EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

29e JAARGANG 1953/54

II

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (*f* 8,00) zijn ingetekend, betalen *f* 6,75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep Liwenagel te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van Wimecos storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in *f* 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op Euclides begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Zwolse weg 371, Apeldoorn, tel. 330 (Wenum, K 6762). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

INHOUD.

	Blz.
P. WIJDENES, Construeer	49
Dr L. N. H. BUNT, Een onderzoek naar de overlading van het programma voor de Wiskunde bij het V.H.M.O. (vervolg)	72
Mededeling Liwenagel	93
Dr. A. VAN DOP en Dr A. VAN HASELEN, Wat is eenvoudig? . . .	94
Officiële Mededelingen van het Bestuur van Wimecos	96
G. BOEKHOFF, Antwoord aan de Heer Wijdenes	97
Prof. Dr O. BOTTEMA, Verscheidenheden	99

„CONSTRUEER".

Eindexamen H.B.S. Aanhalingen:

1950 nr. 1. „Maak een duidelijke figuur en teken daarin nauwkeurig . . .". „Teken de doorsnede van . . . met . . .". „Teken de lijn, . . ." AB $= 2p$, BC $= p$, TM $= p\sqrt{3}$. (Zie fig. 16).

1951 nr. 1. „Van de kubus is de ribbe $2p$". „Construeer door E_1. . ."

1952 nr. 2. „Teken in een stereometrische figuur deze doorsnede."

1953 nr. 3. „Teken in een stereometrische figuur deze doorsnede". „Construeer in de stereometrische figuur . . .". (Zie fig. 17).

Wat is een stereometrische figuur? Daarover en over het tekenen daarvan heb ik in Jg. XXII (1934/35) van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde een artikel geschreven; (45 blz. met 76 figuren). Ik ben tot de slotsom gekomen, dat stereometrische figuren niet volgens een of andere methode worden getekend en noemde „stereometrisch tekenen" onmethodisch geknoei. Wat is het anders, als men in een leerboek een figuur ziet als 1, die een afgeknot prisma moet voorstellen (een uit vele slechte uit dat boek), of een twaalfvlak uit een ander boek als op fig. 2; zie de twee vijfhoeken vooraan onder, de twee daarmee evenwijdige boven achter, de vijfhoek vooraan en de congruente gestippelde achter; de diagonaal in het zijvlak onder rechts, die niet evenwijdig is aan een zijde; om het hierbij maar te laten!

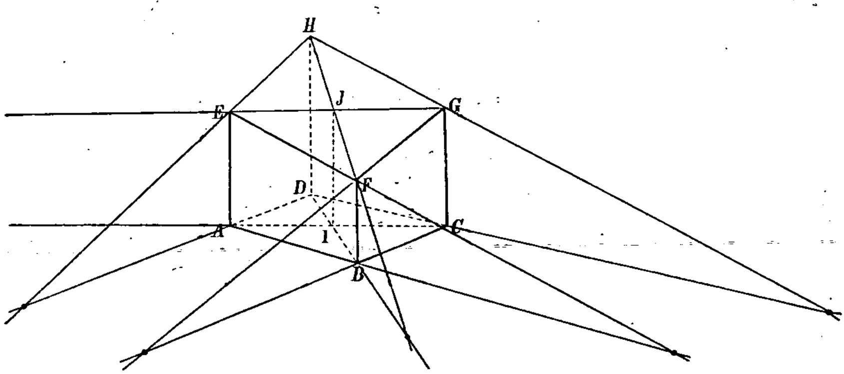

Fig. 1, verkleind op ¾.

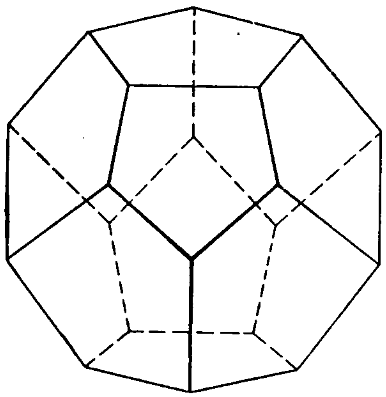

Fig. 2.

Wat kunnen we verwachten van leerlingen, als hun leerboek zo iets als voorbeeld te zien geeft? En dan: „construeer in de stereometrische figuur". Dat kan niet veel anders zijn dan: „trek zo maar wat"; construeren op een figuur, die fout is, gaat nu eenmaal niet.

Gaarne hoor ik van de steller van het vraagstuk en van leraren, hoe de opdracht: „construeer in de stereometrische figuur" dient te worden uitgevoerd. M.i. moet, wil men „construeren", de figuur volgens een of andere projectiemethode gemaakt zijn; niet met de gewone orthogonale projectie op twee vlakken, zoals in de beschrijvende meetkunde, die men op de H.B.S. leert; maar op één vlak. Daarbij hebben we de keuze uit 5 projectiemethoden; let wel lezer: uit 5 wiskundig verantwoorde methoden: 1) centrale projectie, 2) perspectief; geen van beide eenvoudig en geen parallelprojecties, zodat we die kunnen uitsluiten; 3, 4 en 5 met parallelle projectoren nl.: 3) de scheve projectie; 4) de axonometrische projectie; 5) de klinografische projectie. Hiervan geeft de eerste meestal verwrongen figuren; zie fig. 3; bovendien en dit is een groot bezwaar: de grondfiguur en de projectie lopen bij de constructie meestal door elkaar heen. De axonometrische projectie is een loodrechte projectie; deze geeft mooie figuren; zie fig. 4.

Laat ik deze in het kort schetsen. Stel U voor een drievlakshoek OXYZ met drie rechte zijden O; de hoogtelijn uit O op △ XYZ is OO'; O'X, O'Y en O'Z zijn de hoogtelijnen van △ XYZ. Een voorwerp binnen het viervlak OXYZ wordt geprojecteerd in de richting OO'. Neem nu op de assen opv. OA = OB = OC b.v. de ribben van een kubus; bij een bepaalde stand van XYZ zullen O'A', O'B' en O'C' zich

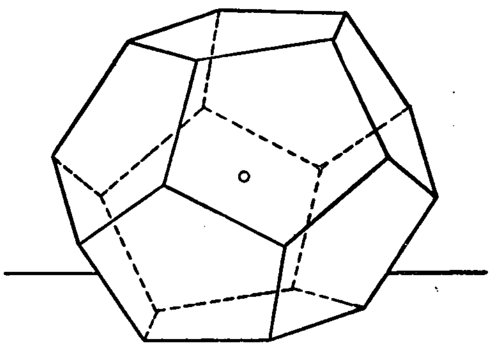

Fig. 3.
Een regelmatig twaalfvlak in scheve projectie.

verhouden als 9, 5 en 10; men krijgt dan een mooie figuur. Het vlak XYZ maakt dan met OXY een hoek α, waarbij $\alpha \approx$ bg tg 5 is. Vandaar in het genoemde artikel en in het schoolboek Stereometrie Molenbroek-Wijdenes de projectiedriehoek met $\alpha =$ bg tg 5 $\approx 78°42'$.

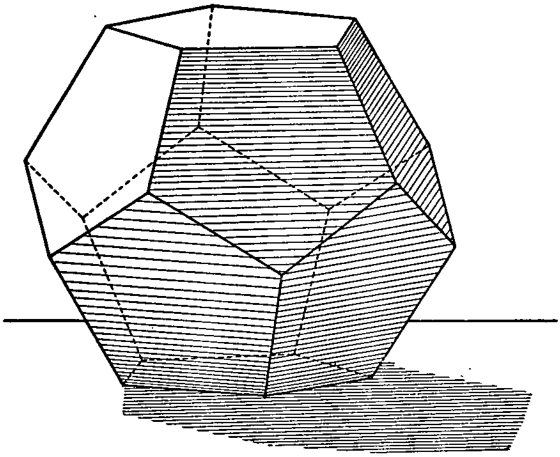

Fig. 4.
In axonometrische, ook in klinografische projectie.

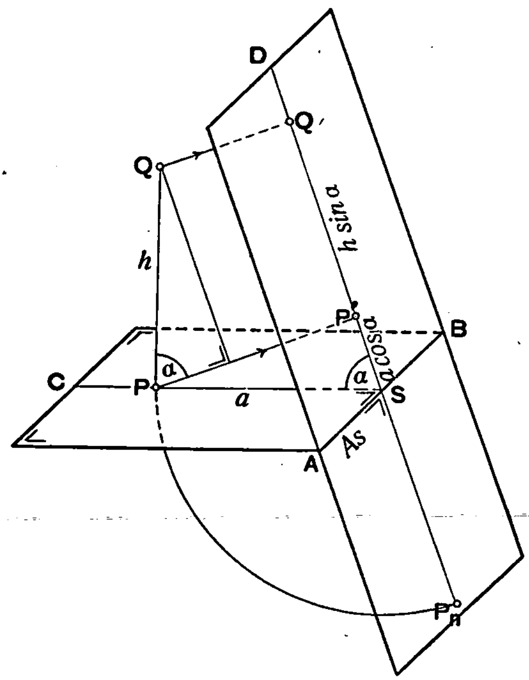

Fig. 5.

En nu **de klinografische projectie**[1]; wel, dat is niet anders dan een vereenvoudigde axonometrische projectie. Laat OX, OY, OZ, O′ en het uitslaan van de driehoeken OXY, OXZ en OYZ weg; let enkel en alleen op de hoek, die het tafereel maakt met het grondvlak, het horizontale vlak OXY; XY noemen we de as en we nemen b.v. $\alpha = 75°$.

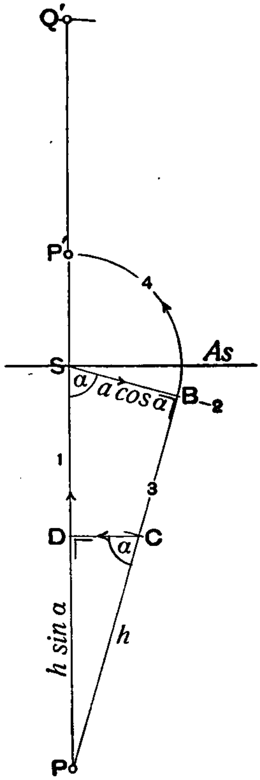

Fig. 6.

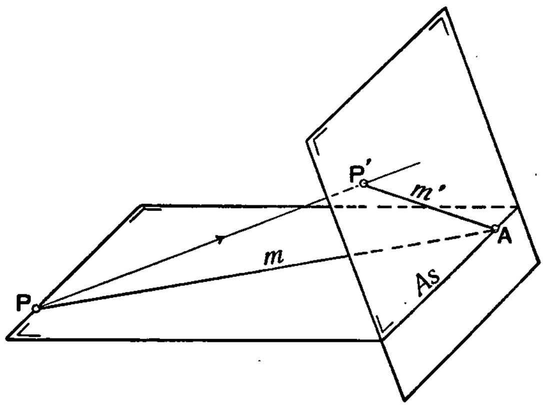

Fig. 7.

De hele theorie van de klinografische projectie vindt men in het aangestreepte; wat men er mee bereikt, ziet men op de figuren 10—17.

ABC van fig. 5 is een horizontaal vlak; ABD het vlak, dat er een hoek α mee maakt; AB noemen we de as.

Elk punt, waar ook gelegen, in of boven het grondvlak, projecteert men loodrecht op het hellende vlak, op het tafereel; zie P

[1]) De klinografische projectie is door mij gevonden en voor het eerst in druk verschenen in het genoemde artikel; als naam bedacht ik: „de methode van het hellende tafereel''. Op mijn vraag aan Dr Dijksterhuis, de steeds behulpzame en veelzijdige, werd de naam „Klinografische projectie'' aan de nieuwe methode toegekend. (Zie zijn boekje: Vreemde woorden in de wiskunde). Zie ook Euclides, 15e jg., blz. 231 of Euclides, 26 jg., blz. 40.

en P′, Q en Q′. Trek PS loodrecht op de as, ook SP′Q′; SP′$=a\cos\alpha$; P′Q′ $= h\sin\alpha$.

Nu moeten we dit voorstellen in een vlakke figuur. Sla daartoe het grondvlak om in het verlengde van het tafereel; zie op fig. 6:

P is gegeven;

1) PS $\perp$ de as en doortrekken; PS$=a$; 2) α uitzetten;

3) PB $\perp$ BS; nu is SB $= a\cos\alpha$; 4) de cirkel (S, $a\cos\alpha$) geeft P′ op het verlengde van PS. In P staat PQ$=h$ (fig. 5) loodrecht op het grondvlak; de projectie is $h\sin\alpha$. Zie op fig. 6 op de lijn 3 PC, $= h$; PD $= h\sin\alpha$; zet PD boven P′ uit; zie Q′.

Verder nemen we een lijn m in het horizontale vlak, zie fig. 7; m snijdt de as in A; is P′ de projectie van P op het tafereel, dan is m' de projectie van m. Dat men hiervan een handig gebruik maakt bij het projecteren van een vlakke figuur is duidelijk.

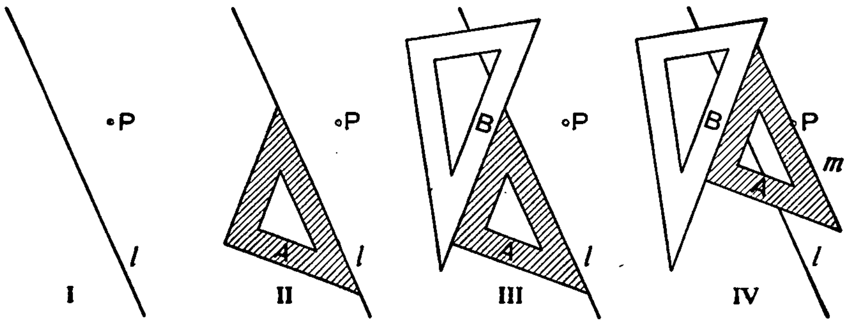

Fig. 8.
Hoe men door P de lijn m evenwijdig trekt aan l.

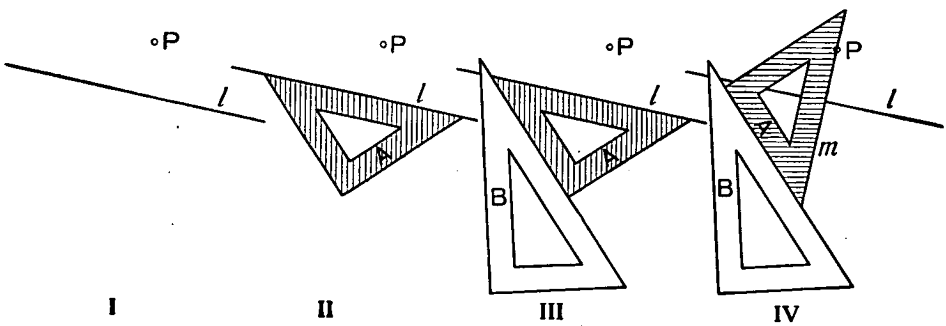

Fig. 9.
Hoe men door P de lijn m loodrecht trekt op l.

Een paar opmerkingen: 1) leer ze met driehoeken omgaan; zonder dat kan men niet construeren. De driehoek A met een schuine zijde van 20 à 21 cm; de driehoek B met een van ongeveer 25 cm.

2) Neem $\alpha = 75° = 30° + 45°$ van de driehoeken; elke andere hoek van 75° tot 78° is ook goed; op een halve graad komt het niet aan.

En nu kunnen we niet beter doen, dan enige figuren voor te maken om te laten zien, hoe simpel de methode met het hellende tafereel is; $\triangle$ PSB van fig. 6 noemen we de *projectiedriehoek*; heeft men vrij veel punten over te brengen, dan kan men, zo men wil, deze driehoek geheel links of rechts van de tekening zetten en $a \cos \alpha$, $b \cos \alpha$, $c \sin \alpha$, $d \sin \alpha$, enz. daarvan overbrengen op de figuur.

Men maakt natuurlijk gebruik van wat in de stereometrie wordt geleerd: 1) is $l \,//$ tafereel, dan is $l' \,//\, l$.

2) Evenwijdige lijnen hebben evenwijdige projecties.

3) De as van projectie is de collineatie-as van de grondfiguur en de projectie (zie fig. 7).

4) Als een lijnstuk verdeeld is in reden van a en b, dan ook de projectie.

Dat 2) en 4) niet gelden voor centrale projectie en perspectief maakt, dat deze twee voor de school ongeschikt zijn.

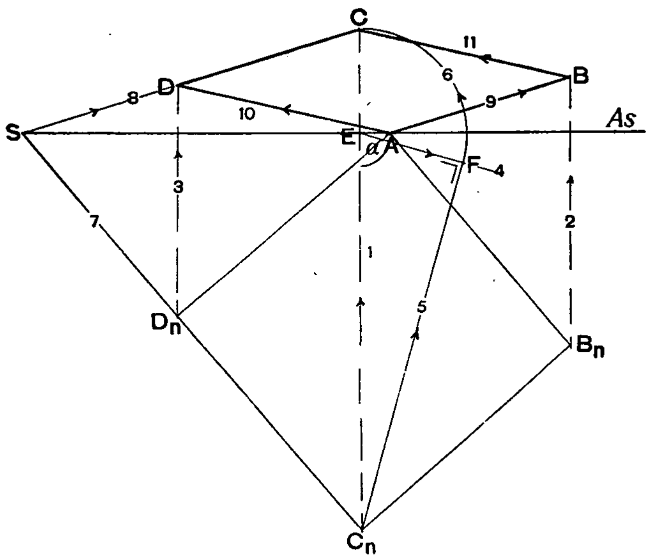

Fig. 10.
Klinografische projectie van een vierkant.

Het vierkant ligt in het omgewentelde horizontale vlak, in de uitbreiding van het tafereel; de snijlijn is de as van projectie. Teken het vierkant $AB_nC_nD_n$; even een opmerking: eigenlijk moeten we zetten, A, B, C en D en de projecties boven de as A', B′, C′ en D′; het is ons te doen om de figuur boven de as; als we figuren moeten maken, dan kan, wat onder de as ligt, wegvallen; en dan is het beter, dat de projecties gewoon A, B, C, D heten; bij het tekenen laten we die n gewoonlijk weg; in hetgeen volgt echter niet, omdat er enige beschrijving bij de figuur moet staan.

De ophaallijnen 1, 2 en 3 uit C_n, B_n en D_n; C_n ligt het verst van de as; zie de projectiedriehoek C_nEF: eerst EF zo, dat $\alpha = 75°$ wordt; $C_nF \perp FE$; trek de boog (E, EF), zie 6; zo vinden we C. Trek C_nD_n door tot S; trek SC_n en AB // SC; trek AD // BC. De hele bewerking duurt niet de helft van de tijd om deze uitleg te lezen!

Zet men in A, B, C en D even lange loodlijnen, dan heeft men direct een regelmatig vierzijdig prisma.

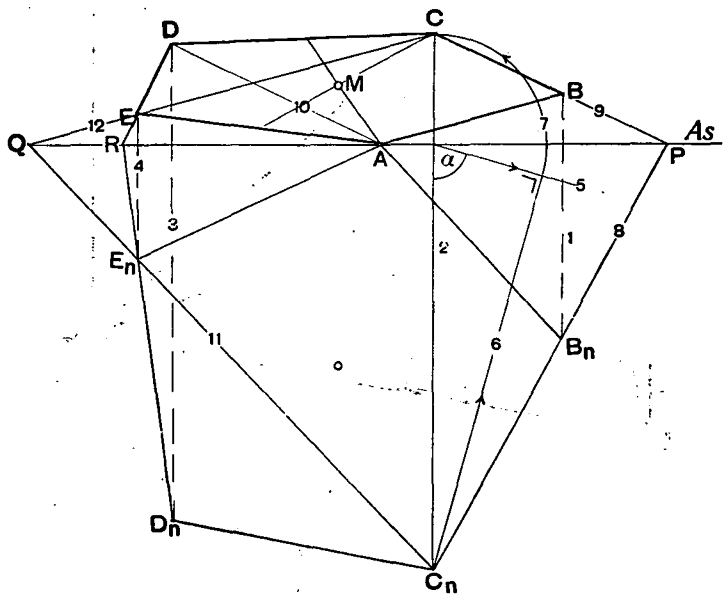

Fig. 11.
Klinografische projectie van een regelmatige vijfhoek.

Teken de vijfhoek $AB_nC_nD_nE_n$; we leggen de as door A; dat punt hoeven we dus niet te projecteren; loodlijnen uit de andere 4 punten loodrecht op de as; iets boven de as uit; zie 1, 2, 3 en 4. C_n ligt het verst van de as; we bepalen dus de plaats van C; zie α en de lijn 5; 6 $\perp$ 5; de cirkelboog 7; C_nB_n snijdt de as in P; C_nE_n in Q en D_nE_n in R. Trek PC; men vindt B; trek AD // PBC; trek AB en CE // AB. Nu hebben we alle 5 punten. Proef: CE gaat door Q, DE door R. Als het goed is, moet men hebben: AB // EC, BC // AD; CD // BE, DE // CA en EA // DB. Bij de constructie en voor de proef vooral gebruik maken van de as van projectie als collineatie-as en van de genoemde evenwijdige lijnen.

Het middelpunt vindt men door twee symmetrie-assen van de vijfhoek te trekken, b.v. van A naar het midden van CD en van C naar het midden van AE. Zet men in M de loodlijn MT, dan kan men een regelmatige vijfzijdige pyramide tekenen en daarop allerlei constructies uitvoeren.

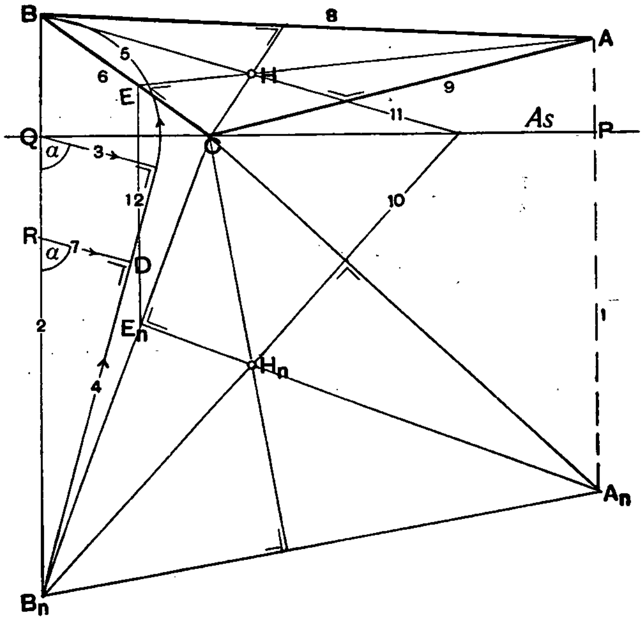

Fig. 12.

Klinografische projectie van een driehoek, waarvan *a*, *b* en *c* zich verhouden als 13, 14 en 15.

We nemen de as door C en trekken de ophaallijnen 1 en 2; bepaal de plaats van B met de projectiedriehoek, waarvan de zijlijnen zijn 2, 3 en 4; zie de boog 5. Verbind B met C. Een tweede projectiedriehoek met A_nP als schuine zijde is er nodig om de plaats van A te bepalen; we tekenen die driehoek niet, maar nemen $B_nR = A_nP$; trek 7 // 3; dan is RD de hoogte van A boven de as; trek BA en CA. Zie de lijn 10; daarna 11; het punt E_n ophalen; de hoogtelijn uit A trekken; die uit C kan men nu ook trekken.

Zie de figuur goed aan; een wiskundig verantwoorde projectie ziet er heel anders uit dan zo maar een driehoek met drie concurrente lijntjes.

Als er wordt opgegeven: construeer een orthocentrisch viervlak TABC waarvan *a*, *b* en *c*, de ribben van het grondvlak, opv. 13, 14 en 15 cm zijn en waarvan de hoogte 10 cm is, dan moet men daaraan voldoen en niet zo maar wat trekken. Hoe men die hoogte construeert, ziet men in de volgende figuur.

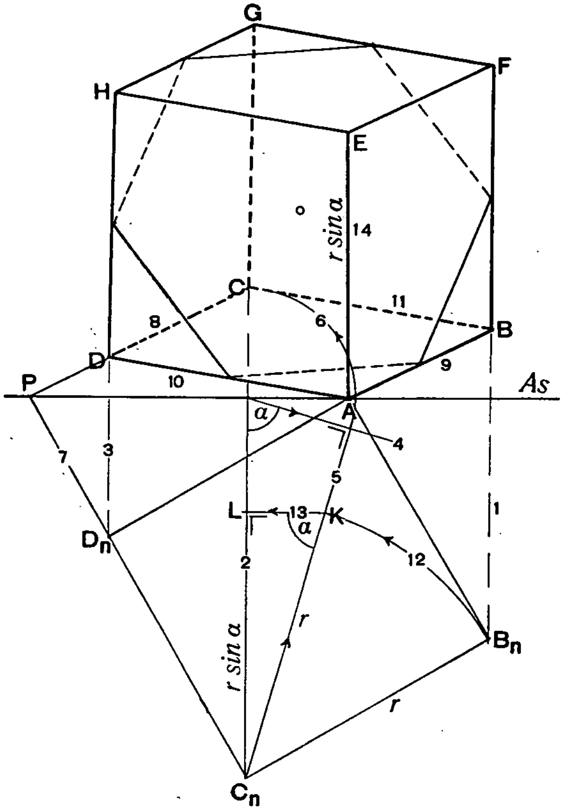

Fig. 13.
Klinografische projectie van een kubus met een regelmatige zeshoek als doorsnede.

Eerst het vierkant $AB_nC_nD_n$ en de ophaallijnen 1, 2 en 3; deze boven de as doortrekken, want daarop komen de opstaande ribben; bepaal met de projectiedriehoek de plaats van C (zie 4, 5 en 6); daarna CP, waarop D ligt; AB // PDC, AD // BC. Zie de cirkelboog 12; deze brengt *r* over op de lange rechthoekszijde van de projectiedriehoek; $C_nK = r$; KL $\perp$ ophaallijn 2; $\angle K = \alpha$; dus is $C_nL = r \sin \alpha$ Zet AE, BF, CG en DH uit, alle $r \sin \alpha$; teken de ribben.

Zie verder de regelmatige zeshoek; de middens van zes ribben zijn de hoekpunten.

Zie de gelijkzijdige driehoek AB_nC_n; de as door A; de ophaallijnen 1 en 2; C_n ligt het verst van de as; de projectiedriehoek is C_nGH; GH geeft omgecirkeld C; we zetten B_nE als C_nK uit op de schuine zijde van de projectiedriehoek; KL wordt boven E uitgezet; zie 7; trek CA, AB en BC. DAF is een vlak van symmetrie van het viervlak; dit wordt naar rechts neergeslagen;

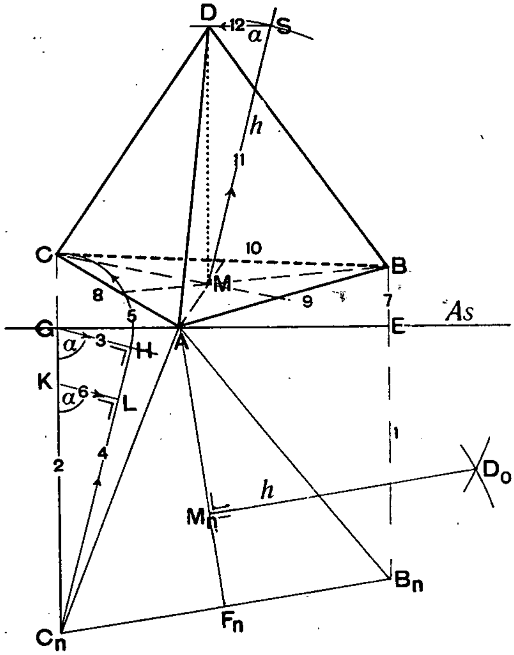

Fig. 14.
Klinografische projectie van een regelmatig viervlak.

zie de cirkelbogen (A, AB_n) en (F_n, F_nA); zo vinden we MD_o, de hoogte van het viervlak. Nu wordt de projectie van h natuurlijk $h \sin \alpha$; maak $MS = h$ en $MS \,//\, C_nH$; SD $\perp$ op de loodlijn in M; nu is $MD = h \sin \alpha$. De hoogte kan men ook als op fig. 13 uitzetten op de lange rechthoekszijde van de projectiedriehoek; dat is beter, maar op deze figuur komt er wat gedrang van lijntjes binnen de vierhoek GHLK. Bovendien, let wel, wordt de hulpconstructie gewoonlijk niet in inkt gezet. Dit geldt ook voor fig. 15.

Zie het vierkant $A_1B_nC_nD_n$ in het grondvlak; zie de projecties A_1, B_1, C_1, D_1. Het hoogste punt N ligt $d \sin \alpha$ boven de projectie M van de punt, waarop het achtvlak staat; d is de lengte van de diagonaal van het vierkant $A_1B_nC_nD_n$. Zie $MK \,//\, C_nZ$; KN $\perp$ op de ophaallijn door M; neem het midden O van MN; trek BD // B_1D_1 en AC // A_1C_1.

En als we dan in een boek een regelmatig achtvlak willen vertonen, dan prikken we die projectie door op een ander papier en tekenen hem zonder enige constructielijn.

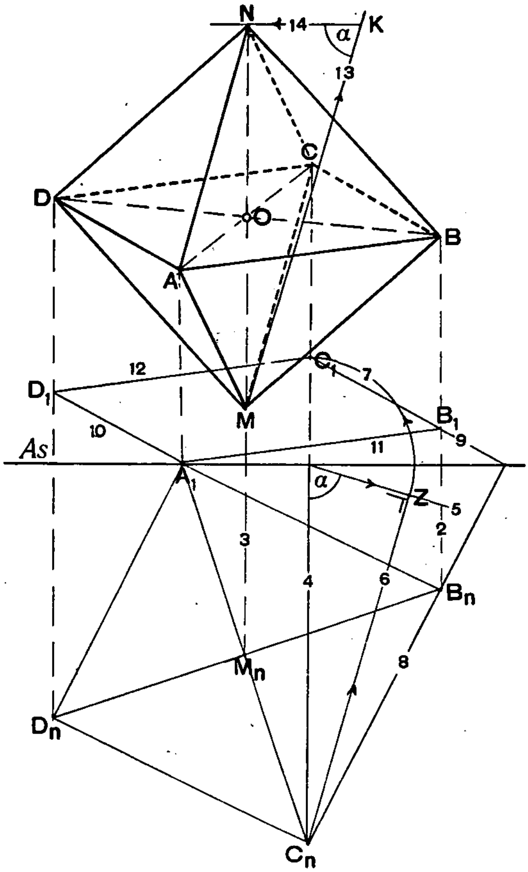

Fig. 15.

Klinografische projectie van een regelmatig achtvlak.

Eindexamen H.B.S. 1950 nr. 1.

T is de top van een pyramide, die de rechthoek ABCD tot grondvlak heeft. De projectie van T op het grondvlak valt samen met het midden M van CD. $AB = 2p$; $BC = p$; $TM = p\sqrt{3}$.

a. Maak een duidelijke figuur en teken daarin nauwkeurig de lijn PQ, die de rechten AT en BC loodrecht snijdt (P op AT en Q op BC).

b. Druk de lengte van het lijnstuk PQ in p uit.

c. Teken de doorsnede van de pyramide met het vlak, dat de tweevlakshoek, gevormd door de vlakken ABT en ABCD, middendoor deelt. Noem het snijpunt van TM met dit deelvlak S. Bewijs, dat S het zwaartepunt is van △ CDT.

d. Teken de lijn, die door B gaat en de kruisende lijnen PQ en TM snijdt. Noem het punt, waarin de gevonden lijn PQ snijdt, R.

e. Bewijs, dat BR = RS is.

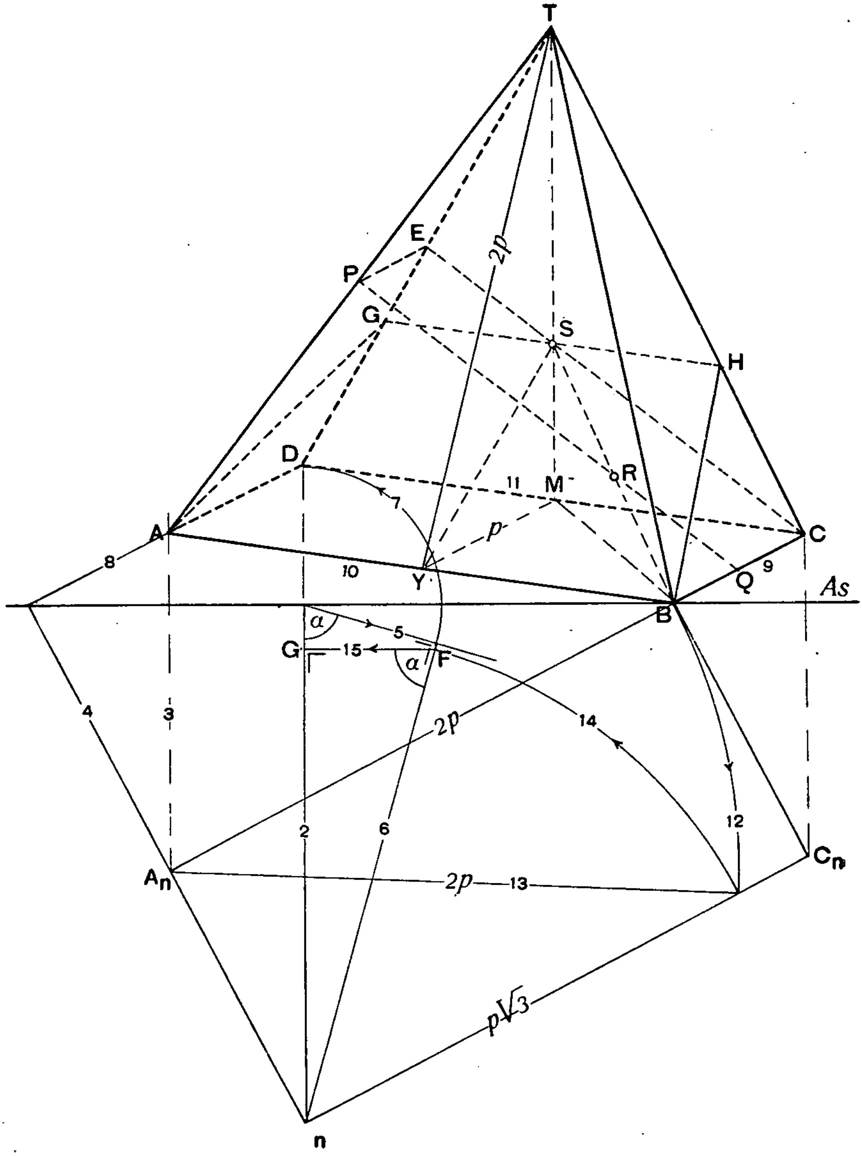

Fig. 16.

Zie de rechthoek $A_nBC_nD_n$; $BC_n = p$, $BA_n = 2p$; we maken op de nu wel bekende manier de projectie ABCD; in M, het midden van CD zetten we MT loodrecht op de as. De lengte moet $p\sqrt{3} = \sqrt{(2p)^2 - p^2}$ worden; zie de boog 12, de lijn 13 en $p\sqrt{3}$ op D_nC_n. Deze $p\sqrt{3}$ wordt door de boog 14 overgebracht op de lange rechthoekszijde van de projectiedriehoek; zie FG $\perp$ lijn 2; nu is $D_nG = p\sqrt{3} \times \sin\alpha$; maak $MT = D_nG$. Verbind T met de hoekpunten van de rechthoek. Wat we hier schrijven, wordt in geen geval in de oplossing gezet; het tekenwerk tot zover is in 5 minuten klaar; zuiver en dus voor de oplossing verre te verkiezen boven „zo maar wat trekken".

a. $\triangle$ TCD is gelijkzijdig; de zijden zijn $2p$; CE door het hoogtepunt S staat loodrecht op het vlak TAD (leg zo nodig de figuur zo, dat AT onderaan en horizontaal ligt); elke lijn evenwijdig aan CE maakt rechte hoeken met BC en AT; trek dan EP $\#$ CQ,

b. PQ is gelijk aan de hoogtelijn $CE = TM = p\sqrt{3}$.

c. MCBY is een vierkant; TM $\perp$ op het vlak van het vierkant; dus is $TY = TC = 2p$ en $YM = p$; de deellijn van $\angle$ TYM verdeelt TM dus in reden als 2 : 1; hij treft dus TM in het hoogtepunt S; de doorsnee AGHB kan men nu direct tekenen, want GSH // AB.

d. De lijn door B, die PQ snijdt, ligt in het vlak BQCEP, dat door S gaat; de lijn door B, die TM snijdt, ligt in het vlak TMB; dit gaat ook door S; de gevraagde lijn is dus BS, gelegen in het vlak BQCEP; hij snijdt PQ in R; PQ // CS; QR is middenparallel in $\triangle$ BSC, dus is BR = RS, zoals **e** eist om te bewijzen.

In een figuur als 16, wiskundig zuiver geprojecteerd, ziet men alles onmiddellijk; men volgt de steller van het vraagstuk op de voet.

Eindexamen H.B.S. 1953 nr. 3.

Van een vierzijdige pyramide T—ABCD is het grondvlak een vierkant, waarvan de zijde p cm is. De opstaande ribbe AT staat loodrecht op het grondvlak en is eveneens p cm. Door A brengt men het vlak V aan loodrecht op CT, dat BT, CT en DT opvolgend snijdt in de punten E, F en G.

a. Teken in een stereometrische figuur deze doorsnede.
b. Bewijs, dat hoek AEF recht is.
c. Bewijs, dat om elk der delen, waarin de pyramide door V verdeeld wordt, een bol beschreven kan worden.
d. Construeer in de stereometrische figuur de middelpunten van de beide bollen en druk de stralen in p uit.

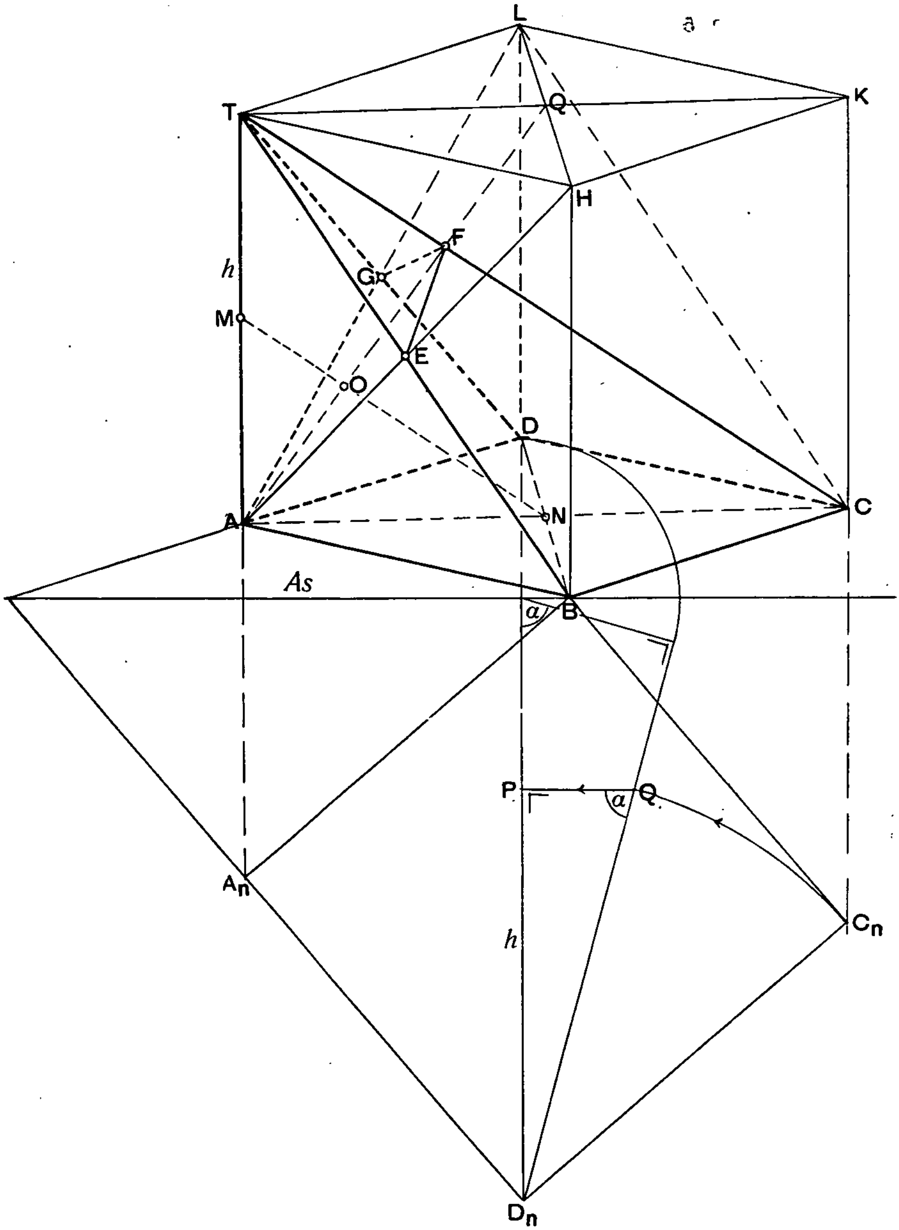

Fig. 17.

Over de manier, waarop we het grondvlak ABCD tekenen, hoeven we niets meer te zeggen. Zie $D_nQ = D_nC_n$ op de lange zijde van de projectiedriehoek en zijn projectie $D_nP = h$ op de ophaallijn van D_n; zet AT $= h$ af. Verbind T met B, C en D. Dit alles doet men in 5 minuten.

Ieder, die wat aan stereometrie gedaan heeft, ziet in TC een lichaamsdiagonaal van een kubus en in TB en TD twee vlakke diagonalen; het ligt voor de hand de projectie van de kubus te voltooien.

De loodlijn uit A op TC snijdt TK in het midden; zie de rechthoek TKCA met AF $\perp$ TC. TF : FC $=$ TA^2: CA^2 $= 1 : 2$; F ligt dus op $^1/_3$ van TC; Q is het midden van LH. Het bedoelde vlak bevat AH, HL en AL; het snijdt dus TB en TD in het midden; AEFGA is nu te trekken. Hiermee is **a** beantwoord.

b. AE $\perp$ vlak TBC, (AE $\perp$ TB en AE $\top$ BC) dus op EF van dit vlak; $\angle$ AEF en $\angle$ AGF zijn dus recht.

c en **d.** Het midden O van de gemeenschappelijke schuine zijde AF van de rechthoekige driehoeken AFE en AFG is het middelpunt van de cirkel door de vier punten A, E, F en G. De loodlijn in O op dit vlak, die het middelpunt van de bol bevat, is uiteraard evenwijdig aan TC, die loodrecht op het vlak van de vier punten A, E, F en G staat. Zie $\triangle$ ACT met zijn middenparallel NOM. De loodlijn in O moet het asvlak in M van AT snijden; dit snijpunt is M zelf; de straal is dus $\frac{1}{2}p$.

Er gaat een cirkel door A, E, F en G; de loodlijn in O moet de loodlijn in N, middelpunt van de cirkel door A, B, C en D, snijden. Dit is N zelf; de straal is dus AN $= \frac{1}{2}p\sqrt{2}$.

Laten we voortaan onder een stereometrische figuur een figuur verstaan, die wiskundig zuiver is geconstrueerd; „construeer", „nauwkeurig", „p en $p\sqrt{3}$" enz. hebben dan betekenis.

De theorie en de uitvoering in klinografische projectie, een zuiver wiskundige, is verreweg de eenvoudigste; m.i. alle reden om er één les aan te wijden; één is ruimschoots voldoende. De leerlingen vinden het ongetwijfeld een uitkomst, als ze weten, hoe ze moeten construeren. Ze kunnen er slechts bij winnen.

Aan het slot van dit artikel geven wij de uitvoering van eenzelfde werkstuk volgens zes verschillende methoden, alle wiskundig zuiver. Deze methoden zijn: **a.** centrale projectie; **b.** perspectief; **c.** scheve parallelprojectie; **d.** axonometrische projectie; **e.** Monge-projectie; **f.** klinografische projectie.

Van een regelmatige zeszijdige pyramide TABCDEF, hoog 40 mm, zijn de ribben van het grondvlak 26 mm. Op de ribben TA, TC en TE liggen opvolgend de punten P, Q en R zo, dat AP $= \frac{1}{4}$AT is, CQ $= \frac{1}{2}$CT en ER $= \frac{2}{3}$ET. De pyramide wordt gesneden met het vlak α door P, Q en R.

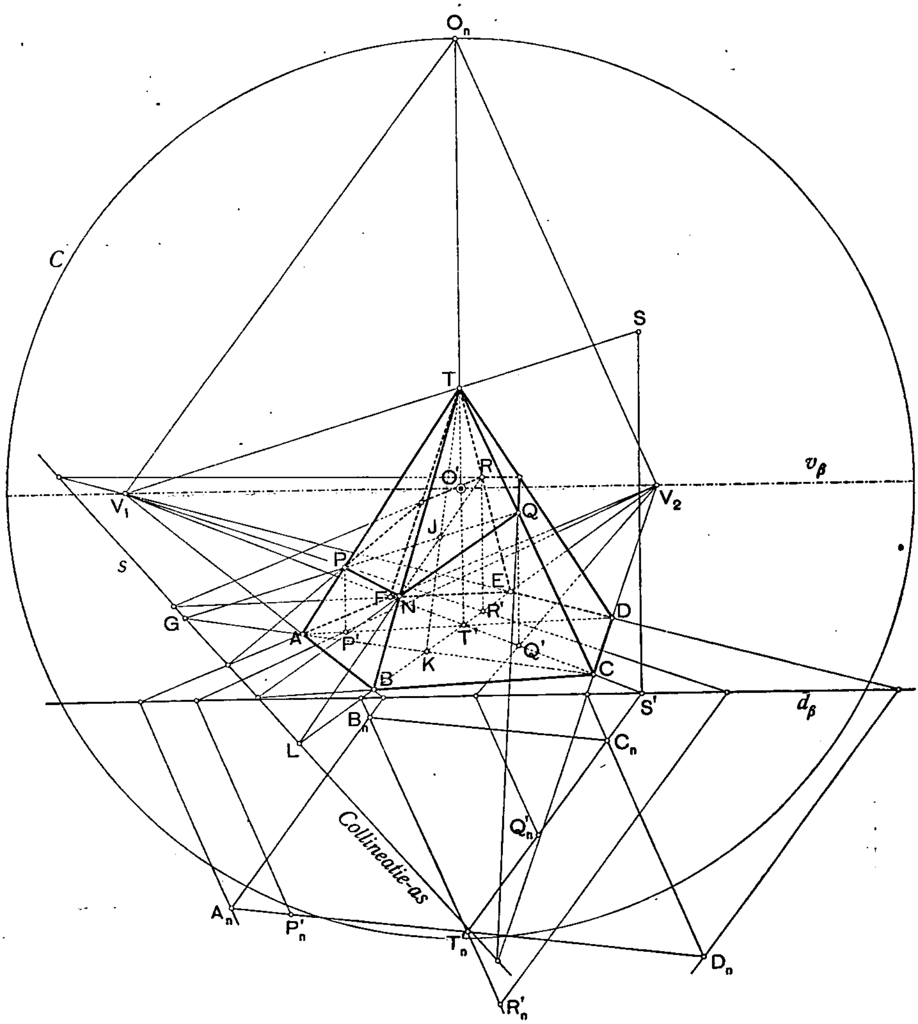

Fig. 18. Centrale projectie.

a. Centrale projectie.

De distantiecirkel C, de grote cirkel rondom, heeft een straal van 6 cm. Het grondvlak van de pyramide ligt in een vlak β loodrecht op het tafereel; zijn as is dus evenwijdig aan het tafereel.

Om een centrale projectie te verkrijgen van ongeveer dezelfde grootte als bij evenwijdige projectie, zijn de afmetingen anderhalf maal zo groot genomen, dus de ribben van het grondvlak 31 mm en de hoogte 48 mm.

De vluchtlijn v_β van vlak β gaat door de loodrechte projectie O′ van het projectiecentrum O; de doorgang d_β is hieraan evenwijdig op een aangenomen afstand van 28 mm.

Vlak β met de daarin gelegen regelmatige zeshoek is om d_β in het tafereel neergeslagen en het projectiecentrum O om v_β; dit geeft O_n. Van de neergeslagen zeshoek is slechts het deel $A_nB_nC_nD_n$ nodig.

De rechte door O_n // A_nB_n geeft, met v_β gesneden, het vluchtpunt V_1 van de lijnen // AB en die door O_n // C_nD_n, gesneden met v_β, het vluchtpunt V_2 van de lijnen // CD. Door de snijpunten van $A_n B_n$, $C_n D_n$ met d_β, dus de doorgangspunten van deze lijnen, òf met V_1 òf met V_2 te verbinden, zijn de hoekpunten A, B, C, D, E en F van het grondvlak in centrale projectie verkregen.

Door de top T is de lijn gedacht evenwijdig aan de rechte T′C van het grondvlak. Snijdt $T_n'C_n$ de doorgang d_β in S′, dan snijdt de rechte door de top evenwijdig aan T′C het tafereel in het punt S, 48 mm boven S′ gelegen. Door S te verbinden met V_1 en deze lijn te snijden met de loodlijn door T′ op v_β, is de top T verkregen.

Noemen we de projectie van P op het grondvlak P′, dan is de neergeslagen projectie P_n' zo gelegen, dat $A_nP_n' = \frac{1}{4}A_nT_n'$. Evenzo geldt voor Q: $Q_n'C_n = \frac{1}{2}T_n'C_n$ en voor R: $R_n'T_n' = \frac{1}{3}E_nT_n'$. Door uit de centrale projecties P′, Q′ en R′ de lijnen te trekken evenwijdig met T′T krijgen we op AT het punt P, op CT het punt Q en op ET het punt R.

De vlakken TAC en TBE hebben TK tot snijlijn. PQ snijdt TK in J; RJ snijdt TB in het punt N van de doorsnede van de pyramide met het vlak α door P, Q en R. De verbindingslijn van het snijpunt G van QP en CA met het snijpunt L van RJ en EB is de doorgang s van α met β; GL is de collineatie-as.

De doorsnede van de pyramide met α is bepaald met behulp van de snijpunten van EF, DE en DC met s.

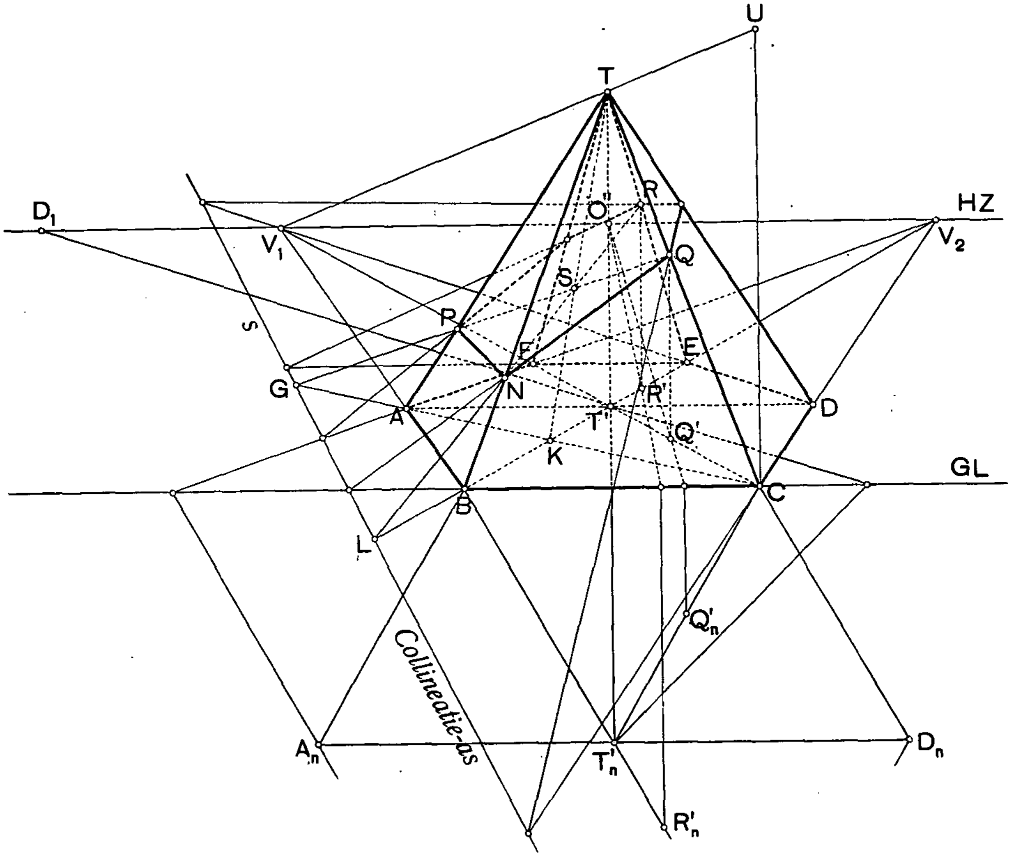

Fig. 19. Perspectief.

b. Perspectief.

Evenals bij de centrale .projectie hebben we de maten groter moeten nemen, om een figuur te krijgen van ongeveer dezelfde grootte als bij **c, d, e** en **f.**

Aangenomen is een distantie van 75 mm en een horizonshoogte van 35 mm. De pyramide staat op het grondvlak met de ribbe BC in de grondlijn en de as in het vlak door het oog, loodrecht op het tafereel. Het middelpunt T′ van het grondvlak is in perspectief gebracht met behulp van het oogpunt O″ en het linker-distantiepunt.

Het snijpunt V_2 van BT′ met de horizon is ook het vluchtpunt van de ribben AF en CD, dat van CT′met de horizon is het vluchtpunt V_1 van de ribben BA en DE. Zo is het grondvlak verkregen.

In het tafereel is op de loodlijn in C een stuk CU van 6 cm afgepast. UV_1 gesneden met de loodlijn in T′ geeft de perspectief T van de top van de pyramide.

AT is evenwijdig aan het tafereel, AP is dus $\frac{1}{4}$AT. Is Q′ de projectie van Q op het grondvlak, dan ligt de neergeslagen projectie Q_n' zodanig, dat $Q_n'C = \frac{1}{2}T_n'C$ is. Evenzo geldt voor R: $R_n'T_n' = \frac{1}{3}T_n'E_n$. Door Q_n' en R_n' in perspectief te brengen en de loodlijnen door Q′ en R′ opvolgend te snijden met TC en TE, vinden we Q en R.

De vlakken TAC en TBE hebben TK tot snijlijn. PQ snijdt TK in S. RS snijdt TB in N en EB in L. De verbindingslijn van L met het snijpunt G van CA en QP is de gronddoorgang *s* van α. De doorsnede van α met de pyramide is geconstrueerd met behulp van de snijpunten van EF, DE en DC met *s*.

c. Scheve parallel-projectie.

De scheve projectierichting is zodanig gekozen, dat loodlijnen op het tafereel in scheve projectie hoeken van 135° maken met de X-as (opening onder die as naar rechts), terwijl de verkorting $\frac{3}{4}$ bedraagt.

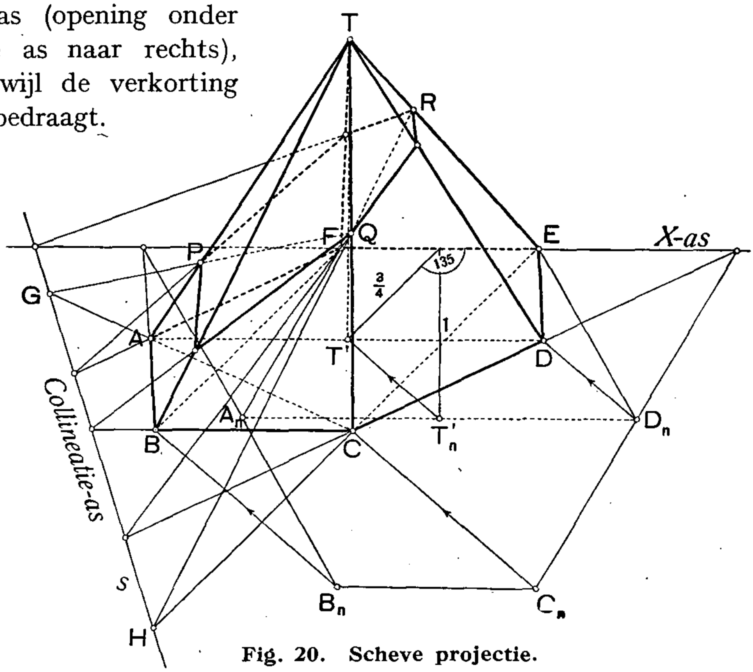

Fig. 20. Scheve projectie.

De pyramide staat op het XOY-vlak met de ribbe FE langs de X-as. De scheve projectie van het grondvlak is op eenvoudige manier uit de neergeslagen zeshoek geconstrueerd. De hoogte TT′ is ook in scheve projectie 40 mm. P, Q en R zijn gevonden uit $AP = \frac{1}{4}AT$, $CQ = \frac{1}{2}CT$ en $ER = \frac{2}{3}ET$.

De XOY-doorgang *s* van α is de verbindingslijn van het snijpunt G van QP en CA met het snijpunt H van RQ en EC.

Door gebruik te maken van de snijpunten van EF, CB en DC met *s* is de doorsnede van de pyramide met α gevonden.

d. Axonometrie.

De tafereeldriehoek XYZ is zo aangenomen, dat gelijke lijnstukken op OX, OY en OZ projecties hebben op XYZ, die zich verhouden als 9 : 5 : 10. De pyramide staat met zijn grondvlak op XOY, het hoekpunt C in X, de ribbe CB langs XY.

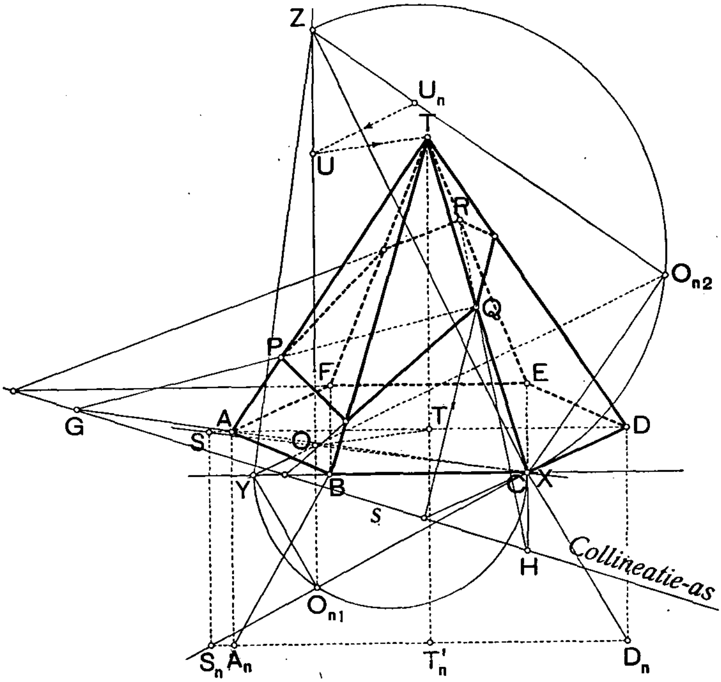

Fig. 21. Axonometrisch; 9:5:10.

Vlak XOY met het daarin gelegen grondvlak is om XY in het tafereel neergeslagen. Van de neergeslagen regelmatige zeshoek is slechts het deel A_nBCD_n nodig. Door het snijpunt S_n van de diagonaal D_nA_n met XO_{n1} in axonometrie te brengen, is de diagonaal AD van het grondvlak verkregen en daarna de zeshoek geconstrueerd. De hoogte is bepaald door eerst het XOZ-vlak om XZ in het tafereel neer te slaan, op $O_{n2}Z$ een stuk $O_{n2}U_n = 40$ mm, af te passen, U_n terug te brengen tot U en daarna op de lijn door T evenwijdig aan OZ een stuk T'T = OU af te passen.

De punten P, Q en R zijn achtereenvolgens gevonden uit AP = $\frac{1}{4}$AT, CQ = $\frac{1}{2}$CT en ER = $\frac{2}{3}$ET.

Het snijpunt G van QP en CA verbonden met het snijpunt H van RQ en EC levert de doorgang s van α met XOY.

De doorsnede is vervolgens gevonden door gebruik te maken van de snijpunten van EF, CB en DC met s.

e. Monge-projectie.

De pyramide staat met zijn grondvlak op het horizontale vlak. Om te voorkomen, dat verticale projecties van opstaande ribben samenvallen, is de pyramide zo geplaatst, dat geen ribben van het grondvlak evenwijdig lopen met de as van projectie.

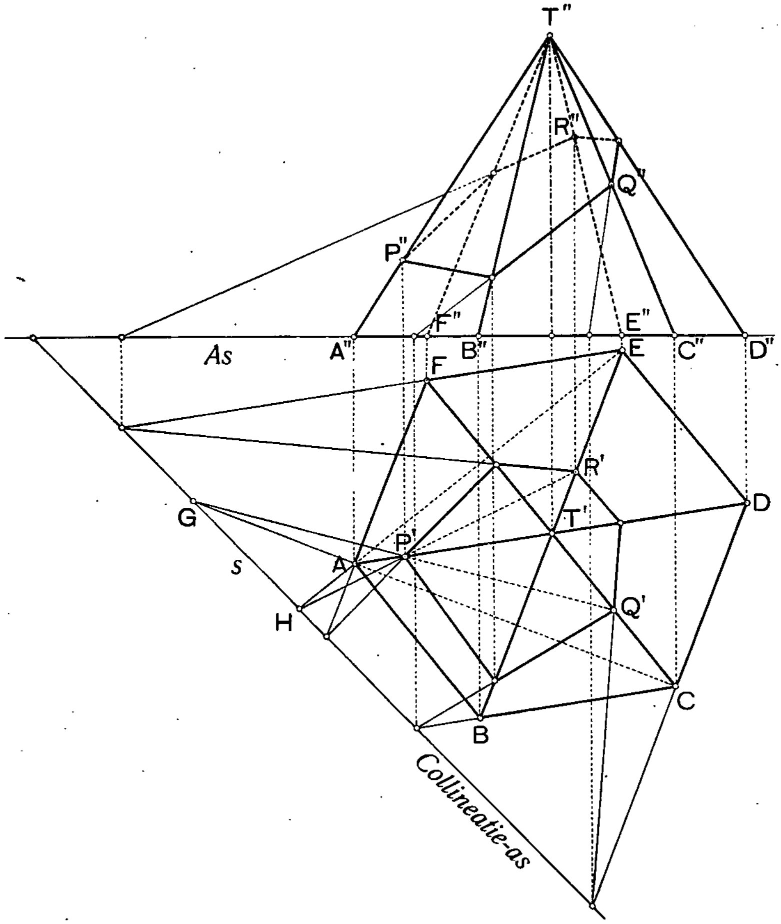

Fig. 22. Monge-projectie.

De horizontale projecties van de punten P, Q en R zijn geconstrueerd uit AP′ = $\frac{1}{4}$AT′, CQ′ = $\frac{1}{2}$CT′ en ER′ = $\frac{2}{3}$ET′.

De horizontale doorgang *s* van α is de verbindingslijn van het snijpunt G van Q′P′ en CA met het snijpunt H van R′P′ en EA.

Door achtereenvolgens EF, CB en DC met *s* te snijden, is met behulp van deze snijpunten de doorsnede van de pyramide met α geconstrueerd.

f. Klinografische projectie.

Voor de hoek van het tafereel met het grondvlak hebben we 75° genomen. Van de zeshoek zijn slechts het deel A_nBCD_n en het middelpunt nodig; van dat middelpunt hebben we de klinografische projectie T′ gevonden door het lijntje *n*, het loodlijntje daarop en het boogje; zie de pijltjes. Daarna AT′D (A op de ophaallijn uit A_n, D van D_n), BT′E en CT′F; T′E = BT′ en T′F = CT′. Om de top te bepalen T′L (zie *m*) // *n*, LT ⊥ op de loodlijn in T′.

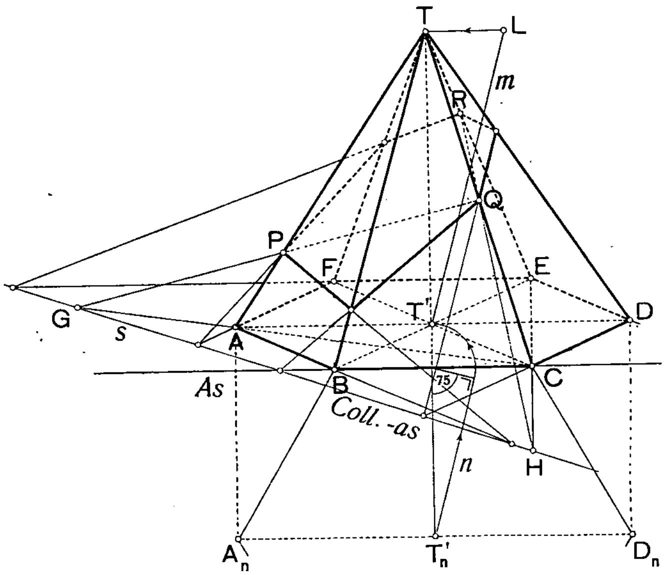

Fig. 23. Klinografische projectie.

De punten P, Q en R zijn weer zo bepaald, dat AP = $\frac{1}{4}$AT, is, CQ = $\frac{1}{2}$CT en ER = $\frac{2}{3}$ ET. PQ en CA snijden elkaar in G, RQ en EC in H; GH is de collineatie-as *s*. Met behulp van EF, CB en DC zijn de drie andere punten op de opstaande ribben gevonden.

Uiteraard zijn bij alle constructies de collineatie-as en dus de doorsnede op dezelfde manier gevonden.

Het grote verschil zit in de constructie van de pyramide; bij centrale projectie en perspectief worden de verhoudingen anders en evenwijdige lijnen blijven niet evenwijdig. De theorie is moeilijk; voor de school volstrekt onmogelijk. De scheve projectie geeft verwrongen figuren; de theorie is eenvoudig. De axonometrie geeft mooie figuren; de theorie is wel te doen; maar met minder werk bereikt men hetzelfde resultaat; zie de 6e methode. De Monge-

I

INRICHTING VAN HET ONDERZOEK EN SAMENVATTING VAN DE RESULTATEN.

13. In dezelfde bijeenkomst van wiskundedocenten, waarin het initiatief genomen werd tot het hier beschreven onderzoek, werd de moeilijkheid besproken, verbonden aan het samenstellen van opgaven die op de juiste wijze schiftend werken en een goede maatstaf leveren voor het verwerkt hebben van de leerstof. De wenselijkheid werd uitgesproken, dat wij zouden trachten onze werkzaamheden tevens op deze zaak te richten.

Hiertoe nu bood ons onderzoek naar de omvang van de leerstof een ongezochte gelegenheid. In de toelichting, opgenomen in § 7 van dit hoofdstuk, werd er op gewezen, dat het bij dit onderzoek van belang is te kunnen nagaan, op welke wijze het oordeel van de docenten omtrent de vorderingen van de leerlingen tot stand is gekomen. Aangezien dit oordeel vrijwel steeds in hoge mate gebaseerd is op het schriftelijk werk van de leerlingen, werd gevraagd naar zo volledig mogelijke mededelingen aangaande dit schriftelijk werk en de resultaten daarvan.

Het verslag van dit onderzoek zou een ideale vorm kunnen hebben wanneer de lezer daaruit kon opmaken

a. in hoeverre de opgegeven proefwerken een goed toetsingsmiddel vormen van het verwerkt hebben van de leerstof,

b. in hoeverre de resultaten van deze proefwerken bevredigend zijn.

14. Ad § 13, a: *de proefwerken als toetsingsmiddel.*

Van de vragen die rijzen bij het beoordelen van een proefwerkopgave als toetsingsmiddel, is de eerste en belangrijkste de vraag naar de eisen die de docent stelt ten aanzien van het beheersen van het onderwerp, waarop de opgave betrekking heeft. Eerst wanneer deze eisen volledig en scherp geformuleerd zijn, kan beoordeeld worden in hoeverre de beantwoording van een aantal proefwerkopgaven laat zien, dat de leerstof al of niet het eigendom van de leerlingen is geworden. Het zal onmiddellijk duidelijk zijn, dat een dergelijke formulering van de eisen niet van de medewerkers verlangd kon worden. In de eerste plaats vooronderstelt deze immers een even volledige en scherpe beantwoording van de vraag naar het doel dat men zich stelt bij de behandeling van een onderwerp, een vraag die weliswaar buitengewoon belangrijk is, maar die, zo zij al gesteld wordt, zelden op bevredigende wijze wordt beantwoord. In de tweede plaats, zelfs wanneer men tot in bijzonderheden het doel van zijn handelen expliciet zou hebben geformuleerd, zou hieruit geenszins voortvloeien dat over dit doel, alsmede over de wegen ter bereiking daarvan, een bruikbare mate van eensgezindheid zou bestaan [1]). Het zoeken naar een antwoord op dit complex van vragen zou een onderzoek op zichzelf betekend hebben en zoveel tijd in beslag hebben genomen, dat wij aan een beoordeling van de resultaten van de proefwerken, hoe gebrekkig deze ook moge zijn uitgevallen, niet eens zouden zijn toegekomen.

Ik heb mij daarom van de waarde van de proefwerkvraagstukken als toetsingsmiddel geen oordeel kunnen vormen dat gegrond was op een analyse van de doelstellingen. Een beschouwing van deze waarde, welke op andere gronden berust, zal in § 16 worden gegeven. Wel heb ik gemeend de betekenis van dit verslag te kunnen verhogen door de lezer zoveel mogelijk materiaal te verstrekken dat hem kan helpen zichzelf een — zij het dan niet volledig — oordeel te vormen over de toetsingswaarde van de proefwerkopgaven. Ik heb mij hierbij moeten beperken tot de secties voor algebra en voor goniometrie; de leerstof en de vraagstukken voor de meetkunde leenden zich niet voor een analyse als, in hetgeen volgt, voor de algebra en de goniometrie wordt beschreven. Indien echter voor de meetkunde speciale belangstelling blijkt te bestaan, ben ik gaarne bereid ook over de resultaten hiervan mededelingen te doen.

Het bovenbedoelde materiaal bestaat uit 1. een zo volledig mogelijke aanduiding van de stof die door elk der medewerkende docenten in de les is behandeld, met inbegrip van de gemaakte vraagstukken, 2. een overzicht van de proefwerkopgaven. Bovendien is van de leerstof en van de proefwerkopgaven in die zin een analyse gemaakt, dat zo nauwkeurig mogelijk zijn aangegeven

a. de behandelde begrippen,

b. de behandelde stellingen, formules en methoden,

c. de behandelde vraagstukkentypen,

---

[1]) Voor enkele van de hiermee verband houdende vragen zie mijn artikel: De keuze van de leerstof bij het onderwijs in de wiskunde, Euclides 24 (1948—'49), 84 e.v.

d. bij elk der daarvoor in aanmerking komende proefwerkopgaven: welke van de genoemde methoden moet worden toegepast of tot welk van de genoemde vraagstukkentypen de opgave behoort.

Door middel hiervan kan de lezer op eenvoudige wijze een indruk krijgen van die onderwerpen, waarvan de kennis door middel van de proefwerken is nagegaan. Hij kan daarbij overwegen in hoeverre de kennis getoetst is van een goed gekozen steekproef uit de leerstofonderdelen die hijzelf als belangrijk beschouwt en in hoeverre de proefwerken de leerlingen in de gelegenheid hebben gesteld hun kennis van die leerstofonderdelen te demonstreren.

15. Ik gebruikte enkele malen de uitdrukking ,,leerstof'', ook in die gevallen, waarin sprake is van vraagstukken, en de uitdrukking ,,kennis'', ook wanneer het door toepassing van eigen inzicht oplossen van een vraagstuk in het geding is. Dit vereist wellicht enige toelichting. Het is immers niet gebruikelijk om de vraagstukken tot de leerstof te rekenen, terwijl men veelal de neiging heeft om van een leerling die zijn inzicht gebruikt, te onderstellen, dat deze iets anders doet dan bekende methoden toepassen. Mijn ervaringen als leraar, versterkt door de ervaringen, opgedaan bij het hier beschreven onderzoek, hebben mij echter de overtuiging gegeven, dat onze leerlingen bij het oplossen van vraagstukken vrijwel niet anders doen dan de methoden toepassen die ze in de theorie of bij voorafgaande vraagstukken hebben leren kennen. Iedere wiskundeleraar merkt bij zijn normale leerlingen toch wel op, dat het bestudeerd hebben van een stuk theorie volstrekt niet impliceert, dat eenvoudige, daarop betrekking hebbende vraagstukken nu ook kunnen worden gemaakt, en hij ervaart steeds weer tot zijn verwondering en teleurstelling, dat reeds het oplossen van vraagstukken die in geringe mate van een behandeld type afwijken, ver beneden de verwachting blijft. Onze opvatting, dat vrijwel de enige denkarbeid die de leerlingen verrichten bij het oplossen van vraagstukken, bestaat in het vaststellen van de hun bekende methoden die bij het vraagstuk in zijn geheel of bij onderdelen daarvan moeten worden toegepast, vindt volledig steun bij de resultaten, waartoe onderzoekers op het gebied van de psychologie van het denken zijn gekomen. Ik behoef slechts te wijzen op de publicaties van Otto Selz en zijn leerlingen; die van laatstgenoemden over zulke uiteenliggende onderwerpen als het denken van de componist (Julius Bahle) en dat van de schaker (A. D. de Groot), waarin wordt aangetoond dat bij het denken de rol van het geheugen, tot uiting komend in het in werking stellen van het verworven systeem van

denk- en werkmethoden, ontzaglijk groot is. — Dat de leerlingen bij het denken over wiskundige objecten ook moeilijkheden van structurele aard hebben te overwinnen, op welk verschijnsel door de Gestaltpsychologen in het bijzonder wordt gewezen, doet aan onze mening over het wiskundig denken van de gemiddelde leerling weinig of niets af, omdat ook de hierbij nodige structuurveranderingen in de loop van de wiskundige vorming van een dergelijke leerling naar onze opvatting grotendeels aangeleerd worden.

Vandaar, dat het mij redelijk voorkwam om niet alleen de behandelde begrippen en eigenschappen afzonderlijk te noemen, maar, voor zover mogelijk, tevens aan te geven tot welk type de in de les besproken vraagstukken behoren. Weliswaar staat bij ons onderzoek volstrekt niet vast, wat een docent eist ten aanzien van het kunnen reproduceren van het type, waartoe een gemaakt vraagstuk behoort. Maar aan de andere kant blijken de proefwerkopgaven veelal uit de gemaakte typen gekozen te worden, hetgeen er op wijst, dat de docenten in het algemeen niet veel vertrouwen hebben in hetgeen leerlingen kunnen bereiken met behulp van hun zgn. intuïtie en dat zij het om die reden wel zo veilig achten zich te beperken tot het stellen van eisen aangaande het reproductief toepassen van behandelde typen.

In de hierna afzonderlijk te bespreken secties zijn de behandelde begrippen, eigenschappen en vraagstukkentypen telkens vermeld op de lijsten, resp. gemerkt A, B en C. Per sectie of in secties die voor h.b.s. en gymnasium op hetzelfde onderwerp betrekking hebben, kon volstaan worden met één lijst van elk der typen A, B en C. De medewerkers zijn aan de bovenkant van de lijsten vermeld en een kruisje geeft aan, dat de betrokken docent een bepaald begrip, een bepaalde eigenschap of methode, of een vraagstuk van een bepaald type heeft behandeld.

Wanneer op één der lijsten B een formule zonder meer vermeld is, betekent dit, dat de formule en haar afleiding zijn behandeld en in de meeste gevallen ook, dat beide moeten worden gekend; het houdt niet in, dat de leerling toepassingen van een of andere soort moet kunnen maken: indien dit het geval is, is het op de bijbehorende lijst C aangegeven. Het zo nauwkeurig mogelijk aangeven van de behandelde stof sluit de mogelijkheid niet uit, dat het betrokken onderwerp in de les is toegelicht met nog andere dan de vermelde voorbeelden, en dat in de les nog andere dan de genoemde toepassingen zijn besproken of gemaakt.

In de paragrafen 15 van de afzonderlijke secties zijn de onderwerpen van de lijsten B en C aangegeven, waarop de vragen van de proefwerken betrekking hebben. Om daarbij niet onnodig uitvoerig te zijn, hebben we volstaan met het aangeven van de meestomvattende onderwerpen van de lijsten B en C.

16. Ad § 13, *b*: *de proefwerkresultaten*.

Het op school gemaakte en met een cijfer beoordeelde schriftelijk werk, tezamen aangeduid als „proefwerk" maar waaronder ook de belangrijke „schriftelijke overhoringen" vallen, is vermeld in de paragrafen 13 van de secties. Bij ieder proefwerk is het aantal voorafgegane lessen opgegeven.

In de paragrafen 14 zijn de resultaten van de proefwerken vermeld en, voor zover de gegevens dit toelieten, ook de resultaten van de afzonderlijke opgaven. Dit is geschied door het aantal leerlingen aan te geven, dat voor het proefwerk of het vraagstuk een voldoend, resp. een onvoldoend cijfer heeft gekregen. Als voldoend cijfer is $5\frac{1}{2}$ of hoger beschouwd. De vermelde aantallen zijn bovendien in procenten omgerekend.

Wanneer men er zich een oordeel over wil vormen of het onderwerp van een sectie al of niet in voldoende mate is behandeld, ligt het voor de hand na te gaan of de resultaten bevredigend zijn. Dat wil dus zeggen: of het percentage onvoldoenden voor de verschillende proefwerkvraagstukken, althans aan het eind van de behandeling van de stof waarop deze vraagstukken betrekking hebben, beneden een redelijke grens ligt. Ter vereenvoudiging van de redenering zullen we nl. onderstellen, dat de opgegeven vraagstukken de juiste middelen zijn om te onderzoeken of de leerlingen het betrokken onderwerp beheersen; in ieder geval moet worden aangenomen, dat deze vraagstukken als de meest geschikte, practisch hanteerbare middelen zijn beschouwd door de medewerkende docenten, die immers in het algemeen aan hun aandeel in dit onderzoek buitengewone zorg hebben besteed en dus ongetwijfeld ook aan het samenstellen van de proefwerken. Wat zou dan als een redelijke grens voor het aantal onvoldoenden voor een vraagstuk te beschouwen zijn? Nul, tien, twintig, of een hoger percentage? Wij zullen hier geen poging doen om uit te maken of de vraag in deze vorm te beantwoorden is en hoe een eventueel antwoord zou kunnen luiden. Er zit voor ons niets anders op dan maar op de een of andere manier deze zeer moeilijke knoop door te hakken en we zullen dan 20 % (willekeurig! willekeurig!) als bovenste grens nemen van het aantal onvoldoenden dat we bij een vraagstuk als redelijk zullen beschouwen. Dit betekent, dat we ons er slechts dan van overtuigd zullen houden, dat de klas een, in vele gevallen zeer beperkt, onderdeel van een behandeld leerstofgedeelte in voldoende mate beheerst, wanneer 80 % of meer van de leerlingen een voldoend cijfer behaalt voor een vraagstuk dat de kennis van dit onderdeel toetst (of wanneer elk der vraagstukken, welke tezamen de kennis van een representatieve steekproef uit de belangrijke onderdelen van het betrokken leerstofgedeelte toetsen, minstens 80 % voldoende antwoorden oplevert).

percentage onvoldoenden	aantal vraag-stukken	aantal proef-werken
0—9	38	5
10—19	46	12
20—29	42	15
30—39	35	16
40—49	34	10
50—59	27	6
60—69	27	3
70—79	21	2
80—89	10	0
90—100	11	0
totaal	291	69

Wij hebben de percentages onvoldoenden nagegaan bij die proefwerken voor de algebra, waarmee de behandeling van een onderwerp of een onderdeel daarvan werd afgesloten, en komen daarbij tot het schrikwekkend resultaat, dat in de eerste twee kolommen van nevenstaande tabel is weergegeven.

Uit deze tabel kan men o.a. afleiden, dat bij 207 van de 291, d.w.z. bij 71 % van de proefwerkvraagstukken 20 of meer % van de leerlingen een onvoldoend resultaat bereikt heeft. Mocht iemand 20 % onvoldoenden niet erg vinden, dan kan hij afleiden, dat bij 165, d.w.z. 47 % van de proefwerkvraagstukken 30 of meer % van de leerlingen een onvoldoend resultaat heeft.

Men zou hier wellicht willen tegenwerpen, dat van de resultaten van het lesgeven geen juist beeld wordt verkregen door op de aantallen onvoldoenden voor de afzonderlijke vraagstukken te letten, en opmerken, dat de opgaven van een proefwerk dikwijls één geheel vormen, zodat mislukkingen bij de ene opgave kunnen worden opgeheven door successen bij een andere. Wij hebben daarom ook de percentages onvoldoenden nagegaan bij de proefwerken als geheel. Het resultaat is af te lezen in de kolommen 1 en 3 van de tabel. Het is nog steeds niet fraai, al is in de zeer hoge regionen het aantal onvoldoenden sterk teruggelopen. Maar letten we weer, thans bij de proefwerken als geheel, op de aantallen, waarvoor minstens 20 resp. 30 % van de leerlingen een onvoldoend cijfer kregen, dan blijken deze te zijn: 52 en 37, d.w.z. 75 % en 54 % van de proefwerken. Het beeld is dus nòg ongunstiger dan bij de afzonderlijke vraagstukken.

Men realisere zich goed de betekenis van deze hoge percentages.

Wat betekenen die? *Wanneer we blijven bij onze eens gemaakte onderstelling, dat de opgegeven vraagstukken, resp. proefwerken, inderdaad de juiste middelen zijn om de resultaten van het onderwijs te toetsen, kunnen we moeilijk tot een andere conclusie komen dan deze, dat van opvallend veel onderwerpen, niet alleen van die van beperkte omvang maar ook van de meer omvattende, de behandeling weinig succes heeft gehad.*

17. De vraag rijst nu: betekent dit geringe succes met de behandeling van een bepaald onderwerp, dat aan die behandeling iets ontbroken heeft (a), dat de betrokken klas niet in voldoende mate heeft gewerkt (b), of dat deze wiskundig niet voldoende was voorbereid (c)? Of was wellicht het intellectuele peil van de klas van dien aard, dat een onvoldoende resultaat verwacht kon worden (d)?

Ad a. Indien aan de behandeling van een zeker onderwerp iets heeft ontbroken, moeten we aannemen, dat dit niet veroorzaakt is door onvoldoende bekwaamheid of ijver van de docent. De namen van onze medewerkers staan hiervoor in voldoende mate borg. Op grond van het bijzondere karakter van de gegeven lessen moet integendeel worden aangenomen, dat deze alle met de grootste zorg zijn voorbereid en ingericht. Wat wij ons wèl kunnen voorstellen, is, dat de docent onbewust toch nog te haastig is geweest omdat hij nu eenmaal aan een bepaald tempo gewend is, of dat hij de behandeling van het onderwerp in kwestie te vroegtijdig heeft beëindigd omdat er nog andere dingen op het programma stonden dat in de loop van de cursus moest worden afgewerkt. Inderdaad maakten we in § 11 onder *f* melding van de zich in enkele gevallen voordoende noodzaak, de behandeling van het opgedragen onderwerp ontijdig te beëindigen.

Ad b. Heeft de betrokken klas niet voldoende gewerkt? Deze onderstelling kunnen we vrijwel uitsluiten. Het verslag van de gegeven lessen, dat in de meeste gevallen met grote nauwkeurigheid werd gegeven en waarin met name dikwijls mededelingen over de mate van succes van de leerlingen met elk huiswerkvraagstuk afzonderlijk werden gedaan, stelt ons in staat ons er van te overtuigen, dat in de klassen waarin dit onderzoek plaats had, ook door de leerlingen hard gewerkt is.

Ad c. Was de wiskundige vorming van de klas wellicht niet voldoende om de behandeling van het onderwerp in kwestie succes te doen hebben? Inderdaad is het een feit, dat men niet optimistisch mag zijn ten aanzien van de wiskundige kennis welke men bij zijn leerlingen kan veronderstellen. Zelfs in een derde klas treft men wel eens een leerling aan die omtrent de meest onschuldige zaken uit de algebra, als bijv. het teken van een product of de verandering van teken bij het overbrengen van een term uit het ene lid van een vergelijking naar het andere, in het onzekere verkeert. Dergelijke ontstellende verschijnselen hebben zich echter in de medewerkende klassen niet in zo opvallende mate voorgedaan, dat de leraar het nodig oordeelde dit in zijn verslag (onder vraag 12: „vermoedelijke oorzaken van het falen van leerlingen, enz.") te vermelden. Het zal duidelijk zijn, dat we hier niet het oog hebben op het zich bij normale leerlingen algemeen voordoend verschijnsel, dat ook de leerstof die naar veler oordeel uitsluitend op begrip en inzicht een beroep doet, aanhoudend gerepeteerd moet worden. Wij komen hierop terug bij de bespreking van de bedoeling van de paragrafen 6 van de secties.

18. Ad d. Rest nog de mogelijkheid, dat het geringe succes in het algemeen geweten moet worden aan een tekort aan intelligentie bij de leerlingen.

Voordat we deze mogelijkheid onder ogen zien, zullen we althans in één opzicht het vage begrip „intelligentie" voor ons doel hanteerbaar moeten maken. Wij zullen dit niet doen door aan te knopen bij een der vele definities die hiervan in de loop der tijden gegeven zijn, maar willen liever, naar volstrekt niet onmathematische trant, van een axioma uitgaan, en wel een axioma waarvan weliswaar nog niet kan worden beweerd dat het psychologisch verantwoord is – daarvoor is het trouwens een axioma –, maar dat in elk geval steunt op de ervaring van menig goed wiskundeleraar, en dat ik als volgt formuleer:

Voor het bereiken van een redelijke mate van succes bij de studie van de middelbare-schoolwiskunde wordt geen andere vorm van intelligentie vereist dan die, welke nodig is voor het bereiken van een redelijke mate van succes bij de studie van het geheel der overige middelbare-schoolvakken.

Ter ondersteuning van dit axioma moge ik de lezer verwijzen naar de ontstaanswijze van de legende van de speciale wiskundige begaafdheid, medegedeeld door Dr H. J. E. Beth op blz. 98 van jaargang 1 van Euclides, nl. als „een slimmigheid van de eerste slechte wiskundeleraar". — Het is ook onze opvatting, dat de wiskunde van de middelbare school, even goed als ieder ander schoolvak, door een ijverige leerling van normale intelligentie uitstekend te leren is wanneer het onderwijs in dit vak niet wordt verknoeid door onvoldoende uitleg, een onduidelijk leerboek of het stellen van niet te realiseren eisen.

Ik heb getracht van bovengenoemd axioma op de volgende wijze gebruik te maken. Wanneer het intelligentiepeil van de leerlingen die afzonderlijke vraagstukken of hele proefwerken onvoldoende maken, in het algemeen laag is, zal ongetwijfeld in dat lage peil de oorzaak van de mislukkingen moeten worden gezocht. Die geringe intelligentie zal zich volgens ons axioma dan echter ook moeten manifesteren in de resultaten voor het geheel van de overige schoolvakken. Wij hebben laatstgenoemde resultaten daarom vergeleken met die voor de wiskunde. Dit is geschied in de paragrafen 14 van de afzonderlijke secties. Omdat hier de opvatting te verdedigen zou zijn, dat bij het beoordelen van de intelligentie van een leerling ook diens resultaten met het vak wiskunde in aanmerking genomen dienen te worden, is niet een vergelijking gemaakt met het geheel der overige, maar met het geheel van alle vakken, de wiskunde dus inbegrepen. Hierdoor wordt tevens een overdreven voorstelling van zaken voorkomen.

Om een vergelijkingsmaatstaf vast te stellen is het door Wansink gebezigde begrip „defect" gebruikt. Hieronder verstaan we het totaal van de aantallen punten, waarmee de onvoldoende rapportcijfers van een leerling moeten worden aangevuld om er zessen van te maken. Een leerling bijv., die op zijn rapport voor Frans een 4, voor Duits een 5 en voor geen ander vak een onvoldoend cijfer heeft, heeft het defect 3. De caesuur tussen de leerlingen die door ons op grond van hun volledige rapport als „voldoende" en „onvoldoende" werden gekwalificeerd, is gelegd bij een defect van hoogstens 2. Een leerling met een defect van 3 of meer zullen we bij deze beschouwing dus„onvoldoende" noemen.

Ik wil er op wijzen, dat bij deze indeling een leerling betrekkelijk spoedig de kans loopt tot de onvoldoende groep te behoren. Met een compensatie door eventuele hoge cijfers wordt immers geen rekening gehouden. De onvoldoende leerlingen vormen in dit geval dus een veel grotere groep dan bijv. degenen, die bij de bevordering naar een volgende klas plegen te worden afgewezen omdat dàn hun resultaten als onvoldoende worden beschouwd. De scheidingslijn tussen voldoende en onvoldoende is dan ook opzettelijk — ter versterking van het hierna volgend betoog — op een voor normaal gebruik te hoog niveau gekozen.

Ten einde nu te kunnen nagaan in hoeverre inderdaad een te geringe intelligentie — door ons axioma ten dele impliciet gedefiniëerd — de oorzaak van de diverse mislukkingen is, hebben we in de paragrafen 14 bij ieder proefwerkvraagstuk en bij ieder proefwerk de aantallen voldoende en onvoldoende resultaten aangegeven voor de voldoende en de onvoldoende groep afzonderlijk [1]). Op grond van onze voorafgaande beschouwingen over de mogelijke oorzaken van het falen van de leerlingen en nog altijd onderstellende, dat de opgegeven vraagstukken de juiste middelen zijn om de resultaten van het onderwijs te beoordelen, mag aangenomen worden, dat de aldus gespecificeerde aantallen onvoldoenden een duidelijke indicatie zullen geven omtrent het al of niet op bevredigende wijze behandeld zijn van de betrokken onderwerpen.

percentage onvoldoenden	aantal vraag-stukken	aantal proef-werken
0—9	72	21
10—19	49	20
20—29	47	7
30—39	22	11
40—49	24	3
50—59	30	4
60—69	22	3
70—79	5	0
80—89	8	0
90—100	11	0
totaal	291	69

We beschouwen de tabel die analoog is aan die van § 16, maar uitsluitend betrekking heeft op de leerlingen van de voldoende groep. We vinden hieruit: bij 169 van de 291, d.w.z. bij 58 % van de proefwerkvraagstukken heeft 20 of meer % van de leerlingen der voldoende groep een onvoldoend resultaat bereikt; bij 122 van de 291, d.w.z. bij 42 % van de proefwerkvraagstukken bereikte 30 of meer % van de leerlingen der voldoende groep een onvoldoend resultaat. Voor de proefwerken als geheel zijn thans de resultaten iets beter dan voor de afzonderlijke vraagstukken [2]): voor 28 (41 %), resp. 21 (30 %) van de proefwerken kregen minstens 20, resp. 30 % van de leerlingen der voldoende groep een onvoldoend cijfer.

We merkten reeds op, dat hier van een sterk geselecteerde groep leerlingen sprake is. Het blijkt nu, dat ook hierbij de percentages onvoldoenden hoog zijn. *Er bestaat dus generlei aanleiding om de talrijke onvoldoende resultaten toe te schrijven aan een laag intelligentiepeil.*

Wanneer onze premissen juist zijn — dat zijn dus het axioma over de intelligentie en de onderstelling omtrent de juiste keuze van de toetsingsmiddelen — kunnen we niet anders dan concluderen, dat het bereikte resultaat in vele gevallen voor verbetering vatbaar was. De overwegingen van deze en de voorafgaande paragraaf geven ons verder

[1]) De totalen van de tabellen van de paragrafen 14 komen niet steeds overeen met de aantallen cijfers die voor de proefwerken of de afzonderlijke vraagstukken werden verkregen. Dit vindt zijn oorzaak hierin, dat van sommige leerlingen, wegens het ontbreken van een of meer rapportcijfers, het defect niet was aan te geven.

[2]) In verband met het tegenovergestelde verschijnsel van § 16 merkwaardig, en wellicht niet van belang ontbloot.

de overtuiging, dat het uitblijven van voldoende succes hieraan moet worden toegeschreven, dat het onderwijs, ook bij de zorgvuldige behandeling in het kader van dit onderzoek, toch nog in een te snel tempo moest geschieden of ontijdig moest worden beeindigd.

19. Ik sprak boven van een axioma en van een onderstelling, daarmee tot uitdrukking brengend, dat, althans door mij, de laatste niet zo zeker wordt geacht als het eerste. De onderstelling is die van de juiste keuze der toetsingsmiddelen. Meer volledig zouden wij moeten zeggen: die van het juiste gebruik van toetsingsmiddelen welke op de juiste manier gekozen zijn. Weliswaar impliceert de keuze van een middel ter toetsing van de resultaten een gelijktijdig overwegen van de wijze van het gebruik. Toch wil ik deze nadere onderscheiding even noemen, omdat het mij wèl mogelijk is de opgegeven proefwerkvraagstukken te vermelden, maar niet om inlichtingen te verschaffen over de wijze van waardering van de door de leerlingen gegeven oplossingen. Incidenteel zou dit laatste nog mogelijk zijn, nl. in die gevallen waarin mij bijzondere gegevens zijn verstrekt omtrent de toegepaste normen of waarin mij het gecorrigeerde werk zelf werd toegezonden. Naar aanleiding hiervan zou ik iets kunnen mededelen omtrent de grote verschillen die er blijken te bestaan ten aanzien van het in rekening brengen van vergissingen, verschrijvingen, rekenfouten en dergelijke. Wij zouden kunnen opmerken, dat in het ene geval bij een vraagstuk dat een vrij uitgebreide gedachtengang vereist, ten gevolge van een rekenfout of een kennelijke vergissing een 4 (in plaats van een 10) werd gegeven, terwijl in het andere geval reeds het cijfer 6 werd toegekend wanneer de manier, maar niet de uitwerking, was aangegeven. Wij zouden in dit verband tevens de vraag kunnen opwerpen of niet iedereen op zijn tijd (en dat is vrij dikwijls) fouten van deze soort maakt wanneer hij onder dezelfde omstandigheden als onze leerlingen berekeningen moet maken welke — relatief genomen — in moeilijkheid met die van hen te vergelijken zijn, en vervolgens, indien deze vraag bevestigend wordt beantwoord, in twijfel kunnen trekken of deze fouten bij de leerlingen steeds volgens een billijke maatstaf in rekening worden gebracht. Deze mededelingen en vraagstellingen zouden echter slechts op de proefwerken van een beperkt aantal secties betrekking kunnen hebben en dus een eenzijdig beeld van de toegepaste normen kunnen doen ontstaan, terwijl die eenzijdigheid nog verhoogd zou worden door het niet in aanmerking nemen van andere gezichtspunten dan dit ene, dat bovendien slechts van min of meer technische aard is. Het is verder duidelijk, dat een

dieper gaande beoordeling van het al of niet adequaat zijn van de aangelegde normen een nauwkeurige omschrijving van die normen door de betrokken docent zou vooronderstellen en tevens een veel meer indringend onderzoek van diens klassepractijk zou vereisen dan bij het huidige onderzoek het geval kon zijn. Een beoordeling van het al of niet juist toegepast zijn van de toetsingsmiddelen heb ik dus niet kunnen geven.

Wat de keuze van deze toetsingsmiddelen zelf aangaat, moge ik verwijzen naar hetgeen werd opgemerkt aan het eind van § 14; de aldaar onder *d.* genoemde gegevens, betrekking hebbend op de bij de proefwerkvraagstukken toe te passen methoden en typen, zijn bij de afzonderlijke secties vermeld in de paragrafen 15.

20. Bij de opsomming van de getoetste onderdelen in de paragrafen 15 is tevens aangegeven in hoeverre elk van deze onderdelen door de leerlingen bleek te worden beheerst. Dit is geschied door middel van accenten:

geen accent betekent: aantal onvoldoenden $< 20\,\%$;
1 accent betekent: aantal onvoldoenden $\geqq 20$ en $< 30\,\%$;
2 accenten betekent: aantal onvoldoenden $\geqq 30$ en $< 40\,\%$;
3 accenten betekent: aantal onvoldoenden $\geqq 40\,\%$.

Indien bij eenzelfde proefwerk twee vragen op hetzelfde onderdeel betrekking hadden en de percentages onvoldoenden verschillend uitvielen, is het laagste van deze percentages vermeld. Indien een vraagstuk op twee of meer onderdelen betrekking had, was meestal niet uit te maken op welk van die onderdelen een leerling gefaald had, en moest dus worden volstaan met het aangeven van deze onderdelen zonder toevoeging van accenten.

Na alles wat reeds opgemerkt werd over het aantal onvoldoende resultaten behoeft het geen betoog, dat het aantal onderwerpen, waarvan de vermelding vergezeld gaat van een aanduiding met één of meer accenten, zeer groot is. Het zou misschien de duidelijkheid van onze argumentering met betrekking tot het al of niet bevredigend zijn van de resultaten, resp. het al of niet geschikt gekozen zijn van de toetsingsmiddelen, kunnen bevorderen, wanneer wij een overzicht samenstelden van de frequentie van de onderwerpen die bij de beëindiging van hun behandeling nog op een onvoldoende wijze werden beheerst. Wij hebben dit echter niet gedaan. Behalve dat een dergelijk overzicht betrekking zou hebben op een geheel van onderwerpen die ten aanzien van hun belangrijkheid onderling niet vergelijkbaar zijn, zou dit overzicht, na degene die wij reeds gaven, een met zekerheid te voorspellen beeld vertonen en dus vrij overbodig mogen worden geacht. Wij hebben er daarom de voorkeur aan gegeven te volstaan met bovengenoemde aanduidingen bij de afzonderlijke secties. *Met behulp hiervan kan de lezer zich er in ieder gewenst afzonderlijk geval van op de hoogte stellen of toetsing van een representatieve steekproef uit het geheel der behandelde onderwerpen al of niet tot de conclusie leidt, dat de behandeling van dit geheel van onderwerpen tot een bevredigend einde is gebracht. Hij zal dan bemerken, dat een dergelijke conclusie vaker niet, dan wèl gerechtvaardigd is.*

21. De toetsingsmiddelen blijven ons dwars zitten. Vandaar deze paragraaf.

Nevenstaande tabel geeft een samenvatting van de resultaten van twee vraagstukken die in een der secties op eenzelfde proefwerk werden opgegeven.[1]) Wanneer $5\frac{1}{2}$ of meer als een voldoend aantal punten wordt beschouwd, behaalden 2 van de 26 leerlingen een voldoend cijfer voor beide vraagstukken, 8 voor beide vraagstukken een onvoldoend cijfer, 8 voor het eerste een voldoend en voor het tweede een onvoldoend, eveneens 8 voor het tweede een voldoend en voor het eerste een onvoldoend cijfer.

2 \ 1	+	—	
+	2	8	10
—	8	8	16
	10	16	26

Dit resultaat is om twee redenen onbevredigend. In de eerste plaats hebben maar 2 leerlingen beide vraagstukken voldoende en niet minder dan 8 beide onvoldoende. Dit wijst er reeds op, dat het resultaat niet met de verwachting (nl. dat het onderwerp, waarvan de behandeling met dit proefwerk werd afgesloten, inderdaad als afgehandeld kon worden beschouwd) overeenstemt. In de tweede plaats echter zijn er 16 leerlingen die slechts één van de vraagstukken in voldoende mate konden maken, waarbij de resultaten met deze twee vraagstukken ponds-pondsgewijs verdeeld zijn. Ook hier klopt iets niet. Wanneer we nog steeds aan onze onderstelling van de adequate keuze van de toetsingsmiddelen blijven vasthouden, betekent het resultaat van deze 16 leerlingen, dat ze de geestelijke werkzaamheid waarnaar het ene vraagstuk een onderzoek instelt wèl, die waarop het andere vraagstuk slaat nìet in voldoende mate beheersen, terwijl er geen verschil in „moeilijkheid" tussen de vraagstukken is. Waar ik boven mijn ongeloof aan

[1]) Sectie H.A.B., medewerker 1, proefwerk I, de opgaven 2 en 3. Er waren in totaal 3 vraagstukken.

het bestaan van een eenzijdig al of niet begaafd zijn voor de schoolwiskunde versus het geheel der overige schoolvakken te kennen gaf, moet ik een begaafdheid als functie van de onderdelen van eenzelfde onderwerp wel helemaal verwerpen. Aan verschil in begaafdheid kunnen we dit eigenaardige resultaat dus niet toeschrijven. Integendeel, wanneer de behandeling van een onderwerp ver genoeg is doorgevoerd, kan worden verwacht, dat de mate waarin de verschillende onderdelen van het onderwerp door de klas worden beheerst, zich op een vergelijkbaar niveau bevindt. De onderstelling ligt daarom voor de hand, de afwezigheid van enig positief verband tussen de resultaten van de twee beschouwde vraagstukken toe te schrijven aan een nog niet geheel voltooid zijn van de behandeling van het onderwerp.

Er is echter ook een andere interpretatie van dit verschijnsel mogelijk. Om daartoe te komen, zullen wij het verband tussen de resultaten van twee vraagstukken uitdrukken door middel van de met τ aangeduide coëfficient van rangcorrelatie.[1]) Voor het algemene geval, dat de 4-veldentabel er als volgt uitziet:

2 \ 1	+	—	
+	a	b	p
—	c	d	q
	x	y	n

wordt τ aldus gedefiniëerd:

$$\tau = \frac{ad - bc}{\sqrt{xypq}}.$$

In ons geval vinden we, na op de teller een correctie voor discontinuïteit, ter grootte van $\frac{1}{2}n = 13$, te hebben toegepast:

$$\tau = \frac{-48 + 13}{160} = -0{,}22.$$

Om een coëfficient te verkrijgen die voor verschillende waarden van n een vergelijkbare grootte heeft, bepalen we de waarde van $\tau\sqrt{(n-1)}$. Deze is hier $-0{,}22 \times \sqrt{25} = -1{,}1$.

Ik ben er mij volledig van bewust, dat de grootte van de coëfficient $\tau\sqrt{(n-1)}$ uitermate afhankelijk is van de plaats, waar men de caesuur tussen voldoende en onvoldoende legt voor elk van de twee vraagstukken die men met elkaar vergelijkt. Ik heb steeds onder-

[1]) Zie M. G. Kendall, Rank correlation methods, London 1948, Hk. 3 en 4

steld, dat deze plaats zich in de geest van de corrigerende docent duidelijk heeft afgetekend en, zoals eerder opgemerkt, door de overgang van het cijfer 5 naar het cijfer $5\frac{1}{2}$ in rekening is gebracht.

We kunnen nu de coëfficient $\tau\sqrt{(n-1)}$ als volgt interpreteren. Stel, de leerlingen van een klas maken twee vraagstukken, elk vraagstuk op een afzonderlijk vel papier. De leraar krijgt dus twee stapels werk na te zien, die we zullen aanduiden met I en II. Hij doet dit aldus [1]). Hij posteert zich boven aan de trap, werpt stapel I naar beneden, en kent het predicaat „voldoende" toe aan de vellen, die op de bovenste helft van de trap terecht komen; de andere krijgen „onvoldoende". Hij doet hetzelfde met stapel II. Vervolgens worden de aantallen voldoende en onvoldoende cijfers voor beide vraagstukken vastgesteld en wordt hiervoor de coëfficient $\tau\sqrt{(n-1)}$ berekend. Wanneer hij dit complex van handelingen een groot aantal malen verricht, eventueel ook in klassen van verschillende grootte, verkrijgt hij een corresponderend aantal waarden voor $\tau\sqrt{(n-1)}$. De standaarddeviatie van deze verzameling waarden is 1, terwijl we met een voor onze beschouwingen voldoende mate van nauwkeurigheid mogen aannemen, dat deze waarden normaal verdeeld zijn.

De boven gevonden waarde —1,1 van $\tau\sqrt{(n-1)}$ betekent nu het volgende. Stel, dat de cijfers voor de twee eerst-beschouwde vraagstukken op de hier beschreven, volkomen toevallige manier werden toegekend. Dan zou de kans, ruw geschat, slechts 1 tegen 5 zijn, dat een waarde van $\tau\sqrt{(n-1)}$ voor de dag kwam die hoogstens gelijk —1,1 was. Hoeveel geringer moet die kans dan niet zijn bij de normale manier van corrigeren en wanneer, zoals het behoort, een positief verband bestaat tussen het beheersen van elk der twee onderdelen, waarvoor de twee vraagstukken adequate toetsingsmiddelen zijn. Aangezien we echter wel moeten aannemen, dat bij de door ons beschouwde twee vraagstukken een dergelijk positief verband inderdaad aanwezig is, komen we tot de conclusie, dat het complex, gevormd door de toetsingsmiddelen en de beoordeling van de met behulp daarvan verkregen resultaten, niet op een bevredigende manier is gekozen.

22. Nu hebben we hier een wel zeer bijzonder geval van negatieve correlatie tussen twee proefwerkvraagstukken beschouwd. Het ligt voor de hand om ook te zien naar de correlatietabellen, behorende

---

[1]) Het te gebruiken beeld is te verleidelijk, dan dat ik het zou willen vervangen door een ander, dat overigens gemakkelijk te bedenken zou zijn en dat de voor de hand liggende bezwaren van het hier gebezigde niet vertoont.

bij andere paren vraagstukken die bij eenzelfde proefwerk zijn opgegeven. We hebben daartoe de coëfficient $\tau\sqrt{(n-1)}$ berekend bij een steekproef van 63, voor een dergelijke berekening in aanmerking komende vraagstukkenparen, ontleend aan proefwerken die aan het eind van de behandeling van een onderwerp zijn opgegeven. Hier volgt de frequentieverdeling.

klasse	frequentie
$-0{,}6 \leqq \tau\sqrt{(n-1)} < 0$	7
$\tau\sqrt{(n-1)} = 0$	31*)
$0 < \tau\sqrt{(n-1)} < 0{,}5$	9
$0{,}5 \leqq \tau\sqrt{(n-1)} < 1{,}0$	4
$1{,}0 \leqq \tau\sqrt{(n-1)} < 1{,}5$	6
$1{,}5 \leqq \tau\sqrt{(n-1)} < 2{,}0$	5
$2{,}0 \leqq \tau\sqrt{(n-1)} < 2{,}5$	0
$2{,}5 \leqq \tau\sqrt{(n-1)} < 3{,}0$	1
totaal	63

*) De hoge frequentie van $\tau\sqrt{(n\text{-}1)} = 0$ wordt veroorzaakt door de toegepaste correctie voor continuïteit.

Gelukkig is de meerderheid van de berekende waarden van $\tau\sqrt{(n-1)}$ positief. Maar veel meer kunnen we in hun voordeel niet aangeven. Een statisticus die gewend is te werken met een zgn. 2,5 %-betrouwbaarheidsniveau (éénzijdig gerekend) en die dus niet als abnormaal voorzichtig kan worden beschouwd, zou, wanneer hij de gevonden waarden elk afzonderlijk in aanmerking nam, slechts in één van de 63 gevallen de conclusie gerechtvaardigd achten, dat voor de gecorreleerde vraagstukken de cijfers op een betere manier tot stand zijn gekomen dan als resultaat van een methode die geheel op het toeval berust.

Hoewel het misschien overbodig is, willen wij niet nalaten er op te wijzen, dat bij dit onderzoek in het algemeen inderdaad een reële betekenis moet worden toegekend aan de mate van correlatie tussen de resultaten van twee vraagstukken van eenzelfde proefwerk. Weliswaar is verschil in vaardigheid bij het oplossen van twee vraagstukken van verschillend type niet de enige factor, die de correlatie in negatieve zin beïnvloedt. Tijdgebrek, waardoor de ene leerling aan vraagstuk 1, de ander aan vraagstuk 2 niet toekomt, en het in mindering brengen van een groot aantal punten voor rekenfouten en vergissingen, welke veelal een toevallig karakter dragen, kunnen mede een lage correlatie veroorzaken. Op grond van de ons verstrekte gegevens moeten we evenwel veronderstellen, dat — behoudens een enkele uitzondering — de medewerkende docenten van mening waren, dat de opgegeven vraagstukken in de beschikbare tijd moesten kunnen worden gemaakt; terwijl bij het in rekening brengen van een groot aantal punten voor rekenfouten en vergissingen verondersteld moet worden, dat de betrokken docent deze als van hetzelfde gewicht als een principiële fout heeft beschouwd.

We hadden bij onze beschouwingen steeds te kampen met moeilijkheden, voortvloeiende uit de aanwezigheid van de volgende drie graden van vrijheid:

a. het al of niet in bevredigende mate behandeld zijn van het onderwerp,

b. het al of niet adequaat gekozen zijn van de toetsingsmiddelen,

c. de al of niet juiste waarderingsnormen.

Omdat *b* en *c* in ons materiaal niet van elkaar zijn te scheiden, zullen we die tot één samenvatten en deze aanduiden als: het toetsingsmiddel.

Wat dit laatste betreft, behoef ik er niet langer omheen te draaien: de voorzichtige manier, waarop ik mij tot nu toe steeds over de toetsingswaarde van de proefwerken heb uitgelaten, gecombineerd met de beschouwingen van deze en de voorafgaande paragraaf, zullen de lezer wel doen begrijpen, dat naar mijn mening *in vele gevallen de toetsingsmiddelen niet op de juiste wijze zijn gekozen.*

Dat deze opmerking niet bedoeld is als een verwijt aan de medewerkers zal duidelijk zijn aan een ieder die een studie heeft gemaakt van het construeren van testvragen. Bovendien heb ik in mijn eerder genoemde publicatie [1]) enkele oorzaken genoemd, waardoor de leraar onder de huidige omstandigheden (in de meeste gevallen) niet aansprakelijk kan worden gesteld voor de gebrekkige keuze van zijn toetsingsmiddelen. Dit betekent niet, dat we ons op de doelmatigheid van onze proefwerkvragen niet extra zullen moeten bezinnen. De hiermee samenhangende vragen zullen integendeel een belangrijk punt van het programma van de didactische afdeling van het Paedagogisch Instituut blijven vormen.

Mijn twijfel aangaande de geschiktheid van de toetsingsmiddelen noopt mij nog even terug te komen op mijn opmerking aan het slot

---

[1]) op bl. 76 e.v.

van § 20. Deze houdt in, dat in de meeste gevallen de conclusie, dat het onderwerp van de betrokken sectie op een bevredigende manier ten einde is gebracht, niet gerechtvaardigd is. Dit kan verschillende oorzaken hebben, maar één van de mogelijke oorzaken is thans duidelijk gesignaleerd, nl. die van de niet-adequate proefwerkvragen. Deze zullen in voorkomende gevallen zelfs iedere conclusie t.a.v. het voltooid zijn van de behandeling van het onderwerp onmogelijk maken.

Dit alles in aanmerking nemende blijkt ten slotte, dat wij het veiligst doen met ons te onthouden van een poging om aan te tonen, dat de percentages, vermeld in de voorlopige conclusie van § 12, *nog aan de lage kant zijn, en ons te beperken tot het aldaar gevonden resultaat — overigens op zichzelf duidelijk genoeg — volgens hetwelk er op h.b.s. en gymnasium een aanzienlijk tekort is in het aantal lesuren dat voor de behandeling van het gebruikelijke wiskunde-programma in de klassen III, resp. III en IV beschikbaar is.*

23. Het komt mij voor, dat dit verslag niet een gunstige gelegenheid biedt om voorstellen ter wijziging van de leerstof te doen. Zo lang trouwens het gangbare toetsingsmiddel, het vraagstuk, niet onder de loupe wordt genomen, zal ieder voorstel van die aard nog tot een betrekkelijke onvruchtbaarheid zijn gedoemd. Maar ook het vraagstuk op zichzelf, afgezien van het gebruik daarvan als toetsings middel, zal op zijn bruikbaarheid als didactisch hulpmiddel of op zijn geschiktheid als doel aandachtig moeten worden bekeken. Mede ten einde een critische beschouwing van de vraagstukken te bevorderen, hebben wij de bovengenoemde lijsten C samengesteld; deze bestrijken de meest gangbare typen van de vraagstukken die bij de onderwerpen van de secties voorkomen, terwijl deze onderwerpen een aanzienlijk gedeelte van de middelbare-schoolleerstof voor wiskunde omvatten. Een enkele blik in deze lijsten is reeds voldoende om te begrijpen, dat een onevenredig deel van de voor wiskunde beschikbare lesuren wordt besteed aan het oplossen van vraagstukken die ver verwijderd zijn van de eenvoudige typen welke de theorie kunnen verduidelijken of van practisch nut zullen zijn. Een belangrijke verbetering zal hier niet kunnen worden bereikt door voorschriften, die slechts betrekking hebben op het afschaffen van weinig omvangrijke onderdelen als bijv. dat van de vraagstukken (en theorie) over het interpoleren bij reeksen of van de vraagstukken over afhankelijkheid en strijdigheid van vergelijkingen. Een werkelijk effectieve beperking van de vraagstukken zal van een andere orde van grootte dienen te zijn. Mede om de

laatste door middel van een voorbeeld, betrekking hebbende op de onderhavige leerstof, aan te geven, maar ook omdat het type op zichzelf hier langzamerhand in zo bijzondere mate voor in aanmerking komt, noem ik het achterwege laten van alle vraagstukken over vierkantsvergelijkingen en kwadratische functies die in de coëfficienten één of meer parameters bevatten.

24. Het verslag is niet alleen bedoeld voor de ervaren leraar, maar ook voor de beginner en voor degene, die zich op het ambt van leraar voorbereidt. Dit is één van de redenen van het opnemen van citaten, het overnemen van aanwijzingen omtrent foutenoorzaken, moeilijkheden, e.d. en het maken van opmerkingen die de leraar met een grote ervaring wellicht geneigd is te beschouwen als vanzelfsprekend of als melding makend van algemeen bekende feiten; het is mij trouwens meermalen gebleken, dat ook leraren die reeds jarenlang en met succes hun werk verrichten, belangstellend zijn naar de vorderingen en de oorzaken van mislukking van de leerlingen hunner collega's, ten einde die van hun eigen leerlingen daarmee te kunnen vergelijken. Een andere reden is deze, dat het ook voor een beoordeling van het resultaat van dit onderzoek van belang geacht moet worden, althans ten dele, een overzicht te krijgen van die gedeelten uit de behandelde leerstof, die het resultaat, uitgedrukt in de benodigde tijd, in hogere mate dan andere gedeelten hebben beïnvloed. Te dien einde werd in vraag 11 van het in § 6 van dit hoofdstuk beschreven schema naar de aard van de moeilijkheden gevraagd, die de leerlingen ondervonden bij het zoeken naar de oplossing van de vraagstukken. Door sommige medewerkers is deze vraag nauwelijks of niet, door andere vrij uitvoerig beantwoord. In enkele gevallen werden ook gedeelten uit de theorie die tot bijzondere moeilijkheden aanleiding gaven of om andere redenen tijdrovend bleken te zijn, al of niet onder vermelding van de vermoedelijke oorzaak, aangegeven. Terecht merkt een van de medewerkers op, dat slechts een uitzonderlijk rustige behandeling van een onderwerp de docent in staat stelt zich de oorzaken van de moeilijkheden zijner leerlingen te realiseren, en dat dit bij de gewone gang van zaken niet te verlangen is. Aangezien het zoeken naar de oorzaken van de moeilijkheden niet meer dan een normale eis van een verantwoorde didactiek is, dient er naar gestreefd te worden, dat die „gewone" gang van zaken „ongewoon" wordt. Naast een beperking van de leerstof zal hiertoe tevens een beperking van het aantal leerlingen per klas nodig zijn.

Er was op de mogelijkheid gewezen, de leerlingen zelf aanwijzingen te laten geven omtrent de oorzaken van hun moeilijkheden. Het spreekt vanzelf, dat niet iedere leerling gemakkelijk tot deze vorm van zelf-analyse is te brengen. Bovendien kunnen niet alle leerlingen hun moeilijkheden onder woorden brengen, terwijl anderen het alleen maar „gek" vinden om in een zo ongewone situatie gebracht te worden. Bij alle reserve die men ten aanzien van de resultaten dezer kinderlijke introspectie in acht moet nemen, is het wellicht niet ondienstig met een voorbeeld te laten zien hoezeer aanduidingen van de leerlingen zelf, in gevallen die zich daartoe lenen, tot een beter inzicht in de oorzaak van een fout kunnen leiden. Een bij dit onderzoek betrokken leerling gaat uit van de vergelijking $y = 2x^2 - 12x + 16$ en schrijft hiervoor achtereenvolgens $\frac{1}{2}y = x^2 - 6x + 16$ (eerste fout), $\frac{1}{2}y = (x - 3)^2 + 7$, $y = 2(x - 3)^2 + 3\frac{1}{2}$ (tweede fout). Het lijkt bij de laatste omvorming onbegrijpelijk, dat de leerling de eerste term van het rechter lid met 2 vermenigvuldigt en de tweede term er door deelt. Beschouwt men het gemaakte werk nader, waarin de laatste regel er aldus uitziet:

$$y = \frac{\cancel{1}^{2}}{\cancel{2}} (x - 3)^2 + 3\tfrac{1}{2},$$

dan zou men kunnen denken: eerst beide termen door 2 gedeeld en deze fout bij vergissing alleen bij de eerste term gecorrigeerd. Dit klinkt reeds aannemelijker. Maar de *eigen* verklaring is als volgt: „eerst vergeten de 16 te delen en dit later proberen goed te maken door alsnog de resterende 7 te delen."

Zoals te verwachten was, is de beantwoording van deze vraag zeer heterogeen uitgevallen. Zij leende zich uitteraard niet voor een samenvatting, zelfs niet binnen eenzelfde sectie. De betrokken antwoorden en opmerkingen zijn bijeengebracht in de paragrafen 12.

25. Veel medewerkers vermeldden afzonderlijk de aard van enkele van de fouten die in de proefwerken voorkwamen. Ook werden voorbeelden van karakteristieke fouten gegeven. Voor zover het ons mogelijk was, hebben wij in de gevallen, waarin ons de proefwerken waren toegezonden, zelf een dergelijke foutenanalyse gemaakt en de belangrijke gedeelten daarvan in het verslag opgenomen. Ook hier was een samenvatting niet uitvoerbaar; afgezien van een mogelijke rangschikking onder de typen rekenfouten, vergissingen en de moeilijk op hun juiste waarde te schatten „denkfouten", zijn de fouten van een zodanig specifieke aard, dat een samenvatting noodzakelijk zou leiden tot een herhaling van de opgegeven vraagstukken in een niet te verantwoorden omvang, dan wel door de overmaat aan verwijzingen weinig interessante

lectuur zou vormen. Wel kan worden opgemerkt, dat de klacht over onnauwkeurig werk, tot uiting komend in cijferfouten, vergissingen, verkeerd lezen, zo maar ergens mee vermenigvuldigen of ergens door delen, enz. ontstellend algemeen is.

De proefwerkfouten zijn opgenomen in de paragrafen 16.

26. Bij de studie van een nieuw onderwerp wordt altijd vroeger verkregen kennis toegepast. Wij behoeven slechts te bedenken met hoeveel nadruk er tijdens de lessen op gewezen moet worden, dat ieder gelijkteken gepaard gaat met het toepassen van één of meer eigenschappen of definities; alleen reeds het veelvuldig hiernaar informeren brengt een repeteren van vroegere leerstof mede. Om deze en andere redenen speelt de opzettelijke herhaling van vroegere stof dikwijls een belangrijke rol bij de behandeling van nieuwe en neemt een overeenkomstig deel van de hieraan te besteden tijd in beslag. Voor zover dit in de verslagen tot uitdrukking kwam, is in de paragrafen 6 daarvan melding gemaakt. Dit is veelal geschied onder verwijzing naar een of meer onderwerpen, genoemd in de lijst D van de betrokken sectie. Deze lijst bevat niet alleen de onderwerpen uit de vroeger behandelde leerstof, waarvan in de verslagen melding wordt gemaakt, maar ook — in algemene formulering — de voornaamste en niet al te eenvoudige vroeger behandelde eigenschappen en methoden die niet expliciet genoemd zijn, maar waaromtrent de leerling een zekere mate van kennis paraat moet hebben ten einde de behandeling van het onderwerp der sectie met vrucht te kunnen volgen.

Naar aanleiding van een analyse van de fouten merkt één van de medewerkers op, dat veel van de onvoldoende resultaten te wijten zijn aan tekorten in de kennis van vroeger bestudeerde leerstof. Dit is ongetwijfeld een opmerking van algemene strekking. Het is voor een beginnend leraar van veel belang, dat hij zich de vraag stelt in welke gedeelten van de vroegere leerstof de genoemde tekorten zich veelal voordoen. Wellicht kunnen de lijsten D, tezamen met de lijsten A—C hem behulpzaam zijn bij het zoeken naar een antwoord op die vraag.

27. Ten einde de lezer althans enigszins georiënteerd te doen zijn over de omstandigheden, waarin les werd gegeven, is in de paragrafen 17 op beknopte wijze een aanduiding gegeven van het algemeen peil van de klas, verkregen door een beschouwing van het geheel der rapportcijfers voor alle vakken.

GROEP L.I.W.E.N.A.G.E.L.

Vergadering op Maandag 4 Januari 1954 in Hotel Des Pays Bas,
Janskerkhof, Utrecht,
om 12.00 uur.

I. *Huishoudelijk gedeelte.*

Agenda:
1. Opening door de voorzitter.
2. Notulen van de vorige vergadering (zie Weekblad no. 4, 47e Jaargang, blz. 80).
3. Benoeming van een kascommissie.
4. Mededelingen.
5. Rondvraag.
6. Sluiting.

II. *Lunch* (12.30 *uur*).
De directie van Pays Bas is bereid een broodmaaltijd te verstrekken à *f* 2,30 (inclusief). Het bestuur hoopt, dat deze prijs het mogelijk maakt, dat de aanwezigen aan deze lunch deelnemen.

III. *Gezamenlijke vergadering met de Groep Classici* (1.30 *uur*).
Bij een gecombineerde vergadering van de besturen van de groep Classici en Liwenagel is gebleken, dat men een uitwisseling van wederzijdse meningen over specifieke alpha- en bêta-problemen zeer op prijs stelde. Genoemde besturen hebben derhalve besloten een soortgelijke discussie in groter verband te houden.

1. Lezing van Dr P. G. J. Vredenduin over „De wiskunde in de alpha-afdeling".
2. Lezing van Prof. Dr J. C. Kamerbeek over „Het Grieks in de bêta-afdeling".

D. LEUJES, 2e secretaris.

WAT IS EENVOUDIG?

door

A. van Dop en A. van Haselen.

In de 28e jaargang van Euclides, aflevering III/IV heeft de heer P. Wijdenes een artikel geschreven, getiteld: „doe het eenvoudig". Hierin breekt hij een lans voor het schrijven van eenvoudige, leesbare, duidelijke bewijzen in de schoolboeken, die de vlakke meetkunde behandelen. Aan het slot verzoekt hij kritiek op zijn artikel en belooft hij, dat deze kritiek ook in Euclides zal worden opgenomen.

Daar de heer Wijdenes uit ons leerboek [1] twee bewijzen heeft overgenomen, nl. de nummers III en VI van zijn artikel, zijn wij wel verplicht, op zijn artikel te antwoorden, hoewel wij niet gaarne reclame voor onze boeken maken door in een tijdschrift de kwaliteiten van onze boeken op te sommen. We willen op het volgende wijzen.

1. Als we over de duidelijkheid van een bewijs willen oordelen, moeten we ons niet afvragen, of *wij* — de schrijvers — dit bewijs leesbaar of niet leesbaar, eenvoudig of niet eenvoudig vinden. Het gaat er om, hoe de leerlingen, die onze „kost" (het woord is van de heer Wijdenes) moeten verteren, over de duidelijkheid van dat bewijs denken.

We kunnen nu de heer Wijdenes verzekeren, dat het merendeel van de leerlingen, die onze boeken gebruiken, de bewijzen, die in III en VI gegeven worden, verkiest boven die van de heer Wijdenes.

Bij het bewijs in IIIb moeten de leerlingen zelf veel te veel uit fig. 11a laten volgen en bovendien moeten ze het tweede en het derde geval zelf bewijzen. Dit is voor middelmatige leerlingen helemaal niet zo eenvoudig.

2. Tijdbesparing wordt niet verkregen door verkorting van de lengte van een bewijs. De bedoeling van een gegeven bewijs moet zijn, dat iedere leerling, ook een minder goede, thuis zonder aanwezigheid van de leraar, *stap voor stap* de gedachtengang moet kunnen volgen.

Het bewijs van VIa (blijkbaar is in de copie deze aanduiding vergeten) is te beknopt. Bij dit bewijs zal de leraar, die het be-

---

[1]) Dr. A. van Dop en Dr. A. van Haselen, Vlakke Meetkunde. Wolters. Groningen.

lingen in één zin gegeven. Hier *moet* dit gebeuren, om de leerlingen enig begrip van een meetkundige plaats bij te brengen. Iedere leraar weet, dat bij de behandeling van de meetkundige plaatsen het leren opschrijven van de twee stellingen, die in de ene formulering gegeven worden, ernstige moeilijkheden oplevert. Het bewijs van de stellingen is hierbij vergeleken kinderspel.

Tenslotte nog de opmerking, dat deze stelling zonder enig bezwaar uit de meetkundeboeken geschrapt kan worden. Er wordt alleen gebruik van gemaakt bij de behandeling van de drievlakshoeken en boldriehoeken in de stereometrie en dan kan het bewijs ervan in drie regels met de cosinusregel gegeven worden.

OFFICIELE MEDEDELINGEN VAN HET BESTUUR VAN WIMECOS

De Heer Dr H. A. Gribnau heeft zich door drukke werkzaamheden genoodzaakt gezien als Bestuurslid van Wimecos te bedanken. Zijn functie van Penningmeester wordt voorlopig door de Secretaris Ir. J. J. Tekelenburg waargenomen.

De Jaarlijkse Algemene Vergadering wordt op *2 Januari a.s.* om half elf in het American Hotel te Amsterdam gehouden.

Het niet-vermelden van adreswijzigingen brengt voor de administratie van Euclides en voor het Secretariaat van Wimecos grote moeilijkheden mede. Het Bestuur verzoekt daarom aan de leden deze adreswijzigingen zo spoedig mogelijk aan de Secretaris op te geven.

De wnd. Penningmeester verzoekt de leden, voor zover dit nog niet gebeurd is, de contributie van *f* 6.— voor 1953/54 over te maken op postgiro no. 143 917 van de Ver. van Wiskundeleraren te Amsterdam.

Namens het Bestuur van Wimecos
Ir J. J. Tekelenburg, Secretaris

handelt, wel enige dingen vertellen. Het zijn juist deze schakels, die de middelmatige en zwakke leerlingen zo spoedig vergeten. Dan hebben ze thuis met het korte bewijs van de heer Wijdenes meer moeite dan met het omslachtige van ons.

3. *Eenvoud* van een bewijs wordt niet verkregen, door dat bewijs zo kort mogelijk te maken, maar door dat bewijs te schrijven in een taal, die voor kinderen te begrijpen is.

4. *Leesbaarheid* van een bewijs wordt soms sterk verhoogd door een enkele toevoeging, zoals in ons III: „Nu is $\angle$ *CMA* een buitenhoek van $\triangle$ *ABC*".

5. Dat bij kortheid de kans op onduidelijkheid en onjuistheid groot is, bewijst wel stelling Ia, een stelling uit de „Nieuwe schoolmeetkunde van P. Wijdenes [1]), die in zijn artikel besproken wordt. We nemen deze stelling uit zijn artikel woordelijk over

Stelling 17. *Als twee driehoeken twee zijden gelijk hebben, is de volgorde van de grootte van* [2] *de derde zijden dezelfde als die van de ingesloten hoeken.*

Als aanbeveling schrijft de heer Wijdenes hieronder:

„Zoals de lezer ziet, de stelling *en zijn omgekeerde* [3]) in één korte, verstaanbare zin.

Deze stelling is volkomen onbegrijpelijk voor leerlingen van de eerste klasse, en wel om de volgende redenen.

1. Wat wordt onder de volgorde van de grootte verstaan? Een leerling voelt dit aan als een geleidelijk groter worden van een zijde of hoek en dat wordt juist niet bedoeld, want zoals de stelling zegt, hebben we hier met *twee* driehoeken, *twee* zijden en *twee* hoeken te maken.

2. Het ernstigste bezwaar tegen de stelling is, dat er twee stellingen in één zin worden geformuleerd. Als er, zoals in het artikel van de heer Wijdenes gebeurd is, maar één van de stellingen bewezen wordt, is het bewijs van de stelling fout. We proberen vooral in de eerste klasse de leerlingen ervan te doordringen, dat we niet iedere stelling mogen omkeren.

3. Als een jong leraar de stelling en het bewijs, zoals deze in het artikel voorkomen, letterlijk behandelt, krijgt hij later de grootste moeilijkheden met de behandeling van de meetkundige plaatsen. Bij de stellingen over meetkundige plaatsen worden ook twee stel-

---

[1]) deel I, blz. 106.

[2]) In het boek staat verder: de derde *zijde* en de ingesloten *hoeken* dezelfde.

[3]) Cursivering door v. Dop en v. Haselen.

ANTWOORD VAN DE BRIEFSCHRIJFSTER OP HET ARTIKEL VAN DE HEER P. WIJDENES „ALGEBRA OP DE LAGERE SCHOOL” IN EUCLIDES III/IV 28e JAARGANG.

Toen ik schreef algebra bedoelde ik algebra. Om voorbeelden te noemen:

1) Het door de redactie in het naschrift gesignaleerde „min maal min is plus” o.a. optredend als we in de eerste klas nog geen negatieve getallen hebben ingevoerd en de leerlingen laten denken over de aftrekkingen $(2a + 3b) — (a + b)$ en $(2a + 3b) — (a — b)$. Er zijn dan leerlingen die haakjes gaan wegmaken, zonder enig begrip waarom dat mag en het even vaak fout als goed doen.

2) Een vrij uitgebreide kennis van machten. Dat leerlingen reeds de afkorting kennen voor $a \times a \times a$ is niet erg, maar het kennen van een algemene formule $a^p \times a^q = a^{p+q}$ vind ik te ver gaan.

Aangezien de heer Wijdenes niet voor mogelijk hield dat ik meende wat ik schreef nl. „algebra” zal hij het misschien wel eens zijn met mijn mening dat we tegen het onderwijzen van deze dingen op de lagere school stelling moeten nemen.

Verder wil ik als mijn mening uitspreken, dat het door de heer Wijdenes aangeprezen letterrekenen op de lagere school geen bezwaar van mij ontmoet *mits de leerlingen allereerst leren vlot en nauwkeurig eenvoudig cijferwerk uit te voeren.* U begrijpt wel dat ik niet de ondingen van blz. 191 uit Euclides III/IV 28e jaargang bedoel. Maar vaak hebben we in de wiskunde, en ook in de natuur- en scheikunde dat de zaak stagneert op het vlug even uitrekenen van eenvoudige dingen, wat de leerlingen heel vaak niet meester zijn.

Op blz. 192 regel 3 schrijft de heer Wijdenes:

„En nu zeg ik, dat de kinderen niet alleen moeten leren rekenen, maar dat ze ook moeten begrijpen, waarom ze zo en zo te werk moeten gaan”. Ik zou willen roepen „Bravo! Maar juist daarom wil ik geen algebra en meetkunde op de lagere school!” Met de heer Wijdenes ben ik van mening dat het niet juist is de jeugd dadelijk in September in de 1e klas te overvallen met het onverteerbare begin van de meetkunde volgens sleurmethoden (blz. 195, 10 regels van onderen). Maar weer: juist omdat serieuze besprekingen, door wiskundeleraren gehouden over het begin van de meetkunde in klasse I geen overeenstemming opleveren (dit blijkt steeds weer in de besprekingen van de wiskundewerkgroep van de W.V.O.; ook uit het grote aantal „nieuwe” meetkunde boeken) is het m.i.

onverantwoord de eerste kennismaking met dit vak te laten tot stand brengen door niet-deskundigen (heeft U wel eens gezien met welke wiskundecijfers iemand de onderwijzersacte kan behalen?).

Om wat de meetkunde betreft weer voorbeelden te noemen:

1) Ik vind het wel meetkunde als de congruentiekenmerken voor driehoeken geleerd worden, en dan prompt door eerste klassers worden te voorschijn gebracht, te pas en te onpas.

2) Misschien vindt de heer Wijdenes het geen meetkunde bedrijven van de lagere school als daar aan de leerlingen het begrip evenwijdige lijnen bijgebracht wordt. Maar als het dan afgeleid wordt uit „even wijd dus overal even ver van elkaar" dan grijpt die definitie toch wel zo erg in de meetkunde in, dat we met de leerling die het zo leerde eerst weer allerlei moeten uitpraten.

Het in Apeldoorn op een opleidingsschool gebruikte boekje Diels, Nauta en Zandvoort: Fundamenteel Rekenen, noemt in deel 11 A § 26 „meetkundig allerlei". En nu ik dat boekje toch noem, boven § 13 staat ingelijst: „onthoud: de som van 2 getallen + het verschil van die getallen = 2 × 't grootste getal." Op blz. 10 § 5 wordt aan de figuur getoond wat een trapezium is. Dan volgt: „Teken verschillende trapezia, telkens met *evenwijdige* zijden van 5 cm en 3 cm en een *hoogte* 2 cm."

Deel 10 A van Fundamenteel Rekenen: blz. 28 § 14 begint zo:

„1 Kwartje en 1 gulden verhouden zich als 25:100 = 1:4."

Wat betekent dit, kan men zich afvragen:

a) De stralen van een kwartje en een gulden verh. zich als 1:4
b) De oppervlakken „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1:4
c) De gewichten „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1:4
of
d) De waarden „ „ „ „ „ „ „ „ „ 1:4

Leert men de kinderen hier slordigheid dan legt men de grondslag voor tal van fouten in Scheikundevraagstukken. Ze zetten dan later makkelijk $H:O = 2:1$ zonder te beseffen of het gewichten zijn of aantallen atomen of volumina.

Ik zou kunnen doorgaan, maar ik meen nu voorlopig te hebben aangegeven waar het me om gaat. Nl. dit: de lagere school behoort m.i. aan te leren vlot cijferen (geen ingewikkelde breuken, desnoods helemaal geen breuken behalve $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{3}$). Zolang dit niet geschiedt zeker afblijven van algebra en meetkunde, die menig wiskundeleraar graag nog zou uitstellen tot een hogere klas dan de eerste klas van de middelbare school. Als de grondslagen van deze vakken niet goed zijn hebben we er tot en met het eindexamen last van.

G. BOEKHOFF, Apeldoorn

VERSCHEIDENHEDEN

door

PROF. DR O. BOTTEMA

XXXII *Viervlakken met rationale zijvlakken.*

In het vraagstuk Stereometrie 1 van het eindexamen H.B.S. B in 1948 is sprake van een viervlak $OABC$, waarbij de in O samenkomende ribben twee aan twee loodrecht op elkaar staan, terwijl voor hun lengten geldt: $OA = p$, $OB = 2p$, $OC = 3p$. Gevraagd wordt onder meer de afstand h van O tot het vlak ABC. Men vindt $h = \frac{6}{7} p$ en deze uitkomst is enigermate merkwaardig, omdat zij rationaal is. Er volgt uit, dat ook het oppervlak G van driehoek ABC rationaal is, want $Gh = \frac{1}{2}.OA.OB.OC$, dus $G = \frac{7}{2} p^2$. Men kan zich afvragen of ook andere rationale waarden voor OA, OB, en OC een rationale waarde van h opleveren en dus een rechthoekig viervlak doen ontstaan, waarvan alle zijvlakken een rationaal oppervlak hebben.

Volgens de stereometrische generalisatie van de stelling van Pythagoras is $4G^2 = OB^2.OC^2 + OC^2.OA^2 + OA^2.OB^2$, waaruit volgt dat men, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ stellend, ratonale waarden van a, b en c moet bepalen, zodat $k = b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2$ een kwadraat is. Voor $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ is dat inderdaad het geval. Het is niet moeilijk om een aantal klassen van oplossingen aan te geven. Een der eenvoudigste schijnt wel:

$$a = x,\ b = y,\ c = x + y,$$

dan is $k = x^2y^2 + (x^2 + y^2)\ (x + y)^2 = (x^2 + y^2)^2$. Het bovengenoemde geval behoort tot deze klasse ($x = 1$, $y = 2$).

Tot deze klassen behoren uiteraard ook gevallen, waarbij nog een der ribben rationaal is, b.v. AB. Men neme daartoe voor x en y de rechthoekszijden van een rationale rechthoekige driehoek. Een mogelijkheid is dus $a = 3$, $b = 4$, $c = 7$.

Voorbeelden van deze soort kan men ook langs andere weg krijgen. Is C' de projectie van C op AB, dan moeten de rechthoekige driehoeken OAB en OCC' rationaal zijn. De zijden van een rationale rechthoekige driehoek verhouden zich als $2\,pq$, $p^2 - q^2$ en $p^2 + q^2$.

Men kan dus b.v. nemen $OA = 2\,pq$, $OB = p^2 - q^2$, $AB = p^2 + q^2$, $OC' = 2pq\,\frac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2} = 2pq_1$, $OC = p^2 - q^2_1$, $CC' = p^2 + q^2_1$, waaruit volgt de mogelijkheid:
$a = 2\,pq\ (p^2 + q^2)^2$, $b = (p^2 - q^2)\ (p^2 + q^2)^2$, $c = p^6 + p^4q^2 + 3p^2q^4 - q^6$ met $k = (p^2 + q^2)^6\ (p^6 + 3p^4q^2 - p^2q^4 + q^6)^2$.

Voor $p = 2$, $q = 1$ krijgt men $a = 100$, $b = 75$, $c = 91$, $k = 13625^2$.

Een andere mogelijkheid is, aannemende dat $u^2 + v^2 = w^2$:

$OA = u$, $OB = v$, $AB = w$, $OC' = \frac{uv}{w}$, $CC' = \frac{1}{2}w$, $OC = \frac{u^2 - v^2}{2w}$,

waaruit volgt: $a = 2uw$, $b = 2vw$, $c = u^2 - v^2$ of wel $a = 4pq\ (p^2 + q^2)$, $b = 2(p^4 - q^4)$, $c = p^4 - 6p^2q^2 + q^4$ met $k = 4(p^2 + q^2)^8$
Voor $p = 2$, $q = 1$ heeft men $a = 40$, $b = 30$, $c = 7$, $k = 1250^2$.

In de bovengenoemde klassen van oplossingen komen telkens slechts twee parameters voor. Raadpleegt men het uitvoerige historisch-bibliografische werk van Dickson [1]), dan vindt men dat het probleem niet alleen aandacht heeft gehad, maar dat zelfs, door Chabanel en Moreau in 1874 een oplossing met drie parameters gevonden is en nog wel in de eenvoudige gedaante
$a = 2xyz$, $b = x(x^2 + y^2 - z^2)$, $c = y(x^2 + y^2 - z^2)$
met $k = x^2y^2\ (x^2 + y^2 - z^2)\ (x^2 + y^2 + z^2)^2$.

Voor $x + y + z = 0$ vinden wij de eerste der bovengenoemde oplossingen. Wij merken op, dat over het moeilijker probleem een rechthoekig viervlak te bepalen met rationale *ribben* een uitgebreide literatuur bestaat[2]). Euler vond reeds de oplossing
$a = x(4y^2 - z^2)$, $b = y(4x^2 - z^2)$, $c = 4xyz$, waarbij $x^2 + y^2 = z^2$, zodat $b^2 + c^2 = y^2(4x^2 + z^2)^2$, $c^2 + a^2 = x^2(4y^2 + z^2)^2$, $a^2 + b^2 = z^6$

Voor $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ krijgt men $a = 117$, $b = 44$, $c = 240$ en $BC = 244$, $CA = 267$, $AB = 125$ en dit schijnt wel de eenvoudigste oplossing te zijn.

Over de vraag of het mogelijk is een rechthoekig viervlak aan te geven waarvan zowel de ribben als de zijvlakken rationaal zijn, heb ik geen gegevens gevonden. Wel is — maar zonder definitief resultaat — aandacht geschonken aan de combinatie van rationale ribben en een rationale straal van de omgeschreven bol.

---

[1]) Dickson, History of the theory of numbers, vol. II Diophantine Analysis, (New York, 1934), p. 502.

[2]) Dickson, p. 497—501.