

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr JOH. H. WANSINK VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM

DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, HASSELT

PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT

DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT

DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

28e JAARGANG 1952/53

III/IV

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep **Liwenagel** te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van **Wimecos** storten hun contribuite, die met ingang van 1 September 1953 gewijzigd is in f 6,— per jaar, op postrekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam (hierin zijn de abonnementskosten op **Euclides** begrepen). De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens alle correspondentie gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Chr. H.B.S., Jachtdaan 108, Apeldoorn, tel. K6760—2581 (alleen tussen 8.— en 4.15 uur). Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

I N H O U D.

	Blz.
Dr JOH. H. WANSINK, Prof. Dr E. J. DIJKSTERHUIS	97
Officiëel:	
Liwenagel	
Verslag van de vergadering op Zaterdag 15 November 1952 . . .	100
Vacantie cursus Sterrenkunde	102
Prof. Dr E. J. DIJKSTERHUIS, De wiskunde op het α gymnasium . .	103
Wimecos	
Kort verslag van de algemene vergadering op Maandag 5 Jan. 1953 .	115
G. A. JANSSEN, Over onze tijd met een heenwijzing naar onze taak, Openingsrede door de voorzitter	116
Adressen inzake Mechanicaonderwijs en examenopgaven 1952 . . .	123
Prof. Dr J. HAANTJES, Enige kinematische bewijzen in de meetkunde .	131
Dr A. F. MONNA, Beschouwingen over de reële getallen	142
Dr W. J. BOS, Het formuleren van vraagstukken en stellingen in de planimetrie (met naschrift)	156
J. MUILWIJK, Ontsnappingsnelheid	166
P. WIJDENES, Doe het eenvoudig	174
P. WIJDENES, Algebra op de lagere school (met naschrift)	188

Prof. dr E. J. DIJKSTERHUIS.

De bladen melden:

„Tot buitengewoon hoogleraar in de faculteiten der wis- en natuurkunde en der letteren en wijsbegeerte aan de rijksuniversiteit te Utrecht is benoemd om onderwijs te geven in de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen, dr E. J. Dijksterhuis, thans leraar aan de R.H.B.S. te Tilburg. Hem is tevens opgedragen in de faculteit der wis- en natuurkunde aan de rijksuniversiteit te Leiden onderwijs te geven in de geschiedenis van de wiskunde en de natuurwetenschappen”.

Met deze benoeming kunnen we niet alleen dr Dijksterhuis, maar allen, wie het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappen op onze scholen voor V.H.M.O. ter harte gaat, gelukwensen.

Eindelijk wordt dan de gelegenheid geschapen, dat het geschiedkundig element in de leraarsopleiding tot zijn recht zal kunnen komen, en dat er door dr Dijksterhuis een schare van leerlingen zal worden opgeleid, die geïnspireerd door zijn sprankelende gaven, zijn diepgaande kennis, zijn grote eruditie eenmaal in staat zal blijken het door hem ondernomen werk voort te zetten. Dat niet eerder dan thans — in 1953 — van Dijksterhuis' buitengewone kennis binnen het universitaire onderwijs op efficiënte wijze partij zal kunnen worden getrokken, is misschien voor een deel toe te schrijven aan het feit, dat zijn gaven op twee zo onderscheiden gebieden liggen. Zowel door zijn kennis van de wiskunde en de natuurkunde in haar historische ontwikkeling, als door zijn nauw ermee samenhangende kennis van klassieke en moderne talen is dr Dijksterhuis een figuur van buitengewoon formaat, van betekenis tot verre buiten de grenzen van ons vaderland. Voor een ander deel is het feit, dat we in een impasse waren geraakt, waarschijnlijk te wijten aan de omstandigheid dat er voor een synthetische geest als die van dr Dijksterhuis gedurende lange jaren geen voldoende waardering kon worden opgebracht in de kring van de beoefenaren van de wis- en natuurkunde.

Maar geleidelijk aan kenterde het getij en door de loffelijke samenwerking van de faculteiten van de wis- en natuurkunde en van de letteren en wijsbegeerte is nu de gelegenheid open om volop van de verdiensten van dr Dijksterhuis te profiteren ten bate van de beoefenaars van de cultuurgeschiedenis en van de a.s. leraren in de wis- en natuurkunde.

Het is hier niet de plaats om over leven en werken van dr Dijksterhuis volledig in te lichten. We bepalen ons tot enkele summieere gegevens.

Dr Eduard Jan Dijksterhuis werd in 1892 te Tilburg geboren. Na voltooiing van zijn studies aan de Rijksuniversiteit te Groningen promoveerde hij aldaar in 1918 op proefschrift „Bijdrage tot de kennis van het platte schroevenvlak”. In 1925 maakte hij deel uit van de Commissie „Beth-Dijksterhuis”, welke commissie in opdracht van het College van Inspecteurs bij het Middelbaar onderwijs een onderzoek moest instellen en voorstellen diende te doen, die dat onderwijs ten goede zouden kunnen komen. Wie niet op de hoogte is van het vele werk, dat dr Beth en dr Dijksterhuis in de jaren na 1925 hebben verzet, is niet in staat een gefundeerd oordeel uit te spreken over de strijd die in deze jaren tot verbetering van het wiskunde-onderwijs op de H.B.S. is gestreden. Eerst in 1937 is bij de programma-herziening een deel van de wensen van de bedoelde commissie verwezenlijkt.

Van 1930—1934 was dr Dijksterhuis privaat-docent aan de Amsterdamse Gemeentelijke Universiteit, waar hij zijn colleges opende met een Openbare Les over „het Getal in de Griekse Wiskunde”; van 1932—1936 was hij privaat-docent aan de Leidse Univesiteit. De veelzijdigheid van dr Dijksterhuis moge mede spreken uit het feit, dat hij, de leraar in wis- en natuurkunde aan de Tilburgse H.B.S., secretaris werd van het tijdschrift „de Gids”.

We noemen hier slechts enkele aspecten van het vele werk, dat door dr Dijksterhuis in woord en geschrift is verzet.

Het getal bijdragen in dit tijdschrift verschenen, deels van historische, deels van didactische aard, overschrijdt de veertig. Talrijk zijn zijn gedegen, critische recensies, o.a. verschenen in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs, in Euclides en in de Gids. Anderen hielp hij met zijn historische kennis (Wijdenes in diens „Getallenleer”, dr Van de Wielen bij diens proefschrift over „de Ideegetallen van Plato”). Door zijn boekje „Vreemde woorden in de Wiskunde” heeft hij vele docenten een dienst gedaan. Van zijn talrijke voordrachten op vergaderingen, conferenties en congressen zijn er gelukkig vele in druk verschenen.

Van zijn grote werken noemen we: Val en Worp (1924), de Elementen van Euclides (1929/1930), Archimedes (1938), Simon Stevin (1943) en de Mechanisering van het Wereldbeeld (1951).

Een officiële erkenning van zijn verdiensten had in 1952 plaats, toen hem de P. C. Hooft-prijs voor Letterkunde werd toegekend. De jury heeft in haar oordeel over het bekroonde werk te kennen gegeven, dat in dit werk de brede, de eeuwen overspannende blik, en de veelzijdige en grondige geleerdheid geëvenaard worden door een nimmer falende vormbeheersing. Ze kwalificeerde het boek als een werk, dat als harmonische synthese van intellectuele prestatie en synthetische vormgeving uitblinkt.

Al wie ooit in de gelegenheid is geweest een voordracht van dr Dijksterhuis bij te wonen, zal onder de bekoring zijn geraakt van de kwaliteiten, waarvan de jury gewaagde. Gelegenheid om sprekers te horen van het formaat van dr Dijksterhuis zijn zeldzaam. Elk betoog van hem is rijk van inhoud, architectonisch van structuur, wordt uitgesproken in een ongeëvenaard mooi Nederlands, boeit van het eerste woord tot het laatste. De spreker schijnt onvermoeibaar, en geeft al zijn voordrachten zonder de steun van enig geschreven woord.

We hopen en verwachten, dat niet enkel jeugdige studenten tot het toekomstig gehoor van prof. Dijksterhuis zullen behoren, maar dat ook tal van oudere docenten de reis naar Utrecht of Leiden er gaarne voor over zullen hebben om van de nu geschapen gelegenheid tot regelmatige voorlichting te profiteren.

Arnhem, 3 Maart 1953. Namens het Bestuur van Wimecos,
JOH. H. WANSINK

L.i.w.e.n.a.g.e.l.

Op de vergadering van 15 Nov. 1952 te Utrecht, is het bestuur van L.i.w.e.n.a.g.e.l als volgt samengesteld:

J. Willemse, Voorzitter, Vlaardingen.

Dr R. L. Krans, Vice-voorzitter, Arnhem.

Mej. Dr A. T. M. Kramer, Secretaresse, Kruisbessenstraat 12,
's-Gravenhage.

D Leujes, 2e Secretaris, Frans Halsplein 21b, Schiedam.

Dr P. G. J. Vredenduin, Penningmeester, Bakenbergseweg 158,
Arnhem. Giro No. 87185.

Dr J. C. v. d. Steen, Utrecht.

Prof. Dr G. Wielenga, Amsterdam.

Kruisbessenstraat 12.
's-Gravenhage

A. T. M. KRAMER
secretaresse.

NOTULEN VAN DE VERGADERING VAN DE GROEP L.I.W.E.N.A.G.E.L. IN HET ZOÖLOGISCH LABORATORIUM TE UTRECHT OP ZATERDAG 15 NOVEMBER 1952

De voorzitter opent de vergadering om precies 4 uur en spreekt allereerst een hartelijk woord van welkom tot de eerste spreker, Dr E. J. Dijksterhuis en tot de vertegenwoordigers van de bevriende verenigingen, Dr Wansink (Wimecos), Dr De Geer (Velines), Dr v. d. Steen (Velebi), Mevr. Smit-Miessen (W.V.O.), Dr v. d. Veer (Classici) en later nog de Inspecteur der Gymnasia, Dr Van Buytenen.

Dr Schrek krijgt daarna het woord om enkele mededelingen te doen betreffende het internationaal contact. Hij geeft enige adressen in Frankrijk en Zweden, waar men inlichtingen kan krijgen op onderwijskundig gebied en ook meer speciaal op het gebied van het wiskunde-onderwijs.

Nadat de notulen van de vorige vergadering zijn goedgekeurd, deelt de voorzitter mee, dat er een bestuurswijziging zal moeten plaats hebben.

Dr H. Ph. Baudet, die vele jaren een zeer actief lid van het bestuur is geweest, ziet zich genoodzaakt zijn bestuursfunctie neer te leggen. De voorzitter stelt voor om in plaats van Dr Baudet te benoemen: Dr P. G. J. Vredenduin uit Arnhem, dit voorstel wordt met algemene stemmen aangenomen.

Nadat Dr Baudet met enige hartelijke woorden dank gezegd is voor het vele dat hij voor de Groep L.i.w.e.n.a.g.e.l. heeft gedaan, voor de voortreffelijke wijze, waarop hij in de afgelopen jaren de finantiën heeft beheerd en vooral voor de vriendschap, die zijn medebestuurleden van hem mochten ontvangen, wordt Dr Vredenduin geïnstalleerd.

Op verzoek van de Secretaresse wordt een 2e secretaris aan het bestuur toegevoegd.

Hiervoor stelt de Voorzitter voor de heer Leujes uit Schiedam en ook dit voorstel wordt met algemene stemmen aangenomen.

Hiermee is dus de nieuwe samenstelling van het bestuur vastgelegd.

Nu krijgt Dr Dijksterhuis het woord tot het houden van zijn lezing over de *Wiskunde op het α -Gymnasium*. De volledige tekst van deze lezing zal in het Weekblad en in Euclides worden gepubliceerd.

Van de gelegenheid om vragen te stellen, wordt door verschillende aanwezigen gebruik gemaakt. Bij deze nabespreking blijkt, dat enkelen al eens in de door Dr Dijksterhuis aangeduide richting hebben geëxperimenteerd en dat de belangstelling van de leerlingen voor deze dingen groot is. De vrees, dat de nadruk teveel op de antieke cultuur zou komen en dat daarvan te weinig waardering voor de moderne wetenschap het gevolg zou kunnen zijn, werd door de spreker niet gedeeld; juist het vergelijken van beide kan tot beter inzicht van nieuwere methoden leiden.

Hierna wordt gepauzeerd voor het houden van een maaltijd.

Bij het begin van het 2e gedeelte van de vergadering is het de voorzitter een genoegen Dr Paul Julien welkom te mogen heten.

Dr Julien krijgt nu het woord. Hij houdt een voordracht over enkele steppenvolken van Oost-Afrika, n.l. de Kindiga een clicksprekende stam van Tanganyika en de Masai.

Aan de hand van vele lichtbeelden en een door hem zelf genomen film, vertelt hij op boeiende wijze vele bijzonderheden over deze voor ons onbekende volksstammen.

De Kindiga zijn een zwervende jagerstam uit de omgeving van het Yaida-moeras, hun levenswijze komt volkomen overeen met die van de Bosjesmannen van Zuid-West Afrika. De Kindiga en de Sandawe vormden het hoofddoel van het bloedonderzoek, dat Dr Paul Julien in 1947—'48 in Afrika uitvoerde.

De Masai vormen een grote stam van typische veenomaden, wier cultuur ook zeer archaisch is en nog zeer weinig beïnvloed door de moderne tijd. Dr Julien besprak uitvoering de voornaamste aspecten van hun cultuur, hun merkwaardige religie en hun scheppingsverhalen.

Na de lezing van Dr Julien wordt de thee gebruikt en kunnen nog vragen gesteld worden.

Het is vrij laat, als de Voorzitter de spreker hartelijk dank brengt voor zijn interessante voordracht.

Nadat de vertegenwoordigers van de bevriende verenigingen hun dank hebben betuigd voor de ontvangst, sluit de Voorzitter de vergadering.

's-Gravenhage,
Kruisbessenstraat 12.

A. T. M. KRAMER
Secretaresse.

VACANTIECURSUS STERRENKUNDE

Op 26 en 27 Augustus 1953 zal te Utrecht ter gelegenheid van het honderdjarig bestaan van de Utrechtse Sterrenwacht een vacantiencursus worden georganiseerd gewijd aan:

„Recente Ontwikkeling van de Sterrenkunde”.

Deze cursus wordt georganiseerd door de Nederlandse Vereniging voor Natuurkunde, Velines, Wimecos en de Utrechtse Sterrenwacht. Een voorlopig program voor de lezingen en demonstraties is vastgesteld; het omvat: het Planetenstelsel, de Zon, het Melkwegstelsel, het Heelal.

De kosten voor deelneming zijn voor de leden der genoemde Verenigingen f 7,50, voor anderen f 12,50. Over mogelijke restitutie (geheel of gedeeltelijk) van de reiskosten zal men nader worden ingelicht in het folder, dat men omstreeks 1 Juli tegemoet kan zien.

Men kan zich nu reeds opgeven bij dr J. W. Blom, Thorbeckestraat 17, Leiden, die zo nodig ook inlichtingen verstrekt.

DE WISKUNDE OP HET α -GYMNASIUM.

Voordracht, gehouden te Utrecht op 15 November 1952, door
Dr E. J. Dijksterhuis, voor de groep L.i.w.e.n.a.g.e.l.

In Januari van dit jaar had ik het genoegen, voor een groep leraren in Oude Talen aan Rotterdamse Gymnasia en Lycea de stelling te verdedigen, dat het onderwijs in wiskunde op het α -Gymnasium zo gereorganiseerd zou kunnen worden, dat het, zonder aan wiskundige waarde in te boeten, een belangrijke bijdrage tot de klassieke vorming zou kunnen geven. De tekst van die voordracht is inmiddels in Euclides gepubliceerd ¹⁾ en dat was voor mij aanvankelijk een bezwaar, de uitnodiging hier nogmaals over dit onderwerp te spreken, aan te nemen. Er zullen onder U allicht zijn die het artikel in Euclides gelezen hebben en ik vreesde, dat ik voor hen weinig nieuws zou kunnen vertellen. Ik moest echter het Bestuur van Uw groep wel toegeven, dat er wel aanleiding bestond, de kwestie toch nog eens voor de tweede maal te behandelen. In Rotterdam bestond mijn auditorium voornamelijk uit classici; er was ook wel een aantal belangstellende mathematici aanwezig, maar het gehele betoog was toch wel voornamelijk op de eerste categorie hoorders ingesteld en daardoor kon ik op de specifiek-wiskundige zijde van het plan niet te diep ingaan. In een vergadering van Liwenagel, zo werd mij beduid, zou dat anders zijn; hier zou ik voor vakgenoten meer gepreciseerd kunnen uiteenzetten, wat het nieuwe wiskunde-onderwijs nu eigenlijk kan inhouden, welke wiskundige waarde er aan te hechten is, hoe men het practisch kan inrichten, hoe men er proefwerk over kan opgeven en eindexamen over kan afnemen, hoe het in verband kan worden gebracht met het in de eerste vier klassen behandelde, kortom al die concrete didactische aangelegenheden die men alleen met vakgenoten in engeren zin behandelen kan.

Ik ben voor deze argumentatie gezwicht, zou echter wel, voordat ik met de uitvoering van de verstrekte opdracht een begin maak, nadrukkelijk willen vaststellen, dat ik de verlangde exclusief-mathematische behandeling alleen geef bij wijze van methodische abstractie, omdat voor mijn gevoel in het programma „wiskunde-

¹⁾ Euclides 27 (1951—'52), 209—226.

onderwijs op de α -afdeling als element van klassieke vorming" het mathematische en het klassieke aspect wel te onderscheiden, maar niet te scheiden zijn, zodat men, om tot een billijk oordeel te komen, voortdurend beide in het oog moet houden. Ik heb dat in Rotterdam ook trachten te doen, maar na afloop werd mij van bevriende zijde verzekerd, dat ik voor de classici te mathematisch was geweest en voor de mathematici te veel en te vlug Grieks had gesproken. De laatste fout zal ik hier geheel vermijden: geen woord Grieks zal in dit uur den wal mijner tanden ontvlieden. En wat het wiskundig element betreft, dit kan in dit milieu onmogelijk te veel op den voorgrond worden geplaatst.

In het voorgestelde plan (ik spreek alleen over de behandeling van de wiskunde die verband houdt met de klassieke opleiding en niet over de belangrijke hervormingsplannen die daarnaast ontwikkeld zijn) ligt de nadruk uiteraard op de Griekse wiskunde. Het is echter wenselijk, daaraan bij wijze van inleiding een behandeling van cijferschrift en rekentechniek in de Egyptische en Babylonische culturen te laten voorafgaan. Te zijner tijd zal immers de Griekse methode om getallen te schrijven en er mee te rekenen vanzelf aan de orde komen en dat vormt reeds een voldoende aanleiding, de verschillende systemen die in andere culturen zijn toegepast, althans het Egyptische, het Babylonische en het Romeinse met het Griekse en met ons eigen Indo-Arabische stelsel te vergelijken. Er is nog een tweede motief, dat te doen. Het Indo-Arabische positie-stelsel is een vondst van onafzienbare betekenis voor de beschavings-geschiedenis geweest, maar, zoals het in de regel gaat met culturele verworvenheden die zich volkomen ingeburgerd hebben, wordt de eminente praktische waarde ervan en wordt ook het vernuft dat nodig is geweest, het te vinden, door de gemiddelde mens, ook al is hij behoorlijk algemeen ontwikkeld, nauwelijks meer beseft. Het is een taak voor het onderwijs, zeker voor het Voorbereidend Hoger Onderwijs, de gedachteloosheid waarmee van cultuurbezit gebruik wordt gemaakt, te verstoren en dat kan in het geval dat ons bezighoudt niet beter gebeuren dan door zich in andere systemen voor het schrijven van getallen te gaan verplaatsen en daarin praktisch te gaan rekenen.

In het Egyptische stelsel krijgt men dan te maken met het eigenaardige dyadisch-additieve karakter en met de merkwaardigheid, dat er alleen stambreuken in voorkomen die men slechts met behulp van een tabel kan verdubbelen. In het Babylonische stelsel is het instructieve, dat het, evenals het onze, op de gedachte van positie

berust, welke gedachte echter ook op breuken wordt toegepast, terwijl de overeenkomstige stap in het Indo-Arabische stelsel eerst enkele eeuwen na de invoering voor gehele getallen gedaan is. Terwijl dus het Babylonische systeem in dit opzicht met het thans gebruikelijke overeenstemt, wijkt het er weer van af door de eigenschap, dat het voor kleine getallen weliswaar decimaal is, maar dat het zijn hogere teltrappen van het grondtal zestig afleidt, zodat het als gemengd decimaal-sexagesimaal betiteld moet worden. Hoewel dit natuurlijk geen principieel verschil in de rekentechniek met zich mee brengt, veroorzaakt het een sterke praktische afwijking: er zijn andere tafels van vermenigvuldiging nodig en de breuken die in dit stelsel positioneel geschreven kunnen worden, zijn niet dezelfde als waarvoor dit in het Indo-Arabische mogelijk is.

Het zal U duidelijk zijn, dat hier ruimschoots gelegenheid is voor eigen activiteit van de leerlingen en dat men helemaal niet bevreesd behoeft te zijn voor het beeld van de meer of minder boeiend vertellende docent en het meer of minder aandachtig luisterend gehoor. Om de zaak geheel concreet te maken, leg ik U een stel proefwerk-opgaven voor, dat na enige tijd over dit gedeelte van de stof opgegeven zou kunnen worden.

Proefwerkopgaven over Antieke Wiskunde (I)

1. Schrijf een gegeven getal in Egyptisch, Babylonisch en Grieks cijferschrift.
2. Wat verstaat men onder het additief-dyadisch karakter van het Egyptische rekenen? Licht dit toe aan het voorbeeld 13.28. Schrijf de bewerking zowel in Egyptisch als in Indo-Arabisch cijferschrift.
3. Hoe is de Egyptische opvatting van delen? Ga na, of zij al dan niet principieel met de onze overeenkomt. Voer de deling $19 : 8$ uit met een dyadisch schema en $4 : 15$ met een decimaal schema.
4. Wat verstaat men onder de $2 : n$ tabel? Wat kan men volgens deze tabel schrijven voor $\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$? Voor $\frac{1}{17} + \frac{1}{17}$ vindt men $\frac{1}{12} + \frac{1}{51} + \frac{1}{68}$. Hoe is dit te verklaren? Geef nog een andere ontwikkeling aan. Waarom zou de samensteller aan de eerstgenoemde splitsing de voorkeur hebben gegeven?
5. Welke breuken kunnen afbrekend positioneel geschreven worden in het decimale en welke in het sexagesimale stelsel? Hoe komt het dat er in het laatste stelsel zoveel meer zijn? Geef in beide stelsels de afbrekende positionele schrijfwijze op voor stambreuken met noemers ≤ 15 .

6. Maak een baylonische vermenigvuldigingstabel voor het grondtal 44,26,40, en bepaal hiermee het 43-voud van dit getal.
7. Maak een Babylonische reciprokentabel voor afbrekende reciproken van getallen ≥ 72 en ≤ 96 . Bepaal met behulp hiervan de sexagesimale schrijfwijze van $\frac{43}{81}$.

Ik heb hier natuurlijk slechts enkele mogelijkheden aangegeven. De praktijk zal moeten leren, hoever men kan gaan. Het zal verder wel duidelijk zijn, dat er allerlei gelegenheden tot excursies bestaan, b.v. naar aanleiding van het Egyptisch cijferschrift over Egyptisch schrift in het algemeen, over de betekenis van de Islam voor het ontstaan van de West-Europese wiskunde, over Indische wiskunde enz. Maar het moet natuurlijk geheel aan de docent worden overgelaten, in hoeverre hij hiervan gebruik wil maken. Nog een opmerking over het voorgestelde proefwerk. Het is niet onmogelijk, dat dit bij U twee tegengestelde reacties zal opwekken: men kan het ten eerste te moeilijk vinden, namelijk wanneer men het gevoel heeft, dat men het zelf niet zou kunnen maken; maar ten tweede ook te gemakkelijk, omdat het van de leerlingen uitsluitend reproductie van het behandelde eist en helemaal geen eigen vinding. Op de eerste tegenwerping kan worden geantwoord, dat men natuurlijk, wanneer men iets doceren wil, het zelf eerst geleerd moet hebben; op de tweede datm en naar mijn mening, zeker voor α -leerlingen met goede reproductie volkomen tevreden moet zijn; men mag van hen geen wiskundig uitvindingsvermogen verlangen. Ik meen, dat dit in de gangbare methode van wiskunde-onderwijs ook nauwelijks geschiedt; het maken van vraagstukken van bekend type komt toch ook op reproductie neer, van eigen creativiteit kan ook hier niet gesproken worden.

Ik doe nu een greep uit een latere phase van het voorgestelde onderwijs. Daarin zullen na een historische inleiding over de prae-Euclidische wiskunde de *Elementen* van Euclides aan de orde gesteld zijn en het is thans de vraag wat men hieruit en hierover kan behandelen.

Er zal natuurlijk eerst moeten worden uitgelegd, wat *Elementen* zijn, namelijk systematisch geordende verzamelingen van stellingen die bij diepergaande wiskundige onderzoeken zonder bewijs toegepast mogen worden, en daarna, hoe die systematische ordening verkregen is. Men wilde zijn stellingen gaan bewijzen, dus door logische redenering uit eenvoudiger beweringen afleiden en stiet nu, steeds dieper afdalend, op beweringen die zo eenvoudig en zo evi-

dent leken, dat men geen kans zag, ze op hun beurt nader te funderen, zodat men ze wel zonder bewijs als uitgangspunt moest aan nemen. Dit zijn dan de postulaten of axiomata. Beide woorden drukken uit, dat de docent van zijn toehoorders als billijk vordert of „eist”, dat zij de aldus aangeduide uitspraken zonder nadere motivering zullen aanvaarden.

Bij de opbouw van dit systeem worden natuurlijk ook herhaalde-lijk nieuwe woorden ingevoerd; in de definities waardoor dat gebeurt, worden echter ook al woorden gebruikt die een definitie ver-eisen. Ten slotte moet men uitkomen op termen die zonder definitie verstaanbaar moeten worden geacht. De conclusie, dat dus naast de onbewezen frondstellingen een aantal ongedefinieerde woorden moet komen te staan, heeft Euclides en hebben de Griekse mathe-matici in het algemeen niet getrokken. Zij trachten alle wiskundige termen te definiëren.

Ten slotte moeten meetkundige constructies worden uitgevoerd en hierop wordt nu een analoge analyse toegepast als op de te be-wijzen stellingen; zij moeten worden samengesteld uit een zo klein mogelijk aantal grondconstructies, waarvan de uitvoerbaarheid wordt gepostuleerd. Om een niet opgehelderde reden maakt Euclides onderscheid tussen postulaten en axiomata en daar hij de grond-constructies tot de eerste categorie rekent, heeft men vroeger wel de term postulaat uitsluitend in de zin van grondconstructie willen gebruiken. Dit is echter met het oog op wat Euclides nog meer onder de postulaten rekent, b.v. het parallel-axioma, moeilijk te recht-vaardigen.

Nadat zo de betekenis van de grondslagen van het Euclidische stelsel behandeld is en de leerling alle postulaten en axiomata en de voornaamste definities heeft gememoriseerd (dit is met het oog op de nadere kennismaking met de *Elementen* onmisbaar), bestaan er natuurlijk tal van aanleidingen, er dieper op in te gaan. Vooreerst moet de vraag aan de orde worden gesteld, wat eigenlijk een definitie is. Dat is een vraag die niet alleen voor de wiskunde betekenis heeft, maar die voor alle wetenschappen en bovendien in het onderling menselijk verkeer van het grootste belang is; een inrichting voor V.H.O. mag aan deze vraag, nu zij zich zo ongedwongen voordoet, zeker niet voorbijgaan.

Zoals U bekend is, worden definities volgens de klassieke theorie ingedeeld in reële en nominale, waarvan de eerste de inhoud van een gegeven begrip in woorden trachten te omschrijven om zodoende het wezen van de aangeduide zaak te vatten, terwijl de tweede afspraken zijn, een langere uitdrukking door een kortere te vervangen. Wan-

neer men b.v. tracht te omschrijven, wat democratie is, beproeft men een reële definitie te geven; wanneer men de uitdrukking „vierhoek met een paar overstaande zijden die gelijk en evenwijdig zijn” vervangt door „parallelogram” geeft men volgens de geschetste opvatting een nominale definitie. Deze theorie laat wel wat te wensen over. Om te beginnen verwacht zij in haar tweede gedeelte definitie en naamgeving. Wanneer ik zeg „vierhoek die een omgeschreven cirkel bezit” heb ik een begrip bepaald en als ik de uitdrukking afkort door „koordenvierhoek” heb ik aan de beschouwde soort vierhoeken een naam gehecht, wat heel practisch kan zijn, maar principieel ook wel nagelaten kan worden en dan ook heel vaak nagelaten wordt. Men zou bovendien de gemaakte onderscheiding tussen reële en nominale definities beter kunnen vervangen door die van analytische d.w.z. door analyse van het spraakgebruik verkregen, en synthetische, een nieuw begrip invoerende definities. En ten slotte moet men opmerken, dat er nog wel meer soorten definities bestaan, waarvan vooral de impliciete definitie met het oog op de behandeling van de *Elementen* wel een bespreking waard is. Deze dingen kunnen aan de hand van de Euclidische definities en postulaten heel goed duidelijk worden gemaakt, waarbij dan tevens blijkt, dat deze definities deels analytisch zijn en dan nooit bij de opbouw van het systeem gebruikt worden, deels synthetisch. Wanneer Euclides zegt: „een lijn is breedteloze lengte”, tracht hij de voorstelling die het bekende woord lijn bij hem opwekt, door woorden te omschrijven maar wanneer hij de diameter van een cirkel definieert als koorde door het middelpunt (daar komt het tenminste op neer), voert hij synthetisch een nieuw begrip in en hecht er tegelijkertijd een naam aan, diameter.

Even vooruitlopend op de inhoud van Boek I kunnen wij hierbij nog opmerken, dat Euclides blijkt geeft, scherp te beseffen, dat een definitie, al dan niet met naamgeving gepaard gaande, nog in het geheel niet waarborgt, dat het gedefinieerde ding ook werkelijk bestaat. Ik kan definiëren „regelmatig veelvlak met tien zijvlakken” en er een naam aan geven, „dekaëder”, maar het bestaat niet. Euclides draagt in talrijke gevallen zorg, het bestaan van de gedefinieerde mathematische entiteiten hetzij te postuleren (het geval van de cirkel), hetzij constructief te bewijzen (het geval van evenwijdige lijnen of van het vierkant).

Na de behandeling van de grondslagen moet natuurlijk met de lectuur van de *Elementen* begonnen worden; ik zou deze, wat Boek I betreft, volledig wensen en kritisch van aard. Het gaat er nu immers om, wat bij de kennismaking met het systeem der meetkunde in de

eerste klasse om didactische redenen wel achterwege moest blijven, de axiomatische opbouw bewust te beleven door er zich rekenschap van te geven, of de opvolgende stellingen inderdaad logisch uit de grondslagen en de reeds eerder bewezen stellingen volgen, waarom juist deze volgorde gekozen wordt, of het ook anders zou kunnen, of er ook wel eens conclusies getrokken worden, die voor hun logische rechtvaardiging nog meer axiomata zouden vereisen dan er uitdrukkelijk zijn geformuleerd. Deze wijze om de *Elementen* te bestuderen, is vooral daarom zo vruchtdragend, omdat er telkens aanleiding is, te vragen waarom de opbouw zo verloopt en niet anders en omdat er vaak leemten zijn op te merken. De eerste propositie levert al dadelijk van beide een voorbeeld:

„Op een gegeven begrensde rechte een gelijkzijdige driehoek te construeren”.

Zij AB het gegeven lijnstuk. Euclides beschrijft op grond van het derde postulaat een cirkel met middelpunt A en straal AB en evenzo een cirkel met middelpunt B en straal BA en verbindt nu een der snijpunten van de twee cirkels, b.v. C , met A en B . Deze handelwijze heeft in de Oudheid reeds verzet uitgelokt: hoe weet men, dat de twee cirkels elkaar ontmoeten en hoe, dat ze dat aan eenzelfde zijde van AB slechts in een enkel punt doen? Hier is kennelijk een cirkelaxioma vereist, b.v. dat een cirkel, die een punt binnen en een punt buiten een andere cirkel bezit, met die tweede cirkel een punt gemeen heeft; daartoe zouden echter ook de begrippen „binnen” en „buiten” voor een cirkel gedefinieerd hebben moeten zijn. Aan dergelijke kwesties, die de onderlinge ligging van de punten van een figuur betreffen, hebben de Griekse mathematici nooit enige aandacht gewijd; zij kennen geen axiomata van volgorde. Het door Euclides nagestreefde doel, alle gedane stappen strikt logisch te rechtvaardigen, blijkt dus veel moeilijker bereikbaar te zijn dan hij zich voorstelde en dan de meetkundigen van twintig eeuwen met hem hebben gedacht.

Natuurlijk doet Prop. I ook de vraag rijzen, waartoe juist deze constructie, die tevens het existentiebewijs van een gelijkzijdige driehoek is, als eerste van het gehele systeem gekozen is. Het antwoord hierop kan gegeven worden, wanneer we gezien hebben, hoe het resultaat in Prop. II wordt toegepast. Zij luidt: „Aan een gegeven punt een rechte te plaatsen die aan een gegeven rechte gelijk is.”

Zij A het gegeven punt, BC de gegeven rechte, Euclides trekt AB en construeert op grond van Prop. I de gelijkzijdige driehoek ABD , maakt nu (post. III) op het verlengde van DB $BE = BD$ en op de

rechte $DA \cdot DF = DE \cdot AF$ is nu het gevraagde lijnstuk. Men vraagt zich natuurlijk af, waarom hij niet eenvoudig BC in de passer heeft genomen en naar A heeft overgebracht. Hij zou daarop geantwoord hebben, dat het woord passer, dat een stoffelijk instrument aanduidt, in zijn meetkunde niet voorkomt en dat hij niets anders heeft gepostuleerd dan de mogelijkheid, met een gegeven punt als middelpunt en een gegeven lijnstuk als straal een cirkel te beschrijven, als dat lijnstuk dat gegeven punt tot een van zijn eindpunten heeft. Men kan dus een lijnstuk alleen door omcirkelen op een andere lijn overbrengen, wanneer een van zijn eindpunten op die lijn ligt. Wil men de situatie in de taal van de stoffelijke nabootsing beschrijven, waarin het woord passer wel voorkomt, dan kan men zeggen, dat de Euclidische passer de eigenschap bezit, zich alleen te kunnen openen, als zijn punt op het tekenvel staat en dat hij onmiddellijk dichtklapt, als dat niet meer het geval is. Prop. I en II leren nu, dat men een lijnstuk toch wel kan overbrengen naar een lijn, die geen der eindpunten ervan bevat; daardoor is de Euclidische passer van zijn hinderlijke onvolkomenheid bevrijd en hij kan nu voortaan gerust als transporteur worden gebruikt.

Ik heb hier maar een uur ter beschikking en geen schooljaar. Ik kan dus zo niet doorgaan. Vrijwel iedere propositie van Boek I levert stof tot discussie en wat ik gegeven heb, was slechts een eenvoudig voorbeeld uit vele. Inplaats van hierover verder uit te weiden, leg ik U een stel proefwerkopgaven over het eerste boek voor.

Proefwerkopgaven over Antieke Wiskunde (II)

1. Welke verschillende soorten grondslagen gebruikt Euclides bij de opbouw van de Elementen? Geef van elke enkele voorbeelden.
2. Noem enkele soorten definities met voorbeelden.
3. Hoe is het te verklaren, dat de Elementen beginnen met de constructie van een gelijkzijdige driehoek en met het overbrengen van een lijnstuk naar een punt buiten zijn drager?
4. Hoe bewijst Euclides, dat een buitenhoek van een driehoek groter is dan elk der niet aanliggende binnenhoeken? Hoe doet men dit tegenwoordig? Waarom doet Euclides het niet zo?
5. Hoe luidt het parallelen-postulaat? Hoe wordt het tegenwoordig gewoonlijk geformuleerd? Hoe hangen deze twee formuleringen samen? Wat kan Euclides over evenwijdige lijnen bewijzen zonder het parallelenpostulaat te gebruiken? Hoe en waartoe gebruikt hij het postulaat?

6. Hoe luidt bij Euclides de stelling van Pythagoras en hoe bewijst hij haar? Hoe doet men het tegenwoordig gewoonlijk? Waarom doet Euclides het niet zo?
7. Hoe luidt het gnomontheorema? Bewijs het en gebruik het voor de constructie van een parallelogram waarvan een zijde en een hoek gegeven zijn, terwijl de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven driehoek.
8. Wat verstaat men onder een Logische Omkering van een stelling? Bewijs, dat een L.O. van een juiste (onjuiste) stelling juist (onjuist) is. Euclides gebruikt het begrip L.O. niet. Wat is hiervan het gevolg?
9. Hoe bewijst Euclides, dat twee driehoeken, die twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben, congruent zijn? Welk bezwaar is hiertegen aan te voeren? Waaruit blijkt, dat Euclides dit bezwaar ook wel voelt?

Als een volgend onderwerp van essentieel belang zou ik het irrationale en zijn betekenis voor de Griekse wiskunde willen noemen. Ik laat hier de cultuurhistorische kant van de zaak, namelijk de geschiedenis van de ontdekking van het opzienbarend verschijnsel, rusten om, getrouw aan de opzet van deze middag, alleen over het mathematisch aspect te spreken. Dat komt bij de ontwikkelings-geschiedenis ook al ter sprake, n.l. in de vraag, hoe de eerste irrationale verhouding, die van zijde en diagonaal van een vierkant, aan het licht kan zijn gekomen. Er bestaan hiervoor twee mogelijkheden: het kan zijn, dat het gebeurd is langs de weg die Aristoteles kort omschrijft door te zeggen, dat, als zijde en diagonaal van een vierkant onderling meetbaar waren, het evene gelijk zou zijn aan het onevene. Daarmee bedoelt hij blijkbaar de volgende redenering: tussen diagonaal d en zijde a van een vierkant bestaat de betrekking $d^2 = 2.a^2$, was nu $d : a = m : n$ (m en n onderling ondeelbare natuurlijke getallen), dan zou $m^2 = 2.n^2$ zijn, waaruit volgt, dat m^2 en dus m even is en dus n oneven. Is nu $m = 2k$, dan wordt $n^2 = 2.k^2$, dus n^2 en dus ook n even, terwijl n oneven is. Een andere mogelijkheid is, dat men heeft opgemerkt, dat bij de toepassing van de algoritmus van Euclides ter bepaling van de grootste gemene maat van d en a het proces niet afloopt.

Voor de behandeling van het vijfde boek van Euclides doet deze onzekerheid niet ter zake, omdat hierin het begrip verhouding of reden zo wordt gedefinieerd, dat helemaal niet gevraagd wordt, of de vergeleken grootheden al dan niet onderling meetbaar zijn, zodat ook tussen rationale en irrationale redens voorlopig niet behoeft te

worden onderscheiden. Men zegt immers, dat de reden (A, B) dezelfde is als de reden (C, D) , wanneer tegelijk met

$m \cdot A \geq n \cdot B$ ook $m \cdot C \geq n \cdot D$ (m en n natuurlijke getallen)

Hierin moeten A en B en evenzo C en D grootheden zijn, die onderling aan het axioma van Eudoxos voldoen, d.w.z. dat de kleinste met een zodanig getal vermenigvuldigd kan worden, dat het product de grootste overtreft. Als dat het geval is, behoeven A en C en evenzo B en D niet aan dit axioma te voldoen, in welk geval men dus van de redens (A, C) en (B, D) in het geheel niet zou kunnen spreken. Een Grieks mathematicus zou dus een eenparige beweging wel hebben kunnen definiëren door de evenredigheid $(s_1, s_2) = (t_1, t_2)$, maar niet door $(s_1, t_2) = (s_2, t_2)$; deze laatste redens bestaan namelijk niet, want men kan een lengte niet met een zodanig getal vermenigvuldigen, dat het product een tijdvak overtreft. Uit $(A, B) = (C, D)$ volgt dus in het algemeen niet $(A, C) = (B, D)$ evenmin $A \cdot D = B \cdot C$.

Verder wordt gedefiniëerd: $(A, B) > (C, D)$, wanneer er een paar getallen m, n bestaat, waarvoor

$$m \cdot A > n \cdot B \quad \text{maar} \quad m \cdot C \leq n \cdot D$$

Men kan van hieruit natuurlijk verschillende kanten uitgaan. Men kan de opbouw van Boek V een eind vervolgen en b.v. laten zien, hoe voor het geval, dat A, B, C, D onderling alle aan het axioma van Eudoxos voldoen, de verwisselbaarheid der middelste termen bewezen wordt. Men kan dan telkens nagaan, welk het verschil met de thans gebruikelijke behandelingswijze is en waarom de Griekse wiskunde deze niet zou hebben kunnen toepassen; op een dergelijke wijze kan hier en elders telkens contact worden gelegd met het in de lagere klassen behandelde. Men kan ook de Griekse theorie gebruiken als inleiding tot de theorie van het irrationale getal volgens Dedekind, waarmee zij wiskundig in principe equivalent is. Verder kan men nagaan, hoe de in Boek V behandelde redentheorie meetkundige toepassing vindt in Boek VI en duidelijk maken, waarom de theorie van de gelijkvormigheid bij Euclides pas zoveel later aan de orde kan komen dan bij ons en welke gevolgen dit voor de opbouw van het systeem heeft. Men kan ook de wijze waarop de Grieken op de ontdekking van het irrationele hebben gereageerd, vergelijken met die waarop in onze elementaire meetkunde de moeilijkheid wordt opgelost, omzeild of genegeerd.

Ten slotte — maar hier opent zich een gans nieuw onderwerp — kan men ook het sterk geometrisch karakter verklaren dat de Griekse wiskunde van de Babylonische en de moderne onderscheidt

en dat zeer waarschijnlijk uitsluitend het gevolg is van de angst voor het irrationale. Toen men namelijk eenmaal had ingezien, dat twee lijnstukken in het algemeen geen gemene maat bezitten, was de gehele vroeger gemaakte toepassing van het verhoudingsbegrip in de meetkunde, waarbij men in naief vertrouwen had aangenomen, dat twee gelijksoortige grootheden zich als twee getallen verhouden, onhoudbaar geworden. De Griekse mathematici hebben daarvan met het typerend logisch rigorisme, dat ook uit hun streven naar axiomatisering en uit hun behandeling van oneindige processen blijkt, de strengste consequenties getrokken. Onder meer hebben zij zich verplicht gevoeld, de zo veelbelovende algebraïsche behandeling van tweede-graads-problemen die de Babyloniërs gegeven hadden, door een zuiver geometrische te vervangen, waardoor zij de ontwikkeling der wiskunde waarschijnlijk mateloos hebben vertraagd. Stel b.v. dat gevraagd wordt naar lengte en breedte van een stuk land, waarvan de halve omtrek $2s$ en de oppervlakte O gegeven zijn. De Babylonische rekenaar doet iets wat neerkomt op

$$\begin{aligned} l &= s + x \\ b &= s - x \end{aligned}$$

waaruit

$$s^2 - x^2 = O \text{ of } x = \sqrt{s^2 - O}$$

zodat

$$\begin{aligned} l &= s + \sqrt{s^2 - O} \\ b &= s - \sqrt{s^2 - O} \end{aligned}$$

Voor een Griekse wiskundige moet zo iets een gruwel zijn geweest. l en b zijn geen getallen, maar lengten, die in het algemeen niet door getallen kunnen worden uitgedrukt.

Hij ziet zich dus verplicht, de oplossing meetkundig in te kleden en komt er zo toe, voor de Babylonische algebra zijn oppervlakte-rekening in de plaats te stellen. Ik laat dit onderwerp echter verder rusten, maar geef U nog een stel proefwerkopgaven over dit gedeelte van de stof.

Proefwerkopgaven over Antieke Wiskunde (III)

1. Wat verstaat men onder parabolische, elliptische, hyperbolische aanpassing van een oppervlak aan een lijnstuk? Wat moet hierbij in de laatste twee gevallen gegeven worden?
2. Met welk algebraïsch vraagstuk komen deze aanpassingen overeen? Laat dit zien. Waarom behandelt Euclides wel de meetkundige oplossing en niet de algebraïsche?

3. Hoe kunnen de Pythagoreërs bewezen hebben, dat zijde en diagonaal van een vierkant onderling onmeetbaar zijn? Welke gevolgen heeft dit inzicht voor de Griekse wiskunde gehad?
4. Waar en hoe definieert Euclides de reden van twee grootheden? Wat wordt van die grootheden geëist en wat doet niet ter zake? Aan welke wiskundige wordt deze definitie toegeschreven? Wat weet ge verder van hem?
5. Waarom volgt uit $(A, B) = (C, D)$ in het algemeen niet $(A, C) = (B, D)$? Wanneer volgt het er wel uit en hoe bewijst Euclides dit?
6. Wat verstaat Euclides onder de dubbelreden van een gegeven reden? Wat is hiervan de betekenis in onze tegenwoordige uitdrukkingwijze?
7. Hoe definieert Euclides gelijkvormigheid van vlakke figuren en hoe gebeurt dit tegenwoordig gewoonlijk? Hoe bewijst hij, dat er gelijkvormige figuren bestaan?
8. Hoe construeert Euclides een driehoek, die gelijkvormig is met een gegeven driehoek en waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven rechthoek?

Natuurlijk zou ik nog lang zo door kunnen gaan, maar ik wil niet te veel van Uw aandacht vergen en bovendien moet er tijd voor bespreking overblijven. Het ging ten slotte ook maar om het aanwijzen van mogelijkheden, die een indruk zouden kunnen geven van wat op de α -afdeling onderwezen zou kunnen worden en waardoor zou kunnen worden aangetoond, dat dit onderwijs een zeer reële mathematische inhoud kan bezitten. Of die mogelijkheden ooit werkelijkheden zullen worden, is natuurlijk moeilijk te zeggen. Ik heb geen enkele persoonlijke ervaring over het Gymnasium, noch als leerling, noch als docent en ik loop dus de kans, dat ik de situatie volkomen verkeerd beoordeel. In hoeverre dat het geval is, kan alleen maar experimenteel worden uitgemaakt. Daarom is het zo bijzonder toe te juichen, dat op een zestal gymnasia met de voorgestelde methode proeven worden genomen. Het is begrijpelijk, dat de docenten die zich de niet geringe moeite getroosten dit te doen, aan hun ervaringen geen ruchtbaarheid willen geven, voordat de proefneming geheel voltooid is, wat eerst aan het einde van de lopende cursus het geval zal zijn. Wat zij dan te vertellen zullen hebben, zal door ieder die zich voor deze aangelegenheid interesseert, met de grootste belangstelling worden afgewacht. Begrijpelijkerwijze gevoel ik zelf die belangstelling in de allerhoogste mate, omdat dan blijken zal, of ik in beschouwingen als de vanmiddag ontwikkelde een illusie heb nagejaagd of een reële bijdrage tot de verbetering

van het wiskunde-onderwijs heb gegeven. Hoe dit ook wezen moge, ik zal er dan het zwijgen toe doen, omdat in het licht van de opgedane ervaringen mijn theoretische overwegingen tot iets wezenloos zullen verbleken.

KORT VERSLAG VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS OP MAANDAG 5 JANUARI 1953 TE AMSTERDAM.

De openingsrede van de Voorzitter, die dit jaar door omstandigheden langer was dan gewoonlijk, zal in Euclides worden gepubliceerd. De notulen en jaarverslagen werden onveranderd goedgekeurd. Hierbij bleek, dat de leesportefeuille zich nog niet kan bedruipen. Het Bestuur doet daarom een beroep op de leden zich hierop te abonneren. De suggestie is aan de hand gedaan om scholen lid te laten worden. De contributie voor Wimécós is voor het jaar 1 September '53—'54 op f 6.— bepaald; deze kan gestort worden op postgiro-rekening no. 143 917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.

De aftredende Bestuursleden Dr H. H. Buzeman en Dr H. A. Gribnau werden herkozen.

Het rapport der Commissie voor het Wiskundeonderwijs op de H.B.S.A werd na ampele bespreking goedgekeurd. Aan ieder lid is dit rapport vóór de Algemene Vergadering toegezonden.

De drie Franse wiskundefilms „Regelmatische veelhoeken”, „Rechten en parabolen” en „Meetkundige plaatsen” zijn vertoond en met waardering ontvangen. Docenten, die deze films wensen te vertonen, moeten zich tot de volgende adressen wenden:

Dr H. A. Gribnau, St.-Norbertus-lyceum, Roosendaal (N.B.),

G. A. Janssen, Christelijk Lyceum, Delft, of

Dr J. T. Groenman, R.H.B.S. Assen.

Er komen alleen onkosten voor het verzenden der films. Wel moet men over een goed filmtoestel beschikken.

In de middag hield Prof. Dr J. Haantjes zijn aangekondigde lezing over: „Kinematische bewijzen in de meetkunde”. Deze lezing, die een beeld gaf van de mogelijkheden op het gebied der kinematica ten aanzien van de meetkunde, was een succes en zal in zijn geheel in Euclides worden opgenomen.

De Secretaris
Ir J. J. TEKELBURG

OVER ONZE TIJD MET EEN HEENWIJZING NAAR ONZE TAAK.¹⁾

Nieuwjaar 1953.

Bijzondere dagen brengen vaak bijzondere bezinning met zich in het persoonlijke leven. En dat is waardevol. Balans, kas en begroting opmaken hebben niet alleen nut in het zakenleven, ook in het geestelijke leven is die bezigheid noodzakelijk. Voor ieder persoonlijk doch ook voor een vereniging.

Wimecos heeft krachtens zijn doelstelling te waken voor de belangen van het onderwijs in de exacte vakken in het algemeen en voor dat van de Wiskunde in het bijzonder. De intrede van elk nieuw jaar maakt kas-opmaken wenselijk; zulks na te laten in een tijd, waarin het leven voortgaat als een kabbelend beekje, behoeft geen kwade gevolgen te hebben, doch een in gebreke blijven in meer bewogen tijden kan ernstige nadelen met zich mee brengen. Het Bestuur van Wimecos meent, dat onze tijd ten opzichte van het onderwijs in het algemeen en ten opzichte van het onderwijs in de wiskunde in het bijzonder geenszins met een kabbelend beekje kan worden vergeleken en dat het daarom plicht is „kas op te maken”, daarbij te wijzen op de ongetwijfeld vele gunstige posten die er zijn en tevens de aandacht te vragen voor de minder gunstige die er ook zijn. Zonder op volledigheid aanspraak te willen maken moge ik daarom enkele van die posten in Uw herinnering wakker roepen, of deze voor het eerst onder Uw aandacht brengen.

In Augustus 1952 is er een K.B. inzake de leraarsopleiding verschenen, een bescheiden poging om de leraar te bekwamen voor zijn eigenlijk handwerk, zó dat er gehoopt en verwacht mag worden, dat het in de toekomst minder vaak zal voorkomen dan in het verleden, dat een jong leraar bij het betreden van zijn leslokaal zich zal voelen als een kat in een vreemd pakhuis. Wij menen, dat hier zonder reserve van een creditpost mag worden gesproken.

Zo is er meer, dat tot verheuging stemt.

De scherpe scheidingslijn, die er zo lang in ons land tussen de zuiver wetenschappelijke belangstelling en de didactisch gerichte

¹⁾ Openingsrede, gehouden door de Voorzitter van Wimecos, drs G. A. Janssen, op de Jaarvergadering van 5 Januari 1953 te Amsterdam.

heeft bestaan, gaat hier en daar vervagen. Kringen, die het in het verleden beneden hun wetenschappelijke waardigheid zouden hebben gevoeld zich met problemen van didactiek in te laten, tonen tot een ander inzicht te komen.

Het Wiskundig Genootschap, van onbesproken wetenschappelijke standing (zo zelfs, dat het het Internationaal Mathematisch Congres in 1954 naar Nederland trekt,) acht het wenselijk zich op een gebied te begeven, dat voor de leraren in de wiskunde van direct-practische betekenis is. We hebben enkel waardering voor dit optreden van het W.G. We herinneren in dit verband aan het Symposium, dat in December j.l. in Utrecht werd gehouden, met inleidingen o.a. over het Limietbegrip en over het Parallellenaxioma. De ledenwerfactie van de zijde van het W.G. in het afgelopen jaar gevoerd, met name onder de leraren, wordt dan ook van deze zijde gaarne ondersteund.

Ook het Mathematisch Centrum heeft door zijn brede doelstelling en zijn grote activiteit eraan meegeholpen de scheidsmuur te slechten, die er stond tussen de zuivere wetenschapsbeoefening en de didactische activiteiten. Didactische colloquia staan op het jaarrooster van het M.C.; op een driedaagse vacatiecursus in de zomer van 1952 over de Mechanica werd er één inleiding gegeven over een onderwerp betrekking hebbend op de methodiek en de didactiek van het vak.

De Rotterdamse Kring „Thomas Jan Stieltjes” doet met succes pogingen om de belangstelling van de wiskunde-leraren voor het eigen vak levend te houden, mede door didactisch georiënteerde inleidingen van binnen- en buitenlandse sprekers.

Ook de Wiskunde-Werkgroep van de W.V.O. (Werkgemeenschap voor Onderwijsvernieuwing) dient hier met nadruk te worden genoemd. Met jeugdig enthousiasme wordt hier, onstuimig soms, gewerkt. Sinds jaren is men er bezig met het ontwerpen van een nieuw leerplan voor de Wiskunde. Publicatie hiervan heeft nog niet plaats gevonden. In hoeverre het zal kunnen meewerken aan een reële verbetering van ons wiskunde-onderwijs, valt dus nu nog niet te beoordelen; echter de poging alleen verdient reeds waardering en sympathie. „Wie werkt, maakt fouten”, zal ook hier wel waarheid bevatten, doch evenzeer is het juist, dat „wie niet werkt, ook niets bereikt”.

Onze vereniging tracht door het uitbrengen van rapporten, zoals o.a. één betreffende het Eindexamen in de Wiskunde op de H.B.S.-B, één betreffende het Mechanica-onderwijs in samenwerking met Velines) en dit jaar één betreffende het Wiskunde-onderwijs op

de H.B.S.-A, te vernieuwen, wat vernieuwing behoeft, maar ook te behouden, wat in een praktijk van jaren juist en waardevol is gebleken. Het blijft zinvol, dat tegenover strevingen die misschien te gemakkelijk tot opruimen adviseren, verenigingen als de onze staan, die een open oog hebben voor wat er in het nu bestaande waardevol is en die vanuit deze erkenning van harte aan hervorming en vernieuwing willen meewerken.

Niet alles, wat zich onder de vlag der vernieuwing aanmeldt, is waardevol, evenmin als alles wat door traditie is overgeleverd, aanspraak op dit praedicaat zou kunnen maken.

Dat ik tot dusver nog geen gewag maakte van de beide nota's van Oud-minister Rutten en van de daarna ingediende wetsontwerpen ter regeling van het algemeen middelbaar onderwijs en het voorbereidend hoger onderwijs (van 16 Juni 1952), betekent volstrekt niet, dat ik niet gaarne de grote verdienste wens te erkennen van de poging ons onderwijs als geheel te saneren, er een gezonde wettelijke basis aan te geven. Wel moet ik naar voren brengen, dat het nog niet geheel duidelijk is, welke plaats het onderwijs in de exacte vakken in dit onderwijsgeheel zal gaan innemen. Het geruisloos verdwijnen van het vak mechanica stemt hier tot nadenken en maant tot voorzichtigheid. Een waarschuwing en een oproep tot waakzaamheid schijnt hier alleszins op zijn plaats. Zo is er meer in de lucht, waarvoor het sein „Weest op Uw hoede!” gehesen moet worden.

We moeten oppassen, dat niet „bij U, over U en zonder U” wordt beslist. De pers heeft in onze dagen een grote invloed en een feit is het, dat, als zij zich met het wiskunde-onderwijs gaat bemoeien en het grote publiek te dezer zake van voorlichting wil dienen, dit te vaak in niet al te waarderende zin geschiedt.

Allerlei oorzaken zijn hiervoor aan te wijzen. Het is onnodig ons hierin momenteel te zeer te verdiepen. Voor één ding moeten wij, als mathematici, ons echter trachten te hoeden, n.l. voor het zelf-oorzaak-zijn van die onvoldoende voorlichting, die tot onderwaardering van de wiskunde leidt. Exameneisen moeten redelijk zijn, onze wijze van lesgeven moet zich aanpassen aan het niveau van het kind, enz. enz., maar niet minder moeten wij trachten te voorkomen, dat niet-mathematici zich met enige schijn van recht zouden kunnen beroepen op uitspraken van erkende mathematici om daarmee het onderwijs in de exacte vakken afbreuk te doen.

Deze opmerking werd me ingegeven door een artikel in de N.R.C. van 1-XII-1952, waarin dr W. H. Staverman schrijft: „Velen hebben altijd sceptisch tegenover de vormende kracht van de wiskunde gestaan en zijn daarin gesterkt door wat prof. Freudenthal

en mevr. Ehrenfest daarover hebben gezegd''. Direct moet toegegeven worden, dat het ondoenlijk is zich steeds te wapenen tegen de mogelijkheid, dat „men'' een verkeerde uitleg van iemands woorden zal geven. Noch prof. Freudenthal, noch mevr. Ehrenfest zullen twijfelen aan een vormende waardé, die van de wiskunde kan uitgaan. Voorzover ik kennis genomen heb van wat mevr. Ehrenfest schrijft en zegt, heeft mij altijd getroffen haar onvermoeide pogingen om constructief bezig te zijn ten behoeve van dat wiskunde-onderwijs (i.h.b. het meetkunde-onderwijs). Zo iets doet men niet, als men niet gelooft in de mogelijkheid van de vormende waarde van dat onderwijs.

Dat de inzender een vermoedelijk onjuiste kijk op de inzichten van prof. Freudenthal ten beste geeft, is echter niet onbegrijpelijk. Lezingen en artikelen van hem geven nog al eens tot enig gerucht en misverstand aanleiding. En dat is te betreuren.

Als een spreker, die zelf verklaart, dat zijn belangstelling voor en verdieping in de desbetreffende didactische materie nog maar enige maanden oud is, het resultaat van zijn onderzoek laat culmineren in een: „Dat is H.B.S.-mechanica. Schaf die prulwetenschap af'', zonder een constructief idee aan de hand te doen voor wat er na die afschaffing moet gebeuren, en in zijn betoog en passant veler penneyruchten o.a. van iemand van zo grote verdienste als dr. Beth Sr meent te mogen „kraken'', dan zal de spreker zich wel niet kunnen verwonderen over het feit, dat wij ten aanzien van de hechtheid van het hierbij behorend betoog argwanend worden, en ten aanzien van geest en strekking van dat betoog verontrust en verontwaardigd. We waarden uiteraard, dat van universitaire zijde voor de didactische problemen van het V.H.M.O. belangstelling aan de dag wordt gelegd, maar er zal aan enige voorwaarden moeten worden voldaan, wil het gebodene voor ons onderwijs positieve waarde hebben. Mede op grond van wat pers en syllabus ons leerden, achten we het betoog van prof. Freudenthal (in de „Tempel'' te Rotterdam, op 9-XI-1952) beneden de door ons bedoelde maat. Toch willen we hier ook gaarne verklaren, dat we zijn kennis en belangstelling node zouden missen; zijn beweringen zijn echter, naar het ons toeschijnt vaak te impulsief, de gebezigde woorden te „dik''.

Toch zou dit alles nog niet zó bezwaarlijk zijn, misschien zelfs wel gezonde reacties kunnen oproepen en dus gunstig kunnen werken, als de bedoelde uitlatingen alleen bestemd waren voor een kring van vakmensen, van deskundigen, die in staat zijn de goede bedoeling te proeven en dus het gesprokene in zekere zin te waarden. Niet gemotiveerde of niet-voldoende gemotiveerde beweringen op het

grote publiek los laten, kan niet anders dan ongunstig werken.

Begin 1953. Een geheel jaar ligt vóór ons. Belangrijker dan te zien naar wat achter ons ligt, is het tenslotte om het oog te richten op de toekomst. Wat doen wij als vereniging in 1953 en wat wordt van ieder onzer persoonlijk verlangd met het oog op de belangen die Wimecos voorstaat? Welke belangen zijn dat? Vakbelangen of louter groepsbelangen? Neen en nogmaals neen! Ik weet, dat het moeilijk is, dat verwijt geheel te ontgaan en dat er ook vaak wel aanleiding toe is. Ieder mens heeft nu eenmaal slechts een beperkte gezichtskring. Toch houd ik me ervan overtuigd, dat vele van de hier aanwezige leraren in de wiskunde direct bereid zouden zijn verschillende van hun leerlingen te ontlasten door ze vrij te stellen van de wiskunde of van een deel ervan, indien zij slechts de overtuiging hadden, dat noch de betrokkenen, noch de maatschappij gediend is door het aan hen gegeven onderwijs. Hier ligt de kern van de kwestie; door dit probleem wordt onze taak, een taak liefst voor de naaste toekomst, aangewezen.

Het wiskundeonderwijs wordt gegeven:

- a. om zijn vormende waarde;
- b. om zijn direct-practische toepasbaarheid.

Over punt a, de vormende waarde der wiskunde, is al veel geschreven, gediscussieerd, gedacht. Er zijn er die met overtuiging „ja” zeggen, en evenzo die met overtuiging het „neen” voor hun rekening nemen, als de vraag gesteld wordt of er van de wiskunde vormende waarde uitgaat. Veel hangt af van de inhoud, die men aan dit begrip toekent. Of de zgn „transfer” inderdaad als regel plaats heeft, dat wil zeggen of iemand, die in de wiskunde logisch heeft leren denken en een probleem op de juiste en meest efficiënte manier weet aan te pakken, automatisch in staat zal zijn op andere, al dan niet verwante gebieden, volgens dezelfde regels te werk te gaan, is wetenschappelijk niet vastgesteld en zal dit ook wel nimmer worden. Wij zullen ons met onze overtuiging tevreden moeten stellen, dat wiskunde-onderwijs, gegeven in epistemische zin, niet zal nalaten de habitus van de proefpersoon gunstig te beïnvloeden. Alleen die overtuiging maakt het ons mogelijk ons leven lang met enthousiasme les te geven. Mogen alle wiskunde-leraren zulke overtuigden zijn!

Punt b (practische toepasbaarheid) zal meer tot de massa spreken. Het praktische nut is ook veel eenvoudiger aan te tonen, en is, in zekere zin, ook wetenschappelijk te verifiëren. Toch komt het me voor, dat ten aanzien van de desbetreffende problemen nog te weinig systematisch is gewerkt. Niet enkel de ontwikkeling van de kritische zin vraagt onze aandacht, doch meer nog dan in het ver-

leden moeten we trachten relief te geven aan het feit, dat steeds meer mensen in de moderne maatschappij „iets” van wiskunde moeten weten. Als we de tekenen der tijden maar verstaan, de zin van de wiskunde voor onze huidige maatschappij maar begrijpen en alles doen om dat ook aan anderen duidelijk te maken, dan staat het er met de kansen voor de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs in de nabije toekomst nog niet zo slecht voor.

Alle vragen, die zich hierbij voordoen en beurtelings en in combinatie telkens weer onze aandacht vragen, laten zich kort toespitsen in deze drie: „Wie?” „Wat?” „Hoe?”.

Het is zinvol deze vragen elk afzonderlijk onder de loupe te nemen en er uitvoerig over te rapporteren, liefst zo gedocumenteerd mogelijk, en de resultaten dan, na grondig onderzoek, ook wereldkundig te maken. Laat „men” bv. mogen weten, of het een levensbelang voor ons volk is, dat een zo breed mogelijke laag min of meer met wiskunde vertrouwd is, laat „men” het ook mogen weten als het hier bedoelde onderzoek tot een geheel andere conclusie leiden mocht. Laat gedegen onderzoek mogen uitmaken, of er gedeelten der wiskunde zijn en zo ja welke, die speciaal om hun zgn „vormende waarde” gegeven zouden moeten worden, en hoe ze gegeven zouden moeten worden om die vormende waarde tot zijn recht te laten komen; laat dat onderzoek ook uitmaken, welke delen er niet voor geschikt zijn, en moge ons onderwijs op de uitkomsten van dat onderzoek afgestemd worden!

Laat de maatschappij in vrijwel al haar geledingen uitspreken, wat zij van de wiskunde nodig heeft in haar diverse vertakkingen, en laten onze onderscheiden onderwijsinrichtingen zich door de bedoelde uitspraken laten leiden.

Aan het „hoe?” is tot op heden de meeste aandacht besteed; kwesties van methodiek en didactiek zijn, terecht, niet van de lucht.

Afzonderlijke bestudering van elk der vragen is zinvol, noodzakelijk en vruchtbaar. De gecombineerde beantwoording zal echter eerst in staat zijn ons wiskunde-onderwijs de verantwoorde plaats in het geheel van ons onderwijsbestel te geven.

Naar mijn mening is de combinatie, die het allereerst met zorg zal moeten worden bestudeerd en beantwoord, de verbinding: „Wie?” en „Wat?”, en krijgt het „Hoe?” eerst zin tegen de achtergrond van het „Wie en Wat?”.

Met de beantwoording van deze vragen hangt de indeling van geheel ons onderwijs samen. Van dat antwoord hangt het af, of ik dat meisje nog langer moet aansporen om vol te houden en of ik niet een misdaad aan die jongen bega door hem maar te adviseren

eén andere richting te kiezen. Het zijn naar mijn mening brandende vragen, die nog nooit behoorlijk beantwoord werden. Psychologen, psycho-technici; maar ook de maatschappij, ja vooral de gemeenschap, kunnen hieraan meewerken, ieder op eigen terrein, om te komen tot een verantwoord resultaat bij de vraagstelling: Wie? en Wat?

Misschien zou de Fundatie Werkelijk Dienen hier bemiddelend en coördinerend kunnen optreden en zo nuttig werk kunnen verrichten. Ik zeg dit thans met enige vrijmoedigheid, omdat naar mijn mening het laatste rapport van de Fundatie „de Hogere Burgerschool” ook uitgaat van de vragen „Wie? en Wat?” Als eerste poging om praktisch iets in deze richting te verwezenlijken, lijkt me dit voorstel zeer de moeite van het bestuderen waard.

Meer en gedegen onderzoek zal echter noodzakelijk zijn. Mogen velen zich geroepen voelen tot het beantwoorden van een klein deel van elk der bedoelde vragen, ieder op eigen terrein, dan zullen er eens spijkers met koppen geslagen kunnen worden. Inschakeling van de pers is daarbij niet verboden; integendeel, mits het plaats heeft onder verantwoorde leiding.

Zo geeft 1953 ons handen vol werk, bij de uitvoering waarvan echter ons wiskunde-onderwijs wel zal varen en ook het belang van ons volk naar onze vaste overtuiging zal worden gediend.

ADRES INZAKE HET MECHANICA-ONDERWIJS
OP DE H.B.S. B.

„Voor de voorgeschiedenis van het adres aan het College van Inspecteurs VHMO, dat U hieronder aantreft, worden de lezers verwezen naar *Euclides* XXIV, blz. 2, (tot stand koming der Commissie) en naar *Euclides* XXV, blz. 129 en 130 en *Euclides* XXVI, blz. 180 (voor de discussies ter algemene vergadering).”

Rotterdam, 20 April 1951.

*Aan het College van
Inspecteurs V.H.M.O.*

Mijne Heren,

Ter voldoening aan Uw wens, de toestand van het mechanica-onderwijs op de H.B.S.-B nogmaals onder de loupe te nemen en voor deze school een leerplan op te stellen voor het apart-blijvende vak mechanica hebben de verenigingen Velines en Wimecos een commissie in het leven geroepen bestaande uit de Heren Dr J. N. van den Ende, Dr R. L. Krans (voor Velines), Dr N. R. Pekelharing en Ir Dr A. J. Staring (voor Wimecos), met de opdracht „een programma te ontwerpen voor het onderwijs in de mechanica als afzonderlijk leervak op de H.B.S.-B, waarbij worde nagegaan in hoeverre het vigerend programma (leerplan en omschrijving van de leerstof) dient te worden gemoderniseerd in verband met de noodzakelijke coördinatie met de natuurkunde, terwijl tevens dient te worden onderzocht in hoeverre, zonder het rationele karakter van het vak te miskennen, uit hetzelfde oogpunt aan het experiment een plaats kan worden toegekend.”

Het rapport van deze commissie heeft een onderwerp van ampele discussie uitgemaakt op de vergaderingen van Velines op 5 Jan. en 17 Mei 1950 en op de vergaderingen van Wimecos op 4 Jan. 1950 en 3 Jan. 1951.

De besturen van beide verenigingen hebben thans het genoegen U een nieuw leerplan (met toelichting), voor de mechanica aan te bieden (zie Bijlage I), dat de volledige instemming van de beide verenigingen heeft kunnen verkrijgen.

Velines en Wimecos zijn voorts van mening, dat voorstellen ten aanzien van een verandering van het mechanica-onderwijs niet volledig zouden zijn, indien de aard van het eindexamen in dit vak in de toekomst niet mede in de beschouwing zou zijn betrokken.

Het oordeel der verenigingen is te vinden in bijlage II.

Met de meeste hoogachting,

Namens het bestuur
van Velines,

Dr J. W. Blom
Secretaris

Namens het bestuur
van Wimecos,

Ir J. J. Tekelenburg
Secretaris

BIJLAGE I

I. De coördinatie met het onderwijs in de natuurkunde en de cosmografie.

De voornaamste bezwaren tegen de bestaande regeling zijn:

1. De behandeling van arbeid en arbeidsvermogen geschiedt in de mechanica-les in de regel zo laat, dat de natuurkunde-docent er niet op steunen kan. Tracht de mechanica-leraar aan dit bezwaar tegemoet te komen, dan moet hij met een oppervlakkige behandeling genoegen nemen, hetgeen zijn onderwijs niet ten goede komt.
2. Verschillende onderwerpen, die voor de natuurkunde belangrijk zijn (botsing, impuls, impulsmoment) blijven in de mechanica of te veel op de achtergrond, of worden niet behandeld.
3. Krachtvelden en het begrip potentiaal, komen in de mechanica niet ter sprake. Deze onderwerpen zijn ook van belang voor het onderwijs in de cosmografie.
4. Hoewel in de mechanica-les vrij veel aandacht wordt besteed aan zwaartepunten van vaste lichamen, wordt meestal niet gesproken over het zwaartepunt van een stelsel van lichamen, en over de beweging daarvan onder invloed van krachten, die op de verschillende lichamen werken. Toch is dit laatste van groot belang voor de cosmografie. Men denke b.v. aan de verklaring van het verschijnsel van eb en vloed veroorzaakt door de maan.

Deze bezwaren zijn te ondervangen door geschikte keuze van de volgorde van behandeling en vooral door weglating van datgene van de leerstof, dat noch van belang is voor de natuurkunde of de cosmografie, noch medewerkt tot het verkrijgen van een dieper inzicht in de natuurverschijnselen. Hiertoe moet men b.v. rekenen: uitvoerige behandeling van de beweging langs een verticale cirkel;

de samenstelling van niet-evenwijdige krachten, die niet in één vlak werken; de samenstelling van koppels, die in elkaar snijdende vlakken werken; de meeste berekeningen over de ligging van het zwaartepunt; ten slotte andere dan zeer eenvoudige statica-vraagstukken.

Het onder IV opgenomen programma voldoet, naar de mening der commissie, aan de gestelde eisen; het is uitvoerbaar, indien aan de onder II te bespreken coördinatie met het onderwijs in de wiskunde de hand wordt gehouden. De commissie bedoelt met dit programma, dat de behandeling van de aangegeven onderwerpen verplicht wordt gesteld, met behoud van de vrijheid om er andere bij te behandelen. Het is niet haar bedoeling met de gekozen volgorde der onderwerpen didactische voorschriften te geven, maar een voorbeeld van coördinatie tussen mechanica en natuurkunde.

Het spreekt vanzelf, dat men ook in de natuurkunde-les rekening moet houden met de bij de mechanica gekozen volgorde. Dit kan b.v. door in de vierde klasse allereerst enige uitbreiding te geven van de in de lagere klassen behandelde onderwerpen, daarna trillingsleer, golfbeweging enz. en dan de mechanische warmtetheorie te behandelen. Men mag er op rekenen, dat in de mechanica-les kort na de Kerstvacantie arbeid en arbeidsvermogen aan de orde komen.

II *De coördinatie met het onderwijs in de wiskunde.*

Het onderwijs in de mechanica heeft telkens behoefte aan een vaardig gebruik van de wiskunde. Daarentegen kan de wiskunde zich steeds zelfstandig redden, zonder een beroep te doen op wat in de mechanica onderwezen wordt. Wanneer men spreekt van coördinatie van het mechanica- en het wiskunde-onderwijs, dan zal er dus vooral sprake zijn van wensen ten behoeve van de mechanica op het gebied van de wiskunde en niet omgekeerd. Die wensen zijn de volgende:

1. Bij het bepalen van een vectorsom heeft de mechanica in de vierde klasse de sinus- en de cosinusregel uit de trigonometrie nodig. Daarom acht de commissie het wenselijk dat deze regels reeds in de derde klasse behandeld zijn. In de vierde klasse zal men spoedig moeten overgaan tot de formules voor $\sin(A \pm B)$, enz.
2. In de mechanica behoren de begrippen snelheid en versnelling ontwikkeld te worden als afgeleiden naar de tijd. De eerste begrippen van de differentiaalrekening zullen dus onderwezen moeten worden. Naar het oordeel van de commissie ligt dit op de weg van de wiskunde, omdat de mechanica zich uiteraard zou

beperken tot wat zij strikt nodig heeft, terwijl de wiskunde er beter een afgerond geheel van kan maken.

Natuurlijk doet zich dan de vraag voor, hoe ver de wiskunde met die „eerste beginselen” zal gaan. De mechanica kan volstaan met: het bepalen van eerste en verdere afgeleiden van een algebraïsche functie van x met gehele of gebroken, positieve of negatieve exponenten, en van de sinus en de cosinus van een hoek ($ax + b$).

Aangezien de begrippen snelheid en versnelling in de mechanica reeds zeer spoedig in de vierde klasse ter sprake komen (uiterlijk begin October), zal de wiskunde er voor moeten zorgen dat de begrippen afgeleide en differentiaalquotiënt reeds in September behandeld worden.

3. Bij het differentiaalquotiënt behoort de behandeling van de integraal aan te sluiten. Voor de mechanica zal men kunnen volstaan met het behandelen van de grondbegrippen en het integreren van een algebraïsche functie van x met gehele positieve of negatieve exponenten, en van de sinus en de cosinus van een hoek ($ax + b$).

III *Het experiment bij het onderwijs in de mechanica.*

De commissie is van mening, dat het onderwijs in de mechanica hoofdzakelijk theoretisch ingesteld moet blijven. Belangrijk is het aankweken van de gewoonte van exact woordgebruik, en het verkrijgen van vaardigheid in dat gebruik. Voor de formulering van vele fundamentele begrippen en wetten verschaft de dagelijkse ervaring van de leerlingen voldoende gegevens. Echter geven eenvoudige, duidelijke demonstraties de gelegenheid er aan te herinneren, dat de leer der krachten berust op hypothesen, zodat verificatie van belang is. Het moeten dus proeven zijn, waarmee een voldoende nauwkeurige uitkomst bereikt kan worden, b.v. val- en slingerproeven; enkele kunnen de leerlingen zelf bij de inleiding in de natuurkunde, in de tweede klasse, reeds uitvoeren; dan echter niet als bevestiging van een theorie, maar ter verkrijging van een resultaat, waarop men zich later kan beroepen.

Het mag overbodig heten hier een lijst van voorbeelden te geven. In de literatuur over dit onderwerp kan ieder belangstellende talrijke voorbeelden vinden.

IV *Programma voor de mechanica.*

Klasse 4.

Kinematica.

Bewegingsgrootheden voor een stoffelijk punt, met toepassing op

eenvoudige voorbeelden van beweging; valbeweging, harmonische beweging en beweging langs een cirkel.

Translatie van een vast lichaam; rotatie van een vast lichaam om een vaste as.

Samenstelling van translatorische bewegingen.

Dynamica.

Kracht en massa. Gewicht. Eenheden: meter-kilogramkracht-seconde-stelsel; centimeter-grammassa-seconde-stelsel; meter-kilogrammassa-seconde-stelsel.

Parallelogram van krachten. Eenvoudige toepassingen: stoffelijk punt op een horizontaal of een hellend vlak zonder wrijving; middelpuntzoekende kracht; mathematische slinger; beweging van verbonden punten zonder wrijving.

Arbeid door een kracht verricht; algemeen geval en bijzondere gevallen (gewicht; kracht, recht evenredig met de afstand tot een punt; kracht, omgekeerd evenredig met het kwadraat van die afstand). Arbeidsvergelijking.

Arbeidsvermogen van beweging en van plaats. Behoud van mechanisch arbeidsvermogen.

Wet van Newton; krachtvelden; potentiaal en potentiële energie. Beweging met wrijving; verlies van mechanisch arbeidsvermogen. Impuls van een kracht; hoeveelheid beweging van een stoffelijk punt (scalair). Impulsvergelijking.

Elastische botsing tegen een wand; elastische rechte botsing van stoffelijke punten. Toepassing op een ideaal gas.

Klasse 5.

Samenstellen van krachten, die in één vlak op een vast lichaam werken en van evenwijdige krachten, ook als zij niet in één vlak werken.

Koppels in één vlak of in evenwijdige vlakken, op een vast lichaam werkend. Momentenstelling

Het begrip zwaartepunt als middelpunt van massa. Ligging van het zwaartepunt van de volgende homogene lichamen: regelmatig prisma, driezijdig prisma, parallellepipedum, viervlak, regelmatige piramide, kogel en bol.

Hoeveelheid beweging als vector.

Willekeurige botsing van twee lichamen.

Behoud van hoeveelheid beweging en van moment van hoeveelheid beweging bij een afgesloten stelsel.

Inleiding tot de begrippen traagheidsmoment en impulsmoment van een lichaam. Arbeid verricht door een koppel bij draaiing van

het lichaam om een as loodrecht op het koppelvlak. Arbeidsvermogen van beweging van een lichaam, dat om een as draait.

BIJLAGE II

Over het eindexamen.

Velines en Wimecos hebben ernstig de vraag onder ogen gezien, of wellicht door het laten vervallen van het centrale schriftelijk werk aan het onderwijs een vrijheid zou kunnen worden gegeven, die een organisch ingroeien van het nieuwe leerplan in het onderwijs zou kunnen bevorderen.

Vele leden der verenigingen achten een schriftelijke contrôle ongewenst; zeer velen echter maken tegen het verdwijnen van een schriftelijk examen ernstige bezwaren. Zij zijn van oordeel, dat een goed ingericht schriftelijk examen het bovenbedoelde ingroeien beter zal bevorderen dan een uitsluitend mondelinge contrôle.

Het verdwijnen van het schriftelijk examen stuitte op zo ernstige bezwaren, dat het voorstel hiertoe niet in beide verenigingen een meerderheid heeft kunnen vinden.

Wel zijn Velines en Wimecos beide van mening, dat alleen dan het concept-programma een bijdrage tot een beter mechanica-onderwijs zal kunnen leveren, als in de toekomst bij het schriftelijk werk afgezien wordt van het opgeven van ingewikkelde vraagstukken, die onevenredig veel rekenwerk vereisen, zoals die in het verleden wel voorkwamen. Eenvoudige, ongecompliceerde opgaven (deels in de trant van de C-opgaven van het natuurkunde-examen) zullen de ingewikkelder van weleer dienen te vervangen.

Naar het oordeel van beide verenigingen rust dan ook op de samenstellers van mechanica-opgaven voor het schriftelijk eindexamen in de toekomst de plicht door het opstellen van didactisch verantwoorde opgaven een goede contrôle van de in het concept-programma voorgestelde leerstof mogelijk te maken.

ADRES INZAKE DE EINDEXAMENOPGAVEN 1952.

*Aan het College van Inspecteurs van
het V.H.M.O..*

Hoogedelgestrenge Heren,

Naar aanleiding van het indertijd door Uw College tot het Bestuur van Wimecos gericht verzoek om elk jaar opmerkingen over de eindexamenopgaven der H.B.S. B aan U te doen toekomen, meent ons Bestuur er goed aan te doen zich ook dit jaar dienaangaande tot U te wenden. Reeds enige tijd is er bij ons Bestuur een zekere ongerustheid ontstaan over de *hoeveelheid* werk, die voor de vakken van de „Linker” Groep (Wis- en Werktuigkunde, Natuur- en Scheikunde) wordt opgegeven. Nu dit jaar voor een paar Wiskunde-vakken zoveel werk is opgegeven, dat practisch niet één candidaat kans heeft gezien om klaar te komen, meent het, dat dit punt Uw bijzondere aandacht behoeft. Een candidaat moet gelegenheid hebben om rustig te denken en aan het eind zijn werk nog eens te kunnen corrigeren. Indertijd is van de zijde van Wimecos gevraagd, of het niet goed zou zijn de twee gebruikelijke, meer bewerkelijke vraagstukken te vervangen door wat meer kleinere opgaven, opdat een groter gebied van de te examineren stof zou worden bestreken. Vroeger bestonden de vraagstukken vaak uit vier delen. Wanneer men thans echter de opgaven b.v. voor de Algebra beziet, dan merkt men, dat deze uit *twee* of *meer* delen bestaan en vraagt men zich af, of de oude toestand met twee vraagstukken niet te prefereren is.

Ook bij de Mechanica is naar de mening van het Bestuur de klacht van te veel werk gegrond. Daar Algebra en Mechanica bovendien op de eerste dag van het schriftelijk examen werden gevraagd, is dit ook psychologisch niet erg gelukkig geweest.

Bij de Mechanica is het verschil in zwaarte van vraagstuk drie en vier wel erg opvallend.

Bij de Goniometrie, waarvoor vier vraagstukken werden gegeven, wijst ons Bestuur er op, dat het vierde vraagstuk zo tijdrovend was, dat het zeker niet minder tijd vergde dan een vraagstuk uit de tijd van twee vraagstukken. Integendeel, eerder meer! Het is

natuurlijk goed, dat de kandidaten blijk geven nauwkeurig met logaritmen te kunnen werken, maar het opgegeven vraagstuk was hiervoor zeker niet de meest aangewezen opgave.

Bij de Stereometrie kwam ook weer de vraag naar voren: „Waarom drie in plaats van twee vraagstukken? Zijn deze opgaven dan zoveel minder bewerkelijk dan die uit de vorige periode?”

Voor de opgaven der Beschrijvende Meetkunde zou ons Bestuur slechts de opmerking willen maken, dat een der constructies uit het tweede vraagstuk aanleiding gaf tot een figuur, waarbij verschillende lijnen bijna langs elkaar vielen. Daar dit voor het nakijken moeilijkheden opleverde, zonder dat men meer inzicht in de kennis van de kandidaten kreeg, lijkt het beter, dat men dit door andere keuze der gegevens vermijdt.

Tenslotte zou het Bestuur U de vraag willen voorleggen, of het misschien aanbeveling verdient de door Uw college verstrekte normen bij de opgaven in dezelfde enveloppe in te sluiten.

Het behoeft wel geen betoog, dat ons Bestuur eventueel gaarne Uw College nader wil inlichten.

Namens het Bestuur van Wimecos

Ir. J. J. Tekelenburg

Secretaris.

ENIGE KINEMATISCHE BEWIJZEN IN DE MEETKUNDE.

door

J. HAANTJES ¹⁾).

§ 1. *Verplaatsingen.* Een verplaatsing van een figuur in het platte vlak is bepaald door de verplaatsing van twee punten van de figuur. Immers het begrip verplaatsing houdt in, dat de afstand van elk tweetal punten van de figuur standvastig blijft. Als figuur zou men zich bijvoorbeeld kunnen denken de figuur gevormd door de gezamenlijke punten van het vlak.

Laten A_0 en B_0 twee punten zijn van de figuur, die na een verplaatsing in A_1 en B_1 gekomen zijn. Is O het snijpunt van de middel-

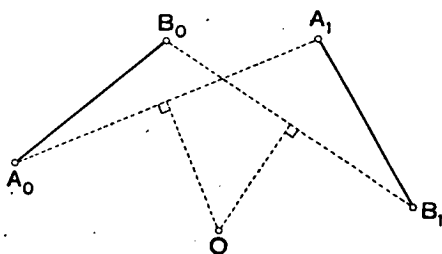


Fig. 1

loodlijnen van A_0A_1 en B_0B_1 , dan zijn de driehoeken A_0OB_0 en A_1OB_1 congruent, waaruit kan worden afgeleid, dat $\angle A_0OA_1 = \angle B_0OB_1$. Hieruit volgt, dat de beschouwde verplaatsing verkregen kan worden door een *rotatie* om O als centrum. Indien de genoemde middelloodlijnen evenwijdig zijn en niet samenvallen, dan is de vierhoek $A_0A_1B_0B_1$ een parallellogram. In dit geval kan de verplaatsing worden verkregen door een *translatie*. Vallen de middelloodlijnen samen dan is de genoemde vierhoek een gelijkbenig trapezium. In het laatste geval is de verplaatsing te verkrijgen door een *rotatie* om het snijpunt van A_0B_0 en A_1B_1 . Samenvattend komen we tot de conclusie: *Een willekeurige verplaatsing is te verkrijgen door of een rotatie of een translatie.*

¹⁾ Lezing, gehouden voor de vergadering van „Wimecos” op 3 Jan. 1953.

Het product van twee rotaties. Beschouwen we thans de verplaatsing die verkregen wordt door achtereenvolgens een figuur (het vlak) aan twee rotaties R_1 en R_2 te onderwerpen. De zo verkregen verplaatsing bepaalt weer éénduidig een rotatie of een translatie, die we aanduiden met R . Men noemt R het product van R_1 en R_2 en noteert: $R = R_2 R_1$ (Men bedenke, dat $R_2 R_1$ in 't algemeen niet gelijk is aan $R_1 R_2$). Is A het centrum van R_1 and 2α de hoek waarover gewenteld wordt, in een bepaalde zin gemeten, dan geven we dit aan als volgt: $R_1(A, 2\alpha)$. Evenzo $R_2(B, 2\beta)$.

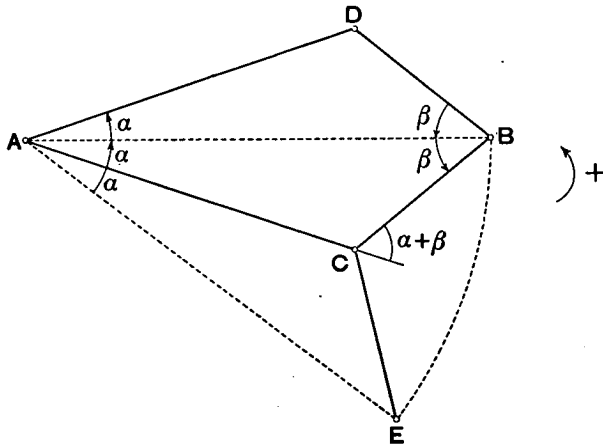


Fig. 2

Uit de figuur leest men af, dat bij de rotatie $R_1 : C \rightarrow D, E \rightarrow B$ en bij de rotatie $R_2 : D \rightarrow C$ en $B \rightarrow B$. Derhalve is R een rotatie, die C tot centrum heeft en E overvoert in B . De draaiingshoek van R is dus $2\alpha + 2\beta$, de som van de wentelingshoeken van R_1 en R_2 . Zonder aan de algemeenheid te kort te doen kan men aannemen,

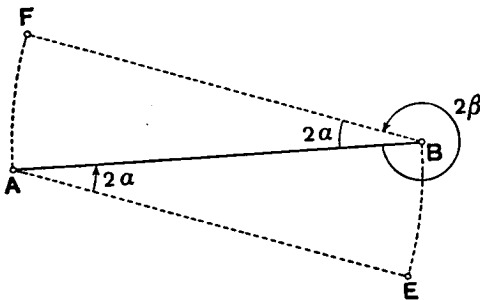


Fig. 3

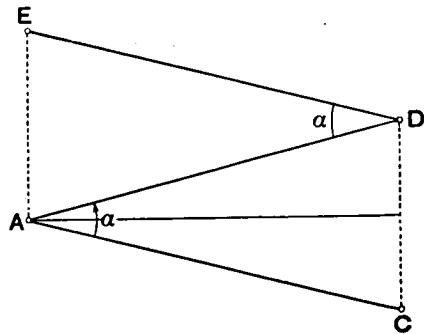


Fig. 4

dat zowel 2α als 2β niet negatief zijn en kleiner dan 360° . Immers de

hoeken van wenteling zijn op veelvoud van 360° na bepaald. Men ziet dus, dat het product $R_2 R_1$ van de rotaties $R_1(A, 2\alpha)$ en $R_2(B, 2\beta)$ een rotatie $R(C, 2\alpha + 2\beta)$ is, waarbij het punt C als volgt verkregen wordt: Men wentelt de rechte AB om A over een hoek $-\alpha$ en ook om B over een hoek $+\beta$. Het snijpunt van deze gewentelde rechten is het punt C. De hier beschreven constructie van C gaat niet op, als $\alpha + \beta = 180^\circ$. In dit geval zal (zie fig. 3) het punt $E \rightarrow B$ en het punt $A \rightarrow F$. Uit de figuur leest men af, dat $AE \parallel FB$, zodat R een translatie is bepaald door de vector $\overrightarrow{AF}$. Vallen A en B samen, dan is R een translatie over de afstand nul. We duiden deze translatie aan door de letter I. Het product van een translatie en een rotatie is weer een rotatie. Is T de translatie bepaald door de vector $\overrightarrow{EA}$ en R de rotatie $R(A, \alpha)$, dan leest men uit fig. 4 af, dat $RT = R_1(D, \alpha)$ en $TR = R_2(C, \alpha)$.

Door een translatie aan te duiden als een rotatie zonder centrum en draaiingshoek nul kan men de verkregen resultaten aldus samenvatten:

Het product van twee rotaties R_1 en R_2 is een rotatie waarvan de hoek van wenteling gelijk is aan de som van die van de rotaties R_1 en R_2 . Ook is uit het voorgaande duidelijk, dat voor twee rotaties R_1 en R_2 (beide $\neq I$) alleen dan de betrekking $R_1 R_2 = R_2 R_1$ geldt indien ze of hetzelfde centrum hebben of beide translaties zijn.

§ 2. *Enkele toepassingen:* I. Het is algemeen bekend, dat een driehoek bepaald is, als de middens van de zijden in ligging gegeven zijn, en dat de analoge kwestie voor vierhoeken geheel anders is.

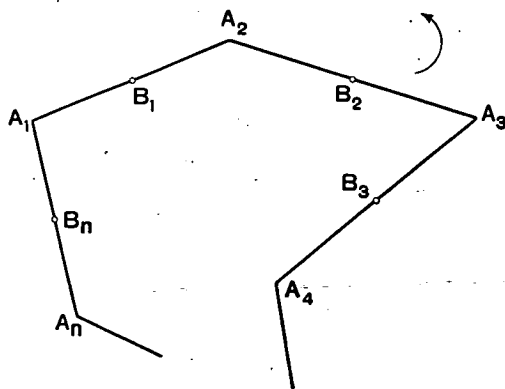


Fig. 5

Immers de middens van de zijden van een vierhoek vormen de

hoekpunten van een parallelogram en bij gegeven middens behoren oneindig veel vierhoeken. Wij willen dit vraagstuk thans voor een n -hoek bekijken. Laten $A_1, A_2, \dots, A_n$ de hoekpunten zijn en $B_1, B_2, \dots, B_n$ de middens van $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_1$. We beschouwen de rotaties $R_i (B_i, \pi)$. De rotatie R_i voert het punt A_i over in het punt A_{i+1} . Het product R_2R_1 is een rotatie over 360° dus een translatie. Daar hierbij $A_1 \rightarrow A_3$ is de translatievector $\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{2B_1B_2}$. Beschouw nu het product $R = R_nR_{n-1} \dots R_2R_1$. Bij deze rotatie gaat $A_1 \rightarrow A_1$. We onderscheiden nu de volgende twee gevallen:

1°. $n = 2p + 1$ (n oneven). In dit geval is R een rotatie over 180° met A_1 tot centrum. Zijn de punten B_i gegeven, dan kan men het punt A_1 vinden door van de rotaties R_i het product te vormen $R = R_{2p+1}(R_{2p}R_{2p-1}) \dots (R_2R_1) = R_{2p+1}T$ waar T een translatie is bepaald door de vector $2(\overrightarrow{B_1B_2} + \dots + \overrightarrow{B_{2p-1}B_{2p}}) = \vec{v}$.

Ook kan men voor de constructie van A_1 uitgaan van een willekeurig punt C_0 van het vlak en het beeldpunt van C_0 bepalen bij de rotatie R . Men doet dit door de rij $C_1, \dots, C_n$ te construeren, waarbij C_i het punt is waar C_{i-1} in overgaat bij de rotatie R_i . A_1 is dan het midden van het segment C_0C_n .

Er volgt: *Een n -hoek (n oneven) is eenduidig bepaald door de ligging van de middens van de (genummerde) zijden.* De punten B_i kunnen willekeurig gekozen worden indien men aan de gebroken lijn $A_1A_2 \dots A_nA_1$ tenminste geen extra eisen stelt.

2°. $n = 2p$ (n even). De rotatie R is nu een rotatie over een veelvoud van 2π , dus over de hoek nul, d.w.z. R is een translatie. Daar echter A_1 bij de rotatie R in zichzelf overgaat is $R = I$, hetgeen betekent, dat elk punt van het vlak op zijn plaats blijft. *Zijn dus de punten B_i de middens van een $2p$ -hoek, dan zijn het de middens van oneindig veel $2p$ -hoeken*, daar men het punt A_1 dan geheel willekeurig kan kiezen. De punten B_i hebben echter een bijzondere ligging. Er behoort immers dan en alleen dan een n -hoek bij als de rotatie R gelijk is aan I . Nu is $R = (R_{2p}R_{2p-1}) \dots (R_4R_3)(R_2R_1)$ het product van p translaties met de translatievectoren $\overrightarrow{2B_1B_2}, \overrightarrow{2B_3B_4}, \dots$. Nodig en voldoende opdat $R = I$ zij is dus

$$\overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_3B_4} + \dots + \overrightarrow{B_{2p-1}B_{2p}} = 0$$

Is O een willekeurig vast punt, dan kan men hiervoor schrijven

$$\overrightarrow{OB_1} + \dots + \overrightarrow{OB_{2p-1}} = \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_{2p}}$$

hetgeen betekent, dat *het zwaartepunt van de punten $B_1, B_3, \dots, B_{2p-1}$ samenvalt met het zwaartepunt van de punten $B_2, B_4, \dots, B_{2p}$.*

II. Op de zijden van een $\triangle ABC$ als basissen beschrijft men buitenwaarts (of binnenwaarts) gelijkbenige driehoeken met tophoeken van 120° . We bewijzen nu eerst, dat de drie toppen D, E en F de hoekpunten vormen van een gelijkzijdige driehoek. Beschouw daar-

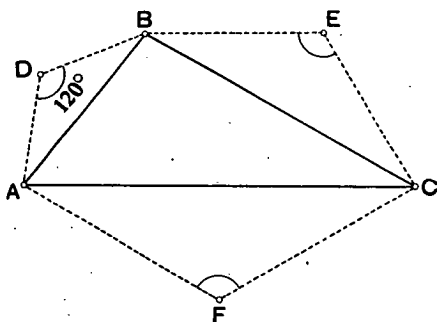


Fig. 6

toe de volgende rotaties $R_1(D, 120^\circ)$, $R_2(E, 120^\circ)$, $R_3(F, 120^\circ)$. Het product $R = R_3 R_2 R_1$ is een rotatie over 360° , dus een translatie, maar daar bij de rotatie R het punt A op zijn plaats blijft, geldt $R = I$. De rotaties R_3 en $R_2 R_1$ heffen elkaar dus op, hetgeen betekent, dat ze hetzelfde centrum hebben. Uit de constructie van het centrum van een product-rotatie (zie § 1) volgt dan onmiddellijk het gestelde. $\triangle DEF$ is gelijkzijdig en de orientatie is negatief.

Daar de stelling ook geldt als de driehoeken binnenwaarts worden

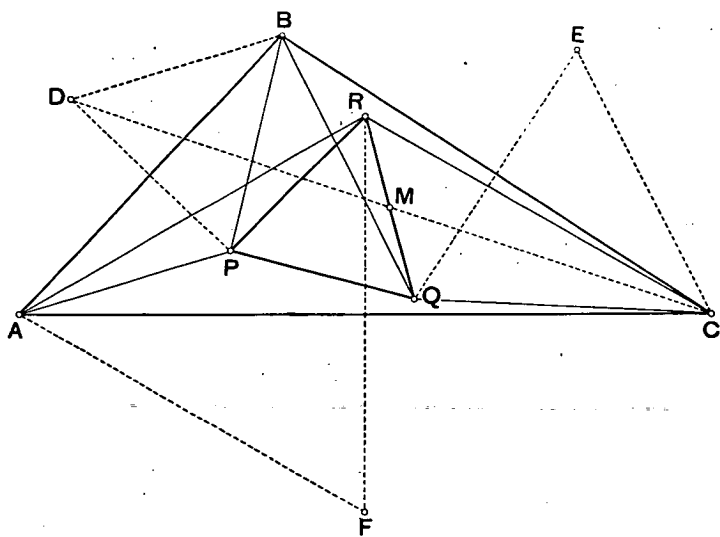


Fig. 7

beschreven, vormen ook de punten P, Q en R, de gespiegelde van

D, E en F t.o.v. de zijden van $\triangle ABC$, de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek, waarvan de orientatie PQR positief is.

Beschouw nu de rotaties $R_1(Q, 120^\circ)$ en $R_2(P, 60^\circ)$. Bij de rotatie R_1 gaat $C \rightarrow B$, by de rotatie R_2 zal $B \rightarrow D$. Bij de rotatie $R = R_2 R_1$ gaat dus C over in D en omdat de hoek van wenteling π is, is M, het midden van DC het centrum van R. Anderzijds volgt uit de constructie van § 1, dat de hoeken P en Q van $\triangle PMQ$ gelijk zijn aan 30° resp. 60° en de orientatie negatief is. Het punt M is dus het midden van RQ. Men kan dit ook inzien door op te merken, dat bij de rotatie R het punt Q overgaat in R. Bij gevolg geldt de volgende stelling. *De middens van de segmenten AE, BF en CD (zie fig. 6) vormen de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek.*

III. Beschrijft men op de zijden van een vierhoek ABCD als basissen buitenwaarts gelijkbenige rechthoekige driehoeken dan vormen de vier toppen de hoekpunten van een tweede vierhoek, waarvan de diagonalen gelijk zijn en loodrecht op elkaar staan. Teneinde deze stelling te bewijzen beschouwen we de volgende rotaties (zie figuur):

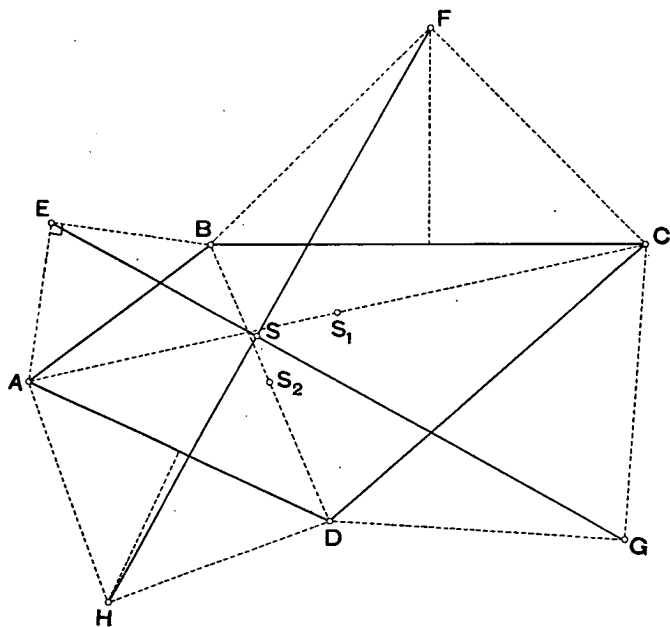


Fig. 8

$R_1(E, 90^\circ)$, $R_2(F, 90^\circ)$, $R_3(G, 90^\circ)$, $R_4(H, 90^\circ)$. Bij de rotatie R_1 gaat A over in B, bij R_2 gaat B over in C enz. Het product $R = R_4 R_3 R_2 R_1$ is dus een translatie waarbij A overgaat in A, d.w.z.

$R = I$. R_2R_1 is een rotatie over 180° waarbij $A \rightarrow C$; het centrum is dus S_1 , het midden van AC . Daar de rotatie R_2R_1 , door de rotatie R_4R_3 wordt opgeheven hebben beide hetzelfde centrum. Wegens hetgeen in § 1 is opgemerkt omtrent de productvorming is de ligging als in fig. 9 is aangegeven. $ES_1 = FS_1$; $GS_1 = HS_1$; $\angle FS_1E = \angle HS_1G = 90^\circ$. Door een rotatie over 90° om S_1 als centrum gaat $H \rightarrow G$ en $F \rightarrow E$, dus $HF \rightarrow GE$. Hieruit volgt het gestelde. Tevens

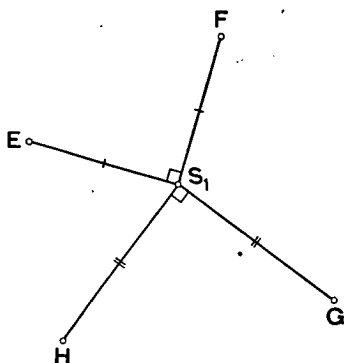


Fig. 9

ziet men er uit, dat S_1 op gelijke afstand ligt van de rechten HF en EG . Eenzelfde overweging geldt voor S_2 . Bij een wenteling over 90° om S_2 gaat $G \rightarrow F$ en $E \rightarrow H$, dus $GE \rightarrow FH$. S_1 en S_2 liggen dus op twee verschillende bissectrices van S , zodat $\angle S_1SS_2 = 90^\circ$. Door het product te beschouwen van de genoemde rotaties om S_1 en S_2 bewijst men, dat de middens van HF en EG met S_1 , S_2 en S op een cirkel liggen.

Door van de vierhoek twee hoekpunten te laten samenvallen krijgt men hieruit een stelling betreffende een driehoek.

§ 3. *De snelheidsverdeling.* De snelheden van de punten van een vlak bij een beweging zijn op elk oogenblik dezelfde als die bij een rotatie of een translatie. Het centrum van zo'n rotatie, dat van oogenblik tot oogenblik kan veranderen, heet de pool van de beweging. Bovengenoemde bewering kan door een limietovergang afgeleid worden uit de in § 1 bewezen stelling, dat elke verplaatsing te verkrijgen is door een rotatie of een translatie. Enkele bijzondere eigenschappen van het veld van de snelheidsvectoren zijn hier een onmiddellijk gevolg van:

1°. *De eindpunten van de snelheidsvectoren van de punten van een rechte l liggen op een rechte l' . De hoek tussen l en l' is onafhankelijk van de plaats van de rechte l .* Daar voor een translatie de bewering direct duidelijk is (alle punten hebben dan dezelfde snelheid), is

het voldoende het bewijs te geven voor een rotatie. Is O de pool van de beweging, dan staat de snelheidsvector $\overrightarrow{PP'}$ van een punt P (zie fig. 10) loodrecht op OP . De grootte is ωr , waar $r = OP$ en ω de

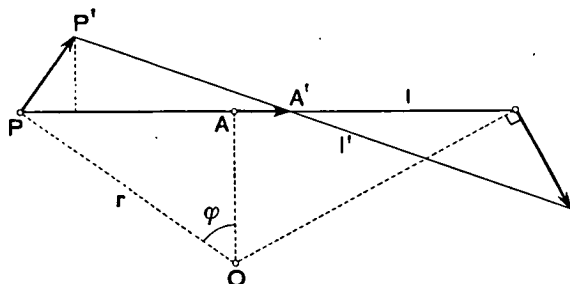


Fig. 10

hoeksnelheid voorstelt. De projectie van de snelheidsvector op de rechte l heeft de lengte $\omega r \cos \varphi = \omega \cdot AO$, waar OA de afstand van O tot l is en is dus voor alle punten van l dezelfde. De projectie op een rechte loodrecht op l is $\omega r \sin \varphi = \omega AP$, dus evenredig met de afstand AP , waarbij de richtingen voor punten, die aan verschillende kant van A liggen, tegengesteld zijn. De meetkundige plaats van de punten P , krijgt men dus door eerst l in zijn eigen richting over een afstand ωAO te verschuiven en daarna elk punt in de richting $\perp l$ te verschuiven over een afstand evenredig met de afstand tot het verplaatste punt $A (= A')$. Deze meetkundige plaats is dus een rechte l' . Uit de figuur lezen we af, dat voor de hoek α tussen l en l' geldt: $\tan \alpha = \omega \cdot AP/AP = \omega$. Voor alle rechten l vindt men dus dezelfde hoek. De punttoevoeging $P \rightarrow P'$ is ook te zien als te zijn ontstaan uit een rotatie om O over de hoek α gevolgd door een vermenigvuldiging. Hieruit volgt ook, dat drie punten op een rechte liggen als de eindpunten van hun snelheidsvectoren op een rechte liggen.

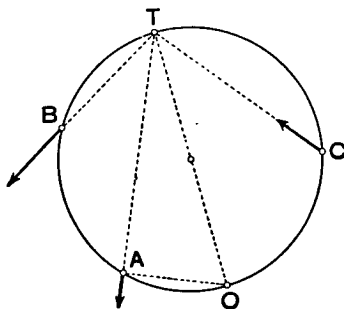


Fig. 11

2°. Gaan van 3 punten A, B en C de dragers der snelheidsvectoren door één punt, dan liggen A, B, C en de pool O op een cirkel en omgekeerd. Het bewijs van het omgekeerde is eenvoudig. De dragers van de snelheidsvectoren van de punten van een cirkel door O gaan alle door T, het tegenvpunt van O op de cirkel.

Gaan de dragers van de snelheidsvectoren van de punten A, B en C door een punt T, dan zal de cirkel door O, A en B dit punt T bevatten als tegenpunt van O. Daar $\angle OCT = 90^\circ$ ligt ook C op deze cirkel.

§ 4. Toepassingen. I. Laten D, E en F drie punten zijn op de zijden van $\triangle ABC$ (of hun verlengden); zie figuur 12. Dan gaan de drie omgeschreven cirkels γ_2 , γ_3 en γ_1 van $\triangle DBE$, $\triangle ECF$ en $\triangle FAD$ door één punt.

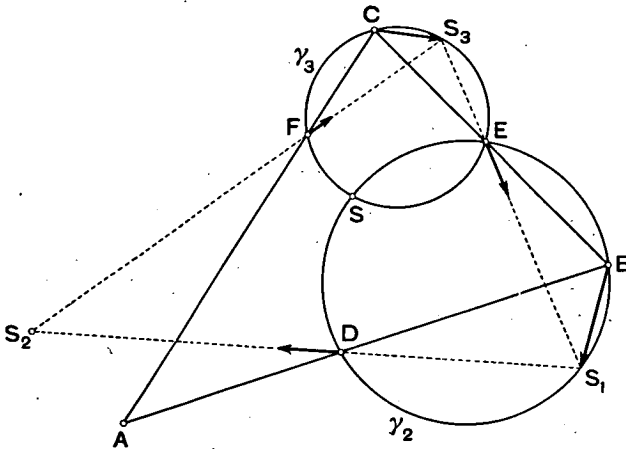


Fig. 12

Bewijs: Laat S het van E verschillend snijpunt zijn van de cirkels γ_2 en γ_3 . Beschouw nu een rotatie om S. De dragers van de snelheidsvectoren van E, F en C gaan door S_3 , het tegenpunt van S op γ_3 . Kiest men de hoeksnelheid zo groot, dat $\overrightarrow{CS_3}$ de snelheidsvector van C is, dan zijn S_3F en S_3E de rechten, waarop de eindpunten van de snelheidsvectoren van de punten van AC en BC liggen. $\overrightarrow{BS_1}$ is dus de snelheidsvector van B, waaruit op dezelfde wijze volgt, dat de drager van de snelheidsvector van D tevens de meetk. plaats is van de eindpunten van de snelheidsvectoren van de punten van AB. Het snijpunt S_2 van S_3F en S_1D is dus het eindpunt van de snelheidsvector van A. De snelheidsvectoren van de punten A, D en F gaan derhalve door één punt, waaruit volgt, dat de pool S op γ_1 ligt.

II. Beschouw de punten O, A, B en C op een cirkel γ gelegen en een rotatie om O. De dragers der snelheidsvectoren van A, B en C

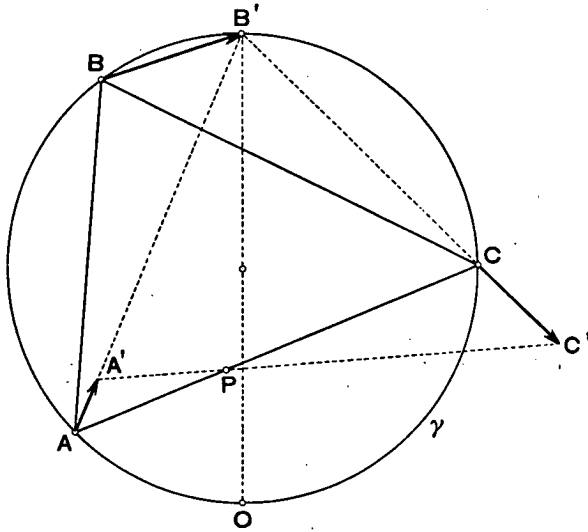


Fig. 13

gaan door het punt B', tegenpunt van O op γ . Kies de rotatie zo groot, dat $\overrightarrow{BB'}$ de snelheidsvector van het punt B is. Zijn nu $\overrightarrow{AA'}$ en $\overrightarrow{CC'}$ de snelheidsvectoren van de punten A en C, dan liggen op de rechten A'B', B'C' en C'A' de eindpunten van de snelheidsvectoren van de punten van AB, BC en CA. Nu is $\triangle PCC' \sim \triangle ABB'$ als gevolg van de tweede in § 3 onder 1^o genoemde eigenschap. Bijgevolg geldt $PC : v_C = AB : v_B$ of $PC \cdot v_B = AB \cdot v_C$, als met v_A , v_B , v_C de grootte van de snelheden van de punten A, B, C is aangeduid. Evenzo volgt uit de gelijkvormigheid van $\triangle AA'P$ met $\triangle BB'C$: $AP \cdot v_B = BC \cdot v_A$. Optelling geeft $AC \cdot v_B = AB \cdot v_C + BC \cdot v_A$. Nu is de snelheid van een punt evenredig met zijn afstand tot de pool O, zodat hiermede gevonden is dat $AC \cdot OB = AB \cdot OC + BC \cdot OA$, de *stelling van Ptolemaeus*.

III. Als derde voorbeeld kiezen we de kwestie, die betrekking heeft op de *rechte van Wallace*. Laat P een punt zijn van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Bij een rotatie om P gaan de dragers van de snelheidsvectoren van A, B en C ($\overrightarrow{AA'}$, enz.) door één punt. De twee driehoeken ABC en A'B'C' hebben dus de eigenschap, dat de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten door één punt gaan. Volgens de stelling van Desargues zullen dan de snij-

punten van de overeenkomstige zijden op één rechte liggen. Deze snijpunten zijn de eindpunten van de snelheidsvectoren van de voetpunten van de loodlijnen uit P op de zijden van $\triangle ABC$ neergelaten. Maar als deze eindpunten op een rechte liggen, is dit ook het geval met de drie genoemde voetpunten (rechte van Wallace).

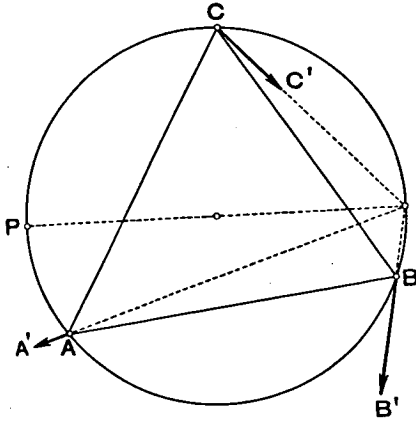


Fig. 14

Liggen omgekeerd de voetpunten van de loodlijnen uit een punt P op de zijden van de driehoek ABC op een rechte, dan geldt dit ook voor de eindpunten van de snelheidsvectoren van deze punten bij een wenteling om P. Door nu het omgekeerde van de genoemde stelling van Desargues toe te passen volgt dat de dragers van de snelheidsvectoren van de punten A, B en C door één zelfde punt gaan. Maar dan ligt (zie § 3 onder 2°) P op de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. De omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$ is dus de meetkundige plaats van de punten P, die de eigenschap hebben, dat de voetpunten van de loodlijnen uit P op de zijden van $\triangle ABC$ neergelaten op één rechte liggen.

BESCHOUWINGEN OVER DE REËLE GETALLEN

door

Dr A. F. MONNA.

Inleiding. De aanleiding tot het schrijven van dit artikel vormde de lectuur van een boek uit de bekende serie boeken van N. Bourbaki over de algemene topologie. ¹⁾ Speciaal trof mij de wijze waarop de logarithmische functie wordt ingevoerd. Zijn methode verschilt, voor zover mij bekend, sterk van de gebruikelijke methoden, bijv. van die van Landau en van die van Felix Klein, die de natuurlijke logarithme definieert als integraal. ²⁾ De methode van Bourbaki doet scherp naar voren komen dat in de reële getallen algebraïsche en topologische eigenschappen samengaan en het gevolg daarvan is, dat de wezenlijke betekenis van de logarithme scherp wordt belicht.

In hetgeen volgt wordt de methode van Bourbaki weergegeven, waarbij het bewijs van een enkele stelling niet wordt gereproduceerd. Het inzicht wordt daardoor niet gestoord.

In het eerste deel worden enige, voor een deel voor een juist begrip

¹⁾ N. Bourbaki. Les structures fondamentales de l'analyse. Het deel handelend over „topologie générale” (livre III van de serie; livre I geeft théorie des ensembles, livre II geeft algèbre) bestaat uit verschillende boeken, nl. de delen Actualités scientifiques et industrielles 858, 916, 1029, 1045 en 1084 (Paris, achtereenvolgens in de jaren 1940, 1942, 1947, 1948 en 1949). De invoering van de exponentiële en logarithmische functie vindt men in no. 1029.

²⁾ E. Landau. Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung. Groningen 1934. Landau voert de logarithme in als limiet van een bepaalde rij getallen, waarvan hij de convergentie bewijst met behulp van klassieke algebraïsche middelen.

F. Klein. Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Deel 1. Per definitie wordt gesteld

$$\log x = \int_1^x \frac{dx}{x}.$$

De logarithmen verschijnen dus als oppervlakken, begrensd door een gelijkzijdige hyperbool. Met deze definitie bewijst men gemakkelijk het additietheorema voor de logarithmen. Zie ook: B. L. van der Waerden, Differentiaalrekening (Servire's encyclopedie 1951), blz. 87 e.v.

van de invoering van de logarithme nodige, beschouwingen over de reële getallen gegeven. In het tweede deel volgt dan de definitie van de logarithme.

Deel I.

§ 1. In het lichaam der reële getallen vallen de volgende belangrijke groepen te onderscheiden:

1° de additieve groep, die we aanduiden door R ;

2° de multiplicatieve groep van de reële getallen $\neq 0$, die we aanduiden door R^* ;

3° de multiplicatieve groep van de reële getallen > 0 , die we aanduiden door R_+^* .

Voor het vervolg zijn van speciaal belang de groepen R en R_+^* . Wij zullen in het tweede deel zien dat de logarithme kan worden ingevoerd als een afbeeldingsrelatie van R_+^* op R .

§ 2. In deze groepen wordt vervolgens een topologie vastgelegd. *Topologie op R .*

De topologie wordt gedefinieerd met behulp van omgevingen. Zij gegeven een getal a in R en een getal $\varepsilon > 0$. Een open ε -omgeving bestaat per definitie uit alle $x \in R$ waarvoor $|x - a| < \varepsilon$ of

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Een stelsel omgevingen van a verkrijgt men door ε alle positieve reële getallen te laten doorlopen. Aldus is voor ieder getal van R een stelsel omgevingen bepaald. Deze omgevingen voldoen aan de axioma's die men in de topologie aan het omgevingsbegrip oplegt. Wij gaan daarop niet in omdat dat voor hetgeen volgt niet nodig is. ¹⁾

De aldus vastgelegde topologie, die wij aangeven door T_a , heeft een belangrijke eigenschap, die waard is naar voren te worden gebracht. Door de optelrelatie in R is een functie gedefinieerd in de productruimte $R \times R$, dit is de ruimte van de geordende paren (x, y) als x en y onafhankelijk van elkaar R doorlopen. Het is de functie $x + y$ ($x, y \in R$). Het is een elementair feit dat deze functie continu is in $R \times R$ (het behoeft geen toelichting hoe de omgevingen in $R \times R$ worden gedefinieerd, uitgaande van die in R). De tweede fundamentele operatie in R is de vorming van het tegengestelde van ieder getal. Op R is daardoor een functie gedefinieerd,

¹⁾ Er bestaan verschillende methoden om op een verzameling een topologie in te voeren. Bij de omgevingsmethode onderwerpt men het begrip omgeving aan bepaalde axioma's. Deze axioma's verschijnen als eigenschappen van het begrip omgeving als men de methode van de topologische toevoeging als uitgangspunt kiest. Zie Bourbaki no. 858; ook F. Hausdorff, Mengenlehre (Dover publications, New York, blz. 226 e.v.).

nl. de functie die aan $x \in R$ toevoegt het getal $-x$. Ook deze functie is continu.

Men drukt deze eigenschappen, die hier triviaal zijn, uit door te zeggen, dat de structuur van de groep en de op de groep gedefinieerde topologie compatibel zijn.

Toch is deze kwestie van grote betekenis. Heeft men een groep, multiplicatief genoteerd, en daarop gedefinieerd een topologie (bijv. door omgevingen), dan heet deze groep een topologische groep indien 1° xy een continue functie is en 2° x^{-1} continu is.¹⁾

De hiervoor op R gedefinieerde topologie is bovendien ook compatibel met de multiplicatieve structuur van de reële getallen, d.w.z. 1° xy is een continue functie en 2° x^{-1} is continu in R^* .

Tezamen genomen drukt men deze eigenschappen uit door te zeggen dat de reële getallen met de aangegeven topologie een topologisch lichaam vormen.

Topologie op R_+^ .*

Een topologie kan op volkomen analoge wijze worden ingevoerd. Daarbij vervult het getal 1 de rol van het getal 0 in de additieve theorie. De omgevingen van een getal $a \in R_+^*$ definiëren wij als volgt. Zij gegeven een getal $\varepsilon > 1$. De verzameling van de getallen x uit R_+^* die voldoen aan

$$a\varepsilon^{-1} < x < a\varepsilon \quad (1a)$$

of

$$\varepsilon^{-1} < xa^{-1} < \varepsilon \quad (1b)$$

heet een omgeving van a .

Een stelsel omgevingen van a verkrijgt men door ε alle reële getallen > 1 te laten doorlopen (uiteraard kan niet $\varepsilon \leq 1$ worden genomen, zomin als in de additieve theorie $\varepsilon \leq 0$). Als $\varepsilon \rightarrow 1$ trekken de omgevingen zich tot a samen. De symmetrie-eigenschap van de omgevingen in de additieve theorie blijft behouden: zoals $|x - a| < \varepsilon$ equivalent is met $|a - x| < \varepsilon$, zo is thans (1b) equivalent met

$$\varepsilon^{-1} < x^{-1}a < \varepsilon.$$

Door het stelsel van de omgevingen, aldus bepaald voor alle getallen van R_+^* , is een topologie vastgelegd op R_+^* , die zal worden aangegeven door T_m .

Op R_+^* kan nog op eenvoudige wijze een andere definitie van het begrip omgeving worden gegeven, nl. door uit te gaan van T_a . De topologie T_a induceert op R_+^* omgevingen. Men houdt dan de definitie $|x - a| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) aan, waarbij wordt afgesproken dat even-

¹⁾ Bourbaki no. 916.

tuele getallen $x \leq 0$ die aan deze ongelijkheid voldoen, niet worden gerekend te behoren tot de omgeving. Men verkrijgt dan op R_+^* een stelsel omgevingen, aangeduid door T_a^* , dat verschillend is van T_m . Dit verschil is echter voor vele eigenschappen niet wezenlijk. Men ziet nl. gemakkelijk in, dat iedere omgeving van T_m een omgeving van T_a^* bevat en omgekeerd iedere omgeving van T_a^* een omgeving behorend tot T_m . De beide topologieën zijn dus zgn. equivalent. Hieruit vloeit voort dat het voor vele eigenschappen van geen belang is of men de ene dan wel de andere topologie beschouwt. Bijv. is dit het geval voor de genoemde continuïteitseigenschappen van de fundamentele groepsoperaties. Deze eigenschappen zijn zgn. topologische eigenschappen. Er bestaan evenwel eigenschappen van de reële getallen die gelden t.o.v. T_m doch niet t.o.v. T_a^* . Hoewel niet van belang voor de definitie van de logaritmische functie, is het wellicht toch interessant hierop nader in te gaan.

§ 3. De nu volgende stellingen hebben betrekking op R_+^* en de topologie T_m . Waar de topologie T_a^* zal worden beschouwd, zal dat uitdrukkelijk worden vermeld.

Definitie 1. Een verzameling van getallen uit R_+^ heet begrensd indien er een getal $M > 1$ bestaat zo, dat voor alle getallen x van die verzameling geldt*

$$M^{-1} < x < M$$

Definitie 2. Een getal ξ heet verdichtingspunt t.o.v. T_m van een oneindige verzameling V indien er in iedere omgeving van ξ oneindig veel getallen x van V liggen, m.a.w. indien er voor iedere $\varepsilon > 1$ oneindig vele x uit V zijn waarvoor

$$\varepsilon^{-1} < x^{-1}\xi < \varepsilon.$$

Stelling 1. Iedere begrensde oneindige verzameling V in R_+^ bezit tenminste één verdichtingspunt in R_+^* .*

Bewijs. Omdat V begrensd is bestaat er een getal $a > 1$ zo, dat voor alle x uit V geldt

$$a^{-1} < x < a.$$

Verdeel alle getallen van R_+^* in twee klassen:

De eerste klasse bevat alle getallen α met de eigenschap dat $x < \alpha$ niet geldt voor oneindig vele x uit V .

De tweede klasse bevat de getallen β met de eigenschap dat $x < \beta$ voor oneindig vele x uit V .

Ieder getal behoort tot één en slechts één klasse. Het getal a^{-1} ligt in de eerste klasse; het getal a ligt in de tweede klasse. Men ziet gemakkelijk in, dat elk getal van de eerste klasse kleiner is dan elk

getal van de tweede klasse. De klassen bepalen dus een snede en er is dus een getal ξ zodanig, dat iedere α waarvoor $\alpha < \xi$ behoort tot de eerste klasse en iedere α waarvoor $\alpha > \xi$ behoort tot de tweede klasse. ξ is het gezochte verdichtingspunt. Zij daartoe gegeven een getal $\varepsilon > 1$. Dan ligt $\xi\varepsilon^{-1}$ in de eerste klasse en $\xi\varepsilon$ in de tweede klasse. Er zijn dus oneindig veel getallen x uit V waarvoor $x < \xi\varepsilon$, daarentegen niet oneindig vele x met $x < \xi\varepsilon^{-1}$. Samengevat zijn er dus oneindig veel getallen x uit V waarvoor

$$\xi\varepsilon^{-1} < x < \xi\varepsilon,$$

of

$$\varepsilon^{-1} < x^{-1}\xi < \varepsilon.$$

In de door ε bepaalde omgeving van ξ liggen dus oneindig veel getallen x uit V en daar $\varepsilon > 1$ willekeurig is, is daarmee de stelling bewezen.

Opmerking. Deze stelling is de bekende stelling van Bolzano-Weierstrasz in multiplicatieve vorm. Het gegeven bewijs is praktisch eensluidend met dat voor het additieve geval.

Definitie 3. Een rij getallen a_n ($n = 1, 2, \dots$) van R_+^* heet een fundamenteaalrij indien er bij iedere $\varepsilon > 1$ een getal $N(\varepsilon)$ bestaat zodanig, dat

$$\varepsilon^{-1} < a_n a_{n+p}^{-1} < \varepsilon$$

voor $n > N(\varepsilon)$ en $p > 0$.

Stelling 2. Iedere fundamenteaalrij is begrensd.

Bewijs. Zij gegeven een $\varepsilon > 1$ en kies n_1 vast $> N(\varepsilon)$ zodat

$$a_{n_1}\varepsilon^{-1} < a_{n_1+p} < \varepsilon a_{n_1} \quad (p > 0).$$

Voor

$$C = \max(\varepsilon a_{n_1}, \varepsilon a_{n_1}^{-1})$$

geldt dan

$$C^{-1} < a_{n_1+p} < C,$$

zodat voor a_n ($n > n_1$) aan definitie 2 is voldaan. Het eindig aantal getallen $a_1, \dots, a_{n_1}$, verstoort de begrensdheid niet, waarmee de stelling is bewezen.

Stelling 3. In R_+^* is iedere fundamenteaalrij convergent, d.w.z. er is een getal $a > 0$ zo, dat, voor iedere $\varepsilon > 1$,

$$\varepsilon^{-1} < a_n a^{-1} < \varepsilon$$

voor $n > N(\varepsilon)$.

Bewijs. Volgens de stellingen 1 en 2 heeft de te beschouwen fundamenteaalrij $\{a_n\}$ tenminste één verdichtingspunt a . Zo dit het enige verdichtingspunt is, is het de limiet van de fundamenteaalrij. Immers, dan liggen er in iedere omgeving van a oneindig veel getallen van de rij en er buiten slechts een eindig aantal (zo niet, dan lag

er volgens stelling 1 buiten die omgeving nog een verdichtingspunt). Daarmede is dan aan de definitie van de limiet voldaan.

Onderstel dus — hetgeen tot een tegenspraak zal blijken te leiden — dat er twee verdichtingspunten a en b zijn. Bij gegeven $\varepsilon > 1$ en $\delta > 1$ zijn er dan oneindige getallenrijen a_{n_i} ($i = 1, 2, \dots$) en a_{n_j} ($j = 1, 2, \dots$) zo, dat

$$\varepsilon^{-1} < a_{n_i} a^{-1} < \varepsilon, \quad (2)$$

$$\delta^{-1} < a_{n_j} b^{-1} < \delta. \quad (3)$$

Daar de rijen a_{n_i} en a_{n_j} ieder oneindig veel getallen bevatten en omdat de gegeven rij een fundamenteaalrij is kan men, in verband met definitie 3, bij iedere gegeven $\eta > 1$ indices i en j vinden zo, dat

$$\eta^{-1} < a_{n_i}^{-1} a_{n_j} < \eta. \quad (4)$$

Uit (2) en (3) volgt met toepassing van de symmetrische vorm van (3), voor deze indices i en j

$$\varepsilon^{-1} \delta^{-1} < a_{n_i} a^{-1} a_{n_j}^{-1} b < \varepsilon \delta,$$

en vervolgens met (4)

$$\varepsilon^{-1} \delta^{-1} \eta^{-1} < a^{-1} b < \varepsilon \delta \eta.$$

Daar ε , δ en η willekeurig > 1 zijn, is dus $a^{-1} b = 1$ of $a = b$.

Deze stelling drukt uit, dat R_+^* zgn. volledig is t.o.v. de topologie T_m . Uit het volgende voorbeeld blijkt dat R_+^* echter niet volledig is t.o.v. T_a^* .

De rij getallen $\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$) is niet begrensd in de zin van definitie 1 en zij is dus geen fundamenteaalrij t.o.v. T_m . Dit is ook rechtstreeks in te zien. Men heeft nl.

$$a_n a_{n+p}^{-1} = \frac{n+p}{n} = 1 + \frac{p}{n}.$$

Bij gegeven $\varepsilon > 1$ is er geen $N(\varepsilon)$ zo, dat

$$\varepsilon^{-1} < 1 + \frac{p}{n} < \varepsilon$$

voor alle $p > 0$. Stelling 3 heeft aldus op deze rij dus geen betrekking. Men ziet evenzo in, dat deze rij noch een deelrij ervan een limiet bezit.

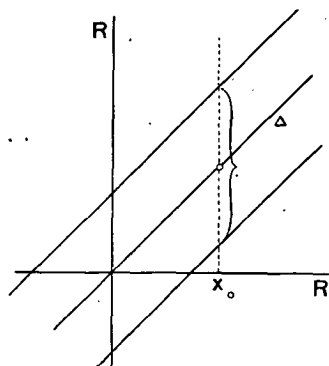
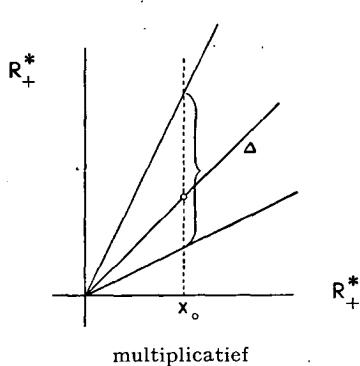
Ten opzichte van de topologie T_a^* is de rij $\frac{1}{n}$ echter wel een fundamenteaalrij (met de bij T_a behorende definitie van het begrip fundamenteaalrij). Maar in R_+^* heeft deze rij aldus geen limiet, omdat het getal 0 niet tot R_+^* behoort.

Overigens geldt dat, in verband met de omstandigheid dat iedere omgeving behorend tot T_a^* een omgeving behorend tot T_m bevat, elke rij getallen, die fundamenteaalrij is ten opzichte van T_m , tevens fundamenteaalrij is ten opzichte van T_a^* , en beide fundamenteaalrijen hebben dezelfde limiet resp. ten opzichte van T_m en T_a^* . Blijkens het voorbeeld geldt het omgekeerde niet.

Men heeft dus: R_+^* is volledig als men de omgeving definiëert met behulp van de multiplicatieve theorie, echter niet volledig als men daarbij uitgaat van de additieve theorie. Het betreft hier dus een eigenschap die voor de ene topologie geldt, echter niet voor de andere hoewel deze beide topologiën equivalent zijn (zie het slot van § 2). *De volledigheid is dus geen topologische eigenschap.*

Er is aanleiding hier iets verder op in te gaan.

De kwestie of een ruimte — in ons geval de verzameling van de reële getallen > 0 — al dan niet volledig is wordt dus niet alleen beheerst door de omgevingen met behulp waarvan in die ruimte een topologie is vastgelegd en waarmee dan het convergentiebegrip wordt gedefiniëerd. Er is blijkbaar meer nodig om uit te maken of een ruimte volledig is. De wijze waarop in de beide door ons beschouwde gevallen de topologie is vastgelegd gaat dan ook veel



additief

verder dan het simpele vastleggen van een stelsel omgevingen voor ieder punt. In het additieve geval bepalen wij de omgevingen met behulp van relaties $|x - y| < \varepsilon$, waarbij bijv. x het punt was waarvoor een omgeving wordt gezocht. Een dergelijke relatie is in feite een relatie tussen twee veranderlijken x en y en om de betekenis ervan te doorzien moeten wij dus de productruimte $R \times R$ beschouwen (zie § 2). De ongelijkheid $|x - y| < \varepsilon$ bepaalt in $R \times R$ een gebied. Dit gebied bevat de zgn. diagonaal, dat is de verzameling van de punten van $R \times R$ waarvoor $x = y$. Het gebied

is symmetrisch ten opzichte van deze diagonaal Δ . Een omgeving van een getal x_0 verkrijgt men door de doorsnede te bepalen van dit gebied met de lijn $x = x_0$.

In het multiplicatieve geval gaat dit op dezelfde wijze. Daar beschouwden wij de ongelijkheden

$$\varepsilon^{-1} < xy^{-1} < \varepsilon \quad (\varepsilon > 1).$$

Hierdoor is, bij gegeven $\varepsilon > 1$, in $R_+^* \times R_+^*$ een gebied bepaald dat eveneens Δ bevat. Dit gebied wordt thans begrensd door de lijnen

$$xy^{-1} = \varepsilon$$

en

$$xy^{-1} = \varepsilon^{-1}.$$

Een omgeving van een getal x_0 verkrijgt men weer als doorsnede van dit gebied met de lijn $x = x_0$. Het punt $(0, 0)$ behoort uiteraard niet tot het gebied.

In beide gevallen is — als men in het eerste geval ε alle getallen > 0 en in het tweede geval ε alle getallen > 1 laat doorlopen — in de corresponderende productruimte een stelsel gebieden bepaald. De beide stelsels hebben gemeenschappelijke eigenschappen. Ieder der gebieden bevat de corresponderende diagonaal, de doorsnede van de gebieden is de diagonaal en tenslotte kan men een betrekking tussen de gebieden afleiden, in het additieve geval door uit te gaan van de zgn. driehoeksongelijkheid (uit $|x - y| < \varepsilon$, $|y - z| < \varepsilon$ volgt $|x - z| < 2\varepsilon$) en in het multiplicatieve geval op analoge wijze (het is thans van geen belang hierop in te gaan).

Er is echter ook een essentieel verschil tussen de beide stelsels. Een gebied voor het additieve geval bevat geen enkel gebied voor het multiplicatieve geval en omgekeerd bevat een gebied voor het multiplicatieve geval geen enkel gebied voor het additieve geval. De beide systemen in de productruimten zijn in deze zin dus niet equivalent, hoewel, zoals men duidelijk ziet, de equivalentie wel geldt voor de omgevingen van een getal die men met behulp van de systemen gebieden bepaalt.

Hierin ligt de oorzaak van het verschijnsel dat de volledigheid geen topologische eigenschap is. Beschouwen wij bijv. de multiplicatieve theorie. Veronderstel, dat men in de productruimte $R_+^* \times R_+^*$ een nieuw stelsel van gebieden heeft bepaald, die ieder ook de diagonaal bevatten en dat overigens voldoet aan de hiervoor bedoelde eigenschappen. Met behulp van dit stelsel kan men weer omgevingen voor de getallen construeren en aldus wordt op R_+^* een nieuwe topologie vastgelegd. Men kan dan aantonen, dat R_+^* ook ten opzichte van deze topologie volledig is, indien het nieuwe stelsel gebieden zodanig

is gekozen, dat ieder gebied van dit nieuwe stelsel een gebied van het oude bevat en omgekeerd, indien dus de beide stelsels equivalent zijn.

Men zegt, dat door een stelsel gebieden dat voldoet aan de hiervoor bedoelde algemene eigenschappen (diagonaal bevatten enz.), gegeven in de productruimte, in de oorspronkelijke ruimte een uniforme structuur is bepaald. Een dergelijke uniforme structuur opent de mogelijkheid tot het beschouwen van uniform continue functies. Deze beschouwingen voeren over in de theorie van de zgn. ruimten met uniforme structuur. Men heeft deze theorie ontwikkeld voor ruimten, die niet noodzakelijk metrisch zijn, door uit te gaan van dergelijke stelsels gebieden in de productruimte. Het begrip volledigheid laat zich voor zulke ruimten algemeen definiëren ¹⁾. Zo krijgt men: *De volledigheid is niet een eigenschap die betrekking heeft op de topologie van de ruimte maar op de uniforme structuur.*

Deel 2.

§ 1. In deze en de volgende paragrafen wordt aangegeven hoe, in navolging van Bourbaki, de logaritmie kan worden ingevoerd²⁾. Men zal direct opmerken dat men de in deel 1 beschreven multiplicatieve theorie tot de additieve kan terugvoeren door in R_+^* de logaritmie van de getallen te nemen. Dit is natuurlijk niet de weg die gevolgd moet worden omdat het juist gaat om de invoering van de functie $\log x$. Integendeel zal het verband tussen R_+^* en R leiden tot de logaritmie. Het begrip isomorfisme tussen twee groepen is voor hetgeen volgt essentieel.

Gegeven zijn twee topologische groepen G_1 en G_2 , beide multiplicatief genoteerd. Men zegt dat G_1 en G_2 isomorph zijn indien er een afbeelding bestaat van G_1 op G_2 met de volgende eigenschappen:

1. de afbeelding f is eeneenduidig,
2. zowel f als de inverse afbeelding van G_2 op G_1 zijn continu,
3. f is een isomorfisme ten opzichte van de structuur van de beide groepen.

Toelichting. Onder een afbeelding is te verstaan een functie, gedefiniëerd op G_1 , die waarden aanneemt in G_2 . Er is sprake van een „afbeelding op”; hiermede wordt uitgedrukt dat ieder element van G_2 als beeld van een element van G_1 kan worden verkregen. De eeneenduidigheid drukt uit dat er slechts één zodanig element van G_1

¹⁾ Zie Bourbaki no. 858. Ook: A. Weil. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. Act. Sci. et Industr. 551 (Paris 1937).

²⁾ In hetgeen volgt wordt, op enkele punten uitgewerkt, de theorie weergegeven zoals die is opgezet door Bourbaki in no. 1029.

bestaat, terwijl omgekeerd elk element van G_1 slechts één beeld in G_2 heeft.

De verlangde continuïteit behoeft geen toelichting.

Onder de derde eigenschap wordt het volgende verstaan. Stel x, y en z zijn elementen van G_1 waarbij $xy = z$. Aan deze elementen zijn toegevoegd de elementen $f(x), f(y), f(z)$ van G_2 . Het structuurisomorfisme drukt dan uit dat de relatie tussen x, y, z behouden blijft voor de beelden. Dat wil dus zeggen

$$f(z) = f(x)f(y)$$

of

$$f(xy) = f(x)f(y). \quad (5)$$

Uit deze betrekking volgt, dat de eenheidselementen e_1 en e_2 van G_1 en G_2 in elkaar worden getransformeerd ¹⁾. Immers, men heeft

$$f(x) = f(xe_1) = f(x)f(e_1) \quad (x \in G_1)$$

waaruit volgt $f(e_1) = e_2$. Verder geldt

$$f(e_1) = f(x^{-1}x) = f(x^{-1})f(x) = e_2$$

zodat

$$f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}. \quad (6)$$

Het inverse element van x wordt dus afgebeeld op het inverse element van $f(x)$.

Men toont zonder moeite aan, dat de inverse afbeelding f^{-1} , d.i. de afbeelding van G_2 op G_1 , voldoet aan een relatie van dezelfde vorm als (5), nl.

$$f^{-1}(\xi\eta) = f^{-1}(\xi)f^{-1}(\eta). \quad (7)$$

Voorbeeld. Is a een willekeurig vast element van de topologische groep G , dan geeft de afbeelding $x \rightarrow a x a^{-1}$ een isomorfisme van G op zichzelf.

Is de groep G_1 additief genoteerd, dan komen in de plaats van (5) en (6)

$$f(x + y) = f(x)f(y) \quad (8)$$

$$f(-x) = (f(x))^{-1}. \quad (9)$$

Voor de inverse afbeelding staan daar dan tegenover de relaties

$$f^{-1}(\xi\eta) = f^{-1}(\xi) + f^{-1}(\eta) \quad (10)$$

$$f^{-1}(\xi^{-1}) = -f^{-1}(\xi). \quad (11)$$

Uitgaande van (8) bewijst men (10) als volgt. Stel ξ, η en ζ behoren tot G_2 en $\xi\eta = \zeta$. Men heeft

¹⁾ Het eenheidselement e van een groep is een element van die groep zodanig, dat $ae = a$ voor alle elementen a van de groep; het is eenduidig bepaald.

Het inverse element van een element a is een element, aangegeven door a^{-1} , zodanig, dat $a \cdot a^{-1} = e$; het is eenduidig bepaald.

$$\left. \begin{aligned} f^{-1}(\xi) &= x \\ f^{-1}(\eta) &= y \\ f^{-1}(\zeta) &= z \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

en dus

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \xi \\ f(y) &= \eta \\ f(z) &= \zeta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Wegens $\xi\eta = \zeta$ en (8) is dus

$$f(x)f(y) = f(z) = f(x + y),$$

waaruit volgt $z = x + y$ omdat de afbeelding eeneenduidig is. Wegens (12) volgt hieruit

$$f^{-1}(\xi\eta) = f^{-1}(\zeta) = f^{-1}(\xi) + f^{-1}(\eta).$$

Bourbaki bewijst nu de volgende essentiële stelling.

De multiplicatieve groep R_+^ is isomorph met de additieve groep R .*

Deze stelling, die de sleutel geeft voor de invoering van de logaritmie, wordt bewezen met topologische en algebraïsche methoden. Het niet eenvoudige bewijs laten wij achterwege omdat het in kort bestek niet te reproduceren is.

§ 2. Wij hebben nog nodig de volgende stelling.

Stelling. Zij $f(x)$ een afbeelding van de topologische groep R in zich zelf met de eigenschappen:

$$1^\circ. f(x + y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in R)$$

$$2^\circ. f(x) \text{ is continu.}$$

Dan is

$$f(x) = ax$$

waarin $a \in R$ een constante is.

Bewijs. Voor $x \in R$ en gehele p geldt wegens 1°

$$f(px) = pf(x).$$

Vervangt men x door $\frac{x}{p}$, dan volgt

$$f(x) = pf\left(\frac{x}{p}\right) \quad f\left(\frac{x}{p}\right) = \frac{1}{p} f(x).$$

Voor alle rationale r is dus

$$f(rx) = rf(x).$$

Is t willekeurig reëel, dan volgt uit 2°

$$f(tx) = \lim_{r \rightarrow t} f(rx) = \lim_{r \rightarrow t} rf(x) = tf(x).$$

Stelt men $f(1) = a$, dan is dus

$$f(t) = at.$$

hetgeen te bewijzen was.

Men ziet, dat de afbeelding een isomorphisme van R op zich zelf (een automorphisme) is indien $a \neq 0$ is. Is $a = 0$, dan worden alle getallen afgebeeld op het getal 0.

§ 3. Wij passen nu toe, dat R en R_+^* isomorph zijn. Zij $\varphi(x)$ deze afbeelding van R op R_+^* . De inverse transformatie, die dus R_+^* overvoert in R , wordt aangeduid met φ^{-1} . De afbeelding kan nu nog in bepaalde zin genormeerd worden. Zij daartoe gegeven een getal $a \in R_+^*$. Ondersteld zij eerst $a \neq 1$. Stel

$$\bar{a} = \varphi^{-1}(a), \quad \bar{a} \in R.$$

Dan is $\bar{a} \neq 0$. Immers, het isomorphisme voert de eenheidselementen van R en R_+^* (resp. de getallen 0 en 1) in elkaar over; dus is

$$\varphi^{-1}(1) = 0$$

en wegens de eeneenduidigheid van φ^{-1} is dan $\varphi^{-1}(a) \neq 0$ als $a \neq 1$.

Beschouw dan de afbeelding

$$f(x) = \varphi(\bar{a}x).$$

Men heeft

$$f(1) = \varphi(\bar{a}) = a.$$

$f(x)$ geeft een eeneenduidige afbeelding van R op R_+^* . Dat aan ieder getal van R slechts één getal van R_+^* is toegevoegd is een gevolg van de overeenkomstige eigenschap van $\varphi(x)$. Ieder getal van R_+^* kan worden verkregen als beeld. In verband met de definitie van $\varphi(x)$ bestaat er nl. bij gegeven $\lambda \in R_+^*$ een $y \in R$ zodanig dat $\varphi(y) = \lambda$. Omdat $\bar{a} \neq 0$, is er dus een $x \in R$ zo, dat $f(x) = \varphi(\bar{a}x) = \lambda$. Onderstel voorts

$$f(x_1) = f(x_2)$$

of

$$\varphi(\bar{a}x_1) = \varphi(\bar{a}x_2).$$

Daar φ een isomorphisme is volgt hieruit

$$\bar{a}x_1 = \bar{a}x_2$$

en daar $\bar{a} \neq 0$ dus $x_1 = x_2$. Door $f(x)$ is dus een eeneenduidige afbeelding van R op R_+^* bepaald. Uit de overeenkomstige eigenschap van $\varphi(x)$ volgt, dat deze afbeelding zowel als haar inverse continu zijn en dat zij een isomorphisme ten opzichte van de structuur van de groepen R en R_+^* is. De afbeelding is derhalve een isomorphisme van R op R_+^* . Zij is het enige isomorphisme dat 1 overvoert in a . Stel nl. dat $g(x)$ een andere zodanige transformatie was. Beschouw dan

$$g^{-1}(f(x)) = h(x).$$

$h(x)$ is een transformatie van R op zich zelf. Zij voldoet aan de

eisen, nodig om de stelling van § 2 te kunnen toepassen. Immers, met toepassing van de relaties afgeleid in § 1 volgt

$$g^{-1}(f(x+y)) = g^{-1}(f(x)f(y)) = g^{-1}(f(x)) + g^{-1}(f(y)).$$

Aan de continuïteitseis is uiteraard voldaan. Volgens de bewezen stelling is dus

$$h(x) = \lambda x.$$

Nu is

$$h(1) = g^{-1}(a) = 1,$$

zodat $\lambda = 1$. Dus $h(x) = x$ of

$$f(x) = g(x).$$

Resumerend hebben wij gevonden een eenduidig bepaald isomorfisme van R op R_+^* , waarvoor dus

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

$$f(-x) = \frac{1}{f(x)}$$

$$f(1) = a \quad (a \neq 1; a > 0)$$

Voor gehele n is

$$f(n) = a^n.$$

Wij gebruiken deze functie als definitie voor de exponentiële functie en stellen dus per definitie

$$f(x) = a^x \quad (x \in R) \quad (14)$$

Verder stellen wij per definitie

$${}^a\log x = f^{-1}(x). \quad (x > 0) \quad (15)$$

De aldus gedefiniëerde functies bezitten de gebruikelijke eigenschappen van de exponentiële en de logaritmische functie. De identiteiten

$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$${}^a\log xy = {}^a\log x + {}^a\log y$$

$${}^a\log \frac{1}{x} = -{}^a\log x$$

verschijnen als uitdrukking van de structuur-isomorphie van de groepen R en R_+^* (zie de formules 8, 9, 10, 11). Aangezien de beide functies als elkaars inverse zijn gedefiniëerd, heeft men

$$a^{a^{\log x}} = x \quad (x > 0)$$

$${}^a\log (a^x) = x.$$

In het begin van § 3 is ondersteld $a \neq 1$. Beschouwen wij thans nog het geval $a = 1$. Men vindt dan geen isomorfisme omdat de

eeneenduidigheid niet langer doorgaat. Dan is nl. $\bar{a} = 0$ en dus $f(x) = \varphi(0) = 1$. De definitie (14) aanhoudende, heeft men dus

$$1^x = 1.$$

Een voor alle getallen van R_+^* gedefiniëerde inverse functie bestaat thans niet; de logarithme is derhalve alleen gedefiniëerd voor een grondtal $a > 0$, $a \neq 1$.

Met behulp van algebraïsch-topologische methoden bewijst men dan tenslotte dat de gevonden functies strikt monotoon zijn. Daarmede is dan de aansluiting met de klassieke analyse verkregen ¹⁾.

¹⁾ Vergelijk: H. Streefkerk. Over de behandeling van de exponentiële en de logarithmische functie op H.B.S. en Gymnasium. Euclides, 25e jaargang 1949/50, blz. 346—350.

HET FORMULEREN VAN VRAAGSTUKKEN EN STELLINGEN IN DE PLANIMETRIE.

door

Dr W. J. Bos

Een leerling moet om een vraagstuk te kunnen oplossen in de eerste plaats de formulering begrijpen: Hoe moet de figuur worden? Wat is gegeven, wat is te bewijzen of te berekenen? (Werkstukken laten wij buiten beschouwing). De volgende typen formuleringen komt men in de leerboeken vaak tegen:

- A_I *Teken een gelijkbenige driehoek ABC ($CA = CB$), trek de hoogtelijnen AD en BE van $\triangle ABC$ en verbind D met E. Bewijs nu $DE \parallel AB$.*
- A_{II} *Teken een gelijkbenige driehoek, trek de hoogtelijnen uit de uiteinden van de basis (of: de hoogtelijnen op de benen). Bewijs dat de verbindingslijn van de voetpunten evenwijdig is met de basis.*
- B_I *Gegeven: $\triangle ABC$ is gelijkbenig ($AC = BC$), $AD \perp BC$ (D op BC), $BE \perp AC$ (E op AC). Te bewijzen: $DE \parallel AB$.*
- B_{II} *Gegeven: De benen van twee scherpe hoeken staan loodrecht op elkaar. Bewijs dat die twee hoeken gelijk zijn.*
- AB_I *Van $\triangle ABC$ is gegeven $AC = BC$. Men trekt de hoogtelijnen AD en BE. Bewijs dat ...*
- AB_{II} *In een gelijkbenige driehoek trekt men de hoogtelijnen uit de uiteinden van de basis. Bewijs dat de verbindingslijn van de voetpunten evenwijdig is met de basis.*
- C_I *Als van $\triangle ABC$ $\beta = \gamma$ is, dan is $b = c$. Bewijs dit.*
- C_{II} *Als twee lijnen door een derde gesneden worden onder gelijke overeenkomstige hoeken, dan zijn die lijnen evenwijdig.*
- AC_I *Als men in de gelijkbenige $\triangle ABC$ ($AC = BC$) de hoogtelijnen AD en BE trekt, dan is het lijnstuk $DE \parallel AB$.*
- AC_{II} *Idem, zonder letters.*
- D_{II} *Twee lijnen zijn evenwijdig, als bij snijding door een derde twee overeenkomstige hoeken gelijk zijn.*
- E_I *Twee lijnen l en m evenwijdig aan een derde lijn n zijn ook onderling evenwijdig.*

E_{II} De hoeken van een driehoek zijn samen 180° . Het lijnstuk dat in een gelijkbenige driehoek de voetpunten van de hoogtelijnen uit de uiteinden van de basis verbindt, is evenwijdig met de basis. Of: Bewijs dat het lijnstuk...

Natuurlijk zijn vele combinaties en afwijkingen mogelijk; wij willen ons echter in hoofdzaak beperken tot bovenstaande mogelijkheden.

Vergelijkt men de *vraagstukken* in verschillende leerboeken, dan valt op dat in de „Nieuwe” meetkundeboeken, vooral in de eerste delen, de typen A, B en AB op de voorgrond treden en wel speciaal de formuleringen met letters (A_I , B_I , AB_I). De typen D en E worden aanvankelijk zoveel mogelijk vermeden.

Zeër duidelijk is de genoemde tendenz merkbaar in de „*Nieuwe Schoolmeetkunde*” van P. Wijdenes¹⁾. Van de 414 vraagstukken uit deel I zijn er 13 van type C, 3 van type D en 22 van type E. Hiervan komt ongeveer de helft voor in de laatste 100 vraagstukken.

In van Thijn-Kobus; *Verzameling van Planimetrische vraagstukken*²⁾, vond ik in de eerste 5 §§ (183 vraagstukken) van deze typen resp. de aantallen 21, 29, 17. Toch neemt dit boek in dit opzicht geen extreme plaats in.

Het type C treedt bij Wijdenes nogal eens op in combinatie met A: Op de benen van een hoek α met hoekpunt O, neemt men de punten A en B, zodat $OA = OB$ is; C is een punt binnen de hoek. Als $CA = CB$ is, is OC de deellijn van α ; bewijs dit. (Wijdenes laat „dan” vaak weg).

Verder noteerden wij bij Wijdenes: $9 \times C_I$, $4 \times C_{II}$ en bij van Thijn-Kobus in de eerste 5 §§: $3 \times C_I$, $18 \times C_{II}$. Samenvattend kunnen wij Wijdenes' formuleringen als volgt karakteriseren:

Hoge frequentie van A, B en AB vormen; meestal met letters (I). Korte zinnen, duidelijke scheiding tussen de delen van de zin. Een relatief gering aantal C, D en E vraagstukken, eerst optredend in de tweede helft van het boek. Geleidelijke ontwikkeling van het type C (AC_I , AC_{II} , BC_{II} , C_I — Het eerste C_{II} vraagstuk pas in § 52!); Minder duidelijke ontwikkeling van het type E (§ 21, 17: AE_{II} ; § 24: E_{II} ; § 30: E_I ; § 33: $3 \times E_{II}$, enz. Sporadisch optreden van D). (Verder komen nog vraagstukken voor die in bovenstaande indeling niet geplaatst kunnen worden, maar wegens hun grote didactische waarde niet onvermeld mogen blijven. Bijv. „Van $\triangle ABC$ is: $c < b$;

¹⁾ Noordhoff, Groningen (1950).

²⁾ Wolters, Groningen.

de lijn l door C evenwijdig aan AB wordt in D gesneden door de deellijn van a , in E door de deellijn van de buitenhoek van a ; goed construeren en dan eens nagaan of er gelijke lijnstukken in de figuur voorkomen. Daarna bewijzen").

Als men eenvoudig wil beginnen dan is het begrijpelijk dat de opdracht-vormen A , B , AB als uitgangspunt worden genomen, met letters natuurlijk. De tekening moet de opdracht stap voor stap kunnen volgen. De leerlingen moeten leren naar de gegevens te tekenen. Het gaat er in de eerste plaats om dat zij zelf de vraagstukken kunnen maken. Daartoe is het nodig dat zij in ieder geval het probleem kunnen opzetten, dat zij niet struikelen over de moeilijkheden van overwegend taalkundige aard, die de algemene formuleringen hen geven. Slechts zeer geleidelijk kunnen de algemene formuleringen hun noodzakelijke rol gaan spelen. Maar hoe zit het dan met de stellingen?

Vraagstukken moeten en kunnen zo geformuleerd worden dat ook zwakke leerlingen geen moeite hebben om het probleem op te zetten. Aan de formulering van stellingen zal men echter andere eisen willen stellen:

a. De logische structuur van de relatie zal zo duidelijk mogelijk tot uiting moeten komen (*Begrijpelijkheid*). Daarmee zal iedereen het wel eens zijn, maar voor een nadere uitwerking zullen wij toch op onze ervaring en intuïtie moeten vertrouwen.

b. Korte, bondige, liefst rythmische formuleringen verdienen de voorkeur (*goed memoriseerbaar*).

Is het wel nodig dat de leerlingen hun stellingen letterlijk uit het hoofd leren? Gaat het er niet alleen maar om dat zij ze begrijpen? Is inzicht niet belangrijker dan kennis? Inderdaad: een stelling begrijpen, maar niet goed kunnen formuleren, is iets; een goede formulering kunnen geven zonder deze te snappen, is waardeloos. „Leer deze stelling direct letterlijk uit het hoofd” voert tot verbalisme. Eerst moet de relatie begrepen zijn, dan moeten pogingen gedaan worden om het begrepen verband algemeen te formuleren, waaruit *verschillende* goede formuleringen zullen kristalliseren. Dus niet direct uit het hoofd laten leren, maar een tijd lang denkend laten formuleren. Op den duur echter is het een eis van denk-efficiency, dat de leerlingen de stellingen goed uit het hoofd kennen. Wij zullen hieronder laten zien, dat bij vele stellingen niet slechts van *een* goede formulering gesproken kan worden, maar ook van *de* goede formulering. Deze moet tenslotte als makkelijk activeerbare kennis overblijven. Het ligt dan voor de hand dat het leerboek *de* goede formu-

lering geeft en dat de genoemde pogingen hiertoe convergeren.

c. Een stelling moet *algemeen* geformuleerd worden, d.w.z. zonder letters.

Wijdenes doet dit vaak niet (St. 2, 3, 7, 8b, 9, 11, 12, 13, 14, 17b, 27a). Zo geeft hij bijvoorbeeld de congruentiestellingen in de vorm: *Als $a = a_1$, $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ dan is $\triangle ABC \cong \triangle A_1B_1C_1$* . Misschien wordt de stelling daardoor begrijpelijker, misschien ook makkelijker leerbaar (ik betwijfel dit), maar bij het gebruik zal de leerling dan nog moeten abstraheren van de keuze van bepaalde letters. Uiteindelijk moet als activeerbare kennis een relatie overblijven waar geen letters in voorkomen. De congruentie gevallen worden vastgehouden als gevallen: twee zijden en de ingesloten hoek, . . . enz, misschien blijven ook deze woorden niet hangen, maar slechts liggingsrelaties en hun schematisering: (ZHZ), . . . enz. De woorden: „twee zijden en de ingesloten hoek” en de afkorting (ZHZ) bieden steun; a , a_1 , b , b_1 , γ , γ_1 zijn storend, omdat zij een volkomen overbodige substitutie van letters vereisen.

In de hogere klassen is er, naar mijn mening, minder bezwaar tegen om stellingen te formuleren met letters. Juist in de eerste klas echter moeten algemene formuleringen gegeven worden. Is dit te moeilijk, dan is de meetkunde te moeilijk voor de eerste klas.

In die gevallen waarin Wijdenes een algemene formulering geeft, toont hij een sterke voorkeur voor het E-type. Enig systeem bij de keuze tussen C- en E-vormen kan ik niet ontdekken. De stellingen over het p.g.m. en de rechthoek en hun omkeringen zijn van het type E. Bij de ruit echter worden de omkeringen in de C-vorm gesteld. Bij het gelijkbenig trapezium zien wij twee omkeringen in C-vorm en één van de gedaante E.

Het enige mij bekende leerboek waarin *merkbaar* is dat de schrijver de formulering van de stellingen als een probleem ziet is het „Nieuw Meetkundeboek” van Streefkerk¹⁾. Streefkerk begint na een uitvoerige propaedeutische eerst in § 60 met bewijzen: „Merk op dat iedere stelling een beperkende voorwaarde inhoudt. Zijn *alle* hoeken gelijk? Neen, zegt stelling 1, maar de gestrekte hoeken wel. We kunnen *stelling 1* daarom uitvoeriger aldus formuleren: *Als twee hoeken gestrekte hoeken zijn, dan zijn ze gelijk*. Nogmaals, zijn *alle* hoeken gelijk? Neen, zegt *stelling 2*, maar de overstaande hoeken wel. We kunnen *st. 2* dus uitvoeriger als volgt formuleren: *Als twee hoeken overstaande hoeken zijn, dan zijn ze gelijk.*”²⁾

¹⁾ Noordhoff, Groningen, (1951).

²⁾ l. c. 65.

De bedoeling is duidelijk. S. brengt de stellingen in de C-vorm, omdat hij (terecht mijns inziens) van mening is, dat deze algemene gedaante het beste uitgangspunt is om de beginnende leerling duidelijk te maken wat bewijzen is. Het opstellen van „gegevens” (*als . . .*) en „te bewijzen” (*dan . . .*) biedt hierbij geen moeilijkheden. Het type C is het eenvoudigste type om de leerling te brengen tot zelf-bewijzen van algemeen geformuleerde stellingen en vraagstukken. Het is ook begrijpelijk dat wij bij de vraagstukken van Streefkerk een relatief hoog aantal C-vormen vinden. (Ook bij dit „Nieuw” meetkunde boek nemen de opdrachten (A, B en AB) met letters (I) de belangrijkste plaats in.) In deel I vond ik bij de ± 240 vraagstukken na § 60 $23 \times C$, $8 \times D$ en $15 \times E$. Daarbij dient opgemerkt te worden, dat Streefkerk vele stellingen niet in de theorie maar bij de vraagstukken opneemt. Van de 32 C-vraagstukken zijn er 3 van de vorm C_I en tot de 20 van de vorm C_{II} behoren 10 stellingen. Voor het E-type: $5 \times E_1$, $10 \times E_2$, waarvan 7 stellingen. Het E-type geeft vaak een korte en bondige formulering (zie *b*) en Streefkerk vermijdt dit type dan ook niet, maar hij gebruikt het toch wel met grote voorzichtigheid. Zo formuleert hij eerst de *stelling*: *Als twee zijden van een driehoek gelijk zijn, dan zijn de tegenoverliggende hoeken ook gelijk*. Daarna geeft hij de bepaling van de gelijkbenige driehoek en dan pas de E-vorm: *In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk*. De eerste keer dat met een E-vorm volstaan wordt, is bij *st.* 13 (§ 71): *De som van de hoeken van een driehoek is 180°* . Bij de daarop aansluitende opgaven moeten dan de stellingen: *Een buitenhoek van een driehoek is . . .* en *De som van de hoeken van een vierhoek . . .*, bewezen worden. Eerst van § 100 af treden de E-typen geregeld op. Het algemene oordeel (E) geeft aanvankelijk veel moeilijkheden. Het is voor de jonge leerlingen niet eenvoudig hierin voorwaarden en gevolgen te ontdekken. Het lijkt mij wenselijk het E-type slechts te gebruiken als de gegeven meetkundige relaties omschreven kunnen worden met één, eventueel samengesteld, begrip; althans in de eerste klas. Dus wél: *In een gelijkbenig trapezium zijn de basishoeken gelijk*. En niet: *Twee lijnen, die door een derde lijn onder gelijke overeenkomstige hoeken gesneden worden, zijn evenwijdig*. Hiermee echter ligt de E-vorm nog niet vast: *De diagonalen van een p.g.m. delen elkaar middendoor*; of: *In een p.g.m. delen de diagonalen elkaar middendoor*.

Een duidelijker voorbeeld van de moeilijkheden die hier schuilen levert de stereometrie:

Stelling: Als een lijn loodrecht op een vlak staat en er gaat een vlak door die lijn, dan staat dit vlak loodrecht op het eerste vlak. Deze stel-

ling wordt moeilijk herkend als middel om te bewijzen dat twee vlakken loodrecht op elkaar staan. Wijst men hier herhaaldelijk op, dan ontstaat „vanzelf” de omvorming: *Twee vlakken staan loodrecht op elkaar, als een lijn in het ene vlak loodrecht staat op het andere vlak*. Vele leerboeken geven reeds beide formuleringen. Dat is begrijpelijk, want deze stelling wordt zowel progressief (eerste, C-formulering) als regressief (tweede, D-formulering) gebruikt ¹⁾. Wij zien dus dat de formulering van een stelling behalve begrijpelijk, goed memoriseerbaar en algemeen nog aan een vierde eis moet voldoen:

d. De formulering zal, voorzover mogelijk, *rekening moeten houden met de probleemsituaties*, waarin de stelling later gebruikt moet worden. Wij vinden in de leerboeken niet: *In een driehoek zijn de hoeken samen 180°*; maar wel: *De hoeken van een driehoek zijn samen 180°*.

De nadruk valt op het feit dat het een stelling over *hoeken* is. Men moet eerst op het idee gekomen zijn relaties tussen hoeken te gebruiken, vòòrdat deze stelling geactiveerd wordt. Driehoeken komen haast in elk vraagstuk voor! Het gaat om hoeken. Zoek iets over hoeken, dat bij de probleemsituatie past (gebonden progressie)². Het memoriseren van de stelling heeft slechts zin om *toepasbare kennis* te verschaffen. Daartoe is nodig dat de denk-situatie de stelling oproept. Stellwag³⁾ schrijft: „Hij (de jonge docent) zal zich verbazen over het feit dat het zich herinneren vaak afhankelijk is van het verband. Misschien meende hij tot nog toe wel: je weet het, of je weet het niet, in alle omstandigheden.”

Voor wij nu verdere voorbeelden geven van de aanpassing van de formulering aan de probleemsituaties, is het wenselijk nog een laatste eis te noemen waaraan de formulering moet voldoen:

e. De aangebrachte kennis moet zo mogelijk geordend worden. De formulering van de stelling kan deze *ordeningsmogelijkheid* in de hand werken. Nemen wij als voorbeeld de omkeringen van de stellingen over het p.g.m. Bij de toepassing van deze stellingen wordt niet *eerst* opgemerkt dat er een vierhoek is waarvan de overstaande hoeken gelijk zijn en *daaruit* geconcludeerd tot de aanwezigheid van een p.g.m. Het p.g.m. wordt gezien (vermoed) en de vraag rijst dan: *Waarom* is deze vierhoek een p.g.m. (regressief) Het overzien van

¹⁾ Vgl.: W. J. Bos, Moeilijkheden in de Meetkunde, Progressie en Regressie, Euclides 28 (1952/1953) 12—36.

²⁾ l. c. 33.

³⁾ H. W. F. Stellwag, Begane wegen en onbetreden paden; Wolters Groningen (1952), 42.

de middelen is dus wenselijk. En de vorm waarin deze middelen tot de kennis behoren, moet aansluiten bij de probleemsituatie. Waarom is deze vierhoek een p.g.m.?

Een vierhoek is een p.g.m. als:

1. (def.) *de overstaande zijden evenwijdig zijn;*
2. (st. . . .) *de overstaande zijden gelijk zijn;*
3. (st. . . .) *de overstaande hoeken gelijk zijn;*
4. (st. . . .) *de diagonalen elkaar middendoor delen;*
5. (st. . . .) *één paar zijden gelijk en evenwijdig is.*

De kenmerk-formulering (D) is geschikt voor stellingen die (overwiegend) regressief gebruikt worden en maakt bovendien een goede ordening mogelijk. Streefkerk en Wijdenes vermijden de vorm D maar het is wel opvallend dat het hun grote moeite kost: Streefkerk gebruikt bij stelling 27 plotseling wel de D-vorm: *Twee rechten zullen evenwijdig zijn, als bij een gemeenschappelijke snijlijn (a) . . . (b) . . . (c) . . .*

Wijdenes (§ 49): *Een ongelijkheid is juist, als een andere geldt met ver grote kleine kant of verkleinde grote kant of met beide.*

Vreemd is het bij beide schrijvers toch een aantal vraagstukken te vinden van de kenmerk-vorm (D)! Wat boven gezegd is over de kenmerken van het p.g.m. geldt natuurlijk evenzeer voor de congruentie voor ruit, rechthoek en gelijkbenig trapezium.

Wat is nu beter: *De diagonalen van een p.g.m. halveren elkaar;* of: *In een p.g.m. halveren de diagonalen elkaar?*

Deze stelling wordt gebruikt als de l.l al weet dat er een p.g.m. is. Hij vraagt zich af: Wat heb ik aan dit p.g.m.? Wat weet ik van een p.g.m.?

In een p.g.m.

1. (def.) *zijn de overstaande zijden evenwijdig,*
2. (st. . . .) *zijn de overstaande zijden gelijk,*
3. (st. . . .) *zijn de overstaande hoeken gelijk,*
4. (st. . . .) *delen de diagonalen elkaar middendoor.*

Bij deze formulering sluit de kennis aan bij de vraag die in de probleemsituatie rijst. Bovendien wordt de kennis op deze wijze geordend.

De vijf eisen die wij gesteld hebben aan de formulering van een stelling zijn niet steeds alle bevredigend te vervullen. Zo hebben de kenmerk gedaanten (D) ongetwijfeld het nadeel dat zij wat begripelijkheid onderdoen voor de conclusie vormen (C) van Streefkerk. Naar mijn ervaring geven de kenmerk formuleringen wel meer, maar geen onoverwinnelijke moeilijkheden, zodat ik persoonlijk geneigd ben deze stellingen in de bij de „oude” leerboeken gebruikelijke

gedaante te handhaven. De beste oplossing lijkt mij om ook bij deze stellingen de weg te volgen die Streefkerk aangeeft bij de gelijkbenige driehoek: Eerst de verschillende stellingen in C-vorm geven met hun bewijzen, daarna een samenvatting op de boven aangegeven wijze en deze laten leren.

Bij verschillende stellingen blijft de keuze uiteindelijk in belangrijke mate subjectief. In het bijzonder zullen overwegingen op grond van de vierde eis (aanpassing aan de denksituaties) niet steeds tot hetzelfde resultaat voeren. Onze leerlingen lossen hun vraagstukken verschillend op. Ook wij docenten houden er verschillende denkgewoonten op na. Onze denkgewoonten beïnvloeden de leerlingen en de formuleringen zullen onze denkgewoonten moeten volgen.

Het lijkt mij zeer wenselijk dat wij ons rekenschap geven en van de gronden waarop onze voorkeur voor een bepaalde formulering berust en van de invloed van onze keuze op de denkprocessen van de leerlingen.

Tot nu toe ging het over een keuze uit verschillende *goede* formuleringen. Thans wil ik nog even mijn hart luchten over een grote groep niet onjuiste maar gebrekkige formuleringen: Het is in de meeste leerboeken gewoonte om een hypothetisch oordeel te vervangen door een algemeen oordeel. „Een tafel is rond”. Dat is fout, behalve als we met Wiskunde (of raadseltjes) bezig zijn. Vergelijkt men: *De hoeken van een driehoek zijn samen 180°* . En: *De hoeken van een driehoek verhouden zich als $3 : 4 : 5$* . Streefkerk schrijft: *De hoeken van een zekere driehoek verhouden zich als $3 : 4 : 5$* .

Maar waarom toch niet: *Gegeven*: Van een driehoek verhouden de hoeken zich als $3 : 4 : 5$?

Onlangs kwamen twee jongens bij mij met het volgende vraagstuk: *In en om een vierzijdige pyramide kan een rechte cirkelkegel kegel beschreven worden. Bereken de verhouding van de tangenten van de halve tophoeken van die kegels.* „Meneer, dat kan niet. Dat kan alleen als het grondvlak een Koordenvierhoek en een raaklijnen-vierhoek is en bovendien . . .” „Ja, ja, jullie hebt het door. De bedoeling is: *Als van een vierzijdige pyramide gegeven is, dat . . .*” „Oh, waarom zegt-ie dat dan niet!”

Naschrift. Dr W. J. Bos vroeg mij, mijn overwegingen aan zijn artikel toe te voegen. Daar het artikel echter voor zich zelf spreekt, bepaal ik mij tot enige opmerkingen.

1. Niet alleen in het Nieuw Meetkundeboek van Streefkerk

is het merkbaar, dat de schrijver het formuleren van de stellingen als een probleem ziet. Ook in het Werkschrift Vlakke Meetkunde van Turkstra en Geursen wordt alle aandacht aan de formulering besteed. Men leest bijv. op blz. 12: „Ter onderscheiding zullen we voorlopig alle definities zoveel mogelijk deze vorm geven: „Onder een . . . verstaat men . . .”. En alle stellingen zoveel mogelijk deze gedaante: „Als . . . dan . . .”. Dit wordt dan verder ook geoefend; bijv. op blz. 16, E2 en blz. 22, G8, waar de leerlingen zelf de stellingen en bepalingen in bovengenoemde vorm moeten omzetten.

2. Bös noemt enkele eisen op, te stellen aan de formulering van stellingen; o.a.:

b. „Korte, bondige, liefst rythmische formuleringen verdienen de voorkeur.”

Dit heb ik ook heel lang gemeend. Maar ik geloof het nu niet meer. Met hoeveel enthousiasme legde ik jaar in, jaar uit (zonder op te merken, dat het feit, dat ik moest uitleggen, me al verontrusten moest) de volgende korte, bondige, welhaast rythmische formulering uit: „*een wortel uit een product is gelijk aan het product van de gelijknamige wortels uit de factoren van dat product*”. Of: „*een macht van een quotiënt is gelijk aan het quotiënt van de gelijknamige machten van deeltal en deler*”. Misschien is menige lezer er nòg verrukt van. De verrukking is echter volkomen eenzijdig. De leerlingen begrijpen dit schoons niet; d.w.z.: al memoriserende en al reproducerende staat de *inhoud* van de stelling hun niet voor de geest; een heel enkele uitzondering daargelaten.

3. Bij het formuleren van een stelling speelt nòg een overweging een rol; en wel de volgende: *op welke vraag geeft deze stelling een antwoord?* Deze overweging leidt bijv. tot de formulering: „*twee rechten zullen evenwijdig lopen, indien . . .*” (de D-vorm). Toch heb ik tegen deze vorm (al heb ik die, om bovenstaande overweging, hier en daar wèl gebruikt) een bezwaar.

Men vergelijke de gebruikelijke formulering:

(D) *Twee driehoeken zijn congruent, als ze twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben, met:*

(C) *Als twee driehoeken twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben, dan zijn ze congruent.*

Men zal inzien, dat de D-vorm een *onvolledige* stelling geeft; men kan er immers onmiddellijk naast schrijven: Twee driehoeken zijn *niet alleen* congruent, als ze . . ., *maar ook*, als ze . . ., enz.

Men kan de D-vorm dus alleen gebruiken, indien men in één stelling *alle* gevallen samenvat (indien dat mogelijk zou zijn).

Daartegenover geeft de C-vorm een *volledige* stelling. Voor dit

verschil zijn naar mijn mening de leerlingen wel (onbewust) gevoelig.

4. Het blijkt wel, dat men tot verschillende formuleringen komt, als men de ene, dan wel de andere overweging laat prevaleren. Het belangrijkste is, als steeds: *weten* we, ook als we stellingen formuleren, goed gefundeerd wat we zeggen en waarom we het zó zeggen? We kunnen dr Bos niet anders dan dankbaar zijn, dat hij dit probleem heeft aangesneden, en door zijn duidelijke onderscheidingen voor discussie toegankelijk heeft gemaakt.

H. Str.

ONTSNAPPINGSSNELHEID

door

J. MUILWIJK.

1. Eén van de onderwerpen, die in de cosmografie-les de meeste belangstelling wekken, is de ruimtevaart. Het grondprobleem daarvan is wel het bereiken van de minimale ontsnappingssnelheid.

We beschouwen een bolvormig, homogeen lichaam „M” met massa M en straal R. Op de oppervlakte daarvan bevindt zich een stoffelijk punt met massa 1. Wanneer alleen de gravitatie beschouwd wordt, kunnen we de vereiste kinetische energie, en zodoende de snelheid, berekenen uit de wet van Newton; de aantrekkingskracht op een afstand r van het middelpunt van M bedraagt nl.:

$$K(r) = -f \frac{M}{r^2} \quad (1)$$

waarin $f = 67.10^{-9} \text{ g}^{-1} \text{ cm}^3 \text{ sec}^{-2}$.

Stel nu de potentiële energie op een afstand r_0 van het middelpunt $E_p(r_0)$; wanneer het stoffelijk punt zich van de afstand r_0 naar het oneindige begeeft is de afname van de potentiële energie gelijk aan de verrichte arbeid:

$$E_p(r_0) - E_p(\infty) = \int_{r_0}^{\infty} K(r) dr; \quad (2)$$

$$-\int_{r_0}^{\infty} f M \frac{dr}{r^2} = +fM \left[\frac{1}{r} \right]_{r_0}^{\infty} = -\frac{fM}{r_0}, \quad (3)$$

waarin het minteken duidelijk is.

We hebben nu de keus, om in aansluiting bij de mechanica $E_p(R) = 0$ te stellen, of als in de electrostatica $E_p(\infty) = 0$ te kiezen. Wij doen het laatste. De *potentiaal* $V(\infty)$ is dan ook nul; zoals in de tabel hieronder blijkt heeft V het tegengestelde teken van E_p . Vervangen we r_0 weer door r dan wordt dus

$$E_p(r) = -\frac{fM}{r} \quad (3a)$$

Daar de mechanische energie constant moet zijn, en de kinetische energie in het oneindige niet-negatief is, geldt voor de ontsnappings-snelheid:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v^2 - \frac{f M}{R} \geq 0$$

of
$$v \geq \sqrt{\frac{2 f M}{R}} \quad (4)$$

Bij de aarde is het gemakkelijker om op te merken dat $g = \frac{f M}{R^2}$, dus

$$v \geq \sqrt{2g R}, \quad (5)$$

waarin g de versnelling van de zwaartekracht aan de oppervlakte van M voorstelt.

2. Wanneer men deze gedachtengang didactisch probeert uit te werken, kan men op verschillende moeilijkheden stuiten. Het is mogelijk, dat de leerlingen nog geen integraalrekening gehad hebben, en als dit wel zo is, zal de overgang van het vertrouwde $K \cdot s$ op $\int K(r) dr$ of ook het één of andere minteken velen afschrikken. Het kan daarom van belang zijn om naast of in de plaats van de formules (2) en (3) de volgende afleiding te geven:

Vergelijk een bol met een *negatieve* lading Q met een bol met massa M ; beide hebben een straal R . In het eerste geval is de *grootte* van de aantrekkingskracht op een positieve eenheidslading

$$F = \frac{1}{\varepsilon} \frac{|Q| \cdot 1}{R^2} \quad (\text{de veldsterkte aan de oppervlakte; } \varepsilon \text{ is de}$$

diëlectrische constante)

en in het tweede geval de grootte van de kracht op de eenheid van massa op de oppervlakte

$$K = f \frac{M \cdot 1}{R^2}.$$

De eerste formule gaat in de tweede over door $\frac{1}{\varepsilon}$ te vervangen door f en $|Q|$ door M of ook Q door $-M$.

Op deze manier zullen we voor de zwaartekracht formules kunnen opstellen:

Electrostatica	Gravitatie
Kracht op de positieve eenheid van electriciteit: $F = \frac{1}{\epsilon} \cdot \frac{Q}{R^2}$	Kracht op de eenheid van massa: $F = f \frac{(-M)}{R^2}$
Potentiaal op het oppervlak $V = \frac{Q}{\epsilon R} = FR$	Arbeid om de eenheid van massa uit het oneindige naar de oppervlakte te brengen: $FR = - \frac{fM}{R}$
Idem in een punt op afstand r van het middelpunt: $\frac{Q}{\epsilon r}$	Idem om deze uit het ∞ tot op een afstand r te brengen: $- \frac{fM}{r}$

Nu bedraagt het *verschil* in potentiële energie voor een massa 1 in het ∞ en op het oppervlak $\frac{fM}{R}$; volgens de wet van behoud van mechanisch arbeidsvermogen is de afname van de kinetische energie gelijk aan de toename van de potentiële energie. Als het stoffelijk punt met een snelheid 0 „in het oneindige aankomt” is

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v^2 = \frac{fM}{R},$$

waaruit formule (4) volgt.

3. Mochten de leerlingen de formule $\frac{Q}{\epsilon r}$ nog niet kennen en

ook geen integraalrekening, dan kan men betrekkelijk gemakkelijk dit resultaat verkrijgen; in sommige natuurkunde-boeken ¹⁾ treft men daartoe redeneringen aan van de volgende strekking: men neemt bij de berekening van de arbeid een sprongsgewijze verandering van de kracht aan (of verwaarloost het verschil over een klein stukje); vervolgens vervangt men r_1^2 door $r_1 r_2$ (of r^2 door $r(r + \Delta r)$).

Meer bevredigend is het om op te merken, dat de arbeid om van het punt r_1 naar het punt r_2 te komen tussen

¹⁾ B.v. Gerrits, Leerboek der Natuurkunde III, 22e druk, § 26,3 (hieraan gaat de afleiding met integralen vooraf).

$$\frac{Q}{\varepsilon r_1^2} (r_2 - r_1) \text{ en } \frac{Q}{\varepsilon r_2^2} (r_2 - r_1) \text{ ligt.}$$

(Kracht in beginpunt, resp, eindpunt, maal weg).

Men moet dus het één of ander *gemiddelde* van deze bedragen nemen; de *integraalrekening* bewijst, dat de middelevenredige de juiste uitkomst geeft:

$$\sqrt{\frac{Q^2(r_2 - r_1)^2}{\varepsilon^2 r_1^2 r_2^2}} = \frac{Q}{\varepsilon r_1} - \frac{Q}{\varepsilon r_2}.$$

4. Als we in formule (5) substitueren: $g = 1000 \text{ cm/sec}^2$; $R = 6400 \times 10^5 \text{ cm}$, dan is $v = \sqrt{128} \text{ km/sec}$, dus $11,3 \text{ km/sec}$ of 40.000 km/h voor de aarde.

Het heeft geen zin, om nauwkeuriger getalwaarden als grondslag te nemen: $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ geeft een verschil van 1 %.

Voor de maan vinden we met behulp van formule (4) en door te substitueren $M' = \frac{1}{81} M$; $R' = 0,27R$:

$$v' = v \sqrt{\frac{1}{81 \times 0,27}} \approx \frac{11,3}{4,68} \approx 2,4 \text{ km/sec.}$$

Analoog voor Mars ($M'' = 0,11M$; $R'' = 0,53R$):

$$11,3 \cdot \sqrt{\frac{0,11}{0,53}} = 5,15 \text{ km/sec.}$$

Evenzo voor Venus $11,3 \sqrt{\frac{0,82}{0,98}} = 10,3 \text{ km/sec.}$

5. Uit formule (3a) is direct af te leiden, dat de minimale snelheid v' , om een punt op de afstand r van het middelpunt van M te bereiken, gegeven wordt door

$$v' = \sqrt{f M \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)}.$$

Kiest men hiervoor het punt, waar de aantrekkingskracht van de maan even sterk is als die van de aarde, en stelt men de afstand daarvan tot het middelpunt van M' , r' , dan is

$\frac{M}{r^2} = \frac{M'}{r'^2}$, dus $r = 9r'$. Neemt men voor $r + r'$ de gemiddelde waarde $60R$, dan is $r = 54R$, en

$$\frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{\frac{1}{R} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{R}}} = \sqrt{1 - \frac{1}{54}} \approx 1 - \frac{1}{108} \approx 0,99$$

Neemt men $r + r'$ zo klein mogelijk (57R) dan komt er $\sqrt{1 - \frac{1}{51,3}}$

In ieder geval is er geen noemenswaardig verschil tussen de ver-
eiste beginsnelheden om *te eniger tijd* de maan resp. een planeet
te bereiken; wel natuurlijk in de duur van de tocht.

Prof. Bottema heeft indertijd (Euclides 22, nr. 4) de volgende
benadering aangegeven: als (evenals hierboven) de aantrekking van
de maan buiten beschouwing wordt gelaten, geldt, wanneer men
de afstand r wil bereiken:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} v^2 = -\frac{fM}{R} + \frac{fM}{r}$$

Kiest men nu (in overeenstemming met (4)) $\frac{1}{2} v^2 = \frac{fM}{R}$, dan is

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{r}{2fM}}, \text{ dus } t = \frac{2}{3} \frac{r^{3/2}}{\sqrt{2fM}}, \text{ waaruit voor } r = 60R \text{ volgt een}$$

tijdsduur van ongeveer 50 uur.

Wil men een 100 maal zo grote afstand bereiken (dat is de orde
van grootte voor een punt, waar de aantrekkingskracht van Mars
of Venus gelijk is aan die van de aarde) dan wordt de tijd 1000 maal
zo groot, dus ongeveer 6 jaar; de gemiddelde snelheid, die voor
de tocht naar de maan 7700 km/h of 2,14 km/sec bedraagt, wordt
dan 10 maal zo klein.

6. Hoe komt het, dat de maan geen atmosfeer heeft, en dat
op Mars de barometerstand ongeveer 13,5 cm kwik bedraagt?
Gewoonlijk wijst men, om deze vraag te beantwoorden, op de
kleine *aantrekkingskracht* aan de oppervlakte; zoals bekend is de

versnelling op de maan $\frac{1}{81} : 0,27^2 \approx \frac{1}{6}$ maal die op de aarde. De

juiste grootte in dit verband is echter de *ontsnappingsnelheid*,
die blijkens (5) behalve van g ook van R afhangt.

Bij een ideaal gas, in een afgesloten ruimte, waarop geen uit-
wendige krachten werken, wordt het aantal moleculen per cm^3 met
een snelheid tussen v en $(v + dv)$ bepaald door de formule van
Maxwell (zie b.v. Kronig, Leerboek der Natuurkunde II, hfdst.
VII § 3):

$$n(v)dv = A e^{-\frac{1}{2} \frac{v^2}{B^2}} v^2 dv, \quad (6)$$

waarin $A = \frac{2n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2}$; n is het totaal aantal moleculen per cm^3 , m de massa van een molecuul, k de constante van Boltzmann ($= 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/graad) en T de absolute temperatuur; $B = \sqrt{\frac{kT}{m}}$ (de exponent is dus $= -\frac{1}{2}mv^2 : kT$).

Het gedeelte van de moleculen, die snelheden $\geq$ zeker bedrag a — de ontsnappingssnelheid — bezitten, is dus:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{n} \int_a^\infty n(v) dv = \frac{A}{n} \int_a^\infty v \left\{ \frac{d}{dv} \left(-B^2 e^{-\frac{1}{2} \frac{v^2}{B^2}} \right) \right\} dv = \\ &= -\frac{AB^2}{n} \left[v e^{-\frac{1}{2} \frac{v^2}{B^2}} \right]_a^\infty + \frac{AB^2}{n} \int_a^\infty e^{-\frac{1}{2} \frac{v^2}{B^2}} dv = \\ &= \frac{AB^2}{n} a e^{-\frac{1}{2} \frac{a^2}{B^2}} + \frac{AB^3}{n} \int_{\frac{a}{B}}^\infty e^{-\frac{1}{2} t^2} dt. \end{aligned}$$

Stelt men nu $\frac{a}{B} = a \sqrt{\frac{m}{kT}} = C$, dan levert substitutie van A en B :

$$P = 2C \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} C^2} + \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_C^\infty e^{-\frac{1}{2} t^2} dt \quad (7)$$

welke vorm met behulp van tabellen voor de waarschijnlijkheidsrekening te berekenen is.

Men vindt dan voor waterstof ($m = 3,3 \cdot 10^{-24}$ g) bij

$$T = (15 + 273)^\circ : \frac{1}{B} = \sqrt{\frac{m}{kT}} = 9,16 \cdot 10^{-6} \text{ sec/cm, waaruit volgt}$$

voor de aarde: $P = 0,000,00$, voor de maan $P = 0,184$, dus 18,4 % en voor Mars $P = 0,000,1$, als men de in 4 gevonden waarden invult.

Men kan zich nu afvragen, of het wel juist is, om alleen op de *grootte* van de snelheid der moleculen te letten. In de afleiding van de formules (4) en (5) is de *richting* verticaal verondersteld ²⁾. Weliswaar zal een *raket* loodrecht moeten opstijgen, o.a. om zo snel mogelijk buiten de dampkring te komen, maar er zijn ∞^2 parabolen in ieder punt van de oppervlakte *mogelijk* als banen onder invloed

²⁾ Men kan overigens even goed $\int \vec{K} \cdot \vec{ds}$ nemen, zodat deze veronderstelling weggelaten kan worden ($\vec{K} \cdot \vec{ds}$ stelt het scalaire product voor, dus $K \cdot ds \cos \alpha$)

van de gravitatie, waarbij de grootte van de vereiste snelheid constant is. De raaklijnen aan deze parabolen vormen een schoof. Uiteraard komen alleen snelheden met niet-negatieve verticale component in aanmerking.

Voor de moleculen is er overigens nog de mogelijkheid van botsing tegen de oppervlakte, waarbij een negatieve verticale snelheidscomponent van teken omkeert. Van de gevonden waarden voor P zal circa de helft de tendens om te ontsnappen juist aangeven, al blijft ook dit getal tamelijk globaal.

Zou men een isotherme atmosfeer van constante dichtheid als uitgangspunt kiezen, waarbij een bol als begrenzing genomen wordt, dan kan men het gedeelte bepalen, dat aan deze grens minstens de daar vereiste ontsnappingssnelheid bezit. Het is echter mogelijk, om de *werkelijke* samenstelling van de aard-atmosfeer, of een (meer) *plausibele* voor die van een ander hemellichaam in rekening te brengen, alsmede de centrifugale krachten; uiteraard zou een en ander buiten het bestek van dit artikel vallen.

In het Sterrekundig Colloquium van de Nederlandsche Astronomen-Club No. 4 (1946) behandelt dr. H. Groot deze vragen. Enerzijds komt hij tot de conclusie, dat de aarde alle waterstof eerst na $2,8 \cdot 10^{24}$ jaren zal verliezen — dus practisch nooit — anderzijds berekent hij de middelbare snelheden voor de moleculen, die op verschillende planeten mogen bestaan, opdat de eventuele dampkring behouden zal blijven.

Bij Mercurius zou deze $< 0,9 \cdot 10^5$ cm/sec moeten zijn, wat met temperaturen beneden -100° C, zelfs voor waterstof, gepaard gaat; de waarneming levert echter omstreeks $+300^\circ$ C op. Voor de maan en Pluto zijn de conclusies analoog. Bij Venus is er volgens deze theorie wel de mogelijkheid om waterstof en zuurstof vast te houden, welke gassen daar evenwel niet waargenomen zijn.

7. Van de gedachtengang uit 6 kan men als volgt een nog meer globale samenvatting geven: Voor waterstof is bij 0° C de „gemiddelde snelheid” 1 à 2 km/sec; er zal daarom een niet al te klein percentage een snelheid bezitten, die $\geq 2,4$ km/sec is. Voor een ander gas, b.v. zuurstof, is bij gelijke temperatuur de gemiddelde kinetische energie dezelfde, dus de „gemiddelde” snelheid $\sqrt{D}$ maal zo klein (D = dichtheid). Op de maan is de situatie voor zuurstof ongunstiger, dan voor waterstof op aarde³⁾.

³⁾ Immers in het eerste geval is a 4,68 maal zo klein en B 4 maal zo klein; C is dus in het eerste geval kleiner; vgl. formule¹⁾ (7), waarvan ook de eerste term voor $C > 1$ een afnemende functie van C is (afgeleide :: $(1 - C^2)$). Op de aardoppervlakte is het percentage waterstof-moleculen trouwens klein.

8. In 7 zijn echter enige grote woorden gebezigd. Men onderscheidt:

a) de „waarschijnlijkste” of modale snelheid, dat is de snelheid waarboven de top van de $n(v)$ -grafiek ligt, m.a.w. $n'(v) = 0$, of $v = B\sqrt{2}$ (Voor waterstof bij 0° C : 1,5 km/sec).

b) de „middelbare” snelheid, d.w.z. de snelheid die met het rekenkundig gemiddelde van de kinetische energie correspondeert: de wortel uit het gemiddelde van de kwadraten der snelheden, continu benaderd, dus

$$\sqrt{\frac{1}{n} \int_0^\infty v^2 n(v) dv} = B\sqrt{3}.$$

Deze is wel de belangrijkste; voor H_2 bij 0° : 1,8 km/sec.

c) de „gemiddelde” snelheid, d.w.z. het rekenkundig gemiddelde van de snelheden der moleculen:

$$\frac{1}{n} \int_0^\infty v n(v) dv = B\sqrt{\frac{8}{\pi}}; \text{ voor } \text{H}_2 \text{ bij } 0^\circ: 1,7 \text{ km/sec.}$$

Men ziet, dat de getalwaarden weinig uiteenlopen, en dat de snelheid, die men als representatief wil beschouwen, naar behoren

evenredig met B is, dus met $\sqrt{\frac{T}{m}}$.

DOE HET EENVOUDIG.

door

P. WIJDENES.

De tiende jaargang van Euclides (1933/34) heb ik geopend met een artikel over *i*. De eerste regels luiden als volgt:

„Een korter titel dan die enkele *i* zal men allicht niet kunnen vinden; moge de invloed, die van het volgende uit zal gaan, omgekeerd evenredig zijn met de grootte van het opschrift”. „Uit zal gaan”, want dat dit over de heele linie werkelijkheid zal worden,

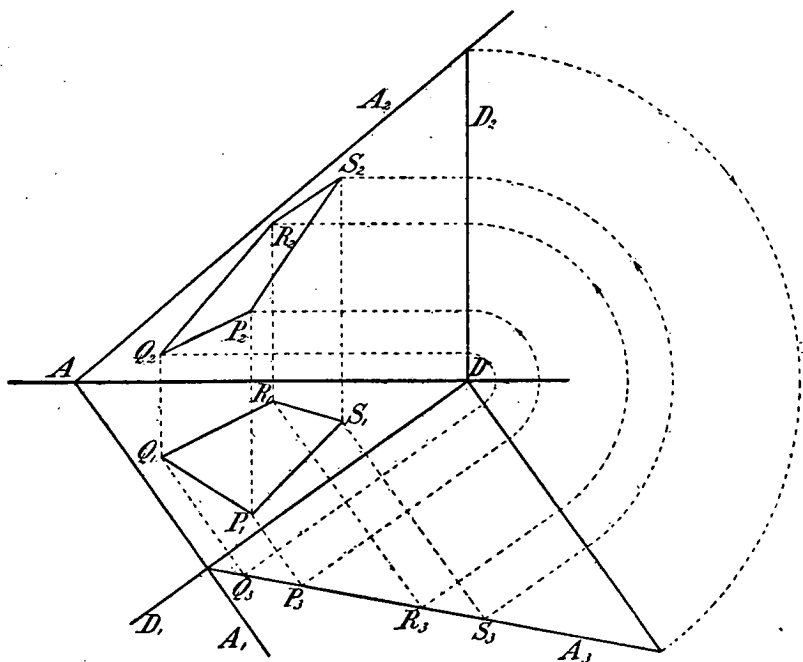


Fig. 1

durf ik niet onderstellen. Alweer wou ik nl. een aanval doen op sleur. Als het breken met sleur tot gevolg heeft, dat onnoodige moeilijkheden worden weggenomen en dat er minder aanleiding is

tot schijngelerdheid en dikdoenerij, dan geloof ik, dat een groot deel van de collega's wel een handje wil helpen.

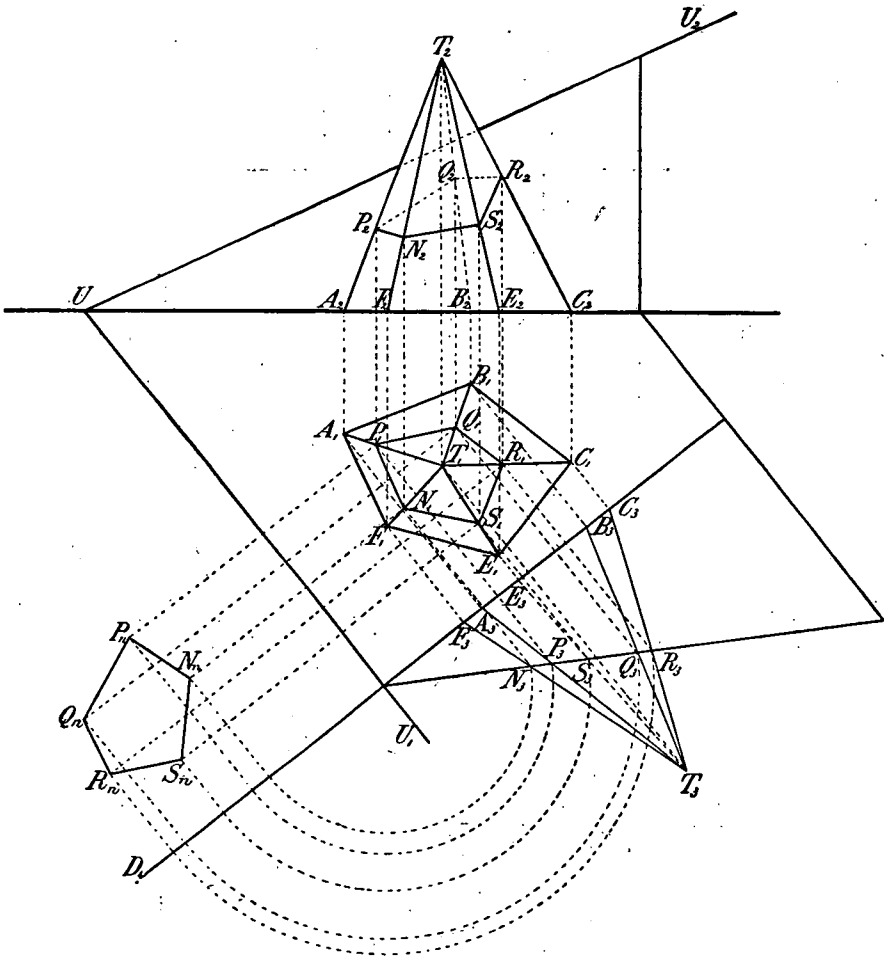


Fig. 2

Ik wou nl. niets meer of minder dan i geheel verwijderen uit onze schoolwiskunde tot en met de derde klas.

Naar ik meen, is de slag gewonnen.

In deze regels staat „alweer”; in jaargang VII (1930/31) heb ik nl. een aanval ingezet op zeer slechte constructies, die toen nog in de Beschrijvende meetkunde werden aangeleerd, getuige enige leerboeken. Hieronder de figuren, waarop ik mijn pijlen afschoot; zie fig. 1 en 2; op de fig. 3 en 4 ziet men, hoe het moet. Bij de figuren 3 en 4 schreef ik:

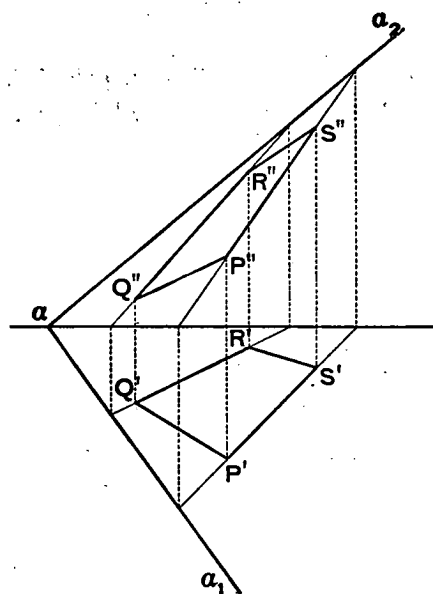


Fig. 3

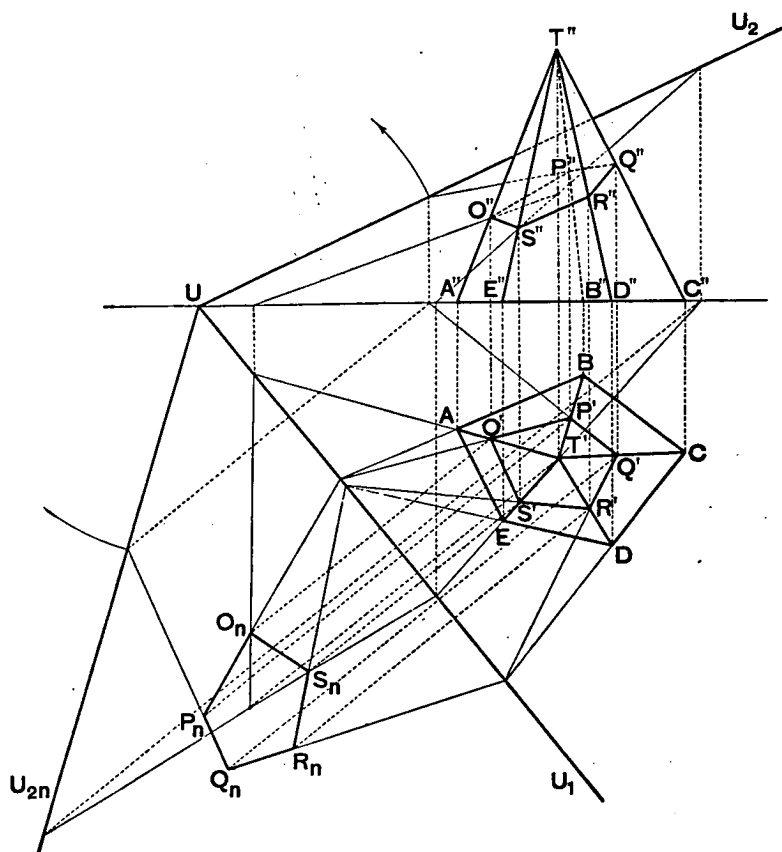


Fig. 4

het begrip beter, de theorie duidelijker, innige samenhang met de stereometrie, beter zicht op de figuur, minder lijnen, nauwkeuriger tekeningen, samen zullen ze bij velen niet bij machte blijken om sleur te overwinnen.

Ongetwijfeld zal „Euclides” gaarne een artikel opnemen van iemand, die duidelijk maakt, dat de fig. 1 en 2 te verkiezen zijn boven 3 en 4. Er zijn er nog genoeg, die de leerlingen de laatste onthouden en de eerste aanleren! Met het artikel over beschrijvende meetkunde heb ik, jammer genoeg voor de jeugd, nog niet bereikt, dat iedereen de beste en eenvoudigste constructie leert. Die slag is nog maar half gewonnen.

In de 25e jaargang (1949/50) vindt men het artikel met de titel: „Tennissen met baggerlaarzen aan”. Dat artikel bedoelt de leraren te bewegen, de getallen in de vlakke meetkunde niet langer aan te geven met twee hoofdletters, maar, indien enigszins mogelijk, met één kleine letter; gelijk wij gewoon zijn te doen in elk ander vak. Als wij zetten $AB + BC > AC$, dan zijn dat getallen; we doen toch beter te zetten $c + a > b$, niet waar?

Evenals in het artikel over i neem ik ook nu woordelijk over, wat in schoolboeken staat; daarna een meer leesbare tekst ¹⁾.

I. Stelling 17. *Zijn twee zijden van een driehoek gelijk aan twee zijden van een andere driehoek, maar sluiten de twee zijden van de ene driehoek een grotere hoek in dan die van de andere driehoek, dan is de derde zijde van de eerste driehoek groter dan de derde zijde van de tweede.*

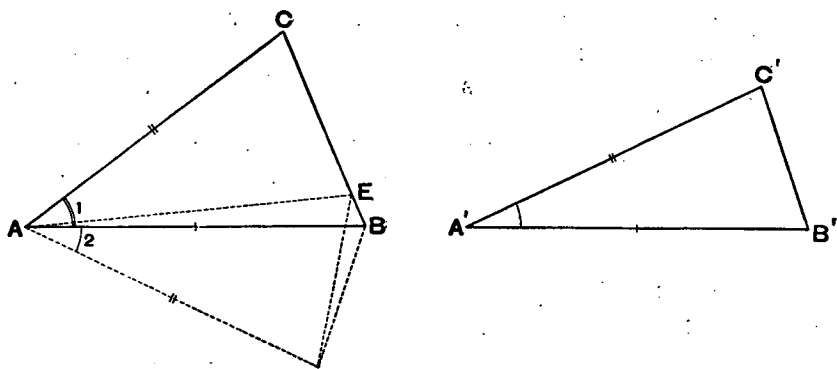


Fig. 5

¹⁾ De voorbeelden zijn genummerd I—VI; de verkorte lezingen Ia—VIa.

Zelf heb ik me ook heel veel bezondigd aan wat ik nu afkeur; in het bijzonder in de grote „Molenbroek”, het handboek voor de Vlakke Meetkunde. Wat ik anderen aanwrijf, gold, zij het in de schoolboeken in mindere mate, ook voor mij.

²⁾ In fig. 5 is bij de linker figuur de letter D vergeten.

Gegeven: $AB = A'B'$

Te bewijzen: $BC > B'C'$

$AC = A'C'$

$\angle A_1 > A'$

Bewijs: We denken ons het lijnstuk AD getrokken zodanig, dat $\angle A_2 = \angle A'$ en dat $AD = A'C'$ (toepassing resp. van ax. III en II) verder denken we ons het lijnstuk BD getrokken. Volgens geval I is nu $\triangle ABD \cong \triangle A'B'C'$, dus $BD = B'C'$. We denken ons nu de deellijn van $\angle A_{1,2}$ getrokken. Omdat $\angle A_1 > \angle A$, en dus ook $\angle A_1 > \angle A_2$, valt deze deellijn binnen $\angle A_1$. De deellijn snijdt dus BC in een punt E tussen B en C. We denken ons het lijnstuk DE getrokken.

Nu is $AC = AD$
 $AE = AE$
 $\angle CAE = \angle DAE$ } $\therefore \triangle AEC \cong \triangle AED$ (z, h, z)
 $\therefore EC = ED$

Maar dan is $BC = BE + EC = BE + ED$.

In $\triangle BED$ is volgens st. 15: $BE + ED > BD$

dus: $BC > BD$

dus ook: $BC > B'C'$; q.e.d.

Let wel, lezer, deze stelling komt in de 1e klas zo omtrent half November (Ongelijkheden behoren pas te komen tegen het eind van het eerste jaar). Is het moeilijk doorkomen voor de leerlingen of niet? Wij zelf lezen zo iets niet dan met enige tegenzin. Het schrijven, wel, dat gaat best: alle lijnstukken met twee hoofdletters, zelfs wel alle hoeken met drie letters; maar zie, het opnemen en dan nog wel door kinderen van 12 à 14 jaar, dat is te veel gevraagd. Een lezer zegt natuurlijk: „hoe wou jij het doen?” Hetzelfde bewijs; de getallen, die de lengten voorstellen van de lijnstukken, zetten we op de figuren.

Ia. Stelling 17. *Als twee driehoeken twee zijden gelijk hebben, is de volgorde van de grootte van de derde zijden dezelfde als die van de ingesloten hoeken.*

Zoals de lezer ziet, de stelling en zijn omgekeerde in één korte, verstaanbare zin; ter navolging aan alle schrijvers van schoolboeken aanbevolen; het zijn er thans zo omtrent de 40. Ik ben met deze duidelijke uitdrukking in mijn Nieuwe schoolmeetkunde begonnen.

Ziehier dan het bewijs in leesbare vorm.

Gegeven: $\triangle ABC$ met zijden a, b en c . Te bewijzen: $a > a'$.

$\triangle A'B'C'$ met zijden a', b en c .

$\angle A > \angle A'$.

Bewijs. Het spiegelbeeld van $A'B'C'$ in $A'B'$ verschuiven we zo, dat $A'B'$ samenvalt met AB ; zie $\triangle ABD$. De deellijn AE van

$\angle CAD$ valt binnen $\angle A_1$, omdat $\angle A_1 > A_2$ is; a wordt door AE verdeeld in a_1 en a_2 ; $\triangle ACE \cong \triangle ADE$ (z, h, z), dus is $ED = a_1$. In $\triangle DEB$ is $a_1 + a_2 > a'$ (st. 15), dus $CB = a > a'$.

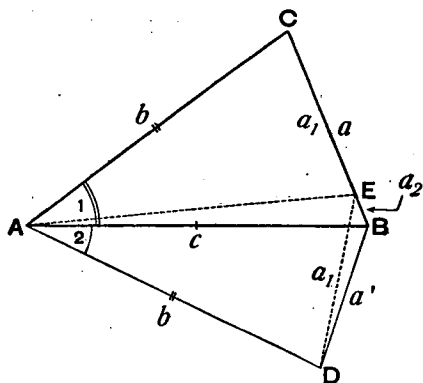


Fig. 6a

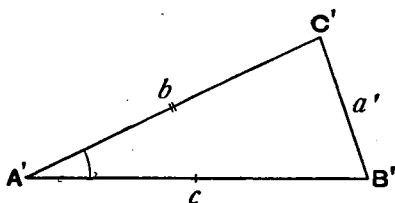


Fig. 6b

II. Stelling 50. *Het lijnstuk, dat in een trapezium de middens der opstaande zijden verbindt, loopt evenwijdig met de evenwijdige zijden en is gelijk aan de halve som der evenwijdige zijden.*

Gegeven: $AB \parallel CD$ (zie figuur 7). $DE = EA$. $CF = FB$.

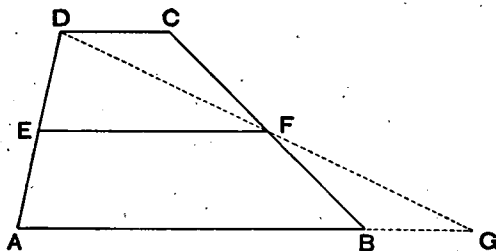


Fig. 7

Te bewijzen: $EF \parallel AB$ ($\parallel CD$)

$$EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$$

Bewijs: We trekken de hulplijn DF , die het verlengde van AB in G snijdt. Nu is $\triangle BGF \cong \triangle CDF$ (ZHH), dus $GF = FD$. Het lijnstuk EF verbindt dus in $\triangle AGD$ de middens van de zijden AD en GD . Volgens st. 48 geldt dus $EF \parallel AG$ en $EF = \frac{1}{2}AG$. Hieruit volgt $EF \parallel AB$ ($\parallel CD$). Uit de congruentie van de driehoeken BGF en CDF volgt $BG = CD$, dus $AG = AB + CD$. Aangezien $EF = \frac{1}{2}AG$ is, geldt dus ook $EF = \frac{1}{2}(AB + CD)$.

Goed, natuurlijk goed, maar... is het gemakkelijk leesbaar? Voor kinderen helemaal niet, voor ons zijn die paren hoofdletters om getallen aan te duiden, hinderlijk.

Ik wou het zo doen; eerst even dit: het lijnstuk, dat de middens van twee zijden van een vierhoek, ook van een driehoek, verbindt, noem ik een bimediaan. Voor een driehoek hebben we dan: de bimediaan van twee zijden van een driehoek is evenwijdig met de derde zijde en de helft daarvan. Voor een vierhoek: de bimediana van de overstaande zijden en van de diagonalen gaan door één punt. Lezers, kort eenvoudig en dus duidelijk. Nu het korte leesbare bewijs.

IIa. Stelling 50. *De bimediaan van de benen van een trapezium loopt evenwijdig met de evenwijdige zijden en is gelijk aan hun halve som.*

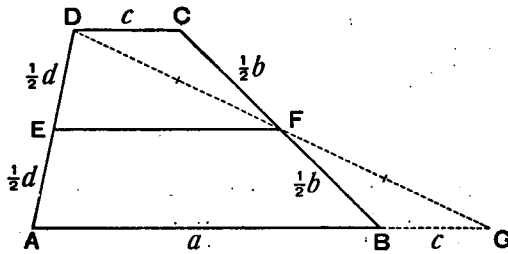


Fig. 8

Gegeven: E en F zijn de middens van de benen.

Te bewijzen: $EF \parallel AB$; $EF = \frac{1}{2}(a + c)$.

Bewijs. Trek DF door tot zijn snijpunt G met de zijlijn AB; nu is $\triangle DCF \cong \triangle GBF$ (zhh), dus is $DF = FG$ en $BG = c$. EF is nu bimediaan in $\triangle DAG$, dus is $EF = \frac{1}{2}(a + c)$ en $EF \parallel AG$; (st. 48).

M.i. zal men goed doen de ballast van twee hoofdletters voor een lijnstuk over boord te gooien; ook de twee hoofdletters voor een cirkelboog; als we zetten $\angle S_1 = \frac{1}{2}(bg \text{ BD} - BC)$, dan kan men toch korter en beter zeggen bv. $\frac{1}{2}(\alpha - \gamma)$; bg BD betekent immers niets anders dan een aantal graden, evenals α . Een voorbeeld, ook weer uit een schoolboek.

III. Stelling 11. *Een omtrekshoek van een cirkel is gelijk aan de helft van de boog, waarop hij staat.*

Voor het bewijs zullen we drie gevallen onderscheiden:

- 1° Eén der benen van de omtrekshoek is middellijn van de cirkel.
- 2° Het middelpunt van de cirkel ligt binnen de omtrekshoek.
- 3° Het middelpunt van de cirkel ligt buiten de omtrekshoek.

1° Eén der benen van de omtrekshoek is middellijn van de cirkel (zie fig. 9).

Gegeven: cirkel (M, R) A, B en C liggen op de cirkel (M, R) M ligt op BC.

Te bewijzen: $\angle ABC = \frac{1}{2}bg \text{ AC}$.

Bewijs. Verbind A met M, dan is $MA = MB$, dus $\triangle MAB$ gelijkbenig, dus $\angle MAB = \angle MBA$. Nu is $\angle CMA$ buitenhoek van $\triangle AMB$. Dit geeft $\angle CMA = \angle MAB + \angle MBA = 2 \times \angle MBA$

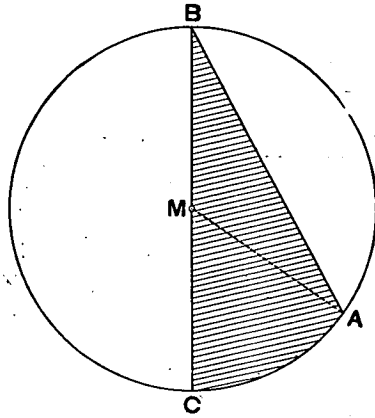


Fig. 9

Dus: $\angle MBA = \frac{1}{2} \angle CMA = \frac{1}{2} \text{bg } AC$.

Daarna volgen 2° en 3° op de bekende manier, samen bijna 2 bladzijden!

Het kan zoveel eenvoudiger; hetzelfde bewijs nochtans.

IIIa. Gegeven: B ligt op de cirkel; BMC is een middellijn; $\text{bg } AC = 2\alpha$.

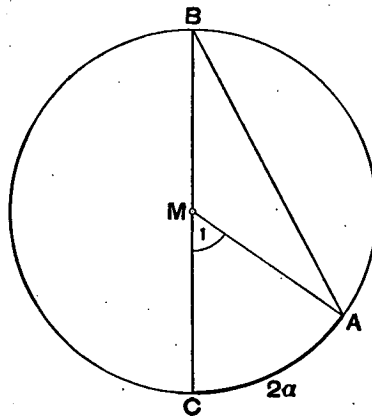


Fig. 10

Te bewijzen: $\angle B = \alpha$.

Bewijs. $\angle M_1 = 2\alpha$ (st. 10) $\angle B = \angle A$, want $MB = MA$;
 $2 \times \angle B = \angle M_1 = 2\alpha$, dus $\angle B = \alpha$.

Dit bewijs is te lezen; het 2e en het 3e geval zijn dan onmiddellijk duidelijk. We kunnen het ook zo doen; (uit de Nieuwe schoolmeetkunde).

In de cirkel van fig. 104a trekken we twee evenwijdige koorden en de middellijn loodrecht op beide; deze is een as van symmetrie van de figuur; de beide bogen tussen de evenwijdige koorden zijn dus gelijk.

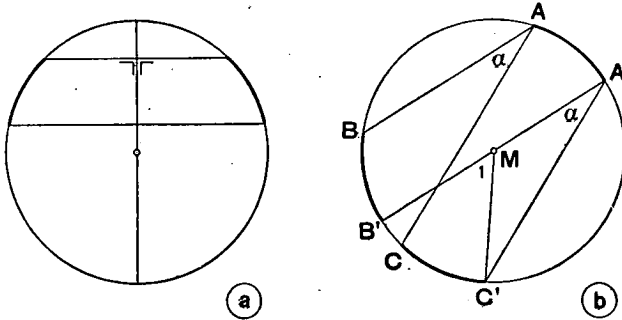


Fig. 11

IIIb. Zie nu op fig. 11b de hoek $A = \alpha$; trek de middellijn $A'B' \parallel AB$ en $A'C' \parallel AC$; bg $BB' = bg AA' = bg CC'$, zoals fig. 11a ons leert. Dus is $bg BC = bg B'C' = \angle M_1 = 2\alpha$ (st. 10a); dus is $\alpha = \frac{1}{2}bg BC$. Het 2e en 3e geval volgen hieruit onmiddellijk.

Ziezo; dat is het hele bewijs voor alle drie gevallen in een regel of 4! Is het niet waard, dat het zo wordt gegeven; ter wille van de leerlingen; eenvoudig en goed. „Ja, maar, die fig. 11 dat gaat me te gauw”, zegt een opponent; „wij trekken een koorde schuin over (een soort diagonaal) en daaruit halen we, nadat de stelling bewezen is, dat die beide bogen gelijk zijn”. Waarop mijn antwoord luidt: „dus U heeft nooit gezegd, dat elke middellijn een as van symmetrie is van de cirkel?” Lezers, ik heb die symmetrie in geen enkel schoolboek aangetroffen, dus blijft het de leerlingen waarschijnlijk verborgen. Maar, waarde collega's zouden we die eigenschap niet liever uitbuiten dan verzwijgen?

We zeggen ook nog iets over het voorstellen van getallen, die zich verhouden als a en b , door ka en kb ; en daarmee tevens over het opruimen van de evenredigheden.

IV. Stelling 56. *Op een lijnstuk AB ligt één en niet meer dan één punt P zodanig, dat $AP : PB$ gelijk is aan een gegeven verhouding.*

Gegeven: (fig. 12) Lijnstuk AB en twee getallen m en n .

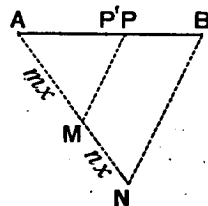


Fig. 12

Te bewijzen: Op AB ligt één en niet meer dan één punt P zo, dat $AP : PB = m : n$.

Bewijs. Trek door A een halve lijn, die met AB een niet gestrekte hoek maakt, maar overigens willekeurig is. Construeer op die halve lijn de punten M en N zodanig, dat $AM = mx$ en $MN = nx$, waarin x een willekeurig lijnstuk is en M tussen A en N ligt. Verbind N met B en construeer door M de lijn, die evenwijdig is met NB; deze snijdt AB in P. Uit stell. 54 volgt dan:

$$AP : PB = mx : nx \rightarrow AP : PB = m : n.$$

Het punt P verdeelt dus AB in de gegeven verhouding. Nemen we nu aan, dat op AB nog een punt P' ligt zodanig, dat $AP' : P'B = m : n$, dan is dus:

$$\left. \begin{array}{l} AP : PB = m : n \\ AP' : P'B = m : n \end{array} \right\} \rightarrow AP : PB = AP' : P'B$$

Hieruit volgt:

$$\begin{array}{rcl} (AP + PB) : (AP' + P'B) & = & AP : AP' \\ AB : AB & = & AP : AP' \\ 1 : 1 & = & AP : AP' \rightarrow AP' = AP. \end{array}$$

m.a.w. P en P' vallen samen. Er is dus maar één punt P, dat AB op de voorgeschreven wijze verdeelt.

Dit is een sterk voorbeeld van „makkelijkheden moeilijk praten”. In de stelling wordt niet gesproken van de constructie van het punt P, dat het lijnstuk AB verdeelt in reden als $m : n$; die hulplijn AN en die twee andere zijn dus volmaakt overbodig. Zie het gegeven en hetgeen onder „te bewijzen” staat, beide in overeenstemming met de stelling.

Nu zonder figuur hetzelfde bewijs.

IVa. Stel, dat P het lijnstuk AB verdeelt in reden als m en n ; dan is $AP = ma$ en $PB = na$. Een punt P', verschillend van P zou maken mb en nb ; men heeft dan $ma + na = mb + nb$ of $(m + n)a = (m + n)b$, dat is $a = b$, dus $AP' = AP$.

Eigenlijk is ook dit nog veel te omslachtig. In wezen is het toch niet anders dan:

IVb. P verdeelt AB in reden als m en n ; het ene deel $AP = \frac{m}{m+n} \times AB$; dus is P een vast punt.

Van leerlingen in de tweede klas mag men wel eisen, dat ze weten, wat ze in de lagere school leerden: f 12 verdelen als 3 tot 5, dan is het ene deel $\frac{3}{8}$ van f 12; op de H.B.S. met m en n al even eenvoudig; daarvoor is geen evenredigheid nodig. In het boek, waaraan ik IV ontleen, 19 regels!!

Ik kan nauwelijks geloven, dat de er leraren zijn, die klakkeloos het „bewijs” geven, zoals het in het boek staat; maar als de leraar opgeeft: „tegen de volgende keer de stellingen 54, 55 en 56 leren, dan moeten de kinderen het toch maar lezen en instampen; stenen voor brood.

Nog wat anders; de schrijver beperkt zich tot de punten van het lijnstuk AB; wordt door de buitendeellijn van $\angle C$ van een driehoek ($CA \neq CB$) niet AB uitwendig verdeeld? Waarom zich beperken tot het lijnstuk AB? De schrijver heeft daar helemaal niet aan gedacht. Vrijwel op dezelfde manier kan men dit afdoen als volgt.

IVc. De afstanden van P, gelegen op het verlengde van $AB = c$ tot A en B verhouden zich als m en n ; bepaal het punt P. Wel:

$$AP = mp, BP = np, \text{ dus } (m - n)p = c; p = \frac{c}{m - n} \text{ en } AP = \frac{mc}{m - n}$$

voor $m \neq n$ is P een bepaald punt op het verlengde van AB.

Het is natuurlijk beter, de eenvoudige zaak ineens af te doen: P is een punt van de lijn AB, dus links van A, van AB of rechts van B.

IVd. Als AB een lijnstuk is op een lijn l , wordt door elke verhouding $PA : PB = k$, mits $k \neq 1$, één punt P van l bepaald.

Bewijs. Voor elke ligging van P geldt: $PA + AB + BP = 0$, dus $k \cdot PB + AB + BP = 0$. BP, overgebracht naar het tweede lid, wordt PB; dus $AB = PB - k \cdot PB = (1 - k)PB$; oplossing geeft

$$PB = \frac{AB}{1 - k}; \text{ wegens } k \neq 1, \text{ voldoet er één punt P. (Zo vindt men het}$$

in Wijdenes en De Lange Meetkunde II).

V. 140. Stelling. Een lijn, die in een driehoek evenwijdig loopt met een der zijden, snijdt daarvan een andere driehoek af, waarvan de zijden een aaneengeschaalde evenredigheid vormen met de zijden van de oorspronkelijke driehoek.

Onderstelde: $DE \parallel BC$. Gestelde. $AB : AD = AC : AE = BC : DE$

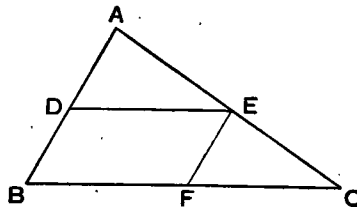


Fig. 13

Bewijs. De gelijkheid van de beide eerste quotienten $AB : AD$ en $AC : AE$ is reeds in § 135 aangetoond. Wij moeten nog slechts bewijzen: $AC : AE = BC : DE$.

Nu is tevens uit het voorgaande gebleken, hoe men een lijn (!) $\propto$ kan

construeren, welke voldoet aan $AC : AE = BC : x$. Daartoe heeft men uit E een lijn EF evenwijdig aan AB te trekken, dan is BF de gevraagde lijn; dus is $AC : AE = BC : BF$. Zal dus het gestelde waar zijn, dan moet BF gelijk aan DE zijn; dat dit laatste werkelijk het geval is, blijkt bij de beschouwing van het parallellogram BDEF.

Wat weer een omhaal, net als in de vier vorige! Hetzelfde bewijs, leesbaar en kort, hierbij.

Va. Gegeven: $DE \parallel BC$; $\triangle ABC$ heeft de zijden a , b en c .

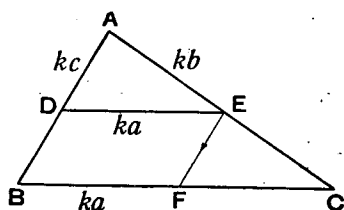


Fig. 14

Gestelde: $\triangle ADE$ opv. ka , kb en kc .

Bewijs. In § 135 is aangetoond, dat men AD en AE kan voorstellen door kc en kb . We brengen DE over op BC door $EF \parallel AB$ te trekken. CA en EA zijn opv. b en kb ; weer volgens § 135 zijn CB en FB opv. a en ka . De zijden van $\triangle ADE$ zijn dus ka , kb en kc .

Lezers, ook ongewoon voor U; ik weet het; maar probeer het en U zult met genoegen zien, hoe gauw de leerlingen het te pakken hebben. Het is zo simpel: getallen, die zich verhouden als a , b en c zijn voor te stellen als ka , kb en kc . Dat is toch veel beter leesbaar dan de aaneengeschakelde evenredigheid $AB : AD = AC : AE = BC : DE$!

VI. Stelling 22. Twee driehoeken zijn gelijkvormig, als de zijden van de ene driehoek een aaneengeschakelde evenredigheid vormen met die van de andere driehoek.

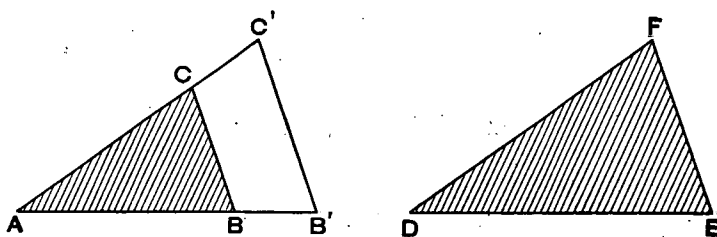


Fig. 15

Gegeven: $\triangle ABC$, $\triangle DEF$.

$DE : AB = EF : BC = DF : AC$.

Tè bewijzen. $\triangle DEF \sim \triangle ABC$.

Bewijs. We vermenigvuldigen $\triangle ABC$ t.o.v. het centrum A met

de factor $k = \frac{DE}{AB}$. De productfiguur van B is B', zodat $AB' =$

$k \times AB = \frac{DE}{AB} \times AB = DE$. Door B' trekken we een rechte, evenwijdig aan BC, die het verlengde van AC in C' snijdt. Uit de eigenschappen van de vermenigvuldiging van figuren volgt:

$B'C' = k \times BC$ en $AC' = k \times AC$.

Uit het gegeven volgt: $k = \frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC}$.

Dus $B'C' = \frac{EF}{BC} \times BC = EF$ en $AC' = \frac{DF}{AC} \times AC = DF$.

Dit geeft $AB' = DE$

$B'C' = EF$

U $AC' = DF$

Dus: $\triangle AB'C' \cong \triangle DEF$ (zzz).

en dit betekent, dat: $\triangle DEF \sim \triangle ABC$ is.

Mag ik de lezers verzoeken dit eens geheel na te gaan; is het kost om een kind te laten leren? Door de bomen ziet hij het bos niet; dit geldt ook voor I—IV; al even erg. Natuurlijk, het is goed; maar de manier, waarop het wordt opgedist, is volmaakt ongeschikt.

Hetzelfde bewijs, leesbaar en begrijpelijk, als volgt.

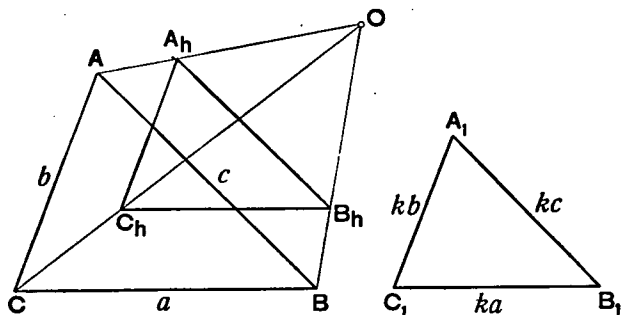


Fig. 16

Gegeven: $\triangle ABC$ met de zijden a , b en c ; $\triangle A_1 B_1 C_1$ met ka , kb en kc .

Te bewijzen: $\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$.

Bewijs. Neem ergens een punt O; vermenigvuldig $\triangle ABC$ met de factor k en met O als centrum. De productfiguur is $A_h B_h C_h$ met zijden ka , kb en kc (st. 54b). Deze is congruent met $\triangle A_1 B_1 C_1$ (zzz); volgens definitie is dus $\triangle A_1 B_1 C_1 \sim \triangle ABC$.

Voorlopig zal ik het hierbij laten. Moge er ter wille van de leerlingen iets van uitgaan. Overal en in alles streeft men terecht naar

efficiency en tijdwinning; het is hoog tijd, dat men daarop ook eens gaat letten in de schoolmeetkunde; terwille van de leerlingen, ook van het vak, dat door onleesbare bewijzen en omhaal, om van erger nog maar te zwijgen, ongenietbaar is; wat heel jammer is voor het mooie vak.

Een volgende keer over wat anders.

Aan het slot de vraag aan de lezers of er iemand onder U is, die de aangehaalde bewijzen uit schoolboeken wil verdedigen en mijn eenvoudiger lezing afbreken. De leiders van Euclides zullen hem gaarne het woord geven.

ALGEBRA OP DE LAGERE SCHOOL.

Naar aanleiding van een bij het bestuur van Wimecos ingekomen schrijven, behelzende o.a.: Het gaat hier om de gewoonte van sommige opleidingsscholen hun leerlingen in de laatste klasse van de lagere school wat algebra en meetkunde te leren. Persoonlijk ben ik van mening, dat dit een protest van de kant der wiskundeleraren verdient", wekte de voorzitter van Wimecos op de vergadering van 3 Januari 1952 de leden op over deze kwestie hun mening te willen geven in Euclides. Actief als steeds, reageerde hierop ons erelid, de Heer Wijdenes.

Gaarne plaatsen we hier zijn kijk op deze zaak en houden ons voor meer reacties aanbevolen.

Bestuur Wimecos.

Het eerste woord van het opschrift luidt: *algebra*; herhaling van het woord uit de brief. In de boekjes voor de lagere school noemt men dat woord helemaal niet; *men doet er niet aan algebra*. Wat de briefschrijfster algebra noemt is niet anders dan wat men aangeeft met het woord *letterrekenen*.

1. De omtrek van een rechthoek; wel ze leren: 2 maal de lengte en 2 maal de breedte; nou, dat schrijven we eens wat korter, hè? $2 \times l$ en $2 \times b$; het gaat immers voor alle rechthoeken op, onverschillig, hoe lang ze zijn en hoe breed; en de oppervlakte is $l \times b$ vierkante eenheden.

2. Daarna de inhoud van een bak; de oppervlakte van een doos, de vloer van het lokaal, de inhoud van het schoollokaal $l \times b \times h$. En zet ze dan eens voor de keuze uit deze twee sommetjes: een kistje is 36 cm lang, 19 cm breed en 11 cm hoog; bereken de oppervlakte; laat ze maar cijferen. Een kistje heeft tot afmetingen l , b en h ; oppervlakte?

Ze vinden het tweede heel wat gemakkelijker. Ingeprent wordt: met de letters geeft men de weg aan voor de berekening, maar het cijferen zelf blijft achterwege.

3. Dat doen we ook met: A op de fiets 16 km per uur, B 14 km; de weg is 90 km; na hoeveel uur ontmoeten ze elkaar? Nu met 80 km; 73 km; A 17 km en B 12 km en 65 km! Wat een werk! Nu eens

met letters: A a km, B b km, de weg is w km; wel, de kinderen genieten van het antwoord $\frac{w}{a+b}$ uur, waaraan je zo helemaal niets te cijferen hebt. Met deze voorbeelden en nog een paar vertonen we hun de algemene oplossing van een vraagstuk, dat is: de gang er van zonder gereken.

4. Op de lagere school komen ze ook in kennis met de eigenschappen van de rekenkunde; al worden ze dan niet als zodanig betiteld;

b.v. $ab = ba$, $p(a+b) = pa + pb$; $\frac{pa}{pb} = \frac{a}{b}$ enz. Als we ze leren: deelt men teller en noemer door een zelfde getal, dan blijft de breuk gelijk, moeten we dan volstaan met $\frac{10}{15} = \frac{2}{3}$, en nog zo'n stuk of tien? We doen toch zeker beter, de kinderen te leren die eigenschap algemeen neer te schrijven?

Een tweede gebruik van de letters bestaat dus hierin, dat men de eigenschappen van de verbindingen van getallen, algemeen voorstelt; ze leren te lezen: $ab = ba$, $a(b+c) = ab + ac$ enz. Al die eigenschappen komen bij het rekenen voor; we leren ze $2 \times \frac{7}{11} = \frac{14}{11}$, $\frac{15}{8} : 3 = \frac{5}{8}$, $\frac{3}{4} : 2 = \frac{3}{8}$. Nuttig en nodig is, dat ze deze drie betrekkingen, die voor alle getallen gelden, zo zien: $p \times \frac{a}{b} = \frac{p \times a}{b}$;

$\frac{p}{q} : r = \frac{p:r}{q}$, maar ook $\frac{p}{qr}$. De kinderen begrijpen het volkomen.

5. Dan is er nog een derde dienst van de letters, nl. om een voorspands onbekend getal met een letter aan te geven. Bedrijven we met het bovenstaande „algebra”? Geen sprake van! Waar begint dan de algebra? M.i. niet met de voorstelling van een willekeurig of een gevraagd getal door een letter; op de latere school dikwijls de eerste van een woord, op de middelbare ook wel. Zodra we de relatieve getallen invoeren; de negatieve en de positieve, dan gaan we doen aan algebra. Niet de letters doen het; in een „Rekenkunde” doen we veel met letters, zo goed als alles; maar daar zijn de tekens in $2a + 3b - 4c$ bewerkingstekens; $2a + 3b - 4c$ betekent in de algebra $2a$ en $+3b$ en $-4c$. Dat werken met relatieve getallen leren de kinderen bij het M.O. vlug genoeg; het wennen en werken met letters vergt veel meer; goed algebra-onderwijs eist dan ook eerst een paar maanden letterrekenen; daarna pas gaat men over tot de invoering van de relatieve getallen.

Is het dienstig, dat de lagere school een inleiding geeft van het letterrekenen? Ja, volmondig ja. Van het angstvak „Algebra” wordt het voornaamste heel, heel geleidelijk en in beperkte mate nl. het spelen met letters geleerd.

De lezer, die dit onder de ogen krijgt, vraagt naar de leerstof en hoe die opgediend wordt; naar de omvang, naar de tijd, die men er aan moet besteden en vooral of de kinderen in het 6e leerjaar de zaak kunnen snappen.

Voor het een en ander kan ik niet beter doen, dan het *Nieuw Rekenboek voor opleidingsscholen van Donkersloot en Van Slooten*¹⁾ aan de lezers voor te stellen; in het bijzonder daarvan het letterrekenen.

Er wordt mee begonnen in de 6e klas; voor dat leerjaar is er een stukje 6A en een stukje 6B; men doet een jaar over deze boekjes; de vacaties er af tot het toelatingsexamen ongeveer 42 schoolweken. Met één les in de week komt men dubbel en dwars het letterrekenen door.

6A telt 96 bladzijden; daarvan worden er 17 ingenomen door het letterrekenen. De hoofdstukken I—VI eindigen met 2 à 3 bladzijden „theorie” en wat vragen. De theorie beslaat hoogstens een halve bladzijde; op blz. 15 van het stukje 6A gaat het over „Het gebruik van letters”; daarin staat, wat de onderwijzer moet behandelen; daarna 28 vragen; ik neem de nummers 5, 10, 15, 20 en 25 over:

5. Een getal, dat ik niet vooraf zeg, noem ik x ; wat betekent $3 \times x = 24$? En als dat nu eens 20 is, wat heb ik dan genomen?

10. In het eerste vakje van mijn portemonnaie heb ik a centen, in het tweede b dubbeltjes; hoeveel cent bezit ik? ...

$$15. 5 \times \frac{14}{5} = 14; \quad 9 \times \frac{7}{9} = 7; \quad y \times \frac{x}{y} = \dots$$

20. Een van de wanden van een schoollokaal is a meter lang en b meter breed; de schuifdeuren er in zijn samen c meter breed en d meter hoog. Hoeveel m² stucadoorswerk is er aan die wand?

25. Vul in

n	$2n$	$n + 2$	$n - 2$	$\frac{1}{2}n$	$5n + 3$	$36 - 3n$	$n^2 + 1$
4	...	...	...	...	...	...	...
7	...	...	...	...	...	...	...

In het tweede hoofdstuk bestaat de theorie uit het volgende. De bewerkingstekens $+$, $-$, $\times$, $:$, $-$ (breukstreep) hebben dezelfde betekenis als bij het rekenen met getallen. Met $\times$ -teken wordt gewoonlijk weggelaten; ook zet men wel een punt; dus $xy = x \cdot y = x \times y$.

¹⁾ Deze rekenmethode bestaat uit 12 stukjes, voor elke klasse twee. Als men eerst het Rekenboek voor de lagere school gebruikt; dan kan men in de 5e en 6e klas de Rekenboeken voor opleidingsklassen gebruiken, de deeltjes 9, 10, 11 en 12.

Voor $x \times 3$ zetten we $3 \times x$ of $3x$; het getal dus vooraan.

$1 \times 7 = 7$, dus ook $1 \times a = a$.

$p \times p \times p \times p$ vervangt men door p^4 ; met $3a^2b^3$ bedoelt men $3 \times a \times a \times b \times b \times b$.

Als men een vorm heeft, zoals $3p^2 + 5q$ en men vervangt p door 2 en q door 4, dan komt er uit: $3 \times 2^2 + 5 \times 4 = 32$. Dit wordt aldus opgegeven: bereken $3p^2 + 5q$ voor $p = 2$ en $q = 4$ of zo: als $p = 2$ is en $q = 4$, hoeveel is dan $3p^2 + 5q$? Ook zo: substitueer $p = 2$ en $q = 4$ in $3p^2 + 5q$. Substitueren betekent: „in de plaats zetten van”.

De onderwijzer moet dit de kinderen eerst aan het verstand brengen. Is dat algebra? Natuurlijk niet; het is wat de schrijvers zo goed zeggen: letterrekenen. Kunnen de kinderen er bij? Heel goed; de onderwijzer ondervindt niet de geringste moeite daarbij; wel algehele belangstelling, dus aandacht. Heel wat meer dan bij het uitrekenen van zulk soort ondingen ontleend aan de toelatingsexamens voor het M.O. in 1952:

$$\frac{13 \frac{1\frac{5}{9}}{2\frac{1}{3}} + 14 \frac{8\frac{1}{3}}{10} - \left(8\frac{1}{4} - 3\frac{4\frac{1}{2}}{12} \right) \times 5\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2} : 1\frac{\frac{2}{3}}{2\frac{2}{3}} - 1\frac{17}{18} : \frac{5}{9}} =$$

$$\frac{0,465 : \frac{1}{80} + \frac{1,368}{0,06} - \left(1\frac{8}{25} + \frac{0,934}{1,25} \times 25 - 1\frac{1}{4} \times \frac{1}{\frac{3}{5}} \right)}{0,105 \times \frac{5\frac{5}{7}}{0,2} + \frac{46}{69} - 1\frac{94}{141}} + \frac{23}{96} =$$

Geeft U eens in de eerste schoolweek in de eerste klas op: $1\frac{1}{2} : \frac{4}{5}$; de kinderen rekenen het allemaal goed uit. Vraag er bij: „waarom zet je $\frac{3}{2} \times \frac{5}{4}$?” Ik verzeker U, dat U geen enkel goed antwoord krijgt; dressuur met als enige uitlegging: „doe het zo”.

De lezers veroorloven mij een kleine zijsprong? Wie van ons heeft ooit met gewone breuken te doen? $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $\frac{3}{8}$, nog een paar er bij en daarmee uit; in een winkel, in de boekhouding, op de fabriek, op welk kantoor dan ook, komt ook maar het 10e deel voor van wat de toelatingsexamens van de kinderen vergen over de gewone breuken? Heeft een van ons allen ooit in zijn vak, in zijn werk, een samengestelde breuk ontmoet? Heeft hij ooit van een ander gehoord, dat die dingen voorkwamen? Enkel en alleen op de lagere school, omdat de toelatingsexamens ze eisen en deze nemen ze op, omdat de leraren weten, dat de kinderen gedrild zijn op „breukensommen”.

Dat de kinderen niet weten, waarom ze die en die handgrepen uitvoeren, wat doet dat er toe?

En nu zeg ik, dat de kinderen niet alleen moeten leren rekenen, maar dat ze ook moeten begrijpen, waarom ze zo en zo te werk moeten gaan. Het uitrekenen eisen van vormsommen als boven (niet 1 op de 100 weet, waarom het zo en niet anders gaat) noem ik kindermishandeling.

Na deze kleine uitweiding (ter overdenking aanbevolen) keren we terug tot het letterrekenen; we geven ook enige vragen uit het tweede hoofdstuk.

4. Bereken de volgende vormen voor $a = 10$ en $b = 1$:

$$\begin{array}{llll} a + b = & ab = & a^2 + b^2 = & \frac{a - 4b}{a} = \\ a - 2b = & ab^2 = & b^3 - \frac{1}{10}a = & \frac{1}{a^2 - 8b^2} \end{array}$$

9. Als men van $16a$ het vierde deel aftrekt, wat blijft er dan over?

16. Een rechthoek is x meter breed en 3-maal zo lang als breed; de omtrek is 48 m. Bereken de oppervlakte.

In het derde hoofdstuk hebben ze het over optellen en aftrekken; helemaal geen theorie; eenvoudig dit:

$$a + a + a + a = 4a;$$

$$4b + 3b = b + b + b + b + b + b + b = 7b.$$

$$6c - 4c = 2c, \text{ want het betekent } c + c + c + c + c + c, \text{ waarvan je er 4 schrappt; van rechts naar links liefst.}$$

Van de vragen neem ik er weer een stuk of wat over; let op, alles gaat klassikaal; er wordt niets schriftelijk gemaakt.

$$4. \quad x + 2x + \dots = 4x$$

$$8. \quad \text{Tel } 3x \text{ bij } 3x^2;$$

$$14a - a - \dots = 9a$$

$$\text{trek 1 af van } a^2;$$

$$x + y + 3x - \dots = 2x + y \quad \text{trek } a^2 \text{ af van } a^3.$$

12. Hoeveel is het verschil voor $a = 6$ en $b = 2$ van $ab + 1$ en $a(b + 1)$?

Bereken $x + y : z$ en $(x + y) : z$ voor $x = 15$, $y = 10$ en $z = 5$.

15. Drie getallen klimmen met 4 op; samen zijn ze 102; bereken die getallen. Vul in en maak af

$$\begin{array}{r} x \\ x + 4 \\ x + \dots \\ + \text{-----} \\ \dots = 102. \end{array}$$

In de hoofdstukken IV, V en VI komen opvolgend ter sprake: vermenigvuldiging en deling, g.g.d. en k.g.v. en breuken; alles even eenvoudig, maar ... zeer goed; het komt niet op het lettercijferen

aan, maar op het begrijpen van de letters en hun bewerkingen; vandaar b.v. als boven $3x^2 - 3x$ (van ontbinden is natuurlijk geen sprake) en verder in 6A $a \times a^2; \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ enz.

In VIB wordt het letterrekenen voortgezet; alles heel eenvoudig; laat ik volstaan met uit elk hoofdstuk een stuk of drie vragen op te schrijven.

Hoofdstuk I.

3. Zeg van de volgende vormen, hoe ze berekend moeten worden:

$$\begin{array}{ccccccc} 2x + y & a + 2b - c & p - q + 2r & x^2 - x(y + y^2) \\ x + 2(y - z) & (a + 2)(b - c) & (p - q + 2)r & x(x - y) + y^2 \end{array}$$

6. Ik koop 3 boeken; het 2e is tweemaal zo duur als het eerste; het derde is op een kwartje na zo duur als de beide eerste samen. Ik krijg f 1,25 terug van een tientje. Wat was de prijs van elk boek?

9. Jan is . . . jaar; vader is 5 maal zo oud; zijn ene grootvader is 32 jaar ouder dan zijn vader, de ander 34 jaar ouder. Alle vier samen hebben 27 maal de leeftijd van Jan. Hoe oud zijn ze?

N.B. Ettelijke vraagstukjes van de toelatingsexamens zijn zoals dit vraagstuk heel eenvoudig op te lossen met een x ; of moeten de kinderen dit opschrijven:

Vader is 5 maal de leeftijd van Jan; de ene grootvader 5 maal de leeftijd van Jan en nog 32 jaar, de andere 7 maal en nog 34 jaar; de twee grootvaders 10 maal Jans leeftijd en nog 66 jaar; alle vier samen 1-maal en 5 maal en 10 maal en nog 66 jaar en dat is samen 27 maal de leeftijd van Jan; $1 + 5 + 10 = 16$; dan zijn die 66 jaar 11 maal Jans leeftijd; Jan is 6 jaar; vader is 30 jaar; de grootvaders zijn $30 + 32 = 62$ jaar en $30 + 34 = 64$ jaar.

Als dat nu niet is: gemakkelikheden moeilijk pratend, dan weet ik het niet! De oplossing, let wel, is volmaakt dezelfde:

$$x + 5x + 5x + 32 + 5x + 34 = 27x$$

$$16x + 66 = 11x; x = 6, \text{ enz.}$$

Uit de toelatingsexamens b.v. deze twee, van hetzelfde soort: met letters oplossen of niet?

1. Iemand heeft guldens en rijksdaalders, samen voor f 37,50; hij wisselt de guldens in voor dubbeltjes en de rijksdaalders voor kwartjes. Na deze omwisseling heeft hij 270 geldstukken.

Hoeveel guldens en rijksdaalders bezat hij eerst?

2. Een getal wordt met 3 vermenigvuldigd; bij de uitkomst wordt 4 opgeteld, vervolgens door 5 gedeeld. Het quotient is 5. Welk getal was dit?

Hoofdstuk II over „formules”, dat zijn dan een paar eigen-

schappen van de bewerkingen, waarmee ze al lang vertrouwd zijn, maar die hun nu voorgezet worden.

$$(a + b + c) + p = \begin{cases} (a + p) + b + c & \text{en op dezelfde manier} \\ a + (b + p) + c & \text{met } (a + b + c) - p. \\ a + b + c + p \end{cases}$$

Zie en dan wordt gezegd: $762 + 100 = 862$; $762 + 20 = 782$; $762 + 6 = 768$, enz. Ook $x - (y - z) = x - y + z$; gaat dat dan maar zo? Natuurlijk wordt het netjes uitgelegd.

Zo zouden we door kunnen gaan; we doen dat niet. Ieder, die ziet, hoe Donkersloot en Van Slooten (de eerste was hoofd van een opleidingsschool in Haarlem, de tweede directeur van een kweekschool voor onderwijzers in Leiden) het letterrekenen behandelen, eenvoudig, helder, gericht op begrijpen en niet op techniek, alleen voor mondeling onderwijs, die zal moeten erkennen, dat het goed was gezien, het letterrekenen alvast te beginnen in het hoogste leerjaar van de lagere school. Thans nog enkel voor opleidingsscholen; maar zie, hoeveel kinderen gaan er niet naar het M.U.L.O., naar de Ambachtsschool (thans Lager technisch onderwijs geheten) en zoveel andere scholen, waar men met letters werkt in aanverwante vakken.

Tot slot nog het volgende. In het leerplan voor de lagere scholen in Indonesië lezen we voor de hoogste klas: voorstelling van getallen door letters; begin van vergelijkingen. Waarde lezer, daar in Indonesië zijn ze ons een slag voor. Tenzij men hier meer waarde hecht aan „breukensommen” en herleidingen in het metrieke stelsel, die geen enkel nut hebben.

In plaats van een protest te laten horen, zoals de briefschrijfster oppert, zou ik liever zien, dat de leraren de opleidingsscholen verzochten alvast wat met letters te werken, maar er bij te voegen, welk rekenboek daarvoor zeer in het bijzonder geschikt is. Er zijn nl. rekenboekjes, waarin wel letters voorkomen, maar te hooi en te gras, zonder enige wel overwogen methode.

Ook wordt in het briefje het woord *meetkunde* genoemd; al even averechts. We kunnen er kort over zijn. Ieder weet, dat er op de lagere school geen meetkunde wordt bedreven; de woorden axioma, gegeven, gestelde, bewijs, eigenschap komen niet voor op de lagere school. Wat er wel gedaan wordt, niet alleen op de opleidingsschool, maar op alle lagere scholen, iets, dat men vroeger vormleer noemde of meetkundig rekenen. Mag ik even opgeven, wat de boekjes van Donkersloot en Van Slooten daarvan geven? In VIA en in

VIB: De rechte lijn; twee en meer rechte lijnen; hoeken; vierkant, rechthoek (de oppervlakte wordt bepaald door het plaveien van vierkantjes; denken wij het ons anders?? Denkt iemand het zich anders? Laten we het dan ook zo noemen en weer niet makkelijkheden moeilijk praten). Passeroefeningen. In VIB parallelogram, driehoek, ruit, trapezium, blok, kubus, cirkel en nog wat gemengds over het behandelde.

Er zal wel niemand zijn, die zo iets voor meetkunde aanziet; de behandeling op de lagere school is goed om alvast enige begrippen aan te brengen; en al zouden er leraren zijn, die protest zouden willen indienen, dan zeg ik hun al bij voorbaat, dat dit vast en zeker afgewezen wordt; immers ieder heeft met hetgeen ik als inhoud van de leerstof opgaf, te maken. Er was een tijd, dat vormleer als leervak voor de lagere school in de wet stond; allang niet meer; maar . . . het vak is gebleven!

Wat de briefschrijfster meetkunde noemt, dat wordt bij de toelatingsexamens gevraagd. In 1952:

1. Van een rechthoek het ontbrekende invullen:

lengte	breedte	omtrek	oppervlakte
8 m	...	$17\frac{1}{2}$ m	... dm ²
2. Een land, waarvan de breedte $\frac{1}{3}$ deel is van de lengte, heeft een omtrek van 800 m. Het wordt verkocht voor f 2,25 de ca. Bereken de verkoopprijs.
3. Een driehoek heeft een hoogte van 12 cm. De basis is de helft van de hoogte. Hoe groot is de oppervlakte?

Zo tel ik er al spoedig een goede 30; de „inhouden” inbegrepen.

Hiermee wou ik dan maar besluiten; er is geen enkele reden voor enig protest; immers de lagere school doet niet aan algebra, zij doet niet aan meetkunde. Zij geeft een welkome inleiding tot deze vakken. In België is zelfs vereist een jaar lang intuïtieve meetkunde te geven! Dat is heel wat beter, dan de jeugd dadelijk in September te overvallen met „meetkunde”, het onverteerbare begin volgens sleurmethoden.

In het leerprogram voor de lagere school in Indonesië lees ik in IV: omtrek en oppervlakte van de rechthoek en het vierkant; in V: oppervlakte van driehoeken, parallelogrammen, inhoud van bakken, blokken, cylindere en van de bol (de beide laatste doen wij niet); in VI: kegel, pyramide en de bol nog eens. Ze gaan daar verder dan wij hier! Maar meetkunde mogen we dat niet noemen; evenmin doen ze aan algebra.

ALGEBRA OP DE LAGERE SCHOOL?

In het voorafgaande artikel toont de heer Wijdenes zich een voorstander van het „letterrekenen” op de L.S. We weten niet, of hiermee de vraag naar de „algebra op de L.S.” voldoende beantwoord is. Indien het alleen bij letterrekenen bleef! Maar er zijn genoeg kinderen, die op de M.S. komen, gewapend met de kennis van „min maal min is plus!” Er wordt op verschillende Lagere Scholen inderdaad onderwijs gegeven in het werken met negatieve getallen. Daartegen gaat, m.i. terecht, het protest van vele leraren. Wat drijft de L.S., om zich met negatieve getallen bezig te houden? Zijn die nodig voor de kinderen, die later géén verder onderwijs meer genieten? Of is het een soort van bemoeizucht: geef die arme kinderen zoveel mogelijk mee? We zullen ons ernstig af moeten vragen, of deze bemoeizucht inderdaad reden van bestaan heeft. Waarom bestaan er eigenlijk „opleidingsscholen”? De Middelbare School moet toch zodanig ingericht zijn, dat goede leerlingen van een heel gewone dorpsschool, die in rustig tempo verantwoord onderwijs gehad hebben, het onderwijs kunnen volgen. Verantwoord onderwijs op de L.S.; aan wie is deze school verantwoording schuldig? Aan het leven, aan de maatschappij; niet aan de Middelbare School. Zolang het aansluitingsprobleem niet vanuit deze gezichtshoek gezien wordt, zal het een onoplosbaar probleem blijven. Red.



Aan de Inrichtingen voor Dagnijverheidsonderwijs (Afd. M.T.O. en Zeevaartkunde) worden per 1 Sept. a.s. of eerder gevraagd:

a. Een Leraar in radiokunde voor 10 lessen p.w., eventueel aanvuld met lessen in electriciteits- en trillingsleer tot max. 29 uur p.w. (volledige betrekking).

b. Een Leraar in wis- en natuurkunde (bij voorkeur n.i., t., e.i. of drs.) voor volledige betrekking c.q. voor 12 à 19 lessen p.w.

Salarijs Rijksregeling. Sollicitatiën (op zegel) met uitvoerige inlichtingen binnen 10 dagen na het verschijnen van dit blad aan B. en W. Inlichtingen bij de Dir. (Petrus Driessenstraat 3).

Ter perse.

WIJDENES en STREEFKERK
Oefenbladen I 8e druk II 7e druk

MOLENBROEK—WIJDENES
Stereometrie voor het V.H.O. en M.O. 10e druk

WIJDENES
Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie 8e druk

Beknopte Algebra I, II beide 12de druk

Lagere Algebra II 6e druk

Middel Algebra II 5e druk

Grafiekenschrift 12e druk

Algebra voor het Nijv. Ond. 7e druk

Log. en sinustafel Tafel H 7e druk

Noordhoff's Wiskundige Tafels
5e druk van Versluys Tafel H

WIJDENES
De kegelsneden voor het M.O. 2e druk

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA
Ook verkrijgbaar door de boekhandel

WIJDENES en BETH

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

verzorgd door

D. K. F. HEYT

Leraar Gem. Lyceum Dordrecht

- I. Twintigste druk - 156 blz., 21 fig. f 3,—
II. Achttiende druk - 204 blz., 50 fig. f 3,75
III. Twaalfde druk - 185 blz., 60 fig. f 3,75

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4de en 5de van de H.B.S. A

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Zesde druk - 144 blz., 11 fig. f 2,90

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

Va en VIa Nieuwe Schoolalgebra IIIa

Vβ en VIβ Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:

Voor α de delen I, II, IIIa

Voor β de delen I, II, III.

Voor leraren, die deze boeken op hun school gebruiken, zijn de antwoorden gratis beschikbaar; bovendien bij P. Wijdenes de volledige uitwerkingen van de logaritmenvraagstukken in 4 en in 5 decimalen.

Noordhoff's Schooltafel (5 dec.) 12e druk f 2,25

Noordhoff's Tafel in 4 dec., 18e druk f 1,50

Dr H. J. E. BETH

Tafels in vier decimalen, benevens gegevens op verschillend gebied (natuurkunde, scheikunde, cosmografie) voor schoolgebruik - 3de druk
f 0,60

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel