

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM

DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN

PROF. DR. O. BOTTEMA, DELFT - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT

PROF. DR. E. J. DIJKSTERHUIS, BILTHOVEN - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT

DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

30c JAARGANG 1954/55

V - VI

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 12,50) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan hogere burgerscholen en lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van f 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in f 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 806593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen f 10,— per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Oranje Nassauplein 15, Zeist. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

= **Aan de schrijvers** van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD:

In memoriam Dr P. G. Tiddens	205
Prof. Dr. HANS FREUDENTHAL: Ons weekend	206
Mededeling	208
Vacantiecursus 1955	208
Officiële mededeling van Wimecos	208
PH. RONSMANS: Naar een dynamisch middelbaar Meetkunde-onderwijs	209
Prof. Dr A. D. DE GROOT: De psychologie van het denken en het meetkunde-onderwijs	224
Dr P. BRONKHORST: Welke eisen mogen we bij het meetkunde-onderwijs aan de leerlingen stellen?	237
P. M. VAN HIELE: Pakkend materiaal ter inleiding van meetkundige grondbegrippen	248
Boekbespreking	263, 299
Dr P. G. CATH: Jules Henri Poincaré	265
Gauss als meetkundige	276
J. POPKEN: Enkele facetten van Gauss' oeuvre	282
F. VAN DER BLIJ: Sommen van Gauss	293

IN MEMORIAM Dr P. G. TIDDENS,

erelid van Wimecos.

Op 2 Juni 1955 overleed te Utrecht op 82-jarige leeftijd dr Pieter Gerlof Tiddens, oud-directeur van de R.H.B.S. te Utrecht, officier in de orde van Oranje-Nassau.

Hier willen wij hem in het bijzonder herdenken als één der oprichters en als eerste voorzitter van onze vereniging Wimecos, waarvan hij lange jaren het enige erelid was.

Op 13 December 1925 tot voorzitter van het voorlopig bestuur gekozen, werd hij 8 April 1926 definitief voorzitter; hij bleef dit tot 5 Januari 1937. Toen moest hij wegens het bereiken van de pensioengerechtigde leeftijd deze functie neerleggen.

Al die jaren was hij slechts éénmaal — door een ongeval — niet op de algemene vergadering aanwezig.

Op de jaarvergadering die volgde op die waarin hij als voorzitter was afgetreden, werd hij door de vereniging tot haar eerste erelid benoemd.

Steeds bleef hij belangstelling in het werk van Wimecos tonen.

Tot 1950 was hij op elke jaarvergadering aanwezig en daarna, ook nog bij de vergadering van 26 Februari i.l., bleef hij schriftelijk van zijn medeleven blijk geven.

Maandag 6 Juni werd hij te Westerveld gecremeerd. Voorzitter en secretaris vertegenwoordigden hier Wimecos, terwijl de voorzitter in een kort woord dank bracht voor het vele dat hij voor onze vereniging had verricht.

Hij ruste in vrede!

Het bestuur van Wimecos.

ONS WEEKEND

Het aanvankelijk meetkunde-onderwijs, dat ons al langer dan een jaar in onze werkgroepvergaderingen bezig houdt, was ook het onderwerp van de weekend-bijeenkomst in Amersfoort. De belangstelling was groot, klaarblijkelijk niet alleen omdat deze conferenties voor velen reeds een vaste gewoonte zijn geworden, maar zeker ook omdat een onderwerp als dit de onverpoosde aandacht der paedagogen verdient.

Of men met gevoelens van benieuwdheid of gespannen verwachting, met welgevormde denkbeelden of geheel open voor nieuwe gedachten naar zulk een conferentie vertrekt — verrassingen zijn toch altijd de mooiste herinneringen, die men ervan kan meenemen. Ook voor mezelf moet ik zeggen, dat ik telkens verrast ben over de feitelijke afloop van conferenties, waarvan ik het programma heb helpen samenstellen, waarvan ik de sprekers en hun opvattingen meende te kennen, waarvan eigenlijk op het papier bij voorbaat vaststond, wat er zou gebeuren, en waar menselijkerwijs gesproken geen verrassingen waren te verwachten. Elke onzer weekend-conferenties heeft een eigen cachet gehad. Wat mij bij de laatste zo heeft getroffen, was haar bij uitstek praktisch karakter. Er is weliswaar bij ons nooit veel in de ruimte gediscussieerd, maar dit keer was het dan toch bijzonder recht op de praktijk af. Achteraf bekeken kon het ook nauwelijks anders: demonstraties van onderwijsmateriaal, zoals door Mevrouw van Hiele en de Heer Ronsmans vertoond, scheppen in de conferentie-zaal een sfeer van klasse-praktijk. Maar die was er ook in de lezing van Dr Bronkhorst, die alleen de klassieke middelen van bord en krijt hanteerde, en in al die discussies, die kort en krachtig werden gevoerd — wanneer ik met Mevrouw Ehrenfest het „logisch” denken herken, niet aan de „juiste beweringen”, maar aan „de bij de zaak behorende juiste beweringen”, dan hebben wij in Amersfoort bijzonder goed ons best gedaan in logisch denken — ik laat in het midden, of het onze wiskundige opleiding is geweest, die ons hiertoe in staat stelde.

Practisch van aard was ook de theoretische lezing, waarmee Prof. de Groot het weekend inleidde. Prof. de Groot betoonde gelukkig de moed van de practicus, die zijn houding in het *leven* bepaalt, al is de *leer* nog niet volmaakt, in casu: al weet de denk-

psycholoog nog weinig specifiek te vertellen over het meetkundig denken. Begrippen als denkmethode, probleemtransformatie, omstructureren en motivatie zijn de besprekingen blijven beheersen, nadat Prof. de Groot ze practisch-theoretisch had toegelicht. Ze zijn niet tot „Schlagwörter” ontaard; vooral bleek de zeer concrete inhoud, die men aan het woord „motivatie” kan geven, in de lezingen van het echtpaar van Hiele. Misschien zijn er congresbezoekers geweest, die het ergste hadden gevreesd van het bijvoeglijk naamwoord „dynamisch” in de titel, die de Heer Ronsmans had opgegeven; ze werden in elk geval bijzonder aangenaam ontgoocheld. Het bewegelijke materiaal van de Heer Ronsmans en de wijze, waarop hij het hanteerde en toelichtte, hebben wel in menigeen de animo doen ontwaken, om meer te weten van wat er bij onze Zuiderburen gaande is in het wiskunde-onderwijs.

De vraag, of het aanvankelijk meetkunde-onderwijs de vorm van een uitgebreide propaedeutische cursus dient te bezitten, is inmiddels nog geenszins eensluidend beantwoord. Dr Bronkhorst localiseerde de problemen van het meetkunde-onderwijs juist in de hogere klassen, dus niet in de eerste. We zullen zijn argumenten ernstig moeten bestuderen, en we zullen nader kennis moeten maken met de methode, die Dr Bronkhorst volgt in zijn meetkunde-onderwijs, dus als het ware met de practische argumenten, die zijn opvatting steunen.

Er zijn in Amersfoort genoeg problemen gerezen, om ons in onze maandelijksse bijeenkomsten bezig te houden. We hopen, talrijken, die wij in Amersfoort hebben ontmoet, op onze werkgroepvergaderingen terug te zien.

Utrecht.

Prof. Dr HANS FREUDENTHAL

MEDEDELING

Dit jaar zal weer vanwege het Mathematisch Centrum een vacantiecursus voor leraren en andere belangstellenden worden gehouden. Na rijp beraad is besloten deze te doen plaats vinden in de herfstvacantie, dus waarschijnlijk op 31 October en 1 November a.s. en wel te Amsterdam.

De cursus zal vrijwel geheel gewijd zijn aan het voorgestelde nieuwe leerplan voor de wiskunde bij het M.O., waarbij met name ook nadruk zal worden gelegd op het voor het M.O. nieuwe vak Statistiek (inhoud, achtergronden, didactiek).

Nadere mededelingen over sprekers, onderwerpen, tijd enz. volgen nog.

VACANTIECURSUS 1955

voor leraren en andere belangstellenden
vanwege het Mathematisch Centrum

De vacantiecursus voor leraren vanwege het Mathematisch Centrum is dit jaar na rijp beraad gesteld in de herfstvacantie, dus waarschijnlijk op Maandag 31 October en Dinsdag 1 November a.s. en wel te Amsterdam.

De cursus zal vrijwel geheel gewijd zijn aan het voorgestelde nieuwe leerplan voor de wiskunde bij het M.O., waarbij met name ook nadruk zal worden gelegd op het voor het M.O. nieuwe vak Statistiek (inhoud, achtergronden, didactiek).

De definitieve gegevens zullen zo spoedig als mogelijk is worden gepubliceerd.

N.B. Dat de vacantiecursus dit jaar niet in de zomervacantie plaats vindt heeft voornamelijk twee redenen:

1. Eind Augustus, begin September zijn reeds een zeer groot aantal leraren-bijeenkomsten uitgeschreven;
2. De bespreking van het pas verschenen leerplan eist van de sprekers een behoorlijke tijd van voorbereiding.

OFFICIELE MEDEDELING VAN WIMECOS

De contributie van Wimecos is voor het Verenigingsjaar lopend van 1 September 1955 t/m 31 Augustus 1956 vastgesteld op f 6.—, te voldoen op postgirorekening 143 917 van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.

De Penningmeester
Ir J. J. Tekelenburg.

NAAR EEN DYNAMISCH MIDDELBAAR MEETKUNDE-ONDERWIJS ¹⁾.

PH. RONSMANS,

leraar aan het Athénée Robert Catteau te Brussel.

Het spreekt vanzelf, dat elk onderwijs tweeërlei soort van problemen met zich mee brengt:

a. de leraar moet de leerstof kiezen, en vaststellen hoe hij die leerstof aan de leerlingen zal aanbieden; dit vormt een noodzakelijke voorbereiding voor zijn leraarstaak;

b. de leraar moet in de klas acht slaan op de reacties van de leerlingen en uitzien naar de middelen, waarmee hij de leerlingen in het onderwijsproces kan betrekken, dit betekent een meer paedagogisch aspect van zijn schoolarbeid.

Ik zal achtereenvolgens spreken over deze beide aspecten voor het eerste jaar, waarin de deductieve meetkunde op onze scholen onderwezen moet worden.

Ten aanzien van de leerstof zal ik een antwoord trachten te geven op drie vragen:

1. Zou het niet wenselijk zijn, vóór het begin van de meetkunde-studie, de zuiver logische begrippen implicatie en aequivalentie door middel van oefeningen die gekozen zijn buiten de eigenlijke wiskunde om, voor te bereiden; òf is het mogelijk deze begrippen bij te brengen door het aanleren van wiskundige vaktaal alleen?

2. Is het aan te raden de leerlingen een star beeld van de bestudeerde figuren voor te leggen, òf is het beter te werken met beweeglijke, veranderende figuren en de veranderde en de niet-veranderde elementen bij de transformaties te bestuderen?

3. Moet men van het begin af het traditionele Euclidische stelsel aan de leerlingen voorleggen in een vorm, die niet al te zeer afwijkt van de eindvorm die men aan het systeem wenst te geven, òf zou het zijn voordelen kunnen hebben de stof soepeler te maken, zelfs al zou dit moeten geschieden ten koste van de traditionele vorm?

Eigenlijk zou ik er de voorkeur aan geven het gebied der principes

¹⁾ Inleiding, gehouden op het zevende conferentie-weekeinde van de W.V.O., op 20 en 21 November 1954 in „de Grasheuvel” te Amersfoort.

te verlaten, om U eenvoudig mijn ervaringen mee te delen, die ik heb opgedaan met de klassen „vijfde latijnse” uit de lagere cyclus der Oude Humaniora, met leerlingen die dus in hun tweede leerjaar van het Middelbaar Onderwijs zijn ¹⁾).

Ten einde mijn leerlingen vertrouwd te maken met deductieve redeneringen, ben ik begonnen met de bespreking van enkele voorwaardelijke zinnen, dat waren zinnetjes van de volgende constructie: „Als . . . , dan . . .”; b.v.: „Als U weggaat, dan zet U de toekomst van de zaak op het spel”. De verhouding van de voorwaarde tot het voorwaardelijke treft men aan in de gewone omgangstaal van de kinderen uit de klassen, die we hier beschouwen; aan deze taal hebben we dan ook onze eerste voorbeelden ontleend. Op deze wijze wortelt het meetkunde-onderwijs in de moedertaal.

De voorwaardelijke ondergeschikte zin was van te voren reeds behandeld in de lessen in spraakkunst en onze Franse collega heeft reeds tal van voorwaardelijke zinnen laten ontleden. In het begin heb ik allerlei meetkundige eigenschappen laten brengen in zinnen van analoge constructie: „Als de zijden van een vierhoek twee aan twee evenwijdig zijn, dan delen de diagonalen elkaar middendoor”. Ik vestig er de aandacht op, dat de voorwaarde in dit geval noodzakelijk het gevolg met zich brengt, iets wat in de gewone omgangstaal niet dikwijls voorkomt.

Het onderscheid tussen de hypothese en de these van een stelling blijft voor sommige leerlingen een moeilijk te begrijpen zaak, tot in „de derde” toe, d.i. tot in het vierde middelbare-schooljaar; daar tegenover ligt de spraakkunstige zinsontleding gewoonlijk binnen hun begripsvermogen. Waarschijnlijk komt dit, doordat de spraakkunstige zinsontleding meer de aandacht vestigt op de vorm van de zin dan op de betekenis ervan. „Il faut surtout ne pas croire, zegt Serrus ²⁾, à une vertu logique du fait grammatical, comme si l'analyse de l'expression devait donner une composition réelle de la pensée.”

Voor de mathematicus is echter de betekenis van fundamenteel belang; het grondbegrip van de voorwaardelijkheid moet hij bij de leerlingen tot ontwikkeling brengen. Een voorwaarde kan echter op tal van andere manieren dan door het onderschikkend zinsverband tot uitdrukking worden gebracht, b.v. door een neven-

¹⁾ Zie voor de Organisatie van het Middelbaar Onderwijs in België o.a. het artikel van dr G. Bosteels in de 26e jaargang van *Euclides*, blz. 115—142.

²⁾ Serrus, *La langue, le sens, la pensée*. Presses Universitaires de France. Paris 1941.

geschikte zin („Zeg met wie je omgaat, ik zeg wie je bent”), door een bepaling met voorzetsel („Met twee kinderen zou je in armoede leven”), door wat de spraakkunst een tijdsbepalende ondergeschikte zin noemt („Wanneer de diagonalen van een vierhoek elkaar middendoor delen, dan . . .”), door een plaatsbepaling („In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor”); de hypothese kan eveneens impliciet in een woord vervat zijn („De zwaartelijnen van een driehoek gaan door één punt, enz”). In het laatste voorbeeld ligt de voorwaarde opgesloten in het woordje „zwaartelijnen”.

In samenwerking met mijn Franse collega heb ik op de spraakkundige zinsontleding een ontleding die de zinsbetekenis betreft laten volgen en daarbij de gekozen voorbeelden niet uitsluitend aan de wiskunde ontleend. De verschillende spraakkundige functies, die een voorwaardelijkheidsverhouding uitdrukken en die men verspreid over de spraakkunst aantreft, werden, in enkele interessante synthese-lessen samengebracht, tot onderwerp van discussie gemaakt.

Het blijkt gemakkelijk om hier bij de wiskunde aan te knopen,

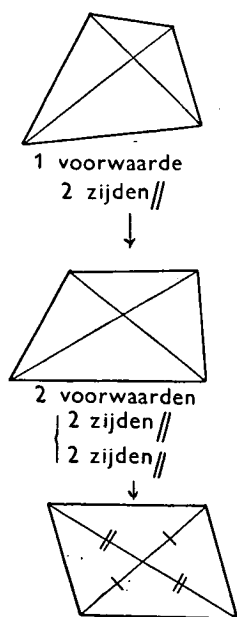


Fig. 1

omdat het begrip der voorwaardelijkheid zo nauw verwant is met dat van de bepaling (determinatie), dat voor het aanvangsonderwijs in de meetkunde van zo fundamentele betekenis is. Om een begrip te definiëren noemt men de speciale voorwaarden op, waaraan het binnen een bepaalde klasse van begrippen voldoet. Aldus bepaalt men de klasse (de verzameling) van alle begrippen, die aan deze speciale voorwaarden voldoen. Zo is het nuttig om uit te gaan van de klasse der vlakke vierhoeken (fig. 1), die klasse stap voor stap in te perken, waarbij iedere stap het opleggen van een nieuwe voorwaarde betekent, en b.v. te laten zien, dat de diagonalen van een vierhoek elkaar slechts dan middendoor delen, als men aan de vierhoek twee speciale voorwaarden heeft opgelegd. Op analoge wijze blijkt het nuttig om het bewijs van de verschillende congruentie-

gevallen te laten volgen op een grafische opbouw van driehoeksgroepen, die opvolgend aan één, aan twee en aan drie voorwaarden voldoen. Iedere leerling krijgt b.v. opdracht een driehoek te construeren en uit te knippen, waarvan één zijde gegeven is; alle drie-

hoeken uit de klas worden nu op elkaar gelegd en vergeleken. Daarna krijgen alle leerlingen de opdracht driehoeken te construeren met twee gegeven zijden (of met één zijde en één hoek); ook deze driehoeken worden ter vergelijking op elkaar gelegd. Vervolgens dezelfde oefening met drie gegeven elementen. Zo leren de leerlingen inzien, dat drie goed gekozen voorwaarden voldoende zijn om te mogen beweren, dat twee driehoeken congruent zijn.

Ook hier ontleen we aan de moedertaal voorbeelden van impliciete en expliciete bepaling, door middel van een aanwijzend voornaamwoord, van een bezittelijk voornaamwoord, van een bepalend lidwoord, een naamsbepaling of een bepaling van omstandigheid. Ziehier een voorbeeld van een oefening door mijn Franse collega opgegeven: „U hebt uw aktetas in de tram verloren; daarin bevond zich geen enkel eenzelveigheidsbewijs. U wendt zich tot het bureau der gevonden voorwerpen. Nu wil het toeval, dat er op die zelfde dag en op de zelfde route verschillende aktetassen gevonden zijn. De opdracht luidt nu een voldoende aantal gegevens op te stellen met behulp waarvan U uw eigendomsrecht op de tas zult kunnen bewijzen!”

Van zijn kant laat de wiskunde-leraar zien, dat de figuren van een

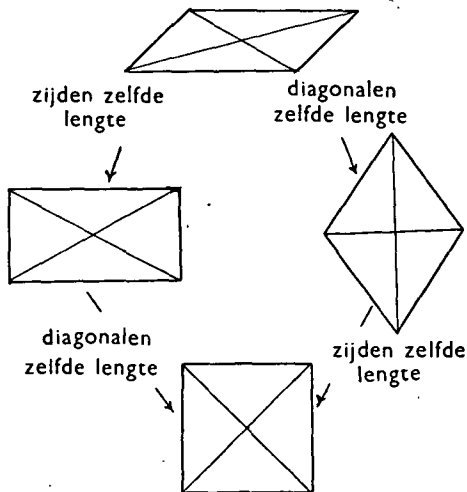


Fig. 2

klasse kunnen ontstaan door een transformatie, waarbij sommige eigenschappen onveranderd blijven. Aan de leerlingen wordt opgedragen de „stamboom” op te maken van het parallellogram (fig. 2), door de volgende reeks van opdrachten:

1. Zoek een transformatie, die een groep parallelogrammen doet ontstaan, waarbij de lengten der zijden behouden blijven.

2. Bestaat er in deze groep een bijzonder parallelogram, en aan welke bijzondere voorwaarde voldoet het?

3. Zoek voor dit bijzondere parallelogram een transformatie, waarbij de lengten der diagonalen behouden blijven.

4. ... enz.

En als laatste vraag: Welke zijn nu de eigenschappen, die bij al deze transformaties behouden zijn gebleven?

Tijdens het hele procédé zal men telkens zowel de nieuwe voorwaarden als de invariante eigenschappen door de leerlingen laten noteren.

De kinderen gebruiken hierbij eenvoudig materiaal: latjes met gaatjes erin en door gewrichten verbonden stellen hen in staat ge-

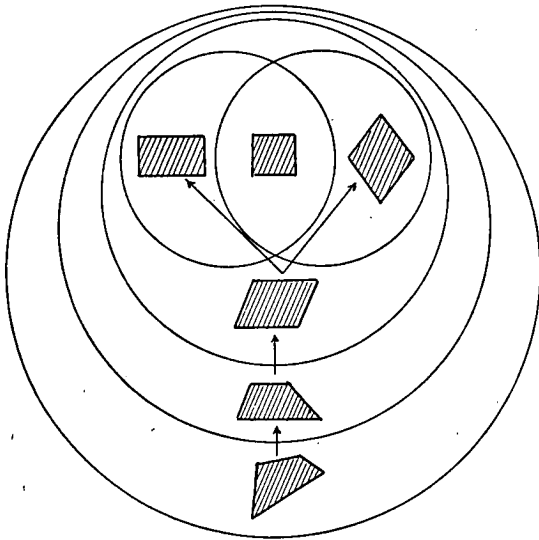


Fig. 3

makkelijk te veranderen figuren op te bouwen, waarin de lijnstukken, die tijdens de transformatie veranderen, door elastische draadjes kunnen worden weergegeven.

Nutteloos is de studie dezer transformaties niet! Ze is een tegengewicht tegen het statische karakter, dat de meetkunde in de geest van de jonge leerlingen maar al te gemakkelijk aanneemt; de speciale stand of vorm van de figuur, zoals die in het werkschrift van de leerling terecht komt, blijkt maar al te vaak een belemmering voor het vrije nadenken. Daarenboven bereiden de transformaties het

begrip implicatie voor door de beschouwing van klassen van figuren. Dit begrip zal later (in de „derde”) verklaard worden aan de hand van het schema van figuur 3. De leerlingen zullen begrijpen, dat alle rechthoeken parallelogrammen zijn, dat sommige parallelogrammen rechthoeken zijn; dat sommige parallelogrammen ruiten zijn; dat sommige parallelogrammen tegelijk rechthoeken en ruiten, d.w.z. vierkanten zijn. De overgang van een domein naar één der andere veronderstelt een transformatie en eist een bijkomende voorwaarde.

De logische structuur van deze werkwijze zal verduidelijkt kunnen worden door aan te knopen bij enkele redeneringen uit de rekenkunde (kleinste gemene veelvoud, grootste gemene deler). Ook zullen in de „derde” de bijzondere transformaties besproken worden, die de verplaatsingen in de Euclidische meetkunde (translaties, rotaties, spiegelingen) uitmaken. Dit stelt ons in staat de Euclidische meetkunde een plaats te geven te midden van andere meetkundige systemen, waarvan men het bestaan in de hogere klassen mag laten doorschineren. Hier kan de wiskunde-les een kostelijke bijdrage geven tot algemene cultuurvorming.

Maar laten we terugkeren tot het peil van de „vijfde”, waar de studie der transformaties zo mooi geïllustreerd kan worden door de lessen in de op het programma voorkomende optica. „Venstertjes”, die in het karton worden uitgesneden (fig. 4), worden de ene maal met kegelstralen, de andere maal met cylinderstralen belicht. De stand van het venstertje binnen de cylindervormige stralenbundel wordt gewijzigd en dit heeft een verandering van de schaduw op het scherm, dat niet evenwijdig is met het geperforeerde karton, tengevolge. Niet zonder verrassing ontdekken de leerlingen daarbij, dat het parallelisme der zijden behouden blijft.

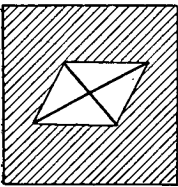


Fig. 4

Ook andere relaties van voorwerp en beeld worden door concrete voorbeelden geïllustreerd. Telkens wordt aan de leerlingen gevraagd, of rechte lijnen rechte lijnen blijven, of de evenwijdigheid al of niet verloren gaat, of hoeken dezelfde grootte behouden, of afstanden dezelfde blijven.

Het is stellig niet nodig te beklemtonen, welke samenhang er bestaat tussen de hierboven aangegeven oefeningen en de classificatie-oefeningen, die schering en inslag zijn bij vakken als natuurkennis en aardrijkskunde. Elke classificatie onderstelt een criterium, of in de taal van de wiskunde: een invariante eigenschap.

Laten we nu de eigenlijke leerstof beschouwen. Men kan deze aan de leerlingen voorleggen in de vorm van een volledig wetenschappelijk stelsel. De Euclidische meetkunde is een interessant model van een deductief systeem, waard om het in zijn geheel te laten bestuderen. Noodzakelijke voorwaarde is daarbij het leggen van een stevige axiomatische basis en het nastreven van scherpe nauwkeurigheid in de bewijsvoering en in de opvolging van de stellingen. Ik voor mij heb bij mijn onderwijs de bespreking van één volledig stelsel vervangen door verschillende staaltjes van deductieve redeneringen in deze trant: „Als ik dit of dat aanneem, zal ik dit of dat bewijzen”. Ik vestig er de aandacht op, dat de aangenomen begrippen en stellingen niet van meet af aan behoeven te beantwoorden aan een ideale axiomatiek. Het is voldoende, als het uitgangspunt zo vanzelf spreekt, dat de leerlingen het gewillig aannemen. Zo nemen de leerlingen in mijn klas b.v. aan, dat de overstaande zijden van een parallelogram gelijk zijn. Hebben ze immers niet kunnen opmerken, gedurende de lessen in optica, dat de schaduw van een stok, die door evenwijdig licht wordt beschenen, dezelfde

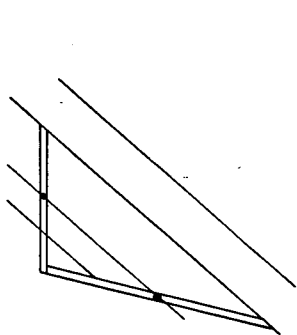


Fig. 5

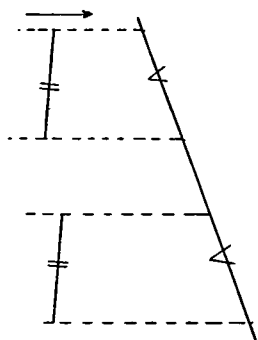


Fig. 6

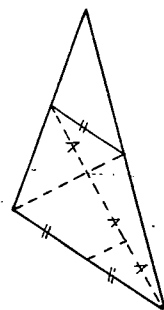


Fig. 7

lengte behoudt, als men het scherm evenwijdig met zichzelf verplaatst? Ook hebben ze ontdekt, dat de lengte van de schaduw verandert, wanneer het scherm niet evenwijdig blijft aan de oorspronkelijke stand, maar dat toch de schaduw van het middelpunt het middelpunt van de schaduw is (fig. 5). Dit betekent o.m., dat segmenten die gelijk en evenwijdig zijn, gelijke projecties hebben (fig. 6). Deze stelling werd bewezen en het viel niet zwaar er de affiene eigenschappen uit het eerste boek van Euclides' „Elementen” uit af te leiden, de stelling van de medianen van een driehoek daarbij inbegrepen (fig. 7).

Mijn leerlingen hebben ook — zonder bewijs — aangenomen, dat twee hoeken even groot zijn, als de benen van de ene hoek even-

wijdig en in dezelfde richting lopen met de benen van de andere hoek. Hieruit laat zich dan onmiddellijk afleiden, dat de som van de buitenhoeken van een convexe veelhoek gelijk is aan vier rechte hoeken. Het gehele hoofdstuk over veelhoeken en in het bijzonder over driehoeken, is dan heel summier te geven, evenals de theorie over twee evenwijdige lijnen, door een derde lijn gesneden.

Het is stellig overbodig de lijst der mogelijkheden langer te maken, In de „derde” zal men gemakkelijker de verworven begrippen tot een samenhangend geheel kunnen verenigen.

Nu zullen we spreken over de reacties bij onze leerlingen.

Bij de eerste kennismaking met meetkundige begrippen reageren verschillende leerlingen zeer verschillend. Een klas — en vooral een klas uit de onderbouw — is een kleine, heterogene wereld; het is kunstmatig en zinloos ze massaal behandelend over één kam te scheren. Zoveel mogelijk moet men de leerlingen individueel weten te treffen, daarover zijn we het allen eens. Maar over de wijze, waarop dit moet gebeuren, lopen de meningen zeer uiteen. A priori zal het U paradoxaal toeschijnen, dat men terwille van de individualisatie de leerlingen in groepen samenbrengt. Toch heb ik dit gedaan! Van tijd tot tijd werd er een les besteed aan ploegwerk. Ook hier wens ik de gevolgde methode niet principieel te verdedigen, maar geef ik er de voorkeur aan iets over mijn eigen ervaringen mee te delen. U moogt dan zelf oordelen, of deze wijze van doen al of niet vruchtdragend is.

Het formeren der groepen plaatst ons voor een grote moeilijkheid. Men dient zich vooral scherp voor ogen te stellen, welke resultaten men met de groepsvorming beoogt. Een ploeg dient zowel in haar samenstelling als in haar werkplan aangepast te zijn aan het beoogde doel.

Wat hopen we eigenlijk te bereiken met groepen, waarvan de leerlingen nog slechts enkele maanden lang met de deductieve meetkunde kennis hebben gemaakt? Een eerste plicht is het, de leerlingen die in de aanvangslessen reeds het spoor bijster geraakt zijn weer op het rechte pad te brengen. Anderen hebben vooral behoefte aan training; „drill” is in het meetkunde-onderwijs evenzeer nodig als in andere vakken. Tegelijkertijd dienen de begaafde leerlingen de gelegenheid te krijgen verder op te schieten, zonder dat hun tijd terwille van de zwakkere leerlingen wordt verspild.

Nu we weten, wat we met de ploegen willen, zijn we terstond in staat enige conclusies te trekken.

a. Bij het samenstellen der ploegen houde men geen rekening

met overwegingen van affectief karakter; de wederzijdse sympathieën der kinderen spelen hier geen rol.

b. De samenstelling der ploegen zij nimmer star. Een leerling, die een peil bereikt, waardoor hij boven de groep uitsteekt, moet opnieuw in een hem passende groep worden ingedeeld.

c. Voor een juiste samenstelling der ploegen is een behoorlijke kennis t.a.v. de leerlingen een eerste vereiste. We bedoelen niet dat van iedere leerling een intelligentie-quotiënt bepaald zou moeten worden, en dat we daar algemene conclusies uit zouden moeten trekken. Hoe algemener deze conclusies zouden zijn, des te gevaarlijker zou dit procédé worden. Maar een oppervlakkige kennis van de kinderen stelt de leraar stellig niet in staat tot een verantwoorde groepsindeling te komen.

Ik heb mijn aandacht speciaal bepaald bij het deductieve aspect in de redeneertrant mijner leerlingen. In hoeverre slagen ze erin zich los te maken van de speciale figuur om er een klasse van voorwaarden uit af te leiden? En hoe staat het met het juiste inzicht in de relatie tussen voorwaarde en noodzakelijk gevolg?

Gedurende het laatste schoolkwartaal heb ik met een twintig leerlingen uit de „zesde”, d.i. dus met leerlingen die bij de aanvang van de nieuwe cursus in September een begin zouden gaan maken met de eerste beginselen der meetkunde, afzonderlijke gesprekken gehad.

Ziehier het thema van zo'n gesprek. Ik teken een figuur, een parallelogram bijvoorbeeld. De jongen noemt er de elementen van op: vier hoeken, vier zijden; ook noemt hij enkele eigenschappen. Het komt er nu op aan de maten van de figuur op te nemen om in staat te zijn deze figuur thuis te construeren, zonder dat men het model zelf bij de hand heeft. Het probleem is over voldoende elementen voor de constructie te beschikken, maar toch ook weer niet te veel. Dezelfde oefening wordt opgegeven voor een ruit, een rechthoekige driehoek, een gelijkbenige driehoek, een willekeurige driehoek, enz.

Men ziet, dat de leerling de voldoende voorwaarden moet vaststellen, die een figuur binnen een klasse bepalen, of wat logisch op hetzelfde neerkomt, dat ze de congruentie gevallen moeten vinden. Om tot een beter begripen van de antwoorden te komen, heb ik ook enkele leerlingen uit de lagere school ondervraagd en eveneens enkele uit de bovenbouw van het Athenaeum. Ik heb er me wel voor behoed de betekenis van dit eerste contact te verabsoluteren. Het was me slechts te doen om een eerste onderzoek, waarvan de

conclusies door latere experimenten zouden kunnen worden aangevuld, bevestigd of weersproken. Van de gesprekken werd nauwkeurig protocol opgemaakt; omdat de tijd tot voorlezen dezer protocollen me ontbreekt, beperk ik mij er toe, U enkele conclusies van mijn onderzoek mee te delen.

1. Het resultaat van de leerlingen is des te gunstiger, naar mate ze zich beter van starre cliché's weten vrij te maken, bij het werken met groepen van figuren, die aan de een of andere transformatie worden onderworpen. De meer intelligente leerlingen ontdekken de invariante eigenschappen die de beweeglijke figuren bezitten,

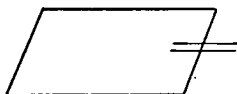
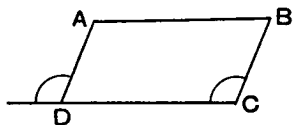


Fig. 8

ze vinden de juiste oplossing binnen een aantal onderstellingen. Nadat Jan (twaalf jaar oud, vijfde latijnse) op juiste wijze drie maten uitgekozen heeft voor het natekenen van een parallelogram (fig. 8), stel ik hem de vraag:

„En als je nu eens alleen de zijde DC en de hoek C zou meten?”

„Dan zou het niet gaan, want men zou er dan zo een en zo een kunnen tekenen.”

„En als ik het met slechts twee zijden, DC en CB bijvoorbeeld zou willen doen?” (fig. 8).

„Dan zou het ook niet gaan, want dan zou ik CB aldus of aldus kunnen trekken.”

Robert (twaalf jaar en vijf maanden, zesde latijnse) verklaart, dat een ruit een vierkant is, dat men met zijn top naar beneden plaatst. Ik merk op:

„Een vierkant heeft toch vier rechte hoeken.”

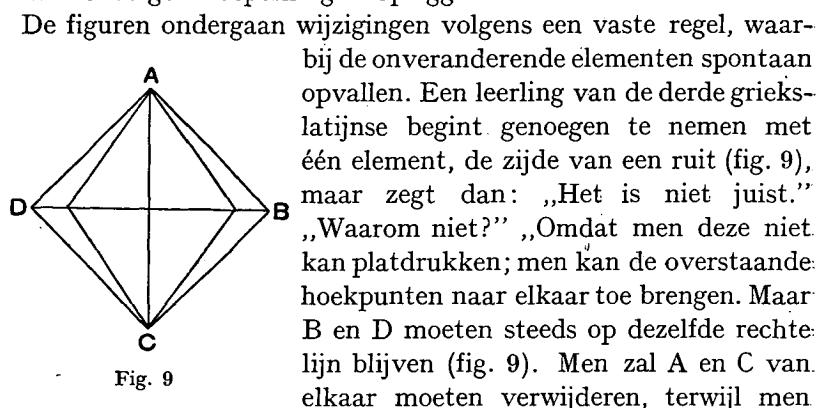
„O ja, jandorie, men heeft deze hier inderdaad platgedrukt.”

Ziehier een voorbeeld van een redenering op lager niveau: kleine Frans uit de vijfde klas der lagere school (tien jaar oud) houdt zich krampachtig vast aan de voorstelling van een star model. Hij meet twee opvolgende zijden, maar verzuimt de tussensliggende hoek te meten. „Kun je de figuur natekenen met deze maten?” „Ja”. „Keer je blad papier om en probeer het eens.” Jan trekt twee lijnen die een hoek met elkaar maken ongeveer als die van het model en hij voltooit zijn parallelogram zonder van hoeken te gewagen. Bij de constructie van driehoeken vraag ik hem, of hij niet genoeg zou hebben aan twee zijden. Hij meet twee zijden en tekent er nu twee van gelijke lengte, waarbij hij probeert de hoek er tussen gelijk te maken aan die van het model. Maar zijn hoek is te

klein en daarom komt hij er niet toe zijn driehoek af te maken. „Kun je niet verder?” „Neen”. Ik wijs hem op de derde zijde: „Neen, ik heb er de maat niet van.” „Kun je de driehoek niet sluiten?” Ik wijs hem op de figuur. „Neen — ja toch, als het een gelijkzijdige is.” „Probeer het maar eens” zeg ik. Hij doet het met zijn meetlatje. „O ja, zo gaat het”.

Tot nu toe heeft de voorstelling, die hij van de derde zijde uit het model had, hem belet door het trekken van een rechte lijn over twee punten de driehoek te sluiten.

Oudere leerlingen (15—16 jaar) ziet men duidelijk uitgaan van een groep van figuren, van een onbepaaldheid dus, waaraan ze achtereenvolgens beperkingen opleggen.



De figuren ondergaan wijzigingen volgens een vaste regel, waarbij de onveranderende elementen spontaan opvallen. Een leerling van de derde griekslatijnse begint genoeg te nemen met één element, de zijde van een ruit (fig. 9), maar zegt dan: „Het is niet juist.” „Waarom niet?” „Omdat men deze niet kan platdrukken; men kan de overstaande hoekpunten naar elkaar toe brengen. Maar B en D moeten steeds op dezelfde rechte lijn blijven (fig. 9). Men zal A en C van elkaar moeten verwijderen, terwijl men B en D naar elkaar toe brengt.” „Waarom?” „Omdat de zijden niet mogen veranderen.”

2. Om na te gaan of twee figuren aan elkaar gelijk zijn, komen de leerlingen er zelden toe ze op elkaar te leggen. De uniciteit van de oplossing is een veel zekerder criterium voor de congruentie der figuren. „Waarom ben je er zeker van, dat dit hetzelfde parallelogram is?” vragen we aan Claude. „Omdat ik er nog zo een kan tekenen.” „Dat zul je altijd kunnen, maar zal het parallelogram, dat je de tweede keer met deze drie elementen tekent, hetzelfde zijn als het eerste?” „Ja.” „Waarom ben je daar zo zeker van? Heb je het geprobeerd?” „Neen”. „Hoe kun je er dan zeker van zijn, als je het niet probeert?” „Ik heb het uit het hoofd gedaan.” „Hoe weet je dan, dat je weer dezelfde figuur krijgt? Als ik maar één enkele zijde gehad had, zou ik dan toch er zeker van kunnen zijn, weer dezelfde figuur te krijgen?” „Neen, want dan zou ik niet weten hoe ik de hoeken moest tekenen, en hoe ik verder te werk moest gaan. Met deze drie elementen kan ik de driehoek natekenen en behoef ik niet te twijfelen.”

Aan Frédéric vraag ik: „Ben je er zeker van, dat je dezelfde figuur krijgt?” „Jawel, ik heb de maten toch”. „Je hebt ze niet allemaal; hoe zou je kunnen controleren?” Ik wijs nadrukkelijk op het feit, dat hij over model en tekening beschikt, maar hij wil ze niet op elkaar leggen. Ik meet nu de lengte en de breedte en de hoeken en ik kijk, of de zijden evenwijdig zijn. „De andere zijn dan vanzelf gelijk”, besluit Frédéric.

3. Voor gevorderde leerlingen is het niet noodzakelijk nauwkeurige metingen uit te voeren, ook al hebben ze de instrumenten daartoe tot hun beschikking; een correcte tekening is zelfs overbodig. De uit de losse hand getekende vierhoeken verschillend onderling ten duidelijkste, ook al beweren de leerlingen, dat ze congruent zijn. Dikwijls lopen ze op de constructie vooruit; hun werkwijze is een zuiver denkproces, naar binnen gekeerd en niet op de materie gericht, aldus gaan ze als echte wiskundigen te werk.

Sommigen, zoals Frédéric, gaan nog verder in deze richting. Zij tekenen de figuren niet eens na, of, als ze het al doen, dan toch zonder een schijn van nauwkeurigheid. Het komt niet in hen op om enige zorg voor de juistheid der figuren aan de dag te leggen. Voor hen is de figuur als het ware een groep van eigenschappen. Hun gezond verstand beheerst alles; de band tussen oorzaak en gevolg is direct, wordt „intuïtief” gevoeld. Ze slaan de deductieve stap van de redenering over. Dikwijls zal het nodig zijn ze weer op het rechte spoor te brengen, de behoefte aan een bewijsvoering aan te wakkeren, ze te wijzen op de onvoldoende gronden voor hun conclusies, ze te doen inzien, dat er een overijld beroep gedaan werd op de intuïtie.

Hoe heel anders gaat het met Jean Baptiste, die weigert te werken zonder de grootste zorg ten aanzien van alle maten. Hij werkt met liniaal en gradenboog. Zijn bedrijf is bovenal experimenteel en statisch van karakter. Onveranderlijke figuren vormen zijn geestelijke inventaris. Zijn vierhoeken zijn star. Hij zal spreken over twee „horizontale” lijnen en niet over twee „evenwijdige”. De hoogtelijn, onverschillig van welke driehoek, laat hij terecht komen in het midden van de overstaande zijde, omdat hij vast zit aan het beeld van een gelijkbenige driehoek. Hij schijnt zich trouwens geen driehoek te kunnen indenken zonder zijn hoogtelijn; ik zeg uitdrukkelijk „zijn” hoogtelijn, omdat hij steeds die ene hoogtelijn trekt, ook als hij ze niet gebruikt. Hij ziet de oplossing nooit, hij ontdekt zijn vergissingen nooit, voor en aler hij werkelijk de figuur heeft getekend.

Voor ik met dit onderzoek begon, had ik de studies gelezen, die Gonseth ¹⁾ aan het probleem van de ruimte wijdde, en waarin hij het drievoudig karakter (intuïtief, experimenteel, theoretisch) van de meetkundige werkwijze in het licht stelt. Ook heb ik bij mijn leerlingen, althans bij de meesten van hen, een zekere overheersing van één van deze drie aspecten kunnen constateren. Dit gaf aanleiding tot een eerste classificatie, die trouwens een zeer voorlopig karakter droeg, want bij de aanvang van de nieuwe cursus in September heb ik een schrift voor notities aangelegd, waarin voor elk van mijn leerlingen een afzonderlijke bladzijde was gereserveerd. Hier werden de meest karakteristieke fouten opgetekend, die ik in de loop van mijn onderzoek opmerkte. Vooral de mondelinge onderzagingen hebben een rijke oogst van opmerkingen opgeleverd. Zelfs de in de loop van de lessen opgedane indrukken vonden in dat schrift een plaats.

Geleidelijk aan heeft de samenstelling der groepen zich geconsolideerd. De personaliteit van Jean-Baptiste is duidelijker geworden; hij is het nauwgezette leerlingetje, dat zijn lessen met zorg leert, de letter ervan onthoudt, maar tot de geest niet door-dringt; in zijn werk vinden we allerlei fouten, die karakteristiek zijn voor de leerlingen, die gaarne van buiten leren; onverbiddelijk raakt hij de kluts kwijt, als men hem vraagt een bewijsvoering te herhalen met een figuur in „scheve stand”. Frédéric krijgt erbarmelijke cijfers; hij levert de oplossing van een vergelijking in twee regels: één voor de opgave, één voor het antwoord. Waarom zou hij zijn tijd verknoeien met al die tussenstappen? Hij kent zijn meetkundeles altijd maar zeer ten dele; niet dat hij lui is, maar hij ziet het nut niet in van al die zinloze motiveringen, wanneer de uitkomst zo evident is. En dan zijn er die vele leerlingen, die geen helder begrip hebben van het onderscheid tussen wat men hen geeft en wat men hen vraagt te bewijzen; het nut van een aandachtig lezen van de opgave ontgaat hen!

We nemen nu aan, dat de samenstelling der ploegen is voltooid. Iedere ploeg heeft oefeningen opgekregen, die voor die ploeg ge-eigend waren. Eén der ploegen heeft tot taak de opgaven op juiste wijze te ontleden. Wat voor zin zou het hebben deductieve redeneringen te eisen van een kind, dat nog niet in staat is de gegevens van een probleem op de juiste wijze te ordenen! Een tweede ploeg krijgt tot taak stellingen opnieuw te bewijzen, die in de klasse van te voren werden uitgelegd. Maar ze moeten de bewijzen leveren in

¹⁾ Gonseth, La géométrie et le problème de l'espace.

figuren, die de leraar geeft en deze heeft de oriëntatie der figuur gewijzigd en de letters door andere vervangen. Een derde ploeg houdt zich bezig met traditionele toepassingen terwille van de onmisbare „drill”. Een enkele ploeg bestaat uit leerlingen, die buitengewoon bekwaam zijn in het oplossen van moeilijke opgaven.

Elke oefening vangt aan met een individueel zich verdiepen in het probleem, daarna volgt de gezamenlijke bespreking, en vervolgens een overschrijven in het net, wat weer een individueel karakter draagt. De leerlingen van een zelfde groep mogen geen werk inleveren dat op elkaar lijkt. Zoals men ziet, wordt ernaar gestreefd een individueel onderzoek van het vraagstuk te behouden; ploegwerk in deze zin is een compromis tussen individuele en collectieve inspanning.

Soms ben ik midden in een ploeg gaan zitten om zonder me in de discussies te mengen de bespreking te kunnen optekenen. De opgegeven oefening werd niet steeds opgelost, maar ook als de oplossing mislukte, had toch de gevolgde weg ter bereiking van het doel dikwijls iets interessants. Het onderzoek verloopt soepel; dan is men er weer eens naast, dan weer vindt men het spoor terug; nu eens stukt het bewijs, dan weer komt er voortgang. Af en toe vragen de leerlingen zich zelfs af, of ze de waarheid van een stelling niet zonder nader bewijs mogen aannemen. Op deze wijze wordt het axioma niet a priori opgesteld, maar komt het al doende te voorschijn en dringt zich op door zijn bruikbaarheid.

Het wordt langzamerhand tijd het besprokene samen te vatten.

1. Boven een geïsoleerde, hermetisch afgesloten wiskunde verkies ik een „open wiskunde”, die afgestemd is op het logisch begrip van de leerlingen, op de moedertaal, op het onderwijs in natuurkennis en vooral op hun ervaringen van alle dag. Gonseth ¹⁾ verklaarde, dat de meetkunde de mythe te boven is, als zou ze een verbijzondering zijn van louter theoretische inzichten, en dat het misleidend zou zijn de intuïtieve, de experimentele en de theoretische aspecten van de ruimtekennis te willen scheiden. Een open paedagogie zal de leerlingen helpen om geen enkel middel ongebruikt te laten bij het zoeken naar waarheid, zal hen leren een intuïtief gegeven nimmer te verwarren met een experimenteel gegeven, of het resultaat van een experiment met een logische conclusie.

Maar het is moeilijk zich een open wiskunde in te denken, die niet zou aansluiten bij andere wetenschappen. Ondanks alle er tegen

¹⁾ Gonseth, *La géométrie et le problème de l'espace*.

in gebrachte bezwaren blijf ik ervan overtuigd, dat coördinatie een waardevolle techniek is. Maar coördinatie mag niet tot paedagogische acrobatiek ontaarden; men moet ze niet met alle geweld overal tot stand willen brengen.

Moet de coördinatie plaats hebben rondom een „centre d'intérêt”? Deze vraag beantwoord ik ontkennend, indien dat „centre d'intérêt” leidt tot zinloze handwerkjes, tot een verloren gaan der logische verbanden, tot een versimpeling van het middelbaar onderwijs. Wel kan men zich op een hoger niveau plaatsen en een centraal thema uitkiezen van intellectuele en culturele waarde.

2. Van een meer dynamische opvatting van de meetkunde zijn grote voordelen te verwachten. Piaget ¹⁾ heeft de aandacht gevestigd op de belangrijke rol, die de transformatie groepen spelen in de spontane meetkunde van de kinderen. Hier gaan de eisen der psychologie samen met die der tegenwoordige wiskunde, die het licht laat vallen op de diepe betekenis van het groepsbegrip. Misschien blijkt het zelfs mogelijk het groepsbegrip in te voeren in de bovenbouw en het toe te passen in de physica, waar het belangrijke diensten zou kunnen bewijzen.

3. Ter wille van de soepelheid van het onderwijs in de wiskunde zal het nodig zijn aan het vrije onderzoek een royale plaats in te ruimen en het „absolute axioma” te vervangen door een „beproefd axioma” (op de proef gesteld axioma).

¹⁾ Piaget: *La Représentation de l'espace chez l'enfant*. P.U.F. Paris. *La géométrie spontanée*.

INLEIDING

Prof. dr A. D. DE GROOT (Amsterdam):

DE PSYCHOLOGIE VAN HET DENKEN

EN HET

MEETKUNDE-ONDERWIJS

I. Hoe het denken te onderzoeken?

In de klassieke experimenten van de denkpsychologische school (of scholen) is vooral aandacht besteed aan de oplossing van denkgaven door volwassen proefpersonen. De eerste vraag, waarmee wij ons zullen bezighouden, is: hoe doet men dit? Hoe is het denken te onderzoeken?

Aangezien denken op zich zelf geen waarneembaar gedrag is, dat men als zodanig kan „betrappen”, is het alleen indirect te benaderen. Relatief het eenvoudigste is het de producten van het denken, namelijk de geleverde *oplossingen* te bestuderen. In sommige gevallen kan men daaruit indicaties krijgen over de wijze, waarop zij tot stand zijn gekomen — vooral wanneer er fouten in zijn blijven zitten. Een andere mogelijkheid is de proefpersoon te *observeren* tijdens het oplossingsproces, inderdaad een vruchtbare methode, wanneer we met denkend handelen te maken hebben. Willen wij echter wat dieper doordringen in wat er gebeurt tijdens een „zuiver” denkproces — bv.: het denken van de schaker, vóórdat hij zijn zet doet — dan bestaat er geen andere mogelijkheid dan de proefpersoon te hulp te roepen door hem op de een of andere wijze *verslag* te laten uitbrengen. Men kan hem b.v. de opdracht geven zo goed mogelijk „hardop te denken” terwijl hij bezig is; men kan hem volgens een nauwkeurig overwogen en vooraf besproken instructie zelf laten registreren hoe het proces zich ontwikkeld heeft (b.v. Julius Bahle’s „Fernexperiment” met componisten, tijdens het componeren van een lied op een gegeven tekst); men kan de een of andere vorm van „systematische introspectie” toepassen. Daaronder verstaat men gewoonlijk een zo volledig mogelijke introspectie onmiddellijk na afloop van een zeer kort denkproces (van enkele seconden tot ongeveer een halve minuut maximaal). Ook kan men

met interruptiemethoden werken — er zijn allerlei experimentele en registratietechnieken denkbaar, en ook wel geprobeerd.

Er doen zich bij al deze verslag-methoden intussen enkele fundamentele moeilijkheden voor. In de eerste plaats is het geven van een bruikbaar verslag van het eigen denken niet ieders werk. Speciaal de meer verfijnde, introspectieve technieken vergen van de proefpersoon een hoog niveau van abstractie-vermogen en introspectieve aanleg, en bovendien een zekere scholing, een inspelen op de experiment-situatie. In de tweede plaats is de arbeids-verdeling tussen proefleider en proefpersoon niet goed vrij te houden van een zekere wederzijdse beïnvloeding. Juist ook door de voorafgaande scholing, hoe onmisbaar ook, wordt de zelfwaarneming van de proefpersoon door het experiment en door de experimentator beïnvloed. Trouwens alleen al het feit van de nevenopdracht tot introspectie en verbale weergave beïnvloedt stellig het denken; het experiment houdt iets kunstmatigs.

Niettemin zijn er wel degelijk geschikte mogelijkheden tot onderzoek, vooral ook door verstandige combinatie van methoden. Tot dusverre is het denken langs deze experimentele weg nog slechts zeer fragments-gewijze bewerkt. De eerste onderzoekers (Würzburger school) hebben zich beperkt tot associatie-experimenten en betrekkelijk eenvoudige verbaal-logische opgaven (begrips-samenhangen, definities, en dgl.). K. Duncker heeft belangwekkende experimenten gedaan met practische en wiskundige denkopgaven; J. Bahle heeft uitgebreide onderzoekingen gedaan naar het muzikale scheppen; A. D. de Groot onderzocht het denken van de schaker. Daarnaast zijn in Nederland op didactisch gebied experimenten verricht van een minder streng, meer toegepast karakter, met name in de didactische school van Ph. Kohnstamm.

Bahle, de Groot en Kohnstamm en zijn leerlingen beroepen zich allen op de denkpsychologische theorie van Otto Selz, of bouwen daarop voort. Er is dus alle aanleiding deze iets nader te bekijken.

II. De theorie van Selz.

Volgens de opvatting van Selz berust de *intelluctuele prestatie* van de „goede denker” (oplosser) op de *beheersing van een gedifferentieerd systeem van oplossings- en denk-„methoden”*, zodanig, dat in een gegeven *probleem-situatie telkens een passende „methode” kan worden aangewend*.

1. „Methode” staat hierbij tussen aanhalingstekens, d.w.z. dat het in een andere dan de gangbare betekenis wordt gebruikt. Inder-

daad impliceert de theorie, dat wij óók „methodisch” denken, als wij denken niet-methodisch te denken — b.v. als wij ons op intuïtie, gevoel of inspiratie verlaten. Waar wij ons dan in feite op verlaten, aldus de theorie, dat is op onze ervaring, weliswaar niet aan dit probleem, misschien ook niet op ervaring aan qua inhoud soortgelijke problemen, maar wel op ervaring aan, qua structuur van de probleemsituatie, soortgelijke problemen. In zoverre kan men de „methoden” begrijpen als *denkgewoonten*, die min of meer automatisch, vanzelf, worden uitgevoerd, vaak zonder bewustzijn van een methodische aanpak.

Duidelijke voorbeelden van een dergelijk „onbewust”, onwillekeurig gebruik van „methoden” kunnen wij bij ons zelf waarnemen, als wij ons op een bepaald terrein vrij veel als amateur bewogen hebben (b.v. puzzlen, schaken), om dan ineens een boekje in handen te krijgen over de wijze, waarop men op dat terrein methodisch te werk kan gaan (b.v. van F. Schuh over mathematische puzzles of, van M. Euwe over combineren in het schaakspel). De reactie van de ervaren amateur zal dan kunnen zijn: „Ik heb me dat nooit zo gerealiseerd, maar zó doe ik het eigenlijk wel ongeveer;” hij realiseert zich dan zijn eigen denkgewoonten.

Het psychologische begrip „methode” moet goed onderscheiden worden van andere begrippen van dezelfde naam. Bij de analyse van protocollen van denkprocessen spreken we van „toepassing van een methode”, wanneer een bepaalde denkoperatie in bepaalde probleemsituaties (bij een bepaalde proefpersoon) geregeld blijkt voor te komen. Dit behoeft dan dus niet te blijken uit een weergave van de methode zelf — dan zouden wij met een bewuste toepassing te maken hebben — maar het kan ook blijken uit de (dóór de toepassing) tot stand gekomen „probleemtransformatie”. Overal waar het subject op een voor hem habitueel te achten wijze tot een constateerbare probleemtransformatie komt, zeggen wij, dat hij een „methode” heeft toegepast.

Het begrip „probleemtransformatie” is (evenals „methode”) van zeer algemene aard: iedere speciale structurering, „omstructurering”, accentverlegging, wijziging in de vraagstelling, specificatie van het probleem, iedere zwenking in de organisatie van het denkproces ook, is als een probleemtransformatie te beschouwen. Typische probleemtransformaties — en dus „methoden” — laten zich, min of meer in abstracto, het beste weergeven in de vorm van kleine zinnnetjes, zoals die in de protocollen veel voorkomen en zoals ieder die uit eigen denk-ervaring kent. Zij behelzen óf een voor-nemen (denk-doelstelling of -sub-doelstelling) óf een vraagstelling,

die door zijn structurerend, specificerend karakter de probleemtransformatie duidelijk indiceert.

B.v.: „hoe kun je zo iets aantonen?”

„eerst aan te tonen, dat...”

„dat nu eerst even te laten rusten...”

„kan dat wel juist zijn?”

„wat weet ik eigenlijk van die...?” en dgl.

2. De typische probleemtransformatie, de „methode”, sluit zoals gezegd in het denkproces aan op probleem-situaties van een bepaald type. Zo zal bij de ervaren oplosser van bewijs-vraagstukken de methode om systematisch na te gaan „hoe je zo iets (b.v. gelijkheid van lijnstukken) überhaupt kunt aantonen” waarschijnlijk alleen als „subsidiare” methode aan bod komen, namelijk als pogingen tot een onmiddellijke oplossing gefaald hebben. Zo zal de denk-methode „de gegevens om te vormen tot een bruikbaar geheel” alléén worden toegepast, als die gegevens zich daartoe lenen, of zelfs daartoe uitnodigen. Aan welke condities dit gebonden is, is wel in grote trekken na te gaan.

Zo zal ook de denkmethode „proberen met indirect bewijs” — voor de beginner nog een hele serie probleemtransformaties, voor de kenner één denkoperatie — alleen worden geactualiseerd in probleem-situaties, die zich daartoe lenen. Dit komt waarschijnlijk vooral voor in bepaalde fasen van een theoretische opbouw, en speciaal bij „omgekeerde” stellingen; de condities zijn wel verder uit te werken.

Wanneer wij dit doen, d.w.z. wanneer wij een bepaald type probleemsituatie trachten te analyseren en in woorden te beschrijven, dan zal het resultaat veelal een opsomming van onderling samenhangende kenmerken zijn. De ervaren oplosser ziet niet zozeer die afzonderlijke kenmerken, maar hij brengt het probleem onmiddellijk thuis als tot een bepaald type behorend, dat zich op bepaalde wijze laat aanpakken; en ook dit „thuisbrengen” geschiedt vaak geheel onbewust: het enige, wat hij zich — misschien — realiseert is, dat hij „natuurlijk” dat gaat doen (de adequate methode gaat toepassen).

3. Bezien wij het (ongestoorde) denkproces als geheel, dan doet zich dit aan ons voor als een keten van „denkoperaties”, waarbij de volgende telkens aansluit bij het resultaat van de vorige. Men kan hier nog (met Selz) onderscheid maken tussen „cumulatieve” en „subsidiare” schakelingen. Heeft een denkoperatie — dat is in het algemeen: de toepassing van een „methode” — een positief resultaat

opgeleverd, de denker een stap verder gebracht, dan is de op dat resultaat aansluitende operatie cumulatief geschakeld ten opzichte van de vorige. Heeft de denkmethode géén succes opgeleverd (in eerste instantie), dan wordt een „subsidiare” methode ingeschakeld (vgl. het eerste voorbeeld onder 2.). Systematiek en bewuste bezinning over het probleem treden over het algemeen alleen op als subsidiaire oplossingsmethoden.

III. Betekenis van de theorie van Selz voor de didactiek.

1. Over de *theoretische betekenis* van deze theorie zou veel te zeggen zijn — maar dit kan licht te ver voeren. Het belangrijkste is, dat de theorie van Selz *een werkprogram* stelt: op zoek naar „methoden”, en wel enerzijds naar de algemeenste aanpak- en denkmethoden, die de zgn. intelligentie uitmaken, en anderzijds naar de specifieke methoden die karakteristiek zijn voor verschillende gebieden. De algemeenste hypothese, die in de theorie besloten ligt, is dat wij bij de analyse van „goed denken”, van meesterschap op enig denkgebied, steeds een systeem van denk-methoden zullen vinden. De theorie belichaamt een opvatting, die het denken — óók het scheppend denken — als onderzoekbaar beschouwt, zulks in duidelijk contrast tot de vele opvattingen, die zich steeds weer achter een metafysisch getinte „intuïtie” of „inspiratie” verschuilen en de onbegrijpelijkheid ervan cultiveren. Het accent ligt bij Selz op het reproductieve moment ook in het productieve en scheppende denken — en daarmee in de cultuurontwikkeling. Dat betekent natuurlijk niet, dat productief denken „niets anders dan gewoonte” zou zijn. Het gaat alleen om een accent-verschuiving: het denkproces van de meester, van het genie ook, is *voor hem* inderdaad grotendeels een gebruik maken van goede persoonlijke denkgewoonten; het bewonderenswaardige, het bijzondere ligt niet zozeer in het denkproces zelf als in het feit, dat hij een zo efficient, fijn gedifferentieerd systeem van ervaringen, d.i. van koppelingen probleemsituatie — oplossingsmethode heeft kunnen opbouwen.

De theorie heeft ongetwijfeld ook beperkingen. Slechts één daarvan moet hier besproken worden, nl. de verwaarlozing van het *motivatieprobleem*. De theorie gaat uit van de, om zo te zeggen, ongestoorde, vloeiende energie-voorziening van de ervaren denker, die gemotiveerd is in het volgens wilsbesluit „aanzetten” en „afzetten” van zijn denk-energie. Juist bij de beginner ligt hier echter een moeilijk probleem; daarover volge straks nog een enkel woord.

2. Wat de *didactische betekenis* van de theorie betreft, verdient allereerst de aandacht het vertrouwen in de opvoedbaarheid van in-

tellectuele prestaties, dat zij inspireert. Immers „methoden” zijn door analyse van het denken te vinden, en in principe over te dragen. In het onderwijs hebben wij dat vertrouwen hard nodig.

De analyse van de feitelijke denkoperaties van de „goede”, ervaren denker, en vooral ook die van de leerling kan voor de didactiek waardevolle resultaten opleveren. Het uitvoeren van denkpsychologische experimenten is weliswaar vakwerk, dat niet goed in de dagelijkse praktijk van de docent kan worden uitgevoerd, maar het is in ieder geval mogelijk voor hem met zich zelf te beginnen door te trachten zich van zijn eigen probleemtransformaties, van zijn eigen stappen op de oplossingsweg, rekenschap te geven. In deze richting is trouwens door Bos en Lepoeter uitstekend werk gedaan.

Dit zich rekenschap geven is verre van eenvoudig: juist de meest fundamentele denkoperaties („aanpak-methoden”) zijn bij de ervaren „vanzelfsprekend” geworden. Zij verlopen automatisch of in een meer directe, samengetrokken vorm, waarin de successieve stappen van de beginner niet meer terug te vinden zijn. Het gevolg is, dat wij juist tegenover de meest fundamentele moeilijkheden min of meer vreemd staan — een essentieel probleem van het lesgeven.

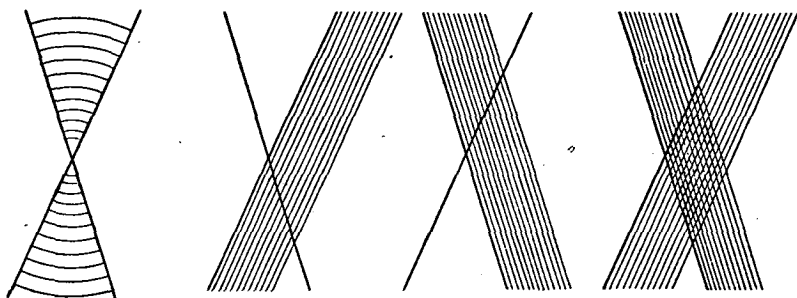
Juist bij het meetkunde-onderwijs doet zich hier nog een speciale eigenaardigheid voor: sommige „vanzelfsprekende” probleemtransformaties geschieden niet meer in het *denken*, maar in de *waarneming*. De figuur wordt „vanzelf” op een bepaalde wijze gestructureerd, ja zelfs onmiddellijk op een bepaalde gestructureerde wijze gezien. De leerling kan dan dus denkmoeilijkheden hebben op een punt, waar voor de docent alleen sprake is van een direct zien, hoe de figuur „is”. In het schaakspel, waar dit analoog ligt, hebben spelers van meester-klasse vaak in hun hart een enorme verachting voor „knoeiers”, d.w.z. spelers van lagere klasse: na lang nadenken doen zulke „knoeiers” vaak een zet, waaruit blijkt, dat ze niet eens „gezien hebben, hoe de stelling eigenlijk is”. Dat zelfde gevoel kan de docent bekruipen; als paedagoog kan hij zich echter geen verachting permitteren: hij zal moeten inzien, dat hij zelf in begrip voor de moeilijkheden tekort schiet.

Introspectie met betrekking tot het eigen denkproces kan hier niet meer helpen. Bij zulke fundamentele zaken zal het onervaren denken van de leerlingen zelf geanalyseerd moeten worden. Een concrete mogelijkheid is hier, ten eerste, leerlingen elkaar te leren uitleggen, hoe zij het hebben aangepakt — in de school van Selz zijn vaak juist daarmee didactische successen geboekt. De beste uitleg kan men vaak krijgen van hem, die het probleem waar men

zelf mee zit, juist onder de knie heeft. Verder zijn de gemaakte *fouten* steeds van groot belang als indicaties van denkwijzen. Selz heeft erop gewezen, dat een fout nooit „willekeurig” is, nooit een gevolg van niet-nadenken, maar altijd van denken, zelfs van methodisch-denken, zij het volgens inadequate of op verkeerde wijze gebruikte methoden. Op de mogelijkheden van het didactische gebruik van een fout, niet als domheid, maar als hulpmiddel bij de analyse van goed en verkeerd gebruik van denk-methoden, behoeft hier trouwens nauwelijks te worden gewezen. De cursus Werk-Instructie van de Bedrijfs Kader Training heeft als slagzin: Doet de werker het verkeerd, dan is het hem niet goed geleerd. Dat is in klasse-verband met de bestaande programma-nood niet geheel te handhaven; maar toch vormen de fouten, die gemaakt worden als geheel de controle erop of de docent de fundamentele inzichten, en *denk-methoden*, wel voldoende heeft weten over te dragen.

IV. Structureren en omstructureren van de figuur.

Van Gestaltpsychologische zijde is aandacht besteed aan de eigenaardige rol, die de figuur, de aanschouwing speelt bij het meetkundige begrip en dus in de didactiek. Sommige probleemtransformaties laten zich concreet vervolgen in de vorm van „omstructureringen” in de figuur. De elementen daarvan ondergaan functie-wijzigingen, die een andere wijze van zien van de figuur impliceren. De volgende tekeningen illustreren dit aan het geval van het bewijs van de stelling, dat twee overstaande hoeken gelijk zijn. Toelichting is overbodig.¹⁾

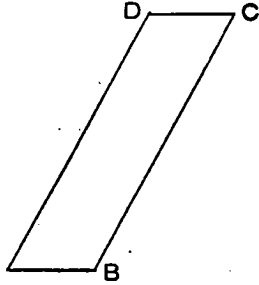


Men heeft wel getracht de slechte meetkunde- (of wiskunde-) aanleg te verklaren als een „Umstrukturierungsdefekt”: de leerling is niet in staat tot de structuur- en functie-verschuivingen te komen,

¹⁾ Niet geheel overbodig: het verschil in dikte tussen de snijdende lijnen en de arcerings-lijnen is in de gedrukte figuren te gering. Op het schoolbord ging dat beter.

die nodig zijn om het bewijs te kunnen „zien”. Speciaal ook bij het trekken van hulplijnen zijn omstructureringen in het spel, die men zelf moet aanbrengen, en moet kunnen voor-zien. Volgens deze theorie zouden vele slechte leerlingen de neiging hebben zich te veel vast te klampen aan de aanschouwelijke figuur. K. Duncker stelt, dat er mensen zijn, die alles wat zij ervaren (hebben), vasthouden in visuele beelden; dat zijn niet de goede mathematici. „... So scheinen viele Menschen ihr Denkmateriale nicht anders präzisieren, überschauen und stabil „beisammenhalten” zu können als „gesteift” und bis zum Kern durchtränkt von anschaulichen Strukturierungen der geschilderten Art.”

Deze opvatting is stellig niet de hele waarheid; maar wel een deel ervan. Blijkbaar speelt de aanschouwing een merkwaardige tegenstrijdige rol: enerzijds onmisbaar als hulp, anderzijds gevaarlijk in zoverre de gewoonte-vorming wat het *zien en tekenen* van figuren betreft, vooral als dit te zeer volgens vaste tradities geschiedt, een goede *denk*-gewoontevorming in de weg kan staan. Een *vaste* wijze van tekenen — in leerboeken en door leraren: twee lijnen gesneden door een derde in vaste opstelling; de basis van driehoeken, parallelogrammen en trapezia altijd horizontaal; bij het trapezium altijd de grootste evenwijdige zijde als basis; vaste teken-verhoudingen bij het parallelogram (horizontale zijden ongeveer $1\frac{1}{2}$ maal de opstaande, de scherpe hoek links) — kan weliswaar de duidelijkheid en het „leren” bevorderen, maar tevens het denken in figuren doen „verstijven”. M. Wertheimer beschrijft hoe hij eens na het bijwonen van een duidelijke, voortreffelijke meetkundeles over hoe je bewijst, dat het oppervlak van een parallelogram = basis $\times$ hoogte is, in de klas heeft willen nagaan of de leerlingen het nu werkelijk zo goed begrepen hadden. Ze hadden geleerd loodlijnen te trekken, dan een congruente driehoek erbij en eraf, enz. Het parallelogram, dat hij nu, na deze les, op het bord tekende



zag er, boosaardig genoeg, uit als hiernaast. Het resultaat was een zekere paniek onder de leerlingen. Is dat wel een parallelogram? vroegen sommigen zich af. Het bleek niet te ontkennen. Een enkeling kwam op het idee de tekening te kantelen — maar dan krijg je de verkeerde basis en de verkeerde hoogte. Anderen trokken volgens voorschrift de lood-

lijnen; maar — tweede schrik — ook de rechthoek wordt „raar”. De derde schrik was, dat het geleverde bewijs niet opging, althans niet in de vorm, waarin het geleerd was. De kenner zal zeggen, dat

het bewijs „precies hetzelfde” is — maar voor de leerlingen ligt er een afgrond van aanschouwelijke verschillen tussen.

De didactische vraag is: hoe moeten wij de verstarring vermijden, een zekere „losheid” van het denkmateriaal bevorderen, zonder het onderwijs onnodig gecompliceerd te maken en zonder de training in het maken van duidelijke tekeningen te kort te doen? Het gaat hier om het vinden van een geschikt evenwicht. Ook dit probleem is in het leerboek van Bos en Lepoeter zeer consequent onder ogen gezien, en, naar het mij voorkomt, zeer verstandig opgelost.

Het voorbeeld van het parallelogram is intussen ook bijzonder geschikt om ons te realiseren, hóe abstract — in de zin van: los van de aanschouwelijkheid — het meetkundige denken eigenlijk is. Daarin ligt de grote moeilijkheid: ook meetkundig leren denken is „gewoontevorming”, zeker, maar het gaat om het leren beheersen van *abstracte* reacties (toepassing denk-methode) op *abstracte* prikkels (de probleem-situatie). Meetkundig begrip vereist een zeer hoog niveau van abstract denken — welbeschouwd véél te hoog voor het gemiddelde schoolkind van 12 jaar.

V. *Het probleem van de „motivatie”.*

Het begrip „motivatie” wordt zowel voor de sterkte als voor de structuur van de geestelijke „aandrijving” (i.c. tot het zich bezig houden met meetkunde) gebruikt. De structuur: daarmee wordt dan bedoeld de wijze, waarop het af te leiden is uit bepaalde tendenties en behoeften in het (persoonlijke) driftpatroon. Onnodig te zeggen, dat het motivatie-begrip niet alleen betrekking wil hebben op bewuste „motieven”, maar ook op onbewuste — voorzover wij die moeten aannemen.

Bij de leerling ligt de motivatie, b.v. tot oplossing van een meetkunde-vraagstuk, uiteraard volstrekt anders dan bij de docent. Zo vanzelfsprekend als dit is, toch is het practisch van grote betekenis zich dit steeds weer te realiseren.

Waarom, op grond van welke motieven, bewuste of onbewuste, zal de leerling zich in het algemeen inspannen? Welke behoeften kan hij (of zij) bevredigen in zijn (meetkunde-) werk?

Dit kunnen er zeer vele zijn; welke in het spel zullen zijn, hangt af van de leerling zelf, van het vak (de leerstof), de docent, de wijze van behandeling (didactiek), en — niet te vergeten — de interactie van de leerlingen onderling, in en buiten het klasse-verband. Ook de huiselijke achtergrond speelt uiteraard een rol van betekenis: hoe prestaties en wanprestaties daar worden opgevat, of de inspanningen geapprecieerd en gesteund worden, etc.

Enkele meer algemene factoren in de kinderlijke motivatie zijn:
 schoolse braafheid (doen wat je moet doen, conformeren);
 beloningen: het zoeken van de voordelen van goed werk (cijfer, pluimpjes, oordeel thuis);

het beter doen (of: althans niet slechter) dan een ander: eerezucht, competitie;

de algemene bevrediging, die het geeft iets te kunnen of te kennen, wat dan ook (op deze leeftijd is dit, mede door de invloed van het L.O., meestal al een min of meer autonome factor geworden);

„liquidatie-drift”, nog voornamelijk in de vorm van liquidatie van het te verrichten (huis)-werk, het plezier aan het „af hebben” (misschien ook al iets van de later tamelijk autonome behoefte een eenmaal aangevat probleem te liquideren, door het op te lossen); identificatie met de (goede) leraar: belangrijk vinden, wat hij belangrijk vindt;

en dgl.

Daarnaast is echter van groot belang, zeker voor het meetkunde-onderwijs, dat bij het kind ontstaat: *echte belangstelling* voor het vak, voor dit werk. Een belangrijke vraag daarbij is: of meetkunde-beoefening voor deze leeftijd — voor de gemiddelde leerling van de eerste klasse — *zinvol* is, resp. zinvol is te maken. Spreken bepaalde meetkunde-problemen de leerling van deze leeftijd aan, resp. zijn zij zo te presenteren, dat zij dit doen?

Hierover zijn wel enkele uitspraken te doen — zonder „bewijs” weliswaar — die, zo voor de hand liggend als ze zijn, niettemin, indien doordacht en uitgewerkt, van ingrijpende betekenis zouden moeten zijn voor het aanvankelijke meetkunde-onderwijs.

1. Activiteit van hoofd *en hand* is meer bevredigend, dan van hoofd alleen. (consequentie: tekenen en construeren is zinvoller dan bewijzen en berekenen; bovendien is er het gezichtspunt van de „Materialgewöhnung” — ik herinner me nog de teleurstelling, dat wij in de eerste klas met die mooie, pasgekochte passer, liniaal en driehoeken zo bijzonder weinig deden.)
2. Iets *maken* geeft extra bevrediging (tekening, constructie, modellen ook: dit punt komt sterk tot zijn recht bij de methode der Van Hiele's).
3. Iets *kunnen* is zinvoller dan iets (leren) kennen alleen, óók in het abstracte vlak (vraagstuk kunnen maken, lijnstuk kunnen berekenen is zinvoller dan bewijs „leren” — wat qua kunnen alleen betekent: op verzoek kunnen reproduceren).

4. Een *niet-vanzelfsprekende* stelling bewijzen is zinvoller dan een vanzelfsprekende stelling bewijzen (b.v. bij twee lijnen gesneden door een derde: „het is allemaal zo logisch”; er is bij het kind géén behoefte aan grotere zekerheid dan de aanschouwelijke evidentie. Bij vraag naar de som van de drie hoeken van een driehoek wel: „Is dat nou altijd zo?”).
5. De *schoonheid* van een logisch-deductieve redenering kan pas aanspreken, als de eraan bestede moeite als zinvol wordt ervaren (als het bewijs een omweg maakt, moet men weten waar omheen).
6. Een *spel-element* kan een eigen „zin” in de problemen en taken aanbrengen. Hierbij moet echter in het oog gehouden worden dat wat voor de leraar een spel-element is — volledig nagaan van mogelijkheden, zo kort en elegant mogelijk opschrijven, spelen met figuren — dit nog niet voor een kind hoeft te zijn. Het is een vrij abstract spelen, waarbij je niet kunt winnen of verliezen, waarbij je je niet kunt bewegen: het spel-genoege van de docent — hopen wij, dat hij dit nog kent — zal slechts in bepaalde mate weerklank kunnen vinden bij de beginnende leerling. Niettemin ligt ook hier een aanknopingspunt.

Algemeen kunnen we zeggen, dat het kind, om voor de meetkunde een voldoende motivatie te kunnen opbrengen, zinvolle *attracties* nodig heeft buiten de abstracte inhoud van het vak zelf. Willen wij een aap leren denken — men vergeve de vergelijking — dan zorgen wij, dat hij honger heeft en dat hij door het vinden van een oplossing een, duidelijk zichtbare, banaan kan verdienen. Zó primitief ligt het bij het 1e-klasse M.O.-kind natuurlijk niet. Maar toch: het wekken van belangstelling voor het vak bij een kind van deze leeftijd moet nog sterk steunen op aan de zuivere meetkunde min of meer externe attracties: wat verrassend is, nieuw; wat je nu kunt maken; wat je „er aan hebt” — in die primitieve, directe betekenis, die deze uitdrukking voor het kind heeft.

Wij moeten er rekening mee houden, dat bijna alle leerlingen de neiging hebben te menen, dat zij voor de school leren, d.w.z. niet voor het leven en zeker niet om de interessante stof. Het „moet” van de leraar, ze zijn naar school „gestuurd” — en ze doen hun plicht. Tal van voorbeelden uit het kinderleven tonen aan hoe een verrassende ontdekking het kan zijn, dat wat je op school doet, niet iets autonooms is maar ergens voor dient en ergens mee te maken heeft. Dat een stuk stof uit de geschiedenis-les zò maar bij

een reëel tafelgesprek te pas kan komen, dat je wat hebt aan rekenen en algebra — dat kan een revelatie zijn.

De vakdocent bij het voortgezet onderwijs, en zeker de meetkundeleraar heeft het moeilijker dan de onderwijzer, wil hij het besef levendig houden, dat het allemaal toch ergens goed voor is. *Zolang echter de meeste kinderen „om en voor de school” leren — zolang schiet de school ernstig tekort.* Het moet voor het kind óók interessant zijn en zinvol; is het dat niet, dan deugt het onderwijs niet.

En die „abstracte gewoontevorming” dan, zal men misschien vragen. Die moet juist ingeleid worden, op gang gebracht worden door een gezonde, niet alleen maar braaf-schoolse motivatie.

LITERATUURLIJST

- J. Bahle: Zur Psychologie des musikalischen Gestaltens, eine Untersuchung über das Komponieren auf experimenteller und historischer Grundlage, Dissertation. Leipzig 1930.
- J. Bahle: Der musikalische Schaffensprozess, Leipzig 1936.
- J. Bahle: Eingebung und Tat im musikalischen Schaffen, Leipzig 1939.
- C. Boermeester: Over meetkunde onderwijs en Psychologie, Paedag. Monogt. VI, Wolters 1955.
- W. J. Bos: Moeilijkheden in de meetkunde, progressie en regressie, Euclides 28, 12.
- W. J. Bos en P. E. Lepoeter: Wegwijzer in de Meetkunde, Meulenhof 1954.
- K. Duncker: Zur Psychologie des produktiven Denkens, Berlin 1935.
- A. D. de Groot: Het Denken van den Schaker, Amsterdam 1946.
- P. M. van Hiele en Dra D. van Hiele-Geldof: Werkboek der Meetkunde, Muusses 1951.
- Ph. Kohnstamm: Aanschouwing en Abstractie als momenten van „leeren denken” (Inaug. Rede, Utrecht 1932).
- Ph. Kohnstamm: Over „Denken” en „Leeren Denken” (Meded. 22).
- Ph. Kohnstamm: De formeele logica en het kinderlijke denken (Meded. 26).
- Ph. Kohnstamm: De wetenschappelijke grondslag voor moderne didactiek, (In het Verslag van het Onderwijscongres Amsterdam 1939).

- Ph. Kohnstamm: Het „leer“-proces in het licht der moderne psychologie, (In „Hommage au Dr Decroly“, blz. 293 e.v.).
- Ph. Kohnstamm, I. van der Velde, L. Welling: Naar een nieuwe didactiek I. Algemene Inleiding, Groningen 4e druk, 1948.
- F. W. Prins: De opvoedbaarheid van leerprestaties volgens denkpsychologische methoden. Paedag. Studieën, Juni 1941 en in Losse Paedag. Studieën, Groningen 1941.
- F. W. Prins: Een experimenteel-didactische bijdrage tot de vorming van leerprestaties volgens denkpsychologische methoden. Wolters 1951.
- O. Selz: Über die Gesetze des geordneten Denkverlaufs, Eine experimentelle Untersuchung, Erster Teil, Stuttgart 1913.
- O. Selz: Zur Psychologie des produktiven Denkens und des Irrtums, Bonn 1922.
- O. Selz: Versuche zur Hebung des Intelligenzniveaus, Ein Beitrag zur Theorie der Intelligenz und ihrer erziehlichen Beeinflussung, Zts. f. Psychol. 134 (1935).
- O. Selz: Die Gesetze der produktiven und reproduktiven Geistes-tätigkeit (Kurzgefasste Darstellung), Bonn 1924.
- O. Selz: u.A., Experimentelle Untersuchungen über den natürlichen Lernvorgang, Zts. f. Psychol. Bd. 109 (e.v.)
- J. C. van Tonder: Die invloed van verbeterde leermetodes op die denkprestaties van St. VIII-leerlinge in wiskunde, Opvoedkundige Studies No 6, Julie 1954, Universiteit Pretoria.
- M. Wertheimer: Productive Thinking, Harper Bros 1945.
- J. W. A. Young: Concerning experiments to test the transfer of training. School Science and Mathematics XVIII, 1.

WELKE EISEN
MOGEN WE BIJ HET MEETKUNDE-ONDERWIJS
AAN DE LEERLINGEN STELLEN?

door

DR P. BRONKHORST

„Nur an Beispielen, immer Beispielen lässt sich etwas lernen”. Dit, dames en heren, is het motto van een boek van Riemann over . . . compositieleer. U hebt reeds begrepen, dat hier gesproken wordt over de musicoloog Hugo Riemann en niet over de wiskundige Bernhard Riemann.

Ik neem dit motto voor mijn inleiding, omdat men met algemeenheden over normen niet ver genoeg komt. Voor ik echter over de meetkunde ga spreken, wil ik eerst iets over normen in het algemeen zeggen. De belangstelling voor dit uiterst belangrijke onderdeel van onze taak is bij de leraren m.i. te klein. Twee jaar geleden heeft het bestuur van Wimecos aan de leraren in de wiskunde gevraagd om proefwerken en rapportcijfers in te sturen teneinde tot een meer uniforme beoordeling van de leerlingen te komen. Nu kan het zijn, dat het bestuur van Wimecos zich nog niet door de rijst- en brijberg heeft kunnen heen werken, maar eerder moet ik aannemen, dat het aantal inzendingen te klein was om conclusies te rechtvaardigen. Gelukkig kan ik echter wijzen op de publicaties van Dr Bunt in de afgelopen jaargang van „Euclides”, waarin hij de resultaten meedeelt van een onderzoek naar de overlading van het programma voor de wiksunde bij het V.H.M.O. Hier is althans voor enkele klassen belangrijk vergelijkingsmateriaal, waar iedereen zijn voordeel mee kan doen.

Het is daarom zo belangrijk, dat we normen onder de loupe nemen, omdat ook blijkens genoemde publicatie het aantal onvoldoendes voor ons mooie vak zo ontstellend groot is. Een onvoldoend cijfer is op zich zelf reeds een onaangenaam iets, hoeveel te meer een misschien onnodig gegeven onvoldoende!

Bij de eisen aan onze leerlingen kunnen we drie graden van moeilijkheid onderscheiden, nl.:

- I. Het begrijpen van de theorie.
- II. Het toepassen van de theorie in eenvoudige voorbeelden.
- III. Het toepassen van de theorie in moeilijker vraagstukken,

waarin dus iets „nieuws” voorkomt en waarbij de leerlingen een een zekere mate van inventie moeten tonen te bezitten.

Over de eerste twee trappen zullen alle leraren het wel eens zijn; de grote verschillen in de beoordeling van de leerlingen vloeien m.i. voort uit de derde trap. Er is al veel gesproken over de vraag in hoeverre op proefwerken en examens z.g. nieuwe dingen van de kandidaten mogen geëist worden. Zo zegt Dr Bunt op blz. 75 van boven genoemde publicatie het volgende: „Maar aan de andere kant blijken de proefwerkopgaven veelal uit de gemaakte typen gekozen te worden, hetgeen er op wijst, dat de docenten in het algemeen niet veel vertrouwen hebben in hetgeen leerlingen kunnen bereiken met behulp van hun zgn. intuïtie en dat zij het om die reden wel zo veilig achten zich te beperken tot het stellen van eisen aangaande het reproductief toepasseh van behandelde typen.”

Op het derde Nederlands congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen, dat in 1936 te Utrecht gehouden werd, hield Prof. Bottema een inleiding over „Het wiskundig gedeelte van het eindexamen der HBS”. In het congresverslag lees ik op blz. 34: „Er zit in het streven naar vernieuwing van het wiskunde-onderwijs veel wat op zich zelf te waarderen is, maar het gevaar van overschatting der kandidaten is dunkt mij niet denkbeeldig gebleken. Het gevaar, dat altijd aanwezig is, als men naar nieuwe gebieden van onderzoek zoekt, doet zich hier ook voor, men verliest de kijk op proporties en in zijn enthousiasme vergeet men de enige maat aan te leggen die over de bruikbaarheid kan beslissen: het vermogen van onze gemiddelde leerlingen. Onze tijdschriften en vergaderingen bevatten in het algemeen voorstellen en opvattingen omtrent nieuwe mogelijkheden voor het wiskundeonderwijs, die grote twijfel doen rijzen aan het werkelijkheidsbesef van hun auteurs.”

Als laatste voorbeeld wil ik hier nog de lezing, die Prof. Bremekamp voor Wimecos in 1941 hield, aanhalen. Sprekend over de meetkunde-vakken zei Prof. Bremekamp: „Ik geloof, dat, althans wat het schriftelijk examen betreft, terecht de planimetrie van het eindexamen is verdwenen. Niettegenstaande het zoeven ter sprake gebrachte feit, dat de leerlingen zich gewoonlijk in dat vak wel thuis voelen en dat doorgaans althans de goede leerlingen er duidelijk plezier in hebben, meen ik, dat het vinden van het bewijs van een nieuwe stelling, als die tenminste ietst om het lijf zal hebben, voor het examen een te zware eis is, waarbij nog het bezwaar komt, dat het toeval er een niet onbelangrijke rol in speelt, of de kandidaat bij het zoeken naar zo'n bewijs al of niet succes heeft.”

Uit al deze uitingen kunnen we rustig de volgende voorlopige conclusie trekken: „Als de kinderen van de familie Doorsnee op proefwerken en examens te veel aan nieuwe dingen krijgen, loopt het met de familie mis.”

Ik wil hier dadelijk aan toevoegen, dat dit m.i. nog niet betekent, dat de familie Doorsnee te dom is; om nl. in een of ander gebied iets nieuws te kunnen vinden is het nodig, dat men veel ervaring op dit gebied heeft opgedaan. Ook Dr Bunt wijst hierop in genoemde publicatie. Zelf kom ik er straks nog op terug met een paar voorbeelden.

Wat nu het z.g. nieuwe betreft, moeten we onderscheid maken bij de verschillende onderdelen van de wiksunde. Teneinde een zo goed mogelijk inzicht te krijgen in de bijzondere eisen, die de meetkunde stelt, zal ik dan ook af ten toe meetkunde met algebra vergelijken.

In de U allen bekende brochure van Mevr. Ehrenfest en Prof. Freudenthal schrijft Mevr. Ehrenfest: „Er bestaat geen wiskundige methode voor het zoeken”. Gelukkig zeg ik als beoefenaar van de wiskunde, jammer, zucht ik, als leraar in hetzelfde vak! Natuurlijk gaan alle vergelijkingen mank, maar als bij een schaakpartij een eindspel is ontstaan, waarbij een vaste methode voor winst of remise bekend is, dan is de aardigheid er af en de partij is uit; alleen klungels spelen dan nog door. En als er een vaste methode bestond om een volkslied te harmoniseren, zou geen componist er meer plezier in hebben. Juist het zoeken, het uitvinden vormt m.i. de grootste bekoring van wiskunde. Hebben vakken als natuurkunde, biologie, geschiedenis, ja bijkans alle vakken verrassende en wetenswaardige elementen, de wiskunde op onze scholen is hier naar verhouding arm aan. Als men het wiskundespel niet met enig succes kan spelen, verliest wiskunde een groot deel van zijn bekoring.” In zijn boek: „la Valeur de la Science” zegt Poincaré: „La logique toute pure ne nous mènerait jamais qu'à des tautologies; elle ne pourrait créer du nouveau”. „La logique qui peut seul donner la certitude est l'instrument de la démonstration; l'intuition est l'instrument de l'invention.” Bij het onderwijs in de wiskunde wenst Poincaré een belangrijke plaats toegekend te zien aan de intuïtie, daar anders de leerlingen wiskunde nooit zouden kunnen toepassen, terwijl bovendien hun plezier in de wiskunde zou verdwijnen.

Vergelijken we nu algebra en meetkunde in de derde klas, dan zien we, dat we bij meetkunde meer inventie vragen dan bij algebra. De theorie van de algebra is in de derde klas nl. lang niet eenvoudig, ik geloof zelfs, dat veel ervan eerst goed duidelijk wordt in de hogere

vergelijkingen maken. Zeker, na één keer uitleggen gaat het wel, maar zonder uitleg, heeft de helft van de klas er de eerste keer moeite mee.

Er zijn dus een aantal voorbeelden gemaakt; ik heb dan nog al eens voor gewoonte om als moeilijkste som de volgende op te geven bij een proefwerk:

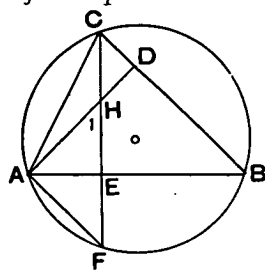


Fig. 2

Geg.: de punten A , B en C liggen op een cirkel; AD en CE zijn hoogtelijnen in driehoek ABC ; het verlengde van CE snijdt de cirkel in F ; H is het hoogtepunt.

Te bew.: $HE = EF$.

De leerlingen moeten dus als volgt redeneren: als ik kon bewijzen, dat de driehoeken AHE en AEF congruent waren, zou ik klaar zijn; we hebben het in deze lessen over omtrekshoeken, dus is reeds $\angle F = \angle B$; als nu maar $\angle B = \angle H$ was, dan was de zaak in orde enz. Eigenlijk dus geen moeilijk probleem, maar niet behorend tot de directe toepassingen van het geleerde: er moet iets bijkomen, en dat iets brengen de meeste leerlingen niet op. Hier is natuurlijk ook ervaring een belangrijk ding; de leerlingen hebben op dit moment nog geen vraagstukken gehad, waarbij omtrekshoeken door andere vervangen konden worden, als ze op dezelfde boog staan. En evenmin als een schaakpartij erg boeiend is, als de zetten stuk voor stuk moeten worden voorgezegd, evenmin is het spel van het oplossen van meetkunde-vraagstukken erg interessant, als eerst voor elk vraagstuk de „methode” moet worden aangeleerd. En dat is het onplezierige van het meetkunde-onderwijs in de derde klas: het leuke spelletje kan slechts door enkele leerlingen werkelijk met succes worden gespeeld!

Met het oog op deze inleiding heb ik enkele weken geleden nog een paar proeven genomen. Ik had juist de bekende meetkundige plaats van de toppen van driehoeken met constante basis en tophoek behandeld. De constructie was voor verschillende hoeken uitgevoerd en als huiswerk kwamen de vraagstukken:

construeer driehoek ABC , als gegeven zijn: AB , $\angle C$ en de hoogtelijn uit C en

construeer driehoek ABC , als gegeven zijn: AB , $\angle C$ en de zwaartelijn uit C .

Resultaat: ruim de helft had de sommen gevonden.

Toen heb ik in de klas een half uur tijd gegeven voor het volgende vraagstuk:

Gegeven zijn de punten A , B en P . Construeer driehoek ABC , als $\angle C = 60^\circ$ is, en de deellijn van $\angle C$ door P moet gaan. Daar ik beide derde klassen direct na elkaar had, kon ik een juist beeld verkrijgen. In de twee klassen zitten samen 37 leerlingen, waarvan 6 doublanten. Van deze 6 doublanten vonden er 5 de oplossing, van de overige 31 slechts 6. Waar nu de meeste van de doublanten in Juli onvoldoende voor meetkunde hadden, bleek wel heel duidelijk, hoeveel de ervaring kan doen. Daar verder een dergelijke som slechts eenmaal voorkomt, heeft het geen zin hiervoor een methode te leren. Overigens, hoe zou die er moeten uitzien? U zult het met me eens zijn, dat hier andere dingen aan de orde zijn dan bij de algebra. Hier wordt wel degelijk iets van inventie vereist en het bleek weer akelig duidelijk, dat de beruchte gemiddelde leerling die niet bezit, of althans te weinig ervaring opdoet in de beperkte tijd. Dit is ook wel de reden, waarom eerst op de HBS en later op het gymnasium het schriftelijk examen planimetrie is afgeschaft. Aardige vraagstukken bleken te moeilijk en vraagstukken, die een behoorlijk resultaat gaven, werden te flauw. Zolang nog het eindexamen bij het gymnasium door de leraren zelf werd in elkaar gezet, kon men nog typen geven, waarvan enige voorbeelden waren gemaakt; toen het eindexamen centraal werd, was deze mogelijkheid er niet meer. Welke eisen zal nu de leraar stellen? Eist hij werkelijk moeilijker vraagstukken, dan regent het onvoldoendes; beperkt men zich in hoofdzak tot reproduceren, dan krijgt men een beperkt aantal. De cijfers hangen inderdaad veel meer van de leraar af, dan van de leerlingen! Zelf heb ik de ervaring dat leerlingen, die die moeilijker vraagstukken niet aan kunnen, toch nog wel redelijke resultaten in de hogere klassen kunnen bereiken. Het zal U duidelijk geworden zijn, dat ik na nu toch al ongeveer 25 jaar met het bijltje te hebben gehakt, nog steeds met de vlakke meetkunde in de derde klas overhoop lig. Met verschillende collega's heb ik over dit probleem gesproken en ik ontmoette veel lotgenoten. De moeilijkheid was steeds de tweede som van een proefwerk. De eerste mag een oude som zijn, de derde gloednieuw; deze wordt dan door slechts enkele leerlingen gevonden. Maar de tweede som: helemaal oud brengt ons geweten in nood, maar als hij maar iets teveel van een bekende som afwijkt, worden de resultaten droevig! Het is toch zo, dat ieder met zijn werk succes wenst en ik wil eerlijk bekennen, dat een groot aantal onvoldoendes onverdragelijk voor me is; liever gooi ik het dan op een accoordje met m'n wetenschappelijk geweten!

In de tweede klas ligt de zaak anders; hier is de theorie minder eenvoudig en bevat een aantal „nuttige” stellingen. Ook is er nogal wat rekenwerk, zodat we hier gemakkelijker genoeg nemen met de eerste twee trappen, dus met het kennen van de theorie en het kunnen maken van directe toepassingen. Overigens is het ook nu een klein kunstje om moeilijker opgaven te bedenken. Als men b.v. de theorie van de evenredigheid van lijnstukken en de deellijnstellingen heeft behandeld, is het volgende vraagstuk een goede test om de knappe leerlingen er uit te halen. Van een trapezium zijn de 4 zijden gegeven getallen; gevraagd worden de stukken, waarin de deellijn van een basishoek de overstaande opstaande zijde verdeelt. Niet waar: de kindertjes behoeven alleen maar de opstaande zijden tot hun snijpunt te verlengen, de stukken berekenen en dan de deellijn-stelling toe te passen. Onze gemiddelde leerling laat echter verstek gaan, en weer, als men dergelijke vraagstukken eist, worden de voldoende cijfers schaars. Ook het volgend vraagstuk, als toepassing van de gelijkvormigheid, is m.i. te zwaar.

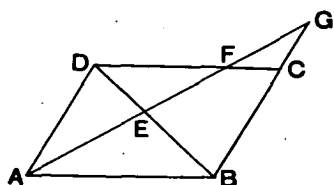


Fig. 3

In figuur 3 wordt gevraagd te bewijzen: $EF:AE = AE:EG$.

Geeft men de volgende aanwijzing: tracht een verhouding te vinden, waaraan beide verhoudingen gelijk zijn, dan worden de resultaten aanmerkelijk beter. Van dergelijke subtiele dingen hangen de resultaten vaak af!

Als laatste voorbeeld het volgend vraagstuk:

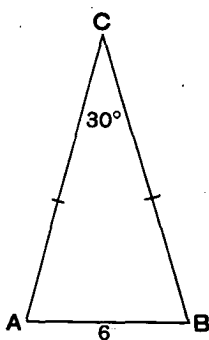


Fig. 4

Gegeven: $AC = BC$; $\angle C = 30^\circ$; $AB = 6$.

Gevraagd: oppervlakte van driehoek ABC .

Lost men dit vraagstuk op, door de hoogtelijn uit A gelijk x te stellen, en dan een vergelijking voor x te zoeken, dan komt men er inderdaad, maar niet op een fraaie wijze; overigens doet de gemiddelde leerling dit zonder voorafgaande analoge voorbeelden stellig niet. De fraaie oplossing, die men krijgt door op de zijde AB een gelijkzijdige driehoek te beschrijven, wordt sporadisch gevonden. Maar hoe komt iemand op die gedachte en hoe kan men iemand leren om op dergelijke gedachten te

komen? Er is immers geen wiskundige methode voor het zoeken, laat staan een didactische om het zoeken te leren! Zoals ik echter reeds opmerkte, is het gelukkig niet nodig om dergelijke

„leuke” sommen te geven. Reeds de theorie geeft voldoende moeilijkheden; hoe lang duurt het b.v. niet voor de leerlingen behoorlijk met de evenredige lijnstukken omspringen; hoeveel moeite geeft reeds de eenvoudige stelling van de verhouding van de oppervlakten van gelijkvormige figuren! Bij deze voorbeelden wil ik het laten en overgaan op de eerste klas. Het is niet toevallig, dat ik bij de derde klas begonnen ben; het is veel prettiger om van pessimistische beschouwingen over te gaan op optimistische dan omgekeerd, of zoals Beethoven zei: „O, Freunde, nicht diese Töne sondern lasst uns angenehmere anstimmen und freudenvollere!”

Het klinkt min of meer paradoxaal, dat ik zo opgewekt ben over de meetkunde in de eerste klas. Er is toch immers wel geen onderwerp, waar meer over geschreven en gepraat wordt; er worden inleidende boekjes geschreven en zelfs wordt wel opgemerkt, dat het onmogelijk is om 12—13 jarigen meetkunde te leren, omdat op die leeftijd logisch denken onmogelijk geacht wordt. Laat ik nu maar dadelijk opmerken, dat alhoewel ik de meetkunde in de eerste klas geen angstwekkend probleem vind, ik natuurlijk toch opensta voor iedere mogelijke verbetering in de didactiek. Mijn eerste reden tot opgewektheid is, dat er geen enthousiaster leerlingen te vinden zijn dan eerste-klassers tussen September en Kerstmis! Maar juist daarom moeten we extra oppassen niet meteen de domper op dit enthousiasme te zetten. Een leraar, die op het eerste rapport een groot aantal onvoldoendes geeft, is bijna een misdadiger! Maar, zegt U tegenstribbelend, het is toch ontzettend veel, wat de kleuters te verwerken krijgen! Gegeven, gevraagde, stelling, definitie, bewijs, direct en indirect, axioma, kortom een menigte moeilijke dingen, die de plaats van hinkelen en knikkeren gaan innemen! Inderdaad is het geen al te krasse bewering, als we zeggen, dat de meetkunde in de eerste klas de grootste sprong betekent, die een mens in zijn intellectuele leven maakt. Een prettige consequentie is echter, dat we juist om deze reden in het begin zo heerlijk soepel mogen zijn.

Waarschijnlijk zult U allen wel eens dezelfde ervaring opgedaan hebben, als ik, toen ik een aantal jaren geleden het voortreffelijke boekje van Kamke over integralen van Lebesque doorwerkte. Op een gegeven ogenblik kwam ik bij een voor mijn gevoel volkomen evidente stelling. Toch was deze stelling zo weinig evident, dat er eerst nog een aantal hulpstellingen moesten bewezen worden, die natuurlijk nog veel evidenter waren. Ik moest dus eerst inzien, dat die stellingen een bewijs nodig hadden en dat die bewijzen volledige

bewijskracht hadden. Ik kreeg het gevoel, dat ik me ergens op heel gevaarlijk terrein bevond, waarbij de minste beweging me b.v. in een niet geziene put zou doen storten; ik kreeg de onaangename sensatie me in het geheel niet meer te kunnen bewegen zonder de grootste rampen, voor mij zelf dan, te veroorzaken. Ik heb nooit zo sterk gevoeld, hoe of een te streng critische instelling alle werken onmogelijk kan maken. Aan het eind gekomen was ik natuurlijk wel overtuigd, dat ik mijn critisch vermogen ontwikkeld had, maar ik vroeg me ook af of het middel niet erger was dan de kwaal! U begrijpt, waar ik heen wil: het bewijzen van evidente dingen bergt een groot gevaar in zich; natuurlijk zullen de leerlingen met hun overvloed van levenslust anders reageren en braaf de dingen onbegrepen en oncritisch navertellen, maar duidelijk is tevens, dat deze methode voor kinderen glad verkeerd is!

Mijn eerste stelregel is dus: in de eerste maanden niets bewijzen, wat voor de kinderen evident is.

Mijn tweede stelregel is om de woorden axioma, stelling, definitie niet expliciet te noemen, maar heel geleidelijk intuïtief te leren aanvoelen.

Eerst als een groot aantal voorbeelden behandeld is, is het mogelijk hierop nader in te gaan.

Zoals ik reeds zei, behoren er op het eerste rapport vrijwel geen onvoldoende cijfers voor meetkunde te verschijnen, ook al omdat men feitelijk nog niets aan meetkunde gedaan heeft. Zeker: men kan hoeken laten berekenen in driehoeken met hoogtelijnen en deellijnen, maar een test vormen m.i. deze vraagstukken nog niet. De eerste werkelijke test ligt m.i. bij de congruentie-vraagstukken.

De leerlingen, die dan vraagstukken als: bewijs dat twee driehoeken congruent zijn, als ze de basis, een basishoek en de deellijn van deze hoek gelijk hebben, kunnen oplossen, geef ik een voldoende cijfer. Bij zo'n vraagstuk is reeds veel aan de orde: de leerlingen moeten allereerst twee kleine driehoeken zien, waarvan ze de congruentie kunnen aantonen en dus moeten ze het geval onderkennen; daarna moeten ze uit de vele conclusies de bruikbare kiezen en ten slotte moeten ze het geval voor de grote driehoeken herkennen. Wil ik de knappen eruit halen, dan kan ik als moeilijke som er aan toevoegen: bewijs dat 2 driehoeken congruent zijn, als ze tophoek en de hoogtelijnen op de opstaande zijden gelijk hebben. Daar echter zo'n proefwerk in de regel juist te laat komt voor het eerste rapport, zou het helemaal niet gek zijn om op dit rapport nog geen cijfer voor meetkunde te geven.

Voor de overgang zijn de vraagstukken over parallelogram en

trapezium het belangrijkste, zodat ik hier nog wat nader op in wil gaan. Merkwaardig is dan allereerst, dat als men de definitie van het parallelogram gegeven heeft, de meeste leerlingen zelf de eigenschappen ervan kunnen bewijzen, en hoogst merkwaardig is, dat alhoewel het volkomen evident is, dat de overstaande zijden even lang zijn, toch iedere leerling behoefte gevoelt aan het bewijs ervoor.

Ook de omgekeerden van deze eigenschappen gaan in de regel vrij vlot; toch moeten we hier oppassen. Zo kan de gemiddelde leerling wel bewijzen, dat de middens van de zijden van een rechthoek de hoekpunten van een ruit zijn, maar het bewijs, dat de middens van de zijden van een ruit de hoekpunten van een rechthoek zijn is ineens belangrijk lastiger, tenzij veel sommen over het berekenen van hoeken gemaakt zijn. Ook kunnen de leerlingen zelf bewijzen, dat de basishoeken van een gelijkbenig trapezium gelijk zijn; in de regel tekenen ze dan de loodlijnen uit de hoekpunten van de andere evenwijdige zijde op de basis, dus niet het gewone bewijs. Uit dit alles blijkt, dat na verloop van tijd de leerlingen het meetkunde-spel aardig kunnen spelen; oorzaak hiervan is wel m.i. dat de meeste vraagstukken toepassingen zijn van de theorie van de evenwijdige lijnen en van de congruentie, zodat ze hier veel ervaring in krijgen.

Een vraagstuk als: construeer een vierhoek als gegeven zijn 3 zijden en de hoeken aan de onbekende zijde, is te moeilijk voor de gemiddelde leerling, echter voor de knappe een aardige puzzle. Een vraagstuk als: bewijs dat de verbindingslijn van de middens van de evenwijdige zijden van een gelijkbenig trapezium loodrecht op deze zijden staat, staat ongeveer op de grens.

Het vraagstuk: bewijs dat een vierhoek een ruit is, als de diagonalen drie van de vierhoeken van een vierhoek halveren, is voor de gewone man te moeilijk. Dit vraagstuk is daarom lastig, omdat de leerlingen niet direct op het doel kunnen afgaan, maar eerst andere dingen moeten bewijzen. En U zult het met me eens zijn: aan omwegen hebben alle leerlingen van de eerste tot en met de vijfde klas het land.

Als we bovengenoemde eisen aan de leerlingen stellen, krijgen we weinig onvoldoenden, zonder daarbij het gevoel te hebben, dat we eigenlijk te slap zijn. Er komt nog bij, dat een leerling, die met onvoldoende meetkunde bevorderd wordt naar de tweede klas en weer met een onvoldoende naar de derde klas gaat, toch in staat is zijn jonger broertje in de eerste klas te kunnen helpen. Ook is het, in tegenstelling tot de algebra, waar direct de ontbindingen gebruikt moeten worden bij de breuken, niet zo nodig, dat de leerlingen de

meetkunde van de eerste klas volkomen beheersen, om in de tweede het onderwijs te kunnen volgen. Ten slotte is het nog een feit, dat leerlingen, die in de eerste klas met meetkunde sukkelen, toch soms later geen last met de wiskunde hebben. Ik heb hiervan wel enkele gevallen meegemaakt.

Samenvattend kom ik tot het volgende:

In de eerste klas kan het „meetkunde-spel” door de leerlingen aardig gespeeld worden. Het aantal onvoldoenden kan en mag hier klein zijn.

In de tweede klas is er weinig „spel”, maar kan meetkunde geleerd worden als elk ander vak. Ook hier kan en mag het aantal onvoldoenden klein zijn.

De derde klas vormt het hoofdprobleem. Slechts enkele leerlingen kunnen het spel met succes spelen, terwijl anderzijds de theorie betrekkelijk eenvoudig is. De eisen hangen in sterkere mate van de instelling van de leraar af dan bij de andere klassen. M.i. behoort hier het aantal onvoldoenden toch niet groot te zijn.

PAKKEND MATERIAAL TER INLEIDING VAN MEETKUNDIGE GRONDBEGRIPPEN

Bespreking van de principes

door

P. M. VAN HIELE

Het peil van het onderwijs op de middelbare school.

Er is een ontwikkeling in de didactiek van de meetkunde waar te nemen, die er toe leidt, dat de stof voor vele leerlingen steeds vervelender wordt. Deze stelling zal ik U nader toelichten.

Collega Streefkerk heeft zich bij zekere gelegenheid eens als volgt uitgelaten: Het peil van de leerlingen zakt voortdurend en de stof zakt mee. We hebben daar erg om gelachen, in de eerste plaats om de geestigheid van de voorstelling, maar toch ook, omdat wij toen meenden, dat hij er toch wel erg naast was. Vergelijkt men nl. de eindexamens H.B.S. van vroeger met die van nu, dan blijkt duidelijk, dat de wiskunde-examens heel wat zwaarder zijn geworden. Met het peil van de leerstof valt het dus schijnbaar nog al mee, maar aan de andere kant wil ik van Dr Streefkerk best aannemen, dat het peil van de leerlingen belangrijk gedaald is: daar zijn trouwens genoeg oorzaken voor aan te wijzen. Wanneer daartegenover het peil van de eindexamens gestegen is, dan is dit m.i. mogelijk geworden doordat een geraffineerde didactiek (het woord geperfectionneerd gaat mij in dit verband niet goed af) ons in staat heeft gesteld bij deze zwakkere leerlingen betere schijnresultaten te bereiken. Laat ons eens nagaan, hoe wij dit klaar spelen.

De ontwikkeling van de didactiek.

De meest directe wijze om de leerlingen de stellingen der meetkunde te onderwijzen is de volgende: De leraar noemt de stelling, maakt de inhoud en de draagwijdte ervan duidelijk, bewijst de stelling op het bord en laat daarna het bewijs leren. Het hangt daarbij natuurlijk geheel van de persoon van de leraar af, in hoeverre bij het poneren van de stelling en het bewijs ervan de klas daarin een werkzaam aandeel heeft. De gunstige kant van deze werkwijze is, dat zij voor leerlingen, die wiskundig hebben leren denken, of althans wiskundig denken hebben leren waarderen, op zichzelf

pakkend is. Het is ook mijn overtuiging, dat wij, hoe wij ook starten en welke middelen ter animering wij ook aanwenden, naar deze werkwijze zullen moeten streven.

Dit neemt niet weg, dat deze werkwijze voor het begin onoverkomelijke bezwaren heeft: beginnende leerlingen hebben meestal nog geen waardering voor de wiskundige werkwijze. Ook is het moeilijk te verwachten, dat leerlingen de werkwijze op de duur wel zullen waarderen, als ze maar lang genoeg aan deze gang van zaken hebben deelgenomen. Ze wennen eraan, daar is alles mee gezegd.

Om te toetsen, of de theorie werkelijk begrepen is en niet domweg uit het hoofd is geleerd, last men vraagstukken in, die de geleerde theorie in de praktijk brengen. Vooral in het begin zijn er dan veel leerlingen, die pas aan de vraagstukken merken, waar het eigenlijk om gaat. Het is dus niet te verwonderen, dat die leerlingen de vraagstukken als hoofdzaak zien. Het is volkomen begrijpelijk en ook niet direct af te keuren, dat zich daaruit een methode ontwikkeld heeft, waarbij men de leerlingen uitsluitend een vraagstukkenboek in handen geeft, aan de hand waarvan de leraar telkens, wanneer dit noodzakelijk blijkt, de bijbehorende theorie afleidt en die in dictaatvorm laat verwerken. Toch heeft deze methode, hoe goed bedoeld ook, zijn bezwaren. Het gevaar is immers groot, dat de theorie nu wat schraal behandeld wordt en de goede leerling niet voldoende aan zijn trek komt. Bovendien is het van hier maar één stap naar een methode, waarbij de theorie zo slecht en de vraagstukken zo goed behandeld worden, dat de leerlingen deze leren oplossen, *zonder* dat zij de theorie goed begrepen hebben. En dan is de zaak net op zijn kop gezet: het vraagstukken maken is doel geworden en het oorspronkelijke doel, nl. het begrijpen van de theorie is op de achtergrond geraakt.

In reactie hierop heeft zich weer een methode ontwikkeld, waarbij men de leerlingen de theorie zelf in vraagstukvorm laat doorwerken. Om dit voor alle leerlingen mogelijk te maken worden alle moeilijkheden systematisch opgespoord, die zich kunnen voordoen. Men rangschikt de opgaven dan zo, dat de leerlingen steeds maar heel kleine stapjes behoeven te doen, zodat struikelen vrijwel uitgesloten is. Ook deze methode is niet zonder gevaar. In de eerste plaats moet, voordat men op de kleine stapjes overschakelt, aan de leerlingen het totale probleem duidelijk voorgelegd worden en nadat het probleem in kleine stapjes doorgewerkt is, moet weer getoond worden, hoe het probleem tot oplossing gebracht is. Het komt er dus eigenlijk op neer, dat men de leerlingen op de ouderwetse manier de zaak voor doet, maar in plaats dat men het bewijs thuis laat leren, laat

men het bewijs met behulp van aanwijzingen thuis overdoen. Zou men de voor- en de nabespreking achterwege laten, dan loopt men gevaar dat men vervalt in de zogenaamde muizenvalinductie. In de tweede plaats heeft de werkwijze het nadeel, dat zij op de lagere middelmaat afgestemd moet zijn, dat de stapjes voor de goede leerlingen veel te klein zijn, zodat die zich grenzeloos kunnen gaan vervelen en in ieder geval steeds ver beneden hun kracht moeten werken. Voor wie dit gevaar onderkend heeft zijn er natuurlijk middelen genoeg om het te bezweren. Men kan de leidende vragen zo stellen, dat de knappe leerling er meer uit haalt dan de middelmatige, men kan ook van tijd tot tijd de knappe leerling plompverloren voor het totale probleem zetten; tien tegen een, dat hij er uit komt!

Moeten wij ons verzetten tegen een didactiek, die op de lagere middelmaat ingesteld is?

De hiervoor geschetste ontwikkeling heeft dus ten gevolge gehad, dat het de leerling steeds gemakkelijker gemaakt is. Ook wanneer men de zelfwerkzaamheid vooropstelt gaat het gemakkelijk dezelfde kant uit, immers de goede gang van zaken vereist, dat de leerlingen niet te veel vastlopen, hetgeen weer meebrengt een instelling van de cursus op de lagere middelmaat. De resultaten op het eindexamen mogen niet anders dan schijnsuccessen genoemd worden, want we weten immers, hoe onderwerpen, die niet op het examen gevraagd worden, zoals de leer der kegelsneden en de differentiaalrekening, hoe langer hoe meer in de verdrukking komen. Op verschillende uiteenzettingen van de theorie moet in de hogere klassen duchtig besnoeid worden, omdat het gros van de leerlingen deze toch niet begrijpen kan. Dit hindert ook niet, want op het examen wordt deze stof niet gevraagd. Intussen moeten de werkelijk intelligente leerlingen, die wij zo nu en dan nog krijgen, geestelijk verkommeren.

Moeten wij nu niet het volle pond gaan eisen en de leerlingen, die eigenlijk niet op de middelbare school thuis horen radicaal de weg versperren? Ik geloof, dat wij dat niet kunnen, en zo wij dit al konden doen, dan geloof ik, dat wij niet het recht hebben om de middelmatige leerlingen nu tegen te houden. De maatschappij vraagt nu eenmaal veelvuldig het H.B.S.-diploma en als de maatschappij dan al grieven heeft tegen de huidige H.B.S.-opleiding, dan zijn die zeker niet gericht tegen het tekort aan wiskundig inzicht. Het is het tweeslachtige karakter van de H.B.S., dat ons parten speelt. Het is het te grote aantal dergenen, die via de H.B.S. een niet-universitaire richting kiezen, die het peil zo doen dalen, maar zolang er

geen andere school is, die deze functie overneemt, kunnen wij aan de toestand weinig veranderen.

Welk materiaal moeten wij de leerlingen voorzetten om de meetkundige begrippen in te leiden?

De lange aanloop, die ik genomen heb, is nodig om bepaalde misverstanden weg te nemen. Wanneer men met nieuw didactisch materiaal aankomt, dan wil men nogal eens de deugdelijkheid daarvan afmeten aan het gemak, waarmee de leerlingen daar mee zullen werken. Volgens deze maatstaf gemeten zal ons materiaal het er niet al te best afbrengen: het was geenszins onze bedoeling nog dommere kinderen langs een nog gemakkelijker weg naar en door het eindexamen te loodsen. Waar wij vooral op willen letten, is, dat de pientere leerlingen niet te kort komen. Trouwens, men bewijst de zwakke leerlingen evenmin een dienst, als men hen didactisch voortdurend in de watten laat liggen.

Hier volgen dan de voornaamste eisen, waaraan het inleidende materiaal zal moeten voldoen:

1. De eerste eis is wel, dat in een hoofdstuk zo snel mogelijk een bepaalde vaardigheid aangeleerd wordt, zodat de leerling zich bewust wordt, dat het hoofdstuk hem nieuwe gebieden ontsluit. Wanneer men bijvoorbeeld de grondconstructies der meetkunde op de juiste wijze aanbiedt, is de leerling zich van meet af aan bewust, dat hij door het kennen van deze grondconstructies een meester zal worden in het hanteren van passer en liniaal. Van het eerste begin af zal men de leerling zoveel vaardigheid moeten bijbrengen, dat hij bezielde wordt van het verlangen deze mogelijkheden in de praktijk te brengen en nieuwe vaardigheden te leren, die zijn potentieel nog zullen vergroten. Eerst dus een heel eenvoudig wijsje leren spelen en dan pas de vingeroefeningen.

2. Een tweede zeer belangrijke eis is, dat het hoofdstuk zo wordt opgesteld, dat de leerling de behoefte gevoelt zijn woordenschat uit te breiden. Hij ontmoet nieuwe begrippen, wil daarover spreken en ziet zich daarom genoodzaakt hun namen te leren. Verschillende problemen uit het hoofdstuk maken een nadere analyse van de begrippen nodig: de begrippen worden gedefinieerd (zonder dat nog het woord definitie gebruikt hoeft te worden). In enkele gevallen zal de leerling moeten constateren dat een begrip in de meetkunde in een andere betekenis gebruikt wordt dan in het dagelijkse spraakgebruik. Aan de tweede eis is gemakkelijk te voldoen en men zal dan waarnemen, dat de leerling zich spoedig en zeer ongedwongen aanpast aan het wiskundige taalgebruik.

3. De hoofdstukken van het begin moeten verschillende entrée's tot de meetkunde bevatten. Aan deze eis is ook vrij gemakkelijk te voldoen. Een hoofdstuk dat heel duidelijk een eenheid vormt kan tegelijkertijd een entrée zijn tot het construeren, tot het begrip oppervlakte en het begrip inhoud. De leerling, die zo'n hoofdstuk heeft doorgewerkt kan dus geanimeerd zijn om zich in de genoemde onderwerpen verder te verdiepen, omdat hij ondervonden heeft, dat daarin voor hem belangrijke problemen verscholen liggen.

4. De hoofdstukken van het begin moeten ook een ongedwongen onderzoek doen naar de kennis, die wij van de lagere school bekend veronderstellen. In aanmerking daarvoor komen vooral het oppervlaktebegrip, de breuken en de verhoudingen. Ervaringen van de laatste jaren hebben ons geleerd, dat van de drie genoemde onderwerpen de leerlingen vrijwel uitsluitend schijnkennis meebrengen. Het is zelfs de vraag, of wij er niet beter aan zouden doen te handelen, of de leerlingen helemaal geen begrip van deze drie onderwerpen hebben: dat is veel veiliger en niet zo ver bezijden de waarheid.

5. Wil het aangeboden materiaal goed tot zijn recht komen, dan moet men er vooral voor zorgen, dat ieder hoofdstuk een duidelijke climax heeft. Deze kan er in bestaan, dat de verworven vaardigheden op het eind een soort meesterstuk opleveren. Het kan ook zijn, dat het hoofdstuk met een puzzle opent en dat het slot de volledige oplossing daarvan brengt.

6. Daar de beginhoofdstukken en natuurlijk ook vele volgende de ingang moeten vormen voor een *aantal* andere hoofdstukken, moet er aan het einde van zo'n hoofdstuk duidelijk gerecapituleerd worden, wat er in behandeld is en wat onthouden moet worden.

7. Ten slotte geef ik nog een aantal middelen, die kunnen dienen om de leerstof voor de leerlingen aantrekkelijk te maken.

A. De titel. Daar moet men niet te licht over denken. Een hoofdstuk, dat de geheimzinnige naam van ganglamp draagt, heeft al direct een heel stuk voor op een hoofdstuk dat de voor de leerlingen weinig zeggende naam van symmetrie heeft. Men moet dus de titels met zorg kiezen en zo nu en dan een hoofdstuk herdopen, waarvan de titel te weinig aantrekkelijk is gebleken.

B. Ruimtelijke betrekkingen en verhoudingen boeien de leerlingen over het algemeen zeer. En er is ruimtelijk materiaal te over, waaraan de leerlingen hun juist geleerde grondbegrippen kunnen toetsen.

C. Een hoofdstuk kan interessant gevonden worden doordat de leerlingen er het werk van anderen in leren waarderen. Zoals bij-

voorbeeld de stelling van Pythagoras, een middel om iets te construeren of om iets te berekenen. Ten slotte moeten we ze zover zien op te voeden, dat zij hun stuwkracht putten uit de liefhebberij in het bewijzen en de hele wiskundige stijl.

D. Men kan leerlingen animeren door hen het werk te tonen dat door andere leerlingen vervaardigd is. Zoals bijvoorbeeld modellen. In vele gevallen zullen zij dan de lust gevoelen ook zo iets te gaan maken.

E. Een andere stimulans wordt gevonden door de leerlingen in kennis te brengen met nieuwe figuren en de namen van die figuren.

F. Het hoofdstuk levert resultaten, die de leerlingen verrassen. Het is dan zaak de spanning er zo in te houden, dat zij ook de verklaringen willen weten.

G. Een nuttige en zeer pakkende bezigheid is ook het herkennen van figuren en relaties tussen figuren. Zoals bijvoorbeeld gelijkvormige en congruente voorwerpen in de huishouding, rechthoekige driehoeken, ruiten, enz., die gevormd worden door de hoekpunten van een regelmatige twaalfhoek met zijn middelpunt.

H. Even boeiend is voor de leerlingen de omgekeerde bewerking van de zo juist genoemde: het benoemen van gegeven figuren en gegeven relaties.

I. Boeiend is voor de leerlingen natuurlijk ook veel van de traditionele oefenstof. Alle oefenstof, waarvan de aantrekkelijkheid in twijfel getrokken kan worden, kunnen we gevoegelijk weglaten: we hebben nog keus genoeg.

J. Voor vele leerlingen zal de stof aantrekkelijker worden, als men hen laat beleven, hoe deze in praktische toepassing gebracht kan worden. Hoe bijvoorbeeld ruimtelijke afbeeldingsmethoden ook een beginner in staat kunnen stellen zich een vrij goed beeld te vormen van een nog te bouwen huis.

Ik hoop, dat ik erin geslaagd ben U duidelijk te maken, in welk licht U de poging om het werk aantrekkelijker te maken, moet bezien. Zij is er dus zeker niet op gericht om de opleiding gemakkelijker te maken en nog dommer kinderen tot het eindexamen te brengen. De weg naar het eindexamen staat er helemaal los van. Het is integendeel onze wens, dat de leerlingen wat meer van wiskunde zullen begrijpen dan soms wel het geval is en wij vrezen dat een gladde weg naar het eindexamen dit begrijpen wel eens zou kunnen bemoeilijken. Noodzakelijk is volgens ons, dat men de kinderen liefde voor de wiskunde bijbrengt. Daarin kan men slagen, als men hen eerst de vreugde van het maken van mooie dingen met behulp van

wiskunde laat beleven en hen er dan gaandeweg toe brengt ook de beknoptheid en duidelijkheid van de wiskundige bewijsvoering te waarderen. Pakt men de zaken met beleid en zonder overhaasting aan, dan zal men zien, hoe de leerlingen ten slotte ook enthousiast worden voor analyse en discussie. En vooral: laten wij de zaak zo aanpakken, dat er voor pientere leerlingen nog wat te kluiven overblijft. Ook al is hun aantal relatief klein, zij vormen niet het onbelangrijkste deel van de klas.

Bespreking van het materiaal

door

MEVR. VAN HIELE-GELDOLF.

Ik heb gemeend, dat het het beste is, een paar werkstukken in hun geheel door te nemen. De kinderen krijgen daarvan in het eerste jaar tien door te werken

Het eerste werkstuk, dat ik zal bespreken is *Het ruitentwaalfvlak*.

Vele leerlingen zijn daarmee begonnen, nadat ik eerst een inleidende les gegeven had. Deze les was niet alleen geschikt voor het ruitentwaalfvlak, maar ook voor andere inleidende werkstukken. Deze les verliep ongeveer als volgt:

Met armzwaaien werd getoond, wat men onder een gestrekte hoek verstaat. Deze werd dus niet gedefinieerd. Daarna de rechte hoek, dus de helft van de gestrekte. Opgenoemd werd, dat deze ook in de tekendriehoek voorkomt. Vervolgens werd een stukje papier getoond, waarvan de randen onregelmatig waren en gevraagd daarvan een rechte hoek te vouwen. Bij de eerste vouw werd het begrip rechte lijn ter sprake gebracht, bij de tweede kwam de rechte hoek. Er werd gesproken over de benen van een hoek. Opgenoemd werd, dat men gewoonlijk rechte lijnen trekt met behulp van een liniaal en rechte hoeken maakt met behulp van een tekendriehoek. Dat alle rechte hoeken gelijk zijn, wordt door de leerlingen vanzelfsprekend geacht. Vervolgens werd het begrip lijnstuk ingevoerd en gevraagd, hoe men kan constateren, dat twee lijnstukken even lang zijn. Zo komen we op passen, langs elkaar leggen, meetlat gebruiken, passer gebruiken. Op het bord werd aangetoond, hoe men een lijnstuk kan overbrengen. Vier potloden van gelijke lengte werden uitgezocht en gevraagd daarvan een vierhoek te leggen, die geen vierkant is. Gevraagd werd, of de leerlingen deze figuur meer gezien hadden, of ze de naam kenden. Er werd gewezen op het ver-

schil van de figuur met de hun bekende vensterruit. Hier bleek dus de noodzaak te definiëren, wat men in de meetkunde onder ruit verstaat. Van het opgevouwen papier werd daarna ook een ruit gemaakt. Nadat de figuur opengevouwen was werden de diagonalen aangewezen. Hierna konden de leerlingen aan hun werkstuk beginnen.

Blad 1 van het ruitentwaalfvlak begint met de rechte hoek. Gevraagd wordt door middel van de tekendriehoek en door middel van vouwen rechte hoeken te maken.

Op blad 2 wordt gevraagd een lijnstuk met de passer over te brengen.

Op blad 3 wordt gevraagd een vierkant te tekenen met behulp van tekendriehoek en passer. De naam diagonaal wordt ingevoerd. „Hoeveel diagonalen heeft een vierkant? Zijn ze even lang? Dit kan door meting worden vastgesteld”.

Blad 4. Om te onderzoeken, of het verschil tussen vierkant en rechthoek voldoende bekend is, wordt gevraagd, of dit blad een vierkant is. Het blad is rechthoekig, het is aan de achterkant verdeeld in drie rijen van vijf vierkanten, elk met een zijde van 5 cm. De begrippen rechthoek en vierkant worden hier niet gedefinieerd, er wordt alleen gevraagd, of de leerlingen het verschil kennen. „Hoeveel vierkanten, waarvan de zijde 5 cm is, bevat de rechthoek? Teken een rechthoek, waarvan de lengte en de breedte resp. 4 en 3 cm zijn. Hoeveel vierkantjes, waarvan de zijde 1 cm is, kun je daarop plakken, zodat de rechthoek precies eenmaal overdekt is? Men noemt een vierkantje, waarvan de zijde 1 cm is, vierkante centimeter. Het boven gevondene kan als volgt onder woorden gebracht worden: Een rechthoek van 4 bij 3 cm heeft een oppervlakte van 12 cm^2 ”.

Blad 5 handelt over de ruit. Hier wordt getoetst, of het lesje, dat over de ruit handelde goed begrepen is. Gevraagd wordt daarna een ruit te tekenen, waarvan de diagonalen 8 en 5 cm zijn. „Aan de achterkant van het blad vind je een enveloppe, waarin vier driehoeken, die je kunt samenvoegen tot een rechthoek van 4 bij 5 cm. Doe dit. Ook kun je er de ruit, die je in je schrift hebt getekend, mee leggen. Hoe groot is dus de oppervlakte van die ruit?” Hiermee is aangetoond, dat men ook oppervlakten van figuren kan bepalen, die geen rechthoeken zijn.

Blad 6 heet kubus. De leerlingen krijgen een model van een kubus in handen. Gevraagd wordt door hoeveel vierkanten hij begrensd wordt en hoeveel cm^2 er nodig zouden zijn om de kubus geheel te beplakken. (De ribbe is 4 cm). Vervolgens wordt gevraagd zelf een

kubus te maken met een ribbe van 4 cm. Het netwerk is voorge-tekend. De leerlingen krijgen de beschikking over een groot aantal kubusjes met een ribbe van 1 cm. Van deze kubusjes moeten zij een kubus maken met een ribbe van 3 cm. Op deze wijze komen zij tot het inhoudsbegrip. Deze opgaaf is gebleken *niet* overbodig te zijn.

Blad 7 heet prisma. „Maak van tekenpapier een rechthoek lang 5,7 cm en breed 4 cm. Deze past in de kubus, die je in 6 gemaakt hebt. De kubus wordt door het tussenschot in twee gelijke stukken verdeeld. Ieder deel wordt prisma genoemd”. Het netwerk van zo'n prisma wordt gegeven, er wordt gevraagd dit na te tekenen en er een prisma van te plakken. „Hoeveel cm^3 is de inhoud van dit prisma”?

Blad 8 heet viervlak. „Men noemt een kubus ook wel zesvlak. Waarom? Er bestaat ook een viervlak. Het wordt door vier driehoeken begrensd”. Gevraagd wordt een driehoek te tekenen, waarvan de zijden 5,7 cm zijn. Dit gebeurt met behulp van passer en liniaal naar een gegeven voorbeeld. „Construeer een figuur, die kan worden opgevouwen tot een viervlak, waarvan de ribben 5,7 cm zijn”. Een model wordt pas gegeven, als de leerlingen er niet in

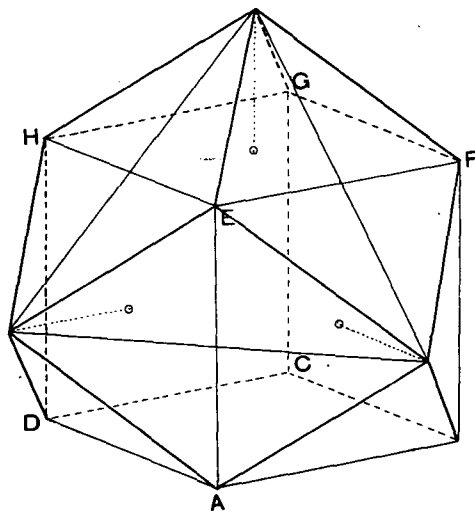


Fig. 1

slagen het netwerk te construeren. „Het viervlak kan zo geplaatst worden in de kubus van no 7, dat het deksel dicht kan. Probeer het eens”.

Blad 9 heet pyramide. De leerlingen krijgen enige modellen van pyramiden in handen. Deze zijn niet regelmatig. Op het blad staat een netwerk getekend van een regelmatige vierzijdige pyramide,

waarvan de grondribben 4 cm zijn en de opstaande ribben $3\frac{1}{2}$ cm. De leerlingen moeten dit natekenen, uitknippen en dichtplakken. Gevraagd wordt, hoeveel van deze pyramiden er nodig zijn om er een kubus van te bouwen. Dit zijn er zes en om dit te kunnen onderzoeken, werken de leerlingen in groepjes samen. „Hoeveel cm^3 is de inhoud van zo'n pyramide? Neem nu de kubus van no 6, plak het bovenvlak dicht en plak vervolgens op ieder zijvlak zo'n pyramide. Het lichaam, dat zo ontstaat, noemt men wel ruitentwaalfvlak. Kun je die naam verklaren?” Daarna wordt de leerlingen een model van een ruitentwaalfvlak getoond. Nu komt de climax. Gevraagd wordt het netwerk van het ruitentwaalfvlak zelf te maken. Weinig leerlingen slagen er in een sluitend netwerk te krijgen. De meeste moeten een of twee ruiten afknippen en ergens anders toevoegen. De probleemstelling is duidelijk. De leerlingen tonen spontane bewondering voor diegenen, aan wie het gelukt is het model uit één stuk te vervaardigen. De andere leerlingen zijn toch bevredigd, omdat zij ondanks gemaakte fouten toch een behoorlijk geheel krijgen. Spelenderwijze krijgen ze een grote vaardigheid in het hanteren van de passer. Ten slotte wordt de inhoud van het ruitentwaalfvlak gevraagd.

Blad 10 geeft de samenvatting. „Leer het volgende: *a.* Een vierhoek met vier gelijke zijden noemt men ruit. *b.* Een ruit kan langs zijn diagonalen dubbelgevouwen worden. *c.* In een ruit vormen de diagonalen rechte hoeken met elkaar. Beantwoord de volgende vragen: *d.* Op hoeveel manieren kan men een vierkant dubbel vouwen? *e.* Kun je een rechthoek ook dubbel vouwen om een diagonaal? *f.* Kun je een rechthoek op een andere manier dubbel vouwen?”

De namen van de veelvlakken worden als volgt gerepeteerd: Uit een doos met modellen moeten de pyramiden opgezocht worden. Daarna de prisma's. Er wordt alleen onthouden, dat in de pyramiden de opstaande ribben in één punt samenkomen en dat deze bij de prisma's evenwijdig zijn. In de doos komen prisma's voor, die zij nog niet eerder tegengekomen zijn en andere modellen, die noch pyramide noch prisma zijn. De meeste leerlingen rekenen de kubus niet onder de prisma's. Ik vraag dan, of hij er een is. Sommige leerlingen antwoorden: Neen, want het is een kubus. Andere raken aan het twijfelen. Het viervlak wordt wel steeds tot de pyramiden gerekend en dit kan de schakel worden, die het mogelijk maakt de kubus ook tot de prisma's te doen rekenen. Er wordt op gewezen, dat kubus en viervlak bevoorrechte lichamen zijn, omdat zij er steeds eender uitzien, op welk zijvlak men ze ook neerlegt. Gevraagd wordt, of er in de doos nog meer van zulke lichamen voor-

komen. Dit zijn dan het regelmatige achthoek en het regelmatige twintigvlak. (Een regelmatig twaalfvlak komt er niet in voor).

Als tweede te bespreken werkstuk neem ik er een, dat op een hoger niveau ligt. Het werkstuk heet *Vergroten en Verkleinen*.

Aangenomen wordt, dat de leerlingen het niveau bereikt hebben, waarop ze meetkundige figuren kunnen herkennen en onderscheiden, dat ze de eigenschappen van deze figuren kennen en dat zij met deze eigenschappen kunnen opereren. Met het werkstuk beogen wij het bereiken van een hoger niveau, nl. het kunnen opereren met relaties tussen figuren. De beide eerste bladen doen een onderzoek, of het eerste niveau bereikt is.

Blad 1 bevat een aantal figuren, waarvan de leerlingen de naam moeten geven; figuren, die in verschillende standen voorkomen.

Op blad 2 wordt van de leerlingen verlangd zelf een aantal figuren te construeren, waarvan de maten worden opgegeven. Er is voor gezorgd, dat de figuren ten dele congruent en ten dele gelijkvormig zijn met die van blad 1 of met elkaar. Onder de figuren komen driehoeken, vierhoeken, regelmatige zeshoeken, hoeken en cirkels voor.

Op blad 3 gaan we deze figuren met elkaar vergelijken. We knopen aan bij een bekende relatie: de schaal op de landkaart,



Fig. 2

vergrotingen van foto's. „Van de afgebeelde gevels zegt men, dat zij dezelfde vorm hebben: de ene is een vergroting van de andere”. Verder worden twee kaartjes van Denemarken gegeven; de schaal van het ene kaartje is vermeld: nl. 1 : 6000000. Gevraagd wordt hemelsbreed de afstand van Esbjerg naar Aarhus in km te bepalen door middel van meting op het kaartje. De schaal van het tweede kaartje is niet vermeld. Gevraagd wordt deze te berekenen met behulp van de nu bekende afstand van Esbjerg tot Aarhus. Gevraagd

wordt verder door meting de gelijkvormigheidsfactor van de gevels te berekenen. Van de figuren van blad 1 en blad 2 te zamen wordt gevraagd uit te maken, welke er gelijkvormig zijn. Voorlopig wordt het aan de leerlingen overgelaten, of zij congruente figuren op wenssen te vatten als gelijkvormige. Steeds wordt gevraagd naar de gelijkvormigheidsfactor.

Op blad 4 wordt gevraagd figuren op te noemen, die altijd gelijkvormig zijn. Daarna, of alle rechthoeken gelijkvormig zijn. Hier springt een verschil met het spraakgebruik naar voren: In de wetenschap zijn rechthoeken niet altijd gelijkvormig, in het spraakgebruik hebben alle rechthoekige tafels dezelfde vorm, doordat zij een tegenstelling met de ronde tafels vormen. Het blijkt hier dus, dat het begrip gelijkvormig nader vastgelegd dient te worden. Om te onderzoeken, of twee rechthoeken, bv. een blad papier en een tafelblad gelijkvormig zijn, moet er een meting verricht worden. Ook naar ruimtefiguren wordt gevraagd, waarbij een doos met cartonmodellen ter beschikking staat. „Zijn twee bollen gelijkvormig? Zijn twee kegels gelijkvormig?” Bij de laatste vraag wijst men de leerlingen op spitse en stompe torens. „Van twee gelijkvormige cilindervormen is bekend, dat de stralen van de grondcirkels resp. 2 en 8 cm zijn. De kleinste cilinder is 6 cm hoog. Bereken de straal van de andere cilinder. Teken een ruit, die gelijkvormig is met de ruit, die in fig. 1 van blad 1 getekend is”. Ook wordt gevraagd een meer ingewikkelde figuur, waarin lijnstukken en cirkeldelen voorkomen te vergroten. Gevraagd wordt gelijkvormige voorwerpen aan te wijzen in het werkklokaal. Nu beschouwen de leerlingen congruente banken en tafels als gelijkvormig. Op dat moment wordt dus de congruentie opgevat als een bijzonder geval van gelijkvormigheid.

Blad 5 handelt over congruentie. Uit de figuren van blad 1 en 2 worden er twee gehaald, die elkaar kunnen bedekken. In dat geval noemt men ze congruent. Gevraagd wordt de gelijkvormigheidsfactor van twee congruente figuren. „Zoek uit de figuren van blad 1 en 2 die, welke congruent zijn. Zijn er figuren, die altijd congruent zijn?” Op blad 1 en 2 kunnen de leerlingen er enkele vinden. „Teken een ruit, die congruent is met die van fig. d van blad 1. Hoe kun je nagaan, dat driehoeken, die op blad 1 getekend zijn, congruent zijn? Wat kun je zeggen van de hoeken van twee congruente figuren? Wat van de hoeken van gelijkvormige figuren?” Er wordt ook gewezen op figuren, die wel dezelfde oppervlakte hebben, maar die niet congruent zijn. Gevraagd wordt van vier congruente rechthoekige driehoeken een ruit te leggen en ook twee verschillende rechthoeken. „Deze figuren hebben dezelfde oppervlakte, maar ze zijn niet congruent. Teken een andere ruit, die dezelfde oppervlakte heeft

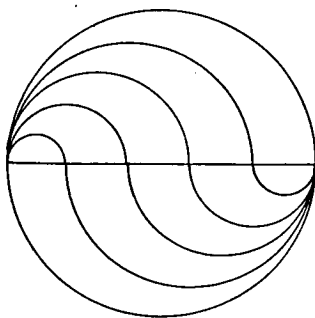


Fig. 3

als de ruit, die je zo pas gelegd hebt". Getekend wordt een vierkant met zijn diagonalen. Gevraagd wordt een stel van vier driehoeken in die figuur aan te wijzen, die congruent zijn. Daarna nog een tweede stel. Daarna, of de leerlingen ook gelijkvormige driehoeken kunnen aanwijzen.

Blad 6. In figuur 3 is een cirkel door een aantal halve cirkels verdeeld in vijf delen. „Zijn er congruente delen bij? Zijn er gelijkvormige delen bij? Teken deze figuur twee maal zo groot in je schrift. De delen van deze figuur zijn niet alle congruent, maar ze hebben wel alle dezelfde oppervlakte en dezelfde omtrek”.

Op blad 7 wordt de relatie gelijkvormigheid en congruentie nader bestudeerd: we bekijken in dat verband het aantal gegevens, dat nodig is om een figuur te bepalen.

„We vestigen de aandacht op de drie volgende uitspraken:

1. Alle vierkanten zijn gelijkvormig.
2. Met één gegeven is een vierkant te construeren.
3. Twee vierkanten zijn congruent, als ze een zijde (of een diagonaal) gelijk hebben.

Schrijf zelf soortgelijke uitspraken op voor de meetkundige figuur: de cirkel.

Voor welke bijzondere driehoeken kun je soortgelijke uitspraken doen?” (Op blad 1 komen een rechthoekige gelijkbenige driehoek en een gelijkzijdige driehoek voor).

Vervolgens worden figuren beschouwd, die door twee gegevens bepaald zijn. „Wanneer zijn twee rechthoeken gelijkvormig? Hoeveel gegevens zijn er nodig om een rechthoek te construeren? Men kan zeggen: Twee rechthoeken zijn congruent, als twee verschillende zijden van de ene rechthoek gelijk zijn aan twee zijden van de andere. Zijn alle ruiten gelijkvormig? Hoeveel gegevens zijn er nodig om een ruit te construeren? Welke gegevens zou men kunnen kiezen?

Men kan zeggen: Twee ruiten zijn congruent, als zij gelijk hebben een zijde en een hoek. Ook als zij de diagonalen gelijk hebben. Eveneens, als zij een zijde en een diagonaal gelijk hebben.

Schrijf zelf een soortgelijk verhaal over de gelijkbenige driehoek”.

In alle bovenstaande gevallen wordt ook gevraagd de figuren te construeren met strokenmateriaal.

Blad 9 handelt over de congruentie van driehoeken.

„Hoeveel gegevens zijn er nodig om een driehoek te construeren?”

We beperken ons tot de zijden en de hoeken. Op blad 2 hebben de leerlingen driehoeken getekend, waarvan de drie zijden gegeven waren of één zijde en de beide aanliggende hoeken. Uit de eenduidigheid van de constructie wordt tot de congruentie der driehoeken besloten.

„Wij schrijven het resultaat als volgt op:

Twee driehoeken zijn congruent als zij gelijk hebben een zijde en de beide hoeken, die aan die zijde grenzen. Kan men een driehoek nog op andere wijze construeren dan door een zijde en de hoeken aan die zijde te kiezen? Tracht nog twee gevallen te vinden. Schrijf

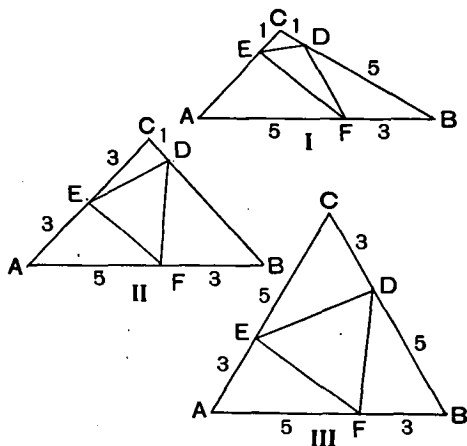


Fig. 4. Gelieve te lezen in tekening I lijn $AE = 3$ en in tekening II lijn $BD = 5$.

het resultaat op, zoals boven is voorgedaan". De gevallen, die de leerlingen kunnen vinden zijn alleen: zzz en zhz. Deze afkortingen worden nu nog niet gegeven, evenmin als de gebruikelijke wijze van opschrijven. Over andere gevallen van congruentie wordt niet gesproken. Deze drie gevallen moeten goed geleerd worden. Dat door drie gegevens een driehoek vastligt wordt nader beklemtoond door een aantal constructies, waarin ook hoogtelijnen, zwaartelijnen en bisectrices voorkomen.

Op blad 10 komen enkele toepassingen van de congruentie ter sprake. Op het blad zijn de bovenstaande figuren getekend. De maten zijn hierboven in cm aangegeven. „In fig. II zijn twee van de drie zijden van $\triangle DEF$ gelijk. Dit is door meten na te gaan. Tracht door een *redenering* de gelijkheid van die zijden aan te tonen". Wanneer de leerlingen alleen wijzen op de getallen 3 en 5, die tweemaal in de driehoeken voorkomen, dan toont fig. I aan, dat dit onvoldoende is. In fig. III moet aangetoond worden, dat van $\triangle DEF$ alle drie zijden gelijk zijn.

Ik merk nog even op, dat wij de gelijkvormigheid niet eerst bestuderen aan driehoeken, maar aan vierhoeken. De gelijkvormige

BOEKBESPREKING

Arnaud Denjoy, *Mémoire sur la dérivation et son calcul inverse*. Gauthier Villars, Paris, 1954.
VIII en 380 blz.

Langs photomechanische weg vindt men in dit werk bijeengebracht een drietal klassieke verhandelingen van Denjoy, die tijdens de eerste wereldoorlog verschenen in de *Journal de math.* (1915), *Bull. Soc. Math.* (1915) en *Ann. Éc. Norm. Sup.* (1916, 1917). De eerste (*Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*) is gewijd aan de bekende stelling van Denjoy: voor een op $[a, b]$ continue functie $f(x)$ is in de punten x van $[a, b]$, met uitzondering van die ener deelverzameling van de maat nul, één der vier volgende mogelijkheden vervuld: 1° er bestaat een eindige afgeleide $f'(x)$; 2° er zijn rechts- en linkszijdige bovenste afgeleiden $D_r^+ f = D_l^+ f = +\infty$, rechts- en linkszijdige onderste afgeleiden $D_r^- f = D_l^- f = -\infty$; 3° $D_r^+ f = D_l^- f =$ eindig en $D_r^- f = -\infty$, $D_l^+ f = +\infty$; 4° $D_r^- f = D_l^+ f =$ eindig en $D_r^+ f = +\infty$, $D_l^- f = -\infty$. De tweede publicatie (*Sur les fonctions dérivées sommables*) voert de approximatief continue functies in, en laat zien dat deze in nauw verband staan tot de afgeleide functies. Ze vinden o.m. toepassing bij de constructie van begrensde afgeleide functies van bijzondere aard, en bij de behandeling van de differentieerbaarheidseigenschappen van de Lebesgue-integraal.

Terwijl een in $[a, b]$ begrensde afgeleide functie $f'(x)$ over $[a, b]$ geen Riemann-integraal behoeft te hebben, is ze daar wel steeds integreerbaar in de zin van Lebesgue, waarbij voor $a \leq x \leq b$ dan steeds: $(\alpha) \dots f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x) dx$; voor begrensde afgeleiden lost de Lebesgue-integraal het probleem der primitieve functies op. De derde verhandeling (*Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables*) begint in haar tweede hoofdstuk met een voorbeeld, dat toont, dat voor alleen eindige afgeleiden de Lebesgue-integraal daartoe niet steeds voldoende is. Dit was voor Denjoy de aanleiding de door hem totalisatie genoemde uitbreiding van de Lebesgue-integraal in te voeren; de relatie (α) geldt algemeen bij $f'(x)$ eindig onder gebruik van de Denjoy-integraal. Er worden twee definities der integraal gegeven, de een descriptief, de ander con-

structief van aard. Bij de laatste speelt transfiniete inductie een belangrijke rol.

Waar na 1917 talrijke publicaties zijn verschenen, die op het werk van Denjoy voortbouwden, en tot generalisaties in verschillende richting hebben gevoerd (zowel van methoden als van resultaten), die hier in geen naschrift of anderszins vermelding vinden, ligt het voor de hand te verwachten, dat de Schrijver met deze hernieuwde uitgave geen wetenschappelijk, doch eer een didactisch doel nastreeft. Het Avertissement bevestigt dit.

Tussen de klassieke analyse enerzijds en de algemene analyse en moderne topologie anderzijds ligt het gebied der functies van reële veranderlijken; hier beschouwde Cantor in de n -dim. cartesische ruimten, oorspronkelijk zelfs alleen in de lineaire ruimte (op de getallenrechte) de verzamelingen, die als gesloten, perfect, reductibel, dicht, nergens dicht, etc. bekend staan; hier gaf Baire de indeling van functies in de naar hem genoemde klassen, en gaven Borel en Lebesgue, naast deze descriptieve begrippen, de metrische begrippen van maat en integraal; hier moeten dus ook de eerste voorbeelden gevonden worden, die deze abstracte begrippen een reële inhoud geven en den mathematicus daardoor in staat stellen ze met volledig inzicht toe te passen zowel in abstracte topologie en algemene analyse als in de theorie der functies van complexe veranderlijken, en der partiele differentiaalvergelijkingen; hier ten slotte vindt men ook de eerste concrete toepassingen van het begrip van cardinaalgetal en van de methode der transfiniete inductie.

De vlot geschreven *Mémoire* van Denjoy nu geeft een overvloedig oefeningsmateriaal op genoemd gebied in de talrijke voorbeelden en tegenvoorbeelden, die het bevat. Samen met de *Leçons sur les fonctions discontinues* van Baire en de *Leçons sur l'intégration* van Lebesgue vormt het een uitstekende inleiding in de theorie der functies van reële veranderlijken, en geeft het alle oefening nodig als voorbereiding tot de studie der abstracte analyse. Naar de Schrijver meedeelt, bleek dit reeds bij herhaling. Dit was voor hem en de Uitgeefster aanleiding tot deze hernieuwde uitgave. Gelijk bekend, is Denjoy een vurig voorstander van het gebruik van de methode der transfiniete inductie in de wiskunde, en vindt deze ook uitvoerige toepassing en beschouwing in zijn nieuwe werken (*L'énumération transfinie* en *Leçons sur le calcul des coefficients d'une série trig.*); ook als voorbereiding tot de lectuur van deze is speciaal de derde verhandeling uit de *Mémoire* een uitstekende voorbereiding.

J. RIDDER

JULES HENRI POINCARÉ

(Nancy 1854—Parijs 1912) ¹⁾

door

Dr P. G. CATH

Terwijl het in 1953 honderd jaren geleden was, dat H.A. Lorentz en H. Kamerlingh Onnes werden geboren, valt in 1954 het geboortejaar van J. H. Poincaré, de Franse wis- en natuurkundige, astronoom en filosoof. Aan het slot van het Internationale Congres van Mathematici, dat in dit jaar in Amsterdam werd gehouden, vond een herdenking van Poincaré plaats. Henri Poincaré, die in 1912 overleed, behoorde tot de grootste mathematici van zijn tijd, welke een wetenschappelijke vernieuwing der mathematische analyse tot stand bracht. Daarnaast was hij een natuurkundige van internationale vermaardheid, tevens echter astronoom, terwijl hij in brede kringen bekend is geworden, door zijn filosofische geschriften, die in het laatste gedeelte van zijn leven ontstonden.

Zijn beide ouders kwamen uit Lotharingen, waarin hij op 29 April 1854 te Nancy werd geboren. Aan het einde van het cursusjaar 1871—1872 kreeg hij op zeventienjarige leeftijd in een algemeen concours de eerste prijs voor elementaire wiskunde. Bij dit vergelijkende examen moest hij concurreren met de leerlingen van alle Franse lycea. Daarna bezocht hij de Ecole Forestière, waar hij bij de toelating tweede was. Bij de toelating tot de Ecole Polytechnique was hij nummer een.

Zijn eerste publicatie verscheen in 1876: „Mémoire sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles.” Zij werd gedrukt in 1878 in het Journal de l'Ecole Polytechnique. In 1878 promoveerde hij te Parijs op een proefschrift, dat de integratie behandelde van vergelijkingen met partiële afgeleiden en een willekeurig aantal onafhankelijk veranderlijken. In 1878 werd hij benoemd tot leraar in Caen, maar reeds aan het begin van het cursusjaar 1881—1882 werd hij aangewezen als maître de conférences d'analyse te Parijs. Vier jaren later was hij belast met lessen

¹⁾ Voordracht voor het „Genootschap voor de Geschiedenis der Geneeskunde, Wiskunde en Natuurwetenschappen” (1954).

over „*Mécanique physique et expérimentale*”. In 1886 volgde hij Lippmann op in de leerstoel voor theoretische natuurkunde en waarschijnlijkheidsrekening.

In de wiskunde moet men zijn bijdragen noemen tot de getallentheorie. In de algebra zijn onderzoekingen over homogene functies en de tekenregel van Descartes over het aantal positieve wortels van een n -de machtsvergelijking. Verder over een bewijs naar aanleiding van determinanten van oneindige orde, over *thêta*-functies met meerdere veranderlijken, over de functies van Fuchs en Klein, een bijdrage over de herleiding van Abelse integralen en over onregelmatige integralen van lineaire vergelijkingen.

Door dit wiskundige werk werd hij, toen hij 32 jaren oud was Membre de l'Institut de France. In 1885 kreeg hij een prijs van 2500 Zweedse kronen, uitgelooft door Koning Oscar II en een voorloper van de Nobelprijzen voor een verhandeling: „*Mémoire sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique*”.

Indien twee lichamen elkaar volgens de wetten van Newton aantrekken, dus omgekeerd evenredig met het kwadraat van de afstand, is hun onderlinge beweging volkomen bekend. Dit is bijvoorbeeld het geval van de zon en een planeet, indien met de werking van andere hemellichamen buiten beschouwing laat. Komt er een derde lichaam bij, dan worden de moeilijkheden groot. Men zag in, dat er tien betrekkingen tussén de gevraagde grootheden (de negen coördinaten, die de plaats bepalen) moesten bestaan. Dit zijn de integralen van de bewegingsvergelijkingen. Zes van deze drukken uit, dat het zwaartepunt zich eenparig rechtlijnig beweegt, drie die vastleggen, dat het moment van hoeveelheid van beweging van het stelsel constant is en een betrekking, die aangeeft, dat het totale arbeidsvermogen niet verandert. Daar er in deze betrekkingen ook afgeleiden van de negen coördinaten voorkomen, zijn deze tien betrekkingen niet voldoende. Om tot een oplossing te komen, moet men gebruik maken van onderstellingen en benaderingen. Een van deze onderstellingen is, dat het derde lichaam in vergelijking tot de beide anderen een kleine massa heeft. Aan dit „*problème restreint*” is de naam van Poincaré verbonden.

Voor al echter moet de samenwerking van Poincaré met Felix Klein worden genoemd. Klein werd in 1849 geboren te Düsseldorf en hij leefde tot 1925. Hij studeerde bij Plücker in Bonn, bij Clebsch in Göttingen en trok met Sophus Lie naar Parijs, waar toen G. Jordan de groepentheorie ontwikkelde. Toen hij 22 jaren oud was werd hij privatdocent in Göttingen en een jaar later, in 1872 werd hij hoogleraar in Erlangen. Zijn intrede was het bekende

„Erlanger Programm”, dat de titel draagt: „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen”. In 1875 is hij hoogleraar aan de T. H. te München, in 1880 te Leipzig en vanaf 1886—1925 te Göttingen. In het laatste gedeelte van zijn leven was hij de organisator van het Duitse onderwijs op wiskundig gebied en hield hij zich bezig met historisch onderzoek: „Die Geschichte der Mathematik der Neuzeit”. Hij was de ziel van de „Enzyclopaedie der mathematischen Wissenschaften”. Zijn werk op het gebied van het onderwijs leidde tot de I.M.U.K. (Internationale Mathematische Unterrichtskommission), in het Frans C.I.E.M. (Commission Internationale de l'enseignement mathématique.)

Zijn samenwerking met Poincaré loopt in hoofdzaak over de automorphe functies. Dit zijn functies, die dezelfde waarden aannemen, indien de reële of complexe veranderlijke vervangen wordt door zekere lineaire gebroken functies van de veranderlijke. Eenvoudige voorbeelden van deze functies zijn de goniometrische en ook de elliptische functies, waarvan de eerste enkel-, de tweede dubbelperiodiek zijn. Niet alleen, dat hij hier baanbrekend werk verrichtte, ook de nomenclatuur had zijn aandacht. In hoofdzaak kan dit gebied aldus worden omschreven.

Zij gegeven $f(z)$, waar z reëel of complex, dus $z = x + iy$. Gevraagd door de lineaire substitutie $z = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ die $f(z)$ te bepalen, waarvoor $f(z) = f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$. Functies van het argument z , waarvoor dit het geval is, zijn automorphe functies. Daarbij kunnen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reëel of complex zijn. Indien $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reëel zijn, spreekt Poincaré van functies van Fuchs, zijn zij complex, dan heeft men in de nomenclatuur van Poincaré te doen met functies van Klein. Er bestaan ook pseudo-automorphe functies, gedefinieerd door $f(z) \cdot (\gamma z + \delta)^{2m} = f\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$. Deze noemt Poincaré thetafuchsische functies. Ook in de groepentheorie voerde Poincaré deze benamingen in. Zijn in de substitutiegroep $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reëel, dan heeft men te doen met groepen van Fuchs, zijn de coëfficiënten complex, dan is de substitutiegroep een groep van Klein.

Immanuel Lazarus Fuchs (1833—1902) heeft zijn naam verbonden aan de theorie der lineaire differentiaalvergelijkingen. Hierin stelde hij in de voetstappen van Riemann tredend een aantal fundamentele theoremas op.

Maar niet alleen in het gebied der functietheorie was Poincaré

werkzaam. In de theorie der conforme afbeeldingen, waarbij oppervlakken op elkaar worden afgebeeld door de betrekking: $\varphi(w, z) = 0$ zijn er bijdragen van hem over lineaire, parabolische en elliptische substituties. Voor twee gebieden, die aan elkaar grenzen, zodat een gedeelte van hunne begrenzing gemeenschappelijk is voerde Poincaré de naam limitrophe in. Een werk, dat een overzicht geeft over het gehele gebied der functietheorie is door Poincaré niet geschreven, na hem zijn er reeksen van zulke werken samengesteld.

Van d'Alembert (1717—1783) stamt de uitspraak, dat de definitie van de rechte lijn, zoals die door Euclides is gegeven de klip en het schandaal van de meetkunde is. In de „Elementen” van Euclides en de beschouwingen over het axioma, dat er door een punt maar één rechte lijn evenwijdig aan een andere kan worden getrokken, die door een groot aantal meetkundigen zijn gehouden, vond Poincaré aanleiding over de grondslagen der meetkunde te gaan nadenken. Voor hem zijn de axiomas niets dan afspraken of min of meer volledige definities, die onze intuïtie schept, steunende op de ervaring. Evenals Hilbert wordt hij gerekend tot de conventualisten. De waarde van definities en axiomas taxeren zij slechts naar de practische bruikbaarheid. Zij zijn slechts betrekkelijk waar, naar gelang van de conclusies, die er uit kunnen worden getrokken. Zij leveren niet de grondslag voor de waarde van deze conclusies. Maar de conclusies leveren de grondslag voor de „waarheid” of juist gezegd voor de doeltreffendheid van axiomas en definities. Blijken andere definities en axiomas in dit opzicht vruchtbaarder te zijn, dan worden zij door deze vervangen.

Bij een dergelijke pragmatische opvatting omtrent de grondslagen der wiskunde is natuurlijk ook plaats voor een irreële z.g. transcendentale mathematica, met gefingeerde kwantiteiten als object, zoals de niet-Euclidische meetkunde, waarin het parallelenaxioma van Euclides is uitgevallen. Ook op dit gebied verrichtte Poincaré oorspronkelijk werk. Hier spreekt men van het model van Poincaré.

Dit werk plaatste Poincaré reeds op een vooraanstaande plaats als wiskundige. Als opvolger van Lippmann heeft hij na 1886 aan de Sorbonne colleges in de theoretische natuurkunde gegeven. Evenals hier te lande de lessen van H. A. Lorentz zijn deze colleges door zijn leerlingen uitgegeven. Eerst bij de uitgevers G. Naud, later bij Naud et Carré en tenslotte zijn al deze uitgaven door Gauthier-Villars overgenomen.

De titels van deze colleges zijn:

a. Leçons sur la théorie mathématique de la lumière.

- b. Cinématique et mécanismes.
- c. Electricité et optique
- d. Thermodynamique.
- e. Capillarité.
- f. Théorie de l'élasticité.
- g. Théorie des tourbillons.
- h. Théorie analytique de la chaleur.
- i. Calcul des probabilités.
- j. Théorie du potentiel Newtonien.
- k. La théorie de Maxwell et les ondes hertziennes.

In zijn thermodynamica gaf hij verschillende bewijzen voor de tweede hoofdwet voor niet-omkeerbare kringen. In de warmtegeleiding van Poincaré vindt men enkele nieuwe methoden voor reeksontwikkelingen van voor de warmtegeleiding belangrijke functies. Zijn kinematica begint met een eenvoudig overzicht over theoretische kinematica, waaraan een behandeling aansluit van praktische hulpmiddelen, die voor het overbrengen van bewegingen belangrijk zijn: schroeven, tandwielen, koppelingen o.a. die van Cardanus, die merkwaardig genoeg „joint hollandais” wordt genoemd, de inrichting volgens Stephenson, die de stoomverdeling in stoomwerktuigen regelt, zodat de bewegingsrichting omgekeerd kan worden. Daaraan sluit aan potentiaaltheorie en de beweging van vloeistoffen. Ook de andere werken zijn van blijvende waarde gebleken. Wij willen volstaan met afzonderlijk te vermelden zijn discussies en uitbreidingen van de theorien van Maxwell, Hertz, Larmor en Lorentz. Verder komen ter sprake verschillende wiskundige vragen met betrekking tot de draadloze telegrafie, het electromagnetische veld in dichtbij en veraf gelegen punten, breking, ontvangst, resonantie, gerichte, staande en lopende golven enz. Daarnaast een zeer groot aantal tijdschriftartikels, waarvan wij noemen uit het *Recueil de travaux offert à M. Lorentz à l'occasion du vingt-cinquième anniversaire de son doctorate* „La théorie de Lorentz et le principe de réaction”.

Een van zijn laatste artikelen (Januari 1912) is gewijd aan de theorie der energiequanta.

In al dit werk volgt Poincaré meestal analoge wegen. Voor alles tracht hij te komen tot differentiaalvergelijkingen met begin- en eind-, en ook wel randvoorwaarden. Voor deze differentiaalvergelijkingen zoekt hij oplossingen. Om existentie- en stabiliteitsvoorwaarden te onderzoeken ontwikkelt hij deze oplossingen in reeksen. Vaak is het mogelijk, uit de convergentie van deze reeksen conclusies te trekken. Dikwijls vervangt hij daartoe de reeks door een

majorerende reeks, waarvan de coëfficiënten groter zijn en die toch convergeert en soms sommeerbaar is. Voor deze reeksen gebruikte Poincaré de naam „majorante”. Voor hem, bijvoorbeeld bij Cauchy, heten deze reeksen „dominanten”.

Als opvolger van Tisserand op de leerstoel voor astronomie aan de Sorbonne, benoemd in 1896 voltooide hij zijn groot werk over: „Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste” in drie delen. Van 1905—1910 verscheen eveneens in drie delen: „Leçons de la Mécanique céleste”.

Twee colleges van blijvende waarde liet hij door zijn leerlingen publiceren: „Sur les figures d'équilibre” en „Sur les Hypothèses cosmogoniques”. (A. Hermann et Fils, Paris 1913)

Het eerste bevat de samenvatting van onderzoekingen, waarmee hij vijftien jaren vroeger was begonnen over het evenwicht van een vloeistofmassa, die bewogen wordt door een uniforme rotatie om een as, wier moleculen elkaar aantrekken volgens de wet van Newton. Men vindt er ook mathematische beschouwingen over de ringen van Saturnus, wier ontstaan uit stabiliteitsvoorwaarden van de roterende vloeistofmassa wordt verklaard. Behalve Newton moeten op dit gebied als voorgangers van Poincaré genoemd worden: Clairaut (1713—1783) *Théorie de la figure de la terre* en Laplace (1717—1783) *Mécanique céleste*.

Les leçons sur les hypothèses cosmogoniques werden in 1910 gegeven aan de Sorbonne. Onder het zeer grote aantal onderstellingen, die zijn gemaakt over de wijze, waarop het heelal is ontstaan, moet men die van Laplace en Kant noemen. Van deze theorien bespreekt Poincaré alle punten, gebruikmakende van de uitkomsten, die hij had verkregen in de genoemde theorie der evenwichtsfiguren en wat er bekend is over de getijden. Zijn conclusies zijn in hoofdzaak dezelfde als die van Laplace.

De betekenis van Poincaré als filosoof op het gebied der wiskunde en natuurwetenschappen wordt bepaald door zijn rijke kennis van de onderwerpen, waarover hij schrijft. Daardoor zijn ook deze geschriften diep, helder en van blijvende waarde. Zijn werk op dit gebied vindt men in:

La science et l'hypothèse (1903)

La valeur de la science (1913)

Science et méthode (1908)

Dernières pensées (1913)

Savants et écrivains (1919).

Zij verschenen alle bij G. Flammarion en zij hebben diep geploegd. In grote oplagen beleefden zij talrijke herdrukken. In 1929 was *La*

science et l'hypothèse 20.000 maal, La valeur de la science 35.000 en Science et méthode 25.000 maal gedrukt. In het algemeen kan men deze losse opstellen, hoewel zij bijna een halve eeuw geleden werden geconcipeerd ook nu nog, zonder dat men over tijdverlies behoeft te klagen, lezen. Zo vindt men in „Science et méthode” een opstel over: „Les définitions mathématiques et l'enseignement”, waarmee een ieder, die zijn belangstelling aan het onderwijs in de wiskunde moet geven ook nu nog zijn voordeel kan doen. Ook de mededeling over de landmeting: „La géodésie française” is, historisch als zij is, van grote waarde.

Nadat Poincaré populair was geworden, leerde hij de voordelen en enige nadelen daarvan kennen. Toen de „Revue blanc” in 1904 een enquête hield over de deelneming van geleerden aan de politiek vroeg zij ook Poincaré's mening over deze kwestie. Poincaré antwoordde in een zeer geestige brief, waarvan het slot luidt:

Gij vraagt mij of geleerden, die aan politiek doen het ministerie moeten bestrijden of steunen. Terecht verklaar ik mij hier onbevoegd, een ieder moet volgens zijn geweten stemmen; ik veronderstel, dat lang niet allen over dit punt op dezelfde wijze zullen denken. Indien er beoefenaren der wetenschap in de politiek zijn, dan is het nodig, dat zij in alle partijen zijn vertegenwoordigd. Natuurlijk is het nodig, dat er rechts en links staande partijen zijn. Maar de wetenschap heeft geld nodig en het moet niet voorkomen, dat zij die aan de macht zijn, zouden kunnen zeggen: „La science c'est l'ennemi.” (Revue blanc 1902, p. 708.)

De naam van Poincaré speelde gedurende zijn leven in de politiek van Frankrijk een grote rol, doordat zijn neef Raymond Nicolais Landry Poincaré (1860—1930) een zeer sterk nationalistische politiek voerde. In 1920 werd bij wet vastgelegd, dat hij zich verdienstelijk had gemaakt jegens het vaderland.

Vanaf 1916 werden de werken van Jules Henri Poincaré verzameld en uitgegeven door het ministerie van onderwijs door G. Darboux e.a. Een goed overzicht over zijn werk en leven vindt men ook in „Savants du jour” (Paris, Gauthier-Villars, 1909) door E. Lebon en van dezelfde auteur ook in de „Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques”.

Het is moeilijk de verleiding te weerstaan, over een enkele van de essays van Poincaré niet in details te treden. Daarom wil ik trachten sommige van de rijke gedachten uit: „Les définitions mathématiques et l'enseignement” dat U in Science et méthode Hoofdstuk II, blz. 123 kunt vinden, samen te vatten.

Poincaré begint met de vraag te stellen, wat een goede definitie

is. Voor een filosoof en een geleerde is het een definitie, die van toepassing is op alle gedefiniëerde voorwerpen en alleen op deze.

In het onderwijs is dit niet zo. Daar is een goede definitie een definitie, die door de leerlingen wordt begrepen.

Er volgen nu beschouwingen over het begrijpen van een betoog. Voor een ieder heeft dit woord lang niet dezelfde betekenis. Er zijn mensen, die tevreden zijn vast te stellen, dat een betoog voldoet aan de eisen van de logica en aan de „spelregels”, die voor dit gebied zijn opgesteld. Voor sommigen is het voldoende, indien zij de betekenis van alle gebruikte woorden begrepen en vaststellen, dat er geen tegenspraak is. Wanneer zij dit hebben vastgesteld zeggen zij: „Ik heb het begrepen”.

Anderen en gelukkig de meerderheid vragen veel meer. Zij willen niet alleen weten dat alle stappen van het betoog juist zijn, maar ook waarom zij in één bepaalde en geen andere volgorde worden gedaan. Nog weer anderen stellen de vraag: „Waarvoor dient dit alles.” Daarnaast vergelijken zij alles wat zij hebben gezien en gehoord met de natuur of de practijk. Indien zij daarin een bevestiging vinden van het betoog en wat zij daarvan hebben begrepen, dan zijn zij bevredigd, terwijl zij niets hebben gedaan, dan kijken en horen.

Welk een verschillende instelling. Moet een docent deze nu alle aanvaarden of dient hij te streven naar een meer uniforme doelstelling als hij begrip wil bijbrengen. En is dit mogelijk?

Nu is het gedachtenleven van de één geheel anders geschakeerd en georiënteerd dan dat van een ander. In de wiskunde zijn er logistici zoals Weierstrass en intuitionisten als Riemann. Aan wie moet men de voorkeur geven. De een denkt meetkundig, de ander analytisch. Dit is een verscheidenheid, die wij niet alleen hebben te aanvaarden, maar waarover wij ons zelfs moeten verheugen.

Maar daardoor zal een definitie voor de een aan geheel andere eisen moeten voldoen dan voor de ander. Daarnaast is er dan nog verschil in leeftijd.

Op de lagere school worden de breuken op geheel andere wijze gedoceerd dan op de middelbare school. Op de lagere school verdeelt men een appel of een taart en komt zo tot het begrip van een breuk. In het middelbaar onderwijs is een breuk een horizontale streep met een getal er boven en er onder. Men laat daar zien, hoe men op deze de regels van de rekenkunde kan en mag toepassen dus optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen.

De weg, die de middelbare school inslaat is voor de lagere school niet te gebruiken.

Hilberts „Grundlagen der Geometrie” wordt dan gebruikt als

voorbeeld hoe definities kunnen ontstaan. Daar wordt eenvoudig begonnen met drie soorten van „dingen”: punten, rechte lijnen en vlakken. En bij wijze van inleiding wordt dan gezegd: Twee punten bepalen steeds een rechte lijn, wij zeggen, dat de lijn door die punten gaat, die twee punten verbindt, dat die punten op de lijn liggen.

Mag men daaruit nu besluiten dat op een lijn gelegen zijn hetzelfde is als een lijn bepalen?

Een docent staat voor een klas en begint te zeggen: De cirkel is de plaats van alle punten gelegen in een plat vlak, die van één punt het middelpunt, dezelfde afstand hebben.

Niemand van zijn gehoor begrijpt hier iets van. Nu neemt hij een passer, tekent een cirkel. In eens hoort men uit het gehoor: O, het is rond, waarom zegt hij dat nu niet direct. En men meent te begrijpen. En toch heeft de leraar gelijk, alleen met zijn definitie komt men verder. En het is nuttig alle elementen van de definitie te controleren aan de getekende cirkel. Daarvoor is de passer nodig.

Neemt men een wiskundeboek van 50 jaren geleden ter hand, dan worden daarin verschillende dingen aangenomen, die nu worden bewezen. Soms werden dingen aangenomen, die later bleken onjuist geweest te zijn. Zonder twijfel is de strengheid der bewijzen groter geworden. Toch heeft deze toename in strengheid en abstractie offers gevraagd. Men kan zeggen, wat de wiskunde aan strengheid heeft gewonnen, dat heeft zij aan objectiviteit verloren. De moeilijkheden, die er vroeger ook waren en die nu verdwenen schijnen te zijn heeft men naar de grenzen verlegd. Maar helaas is daardoor het contact met de praktijk en de werkelijkheid veel kleiner geworden.

Dikwijls schept de logica monsters. In de loop der jaren heeft men een reeks van functies zien verschijnen, die vaak weinig gemeen hebben met de „fatsoenlijke” functies, die men voordien kende. Vond men toen een functie uit, dan was dit met een practisch doel. Tegenwoordig voert men talloze functies in, die alle moeten aantonen, dat de intuïtieve redeneringen van onze voorouders fout waren. Om streng onderwijs te geven staat men nu voor de moeilijkheid, dat men feitelijk met deze zeer ingewikkelde dingen zou moeten beginnen. Doet men dit niet, dan doceert men dikwijls iets, dat onjuist is. Doet men het anders, dan is de strengheid alleen bij stappen te bereiken.

Indien een bioloog een olifant slechts met het microscoop bestudeert, dan zal hij niet kunnen zeggen, dat hij het dier voldoende kent. Zo is het ook in de wiskunde. Indien een beoefenaar der logica ieder bewijs heeft ontleed in een aantal elementaire en logisch

juiste stappen, dan zal hij dikwijls de reële achtergrond van het geheel niet kennen en daardoor zal hem de draagkracht en de betekenis van het bewijs kunnen ontgaan.

Welke zin heeft het om bij een bouwwerk van een architect het metselwerk van het gebouw te bestuderen, indien men het bouwplan van de bouwer niet heeft begrepen?

Wij dienen omgekeerd te beginnen. Zonder twijfel is het voor een docent moeilijk om iets te doceren, dat hem niet bevredigt. Maar de bevrediging van de docent is niet het doel van het onderwijs. Hij moet met de leerling rekening houden.

Onze voorgangers meenden te weten wat een breuk is of de continuïteit van een functie of het oppervlak van een gekromd oppervlak. Onze leerlingen zullen menen dit ook te weten.

Begint men nu met hen te zeggen, dat weet gij niet, wat gij meent te begrijpen, dat kent gij inderdaad niet. Ik zal U eens bewijzen, dat wat U evident voorkomt inderdaad fout is. En indien ik dan bij dit bewijs mij steun op onderstellingen, die hen minder evident voorkomen dan de conclusie, wat zullen zij dan denken?

Wel, dat de wiskunde een aaneenschakeling is van haarkloverijen of een nutteloze opeenhoping van onbelangrijke subtiliteiten. Zij zullen er om lachen en er zeker geen belang in stellen.

Later wordt dit anders en zullen zij ook van de details gaan houden.

Het hoofddoel van het wiskundeonderwijs is bepaalde verstandelijke vermogens van de leerlingen te ontwikkelen en van deze is de intuïtie zeker niet de minste. Door haar blijft de wiskundige wereld in aanraking met de werkelijke wereld. En indien de zuivere mathematici zouden zeggen, dat zij dit contact kunnen missen, dan moet men er toch altijd weer een beroep op doen, om de afgrond tussen symbool en werkelijkheid te overbruggen.

Maar ook voor de zuivere mathematici is de intuïtie nodig.

Door de logica bewijst men, maar door de intuïtie vindt men uit.

Kunnen critiseren is goed, maar kunnen scheppen is beter. Men zal inzien, dat een zekere combinatie goed is, maar het is mis, indien men niet een goede keus tussen de mogelijke combinaties kan doen.

De logica leert ons, dat wij langs deze of gene weg geen moeilijkheden zullen ontmoeten, maar zij leert ons niet langs welke weg wij ons doel zullen bereiken. Daarvoor moet men vooruit kunnen zien. En de intuïtie leert ons vooruitzien. Zonder intuïtie wordt de mathematicus als een auteur, die zich blind kijkt op de grammatica, maar die geen denkbeelden heeft.

Maar zal men vragen, is het houden van een wiskundig betoog, dan niet een kostbare eigenschap, die de docent in de wiskunde voor alle andere eigenschappen moet aankweken. En natuurlijk is dat zo.

In de uiteenzetting van de grondslagen moet men echter te grote precisie en te grote strengheid vermijden. Men kan nu eenmaal niet alles bewijzen en men kan evenmin alles definiëren. Steeds moet men de intuïtie te hulp roepen.

Kan men nu al deze voorwaarden vervullen, vooral indien het er om gaat een definitie te geven. Men zou moeten voldoen aan de strenge regels der logica, aan de wens naar plaats voor het begrip en aan onze behoefte om in beelden te denken.

Daarom is het bij het onderwijs niet voldoende om een definitie te geven, men moet haar voorbereiden. Wat wil men daarmee zeggen? Vaak hoort men, iedere definitie impliceert een axioma, omdat zij het bestaan van de gedefinieerde voorwerpen bevestigt.

Echter dat is niet alles, de definitie wordt ons medegedeeld als een conventie. De meeste geesten komen evenwel in verzet, indien men hen een definitie oplegt als een willekeurige afspraak. Voor men op talloze vragen heeft geantwoord zullen zij niet tevreden zijn.

Meestal zijn wiskundige definities ware gebouwen, samengesteld uit eenvoudige begrippen. Maar waarom worden deze begrippen juist op één bepaalde manier samengesteld, terwijl dit ook op duizend andere manieren gedaan had kunnen worden. Is dit willekeur?

Maar er is meer; ieder gedeelte van de tekst van een definitie bedoelt het gedefinieerde te onderscheiden van naburige gebieden en voorwerpen. Een definitie zal niet worden begrepen, indien men niet heeft laten zien, wat het gedefinieerde van het andere onderscheidt. Men moet bij het geven van een definitie laten zien, waarom men het zo en niet anders heeft gezegd.

GAUSS ALS MEETKUNDIGE

(Lezing bij de herdenking van Gauss op 23 Febr. 1955 in het Mathematisch Instituut te Utrecht.)

In het drietal „Archimedes, Newton, Gauss” — drie namen, die men in de geschiedenis der wiskunde terecht in één adem noemt — is Gauss zeker degene wiens werk het minst toegankelijk is voor mathematisch weinig geoefenden. Gauss' meetkundige onderzoeken evenaren niet zijn arithmetisch, algebraïsch en analytisch werk, maar misschien juist daarom heeft onder de sprekers, die Gauss' betekenis uiteen moet zetten, de meetkundige de lichtste taak.

De eerste grote ontdekking, waarmee Gauss voor de openbaarheid trad, was zijn constructie van de regelmatige 17-hoek, die hij op de leeftijd van 18 jaar vond. Vanouds wist men met passer en lineaal de regelmatige 3-, 5-, 15-hoek te construeren en uiteraard ook alle regelmatige veelhoeken, die zich uit dezen laten afleiden door een voortgezet verdubbelen van het aantal zijden. Gauss voegde aan deze lijst nieuwe veelhoeken toe. Een regelmatige n -hoek is volgens Gauss dan en slechts dan met passer en lineaal construeerbaar, wanneer n van de vorm is

$$(1) \quad n = 2^k p_1 p_2 \dots p_\nu,$$

waarbij de p_i verschillende oneven priemgetallen zijn van de vorm

$$(2) \quad p = 2^{2^m} + 1.$$

Priemgetallen van deze vorm pleegt men priemgetallen van Gauss te noemen. Voor $m = 0, 1, 2, 3, 4$, zijn dit: $p = 3, 5, 17, 257, 65537$. Voor $m = 5, \dots, 12, 16$ is die uitdrukking geen priemgetal, en men weet tot heden niet, of er meer dan vijf priemgetallen van Gauss bestaan.

Een regelmatige n -hoek ontstaat, doordat men een cirkel in n gelijke delen verdeelt. Stelt men de cirkel voor als verzameling der complexe getallen z van de absolute waarde 1, dan luidt het probleem der cirkelverdeling algebraïsch: men losse de vergelijking

$$z^n - 1 = 0$$

op! Deze vergelijking is reducibel. Men kan meteen een factor $z - 1$ afsplitsen, en voor *priem*getallen n is het hiermee ook afgelopen.

Onder de „ n -de eenheidswortels” kan men primitieve en imprimitieve onderscheiden. Van de primitieve is net de n -de macht gelijk aan 1, bij de imprimitieve doet het al een lagere macht. Is $\theta (= e^{2\pi i/n})$ primitief, dan bezit θ^k dezelfde eigenschap dan en slechts dan als k en n geen g.g.d. bezitten. Hun aantal $\varphi(n)$ blijkt te zijn, indien de priemfactoresplitsing van n is,

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_i^{k_i},$$

$$\varphi(n) = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \cdots p_i^{k_i-1} (p_1-1)(p_2-1) \cdots (p_i-1).$$

De veelterm

$$F(z) = \prod (z - \zeta),$$

waarin het product loopt over de primitieve n -de eenheidswortels ζ , is een (irreducibele) deler van $z^n - 1$ met gehele rationale coëfficiënten. $F(z) = 0$ is de „vergelijking van de cirkelverdeling”, die men moet oplossen, wil men de regelmatige n -hoek construeren. Haar graad is $\varphi(n)$. De constructie is met passer en liniaal mogelijk, indien deze graad een macht van twee is, en dat gebeurt juist dan, als n de in (1) en (2) aangegeven vorm heeft.

Dat is in wezen Gauss' gedachtengang. Hij is essentieel algebraïsch. Geen wiskundige der oudheid had hem kunnen gaan. Menige wiskundige na Descartes had Gauss op deze weg vóór kunnen zijn, maar geen hunner had iets beseft van de meetkundige betekenis der vergelijking $z^n - 1 = 0$. Dit verband is door Gauss gelegd. We zijn heden geneigd, Gauss' eerste grote ontdekking veeleer als een arithmetisch-algebraïsche prestatie te waarderen dan haar meetkundige betekenis in het licht te stellen. Terecht, want Gauss' methode en haar implicaties zijn arithmetisch-algebraïsch, en de hele cirkelverdeling is uit meetkundig oogpunt nauwelijks meer dan een aardigheid. Maar men vergeet niet, dat aan deze ontdekking ten grondslag ligt de meetkundige interpretatie der — tot die tijd toe in een waas van mystiek gehulde — complexe getallen, een der mooiste en meest fundamentele prestaties van Gauss, de grondslag der complexe functietheorie en van veel meetkundige theorieën.

We komen echter dieper in de meetkunde terecht, wanneer wij Gauss' weg naar de niet-euclidische meetkunde volgen. Gauss heeft nimmer iets over dit onderwerp gepubliceerd, maar uit zijn Journal en zijn correspondentie weten wij, dat hij de officiële ontdekkers der niet-euclidische meetkunde tientallen jaren vóór is geweest. Op de leeftijd van 15 jaar, in 1777, moet Gauss voor het eerst het denkbeeld hebben opgevat van een meetkunde, afwijkend van die van Euclides. Het denkbeeld hing toen nog niet in de lucht. Het was

revolutionnaire, en Gauss wist dat. In de loop der jaren heeft hij het uitgewerkt, maar het bleef een geheim, dat slechts enkele vrienden met hem mochten delen. Wat Gauss publiceerde moest af zijn. Hij stelde zijn eisen hoog, en dientengevolge ontbrak hem de tijd, om alles te publiceren. Zodoende viel Abel en Jacobi de eer der ontdekking der elliptische functies te beurt, terwijl Gauss al lang in het bezit van de belangrijkste resultaten was. Dat hij de niet-euclidische meetkunde geheim hield, was bepaald opziet. Hij vreesde het „Geschrei der Bötter“, de weerstand der aan alle tradities gehechten, die iedere twijfel aan de Euclidische meetkunde als heiligschennis zouden brandmerken.

Wij beschouwen de meetkundige axioma's tegenwoordig als willekeurige afspraken, die de begrippen punt, rechte, enz. pas — impliciet — vastleggen. Voor Gauss was meetkunde nog de wetenschap van de reële ruimte, maar dan een wetenschap, die rationeel gemotiveerd moest zijn. Ook Gauss twijfelde er niet aan, dat de mathematische punten en rechten werkelijk bestonden, en dat zij zekere eenvoudige rationeel evidente eigenschappen bezaten. Als het minst evidente onder de axioma's beschouwde men vanouds het axioma van de evenwijdige lijnen: door elk punt is er bij een gegeven rechte niet meer dan één evenwijdige te vinden. Vanouds hebben wiskundigen getracht, dit axioma dan toch te bewijzen — zonder succes. Het alternatief was: er is een hele hoek vol evenwijdige lijnen door een gegeven punt bij een gegeven rechte: een eerste en een laatste, en alle, die ertussen liggen. Hiervan uitgaande komt men met vrij elementaire meetkundige methoden tot een gehele niet-euclidische meetkunde, degene, die men later de hyperbolische zou noemen.

In de jaren 1827—30 werd deze meetkunde bekend, dank zij de Rus Lobačevsky en de Hongaar Johann Bolyai. Misschien zijn zij niet geheel onafhankelijk van Gauss geweest. Van Gauss' geheimen zou iets kunnen zijn uitgelekt. Dat Lobačevsky er iets van zou hebben vernomen, is niet zeer waarschijnlijk, maar toch ook niet onmogelijk. Iets waarschijnlijker is dat voor Johann Bolyai, de zoon van Gauss' jeugdvriend Wolfgang, aan wie Gauss wellicht sommigen van zijn gedachten had toevertrouwd.

De ontdekking der niet-euclidische meetkunde was een gebeurtenis van grote historische betekenis, maar de traditionele elementaire meetkundige methode, waarvan de ontdekkers zich bedienden, bleek niet de aangewezen weg naar dieper inzicht in de grondslagen der meetkunde te zijn. Dat moest elders vandaan komen: uit de differentiaalmeetkunde der kromme oppervlakken en uit de projectieve meetkunde.

De vlakke hyperbolische meetkunde laat zich naar Klein opvatten als meetkunde in het binnengebied van een kegelsnede met reële punten (in het projectieve vlak); de afstand $\varrho(a, b)$ van twee punten a, b wordt gedefinieerd met behulp van de dubbelverhouding $DV(a, b; u, v)$, die de punten a, b bezitten t.a.v. de snijpunten u, v van de rechte ab met de kegelsnede:

$$\varrho(a, b) = | \log DV(a, b; u, v) | ;$$

een dergelijke definitie-formule geldt in deze meetkunde voor de hoek van twee rechten.

Vervangt men die kegelsnede door één zonder reële punten, dan geraakt men tot de elliptische meetkunde, die de ontdekkers der hyperbolische meetkunde nog niet hadden opgemerkt. In de elliptische meetkunde zijn er in het geheel geen evenwijdige lijnen. In het „bewijs” voor de existentie van evenwijdige lijnen pleegt men stilzwijgend te veronderstellen, dat de rechte het vlak verdeelt — een orde-eigenschap, die het elliptische vlak niet bezit. De elliptische meetkunde laat zich trouwens nog veel eenvoudiger realiseren: als meetkunde op een bol, waarop men diametrale punten is gaan identificeren en de grote cirkels als rechten is gaan beschouwen.

Gauss heeft ook aandacht geschonken aan de toegepaste wetkunde, maar hij heeft, anders dan Archimedes en Newton, geen fundamenteel werk in de toepassingen verricht. Zijn toegepaste onderzoekingen hingen samen met het ambt van directeur der Göttingense sterrewacht, dat hij bekleedde. Als geodeet heeft hij de geldigheid van de Euclidische meetkunde in de ons omringende ruimte trachten te toetsen. Zonder succes trouwens. De door hem gemeten aardse driehoeken bleken in hoekensom te weinig van die der Euclidische meetkunde te verschillen, om enige positieve conclusie toe te laten. We weten trouwens tegenwoordig, dat de niet-euclidische van onze ruimte zeer klein en pas in astronomische dimensies merkbaar is.

Door zijn practische geodetisch werk werd Gauss ook geleid tot het differentiaalmeetkundig onderzoek der kromme oppervlakken. Voor de geodeet is het aardoppervlak allereerst niet een oppervlak gelegen in de driedimensionale ruimte, maar een variëteit, waarbinnen hij metingen uitvoert en die hij door — kromlijnie — coördinatensystemen beschrijft; pas door astronomische metingen wordt deze variëteit in de ruimte gebed. Zo ontwikkelde Gauss ook de algemene theorie der oppervlakken, en hij trachtte bovendien, de meetkunde der oppervlakken zoveel mogelijk los van de

inbeddende ruimte te begrijpen. Is het oppervlak gegeven door een vectorfunctie $x(u, v)$ van twee parameters, dan wordt zijn metriek bepaald door de coëfficiënten

$$E = (x_u, x_u), F = (x_u, x_v), G = (x_v, x_v)$$

in
$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

maar de meest belangrijke begrippen der oppervlakkentheorie zijn onafhankelijk van deze ontstaanswijze van het ds^2 en de inbedding van het oppervlak in de ruimte. De „inwendige” eigenschappen van het oppervlak hangen alleen af van het ds^2 , dus van de door metingen op het oppervlak zelf te kennen metriek; ze zijn dezelfde voor alle in de ruimte gelegen oppervlakken, die men onder behoud van de metriek op elkaar kan afbeelden. Het inproduct van twee vectoren du, dv en $\delta u, \delta v$, op het oppervlak,

$$E du \delta u + F du \delta v + dv \delta u + G dv \delta v,$$

en dus ook de hoek van twee richtingen is zulk een isometrisch invariante grootheid. Het begrip „kortste lijn” (of geodetische kromme) is isometrisch invariant. Deze lijnen vertegenwoordigen in de meetkunde op het oppervlak de rechten der vlakke meetkunde. De driehoek gevormd door deze rechten vertonen een excès of defect van hoekensom (vergeleken met de rechte lijnige driehoeken in het vlak), dat Gauss bekend was uit de meetkunde van het boloppervlak en uit de niet-euclidische meetkunde. Deze afwijking wordt door Gauss gebruikt om de mate van gekromdheid van het oppervlak te beschrijven: de kromming in een punt van het oppervlak is per definitie de limietverhouding tussen excès en oppervlakte van een geodetische driehoek, die zich op dat punt samentrekt.

De aansluiting aan de ruimte wordt nu voltrokken door de „afbeelding met behulp van evenwijdige normalen”: door de oppervlaknormalen naar één punt evenwijdig over te brengen, voegt men aan elk punt van het oppervlak een punt van de eenheidssfeer toe. Afbeelding op de hemelsbol — zegt Gauss een keer in een brief aan Schumacher (Werke 8, 372), en dan is, als het ware, de landmeter aan het woord, die na gedaan geodetisch werk het oppervlak van zijn activiteit inbedt in de ruimte, door astronomisch het zenith van een punt vast te leggen.

Ontwerpt men van een geodetische driehoek het normalenbeeld, dan wordt de oppervlakte van de beeld-driehoek gelijk aan het excès van de gegeven driehoek. De kromming kan dus ook als limietverhouding tussen de oppervlakten van het normalenbeeld

en de oorspronkelijke driehoek worden gedefinieerd. De kromming is in elk punt de functionaal-determinant van de normalenafbeelding en als zodanig het product van de twee hoofdkrommingen, en in het speciale geval van de bol met straal R : de uitdrukking $1/R^2$.

De kromming is isometrisch invariant gedefinieerd. Maar Gauss rust niet, eer hij deze grootheid ook nog expliciet in de E , F , G heeft uitgedrukt — en dat is zijn „theorema egregium”; het bewijs ervan is een van de merkwaardige staaltjes van Gauss' ontzagwekkende algoritmische bekwaamheid.

De niet-euclidische meetkunden figureren in deze algemene theorie als oppervlakken van niet verdwijnende constante kromming. Dit is pas veel later uitgesproken, door Beltrami en Riemann. Maar zonder twijfel heeft Gauss dit geweten en heeft hij zich door deze wetenschap laten leiden, toen hij de algemene theorie der oppervlakken ontwikkelde.

In 1854 hield Riemann zijn befaamde Göttingense „Habilitationsvortrag” „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen”. Dit was de eerste grootse voortzetting van Gauss' differentiaalmeetkundige werk, een krommingstheorie voor meerdimensionale variëteiten. Gauss' denkbeeld, dat tot heden toe vruchtbaar is gebleken, om de kromming door inwendige eigenschappen, dus door het ds^2 te definiëren, werd door Riemann met alle consequentie uitgewerkt. Gauss, die die lezing nog net kon bijwonen — enkele maanden later stierf hij — was wellicht de enige aanwezige, die haar grote betekenis kon vatten. Weber, die hem naar huis begeleidde, vertelde; dat Gauss diep onder de indruk was.

ENKELE FACETTEN VAN GAUSS' OEUVRE

door

J. POPKEN.

1. *Inleiding.* Gauss is één der grootste ontdekkers der mensheid. Zijn werk is zo veel omvattend en zo diep, dat men zich afvraagt hoe één enkele menselijke geest dit alles tot stand heeft kunnen brengen.

Wat is toch het geheim van zijn genie? Hoe pakte hij de problemen aan? In het volgende zal ik een zwakke poging doen om een tipje van de sluier op te heffen.

Allereerst zij opgemerkt, dat Gauss het ons op dit punt niet gemakkelijk heeft gemaakt, omdat hij steeds angstvallig alle sporen heeft weggewist van de wegen die hem tot zijn grote ontdekkingen voerden. Eens heeft hij zich zo uitgedrukt, dat men na het bouwen van een kathedraal toch óók niet de steigers om het bouwwerk liet staan. Een gevolg van deze methode was, dat zijn kolossaal meesterwerk, de *Disquisitiones arithmeticae*, lange tijd haast ontoegankelijk was en wel het boek met de zeven zegels werd genoemd.

Verder is het voor een goed begrip van het volgende gewenst om iets van Gauss' persoonlijkheid te weten. Gauss was, om een term van Heymans te gebruiken, een zeer sterk secundaire figuur. Na jaren en jaren kon hij tot zijn oude problemen terugkeren en hij rustte niet, voor hij de oplossing gevonden had. Nooit zou hij iets publiceren, dat niet volkomen af was. Hij had een bijzonder sterk, haast fotografisch scherp geheugen. Daarmee hangt zijn zeldzaam rekentalent samen, waardoor hij reeds in zijn jeugd was opgevallen. Zijn hele leven lang rekent hij veel en graag, vaak in vijftien of meer decimalen. Hij doet dit met een buitengewone snelheid; zo vond hij na de ontdekking van de planeet Vesta de eerste elementen reeds na tien uur werken. Hij had dan ook alle kwaliteiten in zich van een rekenkunstenaar en de prestaties van het reken genie Zacharias Dase, die toen van zich liet spreken, vond hij blijkens zijn correspondentie maar heel gewoontjes. Hij had een enorme belangstelling voor mathematische tafels en beroemd is zijn kritiek op de tafel van Vega: „*Thesaurus Logarithmorum*”. Vega had een premie van een ducaat uitgelooft voor elke fout die aanleiding kon geven tot

een onjuiste berekening. Gauss toonde nu door steekproeven aan, dat onder de 68038 in Vega's tafel voorkomende logaritmen er plm. 47746 foute te verwachten zijn.

Naast dit bijzondere rekentalent bezat Gauss echter nog een veel grotere gave: een wonderbaarlijke intuïtie en een zeer diep inzicht. Het valt op hoe Gauss vaak begint met ogenschijnlijk simpele numerieke problemen, die hij spelenderwijs aanpakt. Maar het wonderlijke is, dat onder die spelletjes stuk voor stuk diepe mathematische waarheden verborgen liggen.

Dit komt vooral uit in zijn allervroegste creatieve werk. Gauss was toen in zijn vijftiende tot achttiende jaar en leerling van het beroemde Collegium Carolinum in Brunswijk. Toen reeds verdiepte hij zich in moeilijke mathematische problemen en juist deze vraagstukken hadden grote invloed op zijn vorming als mathematicus. Hierin liggen reeds de kiemen verborgen van vele van zijn diepste onderzoeken uit latere tijd. Drie ervan zullen we in het volgende iets nader analyseren.

2. *Ontwikkelen van gewone breuken in decimalen.* Welke intelligente jongen verbaast zich niet over de merkwaardige eigenschappen van de periodieke decimale breuken? Als we $\frac{1}{7}$ in een decimale breuk ontwikkelen krijgen we 0,142857 . . . ; bij $\frac{2}{7}$ is de periode 285714, bij $\frac{3}{7}$ is deze 428571, enz. We krijgen zo de perioden van $\frac{1}{7}$ tot en met $\frac{6}{7}$ door cyclische verwisseling van de zes cijfers in 142857.

Bij de noemer 13 ligt de zaak weer iets anders. Hier is $\frac{1}{13} = 0,076923 \dots$ met een periode van 6 cijfers. Door cyclische verwisseling van deze cijfers ontstaan hieruit de perioden van resp. $\frac{10}{13} = 0,769230 \dots$, $\frac{9}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{3}{13}$ en $\frac{4}{13}$. Daarentegen heeft $\frac{2}{13} = 0,153846 \dots$ een andere periode, ook van 6 cijfers. Door cyclische verwisseling krijgt men hieruit de perioden van de breuken $\frac{7}{13}$, $\frac{5}{13}$, $\frac{11}{13}$, $\frac{6}{13}$ en $\frac{8}{13}$.

Hoogst merkwaardig is ook hoe sterk de lengte van de periode fluctueert als men van de ene noemer overgaat op een andere. De volgende tabel illustreert dit heel duidelijk. Hierin laten we de noemer p de priemgetallen beneden 50 (met uitzondering van 2 en 5) doorlopen en we vergelijken deze met de lengte λ van de periode in de decimale ontwikkeling van de onvereenvoudigbare breuk $\frac{m}{p}$.

p	3	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
λ	1	6	2	6	16	18	22	28	15	3	5	21	46

Voor de jonge Gauss was dit alles een bron van veel experimenten. Dan doet hij iets wat karakteristiek voor hem is. Hij legt een grote

tafel aan van de perioden in de decimale ontwikkelingen van de breuken $\frac{m}{n}$. Uit die tafel vindt hij allerlei wetmatigheden op zuiver empirische wijze. Het valt b.v. direct op, dat onder de zuiver periodieke breuken de periodelengte 1 slechts bij de noemers 3 en 9 optreedt, de periodelengte 2 slechts bij noemers die 99 delen. Uit de voorgaande vergelijking van p en λ ziet men reeds dat bij een priemgetal p het getal $p-1$ deelbaar is door λ .

Het kwam er nu op aan de empirisch gevonden wetten te bewijzen. We zullen zien, dat hij zo gevoerd werd tot zijn leer van de congruenties.

Laat $x = \frac{m}{n}$ een onvereenvoudigbare breuk tussen 0 en 1 voorstellen. Dan is, als λ weer de lengte van de periode voorstelt, dit getal te schrijven als

$$x = 0, \overline{a_1 a_2 \dots a_\lambda a_1 a_2 \dots a_\lambda a_1 a_2 \dots},$$

dus

$$10^\lambda x = \overline{a_1 a_2 \dots a_\lambda} + x,$$

zodat

$$(10^\lambda - 1)x = (10^\lambda - 1)\frac{m}{n}$$

geheel moet zijn. Nu zijn m en n onderling ondeelbaar, zodat n een deler van $10^\lambda - 1$ is, of, in de notatie van Gauss,

$$10^\lambda \equiv 1 \pmod{n}.$$

Men kan gemakkelijk bewijzen, dat λ het kleinste natuurlijke getal u met de eigenschap $10^u \equiv 1 \pmod{n}$ is.

Hierboven vonden we, dat voor $x = \frac{m}{p}$, waar p een priemgetal $\neq 2, \neq 5$ is, de lengte λ een deler van $p-1$ is. Dit hangt blijkbaar samen met de kleine stelling van Fermat volgens welke

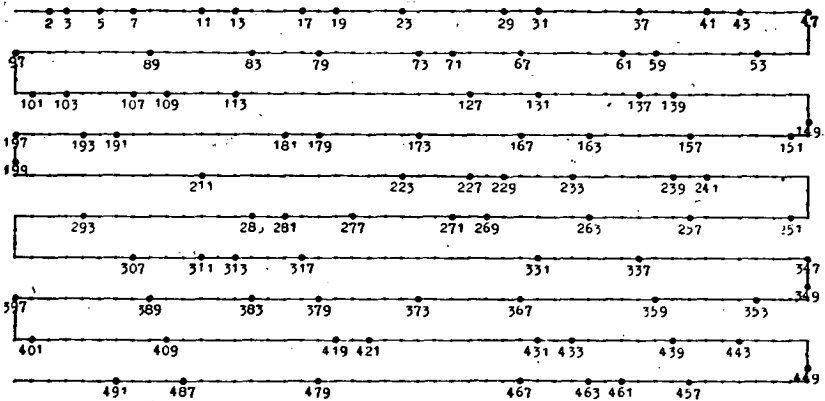
$$10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

is.

Zo zag Gauss in, dat de oplossing van zijn probleem besloten lag in de theorie van de congruenties. Gauss werkte deze uit en maakte haar tot basis van de elementaire getallenleer. Het hier genoemde probleem werd later door Gauss volledig uitgewerkt in de *Disquisitiones arithmeticae* en hij voegt daaraan een korte tafel toe. Een grote tafel, voor de noemers tot 1000, vond men in zijn nagelaten papieren!

Literatuur: Gauss, Disquisitiones arithmeticae, Art. 312—318, Werke I, 382—388; Hardy and Wright [4], ch. VIII, § 9.2; Wijdenes [8], hoofdstuk III, § 37; Weber und Wellstein [7], I, § 69.

3. *Distributie van de priemgetallen.* Een ieder valt op hoe onregelmatig de priemgetallen in de rij van de natuurlijke getallen verdeeld liggen (zie fig 1.)



k	P_k	$1000/\log(k-\frac{1}{2})$	1000	k	P_k	$1000/\log(k-\frac{1}{2})$	1000
1	168	160,9		51	89	92,3	
2	135	136,7		52	97	92,2	
3	127	127,8		53	89	92,0	
4	120	122,5		54	92	91,9	
5	119	118,9		55	90	91,7	
6	114	116,1		56	93	91,5	
7	117	113,9		57	99	91,4	
8	107	112,1		58	91	91,2	
9	110	110,5		59	90	91,1	
10	112	109,2		60	94	91,0	
..	...			..	..	...	

Men ziet dat de zo berekende frequenties P_k nog aanzienlijk fluctueren. In een brief aan de astronoom Encke, onze voornaamste bron over deze zaak, zegt Gauss over dit jeugdonderzoek: „Ich erkannte bald, dass unter allen Schwankungen diese Frequenz durchschnittlich nahe dem Logarithmen verkehrt proportional sei”. Daarom heb ik in de derde kolom van bovenstaande tafel het omgekeerde van de natuurlijke logarithme van het getal in het midden van het betreffende duizendtal genomen en ik heb dit nog met 1000 (de lengte van het interval) vermenigvuldigd. Men ziet, dat P_k om het regelmatig dalend bedrag in de derde kolom heenschommelt.

Gauss trok uit zulke beschouwingen de conclusie, dat het aantal priemgetallen $\leq n$, welk aantal men gewoonlijk door $\pi(n)$ voorstelt, bij benadering gelijk moet zijn aan de integraallogarithme van n , d.i. aan de integraal

$$\text{li } n = \int_2^n \frac{dt}{\log t}.$$

Hoe verbluffend sterk deze benadering van de grillige arithmetische functie $\pi(n)$ is, blijkt wel uit de volgende tabel, welke op moderne onderzoekingen berust.

n	$\pi(n)$	$\text{li } n$	verhouding
10^3	168	178	0,94
10^4	1.229	1.246	0,98
10^5	9.592	9.630	0,996
10^6	78.498	78.628	0,998
10^7	664.578	664.918	0,9994
10^8	5.761.455	5.762.209	0,9998
10^9	50.847.478	50.849.235	0,99996

In zijn jeugdijaren heeft Gauss dit onderzoek niet verder voort kunnen zetten. In de eerste plaats omdat hij geen priemgetal-tafel had, die voldoende ver ging. In de tweede plaats omdat hij nog geen middel bezat om li n voor grote waarden van n te berekenen. We zien echter hoe dit probleem hem gedurende zijn gehele leven achtervolgt, hoewel hij er geen woord over gepubliceerd heeft. Hij schrijft er echter over aan vertrouwde vrienden. We zien hoe hij een methode ontwikkelt voor de benaderde berekening van bepaalde integralen en hoe hij daartoe als voorbeeld neemt de befaamde functie li n . We lezen zijn enthousiaste kritieken bij de verschijning van elke nieuwe priemgetal-tafel, o.a. bij die van de Deventer filosoof en medicus Chernac, die een tafel op eigen kosten liet verschijnen. Met hoeveel spijt schrijft hij over de vernietiging van de gehele oplage van de grote tafel van Felkel, welke in Wenen verscheen, maar waarvoor geen kopers te vinden waren en welke daarom in de Turkenoorlog voor de vervaardiging van patronen moest dienen. Tenslotte liet hij een tafel voor de frequentie van de priemgetallen aanleggen, die tot één miljoen liep, en hier vergelijkt hij het aantal priemgetallen in bepaalde intervallen met $\int \frac{dt}{\log t}$, uitgestrekt over diezelfde intervallen. Deze laatste tafel werd in zijn nagelaten papieren gevonden.

De met het bovenstaande nauw samenhangende uitspraak, dat $\pi(n)$ asymptotisch gelijk is aan $n/\log n$ ¹⁾, welke men ook op enkele plaatsen bij Gauss aantreft, noemt men tegenwoordig de priemgetalstelling. Het bewijs van deze stelling ligt zeer diep. Het eerst werd deze aangetoond in 1896 door Hadamard en onafhankelijk daarvan door De la Vallée Poussin. Het bewijs gelukte met behulp van een diepgaande studie van de z.g. zêtafunctie van Riemann. Enkele jaren geleden werd door Selberg en door Erdős een „elementair” bewijs gepubliceerd, dat zonder functietheoretische hulpmiddelen opereert, maar dat haast nog meer gecompliceerd is dan het klassieke bewijs.

De wetenschap is er echter nog ver vanaf om de zeer enge relatie tussen $\pi(n)$, en li n die blijkens de numerieke evidentie van de vorige tafel wel moet bestaan, exact te kunnen aantonen. Dit hangt samen met zeer diepe en nog onopgeloste problemen uit de complexe functietheorie (vermoeden van Riemann over de nulpunten van de zêtafunctie).

¹⁾ D.w.z. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi(n) : \frac{n}{\log n} \right) = 1$. Men bewijst heel gemakkelijk, dat li n asymptotisch gelijk is aan $n/\log n$.

Tenslotte wijs ik er op, dat in de nagelaten aantekeningen van Gauss een groot aantal verwante asymptotische betrekkingen gevonden is, welke eveneens veel later bewezen zijn.

Literatuur: Gauss, Werke II, 181—186, 444, 435—445; III, 195; X 1, 365—371, 493, 495; X 2, 64; Estermann [3], Ch. I; Van der Corput [2].

4. *Het arithmetisch-geometrisch gemiddelde.* Als men twee positieve getallen a en b neemt ($a > b$), dan kan men het arithmetisch gemiddelde $\frac{a+b}{2} = a_1$ en het geometrisch gemiddelde $\sqrt{ab} = b_1$, vormen en bewijst men gemakkelijk, dat

$$b < b_1 < a_1 < a$$

is. Nu kan men de operatie herhalen met a_1 en b_1 in plaats van a en b . Noemt men de nieuwe gemiddelden a_2 en b_2 , dan heeft men

$$b_1 < b_2 < a_2 < a_1,$$

enz. ad infinitum. Het is niet moeilijk om te bewijzen, dat dit een zéér sterk convergent proces is. De grenswaarde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

noemt men naar Gauss het arithmetisch-geometrisch gemiddelde $M(a, b)$. B.v. voor $a = \sqrt{2}$, $b = 1$ ontlelen wij aan Gauss ¹⁾ het volgend voorbeeld, dat een bijzondere rol bij zijn onderzoekingen heeft gespeeld (zoals nog zal blijken):

$a = 1,41421.35623.73095.04880.2$	$b = 1,00000.00000.00000.00000.0$
$a_1 = 1,20710.67811.86547.52440.1$	$b_1 = 1,18920.71150.02721.06671.7$
$a_2 = 1,19815.69480.94634.29555.9$	$b_2 = 1,19812.35214.93120.12260.7$
$a_3 = 1,19814.02347.93877.20908.3$	$b_3 = 1,19814.02346.77307.20579.8$
$a_4 = 1,19814.02347.35592.20744.1$	$b_4 = 1,19814.02347.35592.20743.9$

Tevens is dit een goed voorbeeld van numerieke berekeningen, waarmee zijn werk doorspekt is.

Gauss heeft de bovenstaande methode reeds als schooljongen verzonnen, ogenschijnlijk als een numeriek spelletje. Voor een gewoon mens was dit ook zeer beslist een spel gebleven, en hij zou het hierbij gelaten hebben. Niet alzo Gauss. Zijn fijne mathematische neus had geroken, dat daaronder diepe dingen verborgen lagen. Hij vroeg zich af wat het analytisch karakter van de functie $M(a, b)$ wel was. Dit vraagstuk zou hem zijn leven lang blijven

¹⁾ Zie Werke III, 364, Exemplum 4.

bezighouden en het zou hem tot diep in de theorie der elliptische functies voeren. Men moet goed begrijpen, dat er in die dagen géén theorie der elliptische functies bestond en dat Gauss de eerste mens was, die dit onbetreden gebied ontdekte. Hij publiceerde echter niets hierover, behalve één enkele opmerking in de *Disquisitiones arithmeticae*. Later publiceerden Abel en Jacobi de fundamentele stellingen van deze theorie, die Gauss allang kende. De overeenstemming met Abel is zelfs zo sterk, dat bij Gauss en Abel soms dezelfde formules en zelfs dezelfde tekens optreden.

Het is niet alleen het *a.g.* gemiddelde geweest, dat Gauss op het spoor bracht van deze theorie. Hij bestudeerde nl. ook intensief de *z.g.* elliptische integralen, die ook vóór hem waren onderzocht, o.a. door Euler. Speciaal interesseerde hij zich voor de integraal, die men tegenkomt bij de berekening van de booglengte van de lemniscaat $r^2 = \cos 2\theta$ en die de vorm

$$(1) \quad \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

heeft ¹⁾, welke hij beschouwde als het zuivere analogon van de trigonometrische integraal. In zijn beroemd geworden dagboek vindt men wel acht notities over het *a.g.* gemiddelde en dertien over de lemniscatische integraal. Aan beide problemen werkt hij aanvankelijk onafhankelijk van elkaar. Op zekere dag doet hij echter de gewichtige ontdekking, dat tussen beide problemen een diepgaand verband bestaat. Waarschijnlijk heeft hij dit verband lange tijd aangevoeld, maar de manier waarop hij tot zekerheid kwam is zeer vermeldenswaardig, omdat dit zijn numerieke methoden in zo duidelijk licht stelt.

Bij de onderzoekingen van Gauss over de integraal (1) speelde de verhouding tussen de omtrek van de cirkel met straal 1 en die van de lemniscaat $r^2 = \cos 2\theta$ een grote rol. Deze verhouding is

blijkbaar $\frac{2\pi}{2\omega}$, waar $\omega = 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. Zijn grote ontdekking was,

dat dit getal in 11 decimalen overeenstemde met het *a.g.* gemiddelde van 1 en $\sqrt{2}$. Hij tekent dit op in zijn dagboek en voegt er aan toe: „als dit bewezen is, dan wordt daardoor zeker een werkelijk nieuw gebied van de analyse geopend”.

¹⁾ $\left(\frac{ds}{dr}\right)^2 = 1 + \left(r \frac{d\theta}{dr}\right)^2 = \frac{1}{1-r^4}$. In het bijzonder is $\frac{1}{4}$ van de booglengte

van de gehele lemniscaat gelijk aan $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$.

Later heeft Gauss deze relatie exact bewezen en hij vond meer algemeen het verband tussen het *a.g.* gemiddelde en elliptische integralen. Eén van zijn methoden is de volgende¹⁾. Door de substitutie

$$\sin \varphi = \frac{2a \sin \varphi'}{a + b + (a - b) \sin^2 \varphi'}$$

vindt hij

$$(2) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi'}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 \varphi' + b_1^2 \sin^2 \varphi'}},$$

waar a , b , a_1 en b_1 dezelfde betekenis hebben als hierboven. Dus door iteratie

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \varphi + b_n^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{M(a, b) \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}} = \frac{\pi}{2M(a, b)} \end{aligned}$$

In het bijzonder is

$$\begin{aligned} \omega &= 2 \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \sin^2 \varphi}} \quad (t = \sin \varphi) \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi}} = 2 \frac{\pi}{2M(1, \sqrt{2})} \end{aligned}$$

of $\frac{\pi}{\omega} = M(1, \sqrt{2})$.

De relatie (2) is een vorm van een bekende transformatieformule uit de theorie der elliptische functies (de transformatie van Landen). Voor de samenhang met de theorie der elliptische functies zie b.v. Hurwitz-Courant [5], Kap. 6, § 6.

Zulke beschouwingen voerden hem tot in het hart van de theorie der elliptische functies, die hij in alle richtingen exploreert. Ja, het *a.g.* gemiddelde brengt hem zelfs tot de theorie der modulaire functies.

Men heeft er veel over gespeculeerd waarom Gauss deze en andere fundamentele ontdekkingen, zoals die van de niet-Euclidische meetkunde, onder zich gehouden heeft. Men moet er dan in de

¹⁾ Vgl. Werke III, 352—353, X 1, 289; Kowalewski [6], 315—317.

allereerste plaats op wijzen, dat Gauss een perfectionist was. Het duurde lang voor zulke fundamenteel nieuwe dingen een vorm aangenomen hadden, die hem volkomen bevredigde. In zijn jeugd drongen zich zoveel nieuwe ideeën aan hem op, dat hij geen tijd had om ze uit te werken. Later werd het grootste deel van zijn tijd in beslag genomen door astronomische en andere berekeningen. Gauss kende bovendien perioden van neerslachtigheid. Hij was een eenzame figuur op grote hoogte. Zo wordt in een manuscript over elliptische functies de zuiver wetenschappelijke tekst plotseling onderbroken door een klein zinnetje: „de dood zou me meer welkom zijn dan zo'n leven”.

5. In zijn jeugdijaren heeft Gauss zich nog met tal van andere problemen bezig gehouden. Ik heb nog niets gezegd over de methode van de kleinste kwadraten, die hij toen reeds in principe ontwikkelde. Niets over zijn gedachten over het parallellen postulaat, dat hem later zou voeren tot de niet-Euclidische meetkunde. Niets over zijn onderzoek van convergente en divergente reeksen, waarbij hij uitging van de binomiaal stelling

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$$

en zich afvroeg wat van deze betrekking werd als n niet langer een natuurlijk geval voorstelde.

Het zou ons echter te ver voeren om dit alles te behandelen.

Na het Carolinum doorlopen te hebben gaat Gauss in Göttingen studeren. Daar eerst bloeit zijn genie volledig open. In snelle successie volgen de ideeën elkaar op. Zo snel, dat hij ze, volgens eigen mededeling, niet kon verwerken en slechts een deel kon optekenen. Zijn dagboek legt daarvan een getuigenis af. Vóór zijn eenentwintigste jaar is zijn gigantisch hoofdwerk de *Disquisitiones arithmeticae* in hoofdzaak reeds afgesloten. Hij is dan een volkomen rijp mathematicus en één der allergrootsten, die ooit geleefd hebben.

Bibliographie

- [1] E. T. Bell, *Men of Mathematics*, Ch. 14 (New York 1937).
- [2] J. G. van der Corput, *Démonstration élémentaire du théorème sur la distribution des nombres premiers*, Scriptum 1 Math. Centrum (Amsterdam 1949).
- [3] T. Estermann, *Introduction to modern prime number theory* (Cambridge 1951).

- [4] G. H. Hardy and E. M. Wright, An introduction to the theory of numbers, 3rd ed. (Oxford 1954).
- [5] Hurwitz-Courant, Funktionentheorie (Berlin 1925).
- [6] G. Kowalewski, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung, 4. Aufl. (Berlin 1928).
- [7] H. Weber und J. Wellstein, Encyklopädie der Elementarmathematik I (Leipzig 1903).
- [8] P. Wijdenes, Beginselen van de getallenleer, 2de druk (Groningen 1949).

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM

DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN

PROF. DR. O. BOTTEMA, DELFT - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT

PROF. DR. E. J. DIJKSTERHUIS, BILTHOVEN - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT

DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

30e JAARGANG 1954/55

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

VAKANTIECURSUS WISKUNDE 1955.

Op 31 oktober en 1 november wordt er te Amsterdam een vakantiecursus voor leraren en andere belangstellenden gehouden, die is georganiseerd door de Commissie ter voorbereiding van vakantiecursussen vanwege het Mathematisch Centrum. De cursus zal worden gewijd aan het nieuwe leerplan voor Wiskunde, zoals dit thans door de verenigingen Wimecos, Liwenagel en de Wiskundewerkgroep van de W.V.O. is aanvaard. Een verzoek de jaarlijkse leergang ditmaal geheel of ten dele aan het nieuwe leerplan te wijden is uitgegaan van het Bestuur van Wimecos, dat het Mathematisch Centrum dankbaar is voor de inwilliging van het verzoek, en dat nu gaarne op alle leden van Wimecos een beroep doet om aan de cursus in de herfstvakantie deel te nemen.

Het concept-programma vermeldt voor de eerste dag, maandag 31 oktober, drie lezingen en voor de tweede dag, dinsdag 1 november vier lezingen. De titels en sprekers zijn:

1. Het ontwerp-leerplan voor Wiskunde 1954 (historische achtergrond, inhoud, betekenis) door Dr. Joh. H. Wansink.
2. De betekenis van het leerplan voor de toekomstige student, door Dr. J. J. Seidel.
3. De schoolmeetkunde van didactisch en wetenschappelijk standpunt, door Prof. Dr. J. C. H. Gerretsen.
4. Wat is en waarvoor dient statistiek, door Prof. Dr. J. Hemelrijk.
5. Enkele didactische opmerkingen over wiskunde en statistiek, door Prof. Dr. D. van Dantzig.
6. Statistiek in het V.H.M.O., door Dr. P. G. J. Vredenduin.
7. Samenvattende beschouwing, door Dr. L. N. H. Bunt.

Het definitieve programma zal zo spoedig mogelijk worden gepubliceerd.

Men kan zich nu reeds aanmelden bij de Administratie van het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam (O). Leden van Wimecos kunnen zich ook opgeven bij de Secretaris van Wimecos, de heer J. F. Hufferman, Wilhelminastraat 19, Zeist. Spoedige aanmelding is zeer gewenst.

Inhoud van de 30ste jaargang 1954—1955.

Blz.

OFFICIËEL

LIWENAGEL

Notulen van de ledenvergadering	195
---	-----

WIMECOS

Rapport van de leerplancommissie-1954.	149
Verslag van de buitengewone algemene vergadering	177

ARTIKELEN

Prof. Dr A. TARSKI, Het semantisch waarheidsbegrip en de grondslagen der semantiek vertaald door Prof. Dr E. W. Beth	1
Prof. Dr E. W. BETH, De werkzaamheden der Nederlandse vereniging voor logica en wijsbegeerte der exacte wetenschappen	44
Prof. Dr D. VAN DANTZIG, Wiskundige consultatie in de praktijk	53
Dr JOH. H. WANSINK, Didactische revue	68, 101
J. MUILWIJK, Enkele opmerkingen over het begrip massa . .	81
Dr A. F. MONNA, De invoering van de logarithme	88
Prof. Dr O. BOTTEMA, De som van de sinussen van de hoeken van een driehoek.	114
F. HENNEMAN, Eenhedenstelsels.	117
Dr L. M. DE HAAN, Kennismaking met het getal e in de school- wiskunde	130
G. KROOSHOF, Uit de praktijk	134
Verslag van de Nederlandse vereniging voor logica en wijsbegeerte der exacte wetenschappen.	141
Adres van de wiskunde-werkgroep van de W.V.O.	202
Ons weekend	206
PH. RONSMANS, Naar een dynamisch middelbaar meetkunde- onderwijs	209
Prof. Dr A. D. DE GROOT, De psychologie van het denken en het meetkunde onderwijs	224
Dr P. BRONKHORST, Welke eisen mogen we bij het meetkunde- onderwijs aan de leerlingen stellen.	237
P. M. VAN HIELE, Pakkend materiaal ter inleiding van meet- kundige grondbegrippen.	248
Dr P. G. CATH, Jules Henri Poincaré	265
Prof. Dr H. FREUDENTHAL, Gauss als meetkundige	276
Prof. Dr J. POPKEN, Enkele facetten van Gauss' oeuvre . .	282
F. VAN DER BLIJ, Sommen van Gauss	293

KORRELS

CXIV P. WIJDENES, Secans en cosecans	147
CXV H. OVERING, Citaat van Jaláloddin Davâni.	148

BOEKBESPREKINGEN . 97, 98, 100, 142, 143, 145, 263, 299	
---	--

SOMMEN VAN GAUSS

Naar een op 23 Februari 1955 te Utrecht gehouden voordracht
door

F. VAN DER BLIJ.

Johann Friederich Carl Gauss stierf 100 jaar geleden. E. T. Bell schrijft over hem: Gauss leeft overal voort in de wiskunde. Wij vragen ons nu af waar en hoe wij hem ontmoet hebben. Ik zelf denk aan de sommen van Gauss, die ik vaak en in menigerlei vorm ben tegengekomen. Maar ik moet eerlijk zeggen, dat ik er nog nooit toe gekomen was in het werk van Gauss zelf deze sommen op te gaan zoeken.

Deze sommen zijn te vinden in zijn beroemde werk de „Disquisitiones Arithmeticae”, in de wandeling ook wel het boek met de zeven zegels genoemd. Dit boek telt zeven hoofdstukken, maar we vinden ook verwijzingen naar het achtste, er niet bijgevoegde hoofdstuk. In dit werk, dat Gauss schreef tussen zijn 18de en 21ste jaar en publiceerde toen hij 24 jaar oud was, vinden we tal van problemen systematisch behandeld.

Het zevende hoofdstuk begint met een geestdriftige inleiding over de constructies van regelmatige veelhoeken. We kunnen deze geestdrift best begrijpen, omdat het dit probleem was, dat Gauss, even voordat hij 19 jaar oud werd, oploste en hem er toe bracht de wiskunde en niet de klassieke talen als studievak te kiezen. Gauss vond toen een constructie voor de regelmatige 17 hoek.

Uit de definitie van een som van Gauss in het eenvoudigste geval:

$$G(p, \lambda) = \sum_{k=0}^{p-1} \varepsilon^{\lambda k^2} \text{ met } \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{p}}$$

waarin p een oneven priemgetal is, zult U niet direct het verband met regelmatige veelhoeken zien. Daarom zullen we maar in het werk van Gauss gaan lezen. We beginnen niet bij het begin, maar denken eerst over de kladpapieren. We weten wel haast zeker dat Gauss deze sommen in vele gevallen berekend zal hebben om een indruk er van te krijgen.

$$G(3,1) = 1 + \varepsilon + \varepsilon^4 = i \sqrt{3}$$

$$G(3,2) = 1 + \varepsilon^2 + \varepsilon^8 = -i \sqrt{3}$$

$$G(5,1) = 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^4 = \sqrt{5}$$

$$G(5,2) = 1 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 = -\sqrt{5}$$

$$G(5,3) = 1 + 2\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3 = -\sqrt{5}$$

$$G(5,4) = 1 + 2\varepsilon + 2\varepsilon^4 = \sqrt{5}.$$

Gauss zou bij ieder antwoord nog de decimale ontwikkeling in de eerste tien decimalen opgegeven hebben en heeft zeker nog voor meer waarden van p de sommen berekend. Toch durven wij nu al te vermoeden dat

$$|G(p, \lambda)| = \sqrt{p}.$$

Gauss bewijst dit als volgt

$$G(p, \lambda) \cdot \overline{G(p, \lambda)} = [1 + \varepsilon^\lambda + \varepsilon^{4\lambda} + \dots] \cdot [1 + \varepsilon^{-\lambda} + \varepsilon^{-4\lambda} + \dots]$$

Nu noteren we even $[k]$ voor $\varepsilon^{k\lambda}$ en rangschikken het product als volgt

$$[0] + [1] + [4] + \dots + [(-1)^2]$$

$$[0] + [3] + [8] + \dots + [-1]$$

$$[0] + [5] + [12] + \dots + [-3]$$

$$[0] + [7] + [16] + \dots$$

.....

In iedere kolom (behalve de eerste) staan juist alle verschillende eenheidswortels, zodat de som gelijk is aan nul. De eerste kolom geeft een bijdrage p , zodat

$$G(p, \lambda) \cdot \overline{G(p, \lambda)} = p$$

Eenvoudig is nog in te zien dat $G(p, \lambda) = \overline{G(p, \lambda)}$ als er een kwadraat van de gedaante $ap-1$ bestaat en $G(p, \lambda) = -\overline{G(p, \lambda)}$ als zo'n kwadraat niet bestaat. En hieruit is weer af te leiden dat

$$[G(p, \lambda)]^2 = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p.$$

Nu vertelt Gauss dat de berekening van $G(p, \lambda)$ zelf hem niet gemakkelijk is gevallen. Hij is er verschillende jaren mee bezig geweest.

De regel waarmee het teken van $G(p, \lambda)$ bepaald wordt is eenvoudig genoeg: Als er een kwadraat is van de gedaante $ap + \lambda$ dan is de som van Gauss $+\sqrt{p}$ resp. $+i\sqrt{p}$, anders $-\sqrt{p}$ resp. $-i\sqrt{p}$. Gauss noemt deze regel wel in de Disquisitiones, maar bewijst hem daar niet. In een artikel van 1811 vinden we een bewijs.

Voor we hier naar gaan kijken willen we eerst iets vertellen hoe Gauss tot de bestudering van deze sommen kwam. Ik noemde U al dat we deze sommen aantreffen bij de theorie van de regelmatige

veelhoeken. Terloops wil ik even opmerken dat Gauss in de inleiding van het zevende hoofdstuk er op zinspeelt dat de theorie van de verdeling van de cirkel in gelijke bogen, die dus eigenlijk een theorie van de goniometrische functies sinus en cosinus is, ook ontwikkeld kan worden voor functies die samenhangen met

$$\int (1 - x^4)^{-\frac{1}{2}} dx$$

We vinden hier dus een zinspelend op een rekenkundige theorie voor de elliptische functies.

Na enige inleidende beschouwingen komt Gauss tot de vergelijking $X(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1 = 0$, waaraan de eenheidswortels ongelijk 1 voldoen. Wanneer n een priemgetal is, is het linkerlid van deze vergelijking niet te ontbinden in factoren van lager graad met rationale coëfficiënten. Gauss geeft het volgende bewijs:

Laat $X(x) = P(x) \cdot Q(x)$, waarin $P(x)$ van de graad $\lambda < n-1$ is. Laten $P'(x)$, $P''(x)$, $\dots$, $P^{(n-2)}(x)$ de polynomen zijn waarvan de nulpunten juist de tweede, derde, $\dots$ machten zijn van de nulpunten van $P(x)$. Uit voor de hand liggende eigenschappen van eenheidswortels volgt dan

$P(x) \cdot P'(x) \cdot P''(x) \dots P^{(n-2)}(x) = [X(x)]^\lambda$. In het bijzonder $P(1) \cdot P'(1) \cdot P''(1) \dots P^{(n-2)}(1) = n^\lambda$. En omdat n een priemgetal is zijn dus hoogstens λ en minstens één van factoren $P^{(v)}(1)$ gelijk aan n . Hun som $P(1) + P'(1) + \dots + P^{(n-2)}(1)$ is dus zeker geen n -voud. Dit voert tot een tegenspraak. Om dit in te zien gaan we als volgt te werk: De coëfficiënten van $P(x)$ zijn uit te drukken als gehele rationale functies van ε . De coëfficiënten van $P^{(v)}(x)$ zijn te verkrijgen door indezelfde gehele rationale functies voor ε nu ε^{v+1} te substitueren. Wanneer we nog het polynoom in x beschouwen dat we verkrijgen door in de coëfficiënten i.p.v. ε nu 1 te substitueren, vinden we een n -tal polynomen, waarvan de coëfficiënten van gelijke machten van x steeds een rationale som opleveren die een veelvoud van n is. Wanneer we in het laatst geconstrueerde polynoom substitueren $x = 1$ is de waarde nul. [We kunnen dit polynoom ontstaan denken door de nulpunten van $P(x)$ alle door 1 te vervangen]. Zodat dus $P(1) + P'(1) + P''(1) + \dots + P^{(n-2)}(1)$ een n -voud wordt.

We proberen daarom $X(x)$ te ontbinden in twee factoren, die dan wel niet rationale coëfficiënten hebben maar waarvan de coëfficiënten door vierkantsvergelijkingen kunnen worden opgelost. Het gaat er dus om de $n-1$ wortels te rangschikken in twee groepen van $\frac{n-1}{2}$ wortels. Natuurlijk moet

dit op verstandige wijze gebeuren. Gauss komt tot de verstandige manier via zijn theorie van congruenties, gebruikt voor de bestudering van de perioden van decimale breuken. Laten wij zijn gedachten proberen te vertalen in moderne begrippen. We moeten de $n-1$ wortels bezien, de wortels worden volledig gekarakteriseerd door hun exponenten modulo n . We hebben dus eigenlijk de elementen ongelijk nul uit een lichaam met n elementen te verdelen. Deze elementen vormen onder de *vermenigvuldiging* een groep, zelfs een cyclische groep. Het ligt voor de hand een ondergroep van index twee te zoeken. Deze wordt voortgebracht door het kwadraat van een voortbrengende van de volle groep. Zowel deze ondergroep als de erbij behorende nevenklasse zijn voor te stellen door een „periode”

$$\lambda, \lambda h, \lambda h^2, \lambda h^3, \dots \lambda h^{\frac{1}{2}(n-1)-1}$$

met geschikt gekozen λ en h .

Omdat h het kwadraat van een voortbrengende is volgt direct dat

$$G(n, \lambda) = 1 + [1] + [h] + [h^2] + \dots$$

Dus voldoet de som van de wortels van een periode aan een vierkantsvergelijking. Verder is te bewijzen dat de coëfficiënten van het polynoom, waarvan de elementen van een periode de nulpunten zijn, alle rationaal uit te drukken zijn in de sommen $G(n, \lambda)$.

We merken nog op dat Gauss op deze weg de constructie van de regelmatige 17-hoek vond. Wanneer $n = 17$ vinden we door het oplossen van een vierkantsvergelijking een vergelijking van de achtste graad, op deze passen we hetzelfde procédé toe om via de oplossing van vierkantsvergelijkingen tot vergelijkingen van de tweede graad te komen. Het reduceren tot successieve vierkantsworteltrekkingen [dus constructies die met passer en lineaal uitvoerbaar zijn] is alleen dan mogelijk als $n-1$ een macht van 2 is. Regelmatige n -hoeken zijn dus voor n priem alleen te construeren als $n = 2^k + 1$. Voor $\lambda = 0, 1, 2, 4, 8$ levert dit de priemgetallen 2, 3, 5, 17, 257, ... Het is duidelijk dat n alleen priem kan zijn als $\lambda = 2^\mu$ (of $\lambda = 0$). Maar niet voor alle μ is n een priemgetal.

We keren terug tot de sommen van Gauss en schetsen het bewijs dat Gauss publiceerde voor de bovenvermelde regel om het teken te bepalen. De som $G(p, \lambda)$ heeft voor alle λ , die kwadraatrest zijn een zelfde waarde en voor alle λ , die geen kwadraatrest zijn de tegen-gestelde waarde. Het is dus voldoende $G(p, 1)$ te bepalen. Gauss zegt zelf dat hij voor het bewijs: „eigenaardige en nogal spitsvondige beschouwingen” nodig heeft.

Hij gaat uit van de reeks

$$f(x, m) = 1 - \frac{1-x^m}{1-x} + \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})}{(1-x)(1-x^2)} - \frac{(1-x^m)(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots$$

Voor natuurlijke m breekt deze reeks af. Vanzelfsprekend kan Gauss het niet nalaten, hoewel hij deze reeks alleen voor even natuurlijke getallen nodig heeft, te wijzen op merkwaardige eigenschappen voor gehele negatieve of gebroken waarden van m . Wanneer we x tot 1 laten naderen blijken de termen te naderen tot de binomiaalcoëfficiënten.

Gauss rekent nu als volgt.

$$\begin{aligned} f(x, m) &= 1 - \left[\frac{1-x^{m-1}}{1-x} + x^{m-1} \right] + \left[\frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})}{(1-x)(1-x^2)} + x^{m-2} \frac{(1-x^{m-1})}{(1-x)} \right] \dots \\ &= (1-x^{m-1}) - (1-x^{m-2}) \frac{1-x^{m-1}}{1-x} + (1-x^{m-3}) \frac{(1-x^{m-1})(1-x^{m-2})}{(1-x)(1-x^2)} \dots \\ &= (1-x^{m-1}) - (1-x^{m-1}) \frac{1-x^{m-2}}{1-x} + (1-x^{m-1}) \frac{(1-x^{m-2})(1-x^{m-3})}{(1-x)(1-x^2)} \dots \\ &= (1-x^{m-1}) f(x, m-2). \end{aligned}$$

Omdat $f(x, 1) = 0$ en $f(x, 0) = 1$ volgt $f(x, 2k+1) = 0$ en

$$f(x, 2k) = (1-x^{2k-1})(1-x^{2k-3})(1-x^{2k-5}) \dots (1-x).$$

In de zo verkregen indentiteit substitueert Gauss nu $x = \varepsilon$ en $2k = n-1$.

$$\begin{aligned} \text{Nu is } (1-\varepsilon^{n-1}) &= -\varepsilon^{-1}(1-\varepsilon) \\ (1-\varepsilon^{n-2}) &= \varepsilon^{-2}(1-\varepsilon^2) \text{ etc.} \end{aligned}$$

dus

$$f(\varepsilon, n-1) = 1 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-7} + \dots + \varepsilon^{-\frac{1}{2}n(n-1)}$$

maar ook

$$f(\varepsilon, n-1) = (1-\varepsilon)(1-\varepsilon^3)(1-\varepsilon^5) \dots (1-\varepsilon^{n-2})$$

Nu wordt ε door ε^{-2} vervangen en daarna worden beide leden vermenigvuldigd met

$$\varepsilon \cdot \varepsilon^3 \cdot \varepsilon^5 \cdot \varepsilon^7 \dots = \varepsilon^{\frac{1}{2}(n-1)^2}$$

Dan ontstaat na omschikken de formule

$$\begin{aligned} 1 + \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^9 + \dots + \varepsilon^{(n-1)^2} &= (\varepsilon - \varepsilon^{-1})(\varepsilon^3 - \varepsilon^{-3}) \dots \\ &\quad (\varepsilon^{n-2} - \varepsilon^{-n+2}) \\ &= (2i)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin \omega \sin 3\omega \dots \\ &\quad \sin (n-2)\omega \end{aligned}$$

met $\omega = \frac{2\pi}{n}$. Als nu n een viervoud plus één is, zijn $\sin \omega$, $\sin 3\omega$ tot en met $\sin \frac{n-3}{2}\omega$ positief, de overige negatief. Omdat $|G(n, 1)| = \sqrt{n}$ volgt dus

$$G(n, 1) = \sqrt{n}.$$

Als n een viervoud plus 3 is zijn $\sin \omega$, $\sin 3\omega$ tot en met $\sin \frac{n-1}{2}\omega$ positief en de verdere factoren negatief dus $G(n, 1) = i\sqrt{n}$. [We gebruiken alleen de waarde van $|G(n, 1)|$ niet die van $[G(n, 1)]^2$]. Wanneer we gebruik maken van het kwadratisch restsymbool $\left(\frac{\lambda}{n}\right) = +1$ of -1 al naar gelang er een kwadraat van de gedaante $an + \lambda$ is of niet (hierbij veronderstellen we n priem en λ niet door n deelbaar) vinden we voor een oneven priemgetal n

$$G(n, \lambda) = \left(\frac{\lambda}{n}\right) i^{\frac{(n-1)^2}{4}} \sqrt{n}.$$

Gauss slaagt er in deze formule ook te bewijzen als n het product van oneven priemgetallen is. Een eenvoudige omvorming geeft echter voor twee verschillende oneven priemgetallen n en m direct

$$G(mn, 1) = G(m, n) \cdot G(n, m).$$

Substitueren we dan de zojuist gevonden formule voor de sommen van Gauss, dan vinden we weer een nieuw bewijs voor de door Gauss op vele verschillende manieren bewezen kwadratische reciprociteitswet

$$\left(\frac{n}{m}\right) \cdot \left(\frac{m}{n}\right) = (-1)^{\frac{(m-1)(n-1)}{4}}$$

Dit alles vond ik bij Gauss toen ik op zoek ging naar de oorsprong van de sommen van Gauss. Ik hoop dat het U een indruk heeft gegeven van de fraaie methoden, die de jonge Gauss gebruikte en misschien een aanleiding kan zijn ook eens te gaan lezen in het werk van de *Princeps Mathematicorum*.

BOEKBESPREKING

Nothing All, *Inzicht in de Vierde Dimensie*.
Voorwoord van Prof. Dr. Ch. van Os, 127 blz.;
67 figuren; 13 tabellen; ingen. f 6,25, geb. f 7,50;
z.j.; P. Noordhoff N.V., Groningen-Djakarta.

Dit goed verzorgde boekje heeft geen wetenschappelijke pretenaties, zoals een oppervlakkige kennismaking reeds leert. De eerste twee alinea's van de auteur luiden: „Al moge U dit boek, bij het eerste doorbladeren alreeds, als een wiskundig boek voorkomen, beschouw het niettemin méér als de eerste strophe van een gedicht, — een lófdicht zelfs naar diepste bedoeling —, op de betrekkelijkheid van al ons menselijk weten.

Het zij toegegeven dat de taal er van explicerend en betogend is en de woordkeus wel eens ontleend aan het wiskundig arsenaal, maar toch kan, naar ik vertrouw, dit boek verstaanbaar zijn voor allen, die naast slechts een minimale hoeveelheid parate kennis der Meetkunde, een gezond verstand en wat fantasie en voorstellingsvermogen hebben”.

Een populair werkje dus, maar één dat naar mijn mening voor de school stellig zijn betekenis heeft. Ruim 40 jaar geleden heeft Prof. dr. Hk. de Vries in het voorwoord van zijn boekje „de Vierde Dimensie” gewezen op de betekenis die een ernstige kennis-making met de meer-dimensionale meetkunde voor het wiskunde-onderwijs zou kunnen hebben. Het gehalte van het te geven onderwijs is immers mede bepaald door de wetenschappelijke horizon van hen die onderwijs geven. Ook de leerlingen van de hoogste klassen van het V.H.M.O. zijn voor een eerste kennismaking met de vierde dimensie rijp.

De leraar die zijn klasse of enkele leerlingen uit zijn klasse iets over de vierde dimensie wil laten lezen, heeft thans ook het mooie boekje van J. G. G. Nottrot tot zijn beschikking. De publicatie ervan is gesteund door de Nederlandse Organisatie voor Zuiver Wetenschappelijk Onderzoek (Z.W.O.), wat tot gevolg heeft gehad dat het incognito van de schrijver moest worden prijsgegeven. Het verwekt wel enige verwondering dat een populaire uitgave als deze onder „zuiver” wetenschappelijke arbeid wordt gerangschikt.

In een waarderend voorwoord maakt Prof. van Os gewag van de

speculaties die er dikwijls vastgeknoopt worden aan het denkbeeld van een „werkelijk bestaan” van een vier-dimensionale ruimte, speculaties zoals die bv. tot uitdrukking komen in het boek van ir. F. Ortt over „de Superkosmos”.

Om over dergelijke speculaties te kunnen oordelen moet men stellig enigszins op de hoogte zijn van de meer-dimensionale meetkunde zelf. Het boekje van de heer Nottrot is evenals het nog steeds herdrukt wordende „Flatland” van Abbot een aanbevelenswaardige gids voor de hier bedoelde oriëntering.

We raden alle collega's aan met dit werk van de heer Nottrot kennis te maken.

WANSINK.



J. B. WOLTERS
GRONINGEN, DJAKARTA

Zo juist verschenen 7e druk:

G. W. VAN BRINK
en **W. SCHIPPERS**

BEKNOPT LEERBOEK DER STEREOMETRIE

ten dienste van Kweekscholen,
van de A-afdeling van het Gym-
nasium en andere scholen met
beperkt wiskunde-program en
van de opleiding voor de hoofd-
akte

Met 99 figuren

Ing. f.2,75, gebonden f3,25

Verkrijgbaar bij de boekhandel



Aan de Academie Minerva
(afd. M.T.S. en Zeevaartschool)
wordt gevraagd een

Leraar in de Wiskunde en Mechanica (volledige betrekking)

★

Salaris volgens Rijksregeling.
Sollicitaties met uitvoerige in-
lichtingen binnen 10 dagen na
het verschijnen van dit blad aan
B. en W.

Inlichtingen bij de Directeur
(Petrus Driessenstraat 3)

Dr H. J. E. BETH

INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

met toepassingen op verschillende gebieden - 420 bladzijden

met 133 figuren - 6de druk f 13,50, gebonden . . f 16,—

Antwoorden - 0,90

Limieten van varianten. - Limieten van functies. - Continuïteit van functies. - De exponentiële en de logarithmische functie. - Het differentiaalquotient. - Regels voor de berekening van differentiaalquotienten; eigenschappen van het differentiaalquotient. - Het tweede differentiaalquotient; hogere differentiaalquotienten. - Oneindige reeksen. - Reeksen van Mac Laurin en Taylor. - Berekening van grenswaarden. - Maxima en minima van functies van een veranderlijke. - De differentiaal. - Functies van meer veranderlijken. Impliciete functies van één veranderlijke. - Het invoeren van nieuwe veranderlijken. - Formules en reeksen van Taylor en Mac Laurin voor functies van meer veranderlijken. - Maxima en minima van functies van meer veranderlijken. - De onbepaalde integraal. - Integratie van rationale algebraïsche functies. - Integratie van irrationale algebraïsche functies. - Integratie van transcendenten functies. - De bepaalde integraal. - Meetkundige toepassingen van de bepaalde integraal. - Integratie door reeksontwikkeling. - Reeksen van Fourier. - Meervoudige integralen. - Meetkundige toepassingen. - Andere toepassingen van enkelvoudige en meervoudige bepaalde integralen. - De lijnintegraal. - Complexe veranderlijken en functies. - Gewone differentiaalvergelijkingen van de eerste orde. - Gewone differentiaalvergelijkingen van hoger orde. - Simultane differentiaalvergelijkingen. - Partiële differentiaalvergelijkingen. - Variatie-erkenning. - De geschiedenis van het ontstaan van de infinitesimaalrekening. - Algemene herhaling. - Register.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

C. J. ALDERS

DRIEHOEKSMETING

voor middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs.

18de-20ste druk - 90 blz. - 42 figuren	f	1,90
gecartonneerd	f	2,30
antwoorden	f	0,50

De goniometrische functies van scherpe hoeken. - De scheefhoekige driehoek. - Hoeken groter dan 90° ; negatieve hoeken. - De formules voor $\cos(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha + \beta)$. - De formules voor $\sin p \pm \sin q$ en $\cos p \pm \cos q$. - Lijnstukken in een driehoek. - Goniometrische vergelijkingen. - Limieten. - Extreme waarden. - Cyclometrische functies. - Probleem van Snellius.

D. K. F. HEYT

BEKNOPT DRIEHOEKSMETING

12de, omgewerkte druk van Wijdenes, <i>Beknpte driehoeksmeting</i>	f	3,50
antwoorden	f	0,75

Scherpe hoeken. - Andere hoeken. - Logarithmen van goniometrische verhoudingen. - Enkele meetkundige toepassingen. - Eenvoudige vergelijkingen. - Grafieken. - Herhaling. - Optellingstheorema's. - Herhaling. - Rechthoekige driehoeken. - Scheefhoekige driehoeken. - Merkwaardige lijnen. - Goniometrische vergelijkingen. - Radialen. - Functies. - Uiterste waarden. - Cyclometrische vormen. - Algemene herhaling. - Eindexamens H.B.S. - Eindexamens-Gymnasium.

P. WIJDENES

PRACTISCHE DRIEHOEKSMETING

met toepassingen op verschillend gebied.

5de druk - 128 bladzijden, met 107 figuren.	f	3,25
antwoorden	f	0,75

De scherpe hoek. - De logarithmen van de gon. verhoudingen. - Rechthoekige driehoeken. - De stompe hoek. - Drie formules. - Enkele meetkundige toepassingen. - Som en verschil van hoeken. - Som en verschil van gon. verhoudingen. - Formules voor de dubbele en halve hoeken. - Scheefhoekige driehoeken. - Merkwaardige lijnen. - Goniometrische vergelijkingen. - Herhaling met examenopgaven. - Toepassingen: Het vraagstuk van Snellius. - Spanten. - Krachtendriehoeken. - Hellend vlak met wig en keg. - Opgaven. - Aantekeningen: Hoeken in alle kwadranten. - Grafieken. - De decimale tafel.

J. VERSLUYS

VLAKKE DRIEHOEKSMETING

met vraagstukken.

20ste druk	f	2,75
antwoorden	f	0,53

Goniometrie. - Trigonometrie. - Vergelijkingen. - Cycl. vormen. - Grafieken. - Sinus en tangens van kleine hoeken. - Grenswaarden. - Vraagstukken. - Tafel van goniom. verhoudingen.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel