ons land merkbaar. VAES en CIKOT behoren tot de pioniers die vrijwel onmiddellijk na KLEIN's optreden zich voor de infinitesimaalrekening inzetten. Door VAES, KREDIET en QUINT werd in 1904 het WISKUNDIG TIJDSCHRIFT opgericht en in dat tijdschrift verschenen vanaf de eerste jaargang (1904) mededelingen uit buitenlandse tijdschriften van de hand van CIKOT, waardoor de vernieuwingspogingen elders de Nederlandse leraar niet geheel voorbij konden gaan. De strijd voor de differentiaal- en integraalrekening kan in ons land dus reeds op een geschiedenis van meer dan een halve eeuw bogen.

We onderscheiden in deze strijd vier fasen:

- a. de periode 1904—1908, eindigende met een nederlaag der vernieuwers;
- b. de periode 1916—1920, eindigende met een partiële overwinning van de vernieuwers t.o.v. het leerplan der gymnasia en een nederlaag t.o.v. het leerplan van de H.B.S.;
- c. de periode 1926—1940, beheerst door de voorstellen van de commissie BETH-DIJKSTERHUIS, eindigende met een partiële overwinning van de vernieuwingsgedachte t.o.v. het leerplan van de H.B.S.;
- d. de periode 1946—heden, waarin de pogingen om de infinitesimaalrekening een volwaardige plaats in leer- en eindexamenprogramma te verzekeren, worden voortgezet.

a. De nederlaag van 1908 bestond in een verwerping bij referendum van de invoering der differentiaal- en integraalrekening door de Vereniging van Leraren bij het M.O. 135 stemmen werden tegen en 35 voor de invoering van het nieuwe vak uitgebracht. Men kan de nederlaag ten dele toeschrijven aan de invloed van de niet-wiskundigen in de vereniging. FELX KLEIN deelde aan VAES naar aanleiding van dit referendum mede, dat hij er in Duitsland steeds angstvallig tegen gewaakt had dat de infinitesimaalrekening in stemming zou

worden gebracht op vergaderingen, waarin ook taalleraren, enz. stemrecht hadden. Om de situatie van 1908 te kunnen begrijpen moet men bedenken dat de wiskundeleraren destijds nog niet georganiseerd waren. LIWENAGEL zou eerst in 1921, WIMECOS eerst in 1925 tot stand komen. Tot de tegenstanders van het nieuwe vak behoorden destijds ook JENSEMA en TIDDENS, die op verschillende posten later een belangrijke rol in de onderwijswereld zouden spelen.

b. De tweede periode begint met de invoering van het normaalprogramma op de rijksscholen (1916), waardoor programmaproblemen in het brandpunt van de belangstelling kwamen te staan. In deze periode verschijnen twee belangrijke rapporten, één van de commissie-JENSEMA (1917) inzake beperking van de leerstof voor wis- en werktuigkunde op de H.B.S., en één van de commissie-VAN IJZEREN, inzake leerplan en eindexamen van het gymnasium (1918). De commissie-JENSEMA zegt t.a.v. de differentiaal- en integraalrekening o.m.: „Zij (de commissie) verwacht echter van invoering niet veel heil, zou haar bij een zwakke klasse beslist ontraden, omdat de tijd voor verwerken ervan niet aanwezig is, en vreest, dat tenslotte meer verwarring dan inzicht het gevolg zal zijn”. Op dit oordeel zou m.i. een veroordeling van het nieuwe vak hebben moeten volgen; men beveelt niet iets aan wat meer verwarring dan inzicht belooft; men ontraadt dit. Het rapport vervolgt echter: „De commissie wenst de invoering dus niet voor te schrijven, maar facultatief te stellen” (Weekblad XIV, 1640—1641). Het rapport-JENSEMA is een voorbeeld van een slecht compromis tussen voor- en tegenstanders van vernieuwing. In het licht van dit rapport behoeft het ons niet te verbazen, dat met de benoeming in 1920 van de tegenstander JENSEMA tot inspecteur van het M.O. de kansen op invoering van de infinitesimaalrekening op de H.B.S. voor afzienbare tijd van de baan waren.

Anders verliep de strijd t.a.v. het Gymnasium. Hier vinden we in het rapport van de commissie-VAN IJZEREN, waarin BOUWMAN als wiskundeleraar zitting had, een voorzichtige aanbeveling van het nieuwe vak, met een duidelijke uiteenzetting van de voor invoering ervan pleitende motieven. Ik geef één citaat: „Men mag aannemen, dat diegenen, die later in de wiskunde en de natuurkunde doorgaan bij hun universitaire studie zonder grote moeilijkheden zich de beginselen van de differentiaal- en integraalrekening eigen zullen kunnen maken. Anders is het gesteld met een deel der biologen en chemici, en met een aantal medici, die een speciale studierichting kiezen. De differentiaal- en integraalrekening komen hun wel heel vaak te pas, maar voorzover ze geen bijzondere neiging voor de

wiskunde hebben, geven juist de grondbeginselen hun vaak grote moeilijkheden, en deze worden onder leiding van de docent beter overwonnen dan later bij zelfstandige studie" (blz. 81). De WIMECOS-commissie zal in 1954/55 op analoge gronden voor onderwijs in de statistiek op H.B.S. en Gymnasium pleiten.

De motivering in het rapport-VAN IJZEREN maakt ons ook begrijpelijk, dat in het huidige Belgische wiskunde-onderwijs een op het eerste gezicht vreemd schijnend standpunt wordt ingenomen t.a.v. de integraalrekening. Dit vak wordt wel onderwezen in de afdelingen Latijn-Grieks, Latijn-Wetenschappen en in de Economische afdeling, maar niet in de afdelingen Latijn-Wiskunde en in de Wetenschappelijke afdeling, waar het aantal uren voor wiskunde juist het grootst is. (Zie *Mathematica & Paedagogia*, II, 6, blz. 53.)

Dat in 1919 een nieuw reglement voor het Gymnasium verschijnt waarin de infinitesimaalrekening in het programma voor de β 's wordt opgenomen, is stellig te danken aan het wijs beleid van inspecteur VINKESTEYN, die, hoewel zelf classicus, de wiskunde een goed hart toedroeg.

VINKESTEYN had van zeer nabij kennis kunnen nemen van het streven naar herziening van het wiskundeprogramma. Hij was immers lid geweest van de Nederlandse subcommissie van de C.I.E.M., waarvan CARDINAAL uit Delft voorzitter was, welke commissie in haar rapport van 1910 („Rapport sur l'enseignement mathématique dans les Pays-Bas") zich onomwonden voor invoering van de infinitesimaalrekening had uitgesproken. Ten aanzien van de omstreden vernieuwingen verklaarde het rapport CARDINAAL, dat vele leraren er voor zijn de grafische voorstellingen, de beginselen der analytische meetkunde, het functiebegrip en de infinitesimaalrekening in het programma op te nemen, niet slechts terwille van de studenten in wis- en natuurkunde of techniek, maar ook ten bate van hen die de wiskunde nimmer als hoofdvak zullen beoefenen, maar die niettemin van de nieuwe onderwerpen profijt zullen kunnen hebben (studenten in de biologie en in de medicijnen, landmeters, e.a.). Maar, zegt het rapport, anderen willen deze nieuwe onderwerpen niet, omdat ze ze te moeilijk voor de leerlingen vinden.

We wijzen er nog op, dat in hetzelfde jaar waarin het rapport-CARDINAAL verscheen, ook de in 1903 geïnstalleerde „Staatscommissie voor de Reorganisatie van het Onderwijs" haar rapport uitbracht, waarin voor twee van de drie ontworpen lyceumtypen in de geest van de KLEIN'sche Reform het functie-begrip, de analytische meetkunde en de differentiaal- en integraalrekening op het wiskunde programma werden geplaatst.

De efficiënte herziening van het gymnasiale programma in 1919 is ongetwijfeld bevorderd door de wet-LIMBURG van 1917, die aan bezitters van het einddiploma HBS toegang verleende tot examens in de faculteit der wis- en natuurkunde en der geneeskunde. Pogingen uit dezelfde jaren door HOOYKAAS en VERRIJP ondernomen (deels uit concurrentieoverwegingen t.a.v. de HBS) om een deel van de propaëdeuse der universiteit naar de bovenbouw van het Gymnasium over te brengen, leden, gelukkig, schipbreuk.

De onder VINKESTEIJN tot stand gekomen leerplanherziening voor het Gymnasium heeft in de strijd om de modernisering van het wiskundeprogramma aan het Gymnasium een belangrijke voorsprong gegeven boven de HBS.

c. *De derde fase in de strijd om de infinitesimaalrekening.*

Deze begint met de publicatie van het ontwerp-leerplan van de commissie die naar voorzitter en secretaris ervan in de onderwijs wereld als commissie BETH-DIJKSTERHUIS bekend staat (1926). Deze commissie was door het college van inspecteurs uitgenodigd voorstellen te doen tot het aanbrengen van wijzigingen in de bestaande leerplannen die aan het onderwijs ten goede zouden kunnen komen (Euclides II, 113 e.v.). Het initiatief tot de samenstelling der commissie was uitgegaan van inspecteur BOLKESTEIN, een niet-wiskundige, terwijl inspecteur JENSEMA, wel een wiskundige, de instelling van de commissie zo lang mogelijk heeft tegengehouden. De voorstellen van de commissie BETH-DIJKSTERHUIS betekenden een radicale modernisering van het wiskunde-onderwijs op de HBS. Ze bevatten ook de invoering van de differentiaal en integraalrekening. Naast de reeds eerder vermelde gronden voor invoering stelde ze het cultuur-historisch motief.

In de eerste jaargangen van Euclides vinden we de weerspiegeling van de in de twintiger jaren rondom de voorstellen van de commissie BETH-DIJKSTERHUIS gevoerde debatten.

In verband met de vraag naar de buitenlandse beïnvloeding op het Nederlandse onderwijs wil ik hier melding maken van een „bekentenis” van de voorzitter BETH, die nog in 1921 verklaard had de differentiaal- en integraalrekening te lastig te vinden en die zich nu in 1926 als voorstander van het nieuwe vak ontpopte. Men stelde de vraag: „Wat heeft hem bekeerd?” (Euclides III, 88.)

BETH's antwoord is ook thans nog voor ons van betekenis: de ondervinding van de laatste jaren had BETH van inzicht doen veranderen, doordat hem gebleken was dat men in de bovenbouw niet ongestraft een programma in moderne geest kan afwerken aan leerlingen die in de onderbouw onderwijs gehad hebben in de gebruike-

lijke trant. De modernisering dient reeds in de onderbouw te beginnen. BETH vermeldt dan, dat de juiste verklaring van de opgedane ervaringen voor hem verborgen zou zijn gebleven „indien niet door een gelukkig toeval tot (hem) was doorgedrongen van wat in het begin dezer eeuw vooral in Frankrijk en Duitsland ter zake van het wiskunde-onderwijs was te doen geweest” (Euclides, III, 113). En hij pleit in verband met deze ervaringen voor een meer volledige verzorging van de opleiding tot leraar in de wiskunde.

Ik beschouw het ontbreken van een eigenlijke beroepsopleiding in de periode die eerst in 1955 tot een definitieve afsluiting zou komen, als een der voornaamste oorzaken van het trage tempo, waarin zich in ons land de modernisering van het wiskunde-programma volstrekt. Langzamerhand groeide in de vereniging van wiskunde-leraren WIMECOS de sympathie voor de differentiaal- en integraalrekening. Nog onder voorzitter TIDDENS, die aanvankelijk met JENSEMA tot de bestrijders van het streven naar modernisering werd gerekend, verklaart WIMECOS zich in 1931 met algemene stemmen voor invoering van het nieuwe vak. JENSEMA's standpunt schijnt echter ongewijzigd te zijn gebleven: in ieder geval hadden de voorstellen der commissie BETH-DIJKSTERHUIS onder zijn inspectoraat geen kans.

Als echter in 1934 JENSEMA als inspecteur aftreedt en opgevolgd wordt door VAN ANDEL die deel uitgemaakt had van de commissie BETH-DIJKSTERHUIS, herleeft de hoop, dat er toch nog iets van het werk van deze commissie tot zijn recht zal komen. Inspecteur VAN ANDEL heeft zich van meet af aan veel moeite getroost om in overleg met WIMECOS een herziening van het wiskunde-programma in de geest van de voorstellen BETH-DIJKSTERHUIS te bevorderen. Als resultaat van deze activiteit kunnen we het nieuwe leerplan voor de HBS-B van 1937 beschouwen. Dit leerplan geldt ook thans nog. We lezen er o.m. in:

„Eenvoudige beginselen der differentiaal- en integraalrekening met toepassing op grafische voorstellen en op vraagstukken ten behoeve van het onderwijs in mechanica en natuurkunde”.

VAN ANDEL was zo bereidwillig in 1937 de bedoelingen van het nieuwe leerplan persoonlijk toe te lichten in een zeer druk bezochte WIMECOS-vergadering door TIDDENS' opvolger SPIJKERBOER gepresideerd. De periode na 1937 wordt een overgangsperiode: de differentiaal- en integraalrekening zijn wel leervakken, maar geen eindexamenvakken. Het eindexamenprogramma daterend van 1929 werd nimmer aan het schoolprogramma van 1937 aangepast. Dat hierdoor op tal van scholen het nieuwe leerplan een dode letter kon

worden, is duidelijk. Toch blijkt de sympathie voor het nieuwe vak differentiaal- en integraalrekening geleidelijk te groeien. Dit blijkt straks uit de enquête van BUNT over „De leerstof van ons wiskunde-onderwijs” (1949), waarbij bleek dat slechts 9 % van de HBS-leraren en 0 % van de gymnasiumleraren een eenvoudige inleiding tot de differentiaalrekening ongewenst vonden. Voor de integraalrekening liggen de getallen iets minder gunstig. Toch getuigen de cijfers (24 % van de HBS-leraren en 11 % van de gymnasiumleraren vinden een eenvoudige inleiding tot de integraalrekening ongewenst) van een bevredigende instemming in de docentenwereld.

d. Voor de activiteiten ten gunste van de infinitesimaalrekening in de naoorlogse periode kan ik U naar paragraaf 2 van het Wimecos-rapport verwijzen. Ik wil volstaan met relief te geven aan twee feiten uit deze jaren die ik voor de vernieuwing van het wiskunde-programma van belang acht en die aan het tot stand komen van het Wimecos-rapport zijn voorafgegaan:

1. de samenstelling van het rapport van de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. (1948—1952) getiteld: „Het Wiskunde-programma voor het V.H.M.O.”;
2. de instelling van een researchcentrum voor het wiskunde-onderwijs aan het Paedagogisch Instituut van de Rijksuniversiteit te Utrecht, het enige van deze aard in ons land.

Door het werk van dit centrum is het thans verantwoord op korte termijn invoering van een nieuw vak als statistiek te bepleiten.

5. De plaats van de analytische meetkunde en de beschrijvende meetkunde in het Wimecos-programma.

Over deze beide vakken wil ik kort zijn.

De commissie BETH-DIJKSTERHUIS heeft de analytische meetkunde buiten het H.B.S.-programma willen houden. Daartegenover beschouwde ze de beschrijvende meetkunde in de traditionele omvang als onmisbaar onderdeel der stereometrie, aan welk vak ze overigens een ruimere plaats toedacht dan de Wimecos-commissie. Bovendien stelde de Commissie-BETH-DIJKSTERHUIS een meetkundige behandeling der kegelsneden voor. Bij deze omvang van de meetkunde in de bovenbouw was er voor analytische meetkunde geen tijd vrij te maken.

Ik weet dat er velen zijn die met leedwezen de beschrijvende meetkunde als afzonderlijk vak zien verdwijnen. De Wimecos-commissie heeft de traditionele beschrijvende meetkunde slechts willen prijsgeven onder voorwaarde, dat aan een belangrijk en teveel verwaarloosd onderdeel der constructieve meetkunde de nodige aandacht

zou worden besteed: aan de beginselen der scheve projectie. Deze projectiemethode zal de leerlingen in staat stellen figuren uit hun meetkundeboek te lezen en in zulke figuren enkele voor het stereometrieonderwijs belangrijk geachte constructies uit te voeren.

Bij de beoordeling van het wegvallen der traditionele beschrijvende meetkunde houde men nog rekening met de omstandigheid, dat in landen waar dit vak zijn oude positie wist te handhaven (Oostenrijk, Zwitserland), er veel meer leerstof werd behandeld dan ten onzent, en dat de voorkeur voor de beschrijvende meetkunde in die landen ook zou zijn vervallen bij de minimale omvang die wij in Nederland aan dit vak toekenden.

Het lijkt ons voorts een belangrijk winstpunt, dat thans de mogelijkheid open komt om de historisch verklaarbare maar daarom nog niet gerechtvaardigde divergentie tussen de programma's voor de B-afdelingen op Gymnasium en H.B.S. op te heffen.

6. De strijd om de propaedeutische cursus tot de vlakke meetkunde in Nederland.

De desiderata van KLEIN ten aanzien van het meetkunde-onderwijs hebben op het onderwijs in Nederland slechts geringe invloed uitgeoefend. De euclidische methode bleef hier, zij het in verzachte vorm, gehandhaafd. De transformaties en het groepsbegrip zijn in ons onderwijs niet of slechts in geringe mate doorgedrongen. De naam van ons didactisch tijdschrift „EUCLIDES” (dagtekenend van 1927) zegt ons iets van de sympathieën die men hier de traditionele methode toedroeg. Er is in deze jaren een opmerkelijke poging gedaan om de euclidische methode didactisch te perfectioneren. Ik doel op het schoolboek „Beginselen der vlakke meetkunde, een leerboek voor beginners”, van de hand van SCHOGT (1929). DE GROOT poneerde in het Gedenkboek van het Genootschap van Leraars aan Nederlandse Gymnasiën de stelling, dat met dit leerboek een nieuw tijdperk in het meetkunde-onderwijs wordt ingeluid, zich hierdoor kenmerkende, dat de fundamentele bewijstrant der zogenaamde kritische periode zoveel mogelijk in het elementaire onderwijs wordt opgenomen, overeenkomstig het principe der historische verschuiving van FELIX KLEIN. Het is echter anders uitgekomen; SCHOGT heeft het kinderlijk bevattingvermogen te hoog aangeslagen. Zijn boek sluit echter toch wel een periode af, die van een verkeerd begrepen perfectionisme.

De wetenschappelijk grondslag van KLEIN's programma laat ik in deze inleiding geheel rusten. Ze kan in de voordracht aan de meetkunde gewijd beter tot haar recht komen. Wel wil ik erop wijzen,

dat het weinig zin heeft driekwart eeuw na het Erlanger programma hier te lande te gaan ijveren voor een didactiek daarop gebaseerd. Een halve eeuw geleden was dit toe te juichen geweest, thans klinkt het weinig progressief te ijveren voor een programma van welks „tirannie” men zich in het buitenland wil verlossen. (HODGE, *Changing views in geometry*, *Mathematical Gazette*, Sept. 1955).

Nu nog enkele woorden over de intuïtieve cursus. Hierover is in de twintiger jaren een heftige strijd gevoerd. Deze strijd moest wel onbeslist blijven, doordat de experimentele gegevens der denk- en ontwikkelingspsychologie nodig om de tegenstander te overtuigen ontbraken, — aan beide kanten. De uitslag van de strijd was daardoor slechts in schijn een overwinning voor de tegenstanders van een propaedeutische cursus. Deze hadden voor handhaving van hun standpunt in eigen oog geen behoefte aan een psychologische fundering waarvan ze wel duidelijk zagen dat die bij de anderen ontbrak. Thans een kwart eeuw later ontbreken de psychologische gegevens nog. Slaat men een boek op als dat van STRUNZ „*Pädagogische Psychologie des mathematischen Denkens*” (1953), dan vindt men wel tal van verhelderende begripsanalyses, maar géén verwijzing naar experimenten waarop moderne mathematische didactiek zou kunnen steunen. Evenmin naar experimenten die voor de traditionele methode als grondslag zouden kunnen dienen.

De omstandigheid dat de strijd om de propaedeutische cursus hier te lande gevoerd werd als een strijd tussen de logische en de psychologische richting heeft verwarrend gewerkt. Deze onderscheiding is verwarrend, omdat logica en psychologie domeinen bestrijken die buiten elkaar liggen, en omdat door de tegenstelling de indruk gewekt werd dat men in een verantwoord onderwijs een der gebieden zou kunnen vermijden.

De belangstelling voor een inleidende cursus is ook in Nederland weer groeiende. De Wiskunde-werkgroep van de W.V.O. heeft meer dan een jaar lang haar maandelijkse bijeenkomsten aan dit onderwerp gewijd. Wat het buitenland betreft, in Pruisen is de inleidende cursus reeds sinds 1882 in de leerplannen voorgeschreven. De Italiaanse auteur EMMA CASTELNUOVO schrijft een *Geometria intuitiva per la scuola media* (1952), die een cursus van drie jaren met fusie van planimetrie en stereometrie omvat. In België is voor de zesde (eerste leerjaar der middelbare school) een praktisch-aanschouwelijk meetkunde-onderwijs voorgeschreven, dat dient om de opmerkingsgave te ontwikkelen en dat een inleiding geeft tot de beredeneerde meetkunde (Omzendbrief, 24 Augustus, 1948).

Het verslag van het Congres te Sèvres (1954) opgenomen in het Belgische Tijdschrift „Mathematica & Paedagogia” bevat ten aanzien van het onderwijs in de meetkunde o.a. de volgende conclusie: „l'enseignement classique de la géométrie perd chaque jour du terrain au profit de méthodes que nous qualifierons de nouvelles ou, si l'on préfère, de plus modernes” (nummer 6, blz. 82).

Op 12 en 13 November 1955 wordt door de Belgische lerarenvereniging te Berchem (Antwerpen) een tweedaags congres gehouden met als centraal onderwerp „Concrete en intuïtieve bronnen van de wiskunde”.

Op een vergadering van het Comité exécutif van de C.I.E.M. te Genève werd in Juli 1955 op voorstel van FREUDENTHAL op het werkplan van de C.I.E.M. voor de periode 1955—1958 geplaatst: „Étude comparée des méthodes d'initiation à la géométrie”.

De WIMECOS-commissie heeft door de inleidende cursus tot de vlakke meetkunde uitdrukkelijk op het programma voor de eerste klasse te vermelden willen accentueren dat zo'n inleidende cursus naar haar mening verantwoord, goed meetkunde-onderwijs kan zijn, iets wat in het verleden hier te lande vaak te gemakkelijk werd betwijfeld.

7. *De plaats van het vraagstuk in het wiskunde-onderwijs.*

De WIMECOS-commissie zou in haar plan tot het opstellen van een leerplan dat in de bovenbouw door invoeging van nieuwe leerstof zich aanpast aan moderne eisen, nimmer geslaagd zijn als zegen drastische beperkingen had kunnen voorstellen ten aanzien van de traditionele vraagstukkentechniek.

Het vraagstuk zelf behoort in en buiten Nederland tot de kern van het wiskunde-onderwijs en behoort dat te blijven. Het is ook anders geweest. CARDINAAL citeert in zijn artikel „L'Enseignement Mathématique en Hollande” (1900) de Nederlandse inspecteur van het middelbaar onderwijs STEYN PARVÉ met de woorden: „La méthode d'enseignement était souvent défectueuse, ce dont on n'a pas à s'étonner; au lieu de faire comprendre la liaison organique des théorèmes de géométrie, au lieu de former et de développer l'indépendance du jugement des élèves, on leur faisait souvent apprendre par coeur les démonstrations des théorèmes et on les forçait à une reproduction pénible et machinale de la démonstration du professeur” (l'Enseignement Mathématique, II, 329).

Dit citaat tekent de toestand in ons land omstreeks 1850, vóór de stichting van de HBS (1863). Uit ons huidig onderwijs is het vraagstuk niet meer weg te denken. Naar aanleiding van vraagstukken

brengen we onze leerlingen in probleemsituaties met wiskundige aspecten, waardoor ze tot wiskundige argumentering worden geprikkeld. Niet door „opzeggen” van theorie, maar meestal door middel van vraagstukjes controleert de leraar kennis en inzicht der leerlingen, zowel gedurende de cursus (proefwerk, repetities, huiswerk), als aan het eind van de cursus op examens. Het vraagstuk „didactisch hulpmiddel van onschatbare waarde” (BOTTEMA) neemt terecht in ons onderwijs een centrale plaats in.

De WIMECOS-commissie 1954/1955 ziet blijkens haar rapport de functie van het vraagstuk in ons onderwijs als volgt:

1. het is een middel voor leraar en leerling om te controleren of de theorie werkelijk begrepen is;
2. het kan de leerling een beter inzicht doen verwerven in de bewijstrant van de wiskunde;
3. het is onontbeerlijk voor het verwerven van de nodige technische vaardigheid;
4. het kan een gewenste voorbereiding geven voor later te behandelen leerstof;
5. het kan dienen om contacten tot stand te brengen tussen het terrein van de wiskunde en andere gebieden.

Op het voetspoor van de commissie BETH-DIJKSTERHUIS wenst ook de WIMECOS-commissie de vraagstukkenhypertrophie die op den duur ons onderwijs is gaan kenmerken, te bestrijden. Vele vraagstukken toch hebben in ons onderwijs een plaats gekregen omdat de docent terecht of ten onrechte de mening was toegedaan, dat hij juist met die vragen het inventief vermogen van de leerlingen zou kunnen peilen. Nu moge dit toetsen van inventief vermogen op wiskundig terrein een geschikte arbeid zijn voor de mathematisch geschoolde psycholoog, voor de psychologisch geschoolde wiskundige, de leraar in functie is geen beroeps-psycholoog maar leraar. Op dit andere gebied is hij een niet-deskundige. Ongelukken zijn dan ook niet uitgebleven. Het noodlot wilde dat tal van vraagstukken die misschien éénmaal hun betekenis hebben gehad ter controle van inventief vermogen, daarna tot oefenmateriaal in de klasse werden. Allerlei typen van vraagstukken die zonder bezwaar in het te onderwijzen systeem gemist kunnen worden, vinden via de leerboeken een plaats in het onderwijs, worden tot oefenmateriaal voor een stelselmatige training. Ze worden van middel tot doel. En op examens en bij proefwerken laten we ons met open ogen bedotten in zoverre we ons goedsmoeds „de knollen van de training laten verkopen voor de citroenen van de intelligentie”.

Deze vraagstukken training is de voornaamste oorzaak van een laakbare overlading.

De WIMECOS-commissie stelt ten aanzien van deze laakbare vraagstukken techniek ingrijpende maatregelen voor. De commissie wenst alle typen die in verband met het eigenlijke onderwijsdoel gemist kunnen worden uit te bannen. Dit leidt voor de meetkunde, de algebra en de driehoeksmeting tot drastische beperking. Bij goniometrie en trigonometrie zal meer dan de helft van het gangbare oefenmateriaal verdwijnen: bewijzen van identiteiten, herleidingen van goniometrische vormen (logaritmisch maken), gekunstelde vergelijkingen. In de bovenbouw blijven enkel de goniometrische functies, de behandeling waarvan misschien beter als een hoofdstuk der algebra dan als een zelfstandig vak ware te beschouwen.

Irrationale, logaritmische en exponentiële vergelijkingen vormen geen afzonderlijk deel van het programma meer. De reststelling komt te vervallen, opgaven over vierkantsvergelijkingen en kwadratische functies worden zeer sterk besnoeid. De bewerkingen met wortelvormen worden teruggebracht tot de inderdaad onmisbare.

Voor verdere details omtrent de bedoelingen van de Commissie verwijs ik naar de paragrafen 5, 7 en 9 van het rapport (Eucl. XXX, 163).

Voor meetkunde is de Commissie veel minder ver in details getreden dan voor algebra, waar BUNT's rapport „Een onderzoek naar de overlading van het Programma voor de Wiskunde bij het Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs” (1953), veel betrouwbaar materiaal voor het ingenomen standpunt bevatte.

Mogen de voorstellen van de Commissie ten aanzien van de rol die het vraagstuk in het wiskunde-onderwijs dient in te nemen ingrijpend zijn, revolutionair zijn ze niet, in zoverre als ze de centrale betekenis van het vraagstuk als didactisch hulpmiddel onaangetast laten. Over een andere betekenis aan het klasgesprek toe te kennen of over het invoeren van het wiskundige opstel zoals de Duitsers dat kennen (zie b.v.: Hessische Beiträge zur Schulreform, Weniger ist mehr, 1950) zwijgt de Commissie. Het lag ook niet op haar weg in deze uitspraak te doen. Taak van de Commissie was een leerstofprogramma op te stellen en daarbij didactische problemen zoveel mogelijk ter zijde te laten. Ten aanzien van het vraagstuk moest de Commissie echter wel een standpunt innemen met verregaande didactische consequenties, omdat voortwoekering der vraagstukken hypertrofie een bedreiging betekent van elke wezenlijke modernisering van het wiskundeprogramma.

8. *Betekenis van de voorstellen van de Wimecos-commissie.*

Het ontwerp-programma betekent een poging om een te lang uitgestelde modernisering van het onderwijs toch nog door te zetten. Het wil — opnieuw — de illusie wegnemen dat het historisch gegroeide programma niet meer voor essentiële verbetering vatbaar zou zijn. Het wil enkele onderdelen van de wiskunde, die men in 1955 bezwaarlijk nog „nieuw” kan noemen, aan het leerprogramma toevoegen in de overtuiging dat ze door hun structuur zich lenen voor bestudering door jonge leerlingen, terwijl ze òf voor de verdere wiskunde zelf òf om hun maatschappelijke toepassingen van een aanwijsbaar nut zijn. Stoffgebieden die geen functie meer hebben in het verdere onderwijs en die men kan missen in verband met de algemene doelstellingen van het wiskunde-onderwijs, worden opgeruimd. Eindexamenprogramma en leerprogramma worden met elkaar in overeenstemming gebracht.

Wat betekenen de gedane voorstellen niet?

- a. Ze betekenen geen poging om de wiskunde te herstellen op de plaats, die dit vak een halve eeuw geleden op de schoolprogramma's innam.
- b. Ze betekenen geen poging om leerstof aan het programma toe te voegen die zijn betekenis enkel zou ontleenen aan een onderstelde „transfer”. Of er van de zogenaamde vormende waarde iets terecht zal komen hangt meer af van de wijze waarop het onderwijs gegeven wordt, dan van de leerstofkeuze.
- c. Ze betekenen geen speciaal rekening houden met de speciale belangen van groepen als de a.s. ingenieurs, a.s. mathematici, a.s. fysici, zoals soms wordt ondersteld. De recente bewering van prof. NIEUWENHUIS, hoogleraar in de paedagogiek te Groningen, dat de omvang van het wiskunde-onderwijs op de H.B.S. in sterke mate bepaald zou worden door de eisen die de Technische Hogeschool meent te moeten stellen (Paedagogische Studiën, XXXII, 4, blz. 111), is zowel ten aanzien van de voorstellen van de Commissie BETH-DIJKSTERHUIS, als ten aanzien van de voorstellen van de Wimecos-commissie in strijd met de feiten.

Over het onder a) genoemde aspect nog enkele woorden. Er is sprake van een schier continue afbrokkeling van het aantal uren voor wiskunde uitgetrokken sinds het begin dezer eeuw. Na 1900 was het normale urenaantal in de opvolgende klassen 7, 7, 7, 4, 4, totaal 29. Door het normaal-programma van 1916 werden deze cijfers 7, 6, 6, 4, 4, totaal 27. Bij het K.B. van 1920: 6, 6, 6, 4, 4, totaal 26; in 1937 bleef het totaal 26, maar de verdeling werd iets gunstiger: 6, 5, 5, 5, 5. In 1941 ging er weer één uur af: 5, 5, 5, 5, 5, totaal 25.

Men ziet: de rij is monotoon dalend, althans niet stijgend. Hier zijn allerlei sociale factoren in het spel over de betekenis waarvan de Commissie geen oordeel heeft uitgesproken. Ze neemt genoeg met handhaving van de bereikte status quo. Ook meent de Commissie geen voorstellen te moeten doen waardoor op het eindexamen het gewicht van het vak wiskunde t.o.v. de andere vakken zou veranderen. Ze heeft haar voorstellen gedaan in de veronderstelling, dat er in de toekomst evenveel uren in evenveel zittingen zullen worden uitgetrokken als in het verleden. Dit geldt voor H.B.S. en voor Gymnasium. Hier is de urenbedeling overigens iets ongunstiger dan bij de H.B.S.: 4, 3, 3, 3, 5, 5, totaal 23. Dit verschil maakt dat het nog niet mogelijk zal zijn om voor H.B.S. en Gymnasium met éénzelfde stel eindexamenopgaven te volstaan; op grond van eenzelfde programma mogen en moeten beide schooltypen bij de realisatie van het programma nog van elkaar afwijken. Dit kan b.v. betekenen dat op het Gymnasium wat minder aan constructieve meetkunde gedaan zal worden dan op de H.B.S., en het daar van het schriftelijk examen uit te sluiten. De omstandigheid dat het Gymnasium 6-jarig is en in de hoogste klasse dus rijpere leerlingen heeft dan de H.B.S., maakt er de achterstand in uren iets minder drukkend.

Door de vrij algemene instemming die de voorstellen van de Wimecos-commissie in de verenigingen van leraren in de wiskunde hebben ontmoet is deze Commissie optimistisch ten aanzien van het toekomstig lot van de voorstellen, al staat in deze nog niets vast. In de verenigingen WIMECOS, LIWENAGEL en de WISKUNDE-WERKGROEP zijn de voorstellen met bijna algemene stemmen aanvaard. Ook van andere zijde is adhesie betuigd. Zo heeft de Nederlandse Onderwijscommissie voor Wiskunde, subcommissie van de reeds meermalen genoemde C.I.E.M. in september een verzoek aan de Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen gericht om invoering van de ontworpen programma's op zo kort mogelijke termijn te bevorderen. Deze onderwijscommissie bestaat uit 4 hoogleraren in de wiskunde, 1 docent in de didactiek, en 2 wiskundeleraren. Voorzitter is FREUDENTHAL.

Voorts heeft de Vereniging voor Statistiek op gronden die geheel aansluiten aan die welke uiteengezet zijn in par. 5, g van het Wimecos-rapport, zich achter het rapport der commissie geplaatst. Het wachten is nu op maatregelen van de zijde van de Inspectie en van de Regering.

Het spreekt vanzelf dat er op de WIMECOS-voorstellen ook kritiek is uitgeoefend. Allereerst door minderheden op de vergaderingen

van WIMECOS en LIWENAGEL waar het rapport werd aangenomen. Verder b.v. in het „Rapport van de Commissie ter bestudering van het vraagstuk van de overlading bij het gemeentelijk V.H.M.O. te 's-Gravenhage" (Commissie TIMMERS, 1954—1955). Met de programma's voor de onderbouw wordt volledige instemming betuigd. Voor de bovenbouw vreest de commissie overlading, maar ze verklaart tevens zich niet te ontveinzen, dat de nieuwe onderdelen aantrekkelijke en grotendeels ook nuttige leerstof bevatten.

Om misverstand te weren lijkt het me niet overbodig hier over de urenverdeling in de bovenbouw iets naders te zeggen. Temeer omdat in het rapport over deze urenverdeling die in de vergaderingen van WIMECOS en LIWENAGEL wél ter sprake kwam, niets is gezegd. Ik geef de verdeling, die de leden der Leerplancommissie na een uitvoerige bespreking der gerezen bezwaren thans voor hun verantwoording nemen.

Functies en grafieken	15 uur;
complexe getallen	10 uur;
differentiaal- en integraalrekening	35 uur;
goniometrie	25 uur;
statistiek	50 uur;
stereometrie	70 uur;
analytische meetkunde	45 uur.

Dit geeft een totaal van 250 uren, terwijl er in de vierde en de vijfde klassen van de H.B.S. en in de vijfde en zesde van het Gymnasium (opvolgend op 37 en 16 werkweken te stellen; de tijd vanaf 1 februari in de hoogste klassen wordt voor repeteren gereserveerd) 265 uren beschikbaar zijn.

Op de genoemde vergadering van LIWENAGEL heeft één der leden de opmerking gemaakt, dat er na de invoering van het voorgestelde leerplan geen onderscheid meer zou bestaan tussen progressief en conservatief onderwijs. Dit lijkt me onjuist, ondanks een kern van waarheid. De tegenstellingen t.a.v. de keuze van de leerstof zullen bij de aanvaarding van dit programma tot het verleden behoren — voorlopig. In de praktijk van het onderwijs is nog zeer goed een traditionele naast een met modernere inzichten rekening houdende methode denkbaar. Ook het nieuwe programma kan met een „ouderwetse" didactiek trachten uit te voeren, terwijl het oude programma tot de leerlingen kan worden gebracht op een wijze, die van didactisch standpunt „progressief" mag worden genoemd.

De grote winst gelegen in een aanvaarding van het concept-leer-

plan zal zijn, dat vele problemen inzake didactiek die op oplossing wachten, zullen kunnen worden behandeld op de grondslag van gemoderniseerde in plaats van op de grondslag van verouderde leerstof.

Het verheugende van de ervaringen van het laatste jaar is, dat ernstige mensen, die in opvattingen van didactiek soms diametraal tegenover elkaar staan, op een punt van praktische schoolpolitiek als de leerstofkeuze elkaar kunnen vinden, zodra de belangen van het onderwijs, dat beide groepen een gelijke liefde toedragen, de urgentie van een elkaar vinden hebben aangetoond.

WAT IS EN WAARVOOR DIENT DE STATISTIEK *)

door

Prof. Dr. J. HEMELRIJK

1. *Inleiding.*

In kranten en tijdschriften treft men soms lijsten met vragen aan, die van een aantal antwoorden voorzien zijn, waaruit men dan zijn keuze kan maken. De lezer kan daar dan zijn algemene ontwikkeling aan toetsen. Het zou interessant zijn de antwoorden van een groot aantal mensen te hebben op de volgende vragen.

Vraag	Mogelijke antwoorden ¹⁾
Wat is Statistiek?	1. Een bepaald soort straatverlichting 2. Een ander woord voor dictatuur 3. Een tabel met cijfers 4. Een bepaald soort journalistiek 5. Een onderdeel der toegepaste wetkunde 6. Een goocheltruc 7. Een bureau in Den Haag 8. Een onderdeel van het leger 9. Een administratie methode 10. ²⁾
Waarvoor dient Statistiek?	1. Voor vermaak van het publiek 2. Voor het verkrijgen van overzicht over massale gegevens 3. Om na te gaan of een geneesmiddel werkt 4. Als hulpwetenschap op vrijwel ieder gebied 5. Nergens voor 6. Voor snelle verplaatsing van zwaar materiaal 7. Voor bevolkingsadministratie 8. Voor de verkeersveiligheid 9. Om reclame te maken 10. ²⁾

*) Rapport S 182 (V 12) van de Statistische Afdeling van het Mathematisch Centrum, Amsterdam.

¹⁾ Verschillende antwoorden kunnen als juist worden aangegeven.

²⁾ Desgewenst zelf invullen.

De uitslag van een dergelijk onderzoek is niet gemakkelijk te voorspellen, maar van de juiste antwoorden zou toch vermoedelijk het merendeel betrekking hebben op de verzamelende en beschrijvende statistiek. Men denkt bij het woord „statistiek” vaak in de eerste plaats aan boeken vol tabellen, massale administratieve gegevens en bevolkingsadministratie. Verder aan grafieken, soms beeldgrafieken met hele en halve mannetjes, indexcijfers en opinieonderzoek. Inderdaad vormen deze gebieden een belangrijk onderdeel van de statistiek en hun maatschappelijke betekenis is groot. De statistiek bestrijkt echter een veel breder terrein dan dat der massale gegevens en wordt tegenwoordig als hulpwetenschap op zeer vele gebieden van wetenschap, techniek en samenleving toegepast, ook op waarnemingsmateriaal van kleine omvang.

De bekendheid van de methoden en principes van de statistiek is in het algemeen nog zeer gering, evenals het besef, dat een kritische instelling bij de toepassing en interpretatie van het grootste belang is. Dit besef treft men overigens in de historie hier en daar wel aan, soms zelfs in extreme vorm. Getuige b.v. het uittrenturen aangehaalde gezegde, dat aan Disraely wordt toegeschreven: „There are lies, damned lies and statistics”.

De noodzaak van een kritische instelling wordt uitvoerig naar voren gebracht in een kort geleden verschenen boekje van D.Huff „How to lie with statistics” (N.Y. 1954), waarin vele voorbeelden van bewuste en onbewuste fouten worden gegeven. Wij ontleen aan dit boekje de volgende anecdote.

De „Reader's Digest” liet eens van een aantal sigaretten van verschillende merken het gehalte aan nicotine en andere vergiften analyseren en publiceerde het resultaat in extenso. Dit was, dat ze allemaal ongeveer even veel gif bevatten en dat er slechts verwaarloosbare kleine verschillen waren gevonden, in tegenstelling tot de reclamecampagnes der fabrikanten. Typografie en kleine verschillen in de waarnemingsresultaten brachten echter tezamen toch één merk onderaan de lijst. Deze gelukkige omstandigheid werd door de betrokken fabrikanten aangegrepen om een grootse reclamecampagne op te zetten, waarbij — onder weglating van alle cijfers — betoogd werd, dat dit merk de minste ongezonde stoffen bevatte en dat dus iedere roker met gezond verstand zich tot dit merk moest beperken. Hetgeen aan de „New Yorker” de verzuchting ontlokte: „There 'll always be an add man.”

Huff wijst in dit verband op het oude gezegde: „A difference is a difference only if it makes a difference” en wij kunnen hier nog aan toevoegen: Een verschil is alleen een verschil als *iets* het een verschil

maakt. Aan de statistiek is de taak, om na te gaan of een verschil inderdaad een verschil is, d.w.z. om te onderscheiden tussen systematische en toevallige verschillen.

Een ander voorbeeld ter illustratie van de noodzaak van een kritische instelling, deze keer bij de interpretatie van statistisch goed verzamelde en bewerkte gegevens, is het volgende. Over een periode van enige tientallen jaren werd in Engeland een onmiskenbare gelijktijdige stijging geconstateerd van enerzijds het aantal radiobezitters en anderzijds het aantal verpleegden in inrichtingen voor psychisch gestoorden. Men zegt dan, in statistisch jargon, dat deze twee aantallen gedurende de beschouwde tijdsperiode sterk gecorreleerd waren. Ontstaat deze correlatie nu doordat speciaal psychopaten een radio aanschaffen of is de stijging van het aantal psychopaten een gevolg van het luisteren naar de radio? Betrof het de Nederlandse radio dan zou er wel reden zijn om in het bijzonder het tweede als een reële mogelijkheid te beschouwen. Zet men zelf de radio af, dan wordt men nog gek van die van de bureu. En is men zelf bestand tegen de affreuze Nederlandse programma's, dan maakt men er de bureu gek mee. Of dit in Engeland, het land der uiterste beleefdheid, — waar bovendien de programma's zoveel beter zijn —, ook zo is, valt te betwijfelen. En in ieder geval is er een veel meer voor de hand liggende indirecte oorzaak voor de correlatie aan te wijzen: gedurende de jaren, waar het onderzoek over ging, was de radio juist in opkomst en steeg dus het aantal luisteraars monotoon. Iedere andere grootheid, die in die tijd een stijging of daling vertoonde, om welke reden dan ook, vertoont dus een grote positieve of negatieve correlatie daarmee. En de stijging van het aantal verpleegden kan b.v. het gevolg zijn geweest van het toenemende levenstempo en de steeds groeiende gejaagdheid om ons heen.

Bij dit voorbeeld heeft men geen scherpe blik nodig om in te zien, dat een correlatie niet op een direct oorzakelijk verband tussen de beide onderzochte grootheden behoeft te wijzen. De gevallen zijn echter legio, waarbij dit minder voor de hand ligt en waarbij een verkeerde interpretatie het resultaat is.

Intussen zijn wij nog niet gevorderd met de beantwoording der in de titel gestelde vragen. Wij zullen daar nu aan beginnen.

2. *Voorbeelden van statistische problemen.*

De statistiek wordt wel eens kortweg beschreven als een methode om langs exacte weg tot een beslissing of een conclusie te geraken in onzekere situaties. De onzekerheid is het centrale kenmerk van de statistiek, zowel wat de gegevens als wat de conclusies betreft.

Nu is het niet moeilijk om van onzekere gegevens tot onzekere conclusies te komen. Dit gebeurt dagelijks (men denke b.v. aan de beoordeling van leerlingen) en men kan zich afvragen, welke voordelen dan wel verbonden zijn aan een exacte methode hiervoor. Dit is een punt, dat later ter sprake zal komen.

De onzekere gegevens hebben betrekking op grootheden of verschijnselen, die bij herhaalde waarneming een onregelmatige variabiliteit vertonen en zich daardoor als moeilijk of slechts gedeeltelijk voorspelbaar voordoen. Enkele voorbeelden zijn:

Het weer,
 het aantal auto-ongelukken in een weekeind,
 het aantal beschuiten in een rol,
 de wachttijd bij de Hembrugpont,
 het jaarlijkse nationale inkomen,
 de opbrengst van een akker,
 de straling van een vlam,
 de lengte van een walvis,
 de hoogte van een stormvloed,
 de snelheid en mate van herstel van een patient, enz.

Enkele typische problemen, ontleend aan verschillende gebieden van statistiek en toepassingsterrein, zijn, kort beschreven, de volgende.

1. De uitwerking te bepalen van een gif op een bepaald soort insect. Welke concentratie en hoeveel van het gif moet men gebruiken om een insectenplaag van bepaalde omvang doeltreffend te bestrijden. (Schattingstheorie)
2. Te onderzoeken of de werkzaamheid van twee geneesmiddelen voor een bepaalde ziekte verschilt, indien een eventueel verschil niet zo sterk is, dat men met een grof experiment reeds tot een conclusie kan geraken. (Toetsingstheorie)
3. De ontwikkeling te voorspellen van de bevolkingsaanwas van een land. (Tijdreeks-analyse, groeikrommen)
4. Een maatsysteem voor confectie te ontwerpen, dat met zo weinig mogelijk kosten voor een zeer groot percentage der bewoners van een land in passende confectiecostuums voorziet. (Regressie- en correlatierekening; „Operations-research”, over een Nederlandse term is men het nog niet eens.)
5. Het ontwerpen van een eenvoudig routineschema voor de controle van een snelverlopende serieproductie, waardoor de kwaliteit der afgeleverde producten op een bepaald niveau gebracht of gehouden wordt. (Kwaliteitsbeheersing)

6. Het onderzoek naar de invloed, die verschillende factoren, zoals de soort en hoeveelheid van brandstof en snelheid en hoeveelheid van toegevoerde lucht, hebben op de straling van een vlam in een oven, en de wisselwerking van deze factoren. (Variantieanalyse)

7. Voorspelling van de invloed, die een bepaalde loonsverhoging zal hebben op het prijspeil van bepaalde artikelen. (Econometrie)

8. Het reduceren van een groot aantal kenmerken, die waargenomen zijn aan ieder exemplaar van een verzameling objecten (b.v. proefpersonen), tot een kleiner aantal, met een zo gering mogelijk verlies aan informatie. (Factoranalyse)

Deze voorbeelden bestrijken slechts een kleine fractie zowel van de mathematische statistiek als van het toepassingsgebied. Voor een eerste indruk van de aard der problemen zijn zij echter wel voldoende.

3. *De statistische gedachtegang uiteengezet aan de hand van een voorbeeld.*

De eerste stap van een experimenteel onderzoek is het vaststellen van het doel, dat men wenst te bereiken. Het belang daarvan wordt wel eens onderschat. Een vage doelstelling houdt echter het gevaar in, dat men achteraf niet in staat blijkt te zijn bepaalde belangrijke vragen te onderzoeken, omdat met deze vragen bij de verzameling van het waarnemingsmateriaal geen rekening is gehouden.

Wij maken het ons, wat dit betreft, gemakkelijk door als voorbeeld te kiezen een onderzoek naar de al of niet werkzaamheid van een nieuw geneesmiddel (G) voor een ziekte, die voorheen met een ander middel (A) werd behandeld. Het doel is dan na te gaan, of één van beide middelen beter werkt dan het andere.

De tweede stap is het opstellen van een plan voor het verrichten der proeven en/of waarnemingen. Daarover bestaat een uitgebreide statistische litteratuur, die zijn bestaansrecht ontleent aan het feit, dat alleen indien aan bepaalde voorwaarden voor de experimenten voldaan is een verantwoorde statistische analyse mogelijk is. Bovendien zijn er proefschemata's ontwikkeld, die een zo groot mogelijke doeltreffendheid bezitten, d.w.z. die erop gericht zijn het aantal te verrichten waarnemingen — met gelijke kans, op een duidelijke en praktisch bruikbare conclusie — zo klein mogelijk te maken. Het te kiezen schema hangt van allerlei omstandigheden af. Eén der belangrijkste is de aard der waarnemingen en de maat, waarin deze worden uitgedrukt. Ook daarin heeft men veelal de keuze tussen verschillende mogelijkheden. Voor de eenvoud nemen we aan, dat bij ons voorbeeld als maat genomen wordt: het aantal dagen dat

verloopt tussen de eerste toediening van het geneesmiddel (G of A) en de eerste koortsvrije dag van de patient. De volgende proefopzet kan dan worden gebruikt. Deel de te behandelen patiënten door loting in in twee groepen, A en G, waarbij de patiënten van groep A geneesmiddel A en die van groep G geneesmiddel G toegediend krijgen. Deze loting dient te voldoen aan de volgende eis. Indien er in totaal N patiënten zijn, die verdeeld worden in twee groepen van m resp. n ($m+n = N$), dan moeten alle mogelijke verdelingen (dat zijn er dus $\binom{N}{m}$) even waarschijnlijk zijn.¹⁾ Bij voorkeur zou men er verder voor dat m en n ongeveer (of precies) gelijk zijn, daar dit de kans op het ontdekken van een verschil tussen A en G, als dat aanwezig is, maximaliseert.

De derde stap is nu het verrichten van het experiment en het noteren der uitkomsten. Het resultaat hiervan zijn twee reeksen van waarnemingen:

$x_1, \dots, x_m$ voor groep A

$y_1, \dots, y_n$ voor groep G,

getallen, die dus het aantal dagen aangeven tussen het begin van de behandeling en de eerste koortsvrije dag van de patiënt en die we tezamen genomen, aangeven met $z_1, \dots, z_N$.

Vervolgens komt de statistische bewerking, die hier het karakter draagt van een toetsing. Men volgt daarbij ongeveer het schema van een bewijs uit het ongerijmde en gaat daarom (voorlopig) uit van de hypothese H_0 , dat middel A niet beter is dan G en G niet beter dan A, kortom: dat het om het even is welk middel men gebruikt. Indien deze onderstelling juist was had men even goed aan *alle* patiënten A (of G) toe kunnen dienen en dan is de verdeling van de waarnemingen $z_1, \dots, z_N$ in twee groepen een zuiver toevallige, nl. tot stand gekomen door de loting, die de verdeling in de twee groepen heeft bepaald.

Nu is het intuïtief duidelijk, dat H_0 verworpen zal moeten worden als de waarden $x_1, \dots, x_m$ alle of bijna alle kleiner zijn dan de waarden $y_1, \dots, y_n$ (dat wijst er nl. op, dat A beter is dan G) en eveneens indien het omgekeerde het geval is. Wij zoeken daarom een maat voor de ligging der beide groepen waarnemingen t.o.v. elkaar. Hiervoor bestaan vele mogelijkheden. Wij kiezen, om de gedachten te be-

¹⁾ Het waarschijnlijkheidsbegrip bij een loterij veronderstellen wij voldoende bekend. Gelijke waarschijnlijkheden van twee of meer gebeurtenissen betekent, dat deze gebeurtenissen bij een lange reeks lotingen ongeveer even vaak optreden.

palen, en eenvoudige, nl. het aantal der positieve verschillen onder

$$v_{ij} = x_i - y_j \quad (i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n).$$

Dit aantal noemen wij U ²⁾ en, de niet essentiële complicatie van gelijke waarnemingen buiten beschouwing latende, is het duidelijk dat U een waarde tussen 0 en mn aanneemt. Grote (resp. kleine) waarden van U vormen een aanwijzing dat G beter is dan A (resp. A beter dan G). Indien een waarde in de buurt van $\frac{1}{2}mn$ gevonden wordt zal men noch tot het één noch tot het ander kunnen besluiten en zal men dus de hypothese H_0 niet kunnen verwerpen. Het onderzoek eindigt dan onbeslist.

Een precisering van deze gedachtegang wordt als volgt verkregen.

Bij ieder der $\binom{N}{m}$ splitsingen van $z_1, \dots, z_N$ in twee groepen $x_1, \dots, x_m$ en $y_1, \dots, y_n$ behoort één waarde van U , die men kan berekenen.

Ieder van deze $\binom{N}{m}$ splitsingen heeft echter, indien H_0 juist is, dezelfde waarschijnlijkheid. Op grond hiervan kan men de waarschijnlijkheidsverdeling van U direct opstellen, door voor iedere waarde van U te tellen bij hoeveel der splitsingen deze waarde behoort. Daarbij blijkt, dat de waarden in de buurt van $\frac{1}{2}mn$ het meest frequent optreden en dat naar beide zijden de frequentie monotoon afneemt. Voor ieder getal a kan men nu uitrekenen welke fractie der splitsingen een $U \leq a$ geeft en men kiest nu een getal α (de *onbetrouwbaarheidsdrempel*) en bepaalt twee getallen U_l en U_r zodanig, dat de fractie der splitsingen met $U \leq U_l$ en die der splitsingen met $U \geq U_r$ beide $\leq \frac{1}{2}\alpha$ zijn en deze grens zo dicht mogelijk naderen. Vindt men nu bij het experiment een waarde van U , die $\leq U_l$ is, dan besluit men tot: A beter dan G , en bij $U \geq U_r$ tot: G beter dan A . Waarden tussen U_l en U_r leiden niet tot een beslissing.

De consequentie van deze handelwijze is nu uit het voorafgaande duidelijk. Indien H_0 juist is bezitten alle splitsingen gelijke waarschijnlijkheden en dus is de kans om een waarde van $U \leq U_l$ of $\geq U_r$ te vinden $\leq \alpha$. Dit betekent, dat men een kans $\leq \alpha$ bezit om H_0 te verwerpen, indien hij juist is. Voor α kiest men een niet te groot getal, veelal 1/20 of 1/100. Bij toepassing van deze methode komt men dan slechts zelden (nl. gemiddeld hoogstens 1 op de 20 resp. 1 op de 100 keer) tot een onjuiste uitspraak.

Heeft nu de statisticus zijn berekeningen uitgevoerd dan is de interpretatie van de resultaten, strikt genomen, niet meer zijn taak, maar — in ons voorbeeld — die van de medicus. Deze interpretatie

²⁾ Dit is „de U van Wilcoxon”, de ontwerper van deze toets.

lijkt in dit geval zeer eenvoudig en is in het bovenstaande ook reeds verwerkt. Toch zijn er ook in een zo eenvoudig geval nog haken en ogen. Indien de beide behandelingen duidelijk verschillend van karakter zijn, b.v. als G een behandeling met injecties is en A niet, dan kunnen psychologische factoren in het geding komen. Deze factoren kunnen soms grote invloed uitoefenen en het is verre van ondenkbaar, dat men dientengevolge een verschil tussen de groepen A en G zou vinden. Een ongeveer even groot verschil zou dan echter wellicht ook gevonden zijn indien men inplaats van G dummy-injecties gegeven had, b.v. van physiologisch zout. Men moet dus toch nog voorzichtig zijn met de conclusie en indien het gevaar van een dergelijk psychologisch (of een ander) effect aanwezig is, moet men de proefopzet nog uitbreiden, b.v. door een derde groep patiënten met dummy-injecties te behandelen en deze groep met G te vergelijken.

Deze beschrijving van een statistisch onderzoek is uiterst summier en onvolledig. De tijd laat niet anders toe. Zo zijn vele details nog onbesproken, waaraan wij slechts een kort woord kunnen wijden, doch die bij de concrete uitvoering van een onderzoek van belang zijn.

We hebben als maat voor de ziekteduur genomen: het aantal dagen tussen het begin van de behandeling en de eerste koortsvrije dag van een patiënt. Ook andere factoren, zoals leeftijd, geslacht, hoogte der koorts en het aantal koortsdagen voor het begin van de behandeling zijn van belang. Het is dan ook aan te raden deze gegevens ook op te nemen; bij de statistische verwerking kan men daar dan rekening mede houden volgens verschillende, hier niet te beschrijven methoden. De beschreven toets is echter ook steeds toepasbaar in de boven beschreven vorm, waarbij met deze factoren geen rekening is gehouden. Daarvoor dient nl. juist die loting!

Een tweede kwestie is, of de gekozen maat medisch gezien van veel betekenis is. Bij malaria b.v. zal dit wel niet het geval zijn, bij andere ziekten, waarbij het dalen van de koorts op volledige genezing wijst, echter wel.

Verder zijn wij voorbij gegaan aan de motieven, die de keuze tussen de toetsingsgrootheid U of een andere (b.v. het verschil tussen de gemiddelden van $x_1, \dots, x_m$ en $y_1, \dots, y_n$) bepalen. Wij hebben niet besproken hoe groot de beide reeksen waarnemingen moeten zijn om een bepaald verschil tussen A en G te ontdekken en wij hebben alleen in principe aangegeven hoe de waarschijnlijkheidsverdeling van U wordt bepaald, terwijl daarvoor veel snellere methoden ontwikkeld zijn.

Een opmerking van algemene aard, die voor de interpretaties van het resultaat van belang is, is verder volgende: indien een verschil

tussen A en G is gevonden, b.v. ten gunste van G, wil dit nog niet zeggen, dat G voor iedere patiënt beter is dan A. „G is beter dan A” betekent: indien men vele patiënten met G behandelt zal in de regel de ziekteduur korter zijn dan bij behandeling met A. Echter niet altijd. Voor één apart geval kan men dit niet voorspellen. De „onvoorspelbaarheid in het klein”, die aan statistische verschijnselen eigen is, kan door de statistiek niet worden opgeheven.

En tenslotte — en daaraan willen wij nog enige aandacht wijden — wij hebben het waarschijnlijkheidsbegrip gebruikt alsof dit bekend ondersteld mocht worden. Dit kan voor een zo eenvoudig geval wel zonder veel gevaar voor verkeerd begrip geschieden, maar een goed inzicht in de statistiek, zoals die tegenwoordig wordt beoefend, is niet mogelijk zonder een redelijke kennis van de waarschijnlijkheidsrekening.

4. *De plaats van het waarschijnlijkheidsbegrip in de statistiek.*

Het begrip „kans” of „waarschijnlijkheid” (afkorting: wh, meervoud: whn) kan in principe bij de statistiek wellicht worden gemist. Het kan uit de vorige paragraaf gemakkelijk worden geweerd door aan de loterij de eis te stellen, dat bij een lange reeks lotingen alle mogelijke splitsingen ongeveer even vaak voorkomen, terwijl toch de resultaten van reeds verrichte lotingen geen invloed uitoefenen op de volgende lotingen. Een dergelijke loterij „zonder geheugen” is zeer wel te construeren, zoals wij straks zullen laten zien. Men kan dan het gehele betoog stellen op de experimentele basis van een dergelijke loterij en komt dan tot precies dezelfde conclusie als eerst: dat H_0 slechts ongeveer in een fractie $\leq \alpha$ van een lange reeks toepassingen van deze methode ten onrechte zal worden verworpen.

Er zou wellicht enige reden zijn te trachten het kansbegrip uit de statistiek te weren, daar er over de filosofische zijde van dit begrip zeer uiteenlopende meningen bestaan. Volgt men hiertoe de vorgeschetste weg, dan vermijdt men echter alleen de term en gebruikt het begrip toch in één van zijn interpretaties, nl. de *frequentie-interpretatie*. Deze houdt in, dat men een kans p op een verschijnsel V interpreteert als een bij een bepaalde situatie behorend getal, dat uitdrukt in welke fractie v ongeveer van de gevallen, waarin deze situatie optreedt het verschijnsel V zich zal voordoen. Deze fractie v , die een *frequentie-quotiënt* (afkorting: fq, meervoud: fq_n; notatie $f_q(v)$) wordt genoemd, is voor concrete reeksen van waarnemingen te berekenen en wordt dan als een meting van p beschouwd, die, zoals alle of vrijwel alle metingen, een zekere onnauwkeurigheid bezit. Dit laatste heeft tot gevolg dat men in alle

voorafgaande formuleringen het woord „ongeveer” tegenkomt.

Uitgaande van dit standpunt is er echter geen dringende reden om de term „wh” te vermijden; men zou de resultaten der waarschijnlijkheidsrekening (afkorting: whr) toch gebruiken, zij het in vertaalde vorm.

De beantwoording van de vraag: „wat is statistiek” kan dus ook kort als volgt worden gegeven. Statistiek is toegepaste waarschijnlijkheidsrekening en whr is een (b.v. axiomatisch opgezet) onderdeel van de zuivere wiskunde, in het bijzonder van de maattheorie. Men ontleent aan de whr een *mathematisch model* voor het beschouwde probleem en de whn hebben daarbij het karakter van *modelwaarden* van fqn. Het ligt daarom voor de hand de axiomas te ontleenen aan eigenschappen van fqn en dit geschiedt dan ook. Een summiere toelichting van dit procédé volgt hieronder.

Een fq is steeds het quotient van het aantal elementen van een verzameling, die een zeker kenmerk vertonen, en het totale aantal elementen van die verzameling. Dergelijke verzamelingen, die in de statistiek *populaties* worden genoemd, hebben wij in het voorafgaande telkens ontmoet zonder ze steeds expliciet te noemen. Voorbeelden: een reeks experimenten, een groep patiënten, de insecten van een bepaalde soort, de producten van een fabriek, etc. Ook toekomstige of denkbeeldige elementen (zoals experimenten die men zal of zou kunnen verrichten, nog te fabriceren exemplaren van een artikel) kunnen tot een populatie behoren en dit is zeker zo, indien men tot voorspellingen wil komen.

Voor de eenvoud beperken wij ons tot eindige populaties. Laat nu $A_1, A_2, \dots$ kenmerken voorstellen, die de elementen van een bepaalde populatie al of niet bezitten. Geven wij de aantallen elementen, die deze kenmerken bezitten, aan met $n(A_1), n(A_2)$, etc. en het totale aantal met N , dan is dus

$$fq(A_i) = n(A_i)/N \quad i = 1, 2, \dots$$

en de volgende eigenschappen volgen direct uit deze definitie:

- 1) $0 \leq fq(A_i) \leq 1$ voor alle i ;
- 2) $fq(A_i) = 0$ dan en slechts dan als A_i niet voorkomt;
- 3) $fq(A_i) = 1$ dan en slechts dan als A_i steeds voorkomt;
- 4) $fq(A_i \text{ of } A_j) = fq(A_i) + fq(A_j) - fq(A_i \text{ en } A_j)$,

waarin „of” betekent: één van beide of beide.

Het wh-theoretische model wordt nu geheel analoog hieraan opgebouwd. Een *modelverzameling* Γ met elementen γ vormt de basis. Deze elementen stellen nu echter niet, zoals bij de populatie, concrete objecten of uitkomsten voor, maar *mogelijke* uitkomsten, *eventualiteiten*.

Een eenvoudig voorbeeld, waaraan het verschil tussen populatie en collectie goed te zien is, is het werpen met een knoop. Stellen wij de beide mogelijke uitkomsten voor door H (holle kant boven en B (bolle kant boven), dan zal de populatie b.v. bestaan uit een reeks worpen, waaronder weliswaar toekomstige kunnen zijn, maar die toch ieder één der uitkomsten H of B hebben of zullen hebben. De modelverzameling bestaat echter, voor iedere worp, uit twee elementen H en B, de beide mogelijke uitkomsten en het model voor een reeks van n worpen is het product van n dergelijke collecties van ieder 2 elementen en bevat dus 2^n elementen, die de mogelijke uitkomsten van de gehele reeks voorstellen.

Op een dergelijke verzameling Γ zijn nu kenmerken A_i gedefinieerd, d.w.z. dat van ieder element gegeven is, of het A_i ($i = 1, 2, \dots$) bezit of niet. De deelverzamelingen van Γ , bestaande uit alle elementen, die het kenmerk A_i bezitten, geven wij kortweg ook met A_i aan. De collectie wordt nu een *wh-veld* genoemd, als op Γ een verzamelfunctie P gedefinieerd is, die aan de volgende *axiomas* ³⁾ voldoet:

- 1) $0 \leq P[A_i] \leq 1$ voor alle i ;
- 2) $P[A_i] = 0$ als A_i onmogelijk is;
- 3) $P[A_i] = 1$ als A_i zeker is;
- 4) $P[A_i \text{ of } A_j] = P[A_i] + P[A_j] - P[A_i \text{ en } A_j]$.

$P[A_i]$ wordt „de kans op A_i ” genoemd (P = probability).

De tijd laat niet toe, dat wij volledig bespreken, hoe uit dit model weer de weg terug kan worden gevonden naar de praktijk, d.w.z. hoe stellingen, afgeleid uit deze axiomas, in de vorm van uitspraken met *fqn* in plaats van *whn* geïnterpreteerd kunnen worden. Het ligt voor de hand dat dit geschiedt door een *wh* weer te interpreteren als een benadering van een *fq* in een lange reeks waarnemingen of experimenten, maar de rechtvaardiging, die de theorie daarvoor biedt kunnen wij niet bespreken. Wel willen wij even aangeven, als zeer simpel voorbeeld van de rekenwijze met deze axiomas, hoe men op eenvoudige wijze kansen van voorgeschreven grootte kan construeren met primitieve materiële hulpmiddelen. Daarvoor hebben wij nog één extra begrip nodig, dat van *stochastische onafhankelijkheid*.

Twee eventualiteiten A_1 en A_2 heten *stochastisch onafhankelijk* indien $P[A_1 \text{ en } A_2] = P[A_1]P[A_2]$ is. De praktische interpretatie hier-

³⁾ Behalve de hier genoemde axiomas is er nog een limietaxioma, dat uitsluitend van belang is indien men oneindige collecties beschouwt, hetgeen bepaalde wiskundige voordelen meebrengt doch voor de principes der opzet niet van belang is.

van is, dat het al of niet optreden van A_1 het al of niet optreden van A_2 niet beïnvloedt. Beschouwen wij nu twee opeenvolgende worpen met één onverslijtbare knoop, verricht op dezelfde wijze, dan is bij ieder van die worpen de kans op H dezelfde, b.v. p :

$$P[H] = p$$

en

$$P[B] = q = 1 - p,$$

zoals gemakkelijk uit de axiomas af te leiden is. Aannemende, dat de uitkomst van de eerste worp die van de tweede niet beïnvloedt — een onderstelling, die zeer aannemelijk lijkt, maar die desgewenst experimenteel geverifieerd kan worden —, verkrijgen wij als wh veld voor een paar van worpen in korte notatie:

$$\left. \begin{array}{l} P[HH] = p^2, \\ P[HB] = pq, \\ P[BH] = qp, \\ P[BB] = q^2. \end{array} \right\} \Gamma_2.$$

Nu is $pq = qp$, dus $P[HB] = P[BH]$, wat ook p moge zijn. Verkleinen wij nu Γ_2 tot Γ'_2 door de elementen HH en BB weg te laten — wat in de practijk betekent, dat wij paren worpen, die HH of BB geven, buiten beschouwing laten dus doorgaan met het verrichten van paren worpen tot wij ofwel HB ofwel BH verkrijgen — dan geldt voor Γ'_2 evenals voor Γ_2 :

$$P[HB] = P[BH],$$

maar daar HB en BH de enige elementen van Γ'_2 zijn, is nu $P[HB] = 1 - P[BH]$, zodat beide $= \frac{1}{2}$ zijn.

Wij hebben nu dus, met behulp van een knoop, een kans $= \frac{1}{2}$ geconstrueerd; een „zuivere” munt is daarvoor dus niet nodig. Langs soortgelijke weg kunnen wij nu iedere rationale wh exact construeren en iedere reële willekeurig dicht benaderen. De betekenis hiervan voor het opzetten van experimenten, die de mogelijkheid van een verantwoorde statistische verwerking garanderen, is in par. 3 toegelicht.

DE BETEKENIS VAN HET LEERPLAN VOOR DE TOEKOMSTIGE STUDENT ¹⁾

door

Dr. J. SEIDEL

Ter voorbereiding van deze voordracht las ik een aantal artikelen over aard en inhoud van het wiskunde-onderwijs. Hierbij kwam mij een geschrift in handen van een beroemd wiskundige, waaruit ik U iets wil meedelen. Deze mathematicus van grote naam bepleit een verandering van het leerplan, het onderwerp dat ons thans bezighoudt, en het is interessant iets over zijn denkbeelden te vernemen. Ook hij wenst invoering van de infinitesimaalrekening bij het Middelbaar Onderwijs, niet als incidenteel onderwerp, maar als fundamenteel onderdeel. Ook hij pleit voor beperking van de goniometrie als zelfstandig leervak en wil de gonio een meer dienende rol laten spelen bij algebra en meetkunde. Invoering van de behandeling der kegelsneden, met synthetische en met analytische methoden, staat hij voor. De Beschrijvende Meetkunde onderscheidt hij in B.M. in engere zin (Monge projectie) en in ruimere zin (stereometrisch tekenen met scheve projectie en perspectief). Hij prefereert de tweede soort en verwijst de eerste soort naar de vakscholen. Slechts zoekt men bij hem tevergeefs naar invoering van de statistiek bij het Middelbaar Onderwijs. Maar dat is ook geen wonder als men weet dat het geschrift waarop ik doel geschreven werd omstreeks 1900, en wel door de beroemde wiskundige Felix Klein! U ziet, in 1955 hebben wij nog niet geheel bereikt, wat Klein reeds in 1900 bepleitte. Ik moet hier meteen aan toevoegen dat ook in ons land reeds lange tijd stemmen in deze richting klinken.

Ook de argumenten, waarmee Klein de tegenstanders van b.v. de invoering van de beginselen der Infinitesimaalrekening te lijf gaat, hebben heden nog niets van hun waarde verloren. Ik noem U een paar van zijn argumenten. Overlading van het programma? Nee, Klein wil slechts minder gewichtige zaken door waardevolle vervangen. De differentiaal- en integraalrekening is te moeilijk, het onderwijs erin zal in het aanleren van technieken ontaarden? Dat hangt van de presentatie af; bovendien lijden alle onderwerpen aan

¹⁾ Voordracht gehouden voor de Vacantiecursus 1955 van het Mathematisch Centrum over het centrale onderwerp: Het ontwerp-leerplan 1954 voor wiskunde bij het M.O.

gevaar tot ontaarding. Is het hogere en niet-elementaire wiskunde? Wat is elementair; zeker niet wat met de elementen te maken heeft, want dat is juist erg moeilijk. Klein definieert, dat elementair datgene is, dat op dit ogenblik zonder speciale studie voor de menselijke geest van middelbare begaafdheid toegankelijk is. Het middelbaar onderwijs pikt daar dan datgene uit, dat een algemene grondslag kan bieden voor het begripen der hedendaagse cultuur. Welnu, onder deze definities behoren de beginselen der Infinitesimaalrekening tot de elementaire wiskunde en tot de schoolwiskunde. De beginselen der Infinitesimaalrekening behoren bij de algemene vorming, niet alleen bij de voorbereiding der vakstudie. Het is een fundamenteel onderdeel van de wiskunde, die tot doel heeft de opvoeding in het functioneel denken. Aldus Felix Klein in 1900. Hij had overigens ook niet dadelijk succes met zijn streven.

Laten wij aannemen, dat de huidige commissie wél succes heeft en dat binnenkort het ontwerp wordt tot leerplan. Wat zullen de gevolgen zijn voor de student, die zijn middelbare school opleiding volgens dit nieuwe leerplan zal hebben genoten. Wij onderscheiden vier groepen studenten:

- de student met hoofdvak wiskunde
- de student, die wiskunde als essentieel bijvak heeft
- de student in de vakken, op gedeelten waarvan wiskundige methoden van toepassing zijn, en tenslotte
- de student, in wiens vak totaal geen wiskunde voorkomt.

Ik maak deze ruwe indeling slechts om over een leiddraad te beschikken bij de bespreking. De grenzen van opvolgende groepen zijn zeer vaag en ik zou niet graag willen discussieren over de vraag, in welke groep de student in één of ander vak ingedeeld zou moeten worden.

Wij beginnen met de laatste groep. Studenten in de juridische, literaire, theologische faculteiten genieten geen universitair onderwijs in de wiskunde. Zij hebben hun wiskundekennis slechts van de middelbare school. Wellicht zijn er gebieden in hun vakken, waarvoor de wiskunde wél nuttig is gebleken in recente ontwikkelingen. Laten wij ons beperken tot die studenten, voor wie wiskundekennis geen enkel practisch nut heeft. De vorming op de middelbare school heeft voor hen het karakter van een kennismaking met zekere wiskundige ideeën en methoden. Zulk een kennismaking heeft zin, wanneer zij wiskundige onderwerpen betreft die voor het heden-

daagse menselijk denken en handelen van belang zijn, onderwerpen die een rol spelen in de hedendaagse wetenschap en maatschappij. Nu kan men zeer wel trachten, met dergelijke zaken kennis te maken door de historische ontwikkeling in de wiskunde na te gaan. Men schiet echter te kort, wanneer men bij deze historische behandeling een tijdstip bereikt, dat één of meer eeuwen terug ligt, wanneer men dus aan onderwerpen die heden ten dage van belang zijn niet toe komt en het laat bij zaken, die weliswaar een rol hebben gespeeld, maar die dat thans niet meer doen. In dat geval heeft de bovenbedoelde historische benadering geen zin. Men dient het doel, het kennis maken met de wiskunde die voor het hedendaagse denken en handelen van belang is, niet uit het oog te verliezen. In welke mate deze kennismaking dient te geschieden is een ander punt, een didactisch probleem, waarbij het bevattingsvermogen van de leerlingen een rol speelt. Bepalend voor het onderwerp mag de didactiek echter niet zijn.

Onder de wiskunde-onderwerpen, die een fundamentele rol spelen in de hedendaagse cultuur, zou men kunnen rekenen de infinitesimaalrekening, die aan de basis van het niet-lineaire functionele denken staat, en de statistiek, waarin tot uiting komt dat wiskunde onzekerheid heeft en dat onzekerheid wiskundig behandeld kan worden. Het ontwerp-leerplan, dat de infinitesimaalrekening en de statistiek wil opnemen, en dat de beschrijvende meetkunde en de goniometrie belangrijk wil beperken, wijst in de richting van bovengenoemde kennismaking met fundamentele wiskundige onderwerpen. Bij het Gymnasium α , dat vele a.s. studenten van de groep die wij thans bespreken herbergt, worden proefnemingen gedaan met onderwijs in de statistiek, eveneens in overeenstemming met het hierboven opgemerkte. Of het wiskundeonderwijs aan het Gymnasium α behalve tot een bescheiden kennis van de moderne cultuur ook een bijdrage moet leveren tot de kennis der klassieke cultuur, zoals de plannen voor invoering der antieke wiskunde bedoelen, is voor mij nog geen uitgemaakte zaak. Reeds zoveel aandacht wordt in het Gymnasium α aan de klassieken geschonken, dat een gedeeltelijk dienstbaar maken van de weinige wiskunde uren aan dit doel het gevaar inhoudt de eenzijdigheid van dit schooltype te vergroten. Bovendien wijst de recente invoering van 3 uur natuur-wetenschappen in klasse 5 α in andere richting.

Vervolgens beschouwen wij de vakken die onderdelen of grensgebieden bezitten, waarin wiskundige methoden worden gebruikt,

zoals biologie, medicijnen, economie, sociologie, psychologie. De beoefenaars van deze onderdelen zelf, de biometristen, econometristen enz. (de naam psychometristen is reeds door anderen ingepikt) kunnen wij wel met de volgende groep behandelen. Beperken wij ons dus tot de niet-metristen in deze vakken. Wiskunde-onderwijs bij het Middelbaar Onderwijs kan voor hen behalve een kennismaken met fundamentele begrippen, waarover wij zoeven spraken, wel degelijk ook nuttig effect hebben. De student in deze vakken moge in zijn beperkt vakgebied weliswaar niet op expliciete wijze wiskunde gebruiken, aan de periferie van zijn vak ontmoet hij gebieden waar dit wel het geval is. Wil hij dus kennismaken van resultaten in wetenschappen die de zijne raken, en eventueel sommige van deze resultaten toepassen, dan kan een zekere kennis der grondbegrippen hem zeer nuttig zijn, zodat hij statistische beschouwingen althans kan lezen, zodat hij niet de eerste de beste d of f moet overslaan. U merkt, alweer komen de infinitesimaalrekening en de statistiek naar voren. De kans om van deze vakken op natuurlijke wijze iets te weten te komen heeft de student eigenlijk slechts op school. Later heeft hij er noch de tijd, noch de rust voor, om van de lust maar niet te spreken. Het nieuwe leerplan is voor deze groep a.s. studenten van belang omdat nu vakken met een zeker nuttig karakter op het programma komen in plaats van verouderde zaken, die van geen nut zijn voor de wetenschappen waarop wij doelden.

Uitvoeriger bespreken wij thans de groep, waarvoor wiskunde een essentieel bijvak is. Behalve de zojuist genoemde metristen behoren hiertoe fysici, chemici, de technici, de landbouwkundigen en wellicht ook de cadetten aan de K.M.A. en de Adelborsten. Hier heeft de voorgenomen verandering van leerplan voor een groot deel het karakter van een verschuiving van bepaalde onderwerpen van het hoger naar het middelbaar onderwijs. Anderzijds zullen traditionele vakken in omvang sterk afnemen. U bent wellicht geïnteresseerd in de vraag, hoe dat nu in Delft moet gaan, nu het vak Beschrijvende Meetkunde als zelfstandig vak bij het middelbaar onderwijs zal verdwijnen. In de jaren voor de oorlog werd de Beschrijvende Meetkunde immers van groot belang voor het Technisch Hoger Onderwijs geacht, de peiler waarop het wiskunde onderwijs rustte. In het Gedenkboek van de Polytechnische School, voorganger der T.H., dat juist 50 jaar geleden werd uitgegeven, leest men, dat „zich voor de meetkunde een verschiep opende, zoals zich sinds de grote tijd der Grieken nimmer voor haar ogen had ontrold” en constateert men, dat „deze tak van meetkunde orde in de chaos kwam brengen”. In

de jaren na de oorlog is van de B.M. weinig overgebleven. Ik constateer, dat bouwkundigen, noch natuurkundigen en electro-technici, noch technologen onderwijs in dit vak genieten, dat civielen slechts met de allereenvoudigste zaken betreffende scheve projectie en perspectief kennismaken zonder er examen in te behoeven af te leggen. Slechts werktuigbouwkundigen krijgen een beperkt programma van 2 uur per week gedurende één jaar. Men moet constateren, zonder daarbij een mening te behoeven uit te spreken, dat de B.M. aan de T.H. geen vooropleiding op de H.B.S. rechtvaardigt en dat het afschaffen van de B.M. als zelfstandig vak geheel overeenkomt met de gang van zaken bij het Technisch Hoger onderwijs. Wanneer het middelbaar onderwijs de beginselen der scheve projectie als illustratie der stereometrie opneemt, is de kennismaking, die nu in de Civiele afdeling plaats vindt, zelfs overbodig.

Wij staan wat langer stil bij de groep studenten, die wiskunde als essentiaal bijvak hebben en beschouwen het overbrengen van de beginselen der Infinitesimaalrekening naar het middelbaar onderwijs. Ik zie twee voordelen. De behandeling van de moeilijke grondbegrippen van dit vak vereist aandacht, rust en discipline. De aankomende student, die overstroomd wordt met nieuwe vakken, die een totaal ander leven leidt dan hij op school gewend was, die nog zelfstandig moet leren werken, vindt in zijn eerste jaar nauwelijks de gelegenheid om deze nieuwe begrippen te laten bezinken. Het is voor hem een voordeel als hij reeds iets ervan in de rustige schoolatmosfeer tot zich genomen heeft. Een ander aspect van de invoering der infinitesimaalrekening is het belang dat andere vakken hebben om er snel gebruik van te kunnen maken. Nu moet dit natuurlijk niet overdreven worden. Ik herinner mij, en wellicht enkelen van U met mij, dat ik bij één der eerste natuurkunde-colleges in mijn eerste jaar reeds kromme ∂ op het bord zag staan, zonder dat ik zelfs met de rechte d had kennisgemaakt. Een feit is echter dat vele vakken popelen om van deze, thans nog bij het Hoger Onderwijs te verwerven, kennis van de grondbeginselen der infinitesimaalrekening zo spoedig mogelijk gebruik te maken.

Beschouwen wij het voorgestelde leerplan voor Infinitesimaalrekening iets nader. De onderwerpen die genoemd worden, kort gezegd „tot e ”, getuigen van een wijze beperking, tonen aan dat het de samenstellers te doen is om de grondbegrippen, en kunnen een waarborg zijn tegen het afglijden in rekentechnieken. Eén zin in het ont-

werp verheugde mij in het bijzonder, namelijk die, waarin gesteld wordt dat bij het bepalen van de aard van extrema het gebruik maken van de tweede afgeleide geen vereiste is. U wilt mij wel een kleine afdwaling op het gebied der didactiek vergeven, mijnheer de Voorzitter. Blijkens de discussies tijdens de behandeling van het rapport door Wimecos ziet nog niet iedereen het belang van dit punt in. De ervaring leert, dat het bepalen van de aard van een extreem met de tweede afgeleide tot automatisch gereken leidt, dat met het begrijpen der grondbegrippen niets meer te maken heeft. Ik moge toelichten met een voorbeeldje, hoe men het zonder y'' zou kunnen doen.

De functie zij $y = \frac{x^{3/2}}{1+x^2}$. Wij bepalen en ontbinden de afgeleide:

$$y' = \frac{2(1-x\sqrt{2})(1+x\sqrt{2})}{3x^{1/2}(1+x^2)^2}$$

Wij noteren de tekens van de functie en van haar afgeleide a.v.

x	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	
y	+	+	+	+
y'	+	+	0	-

Daar de functie dus blijkbaar links van $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ toeneemt en rechts van $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ afneemt, moet voor $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ een maximum optreden.

Enige limietbeschouwingen leiden dan snel tot de grafiek die 2 maxima te zien geeft, maar ook een minimum bij $x = 0$, dat met de tweede afgeleide niet te vinden is.

Nog steeds sprekende over de groep a.s. studenten die de wiskunde als bijvak beoefent, weiden wij niet uit over de statistiek, waarover in deze cursus uitvoering en door competente lieden gesproken zal worden, en evenmin over de goniometrie, waarvan het nieuwe programma juist datgene handhaaft, dat van belang is bij het voortgezet wiskunde-onderwijs. Liever staan wij nog een ogenblik stil bij de Analytische Meetkunde, die men als nieuw leervak aan het leerplan wil toevoegen. Wij schenken eerst enige aandacht aan de veranderingen, die het hoger onderwijs in dit vak in de jaren na de oorlog heeft ondergaan, daarbij speciaal de Delftse gang van zaken beschouwend. De traditionele cursus begon met de behandeling der determinantenleer, met toepassingen op het gebied der stelsels van

lineaire vergelijkingen, en behandelde voorts opvolgend de analytische meetkunde van het platte vlak en die der ruimte. Speciale aandacht werd gewijd aan de pooltheorie, en de theorie der kegelsnedenbundels. Veel is thans veranderd door de invoering van methoden der lineaire algebra, die deels als middel, deels ook als doel beschouwd worden. Ik moge U een indruk geven van één van de huidige cursussen in het eerste jaar te Delft, door enige onderwerpen aan te duiden.

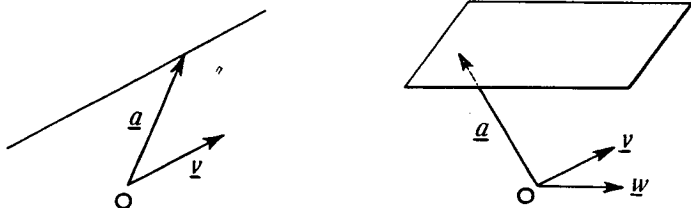
De vectoren uitgaande van een vast punt O , zowel in het vlak als in de ruimte, vormen een systeem waarin optelling en scalaire vermenigvuldiging is gedefinieerd, welke bewerkingen aan zekere eigenschappen voldoen. Abstractie van dit systeem levert het begrip vectorruimte. Fundamenteel is nu het begrip lineaire afhankelijkheid, waarmee de begrippen deelruimte, basis, dimensie, coördinaten t.o.v. een basis worden geïntroduceerd. De eigenschappen van het affine vlak en de affine ruimte kunnen nu beschreven worden. De rechten (resp. vlakken) door O zijn dan deelruimten van de dimensie 1 (resp. 2):

$$x = \lambda v \quad [\text{resp. } x = \lambda v + \mu w].$$

Ook de rechten die niet door O gaan laten zich beschrijven, namelijk als de meetkundige plaats van de eindpunten der vectoren

$$x = a + \lambda v \quad [\text{resp. } x = a + \lambda v + \mu w],$$

met behulp van coördinaten te interpreteren als de parametervoorstelling van de rechte [resp. het vlak]. De uitbreiding tot n dimensies ligt



voor het grijpen. Een andere manier om lineaire variëteiten door O of niet door O te beschrijven wordt geleverd door homogene of inhomogene stelsels lineaire vergelijkingen. Het begrip der afhankelijkheid van vectoren kan gebruikt worden bij het oplossen van zulke stelsels. Enerzijds zijn de oplossingen van het stelsel

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 4x_1 + 7x_2 + 4x_3 + x_4 &= 3 \end{aligned}$$

de coëfficiënten, waarmee de afhankelijkheid der kolomvectoren uitgedrukt wordt:

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Anderzijds kunnen wij door lineaire combinaties der rijvectoren overgaan op een equivalent stelsel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & | & 1 \\ 4 & 7 & 4 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -8 & 5 & | & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -13 & 9 & | & -1 \\ 0 & 1 & 8 & -5 & | & 1 \end{pmatrix}$$

waaruit de oplossing volgt

$$\begin{aligned} x_1 &= 13\lambda - 9\mu - 1 \\ x_2 &= -8\lambda + 5\mu + 1 \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= \mu \end{aligned} \quad \text{of} \quad x = \lambda \begin{pmatrix} 13 \\ -8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De oplossing stelt dus voor een vlak niet door O in een R_4 . Het is duidelijk dat de begrippen matrix en rang hier een grote rol gaan spelen. Nadat determinanten als inhouden zijn ingevoerd komt de metriek ter tafel door invoering van het inwendig product $(a, b) = \sum a^i b^i$ van twee vectoren, waarmee lengten, hoeken, loodrechtheid worden gedefinieerd. Een vlak in R_3 resp. rechte in R_2 met normaalvector n kan dan voorgesteld worden door $(x, n) = \text{const.}$, terwijl de vgl. van de bol (A, r) genoteerd wordt met

$$(x-a, x-a) = r^2.$$

Via lineaire transformaties en eigenwaarden van matrices attaqueert men dan de kwadratische variëteiten. Hiermee moge ik deze summieriëre aanduidingen besluiten.

U zult zich wellicht afvragen, waar nu de klassieke behandeling van de kegelsneden is gebleven. Waar moet de student nu horen over $y^2 = 2px$, over $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$? Welnu, het is inderdaad een

didactische moeilijkheid om deze onderwerpen te plaatsen. Ze behoren bij de kwadratische variëteiten, maar die komen pas na de lineaire meetkunde ter sprake. Soms behandelt men ze bij de Analyse als voorbeelden van meerwaardige functies, soms ook laat men aan de hierboven geschetste cursus een korte behandeling der gewone A.M. voorafgaan, met alle bezwaren vandien. Ik maak thans twee opmerkingen. Ten eerste, dat het Hoger Onderwijs er blijkbaar

belang bij heeft, dat de analytische (en ook de synthetische) behandeling der kegelsneden reeds bij het middelbaar onderwijs plaats vindt. Ten tweede, dat het de vraag is of het gerechtvaardigd is, de ontwikkeling bij het Hoger Onderwijs in aanmerking genomen, om bij het Middelbaar onderwijs te spreken van een apart vak Analytische meetkunde. Wellicht ware het beter deze onderwerpen te zien als verlengstuk der planimetrie, en ze tezamen met de stereometrie te vatten in één vak, de meetkunde. In elk geval lijkt beperking van de A.M. bij het middelbaar onderwijs gewenst, zoals ook duidelijk in het ontwerp-leerplan wordt beoogd. Dit geldt eveneens ten aanzien van de meetkundige plaatsen, een bron van vele moeilijke eliminatie processen. Onze leermeester van der Woude hield ons steeds voor: elimineren is niet het wegboksen der parameters!

Te lang reeds stelde ik de bespreking van de invloed van het leerplan op de a.s. wiskundestudent uit. Laten wij daar thans toe overgaan. Aan de ene kant is dit een belangwekkend onderwerp, omdat het onszelf betreft, of liever zou hebben kunnen betreffen indien slechts de leden van de commissie ouder of wij jonger geweest zouden zijn. Aan de andere kant een onbelangrijk onderwerp omdat het een betrekkelijk kleine groep is, waarvoor men nu heus geen leerplan voor het M.O. gaat veranderen. Ik heb mij in de voorafgaande zinnen tweemaal aan een nalatigheid schuldig gemaakt, in beide gevallen door het niet in aanmerking nemen van een te vaak door ons „vergeten groep”. Immers, wij dienaar van het onderwijs in de wiskunde vormen niet meer de enige groep wiskundigen. Steeds groter wordt het aantal der mathematici, die als toegepast wiskundige hun plaats in de maatschappij vinden. Aan de instellingen van Hoger Onderwijs wordt de opleiding tot toegepast wiskundige ter hand genomen. Is het dan niet gerechtvaardigd, dat ook het middelbaar onderwijs haar aandacht geeft aan de wiskunde, die toepasbaar is, en daartoe haar leerplan verandert? Laten wij het ontwerp-leerplan een ogenblik in dit licht beschouwen.

Door de invoering van de statistiek zal de a.s. wiskundestudent reeds op school kennismaken met de beginselen van een stuk toegepaste wiskunde. Dit kan van betekenis zijn voor de toekomst van de wiskunde, in die zin, dat door deze kennismaking een grondslag kan worden gelegd voor begrip tussen de beoefenaars der zuivere en der toegepaste wiskunde. Een erkenning van de toegepaste wiskunde bij middelbaar en hoger onderwijs kan helpen om de onlustgevoelens, waarmee sommige zuiveren de toepassingen beschouwen,

de ondergrond, die toch vaak uit onkunde bestaat, te ontnemen. Maar niet alleen de verhoudingen binnen de wiskunde kunnen op deze wijze gezuiverd worden, ook wordt hiermee materiaal aangevoerd om het gat tussen de wiskunde en haar buurwetenschappen te dichten. Het is de taak van het hoger en van het middelbaar onderwijs, om dit materiaal geschikt te maken voor gebruik.

Wij behoeven ons overigens niet te laten beheersen door louter dienende gevoelens ten aanzien van onze buurwetenschappen. Vakken als natuurkunde oefenen heden ten dage een grote aantrekkingskracht uit op a.s. studenten, voor een niet gering deel veroorzaakt door het spectaculaire karakter van haar recente successen. De ontwikkelinggang der wiskunde is door de aard van het vak minder goed te volgen voor buitenstaanders en a.s. studenten. Thans reeds is er een aanzienlijk tekort aan wiskundigen, zowel bij het onderwijs als daarbuiten. Het is de vraag hoe de situatie zich zal ontwikkelen. Het gevaar is niet denkbeeldig, dat het aanbod van wiskundigen zowel in kwaliteit als in kwantiteit een verandering zal ondergaan. Het zou interessant zijn iets te weten omtrent de verhouding van aanbod van en behoefte aan wiskundigen in de toekomst, en ook om deze verhouding te kunnen vergelijken met die in andere wetenschappen. Wellicht zou een onderzoek naar deze zaken ons dwingen om meer propaganda voor de wiskunde te maken. Nu is propaganda een lelijk woord en ik bedoel uitdrukkelijk niet, dat op de aanplakzuilen affiches zouden moeten verschijnen met slagzinnen als: Een flinke vent gaat wiskunde studeren, of: Studeer wiskunde, het loont! Wat ik wel bedoel is voorlichting geven aan scholieren omtrent mogelijkheden, aard, en moeilijkheden van de wiskundestudie. Bij zulke voorlichting, die ook afgezien van elke noodzaak nuttig kan zijn, zal de positie der toegepaste wiskunde een niet onbelangrijke rol moeten spelen. Het bekend zijn van de a.s. student met de beginselen van zekere gebieden der toegepaste wiskunde kan deze voorlichting slechts ten goede komen.

Ik spreek nu steeds van toegepaste wiskunde en niet van statistiek. Het ontwerp-leerplan spreekt niet over de mechanica, ook een deel der toegepaste wiskunde. Ik betreur het, dat men bij het opstellen van die leerplan niet mede de mechanica heeft betrokken, dat men de statistiek en de mechanica blijkbaar geheel los van elkaar heeft gezien. Immers het tweede vak leidt een zelfstandig bestaan, terwijl het eerste vak in het rapport als onderdeel van de wiskunde beschouwd wordt. Verder is het duidelijk dat ook de

voorgenomen invoering der analytische meetkunde en der infinitesimaalrekening invloed op het mechanica-onderwijs zal hebben. Zonder mij in een nadere beschouwing te begeven moge ik de wenselijkheid naar voren brengen het creëren van een vak Toegepaste Wiskunde te overwegen, waarin worden samengebracht onderwerpen uit de statistiek, uit de mechanica (een vereenvoudigde versie van het huidige vak) en wellicht ook gedeelten van de numerieke wiskunde.

Bij de bespreking van de vier groepen studenten hebben wij het wiskundeprogramma beschouwd in het licht van het nut, dat het wiskunde-onderwijs kan hebben voor het hoger onderwijs. Bovendien hebben wij, vooral wanneer dit nut niet aanwezig was, als richtlijn gesteld, dat de onderwerpen zinvol moeten zijn, in de zin van bijdragend tot een kennismaking met de rol die de wiskunde in de hedendaagse wetenschap en maatschappij speelt. Wij zagen, dat zowel de statistiek als de Infinitesimaalrekening aan deze eisen voldoet, dat de Analytische Meetkunde er slechts gedeeltelijk aan voldoet, terwijl zekere onderwerpen die thans op het leerplan staan, zoals de Beschrijvende Meetkunde, noch nuttig, noch zinvol zijn. Het hoger onderwijs kan het ontwerp-leerplan dus mijn inziens met instemming begroeten. Slechts is enige reserve ten aanzien van de Analytische Meetkunde aanwezig, terwijl het mechanicaleerplan in verband met de voorgenomen wijzigingen bij de wiskunde nog op hervorming wacht.

Bezien wij nog een ogenblik het ontwerp-eindexamenprogramma voor de H.B.S. Naast het traditionele vak mechanica treffen wij aan Wiskunde I, waarin enerzijds de stereometrie en anderzijds de goniometrie en de analytische meetkunde een plaats vinden, en Wiskunde II bevattende de algebra met infinitesimaalrekening en de statistiek. Het instituut van vrijstellingen is in het ontwerp gehandhaafd.

Om met die laatste te beginnen, ik meen dat het hoger onderwijs gebaat zou zijn met een afschaffing van de vrijstellingen. Enerzijds zou het gevaar voor africhten op eindexamenvraagstukken verminderen, anderzijds zouden de cijfers op de eindexamenlijst dan een juister beeld geven van de kunde en kennis van de a.s. studenten. Ik moge in dit verband opmerken, dat de prestaties in de wiskunde bij het eerste examen te Delft voor ex-H.B.S.ers gemiddeld $1\frac{1}{2}$ punt beneden de eindexamencijfers liggen.

Het ontwerp-eindexamenprogramma voor de H.B.S. bevat, evenals het Gymnasium-eindexamen, het onderdeel goniometrie en ana-

lytische meetkunde, twee onderwerpen die niets met elkaar te maken hebben. De belangrijke nieuwe onderdelen infinitesimaalrekening en statistiek trekken samen met de algebra op, een inhomogene combinatie, die de verhoudingen vooral met het vak mechanica scheeftrekt.

Ik zou U een andere verdeling der vakken willen voorleggen, die de homogeniteit en de evenredigheid wellicht beter dient, en waarin enige opmerkingen, die ik in de loop van het betoog heb gemaakt, zijn verwerkt. Wij zouden dan drie vakken kunnen onderscheiden, n.l. Het vak *Analyse*, bevattende algebra, goniometrie en infinitesimaalrekening.

Het vak *Meetkunde*, bevattende de stereometrie en, als verlengstuk van de planimetrie, de analytische en synthetische behandeling der kegelsneden.

Het vak *Toegepaste wiskunde*, bevattende de mechanica en de statistiek.

STATISTIEK BIJ HET V.H.M.O.¹⁾

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Door velen wordt als bezwaar tegen het onderwijs in statistiek aangevoerd, dat dit slechts gedegenereerd wiskunde-onderwijs zou kunnen zijn. In het onderstaande hoop ik aan te tonen, dat deze opvatting niet juist is. Wel is bij het statistiekonderwijs het wiskundig gedeelte direct verbonden met de praktische toepassingen. Dit kan echter moeilijk als een nadeel van dit onderwijs worden aangemerkt; integendeel, het kan niet anders dan nuttig zijn de leerling ook binnen het kader van de wiskundelessen van het praktische nut van de wiskunde te overtuigen.

1. *Enige statistische grondbegrippen.*

a. *Het statistische getal.* We moeten onderscheid maken tussen het mathematische getal, het fysische getal en het statistische getal. Het mathematische getal is exact bepaald. Het fysische getal dient om een waarnemingsresultaat vast te leggen. Een waarnemingsresultaat laat zich echter niet door een exact bepaald getal representeren, omdat het zelf niet exact bepaald is. Fysische getallen zijn daarom, mathematisch gesproken, intervallen. Hetzelfde geldt voor statistische getallen. Toch is er tussen beide soorten getallen een duidelijk onderscheid. De fysicus streeft naar verscherping van zijn meetmethoden. Elke decimaal meer, dus elke intervalvernaauwing, wordt door hem als winst beschouwd. Voor de statisticus geldt daarentegen geenszins, dat hij consequent streeft naar een dergelijke intervalvernaauwing. Een voorbeeld moge dit verduidelijken.

Onderstel, dat Philips een bepaald soort lampen in de handel brengt en garandeert, dat dit soort een gemiddelde brandtijd van 1000 uur heeft. Na verloop van tijd wordt op deze garantie een correctie aangebracht: de gemiddelde brandtijd is gebleken te zijn 969 uur 20 minuten. Niemand zal zich hiervoor zeer geïnteresseerd betonen. En als dan bovendien de mededeling zou volgen, dat experimenten aan de gang zijn om ook het aantal seconden te bepalen, zou men ernstig gaan twijfelen aan de efficiëncy van het bij dit concern gevoerde beleid.

¹⁾ Voordracht gehouden voor de Vakantie-cursus 1955 van het Mathematisch Centrum.

Een ander voorbeeld: men wil zich een inzicht verschaffen over de leeftijdsstructuur van de bevolking van een bepaalde stad. Zal men nu aan iedere inwoner vragen zijn leeftijd op een bepaald tijdstip in jaren, maanden, dagen en uren op te geven? Zonder twijfel niet. Men zou de grootste moeite hebben een dergelijk gecompliceerd materiaal te verwerken.

Bovendien zijn de conclusies, die men trekken wil, niet met een dergelijke mate van nauwkeurigheid te trekken, dat het zin zou hebben uit te gaan van een zo scherp bepaald feitenmateriaal. Philips b.v. kan alleen de gemiddelde brandduur van de lampen zo nauwkeurig bepalen, als hij ze allemaal doormeet en er dus geen een in de handel brengt. Bij het nagaan van de leeftijdsstructuur zal het moment, waarop de samenstelling bepaald wordt, als representerend worden geacht voor een langer tijdsverloop. Binnen dit langere tijdsverloop zal de samenstelling echter schommelingen vertonen. Het heeft daarom geen zin de samenstelling op dit ene moment zo nauwkeurig te bepalen.

Men zal dus bij elk statistisch probleem zijn intervallen zo groot kiezen, als in verband met de concrete situatie gewenst is. Dat wil zeggen niet te klein, want dan moeten nodeloos veel details verwerkt worden, en niet te groot, want dan gaan te veel details verloren. De keuze van de intervallen is een zuiver praktische kwestie, mathematisch relevant is alleen, dat blijkbaar met intervallen gerekend wordt in plaats van met mathematische getallen. Het rekenen met deze intervallen geschiedt volgens een zeer eenvoudige regel: ze worden daarbij vervangen door hun middens. De intervallen dragen in de statistiek de naam *klassen*.

b. *Histogram*. In het eerste voorbeeld zal men b.v. een 1000-tal lampen onderzoeken en constateren, dat zij na 800 uur nog alle branden. Na 840 uur blijken er 25 uitgegaan te zijn, na 880 uur behalve deze 25 nog 75, na 920 uur nog 90, enz. Men heeft dus klassen van 40 uur genomen. Het resultaat van deze proefneming is een functie, die het verband aangeeft tussen de klasse en het aantal uitgegane lampen. Van deze functie kan men een grafiek maken. Op een horizontale as zet men intervallen af, die de klassen voorstellen. Met deze intervallen als basis construeert men rechthoeken, waarvan de oppervlakte evenredig is met het aantal uitgegane lampen. Een dergelijke grafiek heet een *histogram*. In fig. 1 is een dergelijk histogram getekend.

Het is gewenst hier te wijzen op enerzijds de analogie met de functies en grafieken uit de algebra, maar anderzijds het essentiële verschil naar voren te laten komen.

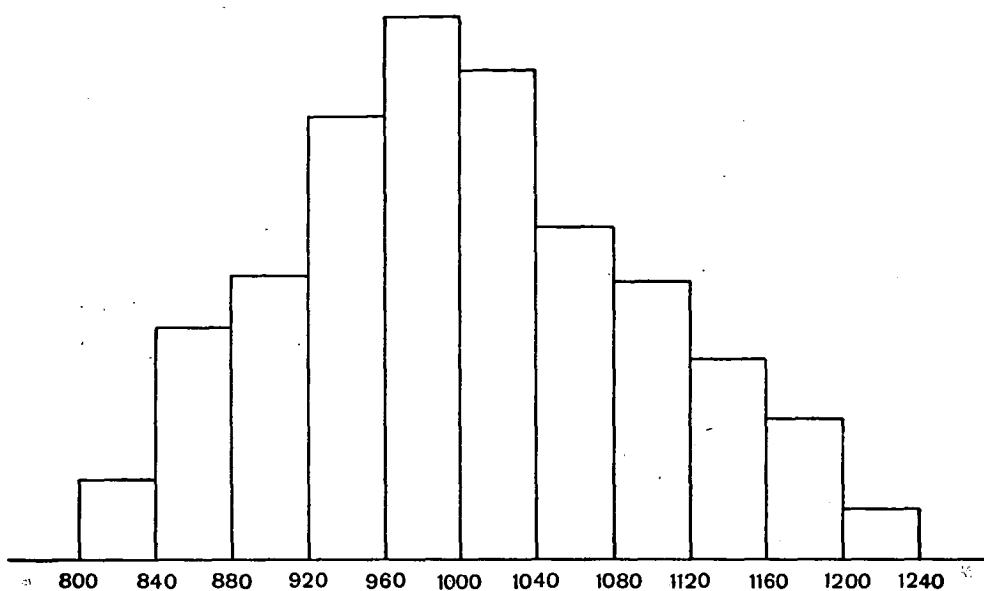


fig. 1

c. *Gemiddelde en spreiding.* Bij het verwerken van het materiaal zijn twee grootheden van groot belang: het gemiddelde en de spreiding. Op het belang van het gemiddelde en op de definitie ervan zal hier wel niet ingegaan behoeven te worden. Het nut van de kennis van de spreiding is minder vanzelfsprekend. De volgende twee voorbeelden dienen ter illustratie hiervan.

Een gemeente gaat over tot elektrische straatverlichting. Aangeschaft worden gloeilampen met een gemiddelde brandduur van 4000 uur, die dus ongeveer een jaar dienst kunnen doen. Na enige tijd beginnen er lampen defect te geraken. Deze moeten stuk voor stuk vernieuwd worden, hetgeen vrij veel werk met zich meebrengt. Indien de spreiding in de brandduur gering is, is het voor de gemeente voordeliger na b.v. 10 maanden alle lampen te vervangen. Is de spreiding groot, dan kan deze procedure echter juist nadeel opleveren.

De planken, die voor de constructie van een vloer gebezigd worden, zijn op hun draagkracht onderzocht. Op grond van de gevonden gemiddelde draagkracht is gebleken, dat de vloer voldoende sterk zal zijn. Is de spreiding echter groot, dan is het desondanks mogelijk, dat juist daar waar de piano komt te staan, zich enige relatief zwakke planken bevinden, waardoor toch de draagkracht ter plaatse onvoldoende wordt. Is de spreiding gering, dan hoeft men hiervoor geen angst te hebben.

De spreiding van de waarnemingsgetallen $X_1, X_2, \dots, X_n$ wordt gedefinieerd door de uitdrukking

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum (X_i - \bar{X})^2},$$

waarin $\bar{X}$ het gemiddelde van de getallen voorstelt.

Tot zover is voor de opbouw van de statistiek weinig wiskunde vereist. Dit behoeft ons niet te verbazen, aangezien hier nog slechts de uiteenzetting van de betekenis van de eerste begrippen aan de orde is. Voorlopig laten we nu deze begrippen rusten, om eerst de grondslagen van de kansrekening te behandelen en er dan later op terug te komen.

2. *Kansrekening.* Aan de behandeling van de kansrekening gaat een hoofdstuk vooraf, waarin de permutaties, de combinaties en het binomium van Newton behandeld worden.

Bij de behandeling van de kansrekening gaan we uit van de ouderwetse definitie: de kans op een gebeurtenis is gelijk aan het quotiënt van het aantal gunstige en het aantal mogelijke gevallen. Wetenschappelijk is deze definitie in onbruik geraakt, didactisch biedt ze echter vele voordelen. Helaas moet eraan toegevoegd worden, dat de gevallen alle „even waarschijnlijk” zijn. Daar „even waarschijnlijk” een gecamoufleerde uitdrukkingswijze is voor de onderstelling, dat op alle gevallen een even grote kans bestaat, bevinden we ons hier eigenlijk in een vicieuze cirkel. Voor het moment aanvaarden we desondanks dit in mathematisch opzicht fragiele uitgangspunt.

We leiden drie regels van de kansrekening af:

a. De *complementenregel*. De kans, dat een gebeurtenis niet plaats vindt, is gelijk aan 1 verminderd met de kans, dat de gebeurtenis wel plaats vindt. In formule:

$$P(\text{niet-}p) = 1 - P(p).$$

b. De *somregel*. De kans, dat één van twee gebeurtenissen plaats vindt, is gelijk aan de som van de kansen op elk van die twee gebeurtenissen. Voorwaarde is hier echter nog, dat de beide gebeurtenissen elkaar uitsluiten. Alleen in dat geval heeft men namelijk de garantie, dat de som van de gunstige gevallen voor beide gebeurtenissen afzonderlijk gelijk is aan het aantal gunstige gevallen voor de disjunctie van beide. In formule:

$$\text{als } p \rightarrow \text{niet-}q, \text{ dan is } P(p \text{ of } q) = P(p) + P(q).$$

c. De *produktregel*. De kans, dat twee gebeurtenissen beide plaats vinden, is gelijk aan het produkt van de kansen op elk van die ge-

beurtenissen. In formule:

$$P(p \text{ en } q) = P(p) \cdot P(q).$$

Ook hier moet nog aan een voorwaarde voldaan worden, die aan de hand van een voorbeeld verduidelijkt zal worden.

Onderstel we hebben twee dozen met 5 rode en 4 groene knikkers resp. 2 rode en 9 groene. Uit beide dozen trekken we één knikker. Hoe groot is de kans, dat we twee rode knikkers trekken? Het aantal gunstige gevallen is $5 \cdot 2$, het aantal mogelijke gevallen $9 \cdot 11$. De

gevraagde kans is dus $\frac{5 \cdot 2}{9 \cdot 11}$. Dit is gelijk aan het produkt van de kansen op het trekken van een rode knikker uit elk van de twee dozen afzonderlijk.

Neem nu aan, dat we één doos hebben met 7 rode en 13 groene knikkers. Hieruit nemen we met elk van beide handen één knikker. Hoe groot is nu de kans op het trekken van twee rode knikkers? De kans, dat de eerste getrokken knikker rood is, is $\frac{7}{20}$. De kans, dat de tweede knikker rood is, is niet hetzelfde, maar afhankelijk van de uitslag van de eerste trekking. Al naargelang de eerste knikker wel of niet rood is, is deze kans $\frac{6}{19}$ of $\frac{7}{19}$. Houden we hier geen rekening mee, dan zouden we volgens de produktregel de kans op het trekken van twee rode knikkers $(\frac{7}{20})^2$ achten. Het juiste antwoord is echter $\frac{7}{20} \cdot \frac{6}{19}$.

De bedoelde voorwaarde is: de kans op het plaats hebben van een der gebeurtenissen mag niet afhankelijk zijn van het al of niet plaats hebben van de andere. Of korter geformuleerd: de gebeurtenissen moeten van elkaar onafhankelijk zijn.

Het hoofdstuk over kansrekening biedt de gelegenheid tot het maken van uitermate nuttige vraagstukken, waarbij een opgegeven probleem eerst formeel-logisch geanalyseerd moet worden en vervolgens het resultaat door middel van de bovengenoemde drie regels moet worden „vertaald” ten einde de gevraagde kans te vinden.

Dat de fundering van de kansrekening verre van hecht is, mag geen al te groot bezwaar geacht worden. Geen enkele tak van de wiskunde berust bij het middelbaar onderwijs op een hecht fundament. Toch is de leraar, terecht, met deze onvoldoende grondslag tevreden. Hij weet, dat de oorzaak een didactische noodzakelijkheid is, en bovendien weet hij zelf, hoe het eigenlijk wel moet. Niet alle leraren zijn echter ervan op de hoogte, hoe we ook aan de kansrekening een stevige grondslag kunnen geven. Ik wil daarom trachten van het deel van de kansrekening, dat we hier nodig hebben, een verantwoorde behandeling te geven. Ik laat daarbij in het midden,

in welke mate men ook de leerlingen hiervan iets moet vertellen, maar acht het geenszins onmogelijk of ongewenst het onderstaande in daartoe aangepaste vorm, als leerstof te beschouwen.

3. Grondslagen van de kansrekening.

We stellen om te beginnen vast, dat de kans een functie is, die aan een oordeel een getal toevoegt. Deze functie noteren we met de letter P . De eigenschappen van deze functie worden bepaald door de volgende axioma's:

Axioma 1. Als $p \rightarrow$ niet- q , dan is $P(p \text{ of } q) = P(p) + P(q)$.

Axioma 2. Als p een noodzakelijk oordeel is, dan is $P(p) = 1$.

We passen deze axioma's nu eerst toe op het eenvoudige geval, dat gevraagd wordt de kans te bepalen, dat met een dobbelsteen 1. gegooid wordt. We gaan er dan van uit, dat

a. met de dobbelsteen inderdaad geworpen wordt; het resultaat hiervan is, dat 1, 2, 3, 4, 5 of 6 gegooid wordt,

b. er geen twee verschillende cijfers tegelijk gegooid kunnen worden,

c. dat voldaan is aan de fysische hypothese, dat met de dobbelsteen even gemakkelijk 1, 2, 3, 4, 5 of 6 gegooid wordt.

Om deze gegevens in mathematische taal te vertalen, is het gemakkelijk ter verkorting het symbool p_i in te voeren voor: er wordt i gegooid. De vertaling luidt dan:

hypothese a. p_1 of p_2 of ... of p_6 is noodzakelijk,

hypothese b. $p_i \rightarrow$ niet- p_j ($i, j = 1, 2, \dots, 6, i \neq j$),

hypothese c. $P(p_1) = P(p_2) = \dots = P(p_6)$.

Nu is

$$P(p_1 \text{ of } p_2 \text{ of } \dots \text{ of } p_6) = 1 \quad (\text{hyp. a, ax. 2})$$

$P(p_1 \text{ of } p_2 \text{ of } \dots \text{ of } p_6) = P(p_1) + P(p_2) + \dots + P(p_6)$ (hyp. b, ax. 1)
en dus

$$P(p_1) = \frac{1}{6} \quad (\text{hyp. c}).$$

Het probleem is hiermee mathematisch zuiver opgelost. Er blijft een zeker gevoel van onbehagen over, omdat niet duidelijk is, dat de hypothese c een gerechtvaardigde vertaling is van de te voren genoemde fysische hypothese c . Dit raakt echter niet het mathematische betoog, doch uitsluitend de interpretatie ervan. We komen hierop later terug.

We bewijzen nu onze drie kansregels. We kunnen ons daarbij beperken tot de complementen- en de produktregel, want de somregel is als axioma aanvaard.

Bewijs van de complementenregel.

niet- $p \rightarrow$ niet- p (volgens de formele logica) (1)

$$P(\text{niet-}p \text{ of } p) = P(\text{niet-}p) + P(p) \quad ((1), \text{ ax. } 1) \quad (2)$$

niet- p of p is noodzakelijk (volgens de formele logica) (3)

$$P(\text{niet-}p \text{ of } p) = 1 \quad ((3), \text{ ax. } 2) \quad (4)$$

$$P(\text{niet-}p) + P(p) = 1 \quad ((2), (4)).$$

Bewijs van de produktregel.

Ter vereenvoudiging kiezen we een eenvoudig voorbeeld. Wat is de kans met een zwarte dobbelsteen hoogstens 2 te gooien en tevens met een witte hoogstens 5?

p_i betekent: met de zwarte dobbelsteen wordt i gegooid,

q_i betekent: met de witte dobbelsteen wordt i gegooid.

Zowel voor de oordelen p_i als voor de oordelen q_i gelden de bovengenoemde hypothesen a , b en c .

Bovendien onderstellen we, dat alle getallen $P(p_i \text{ en } q_j)$ ($i, j = 1, 2, \dots, 6$) aan elkaar gelijk zijn. (Dit is de indertijd in de formulering van de produktregel genoemde onafhankelijkheidsvoorwaarde.)

Men kan nu gemakkelijk nagaan, dat uit de axioma's volgt:

$$P(p_i \text{ en } q_j) = \frac{1}{36}, \quad P(p_1 \text{ of } p_2) = \frac{2}{6}, \quad P(q_1 \text{ of } \dots \text{ of } q_5) = \frac{5}{6},$$

$$P(p_1 \text{ en } q_1, \text{ of, } p_1 \text{ en } q_2, \text{ of, } \dots, \text{ of, } p_2 \text{ en } q_5) = \frac{2 \cdot 5}{6 \cdot 6}.$$

Hiermee is de juistheid van de produktregel voor dit voorbeeld bewezen. Het algemene bewijs is analoog.

De kansrekening heeft hiermee een hechte fundering gekregen, althans vanuit mathematisch oggpunt. Het aanvechtbare „even waarschijnlijk” is uit de bepaling van het begrip „kans” verdwenen en is, in de vraagstukken, vervangen door een mathematisch exact geformuleerde vooronderstelling. Maar de kansrekening pretendeert meer dan een mathematische theorie te zijn. We stellen aan deze theorie namelijk de eis, dat zij bruikbaar is voor het oplossen van een bepaald soort praktische problemen. De vraag dringt zich dus op, welke interpretatie we aan het axiomatisch ingevoerde begrip „kans” wensen te geven en hoe we dan b.v. moeten controleren, of het juist is, dat, bij het werpen met een dobbelsteen, de kansen op het gooien van 1, 2, ..., 6 inderdaad aan elkaar gelijk zijn.

We kunnen ons hierbij niet beroepen op een soort symmetrie tussen de zes gevallen. Immers deze symmetrie is niet aanwezig; de zes zijvlakken van de dobbelsteen zijn verschillend gemerkt en hebben daardoor reeds hun gelijkwaardigheid in fysisch opzicht verloren. We zouden kunnen trachten de zes vlakken ononderscheidbaar gelijk aan elkaar te maken, maar met deze ononderscheidbaarheid was meteen de mogelijkheid vast te stellen op welk zijvlak de dobbelsteen neervalt, verdwenen. Tenzij we b.v. erin zouden slagen een

bepaald zijvlak met het oog te volgen, maar in dat geval was de symmetrie weer verbroken. Wie zal zeggen welke invloed daarbij op de dobbelsteen wordt uitgeoefend. Een soort aprioristische overtuiging, dat enige gevallen fysisch gelijkwaardig zijn, kan dus niet als grond aanvaard worden voor het vooronderstellen, dat bepaalde kansen gelijk zijn. We zullen daarom een andere praktische interpretatie van ons theoretische kansbegrip moeten zoeken dan de vroeger gegeven definitie: aantal gunstige gedeeld door aantal mogelijke gevallen.

Laten we eens aannemen, dat iemand met een dobbelsteen werpt en drie keer achter elkaar 6 gooit. We zullen dit als een zeldzaam verschijnsel beschouwen. Naarmate echter een groter aantal 6'en achter elkaar gegooid wordt, neemt het vermoeden toe, dat we hier met een valse dobbelsteen te maken hebben. We verwachten namelijk, dat het gooien van 6 zo ongeveer eens in de zes worpen zal plaats vinden. Als we 5 keer met een dobbelsteen werpen en we gooien daarbij 3 keer 6, zal ons dat niet sterk verbazen. Als we echter 500 keer werpen en we gooien daarbij 300 keer 6, dan achten we het uitgesloten met een normale dobbelsteen te doen te hebben. We verwachten dus bovendien, dat, als we n keer werpen, het aantal gegooide 6'en procentueel minder van $\frac{1}{6}n$ zal afwijken naarmate n groter is.

De voorgaande beschouwingen, die een zuiver heuristisch karakter hadden, brengen ons er nu toe de volgende interpretatie van het begrip „kans” te geven. Onderstel, dat gevraagd wordt de kans te bepalen, dat met een bepaalde dobbelsteen 6 gegooid wordt. We werpen dan een groot aantal keren, b.v. 1000 keer, met deze dobbelsteen. Het quotiënt van het aantal keren, dat 6 gegooid wordt, en het totaal aantal worpen noemen we dan de kans, dat met deze dobbelsteen 6 gegooid wordt. Willen we deze kans nauwkeuriger bepalen, dan doen we hetzelfde als bij het bepalen van iedere andere fysische grootheid: we herhalen de meting een aantal keren of we verfijnen de meetinstrumenten. In ons geval wil dit zeggen, dat we enige malen 1000 keer met de dobbelsteen werpen en uit de verkregen waarden voor de kans een meer betrouwbaar gemiddelde afleiden resp. dat we niet 1000 keer maar een groter aantal, b.v. 10000 keer, werpen.

De fysisch gedefinieerde kans blijkt zo een meetbare grootheid te zijn, waarvan de numerieke betekenis duidelijk is vastgelegd en waaraan geen aprioristische overtuigingen van „even grote waarschijnlijkheid”, die tot een vicieuze cirkel leiden, ten grondslag gelegd zijn. Er blijft nu nog over te onderzoeken, of het wel gewettigd

is op de aldus gedefinieerde fysische kans de opgestelde mathematische axioma's van toepassing te verklaren. Een axiomastelsel is op elk stelsel begrippen en relaties van toepassing, dat aan deze axioma's voldoet. We behoeven dus alleen nog maar te onderzoeken, of het fysische kansbegrip aan de beide mathematische axioma's voldoet. Het is intuïtief duidelijk, dat dit het geval is. Als twee gebeurtenissen elkaar uitsluiten, dan is de relatieve frequentie van hun disjunctie gelijk aan de som van hun relatieve frequenties (axioma 1). En als een gebeurtenis noodzakelijk moet intreden, is zijn relatieve frequentie 1 (axioma 2). Het fysische kansbegrip voldoet dus aan de beide kansaxioma's. Elke uit deze axioma's afgeleide stelling zal er dus ook op van toepassing zijn.

Tevens is hiermee voldoende grond verkregen voor het toepassen van het kansbegrip in gevallen, waar kans slechts als relatieve frequentie te begrijpen is, zoals het geval is bij sterftkans.

4. *De normale kromme.* Om te begrijpen, wat een normale kromme is, is zowel kennis van de kansrekening als van de statistische grondbegrippen noodzakelijk.

We werpen met 4 munten en vragen, wat de kans is daarbij 0, 1, 2, 3, 4 keer munt te gooien. Door toepassen van de kansregels vinden we resp. $\frac{1}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{6}{16}$, $\frac{4}{16}$, $\frac{1}{16}$. Van deze kansverdeling maken we een histogram op de manier, zoals in fig. 2 geschied is.

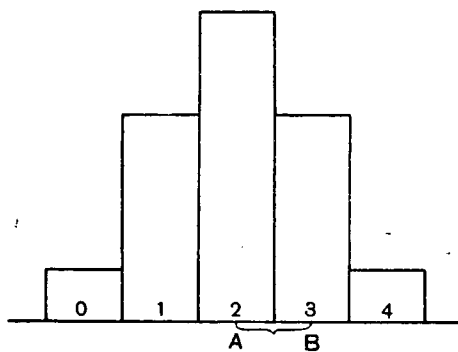


fig. 2

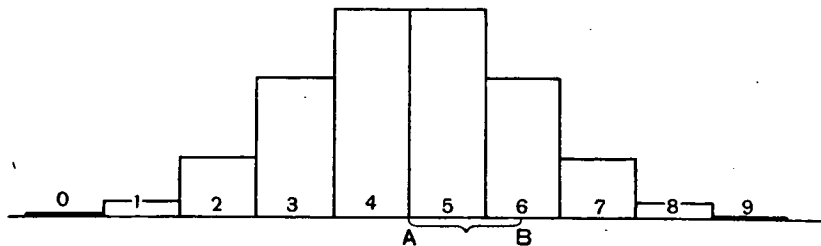


fig. 3

We doen nu hetzelfde met 9 munten. We krijgen dan het histogram van fig. 3, ten minste als we de totale oppervlakte van het histogram onveranderd laten en de klasse door een even groot lijnstuk voorstellen. Het histogram wordt nu 2 maal zo breed en dien-tengevolge veel vlakker. De spreiding zal dus groter zijn. Berekening levert, dat de spreiding bij het gooien met 4 munten 1 is en bij het gooien met 9 munten $\frac{1}{2}\sqrt{3}$. De spreiding correspondeert in de figuren steeds met het lijnstuk AB.

Om nu het histogram van fig. 3 een model te geven, waardoor het meer op dat van fig. 2 lijkt, gaan we het opnieuw tekenen, maar stellen daarbij de klasse door een kleiner lijnstuk voor. Dit lijnstuk kiezen we zo, dat de spreiding in beide gevallen door een even groot lijnstuk voorgesteld wordt. Dit bereiken we door $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ klassen voor te stellen door een even groot lijnstuk, als waardoor aanvankelijk 1 klasse voorgesteld werd. De totale oppervlakte laten we onveranderd. Zo ontstaat het histogram van fig. 4.

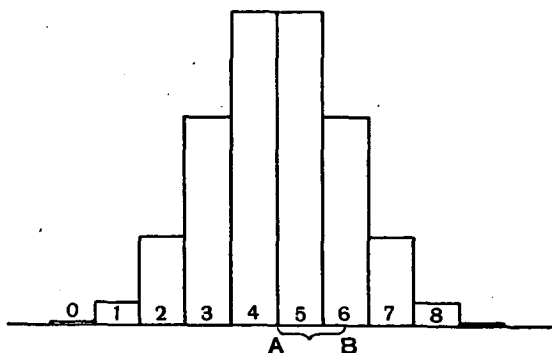


fig. 4

We kunnen nu in het algemeen een dergelijk histogram maken voor het werpen met n muntstukken. Een wiskundige berekening, die door de leerlingen goed te volgen is, leert, dat de spreiding dan $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ is. We stellen dus ditmaal $\frac{1}{2}\sqrt{n}$ klassen voor door het lijnstuk, dat met de spreiding correspondeert, en zorgen er weer voor, dat de totale oppervlakte van het histogram even groot wordt als in de vorige voorbeelden. Laten we nu n tot oneindig naderen, dan blijkt de bovenrand van het histogram tot een vloeiend verlopende kromme lijn te naderen. Deze lijn heet de *normale kromme* (fig. 5). Het bewijs van de bewering, dat de bovenrand inderdaad een limiet heeft, kunnen we bij het onderwijs niet geven; we moeten dus volstaan met het plausibel maken daarvan aan de hand van enige voorbeelden.

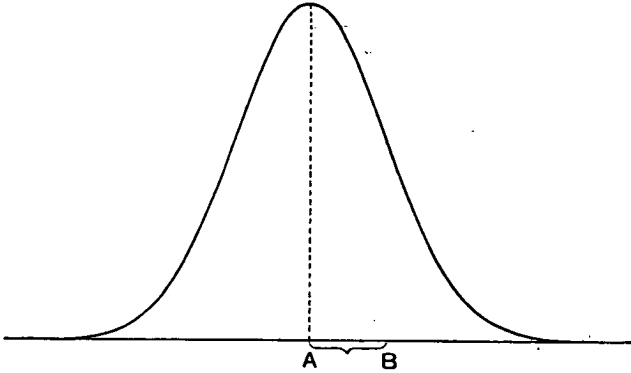


fig. 5

De normale kromme kunnen we gebruiken bij het oplossen van problemen van de volgende soort. Iemand beweert paranormaal begaafd te zijn en dientengevolge te kunnen vaststellen, of een bepaalde kaart rood of zwart is, zonder deze te zien. We laten hem de kleur noemen van 100 kaarten, waarvan er 50 rood en 50 zwart zijn. Hij blijkt 80 van de 100 keer de goede kleur genoemd te hebben. Achten we hem nu wel of niet paranormaal begaafd?

Een bewijs van zijn paranormale begaafdheid is, in absolute zin, niet te leveren. Al noemt hij 100 keer de goede kleur, dan nog kunnen we dit theoretisch aan toeval toeschrijven, al is de kans hierop ook uitermate gering (nl. 2^{-100}). Willen we dus in principe bereid zijn de proefpersoon paranormale gaven toe te schrijven, dan zullen we een afspraak moeten maken van de volgende soort: als het aantal keren, dat de juiste kleur genoemd wordt, zo groot is, dat de kans, dat bij normaal raden een even groot of groter aantal keren de juiste kleur genoemd wordt, kleiner is dan een bepaald bedrag, dan zullen we aannemen, dat hier geen toeval meer in het spel is. Voor dit bedrag kiezen we b.v. $2\frac{1}{2}\%$.

Het zou een uitvoerig rekenwerk zijn door middel van de kansregels uit te rekenen, hoeveel keer nu de juiste kleur genoemd moet worden om aan de gestelde eis te voldoen. We stellen ons daarom liever met een benadering tevreden en vragen: welke verticale rechte snijdt van de oppervlakte onder de normale kromme aan de rechter zijde een deel af, waarvan de oppervlakte gelijk is aan $2\frac{1}{2}\%$ van de totale oppervlakte? Een bij deze kromme behorende tabel leert ons, dat we deze lijn ongeveer zover rechts van het midden moeten trekken als overeenkomt met twee keer het lijnstuk, dat de spreiding voorstelde. In ons geval, het noemen van de kleur van 100 kaarten, is de spreiding gelijk aan $\frac{1}{2}\sqrt{100}$, dus aan 5. Hieruit

blijkt, dat we bereid zullen zijn de proefpersoon paranormale gaven toe te schrijven, als hij minsten $50 + 2 \cdot 5$, dus minstens 60 keer de juiste kleur noemt.

5. *Steekproeven.* De normale kromme kunnen we alleen gebruiken, als we te maken hebben met een groot aantal gebeurtenissen, waarbij telkens twee mogelijkheden optreden, en wel met gelijke kans. Een belangrijk ruimer terrein van toepassing van het voorgaande op statistische problemen wordt geleverd door de theorie van de steekproeven. Dit gebied zal door Dr. Bunt in zijn referaat besproken worden. Men zie dus zijn artikel, dat hierachter is afgedrukt.

SAMENVATTENDE SLOTBESCHOUWING ¹⁾

door

Dr. L. N. H. BUNT

1. Het thema van deze vacantiecursus was dus de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs in de B-afdeling van de middelbare school. Door het bestuur van de vereniging Wimecos en door de Programma-commissie is mij verzocht het Mathematisch Centrum voor het kiezen van dit thema dank te zeggen, wat ik hierbij gaarne doe.

Uit de historische beschouwingen die op deze vacantiecursus zijn gehouden, is wel gebleken, dat het gekozen thema niet voor de eerste keer de centrale gedachte van een conferentie is. Integendeel, het thema begint langzamerhand klassiek te worden. Nu is het een van de eigenaardigheden van een klassiek thema, dat men er onmiddellijk aan kan zien of het in majeur dan wel in mineur staat. Dit geldt ook voor ons thema: het staat duidelijk in majeur. Het zou trouwens ook vreemd zijn, wanneer dit niet het geval was: de voorstellers kunnen moeilijk anders dan optimistisch gestemd zijn ten aanzien van de wenselijkheid en de uitvoerbaarheid van hun voorstellen en van de kans die er bestaat, dat deze voorstellen in werkelijkheid worden omgezet. Het heugelijke aan deze vacantiecursus, waar niet alleen de stem van de leraren maar ook die van de universiteit en die van Delft is gehoord, is nu, dat deze majeurstemming zich heeft gehandhaafd. Dit blijkt wel hieruit, dat elk van de sprekers vrijwel volledig heeft ingestemd met de voorstellen van de Programma-commissie. Voor zover er van bezwaren sprake was, waren deze niet van ernstiger aard dan het bezwaar tegen de al te zeer geïntroverteerde mathematicus, genoemd door één der sprekers. En zelfs dit bezwaar, dat namelijk een dergelijke mathematicus niet in staat zal zijn de statistiek te onderwijzen, kan moeilijk als ernstig gelden, omdat de gesteldheid die hier als minder wenselijk voor de leraar in de statistiek wordt beschouwd, evenzeer minder wenselijk is voor de leraar in het algemeen. Ik citeer slechts het desbetreffende gedeelte uit de voordracht van Prof. van Dantzig, dat begint met: „De oplossingsmethode kan doelmatig geschieden . . . met enkele kleine veranderingen als volgt: „Het lesgeven kan slechts doelmatig geschieden wanneer men zich min of meer in het leerlingen-

¹⁾ Slot voordracht gehouden voor de Vacantiecursus 1955 van het Mathematisch Centrum.

materiaal verdiept, in de wijze waarop dit studeert, het concrete doel waarmee dit geschiedt, en de hierbij beschikbare en gebruikelijke graad van belangstelling of afkeer. De eisen waaraan het lesgeven, en in het bijzonder het uitleggen, moet voldoen, zijn tenslotte niet uitsluitend en zelfs niet in de eerste plaats van deductief-logische aard, maar hebben betrekking op de inpassing van wiskundige redeneringen in een groter geheel van kennis op kinderlijk niveau. Niet zozeer in de verkrijging der benodigde wiskundige kennis als wel in de overgang van een introverte tot een meer extroverte geestesrichting zullen vermoedelijk voor de meeste mathematici die leraar willen worden de grootste moeilijkheden liggen. Ook geldt dit voor de overgang van de in de wiskunde bij uitsluiting aanvaarde deductieve logica naar de aan veel minder stricte regels onderworpen kinderlijke logica, die nauwer bij de „common sense” dan bij de formele correctheid aansluit. Tenslotte geldt dit ook voor het afstappen van de in de wiskunde vrijwel uitsluitend toegelaten onderscheiding in „goed” en „fout”, die niet meer uitvoerbaar is bij de beoordeling van mondelinge en schriftelijke prestaties en door een genuanceerdere differentiatie moet worden vervangen (ruim voldoende, bijna voldoende, $5\frac{1}{2}$, enz.)”

2. Nu moeten we ons, temidden van dit optimisme, er wel voor hoeden te denken, dat er nergens meer pessimistische gedachten bestaan. Dergelijke gedachten blijken er inderdaad te zijn, zowel ten aanzien van de wenselijkheid als ten aanzien van de uitvoerbaarheid van het voorgestelde programma. Indien zulke gedachten het gevolg zijn van persoonlijke opvattingen die niet aan de werkelijkheid zijn te toetsen, heeft een discussie weinig zin. Wanneer ze echter voortvloeien uit een verkeerd inzicht in de bedoelingen van de voorstellen, is bestrijding ervan mogelijk en nuttig.

Dat deze kwestie actueel is, bleek mij, toen ik in de afgelopen week twee kritieken op het nieuwe programma in handen kreeg. De eerste kritiek werd geuit in een artikel in *Euclides* en kwam voort uit de vrees voor overlading. Dat ik de naam van de auteur niet noem, is uitsluitend om te voorkomen, dat hij zich genoopt zou zien na dit slotwoord in discussie te treden, hetgeen niet in overeenstemming zou zijn met de wensen van de voorzitter. De tweede kritiek kwam voor in een reeds eerder genoemd artikel in „*Het Vaderland*”. De schrijver, opgeschrikt door de adhaesiebetuiging van de Vereniging voor Statistiek, keert zich in het bijzonder tegen het onderwijzen van de statistiek op de middelbare school. Dat op deze vacanticursus, die toch zeker actueel wil zijn, enkele sprekers meenden niet zonder

meer te kunnen voorbijgaan aan dergelijke uitingen van kritiek, lijkt mij juist gezien, en ik wil aanstonds graag nog iets toevoegen aan hetgeen zij hierover gezegd hebben.

Nu zou ik mij kunnen voorstellen, dat in een bepaald opzicht ook deze voortreffelijk georganiseerde en met gunstig resultaat verlopen vacantiecursus bij een aantal van de deelnemers een licht gevoel van onbehagen heeft gewekt. Ik denk hierbij aan de manier waarop het vak statistiek ter sprake is gebracht. De belangwekkende beschouwingen van Prof. van Dantzig hebben enerzijds een zo verstrekkend en idealistisch karakter, dat, bij een enigszins vrij gebruik van het begrip „kans”, gezegd kan worden, dat de kans niet helemaal nul is dat iemand zich in vertwijfeling afvraagt wat er van de voorgestelde hervormingen binnen afzienbare tijd realiseerbaar is; anderzijds heeft Prof. van Dantzig zich bij het geven van concrete aanwijzingen voor het onderwijs in de statistiek op de middelbare school, naar hij zelf opmerkte: bij gebrek aan ervaring, tot enkele voorlopige opmerkingen moeten beperken. Prof. Hemelrijk heeft aan de hand van een interessant voorbeeld laten zien wat de kern is van een statistische gedachtengang; dit voorbeeld, een toepassing van de toets van Wilcoxon, is ongetwijfeld bijzonder geschikt voor een cursus als deze, maar geeft geen duidelijke aanwijzing omtrent de manier waarop het belangrijkste onderwerp van de statistiek, het toetsen van een hypothese d.m.v. een steekproef, op de middelbare school kan worden behandeld. En tenslotte heeft Dr. Vredenduin, die zich uiteraard moest beperken, geen gelegenheid gehad om zich over dit laatste onderwerp in voldoende mate uit te spreken. Iemand zou hieruit de conclusie kunnen trekken dat het blijkbaar een hachelijk onderwerp is waarover niet veel concreets te zeggen valt of waarover het om andere redenen beter is te zwijgen.

Het zou te betreuren zijn, wanneer het beeld van het toekomstige wiskunde-onderwijs, dat door deze vacantiecursus is opgeroepen, mogelijkerwijs ontsierd zou blijven door een of meer van deze vlekken. Het lijkt mij daarom goed om over elk van deze drie punten iets te zeggen.

3. In de eerste voordracht heeft Dr. Wansink bij de verschillende onderdelen van het wiskundeprogramma aantallen uren genoemd. In verband met de kenbaar gemaakte vrees, dat deze aantallen te krap berekend zijn, wil ik hierbij de volgende toelichting geven.

De voorgestelde beperkingen van de leerstof zijn uiteraard het duidelijkst te zien, wanneer het gaat om het volledig schrappen van een vak of een onderdeel daarvan, zoals het vak beschrijvende meet-

kunde of het onderdeel niet-lineaire gebroken functies. Het is niet zo gemakkelijk te zien in hoeverre het huidige programma verlicht wordt door bijv. het schrappen van „stapelvormen”, in het rapport genoemd in § 9 onder punt 2 van de algebra, of door het „sober houden” van de inleiding in de stereometrie, aanbevolen in dezelfde paragraaf onder punt 1 van de stereometrie. Het meest sprekend zou een toelichting aan de hand van bepaalde schoolboeken zijn. Evenwel, de eerste spreker heeft dit al gezegd, er is geen enkel boek dat niet een volkomen verkeerde indruk geeft van de bedoeling van het rapport. Nemen we als voorbeeld de stereometrie. Van dit vak zijn bepaalde onderdelen en vraagstuktypen geschrapt. Van oneindig meer belang is het echter, dat de eindexamenvraagstukken zeer veel eenvoudiger zullen worden dan ze thans zijn. Ieder jaar zijn er onderdelen die volgens de maatstaven van het rapport als verwerpelijk moeten worden beschouwd. De leden van de Programma-commissie zijn van mening, dat een goed voorbereide leerling een redelijke zekerheid moet hebben, dat hij de vraagstukken kan maken; er blijven dan nog genoeg oorzaken werken waardoor niet iedereen een hoog cijfer behaalt. Deze vereenvoudiging van de eindexamenvraagstukken zal tot gevolg hebben, dat ook bij het lesgeven slechts zeer eenvoudige vraagstukken worden gemaakt. Wanneer we bedenken, dat enerzijds minstens 90 % van de lessen besteed wordt aan het oplossen van vraagstukken, anderzijds verreweg het grootste deel van dit percentage moet dienen voor de behandeling van vraagstukken die zo moeilijk zijn, dat de leerlingen er expres op moeten worden afgericht, zal het duidelijk zijn, dat er een enorme tijdsbesparing wordt bereikt, als men zich beperkt tot eenvoudige typen.

Het spreekt wel vanzelf, dat dit moeilijk in voldoende mate kan worden toegelicht door eenvoudig naar een schoolboek te verwijzen. De geïncrimineerde vraagstukken bevinden zich namelijk in vrijwel iedere vraagstukkenparagraaf, en het is ondoenlijk al deze vraagstukken aan te geven. Ook zonder een gedetailleerd overzicht hiervan is echter na hetgeen boven werd opgemerkt gemakkelijk in te zien, dat de stereometrie tot een redelijk aantal uren kan worden teruggebracht. Een aantal uren, gelegen tussen 60 en 70, wordt als voldoende beschouwd; nemen we 70, dan zijn we zeker aan de royale kant.

Het door elkaar gebruikt worden van de namen goniometrie en trigonometrie kan eveneens een oorzaak zijn van onoverzichtelijkheid van de voorgestelde beperkingen. Het is daarom wellicht niet overbodig er de nadruk op te leggen, dat de behandeling van de

grondbegrippen sin, cos en tg in de onderbouw geschiedt, evenals de berekening van zijden en hoeken van een driehoek, als andere zijden en hoeken gegeven zijn. Andere berekeningen, waaraan tot nu toe zoveel tijd werd besteed, zullen niet meer gemaakt worden. Van de goniometrie vervallen ook praktisch alle zgn. herleidings- en identiteitsvraagstukken, die zeer tijdrovend zijn. Het resterende stuk goniometrie omvat hierdoor uitsluitend de goniometrische functies, vergelijkingen die tot enkele eenvoudige, expliciet aangegeven typen behoren, en eenvoudige ongelijkheden.

Om U duidelijk te kunnen laten zien hoe ver de beperking bij het vak goniometrie wel gaat, heb ik in een veel gebruikt schoolboek een aantal vraagstukken aangestreept, die thans komen te vervallen. Ze worden geschrapt, in de eerste plaats als gevolg van hun eigen verdienste, in de tweede plaats als gevolg van het schrappen van stukken theorie. Wanneer U nu weer bedenkt hoeveel uren, beter: weken, ja, ik kan wel zeggen: maanden, besteed worden uitsluitend aan het maken van goniometrische vraagstukken, dan is het weer duidelijk, dat het vak goniometrie tot een zeer klein aantal uren kan worden teruggebracht.

4. Ik kom tot mijn tweede punt: de bezwaren tegen het onderwijs in de statistiek. In het genoemde artikel in „Het Vaderland” leest men: „Het verminderen van het wiskunde-onderwijs om er statistiek en liefst ook nog econometrie voor in de plaats te stellen, komt ons voor een schromelijke overschatting van het economische te zijn.” Een dergelijke opmerking kan slechts afkomstig zijn van iemand die niet met de statistiek op de hoogte is of althans niet met de statistiek die voor de middelbare school wordt voorgesteld. Ditzelfde geldt voor een bezwaar tegen onderwijs in de statistiek dat ik elders tegenkwam, en waarin dergelijk onderwijs niet mogelijk wordt geacht omdat er voor de vele ingewikkelde becijferingen grote aantallen rekenmachines voor de leerlingen beschikbaar zouden moeten zijn.

Bezwaren van deze soort kunnen slechts worden overwonnen door te laten zien, hoe het onderwijs in de statistiek op de middelbare school bedoeld is. Mede in verband met mijn derde punt meen ik er daarom goed aan te doen een beknopt overzicht te geven van de manier waarop het onderwerp „steekproeven” op de middelbare school kan worden behandeld.¹⁾

¹⁾ Vgl. het van mijn hand bij de firma Wolters verschenen schoolboek: Statistiek voor het Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs, hoofdstuk VI.

5. We denken ons een bak met 5000 rode en 5000 witte knikkers. Hieruit wordt een steekproef van 10 knikkers genomen. Op grond van een voorafgaande stelling kunnen de leerlingen de kansen berekenen dat de steekproef resp. 0, 1, 2, ... of 10 rode knikkers bevat. Deze kansen zijn resp.

0,001, 0,010, 0,044, 0,117, 0,205, 0,246, 0,205,
0,117, 0,044, 0,010, 0,001.

Hieruit volgt, dat

in gemiddeld $1+10 = 11$ van de 1000, d.i. in 1,1 % van alle steekproeven van 10 knikkers, het aantal rode knikkers 0 of 1 is,

in gemiddeld $1+10+44 = 55$ van de 1000, d.i. in 5,5 % van alle steekproeven, het aantal rode knikkers 0, 1 of 2 is,

in 1,1 % van alle steekproeven het aantal rode knikkers 9 of 10 is,

in 5,5 % van alle steekproeven het aantal rode knikkers 8, 9 of 10 is, enz.

Stel nu, dat de verhouding van het aantal rode knikkers tot het totale aantal knikkers, die we met p aanduiden, niet bekend is. Ten einde ons een oordeel over de waarde van p te vormen, nemen we een steekproef van 10. We nemen ons daarbij voor, ons aan de volgende afspraak te houden:

Afspraak voor $p = 0,5$. Bevat een steekproef van 10 knikkers 0, 1, 9 of 10 rode knikkers, dan zullen we de hypothese $p = 0,5$ verwerpen.

Is nu de hypothese $p = 0,5$ juist, dan volgt uit het voorgaande, dat we een kans van $1,1+1,1 = 2,2$ % riskeren dat we deze hypothese toch verwerpen. Daarbij is de kans 1,1 % dat we de hypothese $p = 0,5$ verwerpen op grond van een te klein (te groot) aantal rode knikkers in de steekproef.

Zouden we de hypothese $p = 0,5$ ook nog verwerpen bij een steekproef met 2 (8) rode knikkers, dan zouden we, ingeval de hypothese $p = 0,5$ juist is, een kans van 5,5 % riskeren dat we deze hypothese verwerpen op grond van een te klein (te groot) aantal rode knikkers. Omdat we in dit opzicht — voorlopig — geen grotere kans dan 2,5 % willen riskeren, blijven we bij de eerstgenoemde afspraak. Deze voldoet dus aan de voorwaarden:

a. als $p = 0,5$ is, riskeren we zowel bij een te klein als bij een te groot aantal rode knikkers in de steekproef een kans van niet meer dan 2,5 % dat we de hypothese $p = 0,5$ toch verwerpen,

b. zowel bij een te klein als bij een te groot aantal rode knikkers ligt deze kans zo dicht mogelijk bij 2,5 %.

Wanneer we nu de hypothese $p = 0,5$ verwerpen, zeggen we:

de hypothese $p = 0,5$ wordt verworpen met een onbetrouwbaarheid van hoogstens 5 %.

We stellen het aantal rode knikkers voor door X en de breuk $X/10$ door v . Op een v -as geven we door stippen en cirkeltjes de waarden van v aan, die wel, resp. niet met $p = 0,5$ in tegenspraak worden geacht.

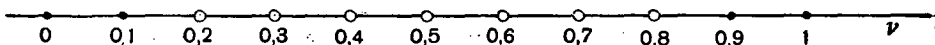


fig. 1

6. Analoge beschouwingen kunnen worden gehouden voor het geval $p = 0,6$. De kansen op resp. 0, 1, 2, ... of 10 rode knikkers (algemeen: „successen”) in een steekproef van 10 blijken nu te zijn 0,000, 0,002, 0,011, 0,042, 0,111, 0,201, 0,251, 0,121, 0,040, 0,006. We zullen ons, analoog aan het geval $p = 0,5$, nu ook aan de volgende afspraak houden:

Afspraak voor $p = 0,6$. Bij een steekproef van 10 met 0, 1, 2 of 10 successen zullen we de hypothese $p = 0,6$ verwerpen.

De kans dat we de hypothese $p = 0,6$ ten onrechte verwerpen, is dan bij een te klein aantal successen

$$0,0 + 0,2 + 1,1 = 1,3 \%,$$

en bij een te groot aantal

$$0,6 \%,$$

dus in beide gevallen weer niet groter dan 2,5 %. Bovendien voldoet deze afspraak aan de onder *b* genoemde voorwaarde.

We geven weer op een v -as door stippen en cirkeltjes de waarden van v aan, die wel, resp. niet met $p = 0,6$ in tegenspraak worden geacht.

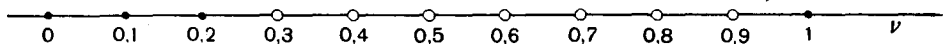


fig. 2

7. Nadat de leerlingen zich hebben geoefend in het formuleren van analoge afspraken voor verschillende waarden van p , stellen we de afspraken voor de waarden 0, 0,05, 0,10, ... , 1 van p elk op een afzonderlijke v -as voor. Er ontstaan dan 21 figuren van dezelfde soort als de figuren 1 en 2. We plaatsen deze onder elkaar, zodat fig. 3 ontstaat.

Vervolgens denken we ook voor de andere waarden van p de bijbehorende afspraak gemaakt. Deze afspraak stelt vast, welke waarden van v in een steekproef van 10 wel, en welke niet met een bepaalde waarde van p in overeenstemming worden geacht. We denken

kolom $v = 0,4$ geven de waarden 0,12 en 0,74 van p aan. De gevraagde waarden van p zijn dus de waarden die voldoen aan $0,12 < p < 0,74$.

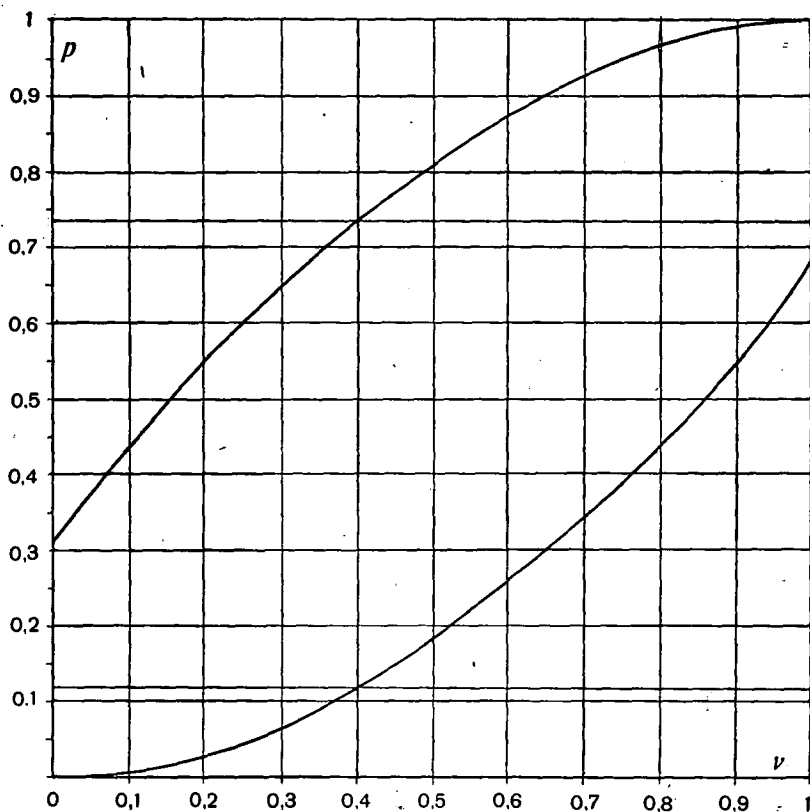


fig. 4

We bewijzen nu gemakkelijk de volgende stelling.

Beoordeelt men de waarde van p door middel van een steekproef van 10, door gebruik te maken van fig. 4, dan riskeert men een kans van hoogstens 2,5 % dat men de werkelijke waarde van p verwerpt op grond van een te kleine (te grote) waarde van v .

8. Analoge beschouwingen als voor steekproeven van 10 kunnen we houden voor steekproeven met grotere omvang. In het bijzonder beschouwen we steekproeven met omvang 15, 20, 30, 50, 100, 250 en 1000. Bij elk van deze gevallen komen we tot een gebied G_n en we stellen deze gebieden voor in een nomogram. Dit stelt ons dan in staat om met verschillende graden van nauwkeurigheid een uitspraak te doen over de waarde van p op grond van de in een steekproef waargenomen waarde van v . Hierbij geldt steeds, dat men een

kans van hoogstens 2,5 % riskeert dat men de werkelijke waarde van p verwerpt op grond van een te kleine (te grote) waarde van v .

Toepassing. In een zekere stad onderzocht men de invloed van het toevoegen van fluor aan het drinkwater op het voorkomen van caries. Vóór de fluoridering van het drinkwater was bij kinderen tussen 6 en 9 jaar het aantal cariestanden 21 per 100 tanden. Nadat de fluoridering drie jaar lang had plaats gehad, nam men een steekproef van 250 tanden van kinderen van deze leeftijd. Hoe groot mag hierin het aantal cariestanden hoogstens zijn, om met een onbetrouwbaarheid van hoogstens 2,5 % de mening te rechtvaardigen, dat caries na de fluoridering van het drinkwater minder vaak voorkwam dan ervoor?

Oplossing. Laat X het aantal cariestanden in de steekproef zijn, dan is $v = X/250$.

Beschouw fig. 5, waarin het gebied G_{250} is aangegeven. AC is de lijn $p = 0,21$. Deze snijdt de bovenste rand van het gebied G_{250} in B. Het punt B' is de projectie van B op de v -as.

Uit de figuur blijkt, dat we er alleen dan van overtuigd zullen zijn, dat p kleiner is dan 0,21, als de waarde $\frac{X}{250}$ op de v -as wordt aangegeven door een punt van OB'. We lezen af, dat B' de waarde 0,15 aangeeft. Dus moet X voldoen aan

$$\frac{X}{250} \leq 0,15,$$

waaruit volgt

$$X \leq 37,5.$$

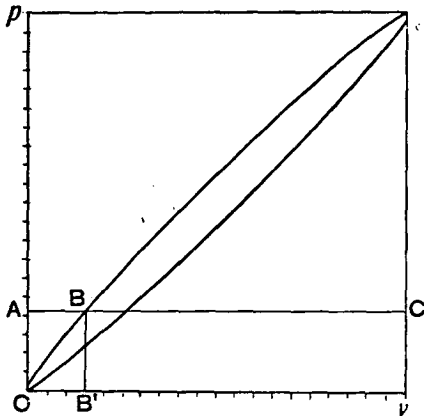


fig. 5

Het aantal cariestanden in de steekproef mag dus hoogstens 37 zijn.

9. Ik zou gaarne twee opmerkingen willen maken in verband met de aangekondigde statistiekcursussen voor leraren.

In de eerste plaats zullen deze cursussen noodzakelijk zijn, als de voorstellen door de regering aanvaard worden. Het zal dus een taak voor de overheid zijn te bevorderen dat deze cursussen worden gegeven en dat de leraren eraan deelnemen.

In de tweede plaats zal het nodig zijn, dat ook voorlichting verschaft wordt aan de leraren die, bijv. wegens te grote afstanden tot

de centra, niet in de gelegenheid zijn een dergelijke cursus te volgen. Deze voorlichting zou in de vorm van een schriftelijke cursus kunnen worden gegeven.

Er is enige malen de naam van Felix Klein genoemd, o.m. in verband met diens „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus”. Dit voortreffelijke werk was oorspronkelijk bedoeld om de kloof tussen de schoolwiskunde en de wiskunde van de universiteit te overbruggen. De schrijver heeft zijn doel echter slechts ten dele bereikt; hij is namelijk niet in voldoende mate aan de schoolwiskunde toegekomen. Dit moge een waarschuwing inhouden voor degenen die een cursus statistiek voor leraren zullen samenstellen. De veiligste weg zal men daarbij kiezen, wanneer men als uitgangspunt datgene neemt, wat ik nu maar optimistisch zal aanduiden als de „schoolstatistiek”. Er moet dus komen een „Höhere Statistik vom elementaren Standpunkte aus”. Wanneer deze „Höhere Statistik” dan bovendien toch nog betrekkelijk eenvoudig blijft en een beperkte omvang behoudt, zal deze voor de in functie zijnde leraren een middel zijn om zich in niet te veel extra-tijd in de nieuwe stof zodanig in te werken, dat ze deze met succes kunnen onderwijzen.

10. Ik vergeleek het thema van deze cursus met dat van een klassiek muziekstuk. Het thema is thans volledig geëxposeerd en doorgewerkt, en we kunnen nu dus wel zeggen, dat het eerste deel van het muziekstuk gespeeld is. Over de snelheid van het verloop van dit deel kunnen we niet ontevreden zijn: het tempo was allegro. Nu aarzel ik echter om mijn beeldspraak voort te zetten. Het volgende deel van een klassiek stuk heeft namelijk, ter wille van het contrast, een langzaam tempo. Het zou daarom niet onmogelijk zijn, dat men het als vanzelfsprekend ging beschouwen, wanneer er nu een periode kwam waarin met de voorstellen weinig of niets gebeurde. De hieraan verbonden gevaren behoeft ik U niet te schilderen. Het is duidelijk, dat we erop moeten blijven aandringen, dat de voorstellen worden aanvaard en dat er vervolgens met hun verwezenlijking spoed wordt betracht.

De eerste spreker heeft ons laten zien hoe moeizaam de doorvoering van een vernieuwingsprogramma, ook al geschiedt deze slechts ten dele, kan verlopen. Daarbij is gebleken, dat de namen van degenen die ten slotte een voor het onderwijs gunstige beslissing aandurfd, bij latere generaties in dankbare herinnering blijven. Hieraan denkende, zou ik de autoriteiten die thans een beslissing ten gunste of ten ongunste van de voorstellen hebben te nemen, willen toefluisteren: „zeg ja, en maak U onsterfelijk”.

BOEKBESPREKING.

F. Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*. V: Les géométries non euclidiennes, 112 p; VI: Le problème de l'espace, 174 p. (Bibliothèque Scientifique, nos. 25, 27). Editions du Griffon, Neuchâtel, Suisse, 1952, 1955.

Deze laatste twee delen van een groter werk vormen een afgerond geheel dat op zichzelf gelezen kan worden.

De schrijver formuleert de bekende axioma's van Euclides en stelt de vraag, wat er gebeurt als we het 5de postulaat weglaten. Hij laat zien, dat dan nog bewezen kan worden: (1) door een punt A buiten een rechte a kan *ten minste één* rechte worden getrokken, die a niet snijdt, en (2) indien er één punt A en één rechte a zijn zodanig, dat A buiten a ligt en er door A *ten hoogste een* rechte is, die a niet snijdt, dan geldt voor elk punt B en voor elke rechte b , dat er door B *ten hoogste één* rechte is, die b niet snijdt.

Het bestaan van een punt A en een rechte a , als onder (2) bedoeld, kan echter niet meer bewezen worden. Dit blijkt, als we, in plaats van het weggelaten 5de postulaat, een nieuw axioma invoeren, dat het bestaan van zulk een punt en zulk een rechte ontkent. We krijgen dan, als bekend, de hyperbolische meetkunde of meetkunde van Lobatschewsky. Uit het feit, dat deze meetkunde vrij van tegenspraak is, volgt de onafhankelijkheid van het 5de postulaat.

Om nu de contradictie-loosheid van de hyperbolische meetkunde te bewijzen, en tevens een nader inzicht in deze meetkunde te krijgen, gaat de schrijver aanstonds over tot de constructie van het *model van Poincaré*.

In het volgende deel wordt ook de elliptische meetkunde beschouwd. De schrijver voert de twee-dimensionale elliptische meetkunde in als de meetkunde van de schoof der rechten door een vast punt in de drie-dimensionale euclidische ruimte. Vervolgens worden, in aansluiting by Cayley en Klein, de projectieve modellen besproken, die zowel voor de hyperbolische als voor de elliptische meetkunde een grondslag verschaffen. In een afzonderlijk hoofdstuk wordt de historische ontwikkeling van Clairaut tot Pasch besproken. De laatste 50 bladzijden bevatten „Conclusions” van meer wijsgerig karakter.

Hoewel Gonseth's werk weinig of niets bevat, dat niet ook in de bekende Nederlandse werken van H. J. E. Beth en J. C. H. Gerritsen te vinden is, kan het toch, om de eenvoudige en overzichtelijke behandeling van een materie, die ook voor de leraar van groot belang is, ter lezing worden aanbevolen. Ik moet daarbij echter een uitzondering maken voor de wijsgerige beschouwingen, die niet alleen in de „Conclusions”, maar ook elders in het boek verspreid, te vinden zijn. Mijn bezwaar tegen deze beschouwingen ligt niet daaraan, dat ik ze als onjuist beschouw (ten aanzien van philosophische problemen zijn er nu eenmaal meer meningsverschillen dan met betrekking tot zuiver wiskundige kwesties), het berust veeleer op het feit dat ze zo vaag blijven en in verband daarmee ook niet behoorlijk geadstrueerd worden. Een wiskundig geschoolde lezer zal door deze beschouwingen geen onjuiste mathematische inzichten opdoen, en waarschijnlijk ook geen onjuiste wijsgerige opvattingen; maar hij zou wel een onjuiste indruk kunnen krijgen van wat in onze tijd een wijsgerige beschouwing over wiskundige grondslagenproblemen kan en dus moet zijn.

E. W. BETH

VERNIEUWING VAN DE DIDACTIEK DER WISKUNDE

Naar aanleiding van:

L'enseignement des mathématiques, par J. Piaget, E. W. Beth, J. Dieudonné, A. Lichnerowicz, G. Choquet et C. Gattegno; Delachaux & Niestlé; Neuchâtel, Paris; 173 pg., 12 fr.s.; 1955.

a. De verschijning van een boek dat zich op indringende wijze met de didactische problemen van het schoolonderwijs in de wiskunde bezighoudt en daarbij op eigen wijze dit onderwijs in relatie brengt tot de uitkomsten van onderzoek op psychologisch, logisch en vakwetenschappelijk terrein, is een zo zeldzaam verschijnsel, dat het voor de hand ligt er in een tijdschrift gewijd aan de didactiek der exacte vakken royale aandacht aan te schenken. Met genoegen heb ik de aankondiging ervan dan ook op me genomen, en ik wil deze gelegenheid gaarne gebruiken om tegelijk iets mede te delen over de groep van wiskundigen door wier samenwerking dit werk tot stand is gekomen.

b. Het hierboven vermelde boek is verschenen in de serie: „Actualités pédagogiques et psychologiques, publiées sous les auspices de l'Institut des sciences de l'éducation de l'Université de Genève (Institut J. J. Rousseau)”. Het is de eerste publicatie van de in 1950 te Londen gestichte C.I.E.A.E.M., d.i. „*Commission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*”. Op de voorgrond tredende personen in deze commissie zijn: C. Gattegno, secretaris der commissie, docent in de didactiek der wiskunde aan het Institute of Education der Londense universiteit, J. Piaget, psycholoog van het wiskundig denken, hoogleraar aan de universiteiten van Genève en van Parijs, op wiens onderzoek het werk der commissie in hoofdzaak steunt, en G. Choquet, voorzitter der commissie, hoogleraar in de wiskunde aan de universiteit van Parijs.

De C.I.E.A.E.M. werd gesticht door een groep van wiskundigen, die internationale samenkoppeling van krachten gewenst en noodzakelijk achten om mede met behulp van de uitkomsten van onderzoek op methodologisch en psychologisch gebied een hervorming van het wiskunde-onderwijs te bevorderen die ook didactisch als een verbetering beschouwd mag worden.

De commissie heeft geen nationale subcommissies; ze bestaat uit leden die hun activiteit ontplooiën volgens centraal vastgestelde principes en waarvan er per land maximaal vijf worden toegelaten.

In het najaar van 1955 waren er uit Nederland, Italië, Oostenrijk, Duitsland, Frankrijk en Engeland opvolgend 1, 3, 1, 5, 5 en 5 leden.

Onder invloed van het initiatief van de commissie is in 1952 in Engeland opgericht de „*Association for Teaching Aids*” en in 1953 te België de „*Société belge des professeurs de mathématiques*”, elk met meer dan 300 leden.

De commissie heeft sinds 1950 een negental internationale conferenties georganiseerd,¹⁾ over onderwerpen waarvan onderstaande opsomming de lezer enig idee moge geven van de belangstellingsfeer van de leidende figuren uit de commissie.

April 1950, Debden bij Londen,

„*Relations entre le programme mathématique des écoles secondaires et le développement des capacités intellectuelles de l'adolescence*”.

April 1951, Keerbergen bij Brussel,

„*L'enseignement de la géométrie dans les premières classes des écoles secondaires*”.

Augustus 1951, Herzberg, Zwitserland,

„*Le programme fonctionnel: de l'école maternelle à l'université*”.

April 1952 te Rocheton, la Rochette par Melun, Frankrijk,

„*Structures mathématiques et structures mentales*”.

April 1953, Weilerbach in Luxemburg,

„*Les relations entre l'enseignement des mathématiques et les besoins de la science et de la technique modernes*”.

Juli 1953, Calw, Zwarte Woud,

„*Les rapports entre la pensée des élèves et l'enseignement des mathématiques*”.

Augustus 1954, Oosterbeek bij Arnhem,

„*Les mathématiques modernes à l'école*”.

April 1955, te Bellano, Italie,

„*L'élève face aux mathématiques. Une pédagogie qui libère*”.

Augustus 1955, Ramsau am Dachstein, Oostenrijk,

„*L'enseignement des probabilités et des statistiques à l'université et à l'école*”.

Voorts beoogt de C.I.E.A.E.M. een serie monografieën ten dienste van het wiskunde-onderwijs uit te geven „dont le but serait d'amener à la conscience des professeurs les principaux problèmes qui semblent devoir servir de base à la synthèse effective exigée par un enseignement renové”.

In deze eerste monographie met bijdragen van de auteurs

¹⁾ Het programma voor de tiende internationale conferentie vindt u op blz. 293 van deze aflevering

E. W. Beth, G. Choquet, J. Dieudonné, C. Gattegno, A. Lichnerowicz en J. Piaget zijn de teksten nog niet gecoördineerd. De lectuur van het boek doet daardoor wel eens de vraag rijzen, in hoeverre de leden van het team dat hier aan het werk is, het nu eigenlijk in principe met elkaar eens zijn.

Zo valt in het hoofdstuk van Beth een wantrouwen ten aanzien van de bijdrage die van de zijde der psychologie verwacht mag worden te constateren, dat kwalijk past bij het enthousiasme van anderen (Piaget, Gattegno). Dit is door het Bureau der Commissie, dat het werk van een voorwoord voorziet, wel gevoeld, zoals moge blijken uit het citaat: „Au total, bien que l'impression première des lecteurs puisse être qu'un amas d'idées diverses, peu en rapport les unes avec les autres, ont été réunies sous une même couverture, nous espérons que le lieu sous-jacent ne leur échappera pas. Il nous faut connaître l'étudiant et avoir une idée de ce que nous faisons dans notre enseignement avant d'aborder des raffinements techniques". Ongetwijfeld is deze monografie een bijdrage tot het hier gestelde doel. Voorts springt in tal van bijdragen in het oog, hoeveel waarde er aan gehecht wordt de leerling op de middelbare school in contact te brengen met de geest van de moderne wiskunde, en hoezeer wordt ingezien, dat het wiskundeonderwijs in al zijn stadia een bijdrage moet zijn tot deductief denken.

We geven een uitvoerig overzicht van de diverse hoofdstukken in de hoop, dat dit de lezer zal stimuleren tot de lectuur van het werk zelf.

c. In het eerste hoofdstuk, *Structures mathématiques et structures opératoires*" confronteert Piaget de wiskundige werkelijkheid met de uitkomsten van psychologisch onderzoek. Dit hoofdstuk bevat een summiere samenvatting van de voornaamste resultaten van Piaget's werk voorzover dit voor de wiskundige van betekenis is.

In de eerste plaats staat de auteur stil bij het probleem van de autonomie van het wiskundig denken, in zijn afhankelijkheid of onafhankelijkheid t.o.v. de buitenwereld. „Plus précisément, le problème psychologique... est d'établir si les êtres servant d'éléments aux structures constituent le produit d'opérations qui les engendrent ou s'ils préexistent aux opérations s'appliquant à eux après coup".

Op het voetspoor van Bourbaki onderscheidt Piaget drie fundamentele wiskundige structuren, n.l. de algebraïsche structuren (met de groep als prototype), de ordeningsstructuren (b.v. het tralie) en de topologische structuren. Deze structuren die onderling onherleidbaar zijn, zijn te beschouwen als „moederstructuren".

De auteur licht nu uitvoerig toe, dat de drie fundamentele structuren à la Bourbaki corresponderen met elementaire structuren van het menselijk denken „si l'on cherche à retracer jusqu'en ses racines le développement psychologique des opérations arithmétiques et géométriques spontanées de l'enfant, et surtout des opérations logiques qui en constituent les conditions nécessaires préalables”.

Wat de controverse betreft tussen een psychologisme en een logicisme, acht de auteur de tijd rijp voor een vermindering der bestaande spanningen „La psychologie tend, en effet, une main à la logique en montrant que l'intelligence est orientée spontanément vers l'organisation de certaines structures opératoires qui sont isomorphes à celles ou à quelques parties de celles que les mathématiciens mettent au départ de leur construction ou que les logiciens retrouvent dans les systèmes qu'ils élaborent”.

Wat de praktijk betreft voor de leraar in functie behoeft er geen sprake te zijn van een keuze tussen de formalistische methoden die gebaseerd zijn op de logica en de „méthodes actives” die gebaseerd zijn op de psychologie: „le but de l'enseignement reste toujours d'atteindre la rigueur logique ainsi que la compréhension d'un formalisme suffisant, mais seule la psychologie est en état de fournir aux pédagogues les données sur la manière dont cette rigueur et ce formalisme seront obtenus plus sûrement”. Er is geen sprake van dat door een en ander de deducerende geest gedwarsboomd zou kunnen worden. „... le recours à l'expérience et à l'action, et de façon générale la pédagogie dite active parmi les procédés d'initiation mathématique ne compromettent en rien la rigueur déductive ultérieure, mais la préparent au contraire en lui fournissant des bases réelles et non pas simplement verbales.”

d. In het tweede hoofdstuk „*Réflexions sur l'organisation et la méthode de l'enseignement mathématique*” belicht E. W. Beth de punten van contact in de tegenstellingen die er op het terrein van het wiskunde-onderwijs tussen hoger en middelbaar onderwijs bestaan. Om moeilijkheden te voorkomen, die zo gemakkelijk kunnen voortspruiten uit de omstandigheid, dat de schoolorganisatie van land tot land essentiële verschillen kan vertonen, volgt de auteur een „axiomatische” methode, in zoverre dat hij postuleert welke inhoud hij aan tal van begrippen (institut d'enseignement supérieur, institut d'enseignement secondaire, professeur, étudiant, élève, e.a.) zal geven.

Beth gaat de invloed na die de ideeën van Felix Klein hebben gehad op de hervorming van het wiskunde-onderwijs, en geeft tevens

een verklaring waarom Klein's succes maar partieel is geweest. „C'est que les théories géométriques envisagées par Klein, bien qu'elles occupassent une position intermédiaire entre les programmes courants de l'enseignement secondaire et l'enseignement supérieur, restaient trop éloignées du centre d'intérêt et de l'un est de l'autre.” Het wiskundig onderzoek heeft zich geworpen op andere gebieden, met name op dat van de algebraïsche structuren en het grondslagenonderzoek. Beth denkt er niet aan deze gebieden nu ook in de schoolprogramma's te doen opnemen, wel wenst hij te doen uitkomen dat studie op deze terreinen tot goed begrip van het schoolonderwijs kan bijdragen.

Dit illustreert hij door met behulp van de methode der symbolische logica de overgang van het systeem der rationale getallen F naar het systeem R der reële getallen te bespreken. Beth laat zien, dat het onmogelijk is het verschil tussen beide systemen tot zijn recht te laten komen, zolang men op het gebied der elementaire logica blijft, d.w.z. zolang men elk beroep op begrippen ontleend aan de theorie der verzamelingen vermijdt.

Nu behoort de schoolwiskunde bijna geheel tot het gebied van de elementaire logica. Hier voelt de leerling zich zo te zeggen thuis; geen wonder, dat hij voor buitengewone moeilijkheden komt te staan bij het verlaten van dit vertrouwde gebied.

Belangrijk is de paragraaf door de auteur gewijd aan „logique et psychologie”. De grondslagen-crisis, die in de jaren tussen 1890 en 1910 optrad, heeft de behoefte doen ontstaan een vast punt te vinden als grondslag voor het gebouw der wiskunde. Bij het zoeken naar een hecht fundament heeft men ook uitgezien naar wat de psychologie had te bieden; „... la logique possédait de temps immémorial, des liens multiples avec la psychologie. Il aurait été particulièrement important pour la pédagogie des mathématiques que des relations intimes entre la logique, la psychologie et la recherche des fondements eussent pu s'établir. En effet, une collaboration entre ces trois domaines aurait sans doute contribué à la solution des problèmes pratiques de l'enseignement mathématique. Cependant, il faut constater que la psychologie elle-même n'a guère facilité le rapprochement voulu. Au moment où bien des mathématiciens auraient voulu profiter de ses ressources, elle s'est détournée de son intellectualisme traditionnel pour se consacrer à peu près exclusivement à l'étude de l'affectivité et du subconscient. Du côté des mathématiciens, par contre, le besoin d'un rapprochement était vivement ressenti”.

Op enkele uitzonderingen na (Mannoury, Piaget) blijft gelden

dat „la psychologie n'a guère contribué à clarifier le problème des fondements de la logique et des mathématiques”.

Beth licht toe, waarom naar zijn mening de bijdrage van de kant der psychologie steeds een zeer bescheidene zal blijven. Hij wijdt een afzonderlijke paragraaf aan het psycho-linguïstiek van Mannoury en aan de genetische epistemologie van Piaget.

Beth waarschuwt ervoor geen te grote verwachtingen te koesteren van de bijdrage die de psychologie kan leveren ten aanzien van problemen van wiskundige didactiek. „Le rôle de la formation mathématique dans l'enseignement secondaire consiste presque exclusivement, me paraît-il, à familiariser les élèves avec la méthode déductive. Aussi une importance exagérée attribuée aux leçons de la psychologie ne peut exercer qu'une influence néfaste. Sous prétexte que les élèves des premières années ne seraient pas encore mûrs pour l'apprentissage de la méthode déductive, on s'efforce de leur apprendre des théorèmes géométriques par voie empirique... Le fait qu'on applique la méthode empirique démontre qu'on a, pour ainsi dire, mauvaise conscience.”

e. In hoofdstuk III „*L'abstraction en mathématiques et l'évolution de l'algèbre*” wijst J. Dieudonné er op, dat van oudsher de wiskunde met de metaphysica deze karaktertrek gemeen heeft, dat ze handelt over een gebied van abstracties verre verwijderd van de tastbare werkelijkheid. Dit maakt, dat velen kopschuw blijven ten aanzien van de wiskunde „On est enclin, de nos jours, et particulièrement dans le domaine enseignant, à déplorer cet état de choses, et à s'ingénier pour masquer ou atténuer le plus longtemps possible le caractère abstrait des mathématiques. C'est là, à mon sens, une grave erreur”, aldus de auteur. Het doel van ons wiskunde-onderwijs bestaat niet hierin, dat we onze leerlingen een stelletje vernuftig gevonden eigenschappen van bissectrices b.v. willen bijbrengen, „mais bien de leur enseigner à ordonner et enchaîner leurs pensées selon la méthode dont se servent les mathématiciens.” Om deze methode tot zijn recht te laten komen doet de auteur een beroep op „l'histoire de l'algèbre, depuis ses premiers balbutiements jusqu'à notre algèbre moderne”. Hij gaat de toeneming in abstractie na, die valt te constateren in „la notation algébrique”, „les équations impossibles”, „le calcul formel et l'algèbre moderne”. Hij staat uitvoeriger stil bij de axiomatische methode in de wiskunde, i.h.b. bij de structuur van groepen en lichamen.

„On entrevoit ainsi comme l'étude de ces structures peut fournir au mathématicien des outils d'une utilité universelle. Devant la

marée des publications mathématiques de toute espèce, qui s'enfle davantage chaque année, la méthode axiomatique seule permet de canaliser en quelque sorte les nouvelles découvertes, de les classer et de les amalgamer aux résultats antérieurs, bien souvent d'en simplifier beaucoup l'exposition, et parfois d'en augmenter la portée en analysant à fond leurs ressorts, et en dégagant leurs principes à l'état pur. Mais pour qu'elles puissent remplir pleinement cette fonction, il a fallu que les structures algébriques acquièrent leur souplesse et leur plasticité au prix d'une abstraction poussée à l'extrême où l'on n'accède que par un effort intellectuel soutenu".

f. In hoofdstuk IV „*Introduction de l'esprit de l'algèbre moderne dans l'algèbre et la géométrie élémentaires*" merkt A. Lichnerowicz op, dat we aan het schoolonderwijs in de wiskunde een tweetal eisen hebben te stellen, die niet gemakkelijk beide kunnen worden vervuld: het mag voor de leerlingen aan duidelijkheid niets te wensen overlaten en het moet hen inleiden in de geest van de hedendaagse wetenschap. Vooral deze laatste eis is zwaar; de auteur vraagt zich af: „dans quelle mesure est-il possible d'imbiber de l'esprit des mathématiques contemporaines notre enseignement du second degré?" Thans is het middelbaar onderwijs door een diepe kloof van het universitaire onderwijs gescheiden. „Il nous faut trouver le moyen . . . de construire un enseignement qui, même à ses débuts, soit plus proche de la vie de notre science . . . Je crois même que notre enseignement est actuellement, dans une large mesure, beaucoup trop historique". De auteur licht dit toe met voorbeelden uit de rekenkunde en de elementaire meetkunde. Hij verklaart: „Le caractère de la conception contemporaine des mathématiques qui me semble le plus fondamental est celui du primat des structures et des techniques algébriques . . . Il me semble possible, par un effort expérimental de chacun de nous et sans presque de modifications des sacro-saints programmes, d'introduire un peu de l'esprit de cet algèbre moderne en arithmétique et algèbre élémentaire et, ce que est déjà partiellement fait à un plus haut degré, en géométrie élémentaire."

De auteur geeft nauwkeurig aan op welke wijze hij de door hem bepleite inleiding uitvoerbaar acht. De leerlingen zullen kennis kunnen maken met, voorbereid kunnen worden op de begrippen als groep, ring, lichamen, isomorfie. Uitvoerig staat de auteur stil bij het gelijkwaardigheidsbegrip in de wiskunde. Ook bij de wijze, waarop in de school het begrip vectorruimte tot zijn recht kan

komen. De wijze waarop de auteur via vectoren komt tot de formules voor $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ en $\sin(\theta_1 + \theta_2)$ is modern en niet moeilijker dan de traditionele.

Lichnerowicz verklaart: „je pense simplement que si le professeur a lui-même bien présentes à l'esprit les différentes notions, les différentes exigences fondamentales, quelque chose d'essentiel risque tout de même de passer à travers le cerveau des élèves — sans en sortir... — quelque chose qui leur épargnera bien des difficultés dans l'avenir, car c'est tout de même un but de notre enseignement que de les faire participer à ce que sont la science et la technique vivantes de notre temps.”

g. Hoofdstuk V van G. Choquet „*Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire*”, het uitvoerigste van de zes bijdragen van het boek (het beslaat 56 van de 173 blz.), komt bij een korte samenvatting allicht niet voldoende tot zijn recht.

De auteur wijst er op, hoe gering de invloed is die de wetenschappelijke onderzoeken van de laatste twee eeuwen op de inhoud van onze meetkundeboeken hebben uitgeoefend, hoe onbevredigend voor vele docenten het aanvangsonderwijs in dit vak nog steeds blijft, en hoe inférieur vele schoolboeken nog zijn vergeleken bij Euclides' Elementen van meer dan 2000 jaar geleden.

De auteur wijst vervolgens op essentiële tekortkomingen in leerboeken der meetkunde t.a.v. de gevolgde axiomatick, met name t.a.v. de theorie der congruenties, der verplaatsingen. Hij laat daarbij buiten beschouwing de leerboeken die niet de pretentie hebben een deductief systeem der meetkunde te willen opbouwen, maar die b.v. tot titel zouden kunnen hebben: „Pour comprendre la géométrie avec une feuille de papier et une paire de ciseaux”.

Bij de bespreking van het axioma-stelsel van Hilbert in de paragraaf „Choix du système d'axiomes” komt Choquet tot de conclusie: „C'est pour la même raison que nous rejeterons comme mal adapté à l'enseignement de la géométrie élémentaire, tout exposé d'une géométrie euclidienne édifié à partir d'une géométrie projective, et de même, malgré leur grand intérêt et leur élégance, les axiomatiques qui mettent l'accent sur le groupe des déplacements et qui définissent la congruence des segments à partir de ce groupe”.

Vervolgens onderwerpt de auteur de methode van de analytische meetkunde aan kritiek; deze methode is ongeschikt voor jeugdige leerlingen, maar slechts geschikt voor gevorderden.

Nu komt Choquet met een andere aanpak: „Si nous voulons donner à la géométrie une base, non seulement logiquement cor-

recte, ce qui serait insuffisant, mais assez proche de l'expérience sensible de chacun de nous, nous devons pour un instant faire l'effort d'oublier tout ce que nous savons des propriétés du plan et de l'espace... et adoptons: l'attitude d'esprit du chercheur essayant de dégager, de divers cas particuliers qu'il a rencontrés, une notion nouvelle qu'il entrevoit confusément."... „Nous sommes d'autre part en possession de certains instruments, tels que pointe ou craie pour marquer des points, compas d'ouverture variable ou fixe, règle à un seul bord ou à deux bords parallèles, équerre, etc."

Op deze grondslag gaat Choquet nu een axioma-stelsel opbouwen, waarbij hij in de paragrafen „géométrie de la droite", „géométrie du plan", „étude des isométries et de l'orientation" in uitvoerige details treedt.

Enige „notes" zijn als aanhangsels toegevoegd, te weten:

1. introduction sur une droite d'un plan d'une structure de corps totalement ordonné compatible avec sa structure de groupe additif;
2. plans euclidiens non archémediens;
3. exemple de plan non euclidien.

h. Naar de inhoud van het laatste hoofdstuk: „*La pédagogie des mathématiques*" van de hand van C. Gattegno zal de belangstelling van de wiskunde-leraar in functie allereerst uitgaan. Hoe wordt, zo vraagt hij zich af, nu in de praktijk de synthese tot stand gebracht tussen de psychologische, logische en vakwetenschappelijke inzichten in de vorige hoofdstukken uiteengezet. Dat er van een verantwoorde doelbewuste synthese nog geen sprake is zal de lezer op de eerste bladzijden van het voorwoord reeds hebben kunnen vermoeden, als daar opgemerkt wordt: „Les textes n'ont pas été coordonnés. Seul M. Piaget a écrit son chapitre après la lecture des autres."

De taak om terwille van de toepassingen op de praktijk coördinatie na te streven zou zeker voor rekening dienen te komen van de auteur van „la pédagogie des mathématiques". Toch zal de verwantschap tussen de opvattingen van deze auteur met die van andere medewerkers (i.h.b. met die van Piaget, maar niet met die van Beth) door zijn hele bijdrage heen duidelijk worden. Zo formuleert Gattegno de functie van het algebraonderwijs als volgt: „La formation algébrique consiste dans l'acquisition 1) du sens de la réversibilité des opérations; 2) du dynamisme opératoire qui résulte des équivalences et des combinaisons cycliques que l'on peut obtenir en ajoutant un nouveau couple d'opérations

inverses dans un cycle donné; 3) de l'intérêt pour la détermination à priori des propriétés possédées par un ensemble d'opérations."

Gattegno wenst de didaktiek te behandelen op het niveau van een wetenschap. „Dans ce chapitre nous traiterons de la pédagogie mathématique comme d'une science. C'est à dire que nous nous attaquerons aux aspects de la pédagogie qui sont communicables à tous et susceptibles d'être traduits en techniques impersonnelles."

De factoren van het onderwijs door Gattegno beschouwd zijn: „les esprits qui interviennent dans la pensée mathématique et l'acte d'apprendre; les structures mathématiques et leur propre dynamisme; les relations de ces structures avec celles de la réalité, en particulier dans le domaine des applications".

Om deze factoren tot hun recht te laten komen moet de wiskundig gevormde docent psychologisch, methodologisch en sociaal georiënteerd zijn.

De bedoeling van de auteur is om te laten zien hoe het programma van het onderwijs functioneel gemaakt kan worden, d.w.z. als een synthese der drie genoemde factoren.

Een zeer groot aantal voorbeelden in de paragrafen „Exemples de leçons d'algèbre élémentaire", „l'acquisition de l'expérience géométrique" verduidelijkt de opvattingen van de auteur. Voor deze praktijkvoorbeelden moeten we naar het boek zelf verwijzen.

De auteur schrijft aan het slot:

„Il nous semble que l'essentiel de ce que nous avons à apporter au corps enseignant mathématique peut se résumer ainsi.

La classe est notre laboratoire et nous devons apprendre à y travailler à titre d'esprits créateurs.

Il y a une tâche que seuls les membres de l'enseignement mathématique peuvent faire et qui n'intéresse personne d'autre (si ce n'est les psychologues de la pensée) et qui est la synthèse réelle entre les découvertes faites par les mathématiciens sur les structures primitives fondamentales et les découvertes faites par les psychologues sur la structuration de la pensée. De plus eux seuls peuvent trouver dans leur activité quotidienne les justifications et les condamnations des choix faits dans les programmes des matières à enseigner. Leur contribution est nécessaire sur ce point à cause des conséquences sociales de la préparation qu'ils donnent aux élèves.

C'est là le point de vue du maître. Du côté de l'élève il nous semble important de dire que si nous pouvons créer la joie dans nos classes de mathématiques en plus de l'efficacité et du maximum de compréhension, nous devons le faire.

Ce chapitre est le témoignage de quelqu'un qui, n'ayant accepté d'autre autorité que le travail dans la classe avec des élèves réels et ordinaires, peut se renouveler en renouvelant les vieilles questions au contact de l'esprit chercheur des enfants."

We hopen dat deze uitvoerige „aankondiging" van „*L'enseignement des mathématiques*" vele lezers van Euclides tot de lectuur van het werk zelf moge brengen!

*Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de
l'Enseignement des Mathématiques*

In aansluiting op het artikel van Dr. Wansink over „Vernieuwing van de didactiek der Wiskunde” plaatsen we onderstaand programma van de 10e internationale samenkomst van wiskundeleraren te Novi in Joegoslavië.

**Xme Rencontre Internationale de Professeurs de
Mathématiques à Villa Nevenka Novi (Côte de l'Adriatique)
Yougoslavie du 17 au 26 Août 1956.**

Themes: 1) la formation mathématiques des instituteurs.
2) la pénurie du personnel enseignant mathématiques.

Programme

- Le 17. Arrivée, installation. Conférences d'ouverture. Formation de groupes de travail.
- Le 18. Etude comparée des programmes d'écoles normales. Critique des points de vue présentés. — Les solutions diverses pour recruter les professeurs.
- Le 19. Excursion. Continuation des discussions de la veille.
- Les 20, 21, 22. Examen de nouvelles propositions faites par les participants au sujet des deux thèmes.
- Le 23. Excursion.
- Les 24 et 25. Traduction des solutions acceptées en propositions concrètes détaillées et adaptation aux conditions nationales. — Esquisse d'une campagne de propagation des conclusions sur les plans national et international.
- Le 26. Conclusions individuelles. Départ.

Accès. Novi est sur la côte nord de l'Adriatique à 50 kms au sud de Rijeka (Fiume). Les participants qui ne vont pas par route pourraient s'entendre pour terminer le parcours à partir de Rijeka par car spécial.

Inscriptions. Les demandes devraient parvenir aussitôt que possible au Secrétaire de la Commission au 225 High Street, Hampton Hill, Mddx (Angleterre). Les professeurs d'écoles normales et les membres actifs de la profession seront les bienvenus à cette rencontre. Le prix de 12.000 dinars couvre les frais de séjour mais non les excursions.

KORREL CXIX

Aan, uit en over elkaar.

In elk schoolboek treft men fig. 1 aan; zij het dan veelal alleen met hoofdletters en theorie met paren hoofdletters in plaats van met kleine letters voor de lengten van de lijnstukken.

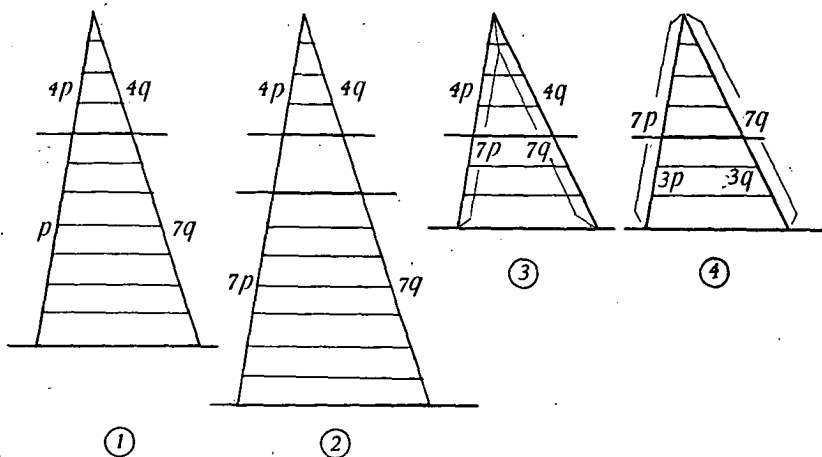


Fig. 1 vormt het uitgangspunt voor 3 en 4; met een eigenschap van de evenredigheden worden 3 en 4 bewezen; in het kort „de bovenste stukken (de onderste) verhouden zich als de hele zijden.”

Het is echter geheel overbodig die 3 en 4 te bewijzen; nergens, door niemand, wordt er bij het bewijs van 1 gebruikt, dat de stukken op de linkerlijn aansluiten. Ze mogen toch ook liggen als op fig. 2, ook over elkaar zoals op 3 en 4. Men heeft dan zonder enige moeite met evenredigheden alle 4 gevallen van ligging; ook natuurlijk als de linker- en de rechterkant elkaar snijden.

Die eigenschap van „de som van de termen van de 1e reden, enz.” heeft men helemaal niet nodig.

Heel erg is het, als men drie gevallen onderscheidt (er is er maar één) en die eigenschap driemaal op deze manier bewijst!

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \rightarrow \frac{a_1}{a_2} + 1 = \frac{b_1}{b_2} + 1, \text{ dus } \frac{a_1 + a_2}{a_2} = \frac{b_1 + b_2}{b_2} \rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{a}{a_2} = \frac{b}{b_2} \rightarrow \frac{a_2}{b_2} = \frac{a}{b} \\ \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a}{b}$$

Het schijnt, neen het blijkt, dat de evenredigheidsfactor voor velen nog een groot geheim is. In de 4e klas van de *lagere* school leren ze al $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$ en $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$. Maar op de H.B.S., waar ze toch met letters rekenen, vooral *niet* $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$ en dus $a:b = ka:kb$, wat precies hetzelfde is.

Met deze notatie even over: „de som van de termen”, dus:

$$a:b = ka:kb$$

$(a+b):k(a+b) = 1:k = a:ka = b:kb$. Dat is alles. Dit is voor leerlingen leesbaar, het andere niet.

Maar al dat gedoe met evenredigheden is, zoals gezegd, volslagen overbodig; de stukken mogen aan elkaar liggen, uit elkaar en elkaar overlappen.

P. W.

AVONDCOLLEGES IN DE NATUURKUNDE AAN DE RIJKSUNIVERSITEIT TE UTRECHT, VOOR AFGESTUDEERDEN

De Hoogleraren in de natuurkunde aan de Rijksuniversiteit te Utrecht hebben besloten in de komende cursus, in het Fysisch Laboratorium, Bijlhouwerstraat, een serie avondcolleges voor afgestudeerden te geven. De bedoeling is afgestudeerden op academisch peil voor te lichten over en in te leiden in actuele onderwerpen, zowel op theoretisch als op experimenteel gebied. Men hoopt met deze colleges tevens tegemoet te komen aan de klacht van vele afgestudeerden (vooral leraren), dat zij zo weinig aanleiding krijgen hun op de universiteit geleerde denk- en werktechniek door oefening paraat te houden. Het niveau van deze colleges zal boven dat van vacatiecursussen en symposia gehouden worden.

De serie strekt zich uit over 8 avonden, verdeeld over 8 opeenvolgende weken in oktober en november. 4 Avonden, te verzorgen door de theoretici, zullen besteed worden aan de quantummechanica, en wel in het bijzonder gericht zijn op de toepassing bij de kernphysica, en 4 avonden, te verzorgen door de experimentatoren, zullen besteed worden aan de experimentele kernphysica, aansluitend op de theoretische stof en zo veel mogelijk met demonstraties. De avonden zullen afwisselend theoretisch en experimenteel zijn.

Het eerste avondcollege is vastgesteld op 11 oktober 1956.

MEDEDELING „WIMECOS“-CONTRIBUTIE

De leden van Wimecos worden er aan herinnerd dat de contributie m.i.v. 1 september a.s. op f 8,— is gebracht. (Zie verslag jaarvergadering in afl. III).

De secretaris.

NOTULEN

van de ledenvergadering van L.I.W.E.N.A.G.E.L. op maandag
9 april 1956 te Amsterdam om 17.00 uur

De voorzitter opent de vergadering en heet de vertegenwoordigers van zusterverenigingen, het erelid Dr. Schrek, en de verdere leden, die de moed opbrengen om na een vermoeiend Congres nog een vergadering bij te wonen, hartelijk welkom.

De notulen worden ongewijzigd goedgekeurd.

Voor enkele mededelingen krijgt Dr. Vredenduin het woord. Het betreft in de eerste plaats de naamsverandering van Wimecos, waardoor gymnasiumleraren ook lid van deze vereniging kunnen worden. Dr. Vredenduin legt er de nadruk op, dat Wimecos eerst overleg met Liwenagel heeft gepleegd en dat de wijziging in volle harmonie tot stand is gekomen.

De tweede mededeling betreft punt 4 van de agenda: de status van het blad „Euclides”. De bedoeling is, dat Euclides voortaan 10 maal per jaar zal verschijnen en dat de redacteurs benoemd zullen worden door Wimecos en Liwenagel. De prijs zal dan voor leden van deze verenigingen f 5,— per jaar worden.

De voorzitter vraagt of iemand het woord verlangt over dit voorstel. Dit is niet het geval en het voorstel wordt aangenomen.

Voor de vacatures in het bestuur zijn geen tegenkandidaten gesteld, zodat Dr. Vredenduin als voorzitter en J. Willemse als bestuurslid verkozen verklaard worden. Voorzitter Willemse bedankt Prof. Wielenga, die het bestuur gaat verlaten, voor het vele dat hij voor Liwenagel heeft gedaan en voor de prettige samenwerking in het bestuur.

De heer Koning bedankt namens het Genootschapsbestuur de heer Willemse voor hetgeen hij in zijn functie als voorzitter voor Liwenagel en daardoor ook voor het Genootschap heeft gedaan. Hij spreekt de hoop uit, dat Liwenagel onder de leiding van Vredenduin zal mogen bloeien.

In de vacature-Vredenduin stelt het bestuur Dr. J. W. Schuyf kandidaat. Er worden geen tegenkandidaten gesteld, zodat Dr. Schuyf verkozen is.

De kas is ten huize van de penningmeester gecontroleerd en in orde bevonden. Het verslag van de kascommissie wordt voorgelezen. Op voorstel van de voorzitter wordt de penningmeester gedéchargeerd onder dankzegging voor het nauwkeurige beheer.

Bij de rondvraag dankt Dr. Schrek voor de uitnodiging en de tot

hem gerichte vriendelijke woorden. Mede namens de heren Dr. Capel, Dr. Blom en Jacobs doet Dr. Wansink hetzelfde, daarbij constaterende, dat deze vergadering wel kort is, maar dat er in deze korte tijd belangrijke besluiten zijn genomen.

Prof. Wielenga dankt voor de prettige samenwerking in het Liwenagelbestuur en zal graag het contact met Liwenagel bestendigen als buitengewoon lid van het Genootschap.

Tenslotte dankt Dr. Vredenduin de aftredende voorzitter voor zijn beleid en memoreert daarbij nog speciaal de wijze waarop hij de Liwenagelrapporten, die wel rapporten-Willemse genoemd mogen worden, tot stand heeft doen komen.

Om 17.45 sluit de voorzitter de vergadering.

De secretaris,

D. LEUJES.

Het bestuur bestaat nu uit de volgende leden:

Dr. P. G. J. Vredenduin, voorzitter, Arnhem.

Dr. R. L. Krans, vice-voorzitter, Arnhem.

D. Leujes, secretaris, Thorbeckestraat 47, Delft.

Dr. J. W. Schuyt, penningmeester, Middachtenweg 188, Den Haag, giro no. 87185.

Mej. Dr. A. T. M. Kramer, Den Haag.

Dr. J. C. van der Steen, Utrecht.

J. Willemse, Vlaardingenv.

VAKANTIECURSUS 1956

uitgaande van het Mathematisch Centrum voor leraren in de wiskunde en andere belangstellenden, te houden op *maandag 27 augustus en dinsdag 28 augustus te Amsterdam.*

Als thema is gekozen: *De wetenschappelijke grondslagen der elementaire wiskunde.*

Programma:*Maandag 27 augustus*

10.45 uur *Opening*

Prof. Dr. G. H. A. Grosheide F. W. zn.: Axiomatiek en meetkunde;

13.30 uur Dr. B. van Rootselaar: Intuïtionisme en rekenkunde;

15.00 uur Prof. Dr. F. van der Blij: Continuüm en reëel getal;

Dinsdag 28 augustus.

10.00 uur Prof. Dr. F. Loonstra: Abstracte algebra en klassieke algebra;

11.15 uur Prof. Dr. W. T. van Est; Groepentheorie en getallenleer;

14.00 uur Prof. Dr. A. C. Zaanen: Moderne opvattingen van oppervlakte en inhoud;

15.30 uur Prof. Dr. R. Timman: Wiskunde en fysieke werkelijkheid.

Sluiting

Van iedere voordracht wordt een syllabus verstrekt.

De deelnemingskosten bedragen f 2.50 inclusief syllabus.

Deelnemers gelieven dit bedrag liefst vóór de aanvang der cursus, onder vermelding „Vakantiecursus 1956”, op postgirorekening No 462890 t.n.v. het Mathematisch Centrum over te maken.

De cursus zal worden gehouden in het gebouw van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49 te Amsterdam, te bereiken met lijn 5 van C.S. en Amstelstation en lijn 3 van station M.P.

Administratie M. C.

De deelnemers worden verzocht zich vóór 1 augustus bij de administratie van het M.C. op te geven.



GEMEENTE GRONINGEN

Aan de
Academie Minerva
(afd. m.t.s.) wordt gevraagd
een

leraar in de wiskunde

of wis- en natuurkunde en
mechanica. (volledige betrekking)

Salaris volgens rijksregeling.
Sollicitaties binnen 10 dagen
na het verschijnen van dit
blad aan burg. en weth.
Inlichtingen bij de directeur
Petr. Driessenstr. 3.

Wist U . . .

dat een volledig bevoegd
leraar in de exacte vakken
met 10 dienstjaren, als hij
zich met een vierjarig
contract verbindt aan een
bij de Bond van Neutrale
Schoolverenigingen in In-
donesië aangesloten en
onder de Stichting voor
Nederlands Onderwijs in
Indonesië ressorterende
school voor VHMO, een
aantrekkelijk rupiahsala-
ris geniet, na volbre-
nging van het contract een
sparepot van bijna 17
duizend gulden kan be-
zitten en, zo hij geen
pensioenaanpraken wil
doen gelden, bovendien
een kortverbandbonus
krijgt van ruim 10 du-
zend gulden? En dat hem
zes maanden Europees
verlof worden verleend
op een verlofsalaris van
f 1.300,— per maand?

Er zijn nog enkele vacatures.

Inlichtingen en sollicitatie:
Commissie BNS, Dr. J. Eisen-
berger, Suezkade 92, Den Haag,
tel. 334579.

Zo juist verschijnen:

MEETKUNDE IN TAKEN

door

F. Henneman en

E. Steenberg

Vorbereiding

met 174 fig. f 2,90

Deel I, met 203 fig. f 3,50

Deze nieuwe methode bestaat
uit een deeltje „Vorberei-
ding” en de daarop volgende
delen I, IIA en IIB.

De verschenen „Vorberei-
ding” bevat *de intuïtieve in-
leiding tot de meetkunde*. Deze
is in het bijzonder geschikt
voor de eerste ulo-klas.

De delen I en IIA geven de
volledige stof voor het examen
Mulo-A; I, IIA en IIB die
voor B.

De leerstof is verdeeld over
taken; daardoor laat de me-
thode zowel een *klassikale* als
individuele behandeling toe.
Extra-taken maken een zekere
differentiatie binnen het klasse-
verband mogelijk.

Aan de figuren is de uiterste
zorg besteed.

Ook via de boekhandel verkrijgbaar
P. Noordhoff N.V. - Groningen

Noordhoff's Aantekenboekje

11de druk

Prima schrijfpapier, in heel
linnen bandje

A-uitgave met 13 lijsten f 0.90

B-uitgave met 21 lijsten f 1.10

Praktisch — Solide

Ook via de boekhandel
P. Noordhoff N.V. - Groningen

Prof. Dr B. L. van der Waerden

Ontwakende Wetenschap

Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde.

321 bladzijden, rijk geïllustreerd,
met uitvoerig register.

In heel linnen band f 13.50

Beoordelingen:

... Uit het voorgaande mag men echter niet besluiten dat *Ontwakende Wetenschap* alleen voor specialisten werd geschreven. Het is integendeel de bedoeling van de Auteur dat zijn boek „wetenschappelijk en toch bevattelijk zij”, en dat is het ook geworden. Met wat is overgebleven van onze schoolwiskunde, aangevuld met de nodige belangstelling, zal de lezing ervan voor geen enkel ontwikkelde onoverkomelijke moeilijkheden bieden. Alles is trouwens op een zo klare en pittige wijze uiteengezet, dat het werkelijk een concreet beeld geeft van de rekenwijze der Babyloniërs, Egyptenaren en Grieken, iets wat men van slechts weinig werken over oude wiskunde kan getuigen. Tekst en illustratie helpen bovendien om dat ontwaken der wiskunde te situeren in het geheel der groeiende Griekse beschaving, waardoor alles kleur en relief krijgt. Allen die nog iets voelen voor de cultuur van het oude Hellas, moeder van onze Westerse beschaving, en voor de wetenschap, een niet weg te cijferen element van diezelfde Westerse beschaving, zullen met stijgende interesse dit boek doorlezen; het is de inspanning die het kost overwaard. We wensen het in de handen van velen, en speciaal in die van onze wiskunde-leraars, want het is een uitstekend werk, dat andere taalgroepen ons terecht mogen benijden.

Wetenschappelijke Tijdingen

... Voegt men hier nog bij, dat het gehele boek in een zeer levendige en persoonlijke stijl geschreven is en dat de mathematische redeneringen in volmaakte helderheid worden uiteengezet, dan zal het duidelijk zijn, dat hier inderdaad een werk van grote waarde tot stand is gekomen, dat een voortreffelijke gelegenheid biedt, de geschiedenis der antieke wiskunde te leren kennen.

Het is te hopen, maar zeker ook te verwachten, dat velen van deze gelegenheid gebruik zullen maken. Er zijn in het bijzonder twee categorieën lezers die in geen geval zullen mogen nalaten, het te bestuderen: het behoort in het bezit te zijn van alle docenten in wiskunde en van alle classici.

Voor de eersten is het simpele eis van eruditie, niet alleen met de huidige ontwikkelingsfase van hun vak op de hoogte te zijn, maar ook met de historische oorsprong van onze hedendaagse kennis; de laatsten echter staan nu eenmaal voor de taak, de antieke cultuur in al haar wezenlijke uitingen te verstaan; en die taak moge in stricte zin en volle omvang onvervulbaar zijn, zij kunnen er zich niet aan onttrekken, waar het een gebied betreft waarop de Griekse geest zo grote triomfen heeft gevierd en tevens de latere ontwikkeling van het denken zo beslissend heeft beïnvloed als dat in de wiskunde het geval is geweest. Vrees voor ontoegankelijkheid van dit gebied voor de niet mathematisch geschoolde behoeft daarbij niemand te weerhouden.

Het boek is zo doordringend helder en eenvoudig geschreven, dat men zich slechts over hoeft te geven aan de leiding die het geeft om zonder veel moeite thuis te raken in het fascinerend onderwerp dat het behandelt.

Weekblad v. Gymn. en M.O.

Ook via de boekhandel verkrijgbaar

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN