

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, HASSELT
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEESTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

28e JAARGANG 1952/53

V

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 3,00 op de postgiro-rekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep **Liwenagel** te **Arnhem**. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. **Vredenduin**, **Bakenbergseweg 158** te **Arnhem**. De leden van **Wimecos** storten hun contributie, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in f 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te **Amsterdam** (hierin zijn de abonnementskosten op **Euclides** begrepen). De abonnementskosten op het **Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde** moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma **Noordhoff** te **Groningen** voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. **Mooy**, **Churchillaan 107III**, **Amsterdam**, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. **Streefkerk**, **Chr. H.B.S.**, **Jachtlaan 108**, **Apeldoorn**, tel. **K6760—2581** (alleen tussen 8.— en 4.15 uur). Latere correspondentie hierover aan Dr H. **Mooy**.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

I N H O U D.

	Blz.
Dr. JOH. H. WANSINK , De Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. . . .	197
Het Wiskunde programma voor het V.H.M.O.	206
Kort Verslag van de Bestuursvergadering van de groep Liwenagel . . .	227
Dr JOH. H. WANSINK , Discussie over de beschrijvende meetkunde op de H.B.S. B	228
J. W. DEKKER , Korrel CVIII	245
Mededeling Staatsexamen	246
G. E. KIERS , Enkele opmerkingen	247

Wie heeft nog een ex. liggen van mijn boekje: „**De kegelsneden voor het M.O.**” en wil mij dat wel afstaan?

P. WIJDENES
Amsterdam, Jac. Obrechtstraat 88

DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O..

door

Dr JOH. H. WANSINK.

1. Nu de concept-programma's voor wiskunde voor het Gymnasium- β en voor de H.B.S.-B, waaraan de wiskunde-werkgroep van de W.V.O. enige jaren heeft gewerkt, hun definitieve vorm hebben gekregen en in dit nummer ter kennis van alle lezers van EUCLIDES worden gebracht, lijkt het me gewenst iets naders mee te delen over het karakter van die werkgroep en over de werkzaamheden die tot dusver zijn verricht.

Telkens weer blijkt me in gesprekken, dat er omtrent die werkgroep misverstanden bestaan, die soms hardnekkig van aard zijn. Te gemakkelijk wordt de groep soms vereenzelvigd met één of met enkele harer leden. De invloed van enkele buiten het V.H.M.O. staande medewerkers wordt dikwijls verkeerd aangeslagen; van de ideeën die in de groep leven, wordt soms, door emotionele remmingen, niet of ternauwernood kennis genomen.

2. Om een juist begrip te krijgen over aard en werkwijze van de Wiskunde-werkgroep is het noodzakelijk rekening te houden met het feit, dat ze een onderdeel is van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs (W.V.O.), in 1936 tot stand gekomen als de Nederlandse afdeling van de reeds sinds 1915 bestaande „New Education Fellowship” (N.E.F.).

Deze internationale organisatie, waarvan het secretariaat in Londen is gevestigd, heeft ten doel de bevordering van opvoedkundige en onderwijskundige verbeteringen en vernieuwingen over de gehele wereld, zodat ieder kind, ongeacht zijn nationaliteit, ras, milieu of godsdienst, opgevoed en onderwezen zal worden onder zodanige omstandigheden, dat zijn gehele persoonlijkheid zich volledig en harmonisch zal kunnen ontwikkelen en dat het geleid zal worden tot het beseffen en vervullen van zijn verantwoordelijkheid tegenover de gemeenschap. De N.E.F. beschouwt het opvoedingsproces niet beperkt tot de jaren die in het ouderlijk huis, de school, de universiteit worden doorgebracht, maar als een proces, dat zich over het gehele leven van elk individu uitstrekt. De N.E.F. heeft daarom een open oog en een kritische belangstelling voor alle sociale

problemen, die met opvoeding en onderwijs in de ruimste zin van het woord samenhangen.

Tijdschrift van de organisatie is „*The New Era in Home and School*”, dat in 1920 voor het eerst verscheen onder redactie van mrs. Beatrice Ensor.

Belangrijk zijn de internationale contacten door de N.E.F. gelegd. Aan de eerste wereldconferentie (Calais, 1921) werd deelgenomen door 150 personen uit 14 verschillende landen; onder de deelnemers waren bekende paedagogen als Decroly, Ferrière, Elisabeth Rotten. De zesde conferentie (Nice, 1932) telde 1800 deelnemers uit 53 landen. Van de sprekers van dat jaar noemen we Maria Montessori en onze latere minister van onderwijs prof. van der Leeuw. Als permanente vice-presidenten van de wereldconferenties werden aangewezen: Sir Percy Nunn, Paul Langevin, Bonet, John Dewey en Rabindranath Tagore. De achtste conferentie, de derde die gehouden zal worden na de tweede wereldoorlog, komt in 1953 bijeen in Denemarken, heeft tot thema: „the teacher and his work” en rekt op minstens 450 deelnemers.

3. De Nederlandse W.V.O. is in 1936 ontstaan uit een groep van personen, die reeds sinds 1926 onder leiding van Kees Boeke samenkwam ter bestudering van nieuwere denkbeelden over opvoeding en onderwijs.

In 1936 organiseerde deze groep onder auspiciën van de N.E.F. in Utrecht een internationale paedagogische conferentie, waarvan Boeke de bezielde en bezielende voorzitter was. Als gevolg van deze geslaagde conferentie zag de W.V.O. haar ledental van 125 tot 340 stijgen en werd ze erkend als de Nederlandse afdeling van de N.E.F. Nog steeds is Boeke voorzitter van de W.V.O.

Vanaf het begin heeft de W.V.O. blijk gegeven inderdaad een werkgemeenschap te willen zijn, die haar werkplan zodanig inricht, dat elk lid in staat is actief deel te nemen aan het werk van de organisatie, al naar de eigen plaats door hem in de school of in het leven buiten de school ingenomen.

Reeds op de eerste vergadering van de W.V.O. kwamen enige werkgroepen tot stand, onder anderen die voor wiskunde.

4. Deze wiskunde-werkgroep, die haar arbeid in Juli 1936 inzette met een conferentie ten huize van één harer deelnemers, waar slechts vier leden aanwezig waren, is in de loop der jaren uitgroeid tot een groep van 128 personen. Bij de hervatting van de werkzaamheden na de oorlog (in Juni 1946) bedroeg het aantal leden nog 20.

De werkgroep ziet haar voornaamste taak in het organiseren van periodieke samenkomsten, waarin vraagstukken op didactiek en methodiek van het onderwijs in de wiskunde betrekking hebbende, worden besproken. In de periode voor de wereldoorlog (van 1940 tot 1946 lag alle werk stil) trad aanvankelijk ir A. E. Bosman als correspondent op, A. van Zutphen werd voorzitter, Mevr. dr J. C. Proost—Thoden van Velsen secretaresse. In de periode van 1946 tot nu was het secretariaat in handen van Hermen J. Jacobs jr., en berustte het voorzitterschap aanvankelijk bij J. R. Janssen en vanaf Februari 1950 bij prof. dr H. Freudenthal.

Sinds December 1952 verschijnt er een mededelingenblad onder redactie van P. M. van Hiele en J. J. Boogaard. Als publicaties van de werkgroep kan men beschouwen een gedachtenwisseling tussen Mevr. Ehrenfest en prof. Freudenthal over de bijdrage die het wiskunde-onderwijs kan leveren tot de opvoeding van het denkvermogen, een verslag van het Conferentie-weekeinde 1952 in „de Tempel” over het onderwijs in wiskunde en natuurkunde op de middelbare school en het wiskundenummer van het maandblad Vernieuwing (April 1953, nummer 103), Zie de lectuurlijst aan het slot van dit artikel.

5. De belangstelling van de werkgroep was in de periode vóór de wereldoorlog voornamelijk gericht op het meetkunde-onderwijs en op de aansluiting tussen L.O. en M.O.

In overleg met prof. Kohnstamm is in 1938 een commissie tot stand gekomen uit de leden van de Wiskunde-werkgroep en enige medewerkers van het Nutsseminarium voor Paedagogiek te Amsterdam voor het instellen van een onderzoek naar de moeilijkheden, die kinderen ondervinden bij het aanvankelijk wiskunde-onderwijs op de scholen voor V.H.M.O. en naar de wijze waarop deze moeilijkheden psychologisch en didactisch te ondervangen zijn.

De bedoeling was in het bijzonder:

1. te experimenteren met een voorbereidende cursus, die de grondslagen legt voor het juist leren lezen en het zich realiseren wat er staat;
2. te onderzoeken welke de taalmoeilijkheden zijn, waarvoor we de kinderen stellen;
3. te experimenteren met een propaedeutische cursus om het voorstellingsvermogen te oefenen en het begrip voor problemen en probleemstelling bij te brengen.

Van de 16 leden waaruit de commissie bestond noemen we de secretaresse van de werkgroep Mevr. dr Proost—Thoden van

Velzen, de latere voorzitter J. R. Janssen en Mevr. Ehrenfest, dr E. W. Beth, dr E. J. Dijksterhuis, dr H. Turkstra, dr C. A. Reeser en de heer J. N. Swaan.

Om het overige werk van de Wiskunde-werkgroep zo vrucht-dragend mogelijk te maken werd er eind 1938 tevens besloten tot het samenstellen van kleine studiegroepen, van hoogstens vier personen, voor enige welomschreven doeleinden:

- a. een commissie voor een nadere uitwerking van de propaedeutische cursus in de geest van Mevr. Ehrenfest;
- b. een commissie voor meetkunde-onderwijs aan twaalfjarigen, in verband met de ontwikkeling der denkpsychologie;
- c. een commissie voor het onder ogen zien van de minimum-eisen die gesteld dienen te worden om de culturele waarde van het planimetrie-onderwijs tot zijn recht te doen komen.

Bij de discussies die in samenwerking met het Nutsseminarium plaats hadden, werd de bekende leidraad van de derde Hoofdinspectie bestudeerd, de mogelijkheid tot verdere vereenvoudiging van het daarin voorkomende rekenprogram voor de hoogste klassen der lagere school onderzocht, terwijl uitdrukkelijk aandacht werd geschonken aan moeilijkheden van taalkundige aard. Door J. R. Janssen en dr E. W. Beth werd een lijst van ongeveer 150 termen en begrippen, die tot moeilijkheden aanleiding kunnen geven, opgesteld.

Een serie lees-rekenopgaven werd samengesteld, een serie opgaven voor het toelatingsexamen ontworpen.

Het resultaat van de samenwerking is te vinden in een rapport dat als nummer 33 van de Mededelingen van het Nutsseminarium is verschenen.

De rekenopgaven die het Nutsseminarium nog jaarlijks voor de scholen beschikbaar stelt, vinden dus hun oorsprong in werken van de Wiskunde-werkgroep der W.V.O.

Aan de hierboven onder *b* bedoelde sub-commissie is o.a. deelgenomen door dr E. W. Beth. Men zie zijn inleiding van 27 November 1937 voor de Werkgroep over „Doel en zin van het meetkunde-onderwijs” en zijn rapport: „De psychologische argumenten en richtlijnen voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde”.

Het werk van de andere groepen is niet tot een overeenkomstige afsluiting gekomen. In commissie *a* heeft mevr. Ehrenfest veel belangstelling weten te wekken voor haar ideeën t.o.v. het meetkunde-onderwijs, die niet slechts betrekking hadden op de propaedeutische cursus, maar ook op de uitbanning van alles wat in de

wiskunde-methoden onzer scholen als insluipsel of uitwas zou zijn te beschouwen. De lezers van Euclides zijn op de hoogte van het verzet, dat in onze kringen tegen haar ideeën is gerezen; dit tijdschrift begon met een polemiek tussen dr E. J. Dijksterhuis en haar over het meetkunde-onderwijs. Voor haar geschriften, voorzover ze met activiteiten van de Wiskunde-werkgroep in verband staan, verwijs ik naar de literatuurlijst.

Ook het werk onder *c* genoemd was nog niet ten einde, toen de wereldoorlog het werk van de Werkgroep lam legde. Maar in zekere zin is het programma, dat thans door de Werkgroep wordt gepubliceerd, te beschouwen als een voortzetting van het werk onder *c*, maar dan op breder basis. Het tot stand komen van dit program is een arbeid van vele jaren; ik schat het aantal bijeenkomsten aan de voorbereiding gewijd op ongeveer 40; deze voorbereiding had plaats door kleine commissies (van hoogstens 4 leden) en in plenaire samenkomsten.

6. De bijeenkomsten van de Wiskunde-werkgroep onderscheiden zich van analoge door andere verenigingen georganiseerd, door enkele opvallende bijzonderheden.

De Werkgroep is geen vereniging met statuten en reglementen als b.v. Wimecos en Liwenagel. De behoefte hieraan wordt wel gevoeld en op den duur zal een hechtere organisatie er ook wel komen, maar tot dusver is de behoefte eraan blijkbaar nog niet voldoende sterk geweest.

De publicaties van de Werkgroep zijn voor de verantwoordelijkheid van de conferenties voorzover deze er hun sanctie aan gaven, soms enkel voor de verantwoordelijkheid van de auteurs.

De Werkgroep is een open organisatie. Er zijn geen andere voorwaarden voor lidmaatschap dan dat men zich interesseert voor verbetering van het wiskunde-onderwijs, in de geest van W.V.O. en N.E.F. en dat men zijn contributie betaalt. Het lidmaatschap van de W.V.O. is echter niet verplicht.

Leraren en niet-leraren kunnen op voet van gelijkheid aan de besprekingen in de bijeenkomsten deelnemen. Sommigen achten dit een nadeel, anderen een voordeel. Als er leraren mochten zijn, die vrezen dat ze door deze omstandigheid wel eens door „niet-deskundigen” zouden kunnen worden overstemd, kan ik hen geruststellen met de verklaring, dat er in de jaren, dat ik de Werkgroep ken, nog nooit gestemd is. Men komt al discussiërend tot overeenstemming, althans tot een compromis. De voorzitter peilt de stemmingen, maar laat niet stemmen. En, wie is er eigenlijk „deskundig” om

over het wiskunde-onderwijs op onze scholen advies te geven?

Door het geschetste karakter van de groep is het mogelijk, dat hoogleraren (Freudenthal, Mannoury, Minnaert) met academische docenten (Bunt, Lijdsman), met vertegenwoordigers van het Nutsseminarium (Kohnstamm, Mej. Bleeker, Reeser, Turkstra), met medewerkers van de Stichting voor Psychotechniek (van Peype, Nieuwerkerke) samenwerken, dat leraren aan „traditionele scholen” confereren met leraren aan „progressieve scholen”, dat de problemen van docenten met weinig of geen ervaring in open en vrije discussie ter tafel komen naast problemen van docenten, die het eind van hun schoolloopbaan zien naderen of reeds gepensionneerd zijn.

Gedurende enkele jaren is er een voorzitter van de Werkgroep geweest, die de bevoegdheid tot het geven van wiskunde-onderwijs aan H.B.S. of Gymnasium miste, maar die vanwege zijn didactische belangstelling, activiteit en kwaliteiten gaarne als leider der discussies werd geaccepteerd. Vanaf het ontstaan van de werkgroep behoort tot de trouwe bezoekers der bijeenkomsten ook een medicus. En waar moet ik mevr. Ehrenfest onderbrengen, wier deskundigheid op het gebied der mathesis door niemand zal worden betwijfeld en van wier liefde en daadwerkelijke belangstelling voor de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs alle bezoekers der samenkomsten overtuigd zullen zijn?

Het waardevolle van de besprekingen is, dat ze aanleiding geven tot een didactische verontrusting, die een leraar die een verantwoorde keuze wil doen, nooit geheel missen kan. Zonder deze verontrusting bereikt men geen eigen stijl, maar bijt men zich vast in de methode die men toevallig in eigen milieu heeft leren kennen. Dat kan tegenwoordig zowel een „traditionele” als een „progressieve” methode zijn!

Men leert op de conferenties luisteren en eigen standpunt tegenover andersgezinden verdedigen. Men leer dat het ook „anders” kan, misschien wel dat het anders moet!

Een trek van de groepswerkzaamheden is de hang naar synthese. Er worden welbewust contacten gezocht met andere groepen.

Zo sprak van Hiele in het voorjaar van 1940 contra ir. P. Schut over „Bezwaren tegen een samengaan van wis- en natuurkunde in de onderbouw”, en dr H. J. E. Beth in 1939 over „de didactiek der mechanica in de tweede ronde”, telkens in de werkgroep voor natuur- en scheikunde.

Conferenties worden door meer dan één werkgroep belegd.

Onlangs is de werkgroep er in geslaagd voor de lezing op 11

April 1953 van dr M. Wagenschein over „Auflockerung der Oberstufe an einigen Hessischen Schulen” Liwenagel, Velines en de Werkgroepen voor wiskunde en voor natuurkunde tot samenwerking te brengen.

Ook streeft de wiskunde-werkgroep, evenals de W.V.O., naar het leggen van internationale contacten.

Tot goed begrip van de betekenis van het werk van de Werkgroep diene nog het feit, dat dit werk ook in de kringen van onderwijs-autoriteiten de aandacht trekt. En deze aandacht is niet enkel passief. Ik wijs op de omstandigheid, dat aan de Conferentie van de W.V.O. in April 1939 gehouden op de Ernst Sillem Hoeve te Lage Vuurse en gewijd aan „Vernieuwing van het M.O. en V.H.M.O.” inspecteur J. van Andel het openingswoord uitsprak, terwijl oud-inspecteur dr Bolkestein en inspecteur dr Elzinga inleidingen hielden. Na de oorlog, in 1951, nam dr Bolkestein op zich de W.V.O.-conferentie over V.H.M.O.-problemen te Amersfoort te leiden, waar de inspecteurs dr van Buytenen, Kok en van Dam aanwezig waren, terwijl de inspecteurs Van Andel en Van Dam vergaderingen van de Wiskunde-werkgroep bijwoonden, waarin concept-programma's voor het wiskunde-onderwijs werden besproken.

Ook op andere wijze, o.a. door een bijdrage in „Vernieuwing” (No. 95) over „het Eindexamen” gaf inspecteur van Dam blijk van zijn belangstelling voor het werk van de W.V.O.

7. Indien men hen die zich voor het wiskunde-onderwijs op onze scholen interesseren, zou willen verdelen in drie groepen: conservatieven, radicalen en reformisten, dan is het duidelijk, dat vertegenwoordigers van de eerste groep niet of nauwelijks onder de leden van de Werkgroep zullen zijn te vinden. Wie conservatief is besteedt zijn tijd en geld niet aan „vernieuwing”; hij zal trouwens de beginselen der N.E.F. niet kunnen onderschrijven.

Reformisten en radicalen zijn echter wel in de werkgroep vertegenwoordigd, reformisten, die bij elke hervorming van ons stelsel van opvoeding en onderwijs uitgaan van en rekening houden met de historisch gegroeide, concrete realiteit en radicalen, die tengevolge van de tekorten van deze werkelijkheid er voor alles prijs op stellen hun ideaal zo zuiver mogelijk te stellen.

Het succes van wezenlijke vernieuwing hangt m.i. af van de wijze, waarop de groepen van reformisten en radicalen elkaar weten te vinden.

8. Bovenstaande schets van het werk van de wiskunde-werk-

groep en van het karakter van deze groep is uiteraard onvolledig. Ik wilde slechts aan enige aspecten nader relief geven.

De wiskunde-werkgroep van de W.V.O. is een groep van theoretiserende en practiserende, enthousiaste didactici, die het m.i. verdienen, dat er van hun werk enige nota wordt genomen.

GERAADPLEEGDE LECTUUR.

Bij de samenstelling van dit artikel zijn onderstaande geschriften geraadpleegd, maar is ook een dankbaar gebruik gemaakt van de uitvoerige door Mevr. Proost uitstekend verzorgde en van documenterende bijlagen voorziene notulen van alle bijeenkomsten van de werkgroep uit de vooroorlogse periode, welke notulen ik door vriendelijke bemiddeling van Herman J. Jacobs jr ter inzage kreeg.

1. *Mededelingen van de W.V.O.* en het maandblad *Vernieuwing*, alle jaargangen, i.h.b.:
 - a. de artikelen van Mevr. EHRENFEST;
 - b. het verslag van de conferentie op de Ernst Sillem Hoeve in 1939, (afl. 7; blz. 198 e.v.);
 - c. dr E. J. DIJKSTERHUIS, *Vernieuwing van het wiskunde-onderwijs*, (afl. 4, blz. 109 e.v.);
 - d. G. BOLKESTEIN, *Grondslagen van vernieuwing van M.O. en V.H.M.O.*, (afl. 6, blz. 167 e.v.);
 - e. dr ELIZABETH ROTTEN, *Was tun die Regierungen der verschiedenen Länder zur Erneuerung des Mittlern und Höhern Unterrichts?* (afl. 8, blz. 230 e.v.; afl. 9, blz. 258 e.v.).
2. *Artikelen* in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs, i.h.b.:
 - a. dr D. J. E. SCHREK, *de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* (33e jg, blz. 889—893);
 - b. verslagen van bijeenkomsten van de hand van Mevr. PROOST en drs VAN ZUTFEN.
3. *Artikelen* in EUCLIDES, i.h.b.:
 - a. dr E. W. BETH, *Doel en zin van het meetkunde-onderwijs*, (XIV, blz. 236—243);
 - b. dr E. W. BETH, *De psychologische argumenten en richtlijnen voor de vernieuwing van het onderwijs* (XVI, blz. 1—23);
 - c. *gedachtenwisseling* Mevr. EHRENFEST en dr DIJKSTERHUIS in *Euclides* I, blz. 1—60;
 - d. Mevr. T. EHRENFEST—AFANASSJEW, *Der Zahlbegriff und die Erfahrung* (XIV, blz. 1—23).

4. Dr H. TURKSTRA, Het veelomstreden vraagstuk van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school, W. J. Thieme, Zutphen 1938.
5. *Publicaties* van de Wiskunde-werkgroep, met name:
 - a. Mevr. EHRENFEST en prof. FREUDENTHAL, Kan 't Wiskunde-onderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?
 - b. *Verslag* van de Conferentie 1952 van de werkgroepen voor wiskunde en natuurkunde in „de Tempel” te Rotterdam, met bijdragen van prof. FREUDENTHAL, prof. MINNAERT, dr KONING, Mevr. EHRENFEST.
 - c. Het *Wiskundenummer* van Vernieuwing, met o.a. bijdragen van dra BLADERGROEN, drs VAN HIELE, drs BERGSTRA, KROOSHOF, en dr SMIT, (no. 103).
Alle uitgaven van J. Muusses, Purmerend.

Arnhem, 3 April 1953.

HET WISKUNDE-PROGRAMMA VOOR HET V.H.M.O.

Een ontwerp van de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O.

ALGEMENE INLEIDING.

De Wiskunde-werkgroep der WVO, die zich eerst onder leiding van de Heer J. R. Janssen en later onder die van Prof. Dr H. Freudenthal sinds vele jaren met vragen der didactiek en leerstof bezig houdt, heeft in de jaren 1948/1952 in een groot aantal vergaderingen de programma's Wiskunde voor Gymn. β de HBS. B. aan een diepgaand onderzoek onderworpen. Aanvankelijk werden door belangstellende leden over verschillende onderdelen rapporten uitgebracht, gevolgd door discussies, waarin de strekking van het verdere werk enigszins werd vastgelegd. Tenslotte werden commissies benoemd, elk van 2—4 leden, voor de afzonderlijke gebieden: Meetkunde, Algebra, Goniometrie, Analytische Meetkunde, Beschrijvende Meetkunde. Deze commissies hebben de leerstof zeer nauwkeurig onder de loupe genomen, hetgeen een groot aantal bijeenkomsten vergde. De resultaten van dit minutieuze onderzoek werden in provisorische rapporten samengevat en opnieuw in pleno in discussie gebracht; dit geschiedde in twee bijeenkomsten van elk een hele dag. Aan de onderscheiden rapporteurs werd opgedragen, het resultaat van de besprekingen te redigeren. In de laatste plenaire vergaderingen van de werkgroep is het ontwerp-programma, dat we thans overleggen, bekrachtigd.

Aan de commissie-vergaderingen hebben meegewerkt: Prof. Dr H. Freudenthal (Utrecht) (Algebra); Prof. Dr M. Minnaert (Utrecht) (Algebra); P. M. van Hiele (Bilthoven) (Algebra en Meetkunde); Dr L. N. H. Bunt (Utrecht) (Algebra en Meetkunde); Mevr. T. Ehrenfest—Afanassjewa (Leiden) (Meetkunde); J. R. Janssen (Bloemendaal) (Meetkunde); Mevr. D. van Hiele—Geldof (Bilthoven) (Goniometrie); J. J. Boogaard (Bilthoven) (Goniometrie); J. K. Timmer (Hengelo) (O) (Goniometrie); Dr D. J. E. Schrek (Utrecht) (Analytische Meetkunde); Dr H. Mooy (Amsterdam); (Analytische Meetkunde) Dr P. J. G. Vredenduin (Arnhem) (Analytische Meetkunde); H. J. Jacobs (Den Haag) (Analytische Meetkunde); Dr Joh. Wansink (Arnhem) (Beschrijvende Meetkunde); Dr H. Streefkerk (Hilversum) (Beschrijvende Meetkunde); P. J. van Albada (Lembang) (Beschrijvende Meetkunde).

Aan de plenaire vergaderingen is bovendien nog meegewerkt door de leden: Mej. G. Boekhoff (Apeldoorn); Dr P. Bronkhorst (Eindhoven); H. van Bommel (Utrecht); J. H. van Dam (Driebergen); Mevr. Dr Cath. Faber—Gouwentak (Amsterdam); S. J. Geursen (Tiel); Pater Getulius (Voorschoten); Ir C. D. Grijns (Bussum); Ir B. Groeneveld (Eindhoven); G. H. Faddegon (Bussum); J. Haak (Amsterdam); Dr A. van Haselen (Tiel); Zr Clementine Hamers (Tilburg); Zr Wilhelmina de Jong (Tilburg); D. Leujes (Schiedam); Pater Leo (Voorschoten); R. Lijdsman (Utrecht); Ir K. H. P. Nieûkerke (Utrecht); H. Th. Otten (Nijmegen); Dr W. F. van Peype (Utrecht); A. O. Reckendorf (Ommen); Dr H. Turkstra (Hilversum); Ir W. H. Veldhuis (Den Haag); F. Orie (Zeist); Mej. G. M. Langeler (Rotterdam).

Verschillende personen en instellingen hebben geregeld bij de bijeenkomsten gastvrijheid verleend, te weten: Mevr. Ehrenfest—Afanassjewa te Leiden, het Montessori-Lyceum te Amsterdam, de Sterrenwacht te Utrecht, het Mathematisch Instituut te Utrecht, het Paedagogisch Instituut te Utrecht.

Het bij K.B. vastgestelde algemeen leerplan der in dit rapport beschouwde typen voor zover het betrekking heeft op het onderwijs in de Wiskunde, laat op zichzelf velerlei uitleg toe; de interpretatie heeft dan ook een geleidelijke ontwikkeling ondergaan. De evolutie van het feitelijke programma heeft zich ten dele op die wijze voltrokken, dat onderwerpen, die als didactisch-methodisch middel van oefening of toetsing bijzonder voldeden, allengs van middel tot doel zijn gepromoveerd en een vaste plaats in de leerstof hebben verkregen; vooral examen-opgaven hebben de ontwikkeling in hoge mate bepaald, en dit ondanks het feit, dat zij meestal niet met het oog op hun intrinsieke waarde worden gekozen, maar wegens hun (vermeende) bruikbaarheid, om bekwaamheden van de kandidaten te toetsen.

Bij deze gang van zaken is het telkens nodig, zich op het doel en paedagogische mogelijkheden van het wiskunde-onderwijs te bezinnen. Hierbij dient men aan te knopen niet (of niet alleen) bij de officiële omschrijving van het leerplan, maar bij de feitelijke toestand, die bepaald wordt door de opvattingen van docenten, examinatoren en auteurs van leerboeken. Bij het kiezen van een uitgangspunt zal de één meer de nadruk leggen op de gebruikswaarde van de wiskunde (in welk opzicht dan ook), de ander zal zich van de wiskunde (of althans bepaalde wiskundige gebieden) willen bedienen als van een logisch gesloten systeem, dat de leerling tot voorbeeld en geestelijk oefenmateriaal kan strekken, een derde

zal de verschillende wiskundige gebieden in nauwer onderlinge samenhang willen zien beoefend, een vierde zal bijzondere waarde hechten aan het aanschouwelijk denken in de wiskunde, een vijfde zal de wiskundig-didactische vragen in algemener paedagogisch verband willen oplossen . . . in alle gevallen blijkt de overwoekering van bepaalde gebieden met tweederangslerstof het voornaamste punt van critiek te zijn. Een motief voor herziening, dat hieraan nauw verwant is en dat vooral in de laatste jaren vaak in het geding wordt gebracht, is de overbelasting der leerlingen. Hoewel we over het algemeen nog niet in staat zijn, paedagogische en didactische meningen door exact bewijsmateriaal te staven, is wel o.a. uit onderzoekingen aan het Paedagogisch Instituut te Utrecht gebleken, dat — gezien de in feite onderwezen leerstof — de „overbelasting” geen lichtvaardige beschuldiging is, maar een feit, waarmee ernstig rekening moet worden gehouden.

We weten wel, dat op het ogenblik nog vrijwel alle gegevens ontbreken voor een wetenschappelijk-paedagogisch gefundeerd programma voor het onderwijs in de Wiskunde en we hebben dit gebrek dan ook tijdens onze besprekingen sterk gevoeld. Aan de andere kant is de behoefte aan een herziening zo urgent, dat doortastende maatregelen niet mogen worden uitgesteld.

Om enig houvast te hebben, hebben we getracht ons bij het samenstellen van de leerstof door zekere algemene beginselen te laten leiden. Betrekkelijk gemakkelijk was dit op gebieden, waarop het directe nut voor de verdere opleiding van de leerling het *voornaamste* criterium kan zijn. Hierbij mag dan echter niet uit het oog worden verloren, dat Gymn. β en HBS-B niet *speciaal* voor de studie van de Wis-, Natuur- en Scheikunde of voor de hogere technische studie opleiden; de wiskunde is hulpwetenschap voor andere schoolvakken en is in steeds meer toenemende mate ook belangrijk voor economen, sociologen, paedagogen, psychologen, biologen, medici, landbouwkundigen en in tal van andere functies. In deze ruimere zin moet het nut van de wiskunde voor de voortgezette opleiding worden opgevat.

Het criterium van het practisch nut nu heeft geleid tot gevoelige schrappingen vooral in de Algebra en tot een drastische schrapping in de thans gedoeerde trigonometrie. Deze twee gebieden zijn immers overwoekerd door leerstof, die geen enkel verband meer houdt met welke praktijk dan ook en die geheel is geabsorbeerd door een op zichzelf wenselijke, maar in feite verkeerd gerichte routine. Aan de andere kant werd op grond van hetzelfde criterium de tegenwoordige feitelijke leerstof uitgebreid met differentiaal- en

integraalrekening, iets van waarschijnlijkheidsrekening en statistiek. De eveneens voorgestelde uitbreiding van de leerstof met analytische meetkunde voor de HBS en beschrijvende (constructieve) meetkunde voor het Gymnasium wordt verderop in de inleiding gemotiveerd en toegelicht.

Ten aanzien van de meetkunde hebben we het criterium van het practisch nut niet voorop gesteld. Ook zonder diep in te gaan op de vraag, in hoeverre het meetkundig-onderwijs vormende waarde (b.v. voor de ontwikkeling van het denken of van het ruimte-inzicht) bezit, hebben we, met het oog op de culturele betekenis van dit vak, gemeend, dat een scherpe breuk met de traditie niet verantwoord was. Het is de leidende bedoeling van het voorgestelde meetkunde-programma, om de leerling inzicht te geven in een logisch opgebouwd systeem, dat zekere afgerondheid bezit; omwegen en afswelingen worden dus zoveel mogelijk vermeden.

Nog moeilijker was de taak t.a.v. de beschrijvende meetkunde, waarvan zowel het nut als de vormende waarde door velen in twijfel wordt getrokken. We zijn echter van mening, dat het constructieve element in het meetkunde-onderwijs niet mag worden teruggedrongen en willen daarom, zonder ons aan het thans gangbare HBS-programma te binden, aan een beschrijvende meetkunde een plaats in ons wiskunde-onderwijs blijven toekennen.

Het vraagstuk van de examenopgaven heeft ons bij verschillende gebieden eveneens bezig gehouden; de feitelijke toestand is immers deze, dat die opgaven als onderdeel van de leerstof kunnen worden beschouwd. De overbelasting der leerlingen is ten dele een gevolg van de t.a.v. de examenopgaven ingeslopen gewoonten. Elk nieuw type van examenopgaven is een bron van nieuwe leerstof voor de volgende jaargangen van de examencandidaten. Het feit, dat foutief gestelde examenopgaven te vaak voorkomen, moet op zichzelf al een waarschuwing zijn: de vraagstukken zijn allengs zo onoverzichtelijk geworden, dat het mede hierdoor uiterst moeilijk is, ze onberispelijk te formuleren. Uit het oogpunt van examenteknik zijn strikvragen moeilijk te verantwoorden en is het bekende type van koppel- en kaskadevraagstukken uiterst bedenkelijk. We juichen de verbetering toe, die in de laatste jaren heeft plaats gehad in de vraagstukken algebra en trigonometrie HBS en spreken de wens uit, dat algemeen in deze richting wordt doorgegaan. We verwachten van een groter aantal enkelvoudige, eenvoudige en van elkaar onafhankelijke vraagstukken meer selectief en diagnostisch nut dan van het thans gebruikelijke kleine aantal omvangrijke en ingewikkelde vraagstukken. — De leerling worde eraan gewend,

formules, die hij niet feilloos pleegt te onthouden, niet mechanisch uitsluitend op grond van het geheugen toe te passen. Voor zover ze onmisbaar en niet gemakkelijk af te leiden zijn, moet hij derhalve bij het examen een verzameling van formules mogen raadplegen. Hieraan dient oefening in het doelmatig gebruik van dergelijke verzamelingen vooraf te gaan.

We hebben over het algemeen getracht tot een minimum programma te komen. Op sommige punten hebben we de stof met keuze-onderwerpen aangevuld, ten dele om de docent op onderwerpen te wijzen, die nog kunnen worden behandeld als de tijd het toelaat, ten dele om de didactische activiteit te stimuleren en didactische ervaringen te vergaren op punten, waarop later wel eens een uitbreiding van het programma nodig zou kunnen zijn. Bepaalde onderwerpen, die we beslist waardeloos achten, hebben wij uitdrukkelijk afgeraden.

Uit het bekende verschil in doelstelling van Gymn. β en HBS.B hebben we geen criteria kunnen afleiden om tot verschillende programma's voor deze scholen te komen. Onze pogingen, om tot een uniform programma te geraken zijn gestrand, toen tenslotte bleek, dat de verwezelijking ervan te ingrijpende wijzigingen in de programma's veronderstelde. We hebben derhalve getracht, de programma's enigszins naar elkaar toe te buigen, in de hoop, hierdoor de algehele gelijkschakeling op een later tijdstip voor te bereiden. Volgens ons voorstel zal de analytische meetkunde op de HBS en de constructieve meetkunde op het Gymnasium worden ingevoerd; de contrôle op de leerstof B.M. resp. A.M. vinde op het Gymnasium, resp. de HBS plaats als onderdeel van het mondeling meetkunde- resp. algebra-examen.

Het is mogelijk, dat de voorgestelde herziening van het programma, ruw quantitatief bezien, een verlichting behelst. Zou hierdoor tijd vrijkomen, dan zou een hinderpaal zijn weggenomen voor de dringend nodige en ook alleszins mogelijke methodische verbetering van het wiskunde-onderwijs. Een psychologisch beletsel voor een herziening van het wiskundig-programma is de (helaas niet ongegronde) vrees, dat de invoering van een verlicht (of verlicht lijkend) programma gepaard zou gaan met een vermindering van het aantal lessen. Het beoogde nuttig effect zou dan voor een schadelijk effect plaats kunnen maken. Het doel van onze voorstellen is echter kwalitatieve verbetering van het wiskunde-onderwijs; een vermindering van het aantal lessen zou lijnrecht tegen deze bedoeling ingaan.

We hebben in het vervolg de traditionele indeling van de schoolwiskunde aangehouden, hetgeen niet impliceert, dat volgens onze mening deze indeling op alle punten dient te worden gehandhaafd.

ALGEBRA.

Commissie voor het programma-algebra: Dr L. N. H. Bunt, Prof. Dr H. Freudenthal, P. M. van Hiele, Prof. Dr M. G. J. Minnaert.

De commissie heeft aan de hand van leerboeken het programma tot in vele details besproken; het hieruit voortgekomen ontwerp is in een groot aantal plenaire vergaderingen behandeld, waarbij telkens weer nieuwe, ook principiële gezichtspunten naar voren kwamen. Het tegenwoordige rapport is derhalve in bijzondere mate als collectief werk te beschouwen.

Uiteraard was het niet mogelijk, een volledig programma uit te werken; dit is een taak voor schrijvers van leerboeken en voor docenten. Aan de andere kant konden we ons ook niet, zoals Koninklijke Besluiten doen, beperken tot het aanwijzen van enige grote lijnen. Onze aandacht werd getrokken door punten, waarop we een wijziging van de tegenwoordige toestand wenselijk achtten of waarop we reeds aanwijsbare tendenties tot wijziging kracht wilden bijzetten.

Bij de bepaling van het programma hebben we ons bediend van het criterium van „het practisch nut” (in de ruime zin, zoals toegelicht in de inleiding), dat op zichzelf meestal vrij besliste uitspraken toelaat. Aangezien echter niet elke op zichzelf wenselijke leerstof ook didactisch mogelijk is en voor didactische problemen, zoals hier bedoeld, objectieve oplossingsmethoden nog ontbreken, waren we vaak genoodzaakt een beroep te doen op de didactische ervaringen van onze leden, om programma-kwesties te beslissen. Het eindrapport vertoont hiervan de sporen. Om de discussie over het rapport buiten onze kring te vergemakkelijken, hebben we een gedeelte van die overwegingen in het rapport opgenomen.

Tijdens de discussies is herhaaldelijk gebleken, dat de meeste docenten aan het algebra-onderwijs, behalve materiële, ook zekere *formele* waarde toekennen. We zijn het er echter over eens, dat het programma in principe onafhankelijk hiervan kan en moet worden samengesteld. Voor zover deze doelstellingen voor realisering vatbaar zijn, kunnen zij het best worden verwezenlijkt bij een niet overladen programma.

Sommige beslissingen, die we hebben genomen, zijn bepaald door de voorstellingen, die we ons hebben gevormd omtrent de verhouding tussen *begrip en routine*, die in de algebra-didactiek dikwijls een onderwerp van discussie is geweest. Wat dienomtrent in onze besprekingen te berde is gebracht, kan als volgt worden samen-

gevat: noch alleen begrip, noch alleen routine, kan als de doelstelling van het algebra-onderwijs worden beschouwd; beiden zijn middelen om tot een verantwoorde toepassing van de algebraïsche methode te geraken. Begrip en routine wisselen elkaar genetisch af: verworven routine maakt inzicht in nieuwe begrippen mogelijk, terwijl door het oefenen met deze begrippen, nieuwe vormen van routine ontstaan. Evenmin als in het dagelijkse leven, behoeven we ons in de algebra de oorsprong van onze routines steeds te realiseren; waar zulks ter contrôle van de routine nodig is, moet de leerling echter in staat zijn, tot het begrip terug te gaan. Routine moet menselijkerwijs gesproken onfeilbaar zijn; waar deze graad van perfectie mogelijk is, kan en mag alles aan de routine worden overgelaten.

Wanneer de vraag wordt gesteld, welke mate van *strengheid* in de algebra moet worden nagestreefd, dan geschiedt dit meestal in verband met het limietbegrip (oneindige reeksen, differentiaal- en integraalrekening). Hierdoor wordt de aandacht afgeleid van die problemen van exactheid, die zich op andere algebraïsche gebieden voordoen. Nu zijn er veel nuances van exactheid. Het is onmogelijk, de gehele schoolalgebra op te voeren tot het hoogste (universitaire) peil van exactheid. Daarom mag de beslissing „al-of-niet-differentiaalrekening” niet afhangen van de mogelijkheid, om op dit speciale terrein eisen van exactheid te bevredigen, die anders in de schoolalgebra niet worden gesteld. Trouwens ook op de universiteiten en hogescholen volstrekt de eerste kennismaking met de differentiaal- en integraalrekening zich niet op streng wiskundige wijze. (Dit geldt ook voor de studie wis- en natuurkunde a—d aan de universiteiten; de colleges natuurkunde voor de candidandi zouden niet kunnen worden gegeven, indien de docenten zouden moeten wachten op een alleszins *streng* kennismaking met de differentiaal- en integraalrekening.) Ons besluit, de differentiaal- en integraalrekening in het programma op te nemen, was dan ook gebaseerd op de behoefte aan toepassing, die trouwens al op school (in de wiskunde, de mechanica en de natuurkunde) wordt gevoeld.

We zijn van mening dat de strengheid niet ondergeschikt dient te worden gemaakt aan de routine, maar, wel aan de inzichten omtrent het begripsvermogen der leerlingen. Dit geldt niet alleen of voor het eerst bij de differentiaal- en integraalrekening, maar reeds veel vroeger, met name telkens, wanneer het *getalbegrip en zijn uitbreiding* ter sprake komen. Strengheid of zelfs volledigheid door middel van een abstracte behandeling hierbij na te streven is niet gewenst. De mate, waarin een uitbreiding van het getalbegrip door

de docent dient te worden bewust gemaakt, is in de eerste plaats bepaald door het begripsvermogen van de leerling. De bewustmaking kan (in verschillende doseringen) volgen op het werken met dat uitgebreide getalbegrip. Uitgaande van de op een lagere trap van het getalbegrip geformuleerde rekenwetten, wordt de leerling geplaatst voor de moeilijkheden, die verbonden zijn met de overgang naar de volgende trap; het theoretisch overwinnen van die moeilijkheden worde niet van hem gevraagd. Beschouwingen, welke dienen ter oplossing van problemen, die door de leerling moeilijk als zodanig kunnen worden gezien, horen niet thuis in de leerstof.

Mede omi voornoemde redenen is de rekenkunde als *afzonderlijk leervak* in de lagere klassen niet op haar plaats. Alle belangrijke onderwerpen hiervan komen in de algebra opnieuw aan de orde en leiden dan tot werkelijk nieuwe problemen. B.v. kunnen vermenigvuldiging en staartdeling in verband met de overeenkomstige bewerkingen bij veeltermen worden behandeld. Voor de rekenkundige en algebraïsche behandeling der evenredigheden is bovendien het optreden in de meetkunde een aan hun betekenis beantwoordende gelegenheid. Aangezien de gebroken getallen reeds op de lagere school enigszins tot het routine-bezit van de leerling behoren, blijft het aan de docent overgelaten, of hij overgang tot de gebroken getallen als een bewust te maken uitbreiding van het getalbegrip wil beschouwen. De volledige inductie behoort wegens haar fundamentele betekenis voor het getalbegrip en wegens de voorbeelden van toepassing, waardoor zij wordt geïllustreerd, tot het programma der hogere klassen. Een formele theorie van de begrippen ggd en kgv behoort niet tot het programma.

Eveneens is een formele theorie van het reële getal (ook theorie van het irrationele getal genaamd) op de school niet op haar plaats (dus b.v. geen sneden van Dedekind). Er is geen bezwaar tegen om $\sqrt[n]{a}$ in te voeren als een uitdrukking, waarvan de n -de macht gelijk a is en met die uitdrukking te rekenen volgens de definitie-eigenschap, zonder dat tevoren van irrationale getallen sprake is geweest. Deze methode is niet minder verantwoord, dan andere werkwijzen der schoolalgebra. Dit neemt niet weg, dat aan de leerling vroeger of later duidelijk moet worden gemaakt, dat hij bezig is, met een buiten het rationale gebied uitgebreid getalbegrip te werken. De leerling lere dus op een geschikt ogenblik een bewijs voor de *irrationaliteit van* $\sqrt{2}$ kennen.

Een formele theorie van het *limietbegrip* behoort niet tot het programma.

T.a.v. het *complexe getal* is gebleken, dat het moeilijk is in het onderwijs op ongedwongen wijze tot toepassingen te komen, waarbij de waarde van deze uitbreiding van het getalbegrip duidelijk wordt. Anderzijds zijn ook geen toepassingen van de schoolwiskunde buiten de school (en zonder tussenkomst van een verdergaande wiskundige opleiding) bekend, waarbij de complexe getallen een rol spelen. Maar aangezien de complexe getallen allesbehalve nutteloos zijn (zoals vele andere onderwerpen van het traditionele algebra-programma) en bovendien een logische afsluiting van het getalbegrip vormen, hebben we de complexe getallen als facultatief onderwerp gehandhaafd.

Een algemene theorie der *aequivalentie van vergelijkingen of vergelijkingssystemen blijve achterwege*. Alleen bij twee lineaire vergelijkingen met twee onbekenden worden de begrippen *afhankelijkheid en strijdigheid* behandeld. Men eise van de leerling niet, dat hij bij het vervormen van op te lossen vergelijkingen de aequivalentie handhaaft (dus bij elke stap nagaat of de vervorming omkeerbaar is); deze methode is nodeloos ingewikkeld en bovendien gevaarlijk, als men er een gewoonte van maakt erop te vertrouwen. De leerling moet echter duidelijk beseffen, dat het vervormen van gegeven vergelijkingen in het algemeen slechts tot noodzakelijke voorwaarden voor de wortels leidt. Hij worde eraan gewend, na het oplossen van vergelijkingen steeds de proef op de som te nemen, zoals dit in de numerieke practijk gebruikelijk is. Nadat duidelijk is gemaakt, hoe bij het oplossen van vergelijkingen wortels kunnen worden ingevoerd, dienen theoretische beschouwingen over het invoeren van wortels achterwege te blijven.

Bij de behandeling der *vierkantsvergelijking* houde men er rekening mee, dat vierkantsvergelijkingen in de practijk meestal niet rationaal oplosbaar zijn. Derhalve is de algorithmische oplossing het doel, dat bereikt kan worden, hetzij door de formule voor de wortels toe te passen, hetzij door de hieraan beantwoordende herleiding uit te voeren; oplossing door ontbinden als leerstof blijve beperkt tot gevallen van kleine coëfficiënten en coëfficiënt van x^2 gelijk aan 1. Het ontbinden van *kwadratische drietermen* worde behandeld in verband met of als toepassing van het oplossen van vierkantsvergelijkingen.

Van *grafieken* dient ruimschoots gebruik te worden gemaakt, om de algebraïsche begrippen en speciaal het functiebegrip te verhelderen. Men vermijde derhalve ingewikkelde functies, die moeten dienen, om technieken voor de behandeling van grafieken te ontwikkelen. De grafieken van $\log x$ en a^x behoren tot het programma;

gebroken rationale functies van hogere dan de eerste graad in teller of noemer daarentegen niet (tenzij enige voorbeelden zoals x^{-n}); gebroken lineaire functies facultatief.

Onderwerpen die vervallen, omdat ze geen serieuze toepassing hebben. Symmetrische functies van wortels van een vierkantsvergelijking, behalve som en produkt. (Discriminant, maximum en minimum van kwadratische functies worden wel behandeld.) Het opstellen van vierkantsvergelijkingen, waarvan de wortels gegeven functies zijn van die van een gegeven vierkantsvergelijking; vraagstukken betrekking hebbende op twee vierkantsvergelijkingen, waarbij een wortel van de ene gelijk is aan, of een functie is van een wortel van de andere. Het bepalen van één of meer parameters in de coëfficiënten van een vierkantsvergelijking of kwadratische functie op grond van nader aangegeven voorwaarden, uitgezonderd zeer eenvoudige gevallen, zoals het bepalen van coëfficiënten wanneer wortels of functiewaarden zijn gegeven.

Het vereenvoudigen van $\sqrt{a+b\sqrt{c}}$, $\sqrt{a+b\sqrt{c}} \pm \sqrt{a-b\sqrt{c}}$ enz. Het interpoleren bij reken- en meetkundige reeksen, vraagstukken over reeksen, waar andere dan natuurlijke getallen als indices optreden. Vraagstukken over harmonische reeksen.

Wederkerige vergelijkingen. Logarithmische en exponentiële vergelijkingen (behalve zeer eenvoudige gevallen zoals $a^x = b$, $\log x = \log a$, ${}^a\log x = b$, en de naar analogie hiervan op te stellen ongelijkheidsopgaven).

De reststelling. Wel wordt behandeld de stelling: Verdwijnt de gehele rationale functie $f(x)$ voor $x = a$, dan is $f(x)$ deelbaar door $x - a$.

Onderwerpen, die vervallen, omdat ze nodeloze complicaties behelzen. De begrippen ggd en kgv voor andere uitdrukkingen dan ééntermen. Dus wel van $(x+1)^2(x-1)$ en $(x+1)(x-1)^2$ maar niet van $x^6 - 1$ en $x^8 - 1$. Stelsels van vergelijkingen met twee of meer onbekenden, die door kunstmatige substituties tot lineaire stelsels kunnen worden teruggebracht.

Het rationaal maken van irrationale noemers, die ingewikkelder zijn, dan $a\sqrt{b} + c\sqrt{d}$.

Stelsels van twee of meer vergelijkingen, waarvan meer dan één van hogere dan de eerste graad is.

Vraagstukken over logaritmen met andere grondgetallen dan 10 (en later eventueel e), behalve zeer eenvoudige vraagstukken zoals ${}^2\log 8$. (Bij de invoering van het begrip logaritme komen wel andere grondgetallen ter sprake; de transformatie van de ene basis op de andere wordt eventueel behandeld.)

Alle ongelijkheidsopgaven, behalve de meest eenvoudige. (Als criterium voor de eenvoudigheid kan gelden: de ongelijkheden moeten door een zonder veel tijdverlies te tekenen grafiek kunnen worden toegelicht.) Berekening van annuïteiten (wel worden behandeld de begrippen samengestelde interest en contante waarde met eenvoudige toepassingen).

Numerieke practijk. Met de methoden en eisen der praktijk moet hierbij volop rekening worden gehouden.

De leerling worde eraan gewend, bij het oplossen van vraagstukken de proef op de som te nemen, waar zulks enigszins mogelijk is.

Het begrip voor de mate van nauwkeurigheid moet worden aangekweekt; een formele theorie van benaderde waarden behoort niet tot de leerstof. Waarden van vierkantswortels moeten kunnen worden geschat, ook als de worteltrekking niet opgaat. De algoritme voor het trekken van de vierkantswortel is facultatief. Er bestaat geen bezwaar tegen een uitkomst als de $\sqrt{\frac{2}{5}}$ te laten staan, al moet de leerling in staat zijn, die te herleiden tot $\frac{1}{5}\sqrt{10}$.

Er worden logarithmentafels van 3 of 4 decimalen gebruikt. Het rekenen met tafels en het interpoleren wordt met tafels van verschillende functies geoefend. Het begrip interpoleren wordt grafisch geïllustreerd. Rekenlineaal facultatief.

Geheugenstof. Formules, die de leerling zich moet inprenten, behoren niet tevens in verhalende trant ingekleed tot de leerstof (voorbeeld: het kwadraat van een tweeterm is gelijk aan de som van de kwadraten van beide termen, vermeerderd met hun dubbele product). Het is wel van belang, dat de leerling zelfstandig een formule onder woorden kan brengen.

Bij de evenredigheden dient het aantal te leren eigenschappen zoveel mogelijk beperkt te worden.

Het van buiten leren van merkwaardige producten blijft beperkt tot de gevallen $(a \pm b)^2$, $(a + b)(a - b)$. Het van buiten leren van de formules voor $(a \pm b)^3$, $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$, $(a+b)(a+c)$ vervalt. (Hogere machten van tweetermen vallen onder de — later te behandelen — binomiumformule van Newton).

Nadere uitwerking van onderdelen van het programma. *Waarschijnlijkheidsrekening* (dit gebied is aan het programma toegevoegd, omdat vrijwel iedereen, die de wiskunde later toepast, met waarschijnlijkheidsrekening en statistiek in aanraking komt). Permutaties en combinaties (zonder herhaling) met toepassing op eenvoudige kansvraagstukken. Binomium van Newton. Driehoek van Pascal. Facultatief: aanschouwelijke behandeling van het limiet-

gedrag van de driehoek van Pascal; de foutenkrommen, maar alleen op aanschouwelijke manier afgeleid en niet de vergelijking ervan; de foutenkromme in de natuur, eenvoudige statistische begrippen, zoals gemiddelde en standaard-deviatie.

Differentiaal- en Integraalrekening. Limieten van functies, de hoofdeigenschappen (som, product, enz.) zonder formele bewijzen.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ en $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$. Differentiaalquotiënt. Differentiaal-quotiënt van som, verschil, product, quotiënt, van x^n , $\sin x$, $\cos x$ en enkele eenvoudige rationale combinaties van deze functies. Betekenis van het teken van het differentiaalquotiënt. Hetzelfde voor het tweede differentiaalquotiënt. Maxima en minima met eenvoudige toepassingen. Kettingregel met toepassingen, waarbij deze regel niet meer dan één keer in successie wordt gebruikt (facultatief: afgeleide van $x^{p/q}$, $e = \lim (1 + 1/n)^n$, waarbij geen overdreven eisen t.a.v. de strengheid mogen worden gesteld. Natuurlijke logarithme. Differentiaalquotiënt van $\log x$).

Het doel van de integraalrekening is de berekening van oppervlakten, inhouden, arbeid enz. door middel van de omkering van de differentiatie. Om dit doel te bereiken kunnen twee verschillende wegen worden ingeslagen: 1) Men voert de bepaalde integraal in als limiet van de oppervlakten begrensd door de grafieken van approximerende trapfuncties. In dit geval ligt het het meeste voor de hand, om als functie, waarvan de bepaalde integraal moet worden berekend, meteen te kiezen de afgeleide van een functie f en meteen aan te tonen, dat de bepaalde integraal van f' tussen a en b is: $f(b) - f(a)$. Het is dan niet nodig ook nog aan te tonen, dat de afgeleide van een bepaalde integraal, beschouwd als functie van de bovengrens, de oorspronkelijke functie is. 2) Men beschouwt de te berekenen oppervlakte enz. als functie van de bovengrens en bewijst, dat de afgeleide de gegeven ordinatenfunctie is. De approximatie van de integraal door oppervlakten van trapfuncties kan dan van logisch standpunt worden gemist. Het is echter wenselijk, dat wel wordt getoond, dat de bepaalde integraal als limiet van een som is op te vatten.

Vraagstukken. Men vermijde nodeloos ingewikkelde en gekunstelde vraagstukken. Vooral bij de examens dienen omvangrijke koppelen kaskadevraagstukken vervangen te worden door een groter aantal eenvoudige en niet samengestelde vraagstukken. Ingeklede vraagstukken worden op prijs gesteld, indien zij geen kunstmatig karakter dragen.

MEETKUNDE.

Commissie voor het programma-meetkunde: Mevr. T. Ehrenfest—Afanassjewa, Dr L. N. H. Bunt, J. R. Janssen, P. M. van Hiele.

Het rapport gaat uit van de volgende inzichten:

I. De elementaire meetkunde is een waardevol bestanddeel van het programma van het VHMO.

De waarde van de meetkunde is tweevoudig:

a. Zij brengt ons de kennis bij met behulp waarvan we de eigenschappen der ruimte, waarin zich het gehele leven afspeelt, beter leren begrijpen en beheersen.

b. Bij geen der vakken heeft de leerling een zo goede gelegenheid om een logisch samenhangend systeem van wetenschap op te bouwen en om de mogelijkheid te leren waarderen, om in plaats van door experimenteren, door zuiver nadenken tot vermeerdering van kennis te komen.

II. Het onderwijs in de elementaire meetkunde kan de bovengenoemde waarden slechts dan tot zijn recht doen komen, wanneer elke stap in haar ontwikkeling door de leerling goed verwerkt wordt. Daar is echter onder meer een beperking van de omvang noodzakelijk.

Voor de meest voorkomende problemen van het dagelijkse leven kan men volstaan met een kleine groep van stellingen, waarvan de voornaamste zijn: de stelling van Pythagoras, stellingen over de gelijkvormigheid, en die betreffende de berekening van omtrek en oppervlakte van eenvoudige vlakke figuren en oppervlakte en inhoud van eenvoudige lichamen. Het terugbrengen van de te behandelen stellingen tot axioma's is gewenst voor het juist begrijpen en beheersen dezer stellingen en als oefening in het juist redeneren. Tot het bereiken hiervan is het ons inziens niet nodig naast de systematische cursus nog een groot aantal vraagstukken te behandelen.

Voor het constructieve element in de Stereometrie, zie „Beschrijvende Meetkunde”.

Onderdelen, die behandeld moeten worden (de hieronder aangegeven volgorde is niet noodzakelijk die van de cursus):

Uit de planimetrie:

Hoeken: terminologie van verschillende hoeken, eenvoudige stellingen over hoeken.

Gelijkheden en ongelijkheden: Bestudering van de zes combinaties van drie gelijke elementen in twee driehoeken in verband met de congruentie. De mogelijkheid, om de congruentie van veelhoeken te herleiden tot de congruentie van driehoeken.

Stelling van de buitenhoek van een driehoek. Stellingen betreffende

het verband tussen de grootte van de hoeken en de grootte van de zijden van een driehoek. Afstand van punt tot lijn.

Evenwijdige lijnen: Een der vormen van het parallelenaxioma. Hoeken gevormd met een snijlijn. Omkering van de bedoelde stellingen. Stelling van de som van de hoeken van een driehoek en de gevolgen hiervan voor andere figuren. De rol van het parallelenaxioma bij de opbouw van de meetkunde (onderwerp voor de hogere klassen).

Bijzondere veelhoeken: Parallelogram, trapezium, gelijkbenig trapezium, rechthoek, ruit, vierkant, regelmatige veelhoeken.

Gelijkvormigheid: Inzicht in de verschillende gevallen van gelijkvormigheid van driehoeken. Gebruik van de gelijkvormigheid van driehoeken tot het beoordelen van de gelijkvormigheid van veelhoeken.

Verhouding van lijnstukken: Rationale en irrationale verhoudingen. Evenredigheid van lijnstukken.

Meetkundige plaatsen: Cirkel, middelloodlijn, bisectrix, afstandslijn, middenparallel, meetkundige plaats van de toppen van rechtehoekige driehoeken met in grootte en ligging gegeven hypotenusa. Parabool, ellips, hyperbool.

Oppervlakten: Rechthoek, driehoek, parallelogram, trapezium, regelmatige veelhoek, vergelijking van de oppervlakten van gelijkvormige figuren.

Stelling van Pythagoras: Berekening van lijnstukken met behulp van deze stelling. (De projectiestelling worde niet behandeld.)

Cirkel: Stelling over omtrekshoeken op dezelfde boog en omgekeerde. Eigenschap van de raaklijn in een punt van een cirkel.

Oppervlakte en omtrek van de cirkel: Als limiet van oppervlakte resp. omtrek van regelmatige n -hoeken.

Constructies: Halveren van een lijnstuk, halveren van een hoek, loodlijn in een punt op een lijn oprichten, loodlijn uit een punt op een lijn neerlaten. Construeren van een rechte hoek en van een driehoek, waarvan drie onafhankelijke elementen gegeven zijn. Construeren van een raaklijn door een punt aan een cirkel.

Uit de stereometrie:

Onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken.

Evenwijdigheid: Van lijnen, van lijn en vlak en van twee vlakken. Hoek tussen twee kruisende lijnen, tussen lijn en vlak en tussen twee vlakken.

Loodrechte stand van lijn en vlak, van twee lijnen en twee vlakken.

Afstanden: van evenwijdige vlakken, lijn en vlak, punt en vlak, kruisende lijnen.

Lichamen: Prisma, parallelepipedum, pyramide, afgeknot prisma, afgeknotte pyramide, regelmatig prisma, regelmatige pyramide, kegel, cylinder, bol, het begrip regelmatige veelvlakken.

Oppervlakten van gelijkvormige lichamen in hun onderling verband, van rechte cirkelcylinder, rechte cirkelkegel, bol.

Inhouden: van gelijkvormige lichamen in hun onderling verband, van parallelepipedum, prisma, pyramide, cylinder, kegel, bol. (Eventueel door middel van de integraalrekening.)

Meetkundige plaatsen: Middelloodvlak, bisectrixvlak, bol, cylinder, middenparallelvlak van twee evenwijdige vlakken.

Raakvlak aan cylinder, kegel, bol. Omhullingskegel.

Drievlakshoek: Som van de zijden kleiner dan 360° .

Constructie: zie elders!

Geen parate kennis worde op het examen geëist van:

A. Planimetrie.

Vraagstukken, waarbij niet voor de hand liggende hulplijnen nodig zijn.

Constructies van driehoeken en congruenties van paren driehoeken, waarbij sommen of verschillen van zijden optreden, en dergelijke typen.

Constructies van trapezia, waarvan vier zijden gegeven zijn en dergelijke typen.

Constructies van driehoeken, anders dan waarbij de gegevens zo zijn dat er hulpdriehoeken ontstaan, waarvan drie elementen bekend zijn. De stelling handelende over de som van de verbindingslijnstukken van een punt binnen een driehoek met twee der hoekpunten.

De formules $\frac{0}{s}$, $\frac{0}{s-a}$, ..., $\frac{abc}{40}$

De formules voor hoogtelijn, zwaartelijn, bisectrix van een driehoek, uitgedrukt in de zijden.

Stellingen van Ptolemaeus, Ceva, Menelaus, Stewart.

Stelling over de raaklijnvierhoek.

Formules voor de zijden en oppervlakten van regelmatige veelhoeken uitgedrukt in de straal van in- of omgeschreven cirkel.

Verdubbelingsformule, enz.

B. Stereometrie.

Inhoud van afgeknotte pyramide (formule).

Eigenschappen van hoogtelijnen van een viervlak.

Constructies van drievlakshoeken.

Prismoïde, obelisk.

Oppervlakte en inhoud van boldelen, anders dan de ronde oppervlakte van het bolsegment.

ANALYTISCHE MEETKUNDE.

Commissie voor het programma analytische meetkunde: Dr P. G. J. Vredenduin, Dr H. Mooy, H. J. Jacobs Jr, Dr Joh. H. Wansink (op 23 Sept. 1950 toegevoegd).

1. *Coördinatenstelsel*: Uitsluitend Cartesisch. Het gebruik van complexe coördinaten wordt facultatief gesteld. Verschuiving ²⁾).

2. *De rechte lijn*. Snijpunt van twee rechten. Loodrechte stand. Afstand van een punt en een rechte ²⁾).

3. *Cirkel*. Afstand van twee punten. Algemene vergelijking van een cirkel, Raaklijn ²⁾. Pool en poollijn facultatief ²⁾).

4. *Parabool*. Brandpunt en richtlijn. Raaklijn. Pool en poollijn facultatief ²⁾).

5. *Ellips en Hyperbool*. Raaklijn. Pool en Poollijn facultatief ²⁾. Asymptoten van de hyperbool. Orthogonale hyperbool (ook in de gedaante $xy = k$).

6. *Meetkundige plaatsen*. Directe methode. Parametermethode²⁾.

De met ²⁾ gemerkte onderwerpen behoren niet tot het programma van de HBS.B. Op het eindexamen van de HBS.B zal de analytische meetkunde niet afzonderlijk gevraagd worden, doch uitsluitend als onderdeel van de algebra en bovendien alleen mondeling. De synthetische behandeling van de kegelsneden wordt door de analytische als *afzonderlijk* programma-onderdeel overbodig. Het blijft echter wel gewenst, dat sommige eigenschappen van kegelsneden (b.v. parabolische spiegel, ellips als projectie van een cirkel, stelling van Dandelin) synthetisch afgeleid worden. Op het eindexamen Gymnasium wordt de analytische meetkunde zowel schriftelijk als mondeling gevraagd.

Bij de examenvraagstukken moeten vraagstukken met meetkundige plaatsen niet meer de boventoon voeren.

Wegen het optreden van eventuele parasitische delen bij meetkundige-plaats-vraagstukken, vermijde men cascadevraagstukken.

GONIOMETRIE¹⁾.

Commissie voor het programma-goniometrie: J. J. Boogaard, J. K. Timmer, Mevr. D. van Hiele—Geldof.

¹⁾ Hieronder verstaan wij „gonio- en trigonometrie”.

Het onderwijs in de goniometrie worde in de eerste plaats gegeven *in verband* met andere vakken: planimetrie, stereometrie, algebra, mechanica en natuurkunde. Van de goniometrie zelf wordt verlangd: inzicht in de periodiciteit van de goniometrische functies, voor zover behandeld. Herleiding van sinus, cosinus en tangens van hoeken buiten het eerste kwadrant tot die van hoeken in het eerste kwadrant, waarbij niet uitsluitend op toepassing van daartoe gebruikelijke formules gelet wordt, maar ook op hulpmiddelen zoals goniometrische cirkel en grafiek. Het is toegestaan te werken met de decimale verdeling, waarbij een rechte hoek 100 graden telt, de graad weer decimaal verdeeld is, voor ons doel bij voorkeur in centigraden. Gebruik van *alle* daarop betrekking hebbende functietafels, waarbij o.a. gedacht is aan de z.g. rechtstreekse tafels.

SINUS discussie van de vergelijking $\sin x = a$; toepassingen, waarbij gedacht is aan de oppervlakte van een driehoek;

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

COSINUS discussie van de vergelijking $\cos x = a$;
verband tussen cosinus en projectie, zowel in het platte vlak als in de ruimte;
cosinusregel, met toepassingen; cosinus als sinus van het complement;
de formules: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;
de viertallen $\sin(x + y) = \dots$ en $\sin x + \sin y = \dots$ ²⁾
inzicht in de samenhang tussen sinus en cosinus van een hoek met die van de dubbele (halve) hoek.

TANGENS discussie van de vergelijking $\operatorname{tg} x = a$;

$$\text{de formule } \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

COTANGENS definitie, verband met de tangens.

Behandeling van de functie $a \sin x + b \cos x$; grafiek.

Behandeling van de functie $a \sin (bx + c)$; grafiek.

Behandeling van de afgeleiden van $\sin x$ en $\cos x$ met parate kennis van de resultaten.

Practische toepassingen van het behandelde (als het berekenen van de hoogte van een toren, e.d., het berekenen van de ontbrekende elementen van een driehoek) worden belangrijk geacht.

²⁾ Deze niet uit het hoofd leren; wel de beschikking over een lijstje met enkele formules geven.

Uitdrukkelijk niet verlangd wordt: parate kennis van alles wat niet in het voorgaande is genoemd. Evenmin wordt vaardigheid verlangd in herleidingen die op kunstgrepen berusten, zoals: $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{1}{2}A \cos \frac{1}{2}B \cos \frac{1}{2}C$ en $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \cdot \operatorname{tg} C$ (in een driehoek).

Niet verlangd wordt bekendheid met: secans en cosecans, formules van Mollweide, probleem van Snellius. Elke complicatie, waarbij het kennelijk alleen om deze complicatie zelf te doen is, dient vermeden te worden.

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

1. *Samenstelling der commissie.*

Op de bijeenkomst van de Wiskunde-werkgroep van 5 Maart 1949 werd besloten tot het aanwijzen van een Commissie, die tot opdracht kreeg een ontwerp-program samen te stellen voor de Beschrijvende Meetkunde. Bij de samenstelling van dit ontwerp-program zou uitgegaan moeten worden van de grondgedachte, dat men bij het onderwijs voor de constructies, die in de Stereometrie-les aan de orde komen, minstens één projectiemethode leert, volgens welke men deze constructies daadwerkelijk kan uitvoeren.

Tot leden werden aangewezen:

P. J. van Albada, leraar aan het Montessori Lyceum te Rotterdam; Dr H. Streefkerk, leraar aan het Christelijk Lyceum te Hilversum; Dr Joh. H. Wansink, leraar aan de Lorentz-H.B.S. te Arnhem.

Op de vergadering van 30 Mei 1950 werd aan deze commissie toegevoegd: Dr H. Mooij, leraar aan het Barlaeus-gymnasium te Amsterdam.

2. *Taak van de Commissie.*

De Commissie heeft het als haar taak beschouwd zich te bemoeien met dat gedeelte van de meetkunde van de ruimte, dat zich bezig houdt met de daadwerkelijke uitvoering van constructies (precisietekeningen met passer en liniaal), welke betrekking hebben op driedimensionale figuren. Tot dit gedeelte behoren niet alleen de onderwerpen, die men bij de traditionele beschrijvende meetkunde van de H.B.S.-B aantreft, maar tevens onderwerpen uit de traditionele stereometrie, zoals b.v. de constructies van doorsneden en van netwerken.

Doel der B.M.

De Commissie wijst op het tweeledig doel, waarmee men in het stereometrie-onderwijs van figuren gebruik maakt. Enerzijds dienen de constructies, om een drie-dimensioneel model zodanig in het platte vlak af te beelden, dat de afbeelding een voorstelling opwekt van het afgebeelde model; anderzijds is het de bedoeling om ruimtelijke afmetingen door bepaalde constructie-methoden uit de tekening terug te vinden. Het standpunt, dat men inneemt t.a.v. de constructieve meetkunde (een woord, dat naar onze mening de door ons beschouwde leerstof beter aangeeft dan het woord beschrijvende meetkunde) zal mede bepaald worden door het feit, of men het hoofdaccent wil leggen op het aangewezen illustratieve element van die constructies, dan wel op het systematische element ervan.

Het lijkt ons voor het onderwijs gewenst, dat beide genoemde aspecten tot hun recht komen, zonder dat men in uitersten vervalt, d.w.z. zonder dat men technische constructies laat uitvoeren, waaraan de theoretische fundering ontbreekt, dan wel, dat men systematisch geordende theoretische constructies laat uitvoeren, die didactisch-stereometrisch van weinig belang zijn.

3. In aanmerking komende projectie-methoden.

Als projectiemethoden, die voor het onderwijs op onze scholen bruikbaar zijn, komen naar onze mening in aanmerking:

- a.* de traditionele methode van de orthogonale parallelprojectie op twee onderling loodrechte projectievlakken („Monge-projectie”);
- b.* een scheve parallelprojectie;
- c.* de centrale projectie;
- d.* de perspectief;

Voor illustratieve figuren zullen veelal de onder *b* en *d* genoemde methoden, voor systematische constructies doorgaans de overige projectiemethoden de voorkeur verdienen.

Het dubbele doel, dat we voor de constructieve meetkunde aangaven, maakt het o.i. gewenst, dat het monopolie der traditionele Monge-methode wordt gebroken.

4. Programma.

Ontwerp-programma voor de Constructieve Meetkunde.

Er wordt gegeven:

- A. een cursus in stereometrisch tekenen; hierin moet van elk der lichamen die op de stereometrie-les behandeld worden in een eenvoudige stand een verantwoorde tekening kunnen worden gemaakt.
- B. een systematische cursus; hierin wordt minstens één projectiemethode onderwezen, die in staat stelt de in de stereometrie behandelde constructies uit te voeren met passer en liniaal.
Nadere detaillering.
- A. Het stereometrisch tekenen omvat:
 - a. het construeren van netwerken;
 - b. het construeren van prisma's, pyramiden, blok, octaëder, kegel en cylinder, hetzij in scheve parallelprojectie, hetzij in perspectief, uitgaande van een orthogonale projectie van deze lichamen;
 - c. het construeren van doorsneden van prisma's en pyramiden met platte vlakken;
 - d. het construeren van snijpunten van kegels en cylinders met rechte lijnen en het construeren van raakvlakken van kegels en cylinders, als deze lichamen in projectietekening gegeven zijn.
- B. In de systematische cursus wordt minstens één van de volgende methoden behandeld:
 - a. de orthogonale parallelprojectie op twee onderling loodrechte projectievlakken (Monge-projectie).
 - b. de centrale projectie;

Bij elk dezer projectiemethoden worden die technische complicaties vermeden, waarbij door de uitvoering van constructies van lichamen in gekunstelde standen tijd verloren zou dreigen te gaan.

Grondconstructies.

Elk der volgende grondconstructies moet volgens minstens één der genoemde methoden worden behandeld:

1. het aangeven van punten, lijnen en vlakken in de constructietekening;
2. het trekken van een lijn door twee punten;
het brengen van een vlak door drie punten;
door een lijn en een punt, door twee snijdende lijnen;
het construeren van het snijpunt van een lijn en een vlak;
3. het construeren van een lijn door een gegeven punt evenwijdig met een gegeven lijn;
het construeren van een vlak door een gegeven punt evenwijdig met een gegeven vlak;

- het construeren van een vlak door een gegeven lijn en evenwijdig met een gegeven lijn;
4. het construeren van een lijn door een gegeven punt loodrecht op een gegeven vlak, en het construeren van een vlak door een gegeven punt loodrecht op een gegeven lijn;
 5. het neerslaan van een gegeven vlak in het vlak van tekening;
 6. het construeren van hoeken tussen lijnen en tussen vlakken en tussen lijnen en vlakken;
 7. het construeren van de afstand van twee punten, van twee evenwijdige vlakken, van een punt tot een lijn of tot een vlak.

Bij de toepassing van deze grondconstructies geen vraagstukken, waarin kegels of cylinders als meetkundige plaatsen voorkomen. Alle tijdrovende complicaties worden vermeden, evenzo gekunstelde standen voor de gegevens.

In deze lijst niet vermelde grondconstructies behoren tot de facultatieve leerstof (o.a. drievlakshoeken en schaduwvraagstukken).

5. *Eindexamen.*

Vooraf t.a.v. de eindexamens een opmerking: de Commissie voor B.M. acht uiteindelijk een soepeler eindexamen gewenst dan we thans in ons land kennen: minder vakken, meer keuzemogelijkheid, geen uniform program voor alle eindexamencandidaten.

Het ligt echter niet op haar weg deze gedachte hier te propageren en ze beperkt daarom haar voorstellen tot de volgende, die het eindexamen van H.B.S. en Gymnasium minder ingrijpend zullen beïnvloeden.

Op dit ogenblik acht de Commissie het nog niet opportuun de wijze van inrichting van de eindexamens H.B.S. B en Gymnasium β geheel gelijk te maken. Ze beoogt daarom slechts een naar elkaar toebuigen der programma's. Wat de B.M. betreft is ze van oordeel dat er voor de school een besliste vrijheid van keuze moet blijven t.a.v. de gevolgde projectie-methode.

Voorts stelt ze zich voor dat de B.M. op de H.B.S. B na de programwijziging ook schriftelijk geëxamineerd zal worden, terwijl dit op het Gymnasium β niet het geval zal zijn. De contrôle op de leerstof voor B.M. vinde op het Gymnasium plaats als onderdeel van het stereometrie-examen.

Op het schriftelijk eindexamen B.M. (H.B.S. B) wordt één opgave gegeven uit groep A en één uit groep B. Voor het mondeling eindexamen wordt de gelegenheid geopend een zestal werkstukken, die in de loop van de cursus door de candidaat gemaakt zijn, over te leggen en de ondervraging naar aanleiding van deze werkstukken te doen plaats hebben.

KORT VERSLAG

van de Bestuursvergadering van de groep L.I.W.E.N.A.G.E.L.
op Donderdag 2 April 1953 in Den Haag.

1. Besproken wordt de organisatie van de bijeenkomst op 11 April 1953, waar Dr Martin Wagenschein zal spreken. Deze bijeenkomst wordt georganiseerd door VeLiNeS, de Wis- en Natuurkunde-werkgroepen van de W.V.O. en L.i.w.e.n.a.g.e.l. De voorzitter dankt mejuffrouw Kramer voor de grote moeite, die zij zich heeft gegeven bij de voorbereiding van deze bijeenkomst.
2. Met het bestuur van de groep Classici zal besproken worden, of het mogelijk is in Driebergen een gecombineerde vergadering te beleggen.
3. In overleg met het bestuur van het Genootschap zal getracht worden verbetering te brengen in het Mechanica-onderwijs voor lyceumleerlingen.
4. Het Natuurkunde-onderwijs en daarvan speciaal het onderdeel Mechanica op het gymnasium-B wordt uitvoerig besproken. Middelen ter verbetering worden nagegaan.
5. De Liwenagel-rapporten A en B betreffende het Wiskunde-onderwijs dreigen in het vergeetboek te raken. Het bestuur zal een krachtige actie voeren om dit te voorkomen.
6. Tenslotte worden nog enige kleine kwesties afgehandeld, o.a.: vertegenwoordiging bij bevriende verenigingen; vacatiecursus sterrenkunde; leesportefeuille; betaling laboratorium-uren.

De 2e Secretaris,

D. LEUJES.

DISCUSSIE OVER DE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE OP DE H.B.S.-B.

tussen Dr Joh. H. Wansink en Prof. Dr Ph. Dwinger gehouden
op het Mathematisch Centrum Amsterdam op 22 October en
19 November 1952.

I. Inleiding van dr Joh. H. Wansink over:

Het constructieve element in het meetkunde-onderwijs op H.B.S. en Gymnasium

1. In de rooster van het Mathematisch Centrum, waarin de bijeenkomst van heden werd aangekondigd, wordt gesproken over de stemmen die opgegaan zouden zijn om de Beschrijvende Meetkunde op de H.B.S. geheel of gedeeltelijk te vervangen door de Analytische Meetkunde. Ik heb me afgevraagd, waarop de uitnodigende instantie met deze woorden zou kunnen hebben gedoeld. Ik heb daarbij gedacht aan:

- a. besprekingen over deze materie in de wiskunde-werkgroep der Werkgemeenschap voor Onderwijsvernieuwing (W.V.O.);
- b. gegevens van de enquête van dr Bunt;
- c. verspreide opmerkingen van diverse sprekers op vergaderingen van de laatste jaren (prof. dr Freudenthal, drs Pleysier).

Mijn vraag aan de leiding is: heb ik hier belangrijke instanties waaraan gedacht is, vergeten? Zo niet, dan wil ik gaarne toelichten, waarom men naar mijn mening de onder *a* en *b* bedoelde stemmen niet voetstoots mag citeren als stemmen, die vóór afschaffing van de B.M. op de H.B.S. zouden pleiten.

2. De Wiskunde-werkgroep der W.V.O. heeft zich sinds 1948 intensief bezig gehouden met het samenstellen van een ontwerp-program voor Wiskunde. De sub-commissie voor analytische meetkunde (A.M.) heeft in één der rapporten de wenselijkheid uitgesproken, de A.M. op de H.B.S. in te voeren, mits daardoor het urenaantal voor wiskunde niet zou worden uitgebreid. De commissie gaf te kennen, dat haar dit slechts mogelijk leek door op de H.B.S. de orthogonale parallel-projectie te laten vervallen, terwijl in de stereometrie het constructieve element dan meer op de voorgrond zou moeten komen.

Bij de bespreking in de Werkgroep stuitte de hier bedoelde uitlating der A.M.-commissie op ernstig verzet. In een nieuw rapport over A.M. is de gewraakte uitdrukking dan ook niet overgenomen.

Voor B.M. bestond aanvankelijk geen sub-commissie; zodra dit als een leemte werd gevoeld, is echter zo'n commissie toch nog ingesteld. Deze kwam met een rapport, waaruit ik U straks nog een en ander zal citeren (zie § 5). Op dit moment kan ik volstaan met de vermelding van een zinsnede, die na ampele bespreking in de algemene inleiding tot het ontwerp-program werd opgenomen.

„Nog moeilijker was de taak t.a.v. de B.M., waarvan zowel het nut als de vormende waarde door velen in twijfel werden getrokken.

We zijn echter van mening, dat het constructieve element in het meetkunde-onderwijs niet mag worden teruggedrongen en willen daarom, zonder ons aan het gangbare H.B.S.-program te binden, aan een Beschrijvende Meetkunde een plaats in ons wiskunde-onderwijs blijven toekennen”.

Uit dit citaat van 1950 blijkt, dat de leuze „vervanging van B.M. door A.M. *niet* op rekening van de Werkgroep mag worden geschreven.

Wat de enquête-Bunt betreft („*De leerstof van ons Wiskunde-onderwijs*”, 1949) moge ik er op wijzen, dat 82 % van de H.B.S.-leraren die aande enquête deelnamen, de B.M. als afzonderlijk leer- en examenvak wenselijk en mogelijk achtten, terwijl 13 % de B.M. als onderdeel van de stereometrie wenselijk en mogelijk achtten. Bij minstens 95 % der bedoelde leraren is er dus op een voldoende waardering te rekenen voor handhaving van leerstof over B.M.

Wat de A.M. betreft, 98 % van de leraren aan de Gymnasia spraken zich uit vóór handhaving van de A.M. als afzonderlijk leer- en examenvak. Het is duidelijk, dat deze getallen ons niet kunnen helpen bij de beantwoording van de vraag, of op de H.B.S. aan A.M. de voorkeur gegeven zou moeten worden boven B.M. De leuze: „vervang de B.M. door de A.M.”, is dus niet te funderen met gegevens ontleend aan de enquête-Bunt.

Wat de indirecte aanvallen op de B.M. betreft, uitgevoerd door diverse sprekers (prof. Freudenthal in Doorn 1948, zie Euclides XXIV, blz. 121; drs Pleysier op de jaarvergadering van Wimecos zie Euclides XXVII, blz. 157 e.v.) wil ik hier vooral de aandacht op die van Prof. Freudenthal vestigen, in verband met het feit dat deze voorzitter is van de genoemde Wiskunde-werkgroep. Het feit, dat de bovengenoemde clausule tot stand is gekomen na discussies

onder zijn leiding, moge ons er voor hoeden de kracht der motieven waarmee Prof. Freudenthal zijn extreme visie heeft kunnen funderen, te overschatten.

3. Voor mijn standpunt t.a.v. de B.M. kan ik voor een groot deel verwijzen naar mijn inleiding „*Plaats en betekenis van het onderwijs in de Beschrijvende Meetkunde op de H.B.S.*“, gehouden op een bijeenkomst van de wiskunde-werkgroep van de W.V.O. te Utrecht op 5 Maart 1949, zie Euclides XXIV, blz. 294—307.

Voor de beantwoording van de vraag, of de meetkundige constructies een onmisbaar deel vormen van het meetkunde-onderwijs op H.B.S. en Gymnasium, lijkt het me noodzakelijk te onderscheiden tussen tweeërlei begrip „constructie“; nl.:

- a. constructies in abstracte zin;
- b. constructies in technische zin.

Voorts moeten we onderscheiden tussen de rol, die de constructies spelen in de wetenschappelijke mathesis en in de schoolwiskunde, waar ook andere factoren dan vakwetenschappelijke een essentiële rol spelen. Van vakwetenschappelijk standpunt beschouwd zijn alle constructies abstract; voor een definitie verwijs ik naar dr. O. Bottema, *De elementaire meetkunde van het Platte Vlak*, blz. 110. Abstracte constructies zijn redeneringen. Technische constructies zijn pogingen tot concretisering der abstracte constructies; desgewenst kan men ze buiten de zuivere mathesis stellen en ze onderbrengen bij de toegepaste wiskunde. Men kan zelfs de opvatting huldigen, dat de daadwerkelijke constructies „verontreinigingen“ zijn der „zuivere“ wiskunde, zonder daarmee over de waarde of onwaarde dezer handtastelijke procédés in het onderwijs een oordeel uit te spreken.

Ik wens de technische constructies in ons leerplan te behouden niet op grond van hun wetenschappelijke onmisbaarheid, maar op grond van hun paedagogische onmisbaarheid en ter wille van hun practisch nut. Ons wiskunde-onderwijs is door de hoge eisen, die aan het abstraherend vermogen der leerlingen worden gesteld, voor het gros van de leerlingen moeilijk en één van de voornaamste voorwaarden, waaraan de leraar bij zijn onderwijs aan jonge leerlingen zal hebben te voldoen, is, dat hij in zijn lessen voor voldoende elementen van aanschouwelijke aard zorg draagt. Deze eis maakt, dat op zijn minst schetstekeningen, ter ondersteuning van het meetkundig betoog, onmisbaar blijken. Dit wat de luistersfeer betreft.

Wat de doesfeer in onze scholen aangaat: de docenten kunnen de activiteit der leerlingen in hoge mate stimuleren door hen aan con-

structie-arbeid te zetten. Manuale en cerebrale arbeid kunnen doeltreffend worden gecoördineerd door de leerlingen precisie-tekeningen te laten uitvoeren. Hiermee bedoel ik figuren die aan scherpgestelde metrische eisen voldoen. Figuren, waaraan bepaalde lengten en hoeken ten grondslag liggen en waaruit de juiste grootten van lijnstukken en hoeken terug te vinden zijn. Deze precisie-tekeningen verdienen juist met het oog op het praktische nut van het schoolvak meetkunde, bijzondere aandacht.

Ik beschouw de tendens van ons onderwijs, om praktische toepassingen of te elimineren of aan de andere vakken over te laten, als een didactisch gevaar. Ook het formele nut van de wiskunde komt er door in het gedrang. De ordeningsschema's, die we in ons onderwijs de leerlingen willen bijbrengen, moeten worden aangebracht met de toepasbaarheid op diverse gebieden voor ogen, wil men van de „transfer” iets terecht laten komen. In mechanische overdracht geloven we niet meer.

4. Ik vermoed niet, dat er wiskunde leraren zijn, die de constructies in de planimetrie zouden willen missen. Wel heb ik de indruk, dat ze daar nog vaak niet voldoende tot hun recht komen. Planimetrische constructies verdienen een centrale plaats in het aanvangsonderwijs. De moeilijkheden bij de planimetrische constructies blijven beperkt tot die, welke voortvloeien uit de onvolkomenheden van het constructiemateriaal en de ongeoefendheid der leerlingen. De moeilijkheden bij de constructies der stereometrie zijn van geheel andere aard. Hier moet een twee-dimensionaal beeld van een drie-dimensionale figuur worden ontworpen. En de sprong van 3 op 2 (en van 2 op 3) stelt docent en leerling voor specifieke moeilijkheden.

5. Met instemming citeer ik uit een rapport in 1949 uitgebracht aan de Wiskunde-werkgroep der W.V.O. door de sub-commissie voor Beschrijvende Meetkunde:

„De commissie wijst op het tweeledig doel, waarmee men in het stereometrie-onderwijs van figuren gebruik maakt. Enerzijds dienen de constructies om een drie-dimensionaal model zodanig in het platte vlak af te beelden, dat de afbeelding een voorstelling opwekt van het afgebeelde model, anderzijds is het de bedoeling om ruimtelijke afmetingen door bepaalde constructie-methoden uit de tekening terug te vinden. Het standpunt, dat men inneemt t.a.v. de constructieve meetkunde zal mede bepaald worden door het feit, of men het hoofdaccent wil leggen op het aange-

wezen illustratieve element van die constructies, dan wel op het systematische element ervan.

Het lijkt ons voor het onderwijs gewenst, dat beide genoemde aspecten tot hun recht komen, zonder dat men in uitersten vervalt, d.w.z. zonder dat men technische constructies laat uitvoeren, waaraan de theoretische fundering ontbreekt, dan wel, dat men systematisch geordende theoretische constructies laat uitvoeren, die didactisch-stereometrisch van weinig belang zijn."

Tot zover de commissie.

6. Wat de illustratieve figuren betreft, verkeren we bij ons stereometrie-onderwijs in een impasse. Om ze goed te kunnen tekenen is een zeker peil van stereometrisch inzicht nodig, dat men juist met die figuren wil bijbrengen. Het „stereometrisch tekenen", dat methodisch nog niet verantwoord is zolang de beginselen der scheve projectie niet worden onderwezen, fungeert thans nog als lapmiddel.

De bewering van dr Dwinger dat binnen het kader van het stereometrie-onderwijs het constructieve element volkomen en op meer doeltreffende wijze dan dit thans vaak plaats vindt, geheel tot zijn recht kan komen door constructies als in het werkschrift van Van der Paardt en Abram (zie Weekblad van de A.V.M.O. 12 Nov. 1952, blz. 245) is niet houdbaar. Immers, de leerlingen leren hier wel in een klare figuur constructies uit te voeren, maar ze leren niet een figuur zelf te maken, ze leren geen projectie-methode. En het aanleren van de een of andere projectie-methode behoort tot de minimum-eisen, die we aan de constructieve meetkunde moeten stellen. Zoals het thans nog is, zijn leerlingen van H.B.S. of Gymnasium zelfs niet in staat de figuren uit hun leerboek goed te lezen; ze kennen het procédé niet volgens hetwelk de figuren ontworpen zijn. Dit euvel zal eerst verholpen zijn, zodra de beginselen der scheve projectie worden onderwezen. Het verdient overweging na te gaan, of er naast de traditionele Monge-projectie van het H.B.S. program niet tevens iets onderwezen zal moeten worden van scheve projectie, centrale projectie en perspectief. Indien we ons tot eenvoudige beginselen beperken, is geen dezer methoden voor onze leerlingen te lastig. Waar het mogelijk bleek de beginselen der perspectief te leren op kweekscholen, waar het meetkunde-program verre beneden dat van H.B.S. en Gymnasium stond, kunnen de bezwaren voor deze scholen niet groot zijn.

Voor illustratieve figuren zullen we het liefst de scheve projectie en de perspectief, voor systematische figuren de Monge-projectie en de centrale projectie kiezen.

Het dubbele doel van de constructieve meetkunde (C.M.), dat ik in § 5 uit het rapport der Wiskunde-werkgroep der W.V.O. citeerde, leidt er toe, dat we het monopolie van de Monge-projectie zullen moeten breken. De beginselen der orthogonale projectie blijven echter bij de hier bedoelde en door de genoemde Wiskunde-werkgroep gepropageerde uitbreiding, onmisbaar.

7. Het soms gehoorde verwijt, dat de B.M. een doodlopend vak zou zijn, acht ik ongegrond. Het krijgt echter enig recht van bestaan, indien men zich met technische constructies zou wensen te contenten zonder behoorlijke theoretische fundering. Dit hebben de docenten echter in eigen hand. Mocht men tot de in § 6 genoemde programma-uitbreiding kunnen besluiten, dan is er voor het genoemde verwijt stellig geen plaats meer. In het bijzonder zou de leer der meetkundige verwantschappen enigszins tot zijn rede kunnen komen. We kunnen de leerlingen laten zien, dat de parallelprojectie beslist wordt door de verwantschap der affiniteit en de centrale projectie door de centrale collineatie. Voor de mogelijkheden die er dan ontstaan zie men Flükiger's „*Darstellende Geometrie*”, Unterrichtswerk des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer.

8. Het pleidooi voor het goede recht der „Constructieve Meetkunde”, behoeft nog niet uit te lopen op een pleidooi voor de handhaving van de B.M. als zelfstandig leer- en examenvak op de H.B.S.

Indien docenten en autoriteiten van de betekenis der Constructieve Meetkunde overtuigd zijn, kunnen de door mij aangegeven doelstellingen van dit vakdeel ook bereikt worden als het als onderdeel der stereometrie optreedt. Het is dan echter noodzakelijk, dat de positie der constructieve meetkunde in school- en eindexamenprogramma's uitdrukkelijk wordt omschreven. Verzuimt men echter deze garanties te stellen uit gebrek aan waardering voor de constructieve meetkunde, dan zal een vermindering van het meetkunde-onderwijs het gevolg zijn.

9. Het onderwijs in de constructieve meetkunde wordt m.i. bedreigd door gevaren van verschillende zijden:

- a. van de zijde der zuivere mathesis;
- b. door de inadequate opleiding van de leraar;
- c. door de overlading in het onderwijs.

ad a. Het naar het tweede plan verplaatsen van de constructieve meetkunde vindt steun in de moderne ontwikkeling der wiskunde, die gekarakteriseerd wordt door een terugdringen van het aan-

schouwelijk element in de meetkunde en door de arithmetisering van die meetkunde.

ad *b.* De wiskunde-leraar wordt uitsluitend opgeleid als mathemaat, niet tevens als docent. Het K.B. van Augustus 1952 is een schuchtere poging tot verbetering in deze toestand, een poging die waardering verdient. We zullen echter nog dienen af te wachten, hoe de praktijk t.a.v. de beroepsopleiding wordt. Aan de Universiteit leert de a.s. leraar geen technische beheersing der constructies. Het aantal goed verzorgde constructies, dat men moest hebben voltooid om voor zijn kandidaats- of doctoraal examen te slagen, was in mijn studie jaren bedroevend klein. Het gevolg is, dat de leraar de teken-techniek niet leert op de Universiteit. Voorzover hij zijn vooropleiding op het Gymnasium genoot, leerde hij ze ook niet vóór de Universiteit. Mag men nu redelijkerwijze verwachten, dat hij, voor de klasse staande, plotseling blijk zal geven van liefde voor en beheersing van die constructieve meetkunde? Dat hij zijn bordpasser zó zal weten te hanteren, dat zijn constructiepogingen voor de leerlingen voldoende instructief worden? Het is te verontschuldigen, wanneer hij de constructies inperkt tot de onontkoombare, b.v. tot de planimetrische, en dat hij aan projectiemethoden in de stereometrie zich practisch niet waagt. Het is nodig, dat de Universiteit, beter dan tot dusver, zich kwijt van haar plicht de constructieve meetkunde bij de leraarsopleiding tot zijn recht te doen komen. Nu staat de jonge leraar bij een ietwat gecompliceerde bordtekening, ondanks voldoende theoretisch inzicht, te gauw met scheve handen.

ad *c.* Ik laat in het midden, waardoor de overlading ontstaat, door leer- en examenprogramma, of door de wijze waarop de docenten deze interpreteren. De groeiende belangstelling voor eertijds verwaarloosde activiteiten leidt er mede toe, dat er naarstig gezocht moet worden naar uren, die voor die andere doeleinden dienen te worden vrijgemaakt. Het is begrijpelijk, dat de niet-mathemaat, de niet-natuurwetenschappelijk gevormde, daarbij al spoedig zijn oog zal laten vallen op de wiskunde, omdat dit vak op de rooster met een betrekkelijk groot aantal uren wordt aangetroffen. Is hij nu niet voldoende doordrongen van de betekenis, die de wiskunde in de moderne, technische maatschappij heeft, en van de tendens, dat deze betekenis juist nu stijgende is, dan komt hij er gemakkelijk toe om op de wiskunde te gaan besnoeien, des te gemakkelijker, als er vakdelen kunnen worden aangewezen, waarvoor de waardering bij de docenten toch gering is.

10. Ik voel me niet geroepen om de betekenis, die het A.M.-onder-

wijs kan hebben, te kleineren. Ik heb er met dr Dwinger veel waardering voor. Ik ben ook gaarne bereid mede te werken tot het opnemen van de waardevolle elementen ervan in het H.B.S.-program onder één uitdrukkelijke voorwaarde: *de arithmetisering der meetkunde mag niet gaan ten koste van de constructieve meetkunde*. Dit betekent, dat ik geen kans zie aan het huidig H.B.S.-programma de A.M. toe te voegen, al zou er door herziening van het hoofdstuk grafische voorstellingen wel enige tijd te winnen zijn. De gebroken functies, die sinds 1937 tot het programma der H.B.S.-B behoren, mogen ten dele voor waardevoller leerstof wijken! Men make zich echter geen illusies. Deze speciale functies staan immers nog steeds niet op het eindexamenprogram, en het is de vraag, of ze er ooit op zullen komen. De praktijk van het onderwijs houdt met deze toestand rekening en daardoor valt de tijd die hier te besparen is, tegen.

Op het door minister Rutten geprojecteerde Athenaeum-B zal echter stellig plaats gemaakt kunnen worden voor A.M. naast een herziene B.M. De aard van dit schooltype brengt toch mee, dat de wiskunde er een centrale plaats gaat innemen. Evenals op het Gymnasium- α de klassieke talen de kernvakken vormen, zijn het op het Athenaeum-B de exacte vakken. Vergelijkt men nu het leerprogram voor een Athenaeum-B met dat van het ons bekende Gymnasium- β , waar de exacte vakken naast de klassieke talen als kernvakken optreden, dan lijkt het me stellig mogelijk een wiskunde-programma te ontwerpen, dat beide waardevolle delen van de wiskunde, de A.M. en de C.M., tot hun recht laat komen. Een zeer kritische revisie van het traditionele program blijft daarvoor echter noodzakelijk.

11. In de samenvatting van het betoog van dr Dwinger, opgenomen in het Weekblad van de A.V.M.O. van 12 November 1952 lees ik op blz. 245:

„Sinds de invoering van B.M. op de H.B.S.-B zijn de omstandigheden t.a.v. dit vak sterk veranderd (Delft!) en is daardoor de noodzakelijkheid geschapen objectief na te gaan of niet evenals op het Gymnasium- β aan A.M. de voorkeur gegeven dient te worden.”

De suggestie, dat de betekenis van het onderwijs in B.M. op de H.B.S. bepaald zou worden door de waarde, die Delft aan deze B.M. toekent, brengt ons op dwaalwegen. De betekenis van de constructieve meetkunde binnen het raam van het stereometrie-program wordt bepaald door didactische gezichtspunten binnen het V.H.M.O. zelf. De betekenis, die de constructieve meetkunde voor het technisch onderwijs kan hebben, behoeft niet als quantité négligeable

beschouwd te worden, beslissend voor de beantwoording der vraag „al of niet constructieve meetkunde op de H.B.S.?” is de betekenis, die we uit didactisch oogpunt aan technische constructies toekennen. Het feit, dat de B.M. in Delft gedevalueerd is, valt niet te loochenen. Van afschaffing van het vak is daar echter geen sprake. Overigens bleek uit opmerkingen van dr W. L. van de Vooren, hoofd-instructeur te Delft, dat de A.M. er evenzeer is gedevalueerd en dat aan een goed begrip van fundamentele zaken op het gebied der B.M. (i.h.b. ten aanzien van de scheve projectie) nog steeds waarde wordt toegekend. Het is duidelijk, dat er in de geciteerde zin door het woordje „daardoor” ten onrechte de indruk wordt gewekt, als zou onze B.M. er zijn voor Delft.

Eveneens is het onjuist om in deze zin te spreken van een onderzoek dat door de toestand in Delft noodzakelijk zou zijn geworden. Er kan slechts bedoeld zijn de „wenselijkheid”, volgens de inzichten van dr Dwinger b.v., in het licht te stellen. Wat er bedoeld kan zijn met de constatering, dat de noodzakelijkheid geschapen zou zijn „objectief na te gaan of niet evenals op het Gymnasium- β aan A.M. de voorkeur gegeven dient te worden”, is niet duidelijk. Objectief? Welke zijn toch de objectieve criteria, die bij de leerstofkeuze een beslissende rol spelen? Voorts wordt door deze zin ten onrechte gesuggereerd, dat de feitelijke toestand op het Gymnasium voor de H.B.S. normatief zou moeten zijn.

Ik moge er overigens op wijzen, dat een onderzoek als waarop gedoeld zou kunnen zijn, in Febr. 1949 op beperkte schaal is ingesteld door de Wiskunde-werkgroep van de W.V.O., die bij een elftal hoogleraren en docenten te Delft informeerde naar de betekenis van B.M. en A.M. voor de Delftse studenten. Voor de reactie van dr Beth verwijs ik naar Euclides XXIV, blz. 294. De antwoorden betekenden slechts een moment-opname t.a.v. de gangbare meningen. Deze opname viel nog al gunstig uit t.a.v. de B.M. Maar ik acht het zeer goed mogelijk, dat het bij herhaling anders zou uitvallen. Ik kan aan zo'n opinie-onderzoek moeilijk objectieve waarde toekennen t.a.v. de keuze der te onderwijzen vakken. De mogelijkheid van een „objectief onderzoek” lijkt me op dit moment nog een illusie.

12. In de gedachtenwisseling is de opmerking gemaakt, dat het geen zin heeft te overwegen de B.M. uit te breiden met andere projectiemethoden, maar dat we de B.M. zouden moeten accepteren zoals ze nu is, of ze vervangen door A.M. (Alders). Ik kan deze probleemstelling niet aanvaarden. De leuze „A.M. of B.M.” lijkt

me principiëel onjuist. Ze voert, evenals eertijds bij de leuze „Mussert òf Moscou”, de aandacht af van andere mogelijkheden.

Ten onrechte menen verscheidene aanwezigen m.i. dat de B.M. moet vervallen, „omdat ze geen wetenschap is”. Welke schoolvakken worden echter door ons „als wetenschap” onderwezen, om hun wetenschappelijke waarde? Pré-wetenschappelijke waarde, voorbereiding tot wetenschap moet in een schoolvak wel gelegen zijn. En dat is bij de B.M. ongetwijfeld het geval, te meer, als we ook andere projectiemethoden introduceren. Zo kan men door middel van centrale projectie een wezenlijk inzicht verschaffen in de samenhang van de eigenschappen bij diverse kegelsneden.

Men kan hiertegen opmerken, dat men de centrale projectie wel apprecieert als wiskunde, maar los van tekentechniek. M.i. zijn echter theorie en tekentechniek in ons onderwijs niet te scheiden. Wenst men de theorie te onderwijzen, dan wordt ook een zekere tekentechniek noodzakelijk; zo niet, dan niet.

In de Wiskunde-werkgroep der W.V.O. is m.i. terecht de eis gesteld: „In de Constructieve Meetkunde wordt van de constructies die in de Stereometrie ter sprake komen, een projectiemethode geleerd, die in staat stelt deze constructies in het tekenvlak uit te voeren met passer en liniaal.”

De C.M. heeft dus geen eigen program, maar ontleent dit aan de Stereometrie.

III. GEDACHTENWISSELING.

In verband met het ontbreken van een schriftelijk verslag van het merendeel van hen, die aan de gedachtenwisseling deelnamen, zijn tal van opmerkingen met de beantwoording in de inleidingen verwerkt. Afzonderlijk worden hier de bezwaren van drs J. Korff (Purmerend) opgenomen.

Thorbecke (aldus drs Korff) bedoelde de H.B.S. in het bijzonder als opleiding voor de betere functies in techniek, handel en administratie. Vooral voor de eerste groep is natuurlijk de B.M. geprojecteerd. Nog altijd gaat een groot deel van de leerlingen der H.B.S.-B de techniek in, via M.T.S., of wel direct, als analyst, laborant, of hoe het heten moge, òf vindt een toekomst in handel- en administratie, waarbij voor diploma's als practijk-examen Boekhouden, M.O. Boekhouden, accountancy, enz. gewerkt wordt. Uiteraard worden de betere functies, zoals Thorbecke die dacht, zelden meer bereikt.

Voor de laatste groep (handel en administratie) is de B.M. waarde-

loos. Ze zou aan A.M. oneindig veel meer hebben, vooral nu de economie tot econometrie wordt.

Nu de groep technici.

Uit persoonlijke ervaring en door de ervaring van vele anderen weet ik, dat B.M. voor het doel, waarvoor ze op het program staat, niets bijdraagt. Technische tekeningen lezen of maken is een materie, die met B.M. hoegenaamd niets te maken heeft. Men mag dankbaar zijn, als een practisch georiënteerde tekenleraar de voor tekenen uitgetrokken tijd niet verprutst heeft.

De a.s. technici zullen meer hebben aan:

a. meetkundige behandeling der kegelsneden, die wel op het programma staan, maar waarvoor geen tijd is te vinden;

b. bolmeetkunde, waar onze a.s. helden ter zee en in de lucht toch wel iets aan zullen hebben; zelf heb ik daar enige malen beslist profijt van gehad, op zuiver technisch terrein, maar dat is betrekkelijk toeval; in ieder geval wordt dit onderdeel m.i. nu te veel verwaarloosd.

c. analytische meetkunde, minstens zoveel als op het Gymnasium β wordt behandeld.

En wat deze a.s. niet-universitair studeren en werkenden nuttig is, is gelukkig voor degenen die wèl naar hogeschool of universiteit gaan, óók van belang, en van meer belang dan de B.M.

Een belangrijk bezwaar tegen de B.M. vind ik, dat het vak wel het snelst van alle vakken wordt vergeten, zonder enig spoor achter te laten. Dit is een persoonlijke ervaring uit de jaren voor ik wiskunde studeerde; ik heb deze kunnen toetsen aan die van vele anderen. Voort te gaan een vak te onderwijzen, dat technisch géén belang heeft, veel tijd (vooral privé-tijd der leerlingen) vraagt, geen wetenschap is en niet wetenschappelijk vormt, lijkt ongewenst.

Men zie verder drs H. Pleysier, Euclides XXVII, blz. 157. Tot zover drs Korff.

Antwoord van dr Wansink.

De heer Korff richt zijn bezwaren grotendeels aan het verkeerde adres. Hij verwaarloost het feit, dat er thans, meer dan 80 jaar na Thorbecke, een literair-economische H.B.S.-A bestaat naast een natuurwetenschappelijke H.B.S.-B. En het is onbillijk van de H.B.S. B te eisen, dat het schoolprogram in belangrijke mate rekening houdt met de leerlingen, die eigenlijk op de H.B.S.-A thuis horen.

Het A-type heeft inderdaad aan B.M. geen behoefte. De B.M. is voor hen waardeloos, in zover de stereometrie voor hen waardeloos

is. De betekenis van algebra en analyse domineert; de beginselen van de infinitesimaalrekening zouden, in nog sterkere mate dan die der A.M., in verband met econometrie enz. voor dit type op hun plaats zijn.

Wat de a.s. technici betreft, moge ik opmerken, dat niet het maken van technische tekeningen doel van het B.M.-onderwijs is. Zie voor doel en zin van dit onderwijs i.h.b. het slot van § 12.

De uitlating t.a.v. de tekenleraren lijkt me niet op zijn plaats. Het lijntekenenonderwijs op de H.B.S. staat niet in dienst van het wiskunde-onderwijs.

Inderdaad staan de kegelsneden sinds 1937 op het B-program. Deels echter als figurant, doordat het eindexamenprogramma nog steeds niet is aangepast. Men zal dienen af te wachten, in hoeverre kegelsneden en bolmeetkunde op de programma's te handhaven zijn. Op de lijst van wensen van de heer Korff zou overigens, in verband met de eisen van de praktijk, de statistiek niet misplaatst zijn.

Voor het verwijt, dat de B.M. geen wetenschap is en niet wetenschappelijk vormt, zie § 12.

De bezwaren inzake de vele tijd, die door de B.M. zou worden geëist, deel ik niet; men kan, indien de theorie goed begrepen is, met een betrekkelijk gering oefenmateriaal volstaan, geringer dan vele leerboeken ons zouden doen denken. Ik acht een verdeling van de beschikbare tijd in klasse 4 en 5 in verhouding van 3 : 2 : 2 over bewijsvoering, berekening en constructies in het meetkunde-onderwijs alleszins verantwoord.

II. Inleiding Prof. dr P. DWINGER.

In de discussie over de vraag welke van de beide vakken op het leerplan geplaatst moet worden, dient men zich m.i. niet te beperken tot het verdedigen van het vak, waarvoor men het meeste voelt, maar is het zaak de belangen van beide vakken tegen elkaar af te wegen.

Het is om deze reden, dat ik wil aanvangen met enige beschouwingen over de B.M.

Bij een bespreking van de B.M. komt onvermijdelijk de vraag naar voren, welke de betekenis is van het constructieve element in ons meetkundeonderwijs, en ook, wat men hieronder precies heeft te verstaan. Construeren heeft in de schoolmeetkunde een tweeledige betekenis. Enerzijds duidt het een wiskundige redenering aan, waarbij de leerling langs de weg der grondconstructies komt tot de te

construeren figuur, anderzijds wordt met construeren ook bedoeld het uitvoeren met Euclidisch constructiemateriaal, al of niet in projectie, van het door redenering verkregene. Het komt mij voor, dat het accent in de planimetrie anders ligt dan in de stereometrie. In de planimetrie wordt sterk de nadruk gelegd op de praktische uitvoering der constructies. Deze is hier een integrerend bestanddeel van het elementaire meetkundeonderwijs en is om didactische redenen van het allergrootste belang. De abstracte redenering is ook hier wel van betekenis, maar blijft, vooral in de aanvang, op de achtergrond. In de stereometrie echter, kan door de wiskundige scholing en het grotere abstraherend vermogen van de leerling, de exacte redenering, die terugvoert tot de grondconstructies, in veel sterkere mate tot zijn recht komen en dient ook op de eerste plaats te staan. De daadwerkelijke uitvoering van de constructies zoals deze in projectie in de stereometrie, maar vooral in de B.M. plaats vindt, wil ik hier echter aan een nadere beschouwing onderwerpen. Deze praktische vorm van construeren dient zeker niet verwaarloosd te worden, maar de mate waarin — en de wijze waarop zulks geschiedt dient volledig dienstbaar gemaakt te worden aan het eigenlijke stereometrieonderwijs. Een constructie in projectie uitgevoerd, heeft allèen voldoende waarde, indien daarbij de bedoeling voorop staat, de leerling hierdoor te dwingen zich opnieuw nauwkeurig rekenschap te geven van de verschillende stappen, waaruit een constructie bestaat. Het aanschouwelijke element dient hierbij ook zo veel mogelijk op de voorgrond te staan, hetgeen niet altijd bij de methode van de orthogonale projectie het geval is. Als een voorbeeld ter illustratie van het bovenstaande, diene de opgave, door een gegeven punt de transversaal van twee kruisende rechten te construeren. Men late deze constructie uitvoeren in een kubus en neme als rechte telkens één v. d. ribben, zijvlakdiagonalen of lichaamsdiagonalen. Het punt kan op een andere rechte genomen worden. De leerling ziet dan bij de uitvoering van deze constructie de verschillende fasen duidelijk voor zich, terwijl hij zich daarbij van elk element van de constructie nauwkeurig rekenschap moet geven. Staat de gezochte lijn er eenmaal, dan is het resultaat bovendien zeer aanschouwelijk. Moet deze constructie in de B.M. uitgevoerd worden, dan wordt al een behoorlijke techniek vereist, terwijl vaak de aanschouwing in gedrang komt, doordat de lijnen vaak „makkelijk” gekozen worden t.o.v. de projectievlakken (b.v. één loodrecht op het H-vlak). De transversaal te construeren van twee kruisende rechten, die evenwijdig is met een lijn, in een kubus uitgevoerd, is ook een dankbare opgave.

Deze twee voorbeelden zijn met vele aan te vullen en iedere wiskundeleraar welbekend. Ten overvloede kan hier nog verwezen worden naar de bekende verzameling van Van der Paardt en Abram die sterk in deze richting gaat. Het is mijn ervaring, dat het mogelijk is met deze eenvoudige hulpmiddelen binnen het kader van het huidige stereometrieonderwijs, het constructieve element geheel tot zijn recht te laten komen, terwijl alles, wat de leerling op dit gebied verricht, ten dienste komt van zijn meetkundig inzicht.

Het spreekt vanzelf, dat de B.M., zoals deze nu gegeven wordt, zijn waarde heeft. Elk vak heeft dit trouwens, maar de energie, tijd en moeite, die door de leerlingen in de 4e en 5e klasse aan de B.M. gegeven wordt, wegen beslist niet op tegen de resultaten. Natuurlijk schuilt er ook een belangrijke waarde in het afleveren van een behoorlijke, nauwkeurig uitgevoerde figuur, maar ook hier dient men zich voor overdrijving te hoeden en te bedenken, dat ook de andere vakken een taak hebben, wanneer het gaat om nauwkeurigheid, netheid en preciesheid. Er wordt ook veel geschermd met het argument, dat de B.M. het ruimtelijk voorstellingsvermogen ontwikkelt, maar het is te betwijfelen of men ook in dit opzicht de B.M. niet te grote waarde toekent. Enerzijds rijst de vraag of het ruimtelijk voorstellingsvermogen zich laat ontwikkelen door beoefening van de B.M., anderzijds kan men vragen of inderdaad dit vermogen wel zoveel met wiskundige dispositie te maken heeft als sommigen wel beweren. Maar ook al erkent men, dat in dit opzicht B.M. een functie heeft, dan dient men toch in het oog te houden, dat vooral in de stereometrie de figuur een dienende functie heeft. Hoofdzaak blijft toch steeds de redenering, waaraan in de hogere klassen zeer behoorlijke eisen gesteld kunnen worden. De eenvoudige volgens bepaalde regels geconstrueerde figuur in de stereometrie, komt aan het verlangen naar illustratie van de abstracte redenering voldoende tegemoet. Een figuur kan een machtig hulpmiddel zijn in de meetkunde, maar er zijn vele gevallen aan te wijzen in de stereometrie, waar het niet gebruik maken van een figuur de leerling tot een grotere geestelijke inspanning brengt, die op zich zelf weer van grote waarde is. Constructies en tekeningen in de stereometrie dienen steeds gebruikt te worden, als zij nodig zijn en harmonisch passen in het aan de orde zijnde onderwerp, maar dienen niet onafhankelijk daarvan geoefend te worden.

Tenslotte zou ik nog bij de beantwoording van de vraag — wel of niet B.M. op de H.B.S.? — naar voren willen brengen, dat de eisen die het technisch onderwijs voor vele studierichtingen stelt t.a.v. de B.M., — toch wel afgenomen zijn in vergelijking met de

tijd toen de B.M. op het leerplan van de H.B.S. geplaatst werd. Geenszins zou ik hiermee willen zeggen, dat de eisen van de practijk alléén, de keuze van een bepaald vak op de M.S. zouden moeten bepalen, maar men kan er ook niet geheel aan voorbij gaan.

Nu iets over de Analytische meetkunde.

Op de H.B.S.-B. besteden wij behalve aan de meetkunde, veel tijd aan de algebra. Het is reeds meerdere malen betoogd, dat wij daarbij veel dingen doen, waarvan het nut (t.o.v. de wiskunde zelf) sterk in twijfel getrokken kan worden. Tenuwernood wordt echter aandacht besteed aan de mogelijkheden, die de algebra biedt bij de opbouw en de ontwikkeling van de meetkunde. Ik acht het van zeer groot belang, de leerlingen te tonen, wat men met een bepaald onderdeel van de wiskunde bereiken kan op andere gebieden van deze wetenschap. De schoolwiskunde biedt in dit opzicht — althans in zijn huidige vorm — veelal te weinig gelegenheid. De leerling stelt zich de wiskunde, helaas, maar al te vaak voor verdeeld in hokjes gescheiden door ondoorlaatbare wanden. Deze muren dienen wij echter bij ons onderwijs zoveel mogelijk te doorbreken en de Analytische meetkunde biedt ons hierbij een prachtig hulpmiddel. Het eenvoudige beginsel van de mogelijkheid van de representatie van een punt van het euclidisch vlak door een geordend paar reële getallen biedt ruime perspectieven in ons wiskundeonderwijs op school. De leerlingen krijgen te zien, dat de behandelde algebra voor een groot gedeelte gebruikt kan worden om meetkundige problemen te „vertalen” in volkomen gelijkwaardige algebraïsche vraagstukken, terwijl hetzelfde geldt voor het oplossen ervan. Niet alleen, dat er op deze simpele wijze een brug geslagen wordt tussen algebra en meetkunde, van minstens evengroot belang is het feit, dat de leerling bewust of onbewust een ander model van de euclidische meetkunde leert kennen dan het traditionele. Begrippen als punt, rechte lijn, cirkel, snijden enz. kunnen op een andere wijze geformuleerd worden in een algebraïsche taal. Dit voor wiskundigen zo volkomen vanzelfsprekende feit, blijft tot nu toe door het ontbreken van de Analytische meetkunde practisch geheel onbekend aan de leerling. Het is mijn vaste overtuiging dat aan deze mogelijkheid een ruime plaats in ons moderne wiskundeonderwijs dient te worden ingeruimd. Natuurlijk komt men er ook niet met een eenzijdige behandeling van de Analytische meetkunde, maar er liggen hier voldoende didactische mogelijkheden. Het argument, dat dit element bij de behandeling van de grafische voorstellingen voldoende tot zijn recht zou komen, gaat niet op. Deze zijn uitgegroeid tot allerlei onnutte zaken en veel ervan zou gelukkig kunnen vervallen bij invoering van de Analytische Meetkunde.

Niemand zal trouwens willen beweren, dat de grafische voorstellingen veel met Analytische Meetkunde te maken hebben. We springen rustig over van de rechte lijn op de parabool, en dan nog in een zeer speciale stand t.o.v. het assenkruis. Het zelfde geldt voor de ten tonele gevoerde hyperbool en de derdegraadskromme! Zij hebben in de grafische voorstelling een geheel andere functie dan in de Analytische Meetkunde. Op de betekenis van de grafische voorstellingen als hulpmiddel bij het algebraonderwijs hoef ik hier dan ook niet in te gaan. Dit is reeds vele malen op zeer deskundige wijze geschied. Terugkerende tot de Analytische Meetkunde meen ik te mogen constateren, dat met de invoering ervan een eenheid kan ontstaan tussen meetkunde en algebraonderwijs, waarvan de waarde niet hoog genoeg aangeslagen kan worden, terwijl een dergelijke gang van zaken toch ook meer in overeenstemming is met de ontwikkeling van de wiskunde in de laatste eeuwen. Het is mijn mening dat de schoolwiskunde bij deze ontwikkeling méér achter is gebleven dan didactisch noodzakelijk is. Invoering van de Analytische Meetkunde behoeft ook niet te betekenen, dat de meetkunde gearithmetiseerd wordt. Dit gevaar kan bestaan als men op de H.B.S. de Analytische Meetkunde als een hoofdstuk van de algebra zou gaan beschouwen. Analytische Meetkunde dient op de H.B.S. steeds te zijn — in de eerste plaats — een volkomen gelijkwaardige methode om meetkundige problemen te formuleren en op te lossen. Meetkunde en algebra zijn hier beide bij gebaat. Het zou intussen interessant zijn eens een wetenschappelijk-didactisch onderzoek in te stellen — indien dit niet reeds is geschied —, naar de nieuwe „denkmethodes” die hun intreden zullen doen in de geestelijke activiteit van de leerling als hij de wiskunde beoefent, wanneer de Analytische Meetkunde zijn plaats zou krijgen. De oplossing van een vraagstuk uit de Analytische Meetkunde, hoe eenvoudig het ook moge zijn, stelt nu eenmaal andere eisen en verlangt nieuwe wegen. Deze eisen hoeven niet het vermogen van de leerling te boven te gaan en het vinden van nieuwe wegen kan alleen maar verfrissend en stimulerend werken.

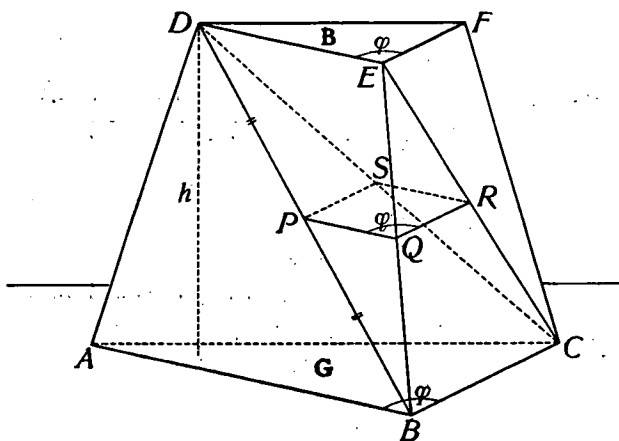
Het is onlogisch, dat wel het infinitesimale element zijn intrede — terecht — heeft gedaan in het wiskundeonderwijs op de H.B.S.-B., maar dat geen aandacht geschonken wordt aan de mogelijkheden, die de algebra biedt bij de beoefening van de meetkunde.

De argumenten hierboven opgesomd vòòr Analytische Meetkunde — en die wellicht nog met vele andere aan te vullen zijn — wegen dermate zwaar, dat zij de invoering van dit vak op de H.B.S.-B volkomen rechtvaardigen en wenselijk maken. Argumenten die opwegen, en daar gaat het toch om, tegen diè vóór het handhaven van de B.M.

KORREL CVIII

De inhoud van de afgeknotte driezijdige pyramide.

Bij de volgende afleiding van de formule voor de inhoud van de afgeknotte driezijdige pyramide krijgt men $\frac{1}{3}\sqrt{GB}$ als vlak te zien.



$$\text{Inh. } \frac{\text{DEF}}{\text{ABC}} = \text{inh. } \frac{\text{D}}{\text{ABC}} + \text{inh. } \frac{\text{D}}{\text{BCE}} + \text{inh. } \frac{\text{C}}{\text{DEF}}, = \frac{1}{2}\hbar\mathbf{G} + \text{inh. DBCE} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{B}.$$

Vatten we nu DBCE op als een prismoïde met bovenvlak DE en grondvlak BC, dan is de hoogte van die prismoïde gelijk aan die van de afgeknotte pyramide, terwijl het middenvlak

$$\text{PQRS} = \frac{1}{2}\sqrt{\text{GB}}$$

Immers.

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} \mathbf{AB} \cdot \mathbf{BC} \sin \varphi \text{ en } \mathbf{B} = \frac{1}{2} \mathbf{DE} \cdot \mathbf{EF} \sin \varphi,$$

zodat, als $AB = f \cdot DE$ en dus $BC = f \cdot EF$,

$$\mathbf{GB} = \frac{1}{4} f^2 \cdot \mathbf{DE}^2 \cdot \mathbf{EF}^2 \sin^2 \varphi, \text{ dus}$$

$$\sqrt{\mathbf{GB}} = \frac{1}{\sin \varphi} \cdot \mathbf{DE} \cdot \mathbf{EF} \sin \varphi,$$

terwijl

$$\begin{aligned}\text{opp. PQRS} &= PQ \cdot QR \sin \varphi \\ &= \frac{1}{2}DE \cdot \frac{1}{2}BC \sin \varphi \\ &= \frac{1}{4}f \cdot DE \cdot EF \sin \varphi.\end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$\text{inh. DBCE} = \frac{1}{6}h \cdot (o + o + 2\sqrt{GB}) = \frac{1}{3}h\sqrt{GB},$$

$$\text{zodat inh. } \frac{DEF}{ABC} = \frac{1}{3}h(G + \sqrt{GB} + B).$$

J. W. DEKKER.

STAATSEXAMEN GYMNASIUM, BEDOELD IN ARTIKEL 12 VAN DE HOGER-ONDERWIJSWET

De Staatssecretaris van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, brengt ter kennis van belanghebbenden, dat, behoudens onvoorziene omstandigheden, het mondeling gedeelte van het Staatsexamen gymnasium, bedoeld in artikel 12 van de hoger-onderwijswet, zal worden gehouden van 9 Juli tot ongeveer 20 Augustus aanstaande in het gebouw van de Rijks hogere burgerschool te Amersfoort, Thorbeckeplein 1.

ENKELE OPMERKINGEN

naar aanleiding van het artikel van Dr. Vredenduin in
Euclides, jaargang 27, bladz. 227 e.v.

Op bladz. 229 staan vermoedelijk twee drukfouten. Op regel 10 en 5 v.o. moet namelijk staan (2) en (3) inplaats van (1) en (3).

Voorbeeld 1, bladz. 230.

Men kan xy uit (1) oplossen en substitueren in (2), maar ook uit (2) oplossen en substitueren in (1). In het eerste geval is (1; 2) gelijkwaardig met (1; 3), in het tweede geval met (2; 3). Voor de verdere oplossing maakt het geen verschil, welke methode men toepast.

Nu zijn de grafieken van (1) en (2) hyperbolen, die de y -as tot gemeenschappelijke asymptoot hebben. Het oneindig verre punt van de y -as is dus tevens een der beide oneindig verre punten van ieder der beide hyperbolen.

De waarde $x = -1$ uit (3) geeft als gemeenschappelijk punt het punt $P(-1, 2)$. De waarde $x = 0$ geeft bij substitutie in (1) en in (2) de vergelijking $0 \cdot y = -1$. Aan deze vergelijking kan alleen voldaan worden door de waarde $y = \infty$, hetgeen weer in overeenstemming is met de grafieken van beide hyperbolen.

Wil men de vergelijking $0 \cdot y = -1$ vals beschouwen, d.w.z. heeft deze geen wortels, dan moet men het oneindig verre punt van de y -as ook uitschakelen. Dan hebben de beide hyperbolen slechts één snijpunt en de beide gegeven vergelijkingen slechts één oplossing.

De oplossingsmethode volgens de schooldefinitie is m.i. dus niet fout. Het twijfelachtige is een gevolg van de gekozen vergelijkingen. Was als 2e vergelijking genomen $xy = x - 2$, dan was alles normaal verlopen.

Voorbeeld 2, bladz. 230.

Een logische opbouw van de opvolgende stelsels, die gelijkwaardig zijn met de daaraan voorafgaande stelsels kan niet tot verkeerde resultaten leiden. Gegeven is het stelsel

$$\text{I} \begin{cases} y^2 = x & (1) \\ y^2 - 3y + 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

De vergelijking (2) wordt nu herleid met behulp van (1). Uit (2) volgt dan $x - 3y + 2x = 0$, waaruit volgt $x = y$ (3).

Het stelsel I gaat nu over in

$$\text{II} \begin{cases} y^2 = x & (1) \\ x = y & (3) \end{cases}$$

I en II zijn gelijkwaardig. Stelsel II geeft alleen de oplossingen $x = y = 0$ en $x = y = 1$.

Dit komt weer overeen met de beide snijpunten van de door I voorgestelde parabolen, die elkaar in de punten $O(0, 0)$ en $P(1, 1)$ snijden.

Combineert de leerling (3) met (2), dan geeft hij blijk de stof niet te beheersen. Er is dus geen kwestie van p  ch, maar van onkunde.

G. E. KIERS.

INTERNATIONAL CONGRESS OF MATHEMATICIANS 1954

FIRST COMMUNICATION

In the final plenary session of the International Congress of Mathematicians, 1950, held in Cambridge (Mass.) the Congress accepted the invitation of the delegation from the Netherlands to hold the next Congress in the Netherlands.

The International Congress of Mathematicians 1954 will be held in Amsterdam from September 2nd to September 9th under the auspices of „Het Wiskundig Genootschap" (The Mathematical Society of the Netherlands). It is sincere hope of the „Wiskundig Genootschap" that the Congress 1954, which will be open to all mathematicians from all parts of the world, will be a fertile international gathering.

The Organizing Committee has invited a number of outstanding mathematicians to deliver one-hour addresses, hoping that in this way a survey of the recent development in the whole field of mathematics may be furnished.

There will be seven sections, viz:

- 1 Algebra and Theory of Numbers.
- 2 Analysis.
- 3 Geometry and Topology.
- 4 Probability and Statistics.
- 5 Mathematical Physics and Applied Mathematics.
- 6 Logic and Foundations.
- 7 Philosophy, History and Education.

In each of these sections half-hour addresses will be delivered by experts on invitation of the Organizing Committee. Moreover short lectures Organizing Committee. The time allotted for each short lecture will be 15 minutes. It will depend on the number of these short lectures whether and how the sections will be divided into subsections.

The Organizing Committee is planning several entertainments and also a number of interesting excursions.

There will be two categories of membership in the Congress:

regular members (members) who will be entitled to participate in the scientific and social activities of the Congress and to receive the Proceedings of the Congress, and

associate members who, accompanying regular members of the Congress, do not participate in the scientific programme nor receive the Proceedings, but will be entitled to many of the privileges of membership.

The fees to be paid by members and by associate members have not yet been definitely fixed but presumably they will not exceed the amount of fifty guilders (about \$ 14.—) for members and twenty guilders (\$ 5.50) for associate members.

Those who wish to attend the Congress are requested to communicate their name (with degrees, qualifications etc.) and full address to the secretariat as soon as possible. They will receive a more detailed communication which will be sent out in the course of 1953.

Amsterdam, February 1953
2d Boerhaavestraat 49

The Organizing Committee.

Zo juist verschenen als no. 2 in de serie „Publicaties uit de Werkgroepen Wiskunde en Natuurkunde van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs”

NIEUWE WEGEN

bij het onderwijs in de wiskunde
en de natuurwetenschappen

bevattende:

Meetkunde en Ervaring door Mevrouw T. Ehrenfest—Afanassjewa, Het sterrekunde-onderwijs op de Middelbare School door Prof. Dr M. Minnaert, General Science in Nederland? door Dr J. Koning, Het vraagstuk van het Mechanica-onderwijs door Prof. Dr H. Freudenthal.

Prijs f 2,—. Voor leden van de W.V.O. en aangesloten werkgroepen f 1,60

J. MUUSSES — UITGEVER — PURMEREND

Levering ook via de boekhandel.

NOORDHOFF'S WISKUNDIGE TAFELS in 5 decimalen

5e vermeederde druk van de grote tafel H.

I. Gewone log. II. Log. van de gon. verh.
III. Omzettingen.

IVa. Gon. verh.; hoeken in gr. en min., ook
in radialen.

IVb. $\cotg a$ voor $a < 3^\circ$ voor elke sec.
 $\tg \beta$ voor $90^\circ > \beta > 87^\circ$

IVc. $\cotg \gamma$ voor $3^\circ < \gamma < 10^\circ$ om de 10 sec.
 $\tg \delta$ voor $87^\circ > \delta > 80^\circ$.

V. Bijtafels.

a. Nat. log. b. Omzetting van nat. log.
in gewone. c. Exp. en hyp. functies. d. On-
deeltbare getallen. e. Machten, wortels en
omgekeerden. f, g, h, i. Hogere functies.

Deze tafel heeft het voordeel, dat men in
IVb en IVc alle gon. verhoudingen direct
kan opzoeken.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN - DJAKARTA

Ook verkrijgbaar bij de boekhandel