

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM

DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN

PROF. DR. O. BOTTEMA, DELFT - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT

PROF. DR. E. J. DIJKSTERHUIS, BILTHOVEN - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, AMSTERDAM

DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

31e JAARGANG 1955/56

II

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang $f 8,00$. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde ($f 12,50$) zijn ingetekend, betalen $f 6,75$.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan hogere burgerscholen en lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van $f 3,00$ op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in $f 6,—$ per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 806593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen $f 10,—$ per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchillaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Oranje Nassaplein 15, Zeist. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD:

Notulen van de ledenvergadering van Liwenagel	53
Kort verslag van de algemene vergadering van Wimecos.	56
Dr. W. J. BOS: Het aanvangsonderwijs in de meetkunde	57
Dr. J. J. DRONKERS: Ervaringen van een deskundige bij de eindexamens van het V.H.M.O.	70
Dr. P. G. J. VREDENDUIN: Het integraalbegrip.	84
Prof. Dr. D. VAN DANTZIG: The function of mathematics in modern society and its consequence for the teaching of mathematics	88
Dr. D. J. E. SCHREK: Portretten van wiskundigen	103
Dr. JOH. H. WANSINK: Didactische revue	106
PROF. Dr. H. FREUDENTHAL: Mededeling	115
H. HERREILERS: Kortel CXVI	116

NOTULEN VAN DE LEDENVERGADERING VAN L.I.W.E.N.A.G.E.L.

op donderdag 1 september 1955 in het Gymnasium Haganum te
's-Gravenhage.

Om 14.30 opent de vice-voorzitter, Dr. R. L. Krans, de vergadering en heet in het bijzonder welkom: Inspecteur A. J. S. van Dam, Dr. A. F. Monna van het Departement van O., K. en W., mejuffrouw M. B. Volten, vertegenwoordigster van de Groep Leraren aan Chr. Gymnasia en Lycea, Dr. Joh. H. Wansink van WIMCOS, Dr. W. H. Capel van VELINES, Dr. J. C. van der Steen van VELEBI, de heer P. M. van Hiele van de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. en de heren S. Roodenburg en J. W. Koning van het Genootschapsbestuur. Hij deelt mee, dat de bestuursleden Willemse en Vredenduin op deze vergadering niet aanwezig kunnen zijn.

De notulen van de vorige vergadering worden ongewijzigd goedgekeurd.

De vice-voorzitter stelt nu aan de orde de bespreking van de voorstellen om een actie te voeren tot wijziging van de urentabel in de 5e en 6e klas van de gymnasia.

De bedoeling van het eerste voorstel is de natuurkundedocent enige tijd te verschaffen om de grondslagen van de mechanica goed te behandelen. Tegelijkertijd beoogt dit voorstel de beëindiging van een onbevredigende toestand wat betreft de „wis- en natuurkundige aardrijkskunde”. Dit vak is de laatste jaren op vele scholen van karakter veranderd. Oorspronkelijk was als hoofdonderwerp voor dit vak bedoeld de sterrenkunde; het vak werd veelal gegeven door leraren, die in de wis- en natuurkundige faculteit gestudeerd hadden. Thans mag het alleen door geografen gedoceerd worden. Hiervan zijn velen sociaal-geografen, die voor sterrenkunde geen opleiding hebben gehad en er dikwijls weinig belangstelling voor hebben. Het gevolg is, dat steeds meer leerlingen het gymnasium doorlopen zonder iets van sterrenkunde te leren. Voor de β -leerlingen is dit speciaal funest, omdat van velen van hen bij hun verdere studie aangenomen wordt, dat zij enige notie van sterrenkunde hebben. Van de β -leerlingen kan voorts verwacht worden, dat onderwijs in de sterren-

kunde meer rendement zal hebben, als dit op het peil van de andere β -vakken wordt gegeven.

Het bestuur van Liwenagel wenst daarom splitsing van het uur wis- en natuurkundige aardrijkskunde voor α - en β -leerlingen. Het uur voor de α -leerlingen kan de geograaf blijven geven, zodat voor hem uit de verandering geen urenvermindering zou voortvloeien. Voor de β -leerlingen worde het uur opgenomen in de natuurkunde; in het leerplan voor de natuurkunde wordt dan voor 5β en 6β de behandeling van enige sterrenkundige onderwerpen voorgeschreven.

De heer Slot boom, die als wiskundeleraar in de 5e klas de cosmografie geeft, vindt het jammer, als dat vak zou verdwijnen.

De vice-voorzitter wijst er op, dat de meeste wiskundelaren niet meer bevoegd zijn voor „wiskundige aardrijkskunde”. De leraren, die op grond van hun vroegere studie in de wis- en natuurkundige faculteit onderwijsbevoegdheid voor aardrijkskunde hebben, sterven uit. Iemand, die gepromoveerd is in de sterrenkunde, is thans niet bevoegd op een gymnasium sterrenkunde te doceren, een sociaal-geograaf is dat wel.

Dr. Schouten vraagt, hoe de wijziging op een lyceum te realiseren is en hoe het met de sterrenkunde voor de α 's gesteld is. Het antwoord is, dat het bestuur het lyceum niet in de beschouwingen heeft betrokken, maar dat ook daar zeker wel een oplossing te vinden is; wat de α 's betreft, die kunnen sterrenkunde krijgen in de uren natuurwetenschappen, hetgeen ook nu al gebeurt.

De heer Wouters vraagt, of er met de aardrijkskundelaren overleg is gepleegd. De 2e secretaris doet daarop verslag van de voorafgaande besprekingen met MOGA, de Classici en het Genootschapsbestuur.

Dr. Dekker wil voorstel 1 splitsen in: a. het uur aardrijkskunde in 5β wordt cosmografie; en b. de cosmografie komt bij de natuurkunde. Na enige discussie, waarbij onder andere blijkt, dat de naam sterrenkunde door velen wordt geprefereerd boven cosmografie, worden de voorstellen van Dr. Dekker in stemming gebracht. Voorstel a wordt met algemene stemmen aangenomen. Als argument voor voorstel b noemt de vice-voorzitter nog de wenselijkheid van concentratie der vakken. Voorstel b wordt daarop aangenomen met 10 stemmen voor, 4 stemmen tegen en de rest blanco. Het blanco-stemmen wordt door Dr. Mooy gemotiveerd door er op te wijzen, dat hij als uitsluitend wiskundeleraar geheel buiten deze kwestie staat en er ook geen oordeel over heeft.

Voorstel 2 is gedaan om voor de biologie een uur meer te krijgen. Het bestuur van Liwenagel meent, dat dit mogelijk is door de ge-

schiedenis voor de β 's in de 5e klas gescheiden van de α 's te houden, maar dat vak dan in de 5e klas voor de β 's te laten aflopen. In 5 β kan het aantal uren geschiedenis zelfs van 3 op 4 worden gebracht.

Over voorstel 2 wenst niemand het woord. Bij stemming blijkt, dat een grote meerderheid ervóór is.

Vervolgens stelt de vice-voorzitter Dr. Van der Steen in de gelegenheid enkele mededelingen te doen over een rapport van Velines en Velebi, daarbij opmerkend, dat het jammer is, dat Liwenagel bij het opstellen van dat rapport niet is gekend. Dr. Van der Steen deelt mee, dat bedoeld rapport handelt over de Natuurwetenschappen op verschillende schooltypen, o.a. gymnasium-alpha, en dat het binnenkort zal worden gepubliceerd in Faraday en in het Vakblad voor Biologen. Hij somt enige conclusies op, waartoe het rapport komt.

Voor de rondvraag geeft niemand zich op.

Het woord is dan aan de 2e secretaris voor zijn causerie: De inhoud van een schoolboek over de beginselen van de statistiek. Het bedoelde boek, dat spoedig bij Wolters zal verschijnen, is geschreven door Dr. L. N. H. Bunt; het is in stencilvorm al een paar jaar in 5 α en 6 α (gymnasium) gebruikt door een werkgroepje, waartoe de spreker behoort. Naar aanleiding van ervaringen in de klas is er nog al het een en ander gewijzigd, zodat er eigenlijk van een tweede — voor sommige onderdelen zelfs van een derde — druk gesproken kan worden. Van elk van de 6 hoofdstukken geeft de spreker een algemeen overzicht toegelicht met voorbeelden van uitgewerkte vraagstukken.

Aan de discussie nemen deel mejuffrouw Dr. Kramer en de heren Dr. Bunt, Dr. Capel, Dr. Dekker, Dr. Mooy, Slotboom, Dr. Van der Steen en prof. Dr. Wielenga.

Om ongeveer 17 uur bedankt vice-voorzitter Dr. Krans de spreker en sluit de vergadering.

De 2e secretaris,
D. LEUJES.

KORT VERSLAG VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS

op 30 December 1954 te Amsterdam gehouden.

In zijn openingswoord merkt de voorzitter op, dat bij K.B. de wiskunde voor de A-leerlingen is afgeschaft hetgeen hij niet in het belang van deze leerlingen acht, vooral ook in verband met eventuele verdere studie.

Ter bespreking van het zo juist klaar gekomen rapport van de leerplancommissie zal in Februari een buitengewone algemene vergadering worden belegd.

Hierna worden de notulen van de vorige vergadering en het jaarverslag goedgekeurd.

Besloten wordt het financieel verslag in het vervolg in Euclides te publiceren. De penningmeester wordt gedechargeerd. De kascommissie wordt samengesteld uit de heren dr. J. Spijkerboer en dr. D. N. van der Neut. Aan de kascommissie zal het aantal leden aan het begin en het eind van het verenigingsjaar worden opgegeven. De contributie over 1955/56 zal weer f 6,— bedragen.

Het verslag van de leesportefeuille wordt onveranderd goedgekeurd.

Als bestuursleden worden vervolgens de heren Brinkman en Hufferman gekozen. De heer dr. Wansink dankt de afgetreden bestuursleden, de heren Janssen en dr. Buzeman, voor het vele dat ze voor Wimecos hebben gedaan. De vergadering onderstreept dit met een krachtig applaus.

Hierna houdt dr. W. J. Bos zijn lezing over: „Het aanvangs-onderwijs in de meetkunde”, welke in Euclides is gepubliceerd.

In de middagvergadering houdt de heer Dronkers een lezing over: „Ervaringen van een deskundige bij het eindexamen van het V.H.M.O.”, die met grote belangstelling wordt gevolgd.

Bij de rondvraag vraagt de heer dr. D. N. van der Neut het bestuur om eens de wenselijkheid te overwegen van het instellen van een commissie, die dat deel van het Wiskunde onderwijs zal nagaan, dat zich in een experimenteel stadium bevindt, teneinde de mogelijkheid van coördinatie tussen de verschillende scholen te bestuderen. De voorzitter zegt overweging toe.

Hierna wordt de vergadering gesloten.

De Secretaris,
J. F. HUFFERMAN.

HET AANVANGSONDERWIJS IN DE MEETKUNDE

door

Dr. W. J. BOS ¹⁾

Waar houdt het aanvangsonderwijs op en begint het „echte”, het „eigenlijke” meetkunde-onderwijs? Zeer globaal zouden we kunnen zeggen: het aanvangsonderwijs is het onderwijs, dat de leerlingen zo ver moet brengen, dat ze begrijpen, waar het bij het vak meetkunde om gaat. Dit is natuurlijk nog zeer vaag. „Begrijpen, waar het in de meetkunde om gaat”, duidt dan een zeker niveau aan. Dat niveau wordt niet op een bepaald, nauwkeurig aanwijsbaar, moment bereikt, maar wel kan bij het verwerken van de stof in een bepaalde periode geconstateerd worden, dat de leerlingen gaan begrijpen wat de „bedoeling” van het vak is.

Ik wil nu pogen dit niveau „*meetkunde begrepen*”, nader te omschrijven door bepaalde *aspecten* ervan te noemen. Deze aspecten corresponderen met de verschillende typen (soorten) moeilijkheden die onze eersteklassers moeten overwinnen.

1) *De probleemaanvaarding.*

Een leerling kan falen, doordat hij de probleemstelling niet snapt, doordat hij niet begrijpt wat er van hem verlangt wordt, doordat er voor hem geen probleem is. Het niveau „meetkunde begrepen” kan dus slechts bereikt worden als de problemen ook innerlijk aanvaard worden.

2) *De vormgeving.*

Voor het oplossen van zijn vraagstukken is het nodig dat de leerling in staat is tot een concluderende vormgeving. Het is mogelijk, dat hij wel verband ziet, maar niet in staat is zich dit verband bewust te maken en overzichtelijk op te schrijven.

3) *De begripsvorming.*

De leerling kan ook falen, doordat bepaalde begrippen niet zijn eigendom zijn geworden. Bij de term begripsvorming zou ik niet

¹⁾ Lezing, gehouden voor de vergadering van „Wimecos” op 30 Dec. 1954.

alleen willen denken aan de zuiver-meetkundige begrippen, maar ook aan de taalkundige relaties waarvan de meetkunde zich bedient.

4) *De kennis.*

5) *De werkgewoonten.*

6) *De aanpak-methoden.*

Een goede oplossing van een probleem is meestal slechts mogelijk als de leerling „zich iets afvraagt”. (B.v.: Hoe kan ik zoiets bewijzen? Hoe kan ik dit gegeven gebruiken?) Deze instellingsrichtingen zou ik aanpak-methoden willen noemen.

7) *De functie-ontwikkeling.*

Er kunnen ook moeilijkheden blijven optreden, doordat bepaalde functies onvoldoende ontwikkeld zijn. Ik denk hierbij in het bijzonder aan de *handigheid* in het gebruik van het tekenmateriaal (passer, driehoeken, gradenboog), een motorische functie dus, en speciaal aan de waarnemingsfunctie, de „*kijk op figuren*”.

Voor ik nu uiteen ga zetten op welke wijze het aanvangsonderwijs, naar mijn mening, het beste met deze verschillende aspecten rekening kan houden, wilde ik nog een paar opmerkingen maken:

1. Deze aspecten zijn wel onderscheidbaar, maar bij het oplossen van een bepaald probleem spelen vele aspecten een rol. Bij elk bewijs b.v. is begrip voor het probleem, een op het doel gerichte aanpak, een zekere kijk op figuren, enz. nodig.

2. Verder wijs ik er op, dat ik in het midden heb gelaten *welke* kennis, *welke* begrippen, *welke* aanpakmethoden, *welke* mate van kijk op figuren voor het bereiken van het niveau „meetkunde begrepen” nu precies nodig is. Anders gezegd: de „omvang”, de „vulling” van de verschillende aspecten heb ik buiten beschouwing gelaten. Ik meen namelijk, dat het aanvangsonderwijs op vele wijzen goed (en op nog meer wijzen slecht) gegeven kan worden. De (goede) manieren zullen zich dan vooral onderscheiden in de omvang van de aspecten. Van die omvangen zal het ook afhangen of het niveau „meetkunde begrepen” reeds kort na de Kerstvacantie of b.v. eerst aan het eind van de tweede klas bereikt zal worden. Goed aanvangsonderwijs van grote omvang zal ook reeds rekening houden met andere niveaus, die na het niveau „meetkunde begrepen” bereikt moeten worden. Het gaat mij er speciaal om, dat elk aanvangsonderwijs met *alle* genoemde aspecten rekening moet houden en dat er bovendien een zekere harmonie moet bestaan tussen de „omvangen” van deze aspecten.

Na deze meer algemene beschouwingen kom ik dan tot de vraag

hoe het aanvangsonderwijs ingericht moet worden. Bij de beantwoording van deze vraag zal ik mij beperken tot een uiteenzetting van de wijze waarop de heer Lepoeter en ik te werk gaan aan de hand van ons meetkundeboek ¹⁾. Hierbij zal ik kort weergeven, hoe wij de verschillende aspecten van het niveau „meetkunde begrepen” pogen te bereiken. Hoe wij die aspecten in elkaar laten grijpen, is, lijkt mij, in ons boek gemakkelijk na te gaan.

Bij 1: Als eerste aspect neem ik dan de *probleemaanvaarding*; de aanvaarding van het probleem als denkopgave, als meetkundig probleem. Wat wij bereiken willen is, dat een vraagstuk (of nieuwe stelling) voor de leerling een noodzakelijk verband tussen meetkundige relaties betekent, waarbij hij zich tot taak stelt om dit verband aan te tonen met behulp van bekende relaties (stellingen, definities en logische structuren). *Het relatie-vinden moet het probleem geworden zijn*, moet doel geworden zijn van zijn psychische activiteit.

Een mens denkt alleen, als er een probleem voor hem bestaat. Datgene wat voor ons evident is, roept geen vragen bij ons op. Verwondering, verbazing of nieuwsgierigheid is nodig om een denkproces in actie te doen komen. Evidente beweringen afleiden uit andere evidente beweringen is dan ook geen opdracht, die het kind als denkopgave direct kan aanvaarden. D.w.z. dat de l.l. voor het bewijzen rijp gemaakt moeten worden. En dit betekent dus, dat het *onjuist is te beginnen met een axiomatische opbouw*.

Onlangs hoorde ik de mening verkondigen, dat dit ook in ons land praktisch niet meer gebeurt. Ik kan daar niet over oordelen, maar ik vermoed, dat het er meer op neer komt, dat vele docenten bij het axiomatisch begin één oogje dicht knijpen en tot hun l.l. zeggen: „Nou ja, leer dit nou maar, over een tijdje wordt het wel makkelijker”. Als dit gebeurt, dan acht ik dit nog meer onjuist dan een serieuze poging om de axiomatic „au sérieux” te nemen. Een goed docent kan zijn l.l. misschien nog suggereren dat de gelijkheid van de basishoeken van een gelijkbenige driehoek een probleem bevat, maar een axiomatische opbouw, die niet „au sérieux” genomen wordt, betekent dat de l.l. beginnen met een volkomen verkeerde instelling t.o.v. het vak meetkunde (zo van: „we hoeven het niet helemaal te begrijpen, als we de vetgedrukte regels maar weten”). De meeste l.l. zijn in het begin van de eerste klas toch al veel te sterk op weten en leren en niet op begrijpen en kunnen ingesteld. Elke poging axiomatisch te beginnen is dan ook, naar onze mening, onjuist, omdat hierdoor de probleemaanvaarding in zeer ernstige mate bemoeilijkt wordt.

¹⁾ Wegwijzer in de Meetkunde, deel I, Meulenhoff Amsterdam (1954).

Wij beginnen daarom anders; namelijk met teken-, meet- en constructie-opdrachten (ik kom daar straks op terug). Bij die opdrachten treden dan zo nu en dan relaties op, die voor de l.l. niet evident zijn, maar voor hen een verrassend karakter hebben. We gaan daar dan klassikaal op in. En het is naar mijn mening de onvervangbare waarde van het klassikale gesprek, dat een ervaring, een beleving, daarbij een zó sterke emotionele intensiteit kan krijgen dat een dergelijke ervaring, zoals men dat wel noemt, „sleutel-ervaring” wordt.

Ik wil volstaan met een enkel voorbeeld:

De l.l. moeten de drie zwaartelijnen van een driehoek en de drie middelloodlijnen van een driehoek tekenen. Bij deze opdrachten staat in het boek slechts: Wat merk je op? Nu, ze merken dan op, dat die drietallen lijnen door één punt gaan. Dit is voor hen een niet-evident resultaat. Ze vragen: Moet dit precies kloppen? Bij mij klopt het niet en ik heb toch zo goed getekend. Soms ook: Hoe komt dat? Maar aanvankelijk geeft slechts een deel van de klas blijk iets merkwaardig te vinden, terwijl een ander, groot, deel van de klas het al lang gelooft. Daarom vullen wij de opdracht aan: „Zet je passerpunt nu eens in het snijpunt van de middelloodlijnen en het potlood bij A en teken eens een cirkel, dan moet je eens kijken wat er gebeurt”. Nu ontstaat er in de hele groep al spoedig die merkwaardige ontdekkings sfeer, waarbij de verbazing, verrassing, van de een de ander meesleept. Al gauw is er dan een, die per ongeluk, of ook om het eens te proberen, zijn passerpunt in het zwaartepunt plaatst en tot de ontdekking komt, dat het daar niet gaat. En als men dan zegt: „hij heeft het met het snijpunt van de zwaartelijnen geprobeerd, dat moet je ook eens doen”, dan komt van verschillende kanten: „Dat gaat niet, dat zie je zo, want *dat punt ligt er niet midden boven*. En bij de middelloodlijnen wel; daar ligt het punt er *wel* „midden boven”. Hier ontstaan dus spontane pogingen tot verklaring van een meetkundige relatie. Merkwaardig is dat juist het geval, waarbij het niet klopt, aanleiding wordt tot een begin van verklaring. Ik wil hier nu niet verder op doorgaan en slechts opmerken, dat we daarmee bereikt hebben, dat de hele groep met een zekere verbazing heeft stilgestaan bij een niet-evidente ervaring. Deze sfeer van verbazing ontstaat bij volgende aanleidingen (som van de hoeken van een driehoek, constructies) makkelijker, spontaner en voert steeds meer tot het inzicht, dat het tekenen, meten en construeren vele vragen open laat.

De volgende fase van het aspect „probleemaanvaarding” treedt

op, als wij aan de leerlingen b.v. vragen de hoeken A en D (van fig. 1) te meten en vervolgens een paar figuren te tekenen met *de zelfde bijzonderheden* als deze figuur en daarbij weer de hoeken A en D te meten. „Wat merk je op”, is dan de vraag. Het gaat er hierbij om,

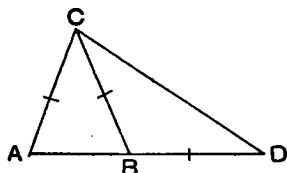


Fig. 1

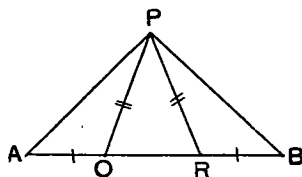


Fig. 2

dat de leerlingen inzien, dat bepaalde meetkundige relaties in een figuur andere meetkundige relaties *met zich meebrengen*, onafhankelijk van de overige vormeigenaardigheden van die figuren. Het verband tussen de verschillende relaties wordt dan als een *noodzakelijk verband* ervaren. We nemen hierbij natuurlijk geen voorbeelden zoals in fig. 2 (meet AP en BP), omdat het resultaat hier

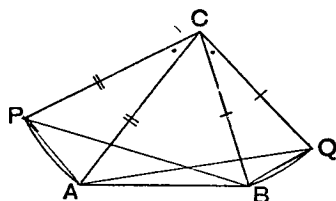


Fig. 3

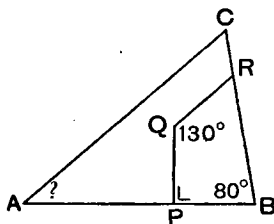


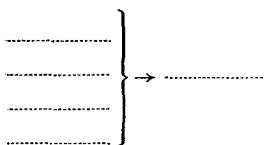
Fig. 4

aanschouwelijk evident is. Het resultaat moet verrassend zijn. Een goed voorbeeld is in fig. 3 getekend, waar AQ en BP gemeten moeten worden.

Als het bestaan van verbanden tussen meetkundige relaties is ingezien, dan is het verklaren van deze verbanden door ze terug te voeren op eenvoudige evidenties (stellingen) een zinvol probleem. De leerlingen zijn dan dus aan het „bewijzen” toe.

Bij 2: Toch zou van zelf-bewijzen nog weinig terecht komen, als wij niet ondertussen, d.w.z. voor de opgaven van het zojuist genoemde soort, het aspect van de *vormgeving*, van het concluderen, hadden ontwikkeld. Van een bewijs kan pas sprake zijn als de leerling in staat is zich zijn gedachtengang bewust te maken en deze te noteren.

De vormgeving ontwikkelen wij met behulp van *hoekberekeningen*. Legt men b.v. het probleem van fig. 4 aan een klas-voor (natuurlijk nadat zij de stellingen over de evenwijdige lijnen en de som van de hoeken van drie- en vierhoek gehad hebben), dan kunnen haast alle leerlingen $\angle A$ uitrekenen. Op hun papier staan dan wat optellingen en aftrekkingen. Vraagt men nu: „Schrijf nu eens netjes en precies op hoe je dat antwoord verkregen hebt”, dan komt daar niet veel van terecht. De gedachtengang is er wel, maar met de vormgeving weten ze geen raad. Waarom is $\angle R = 60^\circ$? Omdat die vier hoeken samen 360° zijn. Toch is het al gauw duidelijk, dat $\angle R = 60^\circ$ uit vier „dingen” volgt en dat de handigste manier om dit te noteren is:



Eist men een meer taalkundige vormgeving, dan onthoudt men de leerlingen juist die ordeningsmogelijkheid (accolade-pijl), die, wegens haar schematiserend karakter, volgens de kinderpsychologie het beste bij de innerlijke behoeften van hun leeftijd aansluit. Het is natuurlijk niet de bedoeling om een aantal schema's uit het hoofd te laten leren. Dit zou zinloos zijn. Het gaat hier om één ding: bewust maken wat een conclusie eigenlijk is.

Waarom gebruiken wij juist de hoekberekeningen voor deze vormgeving?

- a) Omdat dit voor de leerlingen zinvolle opdrachten zijn.
- b) Omdat de oplossing duidelijk uiteenvalt in verschillende stappen (bij elke afzonderlijke stap wordt een hoek berekend).
- c) Omdat de oplossing in de zelfde volgorde kan worden opgeschreven als de gedachtengang. Bij congruentie-vraagstukken kan dit natuurlijk ook wel, maar men krijgt dan meestal een bijzonder onoverzichtelijk bewijs.
- d) Het psychologisch onderzoek van het concluderen voerde tot het resultaat, dat de moeilijkheid van een conclusie nauw samenhangt met het abstractie-niveau van de relaties. De hoeken, die bij ons het denkmateriaal vormen, zijn concreet genoeg; ze kunnen eventueel nagemeten worden. Typisch is bij deze hoekberekeningen dat de leerling aanvankelijk een stap als $CA = CB \rightarrow \angle A = \angle B$ niet als stap ziet. Dit is begrijpelijk, want hij weet dat de gelijkheid van de zijden direct de gelijkheid van de hoeken met zich meebrengt. Deze stappen leveren hem niets nieuws op. Als na enige tijd de

vormgeving, en niet meer het antwoord van de berekening, het doel is geworden, ziet de leerling ook deze „voorstappen” als werkelijke stappen en worden ook deze genoteerd.

In een volgende fase leggen wij figuren voor waarbij niet alle hoeken van de figuur berekend kunnen worden, maar waar met *relaties tussen hoeken* gewerkt moet worden (zie fig. 5). Ik geloof, dat men goed moet inzien, waarom dit moeilijker is. We kunnen wel zeggen: als een pond suiker en een pond zout samen 180 cent kosten, dan kosten een $\frac{1}{2}$ pond suiker en een $\frac{1}{2}$ pond zout samen 90 cent.

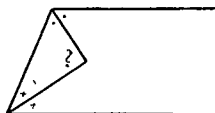


Fig. 5

Daar zijn onze l.l. wel van overtuigd. Maar die suiker- en zoutprijs zijn voor het kind wel onbekende, maar toch bepaalde, getallen (de winkel kent ze), terwijl de hoeken A en B hier begrepen moeten worden als variabelen waar tussen een betrekking bestaat!

Dit soort hoekberekeningen vormen dan een tussenschakel tussen de „concrete” hoekberekeningen, die ik hiervoor besprak en de „bewijzen”, waarbij steeds met relaties tussen hoeken en lijnstukken gewerkt moet worden.

Bij het bewijzen zelf leggen wij meer nadruk dan gebruikelijk is op de formele structuur van de conclusie. Aan de belangrijkste structuren geven we zelfs namen:

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ a = c \end{array} \right\} \rightarrow b = c$$

(ketenschema)

$$\left. \begin{array}{l} a = b \\ c = d \end{array} \right\} \rightarrow a + c = b + d$$

(optelschema)

Ook hier moet niet gedacht worden aan „typen” die de l.l. moeten leren. We zijn van mening, dat deze vormen losgemaakt moeten worden van de incidentele meetkunde-relaties, waarbij ze toegepast worden. Ze moeten gezien en begrepen worden als *algemeen geldige conclusievormen van de gelijkheidsrelatie*.

Bij 3. Bij het aspect van de *begripsvorming* komt de vraag naar voren: Over welke meetkundige ervaringen beschikken onze l.l. aan het begin van de eerste klas? Daarbij denk ik niet aan de meetkundige termen (zoals cirkel, vierkant, enz.), die de l.l. al kennen, maar aan het gehele samenhangende complex van meetkundige relaties, dat vòòr de middelbare schoolleeftijd reeds uit motorische, ruimtelijke, visuele en tactiele ervaringen is ontstaan. Er is ongetwijfeld reeds enig besef aanwezig van evenwijdigheid, van afstand, van congruentie (legpuzzles), van gelijkvormigheid, enz., maar het is niet eenvoudig om de aard en de omvang van dit complex van

grondervaringen te omschrijven. Voor zover mij bekend, hebben alleen *Jean Piaget* en zijn medewerkers dit terrein uitvoerig onderzocht. Het resultaat van deze onderzoeken hebben zij neergelegd in twee omvangrijke werken: „La représentation de l'espace chez l'enfant” en „La géométrie spontanée de l'enfant”. Hun experimenten zijn echter vaak weinig doorzichtig; een duidelijk beeld heb ik uit deze onderzoeken niet kunnen krijgen. Toch zal de eerste begripsvorming aan moeten sluiten bij de spontane meetkundige ervaring van het kind. Ik wil volstaan met een enkel voorbeeld om het belang van deze kwestie duidelijk te maken.

Als wij het hoekbegrip willen verduidelijken met behulp van voorwerpen (stukken karton, b.v.), dan doet zich de moeilijkheid voor, dat er wel een vaag besef „grootte van een hoek” aanwezig is, maar dat aan het voorwerp tegelijk ook andere vage begrippen (oppervlak, maten, gewicht) gekoppeld worden. Het is begrijpelijk dat op deze wijze de grootte van de hoek, de maten van het voorwerp, het oppervlak en het gewicht een complex vormen, dat moeilijk ontleed kan worden. Bij de „grootte van een taartpunt” speelt nu eenmaal, behalve de grootte van de hoek, ook de lengte van de benen (en de dikte) een rol. Bij het hoekbegrip is de onafhankelijkheid van de lengten van de benen juist de centrale moeilijkheid. De hoek als „doorlopen hoek”, als hoek tussen twee richtingen, geeft echter weinig moeilijkheden. Volgens Piaget ontstaat het hoekbegrip inderdaad uit motorische en visuele ervaringen, als hoek tussen twee richtingen en niet, zoals men wel meent, door een of ander abstractieproces als hoek van een voorwerp. Hij beweert dat het hoekbegrip psychologisch primair is en aan de objecten wordt „toegevoegd” (ajouté).

Dit voorbeeld toont, hoop ik, van hoeveel belang een nader onderzoek van de meetkundige grondervaringen voor de didactiek kan zijn.

Wij zijn van mening dat een ruimtelijk uitgangspunt de moeilijkheden juist groter maakt dan nodig is. Wij achten het mogelijk direct aan te sluiten bij de tekenervaringen van het kind. Het kind is vertrouwd met een wereld van figuren en er zijn slechts enkele termen nodig om het min of meer vrije tekenen te herordenen tot de gebonden tekenopdrachten. Dit betekent, dat de intuïtief meetkundige ervaring van de l.l., naar onze mening, voldoende is om de begrippen van de stof van de eerste klas te vormen. Ik moet hier echter aan toevoegen, dat de grondervaringen voor verschillende begrippen uit de verdere meetkunde een onvoldoende basis vormen. Ik denk hierbij aan het verhoudingsbegrip, gelijkvormigheid, oppervlak en natuurlijk ook aan de stereometrie. Wij geven er de voorkeur

aan deze grondervaringen aan te vullen op de momenten dat zij in de meetkunde van belang worden en dus niet reeds in het aanvangs-onderwijs.

Hoewel wij dus niet van ruimtelijke problemen uitgaan, menen wij wel dat de verschillende begrippen gekoppeld moeten worden aan ruimtelijke ervaringen. De meetkundige begrippen en relaties moeten in de wereld der objecten herkend worden om tot het inzicht te voeren dat de meetkunde niet los staat van het gewone leven, maar integendeel juist betrekking heeft op de werkelijkheid. Hoe dit het beste kan gebeuren, lijkt mij geheel afhankelijk van de omgeving, waarin zich de docent met de klas bevindt. Ook hierbij gaat het niet om het aantal voorbeelden en problemen, waarmee meetkunde en buitenwereld gekoppeld worden, maar om de intensiteit waarmee dit verband beleefd wordt.

Bij 4: Het aspect van de kennis.

Wat betreft de begripsvorming bevinden we ons eigenlijk bij de meetkunde in een veel gunstiger positie, dan onze collega's bij de andere vakken. Als een collega aardrijkskunde wil uitleggen wat b.v. het begrip „klimaat” betekent, dan kan hij wel voorbeelden noemen, maar hij kan moeilijk verschillende klimaten laten ervaren; hij zal al spoedig een omschrijving moeten geven. Wij kunnen zeggen: „Kijk, dit is nou een zwaartelijn, en dit ook en dat ook, en dat is een trapezium”, enz. Dit betekent, dat wij in de meetkunde voorlopig kunnen wachten met het geven van omschrijvingen, van definities. Daarmee kunnen wij het, bij alle vakken aanwezige, gevaar voor een verbalistische schijnverwerking vermijden. De termen kunnen eerst begrepen worden, zelfs het eigendom van de leerling worden, vóór we overgaan tot het geven van exacte definities. Voor alle meetkundige kennis geldt hetzelfde: de relaties moeten eerst begrepen zijn, dan pas hoort de formulering te komen.

Als een leerling in een van de hogere klassen op een bepaald moment beweert dat de diagonalen van een p.g.m. loodrecht op elkaar staan, dan zal dit meestal niet betekenen, dat hij niet weet wat een p.g.m. is en wat een ruit is. Hij herinnert zich vaag twee zinnen, die hij vroeger kort na elkaar gehad heeft en hij haalt deze zinnen door elkaar. Hij realiseert zich niet wat hij zegt; het zijn slechts woorden. Willen wij bereiken dat onze leerlingen denkend formuleren, dan moeten wij zeer voorzichtig zijn met „uit het hoofd leren”. Als wij wachten tot de begrippen het eigendom van de leerlingen geworden zijn, dan is enige keren denkend formuleren voldoende om de noodzakelijke kennis vast te leggen.

Bij 5: Bij de *werkgewoonten* (netheid, overzichtelijkheid, goede tekeningen, gegevens noteren, enz.) is het van het grootste belang dat de leerlingen het nut ervan inzien. Speciaal wil ik wijzen op de grote waarde van het gebruik van contrôlemiddelen. De moeilijkheid is daarbij dat we een „bezinning achteraf” wel kunnen aanraden en soms zelfs kunnen opleggen, maar dat de zelfcontrôle pas gewoonte kan worden als de zin ervan is ingezien, d.w.z. als de contrôle reeds enige malen tot de ontdekking van een fout heeft gevoerd.

Bij 6: De *aanpakmethoden*.

Als een leerling bij ons komt en zegt: „dat vraagstuk kan ik niet”, en ook als wijzelf een vraagstuk klassikaal bespreken, dan vertellen wij natuurlijk niet zo maar hoe het moet, maar we stellen vragen. Wij vragen b.v.: Wat moet je eigenlijk bewijzen? Wat kun je nu eens proberen? Hoe bewijst je zoiets? Kijk nog eens naar de gegevens? Enz.. Aan het stellen van deze vragen ligt dan de verwachting ten grondslag, dat de l.l. zich op den duur *zelf* deze vragen zullen stellen. Met „aanpakmethoden” bedoel ik dus deze „richtingen” waarin het probleem bekeken moet worden. Als de docent de vragen stelt, dan komt het er dus op neer, dat hij, de docent, het denkproces van de leerling richt en niet de leerling zelf. Inderdaad is dit een weg om aanpakmethoden te leren: vele l.l. gaan zichzelf deze richtvragen stellen. Maar een groot percentage blijft zonder hulp steken; de docent moet steeds weer het denkproces richten. De vraag rijst dan ook of dit didactisch wel de meest efficiënte weg is.

Wij gaan enigszins anders te werk. Laat ik dit met een enkel voorbeeld toelichten.

Bij het construeren van driehoeken zou men het maken van een analyse-figuur een werkgewoonte kunnen noemen, maar het gebruiken van deze analyse-figuur, d.w.z. (in het begin van de eerste klas) het zoeken in die analyse-figuur naar een driehoek waarvan drie elementen bekend zijn, is een aanpakmethode. Wij laten ze nu eerst een aantal driehoeken intuïtief opbouwen (eenvoudige gevallen dus). Dan geven we een voorbeeld van het zoeken van een driehoek in de analysefiguur en dan volgt een serie vraagstukken, waarbij het gebruik van de aanpakmethode steeds meer *dwingend* wordt. De goede l.l., d.w.z. de l.l. met een goed gevoel voor de bouw van figuren, kunnen nog best een aantal vraagstukken maken zonder de aanpakmethode te gebruiken; zij bouwen intuïtief, en beginnen „vanzelf” aan de goede kant. De zwakke l.l. lopen echter al spoedig vast en kunnen pas weer verder, als ze de functie van de analysefiguur door hebben. Het typische is dus dat de goede l.l. de aanpak-

methode het laatst gaan gebruiken. Wij vinden het van het grootste belang met deze driehoeksconstructies net zo lang door te gaan tot alle l.l. de aanpakmethode werkelijk benutten. Het is voor vele kinderen een merkwaardige ervaring om iets niet „op goed gevoel af”, of „op grond van kennis” te doen, maar door rustig overleg. Zij hebben dan geleerd, dat je „aan een probleem een vraag kunt stellen”!

Bij elke aanpakmethode treden de zelfde verschijnselen op: de aanpakmethode wordt pas bewust gebruikt als de intuïtieve aanpak faalt en als de zin ervan begrepen is.

Bij 7: De ontwikkeling van bepaalde functies.

Handigheid in het gebruik van het tekenmateriaal moet natuurlijk verworven worden. De individuele verschillen zijn bij deze *motorische functie* groot. Vooral vele meisjes moeten heel wat tekenen en construeren. Gebeurt dit niet, dan betekent dit een blijvende handicap voor deze kinderen bij het hele verdere meetkunde-onderwijs. Het gaat bij het inschakelen van de motoriek echter niet alleen om handigheid. Belangrijker nog is dat het meer abstracte denken uit het denkend handelen moet ontstaan.

De kijk op figuren.

Er zijn leerlingen, die een behoorlijke intelligentie bezitten, maar die toch, naar het schijnt, bij het vak meetkunde weinig kunnen presteren. Hun waarneming van de figuren, dat is dus de wijze waarop zij de figuren gestructureerd zien, is te star. Dit gebrek aan kijk op figuren is naar onze mening wel een van de meest voorkomende oorzaken van mislukkingen bij de meetkunde. Toch is het ons gebleken dat ook deze psychische functie, binnen zekere grenzen althans, oefenbaar is. De moeilijkheid is, dat wij mathematici de figuren niet kunnen zien (of niet meer kunnen zien) zoals een kind ze ziet.¹⁾ Het lijkt mij nodig dat, niet alleen bij het aanvangsonderwijs, maar bij het gehele meetkunde-onderwijs de kijk op figuren geoefend wordt. Met deze oefeningen moeten de leerlingen leren om bepaalde deelstructuren in een figuur te herkennen (te isoleren).

Laat ik volstaan met enkele opmerkingen:

a) Het is nodig dat bij alle onderwerpen een grote variatie in figuren optreedt (hoeken en loodlijnen in alle mogelijke standen, driehoeken van alle mogelijke vormen, evenwijdige lijnen in alle mogelijke richtingen), omdat anders een „binding” aan bepaalde standen blijft bestaan.

¹ Vgl.: L. N. H. Bunt, *Paedagogische Studiën* 23 (1946), 178-189, 202-215.. Euclides 22 (1946-1947), 168-190. W. J. Bos, *Euclides* 28 (1952-1953), 12-37..

b) De figuur van twee evenwijdige lijnen gesneden door een derde komt practisch alleen in de theorie voor. Bij toepassingen (in vraagstukken en theorie) komen in het algemeen alleen deelstructuren voor, in het bijzonder de Z-, F- en U-figuren. Het vinden van deze deelstructuren in meer gecompliceerde figuren is een uitermate nuttige oefening.

c) Bij de congruentie eisen speciaal door elkaar liggende driehoeken veel oefening.

d) Het trekken van hulplijnen geeft veel moeilijkheden, omdat de totale waarnemingsstructuur door die lijnen ingrijpend gewijzigd moet worden. B.v.: „buiten de figuur treden” (randverschijnsel), verlengen naar „boven” is moeilijker dan verlengen van de basis; voorkeur voor „symmetrische Gestalten”. (Voor voorbeelden verwijst ik naar de bovengenoemde artikelen.)

Nu heb ik bij de bespreking van de aspecten een belangrijk probleem slechts zijdelings aangeroerd. Ik bedoel het probleem van de *motivatie* van de leerling, d.w.z. van de bewuste en onbewuste motieven, die de instelling van de leerling t.o.v. het vak meetkunde bepalen. Deze motieven vormen een uitermate gecompliceerd en bovendien weinig constant complex; van een „oplossing” van het probleem van de motivatie kan dan ook geen sprake zijn. Trouwens, een oplossing zal meer op paedagogisch dan op didactisch terrein moeten liggen. Toch zullen wij zo veel mogelijk *voorwaarden* voor het ontstaan van echte, op het vak zelf gerichte, belangstelling moeten vervullen, zonder daarbij in een of andere vorm van „Spielerei” te vervallen.

Een van deze voorwaarden is dat het kind de hem voorgelegde problemen ook als problemen kan aanvaarden. Een tweede is dat het verband tussen meetkunde en buitenwereld wordt ingezien (zodat het vak meer zin krijgt). Een derde is: uitgaan van problemen waarbij iets gedaan, iets gemaakt moet worden (tekenen, construeren). Een vierde: we moeten niet beginnen met aanschouwelijk evidente problemen, maar met vraagstukken waaraan iets te beleven valt (mooie figuur of verrassend resultaat). Deze vier punten had ik reeds genoemd.

Een vijfde voorwaarde is dat we rekening moeten houden met de betrekkelijk korte „spanningsboog” van de eerste klassers; 10 minuten over iets piekeren, zonder resultaat, is voor een eerste klasser al lang.

Op den duur moeten de motieven voor de beoefening van de meetkunde in het vak zelf liggen; in het kunnen, in het zoeken en denken, in de schoonheid van eenvoud en perfecte vorm.

Ik heb nu dus uiteengezet, hoe wij bij ons aanvangsonderwijs met de verschillende aspecten van het niveau „meetkunde begrepen” rekening houden. Een belangrijke vraag is nu: in hoeverre wordt op deze wijze dat niveau werkelijk bereikt? Op dit punt wil ik volstaan met het weergeven van enkele indrukken. De probleemaanvaarding wordt bereikt, behalve door enkele zeer jonge (te jonge) leerlingen. De begripsvorming en ook de vormgeving liggen binnen het bereik van alle leerlingen, hoewel, wat de vormgeving betreft, gebrek aan concentratie en slordigheid wel vaak moeilijkheden geven. Ook door een gebrek aan kennis hoeft geen leerling te stranden. Wat het aspect van de aanpakmethoden betreft, is de vraag moeilijker te beantwoorden, omdat in het algemeen niet na te gaan is hoe de leerling precies gedacht heeft. Slechts bij de constructies kunnen wij constateren dat op den duur alle leerlingen geleerd hebben stil te staan bij hun analyse-figuur. Verder heb ik de indruk dat de meeste leerlingen b.v. min of meer bewust naar middelen zoeken. Maar het is begrijpelijk dat de aanpakmethoden van de eerste klassers nog weinig gevarieerd blijven. Dan de ontwikkeling van functies. Met de motorische functie lukt het natuurlijk; zoveel handigheid eist de meetkunde nou ook weer niet. Bij de kijk op figuren is de situatie wel wat anders. Er blijven hier grote verschillen, vooral in het gemak waarmee de verschillende structureringsmogelijkheden overzien worden. Het starre waarnemingsbeeld is wel bij alle leerlingen doorbroken, maar bij een aantal past de waarneming zich nog wat moeizaam aan bij de gedachtengang.

Men zou uit dit betoog misschien de gevolgtrekking kunnen maken, dat een leerling die het niveau „meetkunde begrepen” heeft bereikt, een vraagstuk (waarvan hij de stof gehad heeft) nu zo maar, vanzelf, kan oplossen. Immers: hij begrijpt waar het om gaat, de nodige begrippen en kennis zijn aanwezig, hij pakt het probleem op de goede manier aan, en als het met zijn kijk op figuren ook in orde is, volgt dus „automatisch” de oplossing, die hij dan keurig kan opschrijven. Natuurlijk meen ik dat deze gevolgtrekking onjuist is. Het is namelijk maar de vraag of deze leerling werkelijk de *relaties kan overzien en ordenen*, het verband kan vinden. Dat zal afhangen van wat wij, vaag, zijn „intelligentie” noemen.

Dit betekent dus, dat, naar mijn mening, het aanvangsonderwijs in de meetkunde zo gegeven kan worden, dat alleen een tekort aan *algemene intelligentie* oorzaak kan zijn van mislukkingen. Anders gezegd: Voldoende of onvoldoende resultaten hoeven niet afhankelijk te zijn van een specifieke meetkundige aanleg.

ERVARINGEN VAN EEN DESKUNDIGE BIJ DE EINDEXAMENS VAN HET V.M.H.O.

door

Dr. J. J. DRONKERS

In deze voordracht wil ik gaarne verschillende ervaringen als deskundige bij de eindexamens H.B.S.-B bespreken.

Uiteraard zijn deze gezichtspunten van meer persoonlijke aard en geven ze geen opinie weer van een groep deskundigen. In gesprekken met mededeskundigen heb ik wel gepoogd om mijn ervaringen te toetsen, waardoor mijn persoonlijke opvattingen weer beïnvloed zijn.

Uiteraard streeft de deskundige naar een zo groot mogelijke objectiviteit, maar het subjectieve element in zijn oordeel is nimmer volledig te elimineren.

Ik zal trachten om mijn ervaringen meer in algemeen verband te plaatsen, maar overigens mij beperken tot de wiskunde en mechanica.

In de wet op het Middelbaar Onderwijs worden voor het eind-examen bepaalde voorschriften gegeven. Deze zijn echter van formeel karakter. Om iets naders te weten te komen over de wijze waarop de deskundige zijn taak moet vervullen, moet hij het Reglement voor de eindexamens der Hogere Burgerscholen met vijfjarige cursus nader bestuderen. In enkele artikelen die ik in het kort zal noemen wordt de taak van de deskundige aangeduid.

Zo wordt in art. 11 gezegd, dat de deskundige eveneens het schriftelijk werk moet beoordelen vóór de aanvang van het mondeling examen. Voorts wordt in art. 15 vermeld, dat de examinerator met de deskundige „met wiens medewerking het examen wordt afgenomen” in overleg treedt, omtrent het aan de candidaat toe te kennen cijfer voor schriftelijk en mondeling, waarbij dan bij „verschil van gevoelens” bepaalde regels worden gesteld.

Dit is nogal vaag. Zo wordt verder niets naders gezegd over de wijze, waarop de deskundige „medewerking aan het examen verleent”, behalve dan dat de examinerator verplicht is om bepaalde vragen aan de candidaat te stellen, indien de deskundige daartoe de wens te kennen geeft. Ook is de zinsnede „verschil van gevoelens” tussen examinerator en deskundige zeer voorzichtig uitgedrukt. In ieder geval laat het Reglement de deskundige veel ruimte voor eigen interpretatie.

Wanneer men voor de eerste maal als deskundige zal optreden en nauwkeurig het betrokken reglement naleest, heeft men inderdaad een onzeker gevoel over de wijze, waarop men zijn taak moet vervullen. Het is pas na enkele jaren, dat men een persoonlijke inhoud weet te geven aan de wijze waarop men als deskundige „medewerking aan het examen” moet verlenen.

Het moet voor de wetgever moeilijk zijn om de taak van de deskundige nader te precisiëren, omdat het een zo subtiële materie is. Zo is er bijv. in het Reglement niets gezegd over contrôle op de wijze waarop de examinerator zijn taak vervult. Dit lijkt me ook juist en de wijze van uitdrukken, „dat de deskundige medewerking aan het examen verleent”, lijkt me goed gekozen.

Volledigheidshalve deel ik ook mee, dat bij schrijven van de Staatssecretaris van O.K.W. de deskundige ook tot taak heeft om ervoor te zorgen dat de examens nauwkeurig volgens de voorschriften worden afgenomen en dat bij de beoordeling van de examenresultaten, dezelfde maatstaf wordt aangelegd op alle scholen waar de deskundige als gecommiteerde optreedt. Dit is dus een controlerende taak.

Na deze meer algemene inleiding zal ik eerst spreken over de ervaringen bij de schriftelijke eindexamens.

Aan het eind van de maand Mei ontvangt de deskundige het schriftelijk werk nadat dit door de betrokken leraren reeds beoordeeld is. Daarna begint de moeizame taak om al dit werk zelf te beoordelen. Dan tracht hij, behalve inzicht in de kennis van de candidaat, ook een indruk te krijgen van de persoon van de candidaat,

De ene candidaat is bijv. spaarzaam met woorden en redeneert scherp, een ander drukt zich slordig uit met veel doorhalingen, waarbij de deskundige de neiging heeft om deze ervaring ook in het cijfer tot uitdrukking te brengen. Uiteraard zal de stemming van de leraar, die het werk van zijn leerlingen naziet, in de regel aan veel grotere fluctuaties onderhevig zijn, dan die van de deskundige.

Het is niet te miskennen, dat de laatste in verband met het vele werk dat hij meestal heeft na te zien, met een zucht van verlichting het schriftelijk werk van de kandidaten aan de directeur of rector van de resp. scholen terugstuurt.

Het is zeer belangrijk, dat de deskundige dit werk nauwkeurig bestudeert, omdat dit wel de beste mogelijkheid biedt om op objectieve wijze de kennis en vaardigheid van de candidaat te beoordelen. De candidaat heeft immers in het algemeen voldoende tijd om deze opgaven te beantwoorden. Het feit bovendien, dat alle

candidaten dezelfde opgaven moeten beantwoorden, draagt er toe bij om door onderlinge vergelijking van de prestaties tot een rechtvaardig oordeel te komen.

Naar aanleiding van het schriftelijk werk wil ik nog de volgende opmerkingen maken.

1. Betreffende de normen die worden toegezonden voor de beoordeling van dit werk, ben ik van mening dat hierdoor de objectiviteit van de beoordeling van het schriftelijk examen toeneemt. Ook neemt hierdoor de mogelijkheid toe, dat aan de verschillende scholen dezelfde maatstaf wordt aangelegd.

Ik heb vaak de indruk, dat toepassing van de normen ook voor de candidaat niet onvoordelig is en dat bij het ontbreken van normen de beoordeling van examinerator en deskundige in het gemiddelde wat lager zou zijn.

2. Mijn algemene ervaring is, dat de verschillen in beoordeling van het schriftelijk werk door leraar en deskundige gering zijn en dat de discussie over deze verschillen tot weinig moeilijkheden aanleiding geeft.

Ik ga er nu toe over om mijn ervaringen bij het mondeling eind-examen nader te bespreken. Over dit onderwerp is een heel wat uitvoeriger discussie mogelijk dan over het schriftelijk examen.

Men kan al beginnen met de vraag te stellen of het mondeling examen wel zin heeft. In de wis- en natuurkundige vakken zal men van de noodzakelijkheid van het schriftelijk werk direct overtuigd zijn. Over het nut en noodzakelijkheid van het mondeling examen zal men het wel spoedig eens worden als men overweegt, dat de opgaven van het schriftelijk werk een beperkt terrein van het betreffende vak omvatten en dus verder een meer algemeen onderzoek gewenst is. Verder moet de mogelijkheid bestaan om na te gaan of toevallige omstandigheden de prestaties van de candidaat beïnvloeden hebben.

Het is echter de vraag of bij het huidige mondelinge eind-examen deze beide doelstellingen voldoende tot hun recht komen. Dit antwoord is niet in een paar woorden te geven. Al hetgeen in het vervolg zal worden opgemerkt, dient dan mede om deze vraag te beantwoorden.

Daar het schriftelijk examen door alle kandidaten wordt afgelegd, maar het mondeling slechts door degenen wier schriftelijk werk met zes of lager is gewaardeerd, wordt aan de betekenis van het mondeling eind-examen afbreuk gedaan.

Gaat men immers uit van de overweging dat het mondeling nood-

zakelijk is om meer in het algemeen de kennis van de candidaat te toetsen, dan is een beperking van het mondeling examen tot een deel der kandidaten, inconsequent.

Men moet dus dit examen hoofdzakelijk beschouwen als een mogelijkheid tot eventuele herwaardering van de prestaties van de zwakkere candidaat. Eigenlijk zou het consequent zijn als men van het standpunt uitging, dat het cijfer van de candidaat door het mondeling examen alleen maar kan gelijk blijven of verhoogd worden, want de mogelijkheid van verlaging bij de candidaat met hogere cijfers is niet aanwezig. Vanuit het standpunt van de zwakkere candidaat is het immers unfair, dat zijn cijfer wel kan worden verlaagd.

Men kan echter nog een andere visie op het eindexamen hebben.

Het belangrijkste doel van het examen is om te weten te komen of een candidaat voldoende kennis bezit. Is die onvoldoende dan mag de candidaat geen diploma verleend worden. Met deze opvatting wordt inderdaad het zwaartepunt van het examen verlegd naar de zwakkere candidaat. Men gaat dus dan van de premisse uit, dat de candidaat met een voldoende hoog schriftelijk cijfer geen onvoldoende kennis in dit vak kan bezitten, dat althans de kans daartoe uiterst gering is.

De voorgaande meer algemene overwegingen zijn van belang omdat ze de deskundige een bepaalde richtlijn voor de te volgen werkmethode kunnen verschaffen.

Ik ga nu over tot een nadere behandeling van mijn ervaringen bij het mondeling examen.

Betreffende de waardering van een mondeling examen vindt men twee opvattingen. De grootste groep van examinatoren beschouwt dit examen meer als een middel om de resultaten van het schriftelijk examen te corrigeren, terwijl het kleinste deel dit mondeling examen als meer gelijkwaardig wil opvatten.

Het reglement op het eindexamen geeft echter geen aanwijzing, dat men het mondeling examen als ondergeschikt t.o.v. het schriftelijk examen moet beschouwen. Op de eindexamenlijst zijn beide cijfers gelijkwaardig en wordt het eventueel afgeronde gemiddelde van deze twee als definitief cijfer aanvaard.

Het is van belang dat examinerator en deskundige bij de vaststelling van het cijfer voor het mondeling examen overeenstemming „in gevoelen” hebben over de onderlinge waardering van mondeling en schriftelijk eindexamen.

Dit is b.v. van betekenis bij grensgevallen, als men kandidaten moet beoordelen wier schriftelijk examencijfer even beneden het

vereiste aantal voor een vrijstelling is. Immers de positie van de candidaat met een gemiddelde van 6,4 is zeer verschillend van die met 6,6. Hierbij speelt het toeval een belangrijke rol, want het is niet mogelijk om de kennis van de candidaat tot op 0,1 of 0,2 nauwkeurig te bepalen. Het gelijkwaardig beschouwen van mondeling en schriftelijk eindexamen kan dan tot onbillijkheden leiden in de wijze van waardering van de verschillende kandidaten onderling. In het speciale geval dat zo'n candidaat een slecht mondeling examen maakt, is het dan gewenst om ook de rapportcijfers van het laatste jaar in de uiteindelijke waardering van het mondeling te betrekken.

Bij het vaststellen van de betekenis van het mondeling examen moet men ook rekening houden met de beperkte tijdsduur.

Tenslotte is ook van belang de wijze waarop de examinerator het mondeling examen afneemt. De kwaliteit van een dergelijk examen zal in belangrijke mate het oordeel van de deskundige over de waarde van het mondeling examen beïnvloeden. Het opstellen en afnemen van een goed mondeling examen is geen eenvoudige zaak.

Mijn ervaring is dat in de wijze van examineren nogal verschillen kunnen voorkomen, hetgeen voor het mechanica-examen vaak in belangrijker mate het geval is dan bij het wiskunde-examen.

Het is in het algemeen de gewoonte, dat de examinerator achtereenvolgens eenvoudige vraagstukjes van verschillend model ter oplossing aan de candidaat voorlegt. Afhankelijk van de vlotheid waarmee de candidaat de oplossing bepaalt en de hulp, die hij daarbij van de examinerator ontvangt, wordt dan het cijfer vastgesteld.

Dat het examen wordt afgenomen met behulp van vraagstukjes lijkt inderdaad de beste methode. Dan zullen deze vraagstukjes echter aan verschillende voorwaarden moeten voldoen, nl.:

1. Ze moeten achtereenvolgens moeilijker worden (hetgeen uiteraard een betrekkelijk begrip is).
2. Nagegaan moet kunnen worden of de candidaat een voldoende parate kennis heeft en in het gebruik daarvan een zekere routine.
3. De vraagstukjes moeten elementen bevatten, waaruit kan blijken dat de candidaat inzicht heeft in het betreffende vak en in staat is tot logische redenering.
4. Uiteraard moeten de opgaven niet van dien aard zijn, dat de candidaat met behulp van zijn geheugen belangrijke elementen van de oplossing naar voren kan brengen.

Volgens ervaring is het voor de examinerator niet een eenvoudige taak om bij een groot aantal kandidaten een geschikte groep vraagstukjes samen te stellen. Hierbij is de volgende kwestie van belang. Moet de examinerator bij de opstelling van het mondeling examen rekening houden met hetgeen hij van de candidaat verwacht of moet hij aan alle kandidaten werk van hetzelfde gehalte geven. Dit laatste lijkt de juiste gang van zaken. De praktijk leert echter dat de examinerator de neiging heeft om wel rekening te houden met de capaciteiten van de candidaat, hetgeen tot verschil „in gevoelen” tussen examinerator en deskundige kan leiden, omdat de laatste niet geheel op de hoogte is van deze capaciteiten. Aan de hand van het schriftelijk examen kan hij wel concluderen of men met een goede of een slechte candidaat te maken heeft, maar voor fijnere graduaties als slecht of zeer slecht enz. bestaat die zekerheid niet.

Het is daarom gewenst dat vóór het begin van het mondeling examen, de kwestie of men de candidaat b.v. een verlicht examen zal afnemen, door examinerator en deskundige wordt behandeld.

In ieder geval wordt hierdoor de objectieve beoordeling moeilijker. Immers als de candidaat alle gestelde vragen goed beantwoord, kan men dit toch niet waarden door een 8 bijv. Het feit, dat men een verlicht examen heeft toegepast, moet toch bij het eindoordeel in rekening worden gebracht.

Een verlicht examen biedt wel de mogelijkheid van een betere beoordeling in de groep van de zeer lage cijfers 2, 3 of 4, maar men sluit de mogelijkheid uit, dat de candidaat kan bewijzen, dat hij voor een voldoende cijfer in aanmerking komt.

De hiervoren geschetste werkwijze brengt vaak min of meer een onzuiver element in het examen en de deskundige heeft dan de neiging om op zijn *qui vive* te zijn, vooral als hij te doen heeft met een dubieuze candidaat voor wie de mogelijkheid van niet slagen reëel is. Voor dergelijke gevallen is het zeer gewenst om het examen zo objectief mogelijk te doen zijn.

Daar de leraar-examinerator vaak een welgefundeerd oordeel over zijn kandidaten heeft, zal hij ook bewust of onbewust de neiging hebben om de resultaten van het examen zo veel mogelijk in overeenstemming te doen zijn met die van zijn eigen waardering volgens de rapportcijfers van het laatste jaar. Ook met deze persoonlijke factor zal de deskundige bij het examen rekening moeten houden, waarbij hij zal trachten om de middenweg te bewaren, omdat het resultaat van de rapporten uiteraard van belang is voor de beoordeling van de kwaliteiten van de candidaat.

Soms komt het voor dat de examinerator de neiging heeft om na

een minder goed schriftelijk examen het mondeling examen te vergemakkelijken of te hoog te waarderen, zodanig dat het definitieve examencijfer ongeveer gelijk wordt aan het gemiddelde rapportcijfer. In deze gevallen wordt toch wel aan de objectiviteit van het eindexamen te kort gedaan.

Zodra er dan ook belangrijke verschillen bestaan tussen de prestaties op het schriftelijk en de rapportcijfers, is het gewenst dat examinerator en deskundige vóór het examen de te volgen weg bij het mondeling bespreken, waarbij dan de deskundige suggesties kan doen over eventueel te stellen vragen.

Zoals bekend heeft de deskundige het recht om de werkmethode van de examinerator te corrigeren door deze te verzoeken bepaalde vragen aan de kandidaat te stellen. Mijn ervaring is, dat ook in het geval, dat er geen bezwaren zijn tegen de wijze van examineren, de examinerator het goed vindt, als door de deskundigen enkele vragen worden gesteld. Vaak is het beter dat deze vragen door de deskundige zelf met de kandidaat worden behandeld, daar ze meestal niet helemaal passen in de gedachtegang van de examinerator. Ook in deze vorm verleent dan de deskundige „medewerking aan het examen”.

Door het actief deelnemen van de deskundige aan het examen, wordt het inzicht van deze in de kennis van de kandidaat verhoogd. Maar de deskundige moet wel voorzichtig zijn met inmenging, vooral bij dubieuze kandidaten. De kandidaat rekent erop dat de leraar, die hij goed kent, vragen stelt. Op het optreden van de deskundige zal hij in het algemeen op wat zenuwachtige wijze reageren en deze zal hiermee rekening moeten houden bij het opmaken van de balans van het examen.

In het voorgaande heb ik mijn ervaringen bij het mondeling eindexamen nader besproken. Naar aanleiding hiervan zou ik nog een paar kwesties willen bespreken.

1. Zoals reeds gezegd is, is het moeilijk om een volwaardig mondeling examen van zeer slechte kandidaten af te nemen.

Zo blijkt vaak, dat de resultaten van het mondeling eindexamen van dergelijke kandidaten beter zijn, dan die van het schriftelijk examen. Dan ziet men dikwijls het onverwachte resultaat, dat kandidaten die volgens het schriftelijk examen geen enkel recht op het einddiploma zouden hebben, toch nog tot de discussiegevallen gaan behoren en dan met de hakken over de sloot komen.

In verband hiermede ware te overwegen om kandidaten, die bij

het schriftelijk niet aan bepaalde eisen voldoen, de toegang tot het mondeling te ontzeggen en het diploma niet te verlenen.

Welke deze eisen zouden moeten zijn, wil ik hier in het midden laten. Voor de H.B.S.-B zouden deze eisen vooral op het gebied van de exacte vakken moeten liggen. Hierdoor zou men wellicht tevens bereiken, dat leerlingen met een onvoldoende aanleg voor de exacte vakken, tevoren meer worden afgeschrikt voor het verder volgen van het H.B.S.-B. onderwijs, dan bij de huidige omstandigheden het geval is.

2. De tweede kwestie betreft het feit, dat de candidaat met zeven of hoger geen mondeling examen behoeft af te leggen. Over de consequenties heb ik in het voorgaande reeds gesproken. Men kan zich afvragen, waarom men zeven als grens heeft aangenomen. Om hierover te kunnen discussiëren moet men uitgaan van het hoofddoel van het examen, volgens hetwelk nagegaan moet worden of de candidaat voldoende kennis heeft om het diploma te verkrijgen. Op grond van dit principe is het geen bezwaar indien aan een candidaat volgens het schriftelijk examen een cijfer wordt toegekend, dat hoger of gelijk is aan een zeven, terwijl door bijzondere omstandigheden dit cijfer nog een te lage waardering van zijn kennis in dit vak kan zijn. Bovendien kan de candidaat nog een mondeling examen aanvragen om een betere waardering te verkrijgen.

Anders wordt het indien het cijfer zeven een te hoge waardering zou zijn en door zes moeten worden vervangen. Indien de candidaat voor andere vakken onvoldoenden heeft, kan dit verschil van betekenis zijn. Dit wordt nog meer het geval als de zeven een vijf zou moeten zijn. Uiteraard zal het slechts zelden voorkomen, indien door het mondeling een correctie van twee punten in de waardering zou moeten worden aangebracht. In ieder geval is de zeven voor een vrijstelling wel de laagste grens die men kan kiezen, maar de objectiviteit van het examen zou door het laten vervallen van de vrijstellingen of desnoods acht als grens te nemen zeker toenemen.

3. Tenslotte wil ik er nog op wijzen, dat de leraar-examinator bij het mondeling eindexamen een belangrijke voorsprong heeft op de deskundige. In de eerste plaats doordat hij als examinator optreedt en in de tweede plaats doordat hij de kandidaten kent. In verband hiermede wil ik nog even de kwestie aanroeren of men als deskundige aan een school- of staatsexamen de voorkeur moet geven.

Bij een staatsexamen wordt de candidaat geëxamineerd door personen, voor wie deze een onbekende is, zodat subjectieve maatstaven in de beoordeling van geringere betekenis kunnen zijn. Anderzijds zal, vooral door de korte duur van een mondeling exa-

men, de mogelijkheid van toevallige factoren een grotere rol spelen. De ene candidaat is meer examenminded dan de ander. Hij kan bovendien beïnvloed worden door de persoonlijkheden van examinerator en deskundige, want ook in de wijze van examineren schuilt een persoonlijk element. Dergelijke toevallige invloeden zullen bij een schoolexamen geringer zijn. Bovendien lijkt het ook juist, dat in de examencommissie iemand aanwezig is, die op een zo objectief mogelijke wijze opkomt voor de belangen van de candidaat, wiens positie op een examen, zo in de verte, wel enige overeenkomst heeft met die van een gedaagde in een proces.

Maar ik wil er nogmaals op wijzen, dat dit voor de examinerator zelfbeheersing in zijn sympathie voor de kandidaten vereist en een openhartige samenwerking met de deskundige. Is hieraan voldaan, dan heeft een schoolexamen zeker belangrijke voordelen t.o.v. een staatsexamen.

Ik wil aan het voorgaande nog iets toevoegen betreffende het mechanica-examen. In verband met de toenemende betekenis van het technisch onderwijs in ons land is ook het belang van mechanica als leervak bij het M.O. toegenomen. Dit zou men ook kunnen concluderen uit de schriftelijke examenopgaven van de laatste jaren. Voor het oplossen van de vraagstukken is vaak meer inzicht in de mechanica nodig, dan vroeger het geval was.

In verband met de lage cijfers, die men tegenwoordig bij het schriftelijk eindexamen in de mechanica aantreft, krijgt men de indruk, dat het mechanica-onderwijs nog niet altijd is ingesteld op deze nieuwere ontwikkeling, en dat het onderwijs zich vaak beperkt tot het ontwikkelen van routine in het maken van bepaalde typen van vraagstukken.

Nu wordt het mechanica-onderwijs op de middelbare scholen hoofdzakelijk door wiskundeleraren gedoceerd. Het ligt voor de hand, dat de wiskundeleraar bij het onderwijs in de mechanica een methode volgt, overeenkomstig met het onderwijs in de wiskunde.

Nu is de mechanica in de grond van de zaak een ervarings-wetenschap, hetgeen met de wiskunde in wezen niet het geval is. Vele begrippen in de mechanica ontleen hun betekenis niet zo zeer aan de wiskundige behandeling, maar aan de fysische interpretatie. Uiteraard bestaat er wel een nauwe betrekking met de wiskundige oplossing van het vraagstuk. In verband met het zojuist gezegde is het zeer nuttig om de historische ontwikkeling van de wiskunde en de mechanica met elkaar te vergelijken.

Ik ben er mij van bewust, dat het mechanica-onderwijs op de

middelbare scholen teveel aan de oppervlakte zal moeten blijven, zodat fijnere nuanceverschillen tussen de mechanica en de wiskunde niet tot hun recht kunnen komen.

Als deskundige heb ik wel de indruk, dat de mechanica als ervaringswetenschap door de wiskundeleraren te weinig in het onderwijs naar voren wordt gebracht.

U moet uit het voorgaande niet de conclusie trekken, dat ik van mening zou zijn, dat de mechanica alleen door de natuurkundeleraren zou moeten worden onderwezen. De wijze van onderwijs geven van de leraar beïnvloedt in belangrijke mate de resultaten en deze kwaliteit zal in het algemeen van meer betekenis zijn dan het nadeel van een te formele behandeling van de mechanica.

Voorts lijkt het mij niet juist om de mechanica volledig in het natuurkunde-onderwijs op te nemen, want dan zou vermoedelijk aan de speciale betekenis van de mechanica tekort gedaan worden. Immers het zwaartepunt in het moderne natuurkunde-onderwijs ligt niet bij de klassieke mechanica. Ook in het technisch onderwijs wordt de mechanica als afzonderlijk leervak behandeld en niet als onderdeel van het meer algemene natuurkunde-onderricht. Uiteraard is het een bezwaar voor het natuurkunde onderwijs zelf, indien mechanica en natuurkunde niet door dezelfde leraar worden behandeld.

Tenslotte wil ik nog opmerken, dat de te korte duur van het mondelinge mechanica-examen wel een ernstige handicap is om dit examen als een voldoende tegenwicht van het schriftelijk examen te kunnen beschouwen. In het verleden is dat nog wel eens extra bezwaarlijk gebleken, toen nl. door de inspecteur verzocht werd om de cijfers van het schriftelijk werk te corrigeren op grond van het mondeling examen.

Ik begin nu aan het laatste deel van de voordracht, waarin ik nog het een en ander mededeel over mijn ervaringen in de eindvergadering van het examen. In die vergadering treedt de deskundige niet alleen op als deskundige voor zijn vakken, maar als lid van de examen-commissie. Als zodanig draagt hij mede de verantwoordelijkheid voor het slagen of afwijzen van de kandidaten op grond van de door ieder van hen verworven cijfers. Voor kandidaten die reglementair afgewezen of reglementair geslaagd zijn, is die verantwoordelijkheid gemakkelijk te dragen, ze wordt nl. door de wetgever overgenomen. Het is jammer, dat dit alleen maar voor de vanzelfsprekende beslissingen geldt. Het komt nl. maar weinig voor, dat een kandidaat reglementair wordt afgewezen, vooral tegenwoordig

in verband met de vaak hogere cijfers voor geschiedenis, aardrijkskunde enz., die de kandidaten nu weten te verwerven. Voor de kandidaten voor wie de beslissing niet reglementair kan worden genomen, komt de verantwoordelijkheid daarvan te rusten op ieder der leden van de examencommissie. Van welke maatstaven moet nu een lid van de examencommissie uitgaan voor het nemen van een dergelijke beslissing, want het examenreglement geeft geen enkel criterium voor de discussiegevallen.

In de loop der jaren heeft zich een zekere ongeschreven „techniek” ontwikkelt in het nemen van een dergelijke beslissing. De deskundige die zijn loopbaan aanvangt, staat echter vreemd te kijken bij deze gang van zaken. Door informatie bij mededeskundigen leert hij zo langzamerhand de regels van het spel. Dan is het nog onaangenaam om te ontdekken, dat er nog vrij grote variaties in die regels bestaan.

Daarom vond ik het erg gelukkig, dat Dr. Wansink in een artikel: „Toelaten of afwijzen”, dat verschenen is in het Weekblad voor M.S. en Lycea van 1951, een statistisch onderzoek — hoewel van beperkte omvang — heeft behandeld. Hierdoor krijgt de „ongeschreven techniek” een meer bepaalde vorm en kan men zich in ieder geval op meer objectieve wijze oriënteren.

Met behulp van dit statistische onderzoek tracht Dr. Wansink aan te tonen, dat een bepaalde grootheid, die gelijk is aan het verschil tussen de som der eindcijfers van de 13 eindexamenvakken en de zgn. tekorten op de niet voldoende cijfers t.o.v. het getal 6, in eerste instantie een bruikbaar criterium vormt. Ik zal hierover niet nader discussiëren, alleen wil ik nog opmerken, dat resultaten verkregen uit een statistisch onderzoek ook op statistische wijze moeten worden geïnterpreteerd.

Dr. Wansink komt ook tot de conclusie dat met een belangrijk smallere „discussiestrook” kan worden volstaan dan in de praktijk gebruikelijk is, hetgeen toe te juichen is. Over het vaststellen van de grenzen van de strook, speciaal de bovengrens, kunnen de meningen zeer uiteenlopen. Men kan altijd wel eindexamenlijsten construeren, waarvan de som der cijfers groter is dan de vastgestelde bovengrens en toch een discussie over het al of niet toelaten niet ongewenst lijkt. Op de eindexamens komen soms zeer eigenaardige examenresultaten voor. De consequenties van de keuze van de grenzen kunnen nog nader statistisch worden uitgewerkt door bepaalde overschrijdingskansen te bepalen met behulp van statistisch materiaal, dat nog aanzienlijk uitgebreider moet zijn, dan dat waarover Dr. Wansink beschikte.

In verband met de vele discussiegevallen, die ieder jaar op de

eindexamens voorkomen, lijkt me een uitgebreid statistisch onderzoek zeker nuttig.

Maar hoe het verder ook zij, er zullen steeds moeilijke discussiegevallen blijven.

Moet men nu bij deze gevallen ook rekening houden met bijzondere omstandigheden, zoals ziekte van de candidaat in het laatste jaar, huiselijke omstandigheden enz. Inderdaad loopt men dan het gevaar onbillijk te worden tegenover andere kandidaten. Het standpunt, dat men in deze kwestie inneemt, is meer persoonlijk. Men kan het niemand euvel duiden, als hij met bijzondere omstandigheden geen rekening wenst te houden. Persoonlijk denk ik er niet helemaal zo over; voor oudere kandidaten mag men m.i. weleens bijzondere omstandigheden laten gelden, hoewel men daarmee zeer voorzichtig moet zijn.

Zo staat men als deskundige altijd weer verbaasd over het feit dat kandidaten met een volkomen onvoldoende kennis van de exacte vakken of van het gehele onderwijs op het eindexamen terecht komen; deze hebben dan iedere klas gedoubleerd en bereiken op oudere leeftijd het eindexamen. Het blijkt voor de leiding op een school vaak erg moeilijk om dergelijke leerlingen reeds in een vroeg stadium van de school te verwijderen.

Dit feit is voor mij een ernstig bezwaar om te kunnen instemmen met het voorstel van Dr. Wansink om het eindexamen voor kandidaten, die dit voor de tweede maal afleggen, te verlichten. Dit voorstel vindt U ook in het hiervorengenoemde artikel van Dr. Wansink.

Deze verlichting zou dan verkregen worden door de candidaat op eigen verzoek vrij te stellen van het doen van eindexamen voor die vakken waarbij hij in het voorafgaande jaar minstens het cijfer 7 heeft behaald.

Een tweede bezwaar tegen een dergelijke verlichting betreft het feit, dat dit cijfer zeven of hoger voor de exacte vakken alleen op grond van het schriftelijk examen verkregen is en dus niet een volledig examen heeft plaats gehad.

De beste weg is m.i. om kandidaten, die voor de tweede maal eindexamen doen en ook dan vrij zwak blijken, bij het mondeling examen zoveel mogelijk goede kansen te geven, eventueel door het examen wat te verlengen en invloeden, die hun prestaties belemmeren, als zenuwachtigheid enz. zoveel mogelijk te elimineren.

Ik wil ook nog iets zeggen over de bekende bepaling in het Reglement voor eindexamens:

„Indien de deskundigen eenstemmig zijn in hun oordeel omtrent

het al of niet slagen van een candidaat, wordt dienovereenkomstig beslist". Persoonlijk zou ik deze bepaling niet graag missen. Ik kan me in mijn praktijk als deskundige niet één geval herinneren, waarbij zonder éénstemmigheid van de zijde der deskundigen, de candidaat werd afgewezen door de meerderheid der examencommissie; daarentegen zijn er wel gevallen voorgekomen, waarbij door de deskundigen de candidaat werd afgewezen zonder meerderheid in de vergadering. Wellicht heb ik het wat ongunstig getroffen.

Ik heb de indruk, dat vele leraren-examinatoren op de vergadering de candidaat alleen beoordelen naar de prestaties in hun eigen vak, óf in het verband van de talengroep óf in de groep der exacte vakken.

Ik ben er mij van bewust, dat de genoemde bepaling ook het verantwoordelijkheidsgevoel van de examinatoren kan verzwakken. U zult deze bepaling moeten zien als een noodzakelijk tegenwicht tegen de subjectiverende invloed van het schoolexamen, waarover ook in het voorgaande gesproken is. Vanuit menselijk oogpunt kan men niet anders verwachten, dan dat de leraren zoveel mogelijk de belangen van hun kandidaten behartigen en daarbij is, zonder dat er van opzet sprake is, de mogelijkheid van een te ver gaan steeds aanwezig. Hierbij moet men ook in aanmerking nemen, dat de invloed van de examinerator op het mondeling examen groot is.

Resumerende zou ik het volgende willen concluderen:

1. Het is gewenst om kandidaten, die een zeer slecht schriftelijk eindexamen gedaan hebben, niet tot het mondeling toe te laten.
2. Beperking van de discussiegevallen, waarbij ik dan speciaal denk aan het verhogen van de grens voor de reglementair afgewezenen.
3. In het Reglement op het Eindexamen uitdrukkelijk op te nemen, dat aan de deskundige toegestaan wordt, dat hij direct vragen mag stellen aan de candidaat. Het huidige Reglement spreekt zich daarover niet duidelijk uit.
4. Het verlengen van het mondeling eindexamen mechanica tot minstens twintig minuten.

Tenslotte lijkt het me gewenst, dat aan de leiding van een school voor middelbaar onderwijs bepaalde bevoegdheden gegeven worden, waarbij aan leerlingen het volgen van het onderwijs op die school niet verder wordt toegestaan, in verband met zeer onvoldoende prestaties. Indien de ouders dit toch wensen, zou een dergelijke leerling nog eens op een andere school zijn geluk kunnen beproeven. Deze maatregel staat echter slechts gedeeltelijk in verband met het besprokene over het eindexamen.

De zojuist geformuleerde wijzigingen zijn van bescheiden karakter.

Blijkens recente publicaties wordt ook wel aan zeer ingrijpende wijzigingen in de vorm van het huidige eindexamen gedacht. Hierbij heeft men dan in min of meerdere mate Angelsaksische voorbeelden voor ogen. Hoewel dit onderwerp nu niet ter sprake is, zou ik over de betekenis van het invoeren van diepgaande veranderingen in het eindexamen, gaarne een paar algemene opmerkingen willen maken.

Het onderwijsstelsel in oude cultuurlanden, zoals Nederland, is in een langdurig historisch proces aangepast aan volksaard en maatschappelijke ontwikkeling. Uiteraard vraagt de huidige maatschappelijke ontwikkeling met zijn specialiserende tendenzen een voortdurende aanpassing van het onderwijs, speciaal in de exacte vakken. Dit proces is vermoedelijk nog niet geëindigd.

Het feit, dat hier drie talen moeten worden onderwezen, is een zwaardere belasting van het onderwijs dan in de Angelsaksische landen, waar het talenonderwijs beperkter is.

Uitbreiding van de verschillende schooltypen, zoals reeds heeft plaats gehad met b.v. de splitsing in H.B.S.-A en H.B.S.-B en waardoor de speciale begaafdheden van de leerlingen beter tot hun recht komen, lijkt inderdaad de beste oplossing.

Als de leerlingen de school verlaten, gaan ze naar de Universiteit of komen ze in het maatschappelijk bestel terecht. Deze beiden bepalen de eisen, waaraan de bezitters van een bepaald diploma moeten voldoen, terwijl de waarde van het eindexamen door jarenlange ervaring getoetst is. In de realiteit van de maatschappelijke functie is men zich terdege bewust van de betrekkelijke waarde van het diploma en houdt daar rekening mede bij de verdere opvoeding in die functie. Er moet echter een basis zijn, waarop de verdere ontwikkeling kan geschieden.

Alle wijzigingen, die men in de vorm van het huidige eindexamen zal willen aanbrengen, zullen in nauwe relatie met de maatschappelijke richtingen, waarin de bezitters van de diploma's hun weg zullen vinden, moeten geschieden.

Het is uiteraard een heel andere vraag of men op didactisch gebied in het huidige onderwijs belangrijke wijzigingen kan aanbrengen en ik geloof, dat in dit opzicht zeer vruchtbare ontwikkelingen gaande zijn.

HET INTEGRAALBEGRIIP

door

DR. P. G. J. VREDENDUIN

1. We gaan ervan uit, dat de leerlingen de differentiaalrekening achter de rug hebben. Hoe kunnen zij nu op natuurlijke wijze met het integraalbegrip vertrouwd raken? De moeilijkheid is gelegen in de omstandigheid, dat zij moeten leren, wat een primitieve functie is, hoe een integraal gedefinieerd wordt (b.v. door middel van een oppervlakte) en dat deze integraal ook op te vatten is als limiet van een som. Een mathematisch sluitend geheel hierover opstellen is niet zo moeilijk. Maar hoe kunnen we dit geheel zo construeren, dat de leerling tevens de samenhang tussen deze begrippen gedemonstreerd wordt?

Uit de differentiaalrekening weten we, dat als de afgelegde weg als functie van de tijd gegeven is, de snelheid hieruit door differentiatie verkregen kan worden. Het ligt voor de hand nu de tegenovergestelde vraag te stellen: gegeven is de snelheid als functie van de tijd; bereken de afgelegde weg. Vanzelf komen we zo op de vraag: vind de oorspronkelijke functie, als de afgeleide gegeven is. Het antwoord blijkt niet eenduidig bepaald; de oorspronkelijke functie is slechts op een additieve constante na bepaald. Dat behoeft ons niet te verbazen. Als we van een stoffelijk punt, dat zich langs een weg beweegt, alleen de snelheid op elk tijdstip kennen, dan is daarmee niet bepaald, waar het punt zich op een bepaald tijdstip bevindt. Als we op één tijdstip weten, waar het punt zich bevindt, dan weten we het ook op alle overige tijdstippen. En als we aannemen, dat het zich op dat ene tijdstip 1 meter meer naar rechts bevond, dan zal het zich op alle overige tijdstippen ook 1 meter meer naar rechts bevinden. Daarmee is de additieve constante verklaard.

2. Onderstel, dat we de snelheid van een stoffelijk punt als functie van de tijd kennen: $v = f(t)$. Dan weten we, dat de afgelegde weg s voorgesteld wordt door een functie $F(t)$, waarvoor geldt

$$F'(t) = f(t).$$

De functie $F(t)$ is op een additieve constante na bepaald.

Waar het punt zich op een bepaald tijdstip bevindt, kunnen we

dus uit de gegevens niet afleiden. Wel kunnen we er echter uit vinden, over welke afstand het punt zich in een bepaald tijdsverloop verplaatst heeft. Is b.v. $v = at$, dan is $s = \frac{1}{2}at^2 + c$. De constante c zouden we weten, als we wisten, waar het punt zich op een bepaald tijdstip, b.v.

$t = 0$, bevindt. Al weten we dit niet, dan kunnen we toch zien, dat het punt zich van $t = 0$ tot $t = 1$ over een afstand $\frac{1}{2}a$ verplaatst heeft en van $t = 1$ tot $t = 2$ over een afstand $\frac{3}{2}a$. De grootte van de verplaatsing is dus bepaald.

Maken we het voorgaande los van de specifiek mechanische inhoud, dan vinden we het volgende. Laat gegeven zijn een functie, b.v. $2x$. Deze is de afgeleide van elk van de functies $x^2 + c$. In fig. 1 zijn de grafieken van enige van deze functies getekend. Neem nu twee willekeurige waarden van x , b.v. $x = 1$ en

$x = 2$. We zien dan in de figuur, dat al deze functies tussen $x = 1$ en $x = 2$ evenveel toenemen. Ook formeel is dit direct duidelijk, want deze toename is gelijk aan

$$(2^2 + c) - (1^2 + c) = 3.$$

Hoe we c ook kiezen, d.w.z. welk van de functies $x^2 + c$ we ook beschouwen, altijd blijkt de toename dus gelijk aan 3 te zijn. We noemen nu 3 de integraal van de functie $2x$ tussen de grenzen 1 en 2.

Zo komen we tot de volgende definitie:

De integraal van een functie $f(x)$ tussen de grenzen x_1 en x_2 is de toename van een willekeurige functie $F(x)$, die $f(x)$ als afgeleide heeft, tussen x_1 en x_2 .

De betekenis van de begrippen primitieve functie en integraal

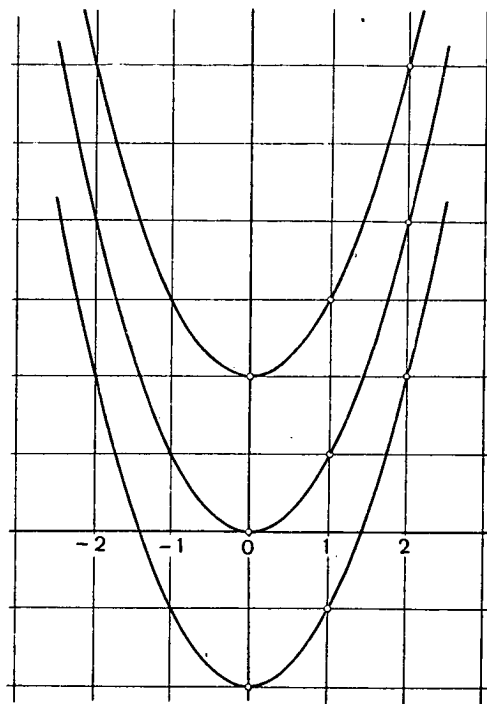


Fig. 1

en het verband ertussen is nu zeer duidelijk. Een primitieve functie van $f(x)$ is een willekeurige functie, die $f(x)$ als afgeleide heeft. Een integraal is de toename van zo'n functie tussen twee waarden van x .

Of in mechanische termen: als de snelheid gegeven is als functie van de tijd, dan is de afgelegde weg een primitieve functie hiervan, de grootte van de verplaatsing tussen twee gegeven tijdstippen een integraal er van.

3. Nu komt nog het derde probleem: een integraal is op te vatten als de limiet van een som. Op eenvoudige wijze volgt dit uit het voorgaande. Een integraal is de toename van de oorspronkelijke functie tussen gegeven grenzen. Welnu, verdeel het interval tussen deze twee grenzen in een aantal gelijke delen en ga over elk deel afzonderlijk de grootte van de toename van de functie na. In eerste benadering is dat telkens het produkt van de lengte van het deelinterval en de afgeleide in het beginpunt. Sommeer deze uitkomsten, neem de limiet voor onbegrensd toenemend aantal deelintervallen en we hebben de toename van de functie gevonden. Een integraal blijkt dus inderdaad op te vatten te zijn als limiet van een som.

4. Het merkwaardige van deze behandelingswijze is, dat totnogtoe niet gesproken is van het feit, dat een integraal ook gezien kan worden als grootte van een oppervlak. Ik vind dit een groot voordeel, want het verband tussen een integraal en een oppervlakte lijkt mij van zeer secundair belang en erg ongeschikt om de leerlingen een idee te doen verkrijgen van wat een integraal nu eigenlijk voorstelt. En het is juist de, nu vermeden, overgang van primitieve functie op integraal als oppervlakte (of andersom), die het integraalbegrip zo moeilijk te verteren maakte.

5. Nu volgen toepassingen van het integraalbegrip. En bij deze toepassingen is de opvatting van een integraal als limiet van een som het belangrijkste. Een oppervlakte kunnen we als limiet van een som schrijven, een inhoud eveneens. Hier kunnen we dus het integraalbegrip gaan toepassen. En dit is dan een natuurlijk uitvloeisel van de reeds behandelde theorie.

Maar ook elders moeten we vaak limieten van sommen bepalen. Ik denk hier aan problemen als het vinden van de potentiaal in een elektrisch veld, het bepalen van de energie van een geladen geleider, de definitie van arbeid. Als men het voorgaande begrepen heeft, dan

zal men het verband tussen deze problemen en het integreren doorzien en niet slechts een formele analogie gewaarworden.

6. En ten slotte wil ik U graag verklappen, hoe ik aan het bovenstaande gekomen ben. Ik heb altijd de integraalrekening op de traditionele manier behandeld: eerst de primitieve functie, daarna de integraal als oppervlakte en, o mirakel, het klopte altijd weer precies. Men vond het moeilijk, ik kon mij dit best begrijpen. Totdat onlangs tijdens de behandeling een intelligente leerlinge mij de volgende vraag stelde: „Ik zie best in, dat het allemaal klopt, maar vertelt U nu eens, wat is toch eigenlijk het verband tussen die primitieve functie en die integraal.” Ik heb even heel erg naar adem moeten happen. En daar is dit artikeltje uit voortgesproten.

THE FUNCTION OF MATHEMATICS IN MODERN SOCIETY AND ITS CONSEQUENCE FOR THE TEACHING OF MATHEMATICS ¹⁾

by

D. VAN DANTZIG

Professor in the Theory of Collective Phenomena
at the University of Amsterdam.

CONTENTS

1. Society's growing demand for mathematics.
2. Pure and applied mathematics.
3. Postwar-development in the Netherlands.
4. Flood prevention problems.
5. The social status of mathematicians.
6. Traditional teaching of mathematics.
7. Desirability of a new orientation of mathematical teaching.

1. Society's growing demand for mathematics.

The degree to which mathematics are applied to other sciences and non-scientific social activities is rapidly increasing, in particular during the last decades: any convenient mathematical model for it would have to have positive derivatives, at least of the first and second order.

Firstly the number of fields to which mathematics are applied increases. To the classical fields: geometry, astronomy and geodesy, mechanics, physics, technical and actuarial sciences, later biology, economy and psychology have been added, at first in the form of biometry, econometry and psychometry, mostly using statistical methods. More recently such methods are more and more applied to industrial planning, to medicine, biochemistry, physiology and pharmacology, to sociology, cryptology, etc. Also philosophy and even linguistics (mechanical translation), get slowly interested in

¹⁾ Report number 1 of the National Committee of the I.C.M.I. in the Netherlands, presented in the session of September 8 th 1954 to section VII of the International Congress of Mathematicians at Amsterdam.

applying mathematical and symbolic logical and semantical methods. It is a curious fact that, although often a first initiative was taken by mathematicians, it is on the whole not due to mathematical propaganda and advertising, but rather to a genuine autonomous demand from the side of the workers in these different fields, which feel more and more helpless if they cannot handle the mathematical methods themselves. Only a few domains have abandoned the use of mathematics, in particular music and the pictorial arts (perspective). Whether to their advantage or not, more competent judges may decide. Among the fields which have hardly begun to make use of mathematical and logical methods occurs, surprisingly, the teaching of mathematics.

Also the number and the variety of applications of mathematics have greatly increased. Extensive new branches have been created which are wholly or mainly based on mathematical methods. As such we mention, leaving aside the classical fields of physics and astronomy ²⁾: Design of experiments, in particular the analysis of variance, at first mainly used in agriculture, later also in many other fields; Renewal theory in mathematical population theory; Theory of risk and net retain in insurance; Symbolic logic and semantics; Biomathematics; Factor analysis in psychology, etc.; Quality controll; Mathematical theory of communication; Information theory and cybernetics; Econometric decision theory, based on the theory of strategic games, in particular linear programming; Periodogramanalysis and time series theory; Theory of statistical decision functions, etc. etc.

Although we might not claim that the new theories in all cases yield a practical output equivalent to their mathematical difficulty, the judgment of the workers in these fields considers them on the whole as beneficial to their particular domain.

All this requires a re-orientation of the teaching of mathematics, in particular in secondary schools, towards which the present enquiry of CIEM may be considered as a decisive step.

2. Pure and applied mathematics.

Until a few decades ago applied mathematics was considered by the majority of mathematicians as second rank mathematics, notwithstanding the fact that almost all mathematicians till Laplace and Gauss, and since that time e.g. Riemann and Poincaré

²⁾ Neither this nor any other of the further lists has any pretention of completeness.

derived some of their most important results from the applications. This opinion expresses itself already in the word "pure" which is a (positive) "appraisal" according to Charles Morris' terminology, and is probably related to the then preponderant idealistic philosophy, mostly from German origin. It overrates greatly some special features of so-called "pure" mathematics, which, apart from a few branches like number theory and topology, almost all originated humbly from old applications (e.g. the theory of — in particular partial — differential equations and integral equations; Bessel-, Legendre-, and most other special functions). Applied mathematics seems to be like wine: it becomes pure just in course of time. With regard to mathematical rigour and generality modern applied mathematics need not be a second to the pure brand. In fact, mathematical rigour is often overdone in modern applications. A scientific theory then becomes a counterpart to the king's palace in the story of Alladin's lamp: if a problem belongs to a scientific theory containing many points of considerable doubt and rough approximations, then to give a perfectly rigorous proof of existence of its solution in the mathematical part is like building up one window of the palace wholly out of diamonds and rubies, whilst leaving all other ones made from plain glass.

3. *Postwar development in the Netherlands.*

Before the last war the development of "pure" mathematics was mainly centered in the mathematical departments of the universities, the Technical University at Delft and the Royal Academy of Sciences, and in the „Wiskundig Genootschap" (Mathematical Society), whereas "applied" mathematics was mainly developed in some other departments of these institutions, in the agricultural school at Wageningen, in some governmental or semi-governmental institutions like the Central Bureau of Statistics (C.B.S.), the National Aeronautic Laboratory (N.L.L.) and the Royal Meteorological Institute (K.N.M.I.), and in the laboratories of some big industries like Philips (Eindhoven) and the Shell Laboratories. There were some links between "pure" and "applied", but only a few.

Since the war the recent development in other countries, sketched briefly above, has had a considerable response in the Netherlands also. Several initiatives were taken just after the liberation of our country (which occurred at the very last moment only, on May 5th, 1945), although some of them came only slowly into effect, partly because we had been cut off from almost all scientific activity during

the latter part of the German occupation, and could not obtain foreign literature till about 1946—1947 or even later.

In the first place the number of professorships in mathematics was increased by roughly 50 %, and they were made more effective by the appointment of lecturers, instructors and assistants. Also the universities created some (mostly minor) positions for the instruction in mathematical education for future teachers. All this, however, is not characteristic for mathematics alone.

Further, shortly after the war, a new chair in the "Theory of Collective Phenomena" (mathematical statistics), one for (mathematical) logic, two special professorships in the actuarial sciences and one in applied mathematics were founded at the University of Amsterdam. Later also professorships for statistics at the University of Groningen, the „Free University" at Amsterdam and the Technical University at Delft, a chair for mathematical economy and econometry at the University of Amsterdam, and a second professorship in the same field at the Economic School at Rotterdam came into being, whereas the Technical University at Delft recently devoted one of its mathematical chairs completely to applied mathematics with the intention of creating a new kind of instruction viz. of "mathematical engineers". Also some of the chairs of mathematics in the universities are partly devoted to applied mathematics and new ones are being or going to be created.

Moreover we mention a few new institutions like the governmental Central Planning Office, the department for (computational and statistical) elaboration of observational results of the (governmental) Organization for Applied Scientific Research (T.N.O.) and the Mathematical Centre.

Finally some societies were founded which are closely related to mathematics, like the Society for Statistics (which has a special section for mathematical statistics, and which amalgamated later with an older and less mathematically minded society), the Society for Logic and Philosophy of Science and the Benelux Region of the Biometric Society.

Also several research- and discussion groups came into being. We mention those on

- Asymptotic expansions;
- Computing methods and machines;
- Communication and information theory;
- Biophysics and Cybernetics;
- Econometry;
- Application of Statistics in Industry;

Standardization of statistical terms and symbols;
 Statistical extreme value problems (in connection with the flood-prevention);
 Storm surges on the North Sea (ditto);
 Teaching of mathematics;
 Renewal of education.

The Mathematical Centre, mentioned above, was founded in February 1946, on the initiative and according to the plans of three "pure" mathematicians. Its purpose was: to further the development of applied as well as pure mathematics in the Netherlands, and, in particular to bridge the gulf between mathematics and its applications by, on the one hand, inducing mathematicians to bring forward their results in a form easily understandable by "appliers" with scanty mathematical training, and, on the other hand, teaching such "appliers" the special mathematical results and techniques they have need of. Its leading principle may be described as "multi-lateral cooperation". From the very beginning the Mathematical Centre enjoyed enthusiastic support from many sides, in particular also from the government. It rapidly gained impetus, in particular since the computation department and the statistical consultation got leaders who in a few years became prominent in their fields. It is a foundation, independent of the universities, supported by the government (through its organizations for Pure and for Applied Scientific Research), the municipality of Amsterdam, and, to a small extent, by some big industries. At present it has a personnel of about 80, some of these half-time graduate students.

It has four departments, cooperating closely together, viz. for
 Pure mathematics,
 Applied mathematics,
 Statistics,
 Computation,
 and a threefold task, namely:
 Research,
 Education,
 Consultation.

The educational task is performed only in such fields and such cases which are not covered already by the universities. It is done by: a) organization, preferably in cooperation with other institutions, of colloquia, research and discussion groups, b) courses for non-mathematicians, c) training mathematical students in consultative work, d) methodological statistical instruction of non-mathematical research workers by consultation and by methodological sections

in statistical reports on concrete problems. Consultation is done partly on a non-profit cost-price basis, partly (in particular for university laboratories all over the country) free of charge. It comprises often extensive elaboration of observational results, testing of observational evidence, design of experiments, computing, etc.

Research is done in everyone of the four departments, and comprises also design and construction of computing machines.

In order to give an impression of the variety of subjects treated, a list has been added in the appendix of a part of the subjects dealt with in consultation during 1953 and 1954.

4. *Flood prevention problems.*

On February 1st 1953 the South Western part of the Netherlands, and, to a lesser extent, parts of England and Belgium, were struck by a flood disaster, which exceeded by far any one hitherto observed. It cost in our country over 1750 human lives and far over 10⁹ guilders of material losses. On the other hand it gave rise to one of the finest examples of international helpfulness known in history.

In order to find out the best methods for preventing, inasfar as possible, a similar disaster in future, the government immediately appointed a committee, consisting of the most prominent hydraulic engineers, called the "Delta-committee", because its realm is the delta, formed by the rivers Rhine, Meuse and Scheldt.

The reason why all this is mentioned in this report is the fact that it gave rise to a number of mathematical and physical problems. For solving them the Δ -committee appointed as advisory institutions: the meteorological institute K.N.M.I., the hydrological laboratory of the Technical University at Delft, the (governmental) Central Planning Bureau and the Mathematical Centre.

Parts of the mathematical problems are being solved in different sections of the Ministry of Public Works itself, in the K.N.M.I., the Central Planning Bureau and the Mathematical Centre. Results and plans for further research are exchanged and discussed in two of the working groups mentioned above.

The problems fall into three groups:

1. statistical extrapolation problems concerning the frequencies of excessively high floods;
2. econometric decision problems, concerning the optimal height to which dikes must be heightened, taking account of their cost and of the damage caused by breaks;

3. mathematical physical problems concerning the question, which types of depressions moving over the North Sea are the most dangerous, and which heightening of sealevel they may cause.

The third group of problems is of the classical type of applied mechanics (partial differential equations with boundary conditions, reducible to integral equations), though showing many complications. The first two groups of problems are not difficult from a purely mathematical point of view, but require a good deal of "practical logic" to avoid many pitfalls into which one might easily step. A survey of results obtained on the first and third group of problems was given by the present author before the International Congress of Mathematicians at Amsterdam; one about the second group before the European meeting of the Econometric Society at Uppsala.

Together they form one of the most important applications of mathematics to large scale government decisions, ranging over a few centuries in time and a few milliards ("billions") of guilders, (or using the standardized physical terminology: giga-guilders) in the Netherlands.

They also form an example of the sometimes insufficiently stressed fact that modern society has a great need, not only of large scale computing, but also of "large scale mathematics".

5. *The social status of mathematicians.*

The social position of mathematicians has undergone some change. Before the war a student of mathematics, unless he was exceptionally brilliant, had practically no other professional choice than becoming a teacher in a secondary school, unless he was willing to become an actuary. The latter prospect was not very attractive for most students — except from a purely remunerative point of view — as the mathematics to be used remained on a rather low level, whereas one had to absorb a good deal of practical economical knowledge, for which no educational base was present. This has been changed now, since the university instruction in actuarial science came into existence, which implies an education in the fundamentals of economics.

Moreover, more jobs in applied mathematics, and especially in statistics became available. At present, the study of statistics can be combined with the actuarial one, a combination which is rather attractive to some students. The increased number of possibilities in industry, together with those in universities (from professorships to assistantships) and in other institutions has, like in other countries,

lead to some shortage in manpower in mathematics, also with respect to teachers. This, of course, is also caused by the customary overburdening of teachers by too big classes and too many lessons, and by their payment which until recently was very bad, but has improved considerably since. A further considerable improvement would be obtained if a "sabbatical year" for teachers could be obtained, not, of course, for taking a "busman's holiday", but with the special purpose that they may from time to time (while retaining, of course, their salaries) revisit a university, in order to renew their knowledge of modern mathematics, to get acquainted with modern applications of mathematics, and to do some scientific work. Such a large scale "teaching of teachers", however, is still far out of sight, and, anyhow, diminution of classes and teaching-hours is primordial.

6. *Traditional teaching of mathematics.*

With regard to some critical remarks on the traditional teaching of mathematics in secondary schools, which will be made now, it must be remarked before that they apply to the situation in the Netherlands, but that the author has some strong misgivings that 1° the situation in many other countries is not essentially different, that 2° probably analogous remarks could be made about several other subjects of teaching, and 3° that the teachers in secondary schools are not to be blamed for it, as they usually had no opportunity, at least since the time of their study, to become acquainted with the many uses of and needs for mathematics in modern life.

The trend of the following remarks is to state that the teaching of mathematics (we shall further omit the words "in secondary schools") must in several respects be considered as superannuated and badly adapted to modern needs.

This holds in particular for the choice of subjects. These belong in Dutch schools to: Euclidean geometry in the plane and in space, elementary algebra, plane trigonometry, descriptive geometry, and in some schools the elements of analytic geometry in the plane and/or of the calculus. With exception of the two lastmentioned these fields are treated to such an extent that, with a few exceptions, neither a modern "producer" nor a "consumer" of mathematics ever meets the larger part of them. So e.g. in plane geometry some of the congruence theorems of triangles (and practically all of those added as exercises), the concurrence of perpendiculars in a triangle and of bisectors, the formulae for the lengths of perpendiculars and medians, the properties of quadrangles inscribed or circumscribed

to a circle and of the regular pentagon and decagon are rarely met with in later life. Similar remarks hold for the other branches of mathematics. E.g. in trigonometry the only things one regularly meets later are: the periodicity and addition properties of the trigonometric functions and their consequences (e.g. duplication and bisection formulae) and the cosine rule and, a few times, the sine law. Similar remarks hold for the other fields. There are, of course, exceptions, where one meets one of the other subjects, but, unless one works in very special fields like geodesics, nautics, astronomy, etc., these are rare. Moreover, most of the subjects which a professional mathematician meets in later life, he meets in a quite different context, in which it is far easier for him to understand them than by way of the elementary treatment (e.g. the formulae for the volume of a sphere, a spherical segment and a spherical sector, which belong to integral calculus rather than to geometry).

Considering on the other hand the needs of a modern "consumer" of mathematics, which vary, of course, over the several branches of sciences one can say that they contain: 1° a clear idea of the testability or non-testability of a statement, 2° a clear idea of the concept of a mathematical model for some part of empirical science, and of the uses which can and which can not be made of it; 3° a good working knowledge of using graphs and algebraic computing, to such a degree that it becomes a natural habit to translate a problem in symbols (this is often not obtained because of the "fear of mathematics", often raised by the excessive amount of exercises made); 4° the fundamentals of statistics and probability theory; 5° a few elementary methods of testing the most frequently occurring hypotheses (e.g. sign test, rank correlation test, Student's test, Wilcoxon's test); 6° a working knowledge of elementary calculus, etc.

Teachers sometimes seem to believe that a subject should not be taught, unless it can be taught in relatively great completeness and in a rigorous way, containing proofs of all statements. The consequence of this opinion, however, is that many scientists are prevented to obtain a good working knowledge of statistics and differential calculus, if they are not (or not thought to be) capable of grasping the so-called "exact" concept of a limit. It also disagrees with the attitude of all classical mathematicians up to Riemann, for whom it always was more important to *find* new results and new methods ("rules"), than to prove them. This reminds of the English school-boy having to learn "Euclid", and saying to his teacher: "Bother the proofs. Tell me the results!"

An other prevailing opinion holds that the secondary education should restrict itself to "pure" mathematics, without bothering much about the applications. This, however, disregards the fact, mentioned already before, that most of "pure" mathematics is old "applied" mathematics. In particular this holds for school mathematics, with the exception of geometry in its Euclidean form: logarithms were introduced purely as a computational method; the solution of algebraic equations by means of roots is due to the fact that roots (from positive numbers) were originally almost the only one-valued functions one could master (this same fact gave rise later to Galois' theory; from a modern computational point of view it is without the slightest importance wheter an equation can be reduced to successive extractions of roots, whereas formerly this was highly relevant); trigonometry was introduced as an expedient for astronomical, nautical and geodesical problems; descriptive geometry was introduced by Monge as a method to avoid the at that time very clumsy computational methods. Descriptive geometry is, by the way, the only subject on the mathematics curriculum which is less than about 300 years old; it is even less than two centuries of age!

In this context the fact should be mentioned that the Educational Institute at the University of Utrecht has successfully initiated an experiment in teaching elementary probability theory and history of mathematics in the highest classes of literary gymnasia, and to abolish the teaching of solid geometry and of broken linear functions in these schools. The experiment may be continued with other school-types also.

7. Desirability of a new orientation of mathematical teaching.

The large extent of obligatory mathematical education for all pupils in most schools is usually justified, apart from its applications, 1° by stating that "instruction in mathematics furthers logical thinking", 2° implying that this is a desirable aim for all pupils, and 3° accepting a hypothesis called the "principle of transfer", which may be expressed by stating that the faculty of logical thinking, if exercised on special subjects like geometry and algebra only, is automatically "transferred" to applications to other subjects also.

For the sake of argument we shall take here the first statement for granted by disregarding the question what exactly is meant by "logical thinking", as well as the objections which could be made against it, but which would lead too far away from the main subject.

The second statement undervalues the important difference between deductive and inductive logic, and misjudges the fact that purely deductive logic is only applicable within the context of a mathematical model, and that by purely deductive reasoning no non-trivial empirical statement about observable phenomena can ever be proved or disproved. As to the "principle of transfer", much has been written about it, but the present author is not aware of serious efforts to test this hypothesis empirically in a way satisfying modern standards of research.

Such an investigation should in any case go into the following remarks, which are based on the personal experience of the author only, and therefore, of course, can not be considered as conclusive.

The attitude of mathematicians towards problems which are rather far from the ordinary mathematical sphere, and which can not be tackled by means of deductive logic, seems not to be very different from that taken by other intellectuals, except that the tendency to avoid them may be somewhat stronger among mathematicians. On the one hand it seems that the mathematician's attitude towards them on the whole is rather intelligent and often based on broad human feeling, and that the more extremistic and in particular the more irrational attitudes are not frequent among them. On the other hand a considerable degree of aloofness from political and philosophical questions can be observed among mathematicians, which might point to a feeling of helplessness towards problems where "logic of partial knowledge" is involved and where data are lacking for making treatment on a rigorous base possible. Among those, however, who do not avoid these questions, one finds, notwithstanding the positive qualities mentioned above, only very rarely that the main features of their mathematical work are maintained in this work also. In particular the main characteristic of mathematicians, viz. to take the utmost precautions against wishful thinking and other forms of self-deception can hardly be said to find its counterpart in the context of other activities of the same mathematicians. Thereby it becomes possible that so many political and religious creeds, each accepting a body of statements, which, if pooled, contains numerous contradictions, so that they certainly cannot be true all, nevertheless have among their adherents mathematicians, even of the highest quality, or other scientists which have had an intensive mathematical training. Apparently whatever form of automatic transfer may exist, it is insufficient to break through the emotional and traditional background of such creeds, unless the individual is willing and has been trained (or trained

himself) in reasoning as “logically” as possible in cases also where insufficient data together with strong emotions are present. Another instance, pointing in the same direction is the fact that most mathematicians, when discussing the value of mathematics, do not, or hardly, consider the possibility that this need not always be positive, or at least do not try to find all serious arguments which might be brought forward for the alternative possibility.

Moreover, although I might not underrate the importance of systematic study of mathematics, and of one of its main characteristics, viz. to separate difficulties and mastering them one after another, one wonders that mathematicians seem not to be able to transfer this characteristic to their educational problems. For, otherwise, how could one understand that mathematical courses do not contain separate parts and groups of exercises for training and testing *separately* the different objectives one has in mind, like acquiring mathematical techniques, theoretical insight, systematizing ability, inventiveness and ability of correct logical reasoning, but that all these elements are mixed up within almost *every* exercise?

Resuming this argument, we might state that it is at least very doubtful whether training in mathematics, based on deductive logic, leads automatically to an increased capacity of arguing logically in cases where only inductive reasoning is possible, and and where often only quite insufficient data, together with strong emotions and/or traditions are present. It seems rather that a special training in the latter direction is necessary. This, however, would make it necessary to revise the “epistemological” basis upon which obligatory mathematical training for *all* students, apart from their respective needs for applications, could be justified. On the other hand this, of course, does not exclude the possibility — which the present author considers as very probable — that deductive and inductive reasoning are sufficiently close, in order that teaching of mathematics, *provided it will be adapted to the revised needs*, may be very useful for the purpose.

Regarding the form of re-orientation of mathematical teaching necessitated by the preceding arguments we might make the following remarks.

1. In the first place needed is: a precise and differentiated formulation of objectives of instruction, using operationally defined terms, instead of rather vague terms like, “furthering logical thinking”, etc., so that it is possible to test with respect to every pupil, *whether* and or *in how far* the objective has been reached in his case. The

differentiation of objectives should at least entail that a) ability to apply special mathematical techniques; b) correct ideas about particular theoretical considerations; c) systematizing data as well as purposes of an investigation, and following an appropriately chosen orderly line of thought; d) inventiveness in overcoming new difficulties, and e) correct logical reasoning either according to the rules of deductive logic (proofs of mathematical statements) or to the less strict rules of inductive or "plausible" inference, can be taught *separately* and tested *separately*.

2. The differentiation of purpose should correspond with a differentiation according to the individual capacities, individual interest, and the professional future of the pupils. Evidently pupils going later to a householdschool or getting a job in a post office or police-H Q, those who go to the university to study law or languages, who go to an engineering school, who are going to study medicine, biology, pharmacology, economy, psychology or social sciences, and those who will become astronomers, physicists, or mathematicians have quite different needs.

3. This differentiation should be reflected in a differentiation of requirements for the final high school examination, which at present, in the Netherlands, are identical for very large groups of students.

As a final summing up, I believe I may say that we as mathematicians should take care that the mass product we produce, viz, the results of our students, admit a satisfactory quality control, that the results we pretend we can obtain can be subjected to the requirements of testability which the statistician demands from every research worker in biology or medicine, that we are aware of the restricted reliability of our tests (examinations) and admit definite tolerance limits, but also that we know how to balance the "yield", differentiated according to different requirements, against the "cost" in the form of teaching- and learning-hours, and know to treat this as a decision problem.

This seems to me to be a duty of honour for us as mathematicians.

APPENDIX

EXAMPLES OF MODERN PROBLEMS IN DIFFERENT FIELDS WHERE MATHEMATICS IS APPLIED ¹⁾

A. *Statistical applications in medicine, biology and pharmacology.*

1. An epidemiological investigation of tuberculosis in Indonesia.

¹⁾ The examples are taken from problems treated in the Mathematical Centre at Amsterdam.

2. Biological standarization of insulin by experiments on rabbits.
3. The number of leucocytes and eosinophil leucocytes in blood samples from women during pregnancy, delivery and childbed.
4. Errors in counting the number of eosinophils in blood.
5. Measurements on eggs of black-headed gulls.
6. The augmentation effect of hypophysis-extract and adrenal-extract on the preputial glands of rats.
7. Scheme for diagnosing rheumatism species based on serological tests.
8. Investigation of the nutritive value of food taken by pregnant women.
9. Regeneration of rat-livers.
10. A comparison of the vitamin B¹ content of blood in old and young men.
11. Investigation of the public health of two rural districts in Holland.
12. Medicines for yaws.
13. The thickness of the layer of blubber of whales.
14. The number of times bats awake during the hibernation.
- Capture and recapture of bats for determining the death rate.
15. The influence of light on the growth of tadpoles.

B. Statistical application in other fields.

1. Delays in the landing of aircraft.
2. Experiments on laundry cleaning methods.
3. A design of experiments in steel rolling.
4. The frequency of different types of monosyllabic words in the Dutch language.
5. Frequency of delays in a transport system.
6. Comparison of the performance of different types of instruments for repairing broken threads in a spinning mill.
7. Statistical analysis of psychological tests.
8. Comparison of practical work in elementary physics required for students in various Dutch universities.
9. Regression-analysis of the power absorbed by a ship's propeller.
10. Statistical analysis of an investigation of the so-called "earth rays" and dowsing rods.
11. Statistical work for the Flame Radiation Research Joint Committee.
12. A design for a quality control system for an electrotechnical factory.

13. Sociological research on the flood disaster in the south of the Netherlands in 1953.

14. Statistics of mixing solid particles.

15. The life-term of jet planes.

16. Research on a time-scheme for glassgrinders.

C. Problems treated by the Computation Department.

1. The investigation of the shape of a fresh-water body under the dunes near Amsterdam. The investigation was carried out for the benefit of the watersupply of the city.

2. Computation of zeros of polynomials in connection with vibrations in railwaycars.

3. The temperature of gasparticles in a hot-air engine.

4. Calculation of the tides on a river on behalf of the government.

5. Integrals of scattering factors occurring in crystallography.

6. The computation and the expansion of triple integrals originating from the theory of cosmic rays.

7. Design of ships-propellers to prevent cavitation of the propeller-blade.

8. Solution of Schrödinger equations.

9. Computation of the form of ships.

10. Radiation-functions occurring in astrophysics.

11. Wavefronts in connection with soundings for geological exploration.

12. Computation of coefficients in connection with vibrating airfoils.

13. Integrals in connection with temperaturedistribution in the human skin.

14. Redesigning a road-system to ensure easy transport of sugarbeets in a rural district that has been flooded.

15. Computation of horoscopes.

16. The upheaval of Fenno Scandia.

17. Fluttercomputations for wings of aircraft.

18. Computation of the production of oil-wells.

19. Design and computation of filters for carrier-wave telephony.

20. Radiation of cobalt bomb in cancer-therapy.

21. Fields of radiotransmitters.

22. Forces occurring in certain molecules.

23. Inversion of matrices of a high rank.

24. Flow in homogeneous porous media in connection with water-supply.

25. Boundary-layer computation for aircraft.

PORTRET TEN VAN WISKUNDIGEN

Mogelijk zijn de onderstaande mededelingen van belang voor iemand, die portretten van wiskundigen zoekt als wandversiering, hetzij voor een vaklokaal, hetzij voor de school in het algemeen.

In aanmerking komen in de eerste plaats de uitgaven van *Scripta Mathematica*, het bekende driemaandelijks tijdschrift, dat uitgegeven wordt door Yeshiva University te New-York (adres: *Scripta Mathematica*, 186th Street and Amsterdam Avenue, New-York 33, N.Y., U.S.A.). De publicaties, waarom het hier gaat, zijn van verschillenden aard:

1°. Een viertal portefeuilles, ieder bevattend een twaalfstal groot-formaat portretten:

Portraits of Eminent Mathematicians. Portfolio I,
Portraits of Eminent Mathematicians. Portfolio II,
Portraits of Famous Philosophers, who were also Mathematicians,
Portraits of Famous Physicists.

De portretten van de eerste twee zijn ontleend aan de grote collectie van meer dan 3000 stuks, die eenmaal het particulier bezit was van den Amerikaansen hoogleraar David Eugene Smith (1860—1944) en nu is opgenomen in de bibliotheek van Columbia University te New-York. Ieder portret is gelegd tussen een typographisch fraai verzorgd dubbel gevouwen blad, waarop een biographie voorkomt van de hand van D. E. Smith benevens het een of andere fascimile of een tekening (bij Huygens b.v. van het huis Hofwijck bij Voorburg).

Op dezelfde wijze zijn verzorgd de portefeuilles der filosofen (bijschriften van Cassius Jackson Keyser) en der natuurkundigen (Henry Crew).

2°. De boven genoemde portretten en een aantal andere (totaal 44 stuks) worden ook los verkocht. De grootte is, met inbegrip van den rand 10×14 inches.

3°. In kleiner formaat ($6\frac{1}{2} \times 9\frac{1}{2}$ inches) zijn nog een groot aantal andere portretten verkrijgbaar, alsook sommige in briefkaart-formaat. Met enige verwondering zal men „portretten” aangekondigd zien van Pythagoras, Plato, Aristoteles en Euclides; deze zijn geidealiseerde voorstellingen, ontleend aan de „School

van Athene" van Rafaël, de bekende muurschildering in de Stanza della Segnatura van het Vaticaan te Rome.

Een drukwerkje met verdere inlichtingen en prijzen wordt op aanvraag door Scripta Mathematica gaarne toegezonden.

Een tweede verzameling, van geheel anderen aard, is die van den bekenden Fransen uitgever Gauthier-Villars (55, Quai des Grands-Augustins, Paris-6e). Deze stelt verkrijgbaar een vijftigtal portretten van beoefenaars der wis- en natuurkundige wetenschappen in den ruimsten zin (b.v. ook Claude Bernard en Pasteur). De afgebeelden zijn voor een groot deel, maar niet uitsluitend, Fransen. Als formaat wordt opgegeven ongeveer 25×30 cm. De prijzen lopen merkwaardig ver uiteen. De hier bedoelde portretten zijn blijkbaar die, welke in standaarduitgaven en verzamelde werken voorkomen en die nu ook los worden verkocht. Ook hier verstrekt de uitgever gaarne nadere inlichtingen.

Met het bovenstaande is echter nog geenszins alles gezegd, vooral niet wanneer men portretten van Nederlandse wiskundigen zoekt. In de eerste plaats valt te wijzen op het Rijksmuseum voor de Geschiedenis der Natuurwetenschappen te Leiden (Steenstraat 1A, directrice Dr. Maria Rooseboom). Het stelt verkrijgbaar vooreerst de dubbele exemplaren van de portretten, die het Museum bezit (waaronder een fraaie kopergravure van van Swinden), maar levert ook reproducties en vergrotingen van andere; in vele gevallen zijn de negatieven reeds in het archief van het Museum aanwezig. Technisch zijn de vergrotingen voortreffelijk; zo wordt algemeen bewonderd een vergroting van het marmeren portretrelief van Christiaan Huygens, dat in 1679 te Parijs naar het leven werd vervaardigd en dat in het bezit is van het Museum.

Volledigheidshalve wordt hier ook nog gewezen op de overeenkomstige instelling in België: het Museum voor de geschiedenis der wetenschappen, Hofbouwlaan, Gent.

Een vraag van andere orde, maar in dit verband toch wel een onderzoek waard, is deze: heeft in de geschiedenis der schilderkunst ooit een schilder den wiskundige in abstracto tot onderwerp genomen, den wiskundige in het algemeen, als type, zoals dit bij herhaling voor andere beroepen (de arts, de apotheker, de goudsmid, de bankier) is geschied? Bij zijn pogingen om hiervan wat te weten te komen heeft schrijver dezes veel hulp en voorlichting ontvangen van het Rijksbureau voor Kunsthistorische Documentatie, Korte

Vijverberg 7, 's Gravenhage, waarvan de wetenschappelijke staf hem terecht heeft geholpen op het voor hem geheel vreemde gebied der iconographie.

Literatuur of handboeken, die den wiskundige iconographisch behandelen, zijn er niet. Daarbij komt nog, dat het type „wiskundige” vaak niet zuiver is aan te geven. Immers een passer, een liniaal, een driehoek kunnen ook attributen zijn van een architect, een geograaf of astronoom. Zo heeft Gerard Dou (1613—1675) den aardrijkskundige voorgesteld, met een passer op een globe metend, Jan Vermeer van Delft (1632—1675) deed hetzelfde en beeldde ook den sterrenkundige uit. Van de buitenlandse schilders worden met name twee Spaanse vermeld: Diego Velazquez (1599—1660) en Jusepe de Ribera (1588—1652).

Voor ons Nederlanders en voor onze Nederlandse scholen komt wel het meest in aanmerking „de Wiskundige” van Ferdinand Bol (1616—1680). Hier volgen enkele gegevens over dit werk, dat zich in het Louvre te Parijs bevindt. Het schilderij is op linnen, gesig-neerd en gedagtekend 1658, 77 × 63 cm groot. Het is afkomstig uit de verzameling van Catherine de Cassé-Brissac, veuve de Noailles in het jaar II. Een afbeelding vindt men in Larousse du XXme Siècle, deel 4, plaat tegenover bl. 824, en eveneens in de systematische encyclopaedie Grand Mémento encyclopédique Larousse, deel 2, bl. 17. De Wiskundige is gekleed in een zwart gewaad met witten kraag en draagt een zwart kalotje. Zijn gelaat ziet men in half profiel. Hij steunt met den rechterarm op een stenen richel en houdt in de linkerhand een soort koperen liniaal, waarmee hij wijst op een meetkundige figuur, die met krijt op den muur is getekend.

Uitstekende reproducties van dit schilderij worden geleverd door de Caisse Nationale des Monuments Historiques, Services commerciaux, Grand Palais, Cours la Reine (porte F) Paris-8e. Men kan ze bestellen in de formaten 18 × 24 tot en met 50 × 60. De kosten van verzending en verpakking worden mede in rekening gebracht, maar deze verpakking is dan ook zo solide, dat beschadiging onderweg wel tot de onmogelijkheden behoort.

D. J. E. Schrek

DIDACTISCHE REVUE

door

Dr. JOH. H. WANSINK

1a. *Elemente der Mathematik*, Band X, Nr. 1,
Januari 1955; Basel.

a. J. Ruffet schrijft een herdenkingsartikel over Henri Fehr, die op 2 November 1954 op 85-jarige leeftijd te Genève is overleden. Fehr heeft steeds op de bres gestaan ter bevordering van de internationale contacten tussen wiskundigen; in 1899 stichtte hij met Laisant het bekende tijdschrift „L'enseignement mathématique”, dat later tot officiëel orgaan van de I.M.U.K. (Internationale Mathematische Unterrichtskommission) werd. Fehr was een der eerste sekretarissen van de I.M.U.K.; in 1952 werd hij tot ere-voorzitter benoemd.

b. W. Lietzmann schrijft „*Erinnerungen an die erste Internationale Mathematische Unterrichtskommission*”, waaruit enerzijds de betekenis van Felix Klein naar voren komt, anderzijds het duitse aandeel in het werk van deze internationale commissie. Aangegeven wordt welk aandeel het werk der commissie had in elk der vierjaarlijkse Mathematische Congressen. Lietzmann rekent de rapporten in 1936 uitgebracht over de huidige stand van het wiskunde-onderwijs als het laatste officiële optreden van de eerste IMUK. Een tweede IMUK kwam in 1952 tot stand en nam aan het I.M.C. te Amsterdam (1954) deel.

c. In de inaugurele rede van E. Kruppa: „*Darstellende Geometrie – einst und jetzt*” (Wenen, 1953) wordt er op aangedrongen de naam „Beschrijvende Meetkunde” op te geven en door „Constructieve Meetkunde” te vervangen. Van dat begrip wordt een uitvoerige omschrijving gegeven.

2a. *The Mathematical Gazette*, Volume XXXVIII,
No. 326, December 1954; London.

a. „*A problem in elementary geometry*”, by Kurt Mahler. The author gives an affirmative answer to the following problem on triangles: „Let T be a triangle with vertices A, B, C which are, respectively, inner points of the sides a, b, c of a second triangle t . Is it

always possible to move T into a new position where its vertices are inner points of t ?"

b. „*A multi-purpose visual aid*", by G. R. Clark. The author constructed an apparatus far superior to the „protactor diagram", it is far more tractable than the film suggested in the *Trigonometry Report*, for it may be quickly used to demonstrate the value of the ratios of any angle.

c. „*Parabolas related to a triangle*", by P. S. Rau.

d. „*Mathematical monsters*", by J. L. B. Cooper, a presidential address to the Cardiff Branch of the Mathematical Association. The paradoxes and antinomies given by the author involve a conflict between logical and intuitive ideas about mathematics. In most of our mathematical teaching we are mainly concerned with questions of technique. Logic takes second place. To develop a more critical attitude needs more than logic: it needs shock tactics!

e. „*Some remarks on the general power and exponential functions*", by A. W. Gillies. Het getal e wordt ingevoerd op een wijze die een beroep doet op geometrische intuïtie.

f. De aflevering bevat 58 blz. „*Mathematical Notes*" en „*Reviews*".

2b. *The Mathematical Gazette*, Vol. XXXIX, no. 327, February 1955, London.

a. J. B. S. Haldane, „*Targets*". The author enters a plea for the study of targets at school, not as a mere source for problems, but as a topic which can be taught in such a way as to prepare its learners for future studies.

b. A. W. Siddons, „*The product of two series*".

c. W. W. Rogosinsky, „*Some elementary inequalities for polynomials*".

d. H. Lindgren, „*From necklaces to number theorems*". The problem of forming a necklace in which no two adjacent beads have the same colour, was found, unexpectedly, to lead to the little Fermat theorem and to a companion congruence with a composite modulus.

e. W. Flemming, „*Thoughts on the training of the mathematics teacher*".

f. C. O. Tuckey, „*A misuse of symmetry*".

g. *Pseudaria*; one of Euclid's lost works was a book of fallacies, designed to put beginners in geometry on their guard against arguments which might lead them to wrong conclusions. In a new department examples of interesting traps are given.

h. *Mathematical Notes; reviews*.

3a.

The Mathematics Teacher, Volume XLVII,
number eight, December 1954, Menasha, Wis-
consin.

a. „*Mathematicians and automata*” by Paul Brock is a paper about one of the most modern developments in the field of mathematics, the computing field. The field of automatic computation is a budding giant. It is critically short-handed today and its needs will increase over the foreseeable future. Secondary and college teachers to day have the responsibility for supplying the personnel needed. This can be done only by the teachers themselves finding out the needs of the field, giving this information to the students and their parents through orientation measures, and, finally, by supplying proper training for the students who are interested.

b. F. E. Grossnickle in „*Teaching arithmetic in the junior high school*” points out that the acceptance of a theory of learning which emphasizes meaning and changing promotion policies in the elementary school must have an effect on the curriculum in the junior high school.

c. S. Balakrishna Aiyar gives in the article „*The Ganita-Sāra-Sangraha of Mahāvīrācāya*” an account of the imaginative approach to mathematics employed by early Hindu mathematicians as found in a well-known book by Māhāvira.

d. Florence Wood continues „*Tangible arithmetic: the sector compasses*”.

e. J. F. Schacht, one of the pioneers whose early work with models and devices was a contributing reason for the organization of the department „*Devices for the mathematics classroom*” treats the subject „*Models of loci*”.

3b.

The Mathematics Teacher, Volume XLVIII,
Number one, January 1955.

a. W. D. Reeve, „*The need for a new national policy and program in secondary mathematics*”, a forceful plea for action on the present „chaotic conditions” in mathematics from one who has had a long and rich experience with the mathematics program in the high school.

b. K. O. May, „*What does „if” mean?*” Words can be slippery customers in mathematics as well as in other fields. The only way to keep them from tripping the students and the teachers is to really understand their use. Here the use of „if” is clarified.

c. K. P. Swallow, „*The factogram*”, contains a simple proposi-

tion from the theory of numbers developed in such a way that the high school pupil cannot fail to be interested.

d. Sh. Yeshurun, „*Let's guess it first*”. The author suggests a way to help pupils solve verbal problems.

e. K. E. Brown, „*Research in mathematics education - 1953*”. With a bibliography containing 43 items.

f. A new department makes its debut: „*Memorabilia Mathematica*”, noteworthy or memorable items of mathematical interest; it contains: „*What is a mathematician?*”, „*Women in mathematics*”, „*Provision for individual differences*”.

3c. *The Mathematics Teacher*, Volume XLVIII, number two, February 1955.

a. E. S. Lee, „*The engineer in industry, — seen and unseen mathematics*”; the author emphasizes that oftentimes the people who have the original ideas and the drive to do new things are very young.

b. E. J. Swenson, „*Rate of progress in learning arithmetic*”; the author develops a thesis, that the better the instruction the greater the individual differences.

c. N. S. Washton and E. B. Friedman, „*A teaching unit on graphs*”, the time allotment runs as follows:

- A. Launching the unit: 2 lessons;
- B. Introduction to statistical graphs: 6 lessons;
- C. Construction of statistical graphs: 7 lessons;
- D. Vocabulary of statistical graphs: 1 lessons;
- E. Graph of a formula: 2 lessons;
- F. Coordinate systems: $1\frac{1}{2}$ lessons;
- G. Graphing a straight line: $3\frac{1}{2}$ lessons;
- H. Solving a set of linear equations graphically: 2 lessons;
- I. Graphing curves: 2 lessons;
- J. Review: 2 lessons;
- K. Unit test: 1 lesson.

d. R. V. Andree, „*Modern trigonometry*”. The author asks: Is your school still teaching the trigonometry of the surveyor when today's engineers, scientists, and mathematicians need to study analytical trigonometry, a study of the properties of the trigonometric functions?

e. B. Bold, „*Developmental mathematics in the secondary school*”. Insights into the properties of the number system can be deepened

in the algebra after the pupil has studied operations with polynomials.

f. J. Hazard, „Curves of constant breadth”.

g. L. Pinette, „Tangible arithmetic III: the proportional dividers”.

h. R. Mirsky, „Streamlining the proof of the binomial theorem”.

i. V. Thébault, „Congruent triangles (fifth case) and the theorem of *Lehmus*”. This theorem is „a triangle which has two equal interior angle-bisectors is isosceles”.

j. W. L. Schaaf, „Mathematics and public relations”, and „On the nature and source of mathematical ideas”.

k. M. Graham, „Elementary concepts of irrational numbers”.

l. Ch. H. Butler, „A note on the statements of theorems and assumptions”.

m. G. Welling, „Deciphering the general trinomial”.

n. H. van Engen, „A challenge to educators”. Russia is overtaking United States in training of technicians.

o. M. F. Roszkopf, „Some reflections on a hurried trip to Europe”, on the occasion of the International Congress of Mathematicians at Amsterdam.

Lezing van dit tijdschrift kan ieder, die zich t.a.v. het Amerikaans onderwijs wil oriënteren, ten zeerste worden aanbevolen.

4a. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*; 7. Band, 6. Heft, 15 Dezember 1954.

a. Belangrijk is het artikel van H. Schäfer over „C. F. Weizsäcker's Gedanken zur Kosmogonie und zur Entstehung des Planetensystems”. Der Aufsatz nimmt eine Mittelstellung ein zwischen dem was in Zeitschriften wie „Kosmos”, „Orion” usw. geboten wird, und der Originalliteratur. Der Verfasser gibt eine Anwendung der neuen Theorie auf weitere Fragen der kosmischen Entwicklung. Das Aufleuchten einer Supernovae ist gedeutet worden als plötzlicher Zusammensturz interstellarer Materie (Weizsäcker, Unsöld) oder als Zusammenbruch eines alten Sterns, der seine normalen Energiequellen (Bethe-Weizsäcker-Zyklus) verbraucht hat, zu einem Neutronenstern (Baade und Zwicky) oder schliesslich als Neuschöpfung von Materie unter der Annahme, dass die Gesamtmasse des Weltalls mit dem Weltalter zunimmt (Jordan). Weizsäcker deutet das Erscheinen einer Supernovae als die Geburtsstunde eines Doppelsterns. Es lässt sich nicht leugnen, dass sich gute Gründe für diese Ansicht anführen lassen.

b. W. Wittenberg, „Ein Beitrag zur Einführung in die Dynamik

im Oberstufenunterricht'. Dieser Aufsatz handelt von Fragen um die Grundgleichung $K = mb$. Überall hat der Verfasser der Beantwortung der Frage „Wie sieht das im Experiment aus?“ viel Raum gegeben.

c. H. Weinreich, „Kleine mathematische Überraschungen bei Philosophen und Dichtern“. Schopenhauer, Descartes, Leibniz, Wundt und Goethe werden aangehaald.

d. C. Piehl, „Ergänzung zum elementaren Näherungsverfahren für π mit rationalen Werten“.

e. F. Malsch, „Mathematische Klassenarbeiten“.

4b. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*; 7. Band, 7. Heft, 1 Februar 1955; Bonn/Rhein, Frankfurt/M.

a. H. Schröder, „Neun Jahre Naturwissenschaftliches Gymnasium“, ein Rechenschaftsbericht. Die Ausführungen beziehen sich auf den Schultyp der seit 1945 in Nordrhein-Westfalen besteht.

b. C. Piel, „Die ältesten Versuche über den freien Fall“.

c. H. Hackbarth, „Der mathematische Aufsatz — die mathematische Klassenarbeit“.

4c. *Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht*, 7. Band, 8. Heft, 15 März 1955.

a. R. Roth, „Der Gaußsche Diagonalsatz als fachwissenschaftliches und didaktisches Problem“. Wir halten dafür, daß die Forderung H. Gaudigs an den Didaktiker nach „Selbstverwandlung in den Geist des Schülers“ besondere Beachtung auch im Mathematikunterricht verdiene. Die Nichtbetrachtung dieser berechtigten Forderung wollen wir als Egomorphie bezeichnen. Literarische Anklänge an diese psychische Indisposition finden wir in Goethes Gedicht „Adler und Taube“ sowie in Thomas Manns Novelle „Tobias Mindernickel“. Der egomorphe Didaktiker ignoriert bei seiner Konzeption jegliche psychologischen Erwägungen und erachtet eine sorgfältige stoffliche Planung als vollkommen ausreichend für den Erfolg seiner Arbeit. Es ist aber zu beachten, daß die sorgfältige stoffliche Planung für das Gelingen der didaktischen Aktes sicher notwendig, aber nicht hinreichend ist. Mit welchem Recht

darf man im Bildungsdreieck  das unabdingbare du ausschalten?

Es ist das eine an psychologische Gewissenlosigkeit grenzende Miszachtung des für jeden Didaktiker goldenen Wortes von Thomas von Aquino, auf den sich der kritische Realismus mit Recht beruft: das Empfangene wird nach Art des Empfängers empfangen. Man muß erst Pestalozzis Betonung der Individuallage des Schülers aus dem Kompendium einer Geschichte der Pädagogik ausmerzen, wenn man sich dieser Egomorphie hingeben will.

Die Darstellung stellt den Versuch dar, auch die Ähnlichkeitstransformationen und weiter die Affinität durch den Abbildungspfeil graphisch zu verdeutlichen und dadurch zu intensivieren. Der Verfasser schließt mit dem Wunsch: der Vektor von heute bringe uns den Abbildungspfeil von morgen!

b. A. Siebel, „Zur Auswertung Leibnizscher Reihen“.

c. O. Kohler, „Über das physikalische Begriffssystem“, eine Stellungnahme zu einer Arbeit von R. Fleischmann.

5a. *School Science and Mathematics*, Volume LV, Number 1, whole 480. January 1955; Menasha, Wisconsin.

a. Joseph Mayer, „Mathematical ideas“.

b. O. J. Karst, „Analysis of the required undergraduate mathematics courses for engineering students“.

c. C. B. Read and A. E. Klein, „An analysis of mathematics courses in four year colleges“.

5b. *School Science and Mathematics*, Volume LV, number 2, whole 481, February 1955.

a. M. L. Hartung, „Modern methods and current criticisms of mathematical education“. Critics say we aren't teaching the right things; critics say pupils aren't learning as much as they should learn; critics say the conduct of pupils has greatly deteriorated. Highly respected mathematicians say that the traditional curriculum is barren of the content and point of view of modern mathematics.

b. H. C. Torreyson, „Equation balances“. The author describes the construction of a balance system whereby all the simple operations in algebra could be demonstrated (!).

c. W. D. Reeve, „The evaluation program in secondary mathematics“. The author divides tests into three classes: prognostic tests, achievement tests and diagnostic tests. He gives some practical suggestion for testing.

d. A. Wayne, „Some direct uses for square root“. The author

draws up in the form of formulas a list offering some simple direct uses for square root which have been found useful and interesting to students.

5c. *School Science and Mathematics*, Volume LV, number 3, whole 482, March 1955.

a. R. A. Atkins, „*Mathematics in elementary photography*”. The author expects that the examples in his paper will stimulate teachers of photography to include some mathematics in their courses, since teaching mathematics with photography has a double advantage: it is easily motivated, and the subject is recalled whenever the camera is used.

b. J. G. Gosselink, „*The proof by nine*”. This simple, rapid method to check multiplication or division seems to be almost entirely unknown in the United States. It is considered to be a teaching method of high value.

c. W. D. Reeve, continues his paper on „*The evaluation program in secondary mathematics*”. He gives criteria for constructing new-type tests. The conclusion of the author runs as follows: There is little doubt that the students themselves like the new types much better than the older ones. I know from long experience in making and giving tests that larger areas of subject matter may be tested in less time by the new-type tests and that the drudgery of scoring is greatly reduced by their use. I believe that we obtain more information about the extent and quality of a student's learning through the use of the newer tests and that remedial instruction is more intelligent and worth-while.

6a. *Paedagogische Studien*, 32e jaargang, 2de aflevering, Februari 1955; J. B. Wolters, Groningen-Djakarta.

C. F. P. Stutterheim bespreekt in „*Een belangrijk psychologisch werk*”: *Talent en Genie, Grondslagen van een psychologie der begaafdheid*, door R. Révész (Leiden, 1952). Dit boek bestaat uit vier delen. Het eerste deel handelt over de vormen der begaafdheid in het algemeen en die der creatieve begaafdheid in het bijzonder; over specifieke begaafdheden als het mathematische, het muzikale en het inventieve talent, en over complexe begaafdheden als de filosofische, de psychologische, de historische en de technische begaafdheid. Het tweede deel brengt ons een theorie van de scheppende arbeid en een beschouwing over het aandeel van traditie en collectiviteit in de creatieve arbeid van de enkeling. Het derde deel is

gewijd aan het probleem der genialiteit, aan de geniale persoonlijkheid, en vooral aan het geniale werk. In het vierde deel komen biologische en ontwikkelingspsychologische onderwerpen aan de orde, en worden erfelijkheid, ras, geslacht, geestelijke afwijkingen, enz., in hun relatie tot de begaafdheid bezien. De recensent geeft uitdrukking van zijn bewondering voor het werk als geheel, en van zijn kritiek op detail-punten.

6b. *Paedagogische Studien*, Twee- en dertigste jaargang, derde aflevering, Maart 1955.

Drs. A. W. Haenen geeft: „*Enkele richtlijnen en opvattingen omtrent het begrip woordblindheid*”; dr. A. Nanninga-Boon bespreekt: „*Een geval van schijnintelligentie*”, verwant aan het geval van een 15-jarige autistische debiel, door Stefan Zweig in „*Schach-novelle*” behandeld.

6c. *Paedagogische Studien*, Twee-en-dertigste jaargang, vierde aflevering, April 1955.

Prof. dr. H. Nieuwenhuis schrijft een indringend artikel over „*Practische gevolgen van een paedocentrisch georiënteerd onderwijs*”. Hoever gaat de eensgezindheid die er oppervlakkig beschouwd schijnt te bestaan in de opvatting dat in nieuwere didactische opvattingen het kind op de voorgrond staat en de leerstof op de tweede plaats komt? Welke consequenties heeft deze opvatting voor de praktijk? Dit wordt nagegaan o.a. ten opzichte van het leerprogramma, het uitlegsysteem op onze scholen, de keuze der leerstof, het bevorderingsprobleem, de organisatie van ons onderwijs en ten opzichte van research en experiment in onze scholen.

Drs. W. J. Brandenburg brengt in „*Van rekenen naar algebra*” verslag uit van een experiment in een brugklasse te Warffum, waarin de oplossing van vergelijkingen in de algebra zich bijzonder bleek te lenen voor een inleiding tot de wiskunde.

Dr. F. W. Prins bespreekt het werk van J. C. van Tonder „*Die invloed van verbeterde leermethodes op die denkprestaties van St. VIII-leerlinge in wiskunde*”.

MEDEDELING.

Door de CIEM (de organisatie die in het kader van Unesco het mathematisch onderwijs behandelt) is besloten in het werkprogramma van de volgende jaren op te nemen het onderwerp „Etude comparée des méthodes d'initiation á la géométrie”.

De Nederlandse subcommissie wil over dit onderwerp een rapport uitbrengen op het Internationaal Mathematisch Congres te Edinburgh in 1958. Ondergetekende stelt zich voor dat dit rapport de in Nederland ontwikkelde methoden van aanvankelijk meetkunde-onderwijs zal beschrijven, waarbij ook rekening zou kunnen worden gehouden met plannen die (nog) niet verwezenlijkt zijn.

Hun die aan dit rapport willen meewerken (en hun bereidwilligheid niet reeds anderszins kenbaar hebben gemaakt) wordt verzocht zich in verbinding te stellen met Prof. Dr. H. Freudenthal, Boothstraat 17, Utrecht.

Prof. Dr. H. Freudenthal

KORREL CXVI.

Goniometrisch bewijs van de formule:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

In plaats van deze formule met behulp van de stelling van Pythagoras te bewijzen, is het eigenlijk veel aardiger dit goniometrisch te doen, nl. als volgt:

Is in $\triangle ABC$ de hoek $\gamma = 90^\circ$ en $AB = c$, trek dan $CD \perp AB$ (D op AB). Nu is:

$AC = c \cos \alpha$, $BC = c \sin \alpha$, dus:

$AD = c \cos^2 \alpha$, $DB = c \sin^2 \alpha$, zodat:

$AB = c = c \cos^2 \alpha + c \sin^2 \alpha$, waaruit volgt:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Omgekeerd kan men hieruit nu dus nog een eenvoudig goniometrisch bewijs van de stelling van Pythagoras afleiden.

H. HERREILERS.

Enkele redes op wiskundig gebied, die de aandacht hebben getrokken:

PROF. Dr. HANS FREUDENTHAL

5000 Jaren Internationale Wetenschap

f 0,90

PROF. Dr. J. C. H. GERRETSEN

**De betekenis van de wiskunde voor de heden-
daagse natuurwetenschap**

f 1,25

PROF. Dr. A. HEYTING

Spanningen in de wiskunde

f 0,90

PROF. Dr. H. D. KLOOSTERMAN

Waarde en waardering der wiskunde

f 0,90

PROF. Dr. J. RIDDER

Aard en Structuur der Wiskunde

f 0,90

PROF. Dr. A. C. ZAAZEN

**Enige motieven die bij de beoefening der wis-
kunde ook een rol spelen**

f 1,25

P. NOORDHOFF N.V.

—

GRONINGEN - DJAKARTA

Ontwakende Wetenschap

Egyptische, Babylonische en Griekse
wiskunde
door

Prof. Dr. B. L. VAN DER WAERDEN

321 blz., met 40 illustraties, 120 figuren
en register. Prijs, gebonden f 13,50

Een boek voor ieder, die in de geschiedenis der wiskunde belang stelt. Het is echter voor groter kring geschreven en inderdaad zal het niet nalaten allen te boeien die zich voor de historie onzer cultuur interesseren en voor de groei der ideeën, waarop ze berust. Het boek is leesbaar voor ieder die enige kennis van vlakke meetkunde bezit, en wat de algebra betreft, kan werken met vierkantsvergelijkingen en enig benul heeft van irrationele getallen. Weet men bovendien iets van kegelsneden, dan is het tot het laatst genietbaar. *Chr. Gymn. en M.O.*

Van dit werk verscheen ook een vertaling in de Engelse taal.

P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN

Dr. J. J. W. BERGHUYS

Grondslagen van de aan- schouwelijke meetkunde

231 blz. f 9,50, geb. f 11,—

Dit boek is gewijd aan het eeuwenoude probleem, hoe de wereld der meetkunde samenhangt met die der zintuigelijke ervaring. De schrijver geeft eerst een beknopt historisch overzicht over de verschillende antwoorden, die men in de loop der tijden op de vraag naar die samenhang gegeven heeft. In het tweede deel wordt dan grondiger de rol van de intuïtie in de wiskunde nagegaan, terwijl in het derde deel de grondslagen van een aanschouwelijke meetkunde in detail worden bestudeerd. Een belangrijke aanwinst van de wijsgerig-mathematische literatuur, speciaal voor wiskunde-docenten!

P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN

Bovenstaande uitgaven zijn ook bij de boekhandel verkrijgbaar.

STATISTIEK

STUDIEBOEKEN VOOR DE DOCENTEN

Prof. Dr. O. BAKKER

I. STATISTISCHE METHODE EN ECONOMISCHE STATISTIEK

9e druk f 4,25 geb. f 5,25

II. BEDRIJFSSTATISTIEK . 4e druk f 3,75

SCHOOLBOEKEN

Prof. Dr. O. BAKKER en A. BAKKER

BEGINSELEN VAN DE STATISTIEK . f 5,25 geb. f 6,—
Uitwerkingen f 1,25

Prof. Dr. O. BAKKER, Prof. Drs. P. DE WOLFF en
Drs. P. E. VENEKAMP

OEFENINGEN IN ELEMENTAIRE STATISTIEK

I. Opgaven 4e druk f 2,90

II. Uitwerkingen 3e druk f 5,—

Dr. P. G. VAN DE VLIET

BEKNOPT STATISTIEK 6e druk f 1,75

Tekenschrift hierbij 4e druk f 0,90

Uitwerkingen 5e druk f 0,90

Dr. P. G. VAN DE VLIET en Mr. Dr. H. F. J. WESTERVELD

STATISTIEK VOOR DE H.B.S. A 2e druk f 1,30

Uitgaven van:

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel