

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM

DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, HASSELT

PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT

DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT

DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

28e JAARGANG 1952/53

II

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 3,00 op de postgirorekening no. 87185 van de Penningmeester van de Groep **Liwenagel** te Arnhem. Adreswijzigingen van deze leden te melden aan: Dr P. G. J. Vredenduin, Bakenbergseweg 158 te Arnhem. De leden van de **Wimecos** storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1950 t/m 31 Augustus 1951 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) ten bedrage van f 5,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens alle **correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Chr. H.B.S., Jachtlaan 108, Apeldoorn, tel. K6760—2581 (alleen tussen 8.— en 4.15 uur). Latere **correspondentie** hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

I N H O U D.

	Blz.
Prof. Dr. P. H. VAN LAER, De definitie van het begrip „Meetkundige plaats”	49
HANS FREUDENTHAL, De dwarsrijker. II.	58
Korrel CVI	63
Korrel CVII	64
Dr JOH. H. WANSINK, De plaats van de Mechanica in ons V. H. M. O. .	67
De opleiding tot leraar in de wiskunde	86
Verzoek in verband met proefwerken-enquête	88
Nederlandse Vereniging voor Logica en Wijsbegeerte der exacte wetenschappen	89
L. CRIJNS, Strengheid en inzicht	91
Boekspreking	92

DE DEFINITIE VAN HET BEGRIP „MEETKUNDIGE PLAATS”

door

Prof. Dr P. H. VAN LAER.

In de meetkunde maakt men een veelvuldig gebruik van het begrip „meetkundige plaats”. Over de inhoud van dit begrip bestaat wel geen verschil van mening, maar des te meer verschil vindt men in de woordelijke formulering van dit begrip. Ter illustratie hiervan laat ik enkele typerende formuleringen volgen, zoals deze, eventueel met kleine variaties, in leerboeken van het middelbaar onderwijs te vinden zijn, en die naar mijn mening als specimina van de gebruikelijke definities van het begrip „meetkundige plaats” kunnen beschouwd worden. Daar ik in de volgende uiteenzetting naar deze formuleringen zal moeten verwijzen, zal ik ze voor het gemak aangeven met een index: F_1 , F_2 , etc., terwijl ik in plaats van de term „meetkundige plaats” gebruik zal maken van het symbool MP. Verder laat ik alle formuleringen beginnen met de zinsnede: „Een MP is . . .”. Desgewenst leze men hiervoor: „Onder een MP verstaat men . . .” of iets dergelijks. Ook kan men natuurlijk een wijziging in de volgorde der zinsdelen aanbrengen. Ik heb een vijftal formuleringen uitgekozen, die voor mijn doel van belang zijn.

F_1 : Een MP is een figuur waarvan alle punten een bepaalde eigenschap bezitten, terwijl geen enkel punt buiten die figuur die eigenschap bezit (of: terwijl de punten buiten die figuur die eigenschap niet bezitten).

F_2 : Een MP is een figuur waarvan alle punten een bepaalde eigenschap hebben, terwijl alle punten met die eigenschap op die figuur liggen.

F_3 : Een MP is een figuur die alle punten bevat welke aan een zekere voorwaarde voldoen, en geen enkel punt dat er niet aan voldoet.

F_4 : Een MP is een figuur gevormd door alle punten welke een bepaalde eigenschap bezitten.

F_5 : Een MP is de verzameling van alle punten die eenzelfde eigenschap bezitten.

In de stereometrie spreekt men ook van de meetkundige plaats

van lijnen, cirkels, etc. In het volgende zal ik mij, als niet anders wordt aangegeven, voor het gemak beperken tot de bespreking van de definities van een meetkundige plaats van punten. Voor een MP van lijnen, etc. geldt dan *mutatis mutandis* hetzelfde.

Van wege de belangrijke verschillen in de definities van een MP lijkt het wel nuttig eens te onderzoeken of de geciteerde formuleringen alle voldoen aan de eisen die men aan dergelijke definities moet stellen, dan wel of de een of andere definitie bepaald moet afgewezen worden, resp. de voorkeur verdient.

Het is nu wel voor geen tegenspraak vatbaar, dat een goede definitie van het begrip „meetkundige plaats” aan de volgende twee eisen moet voldoen:

I. Zij moet duidelijk aangeven wat de inhoud is van het begrip „meetkundige plaats”. Dit is een eis van *logische*, en tevens van *wiskundig-didactische* aard.

II. Zij moet niet vervat zijn in een formulering waarvan de inhoud in strijd is met de natuur (het wezen) van de meetkundige objecten (vlak, lijn, punt) of gevaar oplevert voor misverstand hieromtrent, of welke gebruik maakt van begrippen die in hun toepassing op dit gebied een onmogelijkheid insluiten. Deze eis is meer van *wijsgerige* aard. Ik zal beide voorwaarden achtereenvolgens behandelen.

I. *Eis van logische en wiskundig-didactische aard.*

Het begrip „meetkundige plaats” bevat — hierover zijn allen het wel eens — twee aspecten, die ik voor het gemak aangeef met MP_1 en MP_2 , nl.:

MP_1 : Ieder punt van de MP heeft de betrokken eigenschap, of MP_1' : geen enkel punt van de MP heeft die eigenschap niet; en

MP_2 : Ieder punt buiten de MP heeft die eigenschap niet, of geen enkel punt buiten de MP heeft die eigenschap.

Gelijkwaardig met MP_2 is MP_2' : Ieder punt, dat de betrokken eigenschap heeft, ligt op de figuur (of: behoort tot de figuur).

Bij het bewijzen dat een bepaalde figuur een MP is, zal men steeds beide aspecten afzonderlijk moeten aantonen. Voor het tweede gedeelte zal men dan, afhankelijk van het gestelde probleem, nu eens aan MP_2 , dan weer aan MP_2' de voorkeur geven. Bij het zoeken van een MP zal men in de regel uitgaan van punten die een bepaalde eigenschap hebben, en dan nagaan of er een figuur is, waarop die punten gelegen zijn. In de analytische meetkunde is dit de gewone methode, en uit de aard van de analytische werkwijze volgt dan, dat men beide aspecten van het begrip „meetkundige plaats” tege-

lijk heeft aangetoond. Over de wijze, waarop men in de praktijk te werk gaat, wil ik het echter verder niet hebben.

Als men de bovengenoemde formuleringen confronteert met de eerste eis, dan blijkt dat de formuleringen F_1 , F_2 en F_3 de beide aspecten van het begrip „meetkundige plaats” duidelijk tot uitdrukking brengen, en dus in dit (wiskundig) opzicht gelijkwaardig zijn. Men kan er over twisten welke van deze drie op dit punt de voorkeur verdient. Velen zullen het meeste voelen voor F_2 (combinatie van MP_1 en MP_2') of F_3 (combinatie van MP_2' en MP_1'), omdat deze formuleringen het beste aansluiten bij de gewoonlijk gevolgde bewijsmethode. Zelf heb ik een lichte voorkeur voor F_1 (combinatie van MP_1 en MP_2), omdat in deze formulering m.i. het duidelijkst, nl. in de vorm van een tegenstelling wel—niet, het tweeledig karakter van het begrip „meetkundige plaats” tot uitdrukking komt, en omdat deze definitie, althans blijkens mijn eigen ervaring, ook voor de leerlingen het meest sprekend is. Ook F_2 is overigens in wiskundig opzicht voortreffelijk, en voor sommige toepassingen (b.v. om te bewijzen dat de deellijnen in een driehoek een punt gemeen hebben) zelfs handiger dan F_1 . Voor F_3 voel ik minder, omdat hier het belangrijke aspect, dat ieder punt van de MP de betrokken eigenschap heeft, niet positief tot uitdrukking komt. Over enkele kleine redactionele wijzigingen, die in de formuleringen F_1 tot F_3 wenselijk zijn in verband met de tweede eis, zal ik het straks hebben.

De formuleringen F_1 , F_2 en F_3 voldoen, zoals gezegd is, alle in meerdere of mindere mate aan de eis, die men uit wiskundig-didactisch oogpunt aan de formulering van het begrip „meetkundige plaats” moet stellen. De keuze tussen deze drie zal dan ook meer een kwestie van smaak dan van wiskundige overweging zijn. Met het oog op de eerste eis, die men aan een goede definitie van een MP moet stellen, heb ik echter ernstig bezwaar tegen de formuleringen F_4 en F_5 , ofschoon beide (en vooral de tweede) in leerboeken veel gebruikt worden, misschien wel van wege hun beknoptheid, en, wat de laatste betreft, ook wel van wege de modern klinkende naam „verzameling”. In beide formuleringen is er niets wat duidt op een tweevoudig aspect. Nu kan men bij de behandeling natuurlijk wel hier op wijzen, maar het ligt voor de hand dat deze kennis spoedig op de achtergrond raakt, als niet telkens, mede door middel van een goede definitie, de herinnering weer wordt opgefrist. Mijn ervaring als gecommitteerde voor wiskunde heeft mij herhaaldelijk laten zien; dat bij gebruik van formuleringen als F_4 en F_5 de meeste leerlingen zich geen rekenschap geven van het tweevoudig aspect van het

begrip „meetkundige plaats”, met het gevolg dat men er b.v. niet in slaagt een logisch onberispelijk bewijs te leveren voor de stelling dat de deellijnen in een driehoek door één punt gaan. Men blijkt dan niet te weten dat men in het eerste deel van het bewijs gebruik moet maken van MP_1 (het snijpunt S van d_a en d_b heeft de eigenschap dat het op gelijke afstanden ligt van b en c , en van a en c , dus van a en b), en in het tweede gedeelte van het bewijs van MP_2 of MP_2' (het punt S met die eigenschap moet dus op d liggen). Een toevoeging van twee adjectieven bij het woord „verzameling” in F_5 , b.v. de „volledige en uitsluitende verzameling” (zoals ik wel eens gehoord heb), kan m.i. hier niet de oplossing brengen, voor eerst daar het op het eerste gezicht helemaal niet duidelijk is, op welk aspect van „meetkundige plaats” deze woorden moeten slaan, en verder omdat de toevoeging van deze woorden bij „verzameling” eigenlijk overbodig is, daar een „verzameling” volgens de wiskundige betekenis per se volledig is, en andere dan haar eigen elementen per se uitsluit.

Over een ander ernstig bezwaar tegen de formuleringen F_4 en F_5 zal ik het aanstonds hebben bij de bespreking van de tweede eis.

II. *Eis van wijsgerige aard.*

Ook de wijsbegeerte der wiskunde, welke zich bezig houdt met een diepere bestudering van de wiskundige objecten en van de wiskunde zelf, mag haar eisen stellen. Wat de definitie van „meetkundige plaats” betreft, kan men met betrekking tot de wijsgerige eisen twee punten onderscheiden, welke echter, zoals blijken zal, zeer nauw met elkaar verbonden zijn.

a. In de definitie van „meetkundige plaats” wordt gesproken van lijnen en punten (eventueel in de stereometrie over vlakken, lijnen en punten). Het is dus van belang dat men hierbij de eigen natuur van deze meetkundige objecten en hun onderlinge relatie in het oog houdt. Men kan zich b.v. de volgende vragen stellen. Wat is het wezen van een meetkundige lijn? Komt aan de lijn of aan het punt prioriteit toe, of m.a.w. is de lijn het eerst gegevene of het punt? In het eerste geval zou het punt reeds een lijn (of vlak) veronderstellen, in het laatste geval zou de lijn kunnen opgebouwd worden uit (kunnen „bestaan” uit) naast elkaar gelegen punten.

Nu deel ik met volle overtuiging de mening van degenen die houden dat alleen de eerste opvatting te verdedigen is, en dat de tweede leidt tot onoverkomelijke moeilijkheden. Volgens deze mening, die het ontstaan van de eerste meetkundige begrippen (meetkundig lichaam, vlak, lijn, punt) tot de aanschouwing terugvoert,

zijn vlakken en lijnen *continua* (d.w.z. samenhangend, dus niet uit discrete elementen bestaande). Een vlak is de grens van deling van het driedimensionale continuum en op zijn beurt een continuum. De lijn is de grens van deling van een vlak en zelf dus weer een continuum, en een punt is de grens van deling van een lijn. Kortheidshalve wil ik mij nu verder beperken tot lijnen en punten. Een punt is dus een plaats, een grens van deling, die men op een gegeven lijn ergens naar willekeur kan verwerkelijken of actueren door een delingsproces. Daar een continuum na iedere deling weer *continua* oplevert — dit is een duidelijk intellectueel inzicht —, die ieder, als zodanig, steeds weer opnieuw deelbaar zijn, kan men onbeperkt met zulk delingsproces doorgaan en dus bij een lijn tot in het oneindige steeds weer nieuwe punten doen ontstaan. Dit „tot in het oneindige” betekent echter niet, dat ooit, na achtereenvolgende delingen, of door een enkel delingsproces, een actueel oneindige hoeveelheid punten zou kunnen ontstaan, maar wel dat er nooit een einde komt aan de „delingsmogelijkheid”. We hebben hier te maken met het „potentieel oneindige”.¹⁾

Men zal dus nooit „alle punten” van een lijn tegelijk kunnen laten ontstaan. Twee punten, van een lijn, hoe dicht ook bij elkaar genomen, kan men beschouwen als grenspunten van een lijnstukje, dus van een continuum, dat zelf weer een potentieel oneindige delingsmogelijkheid biedt en dus steeds weer, tot in het oneindige, het ontstaan kan geven aan nieuwe tussengelegen punten.

De uitdrukking „alle punten van een lijn” is dus zinloos, als men daarmee zou bedoelen een gegeven, onafhankelijk van de lijn reeds bestaande verzameling van individueel bepaalde punten. Een punt veronderstelt een lijn (of eventueel een vlak) waarop het zijn mathematisch bestaan krijgt. Een dergelijke situatie van een punt op een lijn kan men dan beschrijven met een van de volgende woordelijke uitdrukkingen: „Punt A ligt op de lijn l ”, of: „Punt A behoort tot de lijn l ”, of omgekeerd: „De lijn l is drager van punt A ”, en dergelijke.

De lijn heeft dus van nature een prioriteit boven „haar” punten, en niet omgekeerd.²⁾ Door een samenvoeging van punten zonder

¹⁾ De plaatsruimte laat niet toe over een en ander verder uit te weiden. Men kan hierover waardevolle gegevens vinden in: P. Hoenen, *Philosophie der anorganische natuur*; Philosophische Bibliotheek; Nijmegen, N.V. Dekker & van de Vegt; 3e druk, 1947; blz. 76—98.

²⁾ Hiermee is natuurlijk niets gezegd tegen de z.g. „duale” werkwijze in sommige takken van de meetkunde, waarbij men punten en lijnen als gelijkwaardig beschouwt en als onderling verwisselbaar. Men hoeft hier immers niet aan de ontstaanswijze van lijnen en punten te denken, maar mag ze als reeds gegeven beschouwen of gedefinieerd op een andere dan meetkundige wijze.

onderlinge afstand, hoe vaak ook herhaald, zelfs tot in het oneindige, kan nooit een lijntje ontstaan. Een verzameling van individueel bepaalde punten, hoe groot dit aantal ook moge genomen worden is dus nooit gelijkwaardig met een lijn. Zelfs al zou men de beschikking hebben (verondersteld dat dit mogelijk zou zijn) over een actueel oneindige hoeveelheid punten, dan zouden deze gezamenlijk toch nooit een lijntje kunnen vormen. Men mag dus niet een lijn opgebouwd of gevormd denken uit punten (of een vlak uit lijnen of punten). Ook kan men dus niet zeggen dat een lijn uit punten „bestaat” (of een vlak uit lijnen of punten), of dat een lijn een „verzameling” is van punten. Dit alles is in strijd met de natuur (het wezen) van een meetkundige lijn (of meetkundig vlak).

b. Kiest men voor de prioriteit der punten boven de lijn, en wil men dus aannemen dat een lijn opgebouwd is uit punten of gelijkwaardig is met een verzameling van punten — ten onrechte, zoals we zo juist gezien hebben —, dan moet men bovendien noodgedwongen het bestaan aanvaarden van een „actueel oneindige hoeveelheid”, want een bepaald aantal punten, hoe groot ook genomen, zou volgens het voorgaande zeker niet voldoende zijn. En hiermee vervalt men in nieuwe, en m.i. onoplosbare, moeilijkheden van het actueel oneindige, of, wil men de term „verzameling” gebruiken, van de „oneindige verzameling”. Al zullen er nog wel wiskundigen zijn, die met Cantor het actueel oneindige en de oneindige verzameling willen aanvaarden ondanks de tegenstrijdigheden waartoe ze aanleiding geven, de meesten zullen, dunkt mij, toch wel voor dergelijke consequenties terugschrikken en het actueel oneindige en de oneindige verzameling verwerpen. Ik schaar mij, en weer met volle overtuiging aan de zijde van de laatsten.

Als samenvatting van het hier gezegde ten aanzien van de tweede (wijsgerige) eis, moet men dus vaststellen, dat iedere definitie van „meetkundige plaats” moet afgewezen worden, die

a. veronderstelt of althans suggereert dat een lijn opgebouwd is uit punten, of bestaat uit punten (of een vlak uit lijnen of punten), of

b. noodzakelijk het bestaan veronderstelt van een actueel oneindige hoeveelheid.

Uit het bovenstaande volgt dat *a* noodzakelijk *b* met zich mee brengt, zodat een definitie, die tegen *a* ingaat, ook met *b* in conflict komt. Het tweede punt, *b*, hoeft, althans theoretisch, niet noodzakelijk *a* in te sluiten, daar men zich tot de verzameling punten kan bepalen, zonder aan de opbouw van een lijn te denken. In de praktijk zal, in het geval van een meetkundige plaats, echter met *b* ook *a* gepaard moeten gaan.

Het zal nu duidelijk zijn, dat enkele van de bovengenoemde formuleringen moeten worden afgewezen, omdat ze niet aan de tweede voorwaarde (*a* en/of *b*) voldoen. Vooreerst de formulering F_4 , welke uitdrukkelijk zegt dat de gezamenlijke punten, die een bepaalde eigenschap hebben, een figuur vormen. Ook F_5 , ofschoon zij niet met name over een figuur als resultaat van een opbouw uit punten spreekt, lijdt aan hetzelfde euvel, daar de gebruikers van deze formulering de verzameling van punten toch practisch als gelijkwaardig beschouwen met een meetkundige figuur (lijn of vlak). Verder vervalt men in de onoplosbare moeilijkheden van de actueel on-eindige hoeveelheid.

De formuleringen F_1 , F_2 en F_3 zijn, wat het voldoen aan de tweede eis betreft, beter, daar hier duidelijker de natuurlijke prioriteit van de lijn boven „haar” punten wordt uitgedrukt. Toch kan ook nu de uitdrukking „alle punten” aanleiding geven tot misverstand, als men er nl. mee zou bedoelen, dat „alle punten” reeds te voren gegeven zijn en gezamenlijk de figuur vormen. Dan immers komt de juist gesignaleerde moeilijkheid weer in alle hevigheid terug. Speciaal lijkt mij dit gevaar voor misverstand aanwezig bij de formulering F_3 , daar hier door de zinsnede „die alle punten bevat welke aan een bepaalde voorwaarde voldoen” m.i. gemakkelijk de indruk gewekt wordt dat deze punten een klaarliggende hoeveelheid zijn.

Men kan echter in F_1 en F_2 de uitdrukking „alle punten” ook goed verstaan, als men er nl. mee wil aangeven „alle punten die men op (of buiten) de betrokken figuur wil kiezen”. Met een korte toelichting op de beide mogelijke betekenissen zal men de leerlingen gemakkelijk de tweede, juiste, betekenis laten vatten. Ook F_3 kan met een toelichting nog wel op de juiste wijze worden begrepen. Het zou echter, dunkt mij, de voorkeur verdienen in deze drie gevallen een enigszins gewijzigde terminologie te kiezen, die de juiste opvatting duidelijker naar voren brengt. Zo zou men, speciaal in F_1 en F_2 , in plaats van „alle punten” m.i. beter kunnen zetten „ieder punt”. Ofschoon ook deze uitdrukking „ieder punt” taalkundig wel de beide gesignaleerde betekenissen kan hebben van „alle punten”, toch wijst naar mijn mening de term „ieder punt”, ook taalkundig, eerder naar de tweede, en dus juiste, betekenis. Desgewenst zou men deze juiste betekenis door een kleine toevoeging, als „ieder punt dat men er op kiest of aanneemt” en dergelijke, nog uitdrukkelijker naar voren kunnen brengen. De betere formulering zou dan b.v. kunnen luiden:

F_1' : Een MP is een figuur waarvan ieder punt [dat men er op kiest] een bepaalde eigenschap bezit, terwijl geen enkel punt buiten

die figuur [gekozen] die eigenschap bezit (of: terwijl punten buiten die figuur [gekozen] die eigenschap niet bezitten).

Geeft men de voorkeur aan een formulering van het karakter F_2 , dan zou de definitie kunnen luiden:

F_2' : Een MP is een figuur waarvan ieder punt [dat men er op kiest] een bepaalde eigenschap heeft, terwijl ieder punt met die eigenschap op die figuur ligt (of: tot die figuur behoort).

Ik meen echter dat men de tussen haakjes: [] geplaatste toevoegingen gerust mag weglaten, daar zonder toelichting ook met deze toevoegingen er altijd nog wel aanleiding bestaat tot misverstand, en met de nodige toelichting deze formuleringen ook zonder deze toevoegingen wel duidelijk zijn.

Wil men per se de voorkeur geven aan de formulering F_3 , dan zou hier zeker wel een extra toelichting nodig zijn bij de zinsnede „die alle punten bevat, welke . . . en geen enkel punt dat er niet aan voldoet”. Misschien kan ook hier een andere formulering, die overigens hetzelfde wiskundige karakter heeft, uitkomst brengen, b.v. de formulering:

F_3' : Een MP is een figuur die drager is van de punten welke aan een zekere voorwaarde voldoen, terwijl geen enkel punt van die figuur niet aan die voorwaarde voldoet (of: terwijl bovendien ieder punt van die figuur aan die voorwaarde voldoet). Toch kan ik ook in deze vorm de formulering F_3 moeilijk waarderen.

Voor de stereometrie krijgt men natuurlijk soortgelijke formuleringen, waarbij eventueel in plaats van punten ook andere meetkundige objecten kunnen optreden.

Het gebruik van het woord „elementen” „om een meer algemene formulering van het begrip „meetkundige plaats” mogelijk te maken vind ik niet erg gelukkig, omdat dit woord wel heel sterk de opvatting in de hand werkt, dat de figuur (lijn of vlak) uit deze „elementen” als samenstellende bouwstenen bestaat, wat weer onverenigbaar is met de „continue” natuur van lijn of vlak.

Bij een bepaalde meetkundige plaats, b.v. bij de deellijn van een hoek, zou de formulering kunnen luiden: „De meetkundige plaats van *de punten* (dus niet „van *alle* punten”), die gelijke afstanden hebben tot de benen van een hoek, is de deellijn van die hoek”.

Opmerking. Ten slotte zou ik, in verband met het hier behandelde, nog een korte opmerking willen maken met betrekking tot de analytische meetkunde. Men stelt het vaak voor (en de gewone wijze van construeren met behulp van een aantal vooraf bepaalde punten steunt deze voorstelling), alsof de figuren der analytische meetkunde inderdaad uit punten bestaan, dus oneindige puntverzamelingen

DE DWARSKIJKER II

door

HANS FREUDENTHAL.

Het schriftelijk eindexamen Wiskunde 1952 (Gymnasium).

Ik beschik dit jaar over de cijfers voor het schriftelijk wiskunde-werk bij de gymnasiale eindexamens van een vrij grote homogene groep (36 kandidaten van één school). Het lijkt me de moeite waard, om hieraan enige beschouwingen vast te knopen.

VRAAGSTUKKEN

Stelkunde, 2 uur:

1. Als α en β de wortels zijn van de vergelijking: $x^2 + px + q = 0$, waarbij $q \neq 0$ en $F(n) = \alpha^n + \beta^n$, waarbij ¹⁾ n een geheel getal is, bewijs dan:
 - a. $F(-n) = \frac{F(n)}{q^n}$;
 - b. $F(-n+2) + p \cdot F(-n+1) + q \cdot F(-n) = 0$. ²⁾
2. In een convergente oneindig voortlopende meetkundige reeks met positieve termen, waarvan de reden r is, interpoleert men tussen elk tweetal termen één term, zó, dat er weer een meetkundige reeks ontstaat.
 - a. Als gegeven is, dat de som (ook wel limietsom of somlimiet genoemd) van de tweede reeks gelijk is aan p maal de som van de oorspronkelijke reeks, vraagt men welke betrekking er bestaat tussen de grootheden p en r . ³⁾
 - b. Welke waarden van p zijn in dit vraagstuk slechts mogelijk?
3. Tussen welke grenzen moet x liggen, opdat
$${}^{10}\log (2x - 5) < \frac{1}{10}\log (x - 3)?$$
(Er worden alleen reële waarden van x beschouwd.)
4. Voor welke waarde van x is ${}^2\log {}^2\log x = -1$?
Teken een duidelijke grafiek van y als functie van x als $y = {}^2\log {}^2\log x$.

¹⁾ De dubbele afhankelijkheid met „waarbij” is allesbehalve fraai.

²⁾ Het is een zeer slechte gewoonte, geen verschil in plaatsing te maken tussen de punt als leesteken en als vermenigvuldigingsteken.

³⁾ De constructie „als gegeven is, dat . . . , vraagt men welke . . . ” is taalkundig beslist af te keuren.

zijn. Deze voorstelling is, naar mijn mening, zoals uit het bovenstaande wel duidelijk zal zijn, volkomen onjuist. Ook in de analytische meetkunde is een lijn een continuüm. De wijze van ontstaan die met de juiste opvatting overeenkomt, zou men als volgt kunnen beschrijven. Men laat de x -coördinaat continu veranderen, wat meetkundig kan geïnterpreteerd worden als de continue beweging van een punt A op de x -as en de daarbij behorende continue beweging van een lijn evenwijdig met de y -as. Op deze lijn denkt men dan steeds de corresponderende ordinaat AB afgepast. Het eindpunt B beschrijft dan de gewenste kromme. De continuïteit van de kromme is nu gewaarborgd door de continuïteit van de beweging. Zoals de beweging geen resultaat is van opeenvolgende stilstanden, zo is de kromme, die ontstaat, geen resultaat van naast elkaar liggende punten. Ook kan men, zoals in veel leerboeken gebeurt, zeer geschikt gebruik maken van een formulering, die het begrip „meetkundige plaats” bevat, b.v. van de formulering. „De vergelijking $F(x,y) = 0$ stelt die lijn voor, welke de MP is van de punten waarvan de coördinaten stellen wortels zijn van deze vergelijking”, of iets dergelijks. Door het gebruik van het begrip „meetkundige plaats”, mits goed verstaan, is nu de continuïteit van de lijn gewaarborgd.

Hiermee meen ik deze korte beschouwingen te kunnen beëindigen. Ik hoop dat ze iets mogen bijdragen tot een beter inzicht in een veel gebruikt begrip in de meetkunde, en tot een juiste formulering van de definitie er van. Dit zal dan tevens aan het inzicht in de natuur der meetkundige objecten ten goede komen. De ervaring heeft mij geleerd dat deze hoop niet ijdel hoeft te zijn.

Leiden, Augustus 1952.

Meetkunde, $2\frac{1}{2}$ uur:

- Gegeven zijn: een lijnstuk d , een rechte l en twee verschillende, niet op l gelegen punten A en B.
Beschrijf de constructie van een rechte door A, die l loodrecht snijdt of kruist en waarvan de afstand tot B de lengte d heeft.
Bij welke keuze der gegevens is er slechts één oplossing?
Een tekening wordt niet geëist.
- In een plat vlak α liggen: een cirkel met middelpunt M en straal r en een punt P_1 , zodanig, dat $\overline{MP_1} = 3r$. De cirkel is het grondvlak van een rechte kegel met top T; $\overline{TM} = 2r$.
 P_1 is de projectie op het vlak α van een punt P; $\overline{PP_1} = r$. T en P liggen aan verschillende kanten van α .
Men brengt door P een raakvlak van de kegel aan, dat met de gegeven cirkel een punt gemeen heeft, dit punt wordt A genoemd.
a. Construeer $\triangle TAP$ in ware gedaante, als r een gegeven lijnstuk is.
b. Construeer de afstand van TA en PP_1 in ware grootte.
- Van het viervlak TABC is het grondvlak ABC een gelijkzijdige driehoek met zijde a . De standhoek op de ribbe BC is 60° , terwijl TA loodrecht op het grondvlak staat. M is een punt zodanig op AT gelegen, dat $\overline{AM} = \frac{1}{2}a$.
a. Bewijs dat de bol met M als middelpunt en $\frac{1}{2}a$ als straal raakt aan vlak TBC en geef de ligging van het raakpunt S aan.
b. Welk deel van het oppervlak van genoemde bol kan men vanuit T zien?
c. Bepaal (zo mogelijk zonder berekening) de lengte van $\overline{CS}$.
d. Bereken de straal van de omschreven bol van het viervlak SABC.

Trigonometrie en Analytische Meetkunde, $2\frac{1}{2}$ uur:

- Als a , b en c de zijden van een driehoek zijn, α , β en γ de hoeken, en d_1 , d_2 en d_3 de bisectrices van deze hoeken, dan geldt de betrekking:

$$\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2\cos \frac{1}{2}\alpha}{d_1}. \text{ Bewijs dit.}$$

Bewijs vervolgens:

- Als $\alpha = \beta$, dan geldt $d_1 = d_2$;
 - als $\alpha < \beta$, dan geldt $d_1 < d_2$.
- Gegeven zijn de parabool $y^2 = 6x$ en een cirkel met straal r , die door de oorsprong gaat en waarvan het middelpunt M op de positieve X-as ligt. Voor welke waarden van r heeft deze cirkel nog andere punten dan de oorsprong met de parabool gemeen? Noem deze punten A en B.
Bepaal de meetkundige plaats van de middens van MA en MB als M de X-as doorloopt.
 - Op een rechthoekig coördinatenstelsel met oorsprong O zijn gegeven de punten A(6, 0) en B(0, 8).
a. Gevraagd de vergelijkingen van de omschreven cirkel C_1 en de ingeschreven cirkel C_2 van $\triangle ABO$.
b. Op de lijn, waarvan de vergelijking luidt: $x - 6 = 0$, liggen punten, voor elk waarvan geldt, dat de som van hun machten t.o.v. de cirkels C_1 en C_2 nul is. Bereken de coördinaten van die punten.

Ook op de lijn met de vergelijking $2x + y = 0$ liggen punten met bovengenoemde eigenschap. Bereken ook de coördinaten van deze punten.

- c. Toon aan dat deze 4 punten op een cirkel liggen, die behoort tot de cirkelbundel, welke door de cirkels C_1 en C_2 bepaald wordt.

Statistische gegevens (over 36 kandidaten).

	Stelkunde				Meetkunde			Trig. en Anal. Meetkunde		
	I	II	III	IV	I	II	III	I	II	III
gemiddeld cijfer	8,9	5,7	9,2	8,9	7,4	6,6	7,6	5,3	6,2	6,6
σ	2,6	1,4	1,8	1,9	1,3	3,1	1,4	2,8	2,9	2,3

Opmerking: σ karakteriseert de „spreiding” van het materiaal; bij een „normale” verdeling ligt 70 procent van het materiaal binnen de grenzen „gemiddelde $\pm \sigma$ ” en 95 procent binnen „gemiddelde $\pm 2\sigma$ ”.

Toelichting.

Stelkunde I: 5 kandidaten onvoldoende (cijfers 1, 1, 3, 4, 5), één voldoende, de overigen 9 of 10. Rekenfouten overheersten. Eén kandidaat stelt $p = \alpha + \beta$. De hoge σ is nauwelijks significant. Schraapt men de „uitbijters” (cijfers 1, 1, 3), dan blijft er van de σ haast niets over. Het vraagstuk was zeer gemakkelijk, maar wekte oppervlakkig bekeken een ongewone afschrikkende indruk en werd vaak tot het einde toe uitgesteld. De kandidaten, die er niet mee slaagden, waren blijikbaar in tijdnood.

Stelkunde II: 1 kandidaat haalt 9; overigens is 7 het hoogste cijfer; 13 onvoldoende. Het laagste gemiddelde van de Algebravraagstukken, het op één na laagste van alle vraagstukken. Drie fouten waren hier vrij algemeen:

1. Van de twee mogelijkheden $\pm \sqrt{r}$ voor de reden van de nieuwe reeks werd het negatieve geval over 't hoofd gezien. (Er schijnen boeken in het gebruik te zijn, waarin de interpolatieformule even onvolledig wordt gegeven.) Slechts één kandidaat vermeed deze fout. In het verdere verloop werd de fout vaak ongedaan gemaakt door kwadrateren.

2. Voor p werd de voorwaarde $0 < p < 2$ verkregen, maar de bijvoorwaarde $p \neq 1$ werd soms vergeten.

3. In sommige gevallen werd verzuimd, na te gaan of de verkregen noodzakelijke voorwaarde $0 < p < 2$, $p \neq 1$ ook voldoende

is. (Het is een gebrek van ons gehele algebra-onderwijs, dat de leerlingen niet vanaf de 1e klas eraan gewend worden, de oplossing van een vraagstuk door „proef op de som” te verifiëren. Ieder, die wiskundig werkt, weet dat men onmogelijk bij elke stap van een herleiding kan nagaan, of hij omkeerbaar is. Een groot aantal fouten (b.v. de fout 2) kan worden vermeden, als de leerling elk resultaat achteraf verifiëert. Ik begrijp niet de hardnekkige weerstand der leraren tegen de „proef op de som”, die immers tot de dagelijkse praktijk van elke wiskundige werker behoort.)

Ik sla rekenfouten over. Als curiositeit merk ik op, dat twee kandidaten uit $p = 1 + \sqrt{r}$ en $-1 < r < 1$ de conclusie trokken: $-1 + i < p < 1 + i$.

Stelkunde III: Slechts 8 kandidaten hadden minder dan 10 (waaronder 2 onvoldoende). Eén candidaat had de bestaanbaarheid van de logaritmen niet onderzocht; overigens slechts rekenfouten.

Stelkunde IV: 4 onvoldoendes. De fouten waren nogal verschillend van aard (geen grafiek, foutieve grafiek, foutieve redenering bij de grafiek, geen asymptoten, foutieve asymptoten).

Over 't algemeen genomen, was de Algebra gemakkelijk. Het moeilijkste was *die* som, die het minste rekenwerk vereiste (II). (Dit betekent niet, dat ik over II enthousiast ben — dat „uitmelken” van de reeksen en dat dwaze interpoleren reken ik niet tot verstandige algebra.)

Meetkunde I: Twee onvoldoendes en als hoogste cijfer één 9. Door alle kandidaten op één na wordt het geval AB // l over 't hoofd gezien. Overigens zeer uiteenlopende fouten.

Meetkunde II: 16 onvoldoendes en evenveel 9 en 10. Belangrijkste fouten:

1. Punt P aan de verkeerde kant van α .

2. Punt P in α .

3. A wordt verkregen door een „raaklijn” aan de grondcirkel te trekken (6 kandidaten).

Overigens uiteenlopende fouten. 6 kandidaten hadden het werk niet af.

Meetkunde III: 3 onvoldoendes. Zeer uiteenlopende fouten. 5 kandidaten bepaalden $\overline{CS}$ „zonder berekening”.

Het is wel merkwaardig, dat een uiterst eenvoudig vraagstuk zoals I ongeveer hetzelfde gemiddelde en dezelfde spreiding geeft als een zeer samengesteld vraagstuk zoals III. De essentiële fouten, die in II konden worden gemaakt, waren zeer elementair; de grotere spreiding resulteert uit het feit, dat veel kandidaten het niet af konden maken.

Trigonometrie I: 15 onvoldoende (waarvan 13 lager dan 4). Het laagste gemiddelde en nagenoeg de hoogste spreiding. Een didactisch zeer interessant vraagstuk. Men kan het in een minuut of minder oplossen — maar let wel! — onder de voorwaarde, dat men alleen de sinusregel van buiten kent (zoals schrijver dezes). De kandidaten diepen uit hun trigonometrische formule-schat alles en nog wat op, voeren phantastische herleidingen uit en komen in een slop terecht. Eén kandidaat kende een formule voor d_1 van buiten, waar de te bewijzen formule rechtstreeks uit volgt. Eén kandidaat gebruikt rechtstreeks sinus-regel én bisectrix-stelling; zeven werken (minder rechtstreeks) met de som van de oppervlakten der deeldriehoeken.

Analytische Meetkunde II: 12 onvoldoendes (waarvan 10 lager dan 4). De hoofdmoeilijkheid was, dat de abscis van het andere snijpunt steeds reëel is, en pas door de ordinaat over de mogelijkheid van een r wordt beslist. Overigens zeer uiteenlopende fouten.

Analytische Meetkunde III: 9 onvoldoendes (5 lager dan 4). Mijn aantekeningen bij dit vraagstuk zijn zoek geraakt. Ik herinner me, dat C_1 en C_2 soms op veel te ingewikkelde wijze werden gevonden, en dat ook dit vraagstuk vrij vaak niet af was.

Hoe komt het, dat de resultaten in „Trigonometrie en Analytische Meetkunde” zoveel lager liggen dan in de andere onderdelen? Welnu, de drie vraagstukken van dit laatste onderdeel testen (op IIIa na) uitsluitend de algebraïsche bekwaamheden van de leerling; I het gemak, waarmee de leerling een formule doorziet, II en III de handigheid in het opereren (vooral elimineren). De algebraïsche bekwaamheden worden trouwens ook alleen in het onderdeel „Trigonometrie” getest. Het onderdeel „Stelkunde” kan op dit punt nauwelijks serieus worden genomen; hier probeert men eigenlijk niets anders dan de leerling een hak te zetten en hem over pietluttigheden te doen vallen.

Ik heb vooral in de eerste jaren na de oorlog vaak een duizelingwekkende meetkundige training vij de leerlingen geconstateerd en tevens een tekort in de algebra. Gelukkig gaat bij de meetkunde-vraagstukken de ontwikkeling in de richting van minder routine te veronderstellen; men mag hopen, dat deze lijn verder wordt doorgetrokken. In de algebra-vraagstukken valt enige verbetering waar te nemen, hoewel nog steeds overwegend grapjes en trucjes worden geëxamineerd.

KORREL CVI.

Over de stelling van Ptolemaeus.

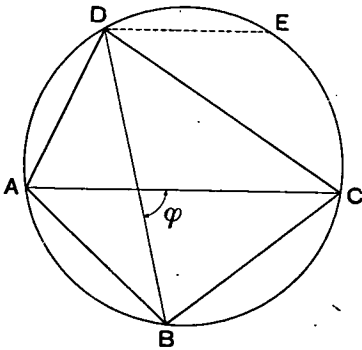
Na lezing van Korrel CV van dr H. Streefkerk herinnerde ik mij, dat ook de stelling van Ptolemaeus een theorema genoemd wordt, zodat ook deze een „zichtbaar” bewijs moest hebben. Ik vond het volgende.

Definitie. Als oppervlakte-eenheid kiezen we een parallelogram, waarvan de zijden gelijk zijn aan de lengte-eenheid en de hoeken zijn φ en $180^\circ - \varphi$.

Hulpstelling I. De oppervlakte van een parallelogram met zijden a en b en hoeken φ en $180^\circ - \varphi$ is ab oppervlakte-eenheden.

Hulpstelling II. $2 \times$ de oppervlakte van convexe vierhoek ABCD met diagonalen $AC = e$ en $BD = f$, die hoeken φ en $180^\circ - \varphi$ met elkaar insluiten = oppervlakte van parallelogram met zijden e en f en hoeken φ en $180^\circ - \varphi$. Bewijs: trek door A en C lijnen $\parallel$ DB en door D en B lijnen $\parallel$ AC.

Theorema van Ptolemaeus. In de convexe koordenvierhoek ABCD met zijden $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ en diagonalen e en f is $ef = ac + bd$.



Bewijs:

De diagonalen AC en BD maken met elkaar de hoeken φ en $180^\circ - \varphi$.

De hulplijn door D evenwijdig aan de diagonaal AC snijde de omgeschreven cirkel in E.

Draai CA om C tot in de stand CE.

Draai BD om B tot in de stand BC.

CA en BD zijn in dezelfde richting

over gelijke hoeken gedraaid.

Dus ook CE en BC maken hoeken φ en $180^\circ - \varphi$.

Draai BD om B tot in de stand BA.

Draai AC om A tot in de stand AE.

BD en AC zijn in dezelfde richting over gelijke hoeken gedraaid.

Dus ook BA en AE maken hoeken φ en $180^\circ - \varphi$.

$2 \times \text{Opp. koordenvierhoek } ABCD = 2 \times \text{Opp. koordenvierhoek } ABCE = 2 \times \text{Opp. } \triangle ABE + 2 \times \text{Opp. } \triangle BCE.$

Hieruit volgt $AC \times BD = AB \times AE + CB \times CE$, dus
 $ef = ac + bd.$

K. L. VAN DEN ENDE.

KORREL CVII.

De drie theorema's en de regelmatige tienhoek.

In de vorige korrel (CVI) geeft K. L. van den Ende een „zichtbaar” bewijs voor de stelling van Ptolemaeus, daarmee rechtvaardigende, dat deze stelling vanouds een „theorema” geheten heeft.

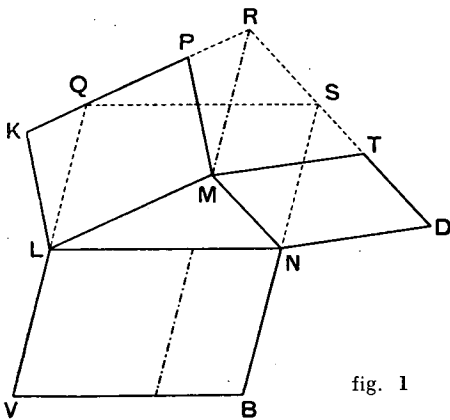


fig. 1

Nu daarmee twee theorema's aan de orde geweest zijn (korrels CV en CVI) dient de rij gesloten te worden met het derde theorema, dat van Pappus. Het daarvoor gewoonlijk gegeven bewijs stempelt de stelling onmiddellijk tot een theorema, Zij LMN een willekeurige driehoek. Op LM en MN als basis tekent men twee willekeurige parallelogrammen LMPK en NMTD; de verlengden van KP en DT snij-

den elkaar in R. Beschrijft men nu op LN als basis het parallelogram LNBV, waarbij $NB \neq RM$ is, dan is ¹⁾ $\overline{LNBV} = \overline{LMPK} + \overline{NMTD}$. Bewijs: Trek LQ en NS // MR en trek QS. Dan is $\overline{LMPK} + \overline{NMTD} + \overline{LNM} = \overline{LMRQ} + \overline{NMRS} + \overline{LNM} = \overline{LNSQ} + \overline{QSR} = \overline{LNSQ} + \overline{LNM}$ of $\overline{LNBV} + \overline{LNM}$. Hieruit volgt: $\overline{LMPK} + \overline{NMTD} = \overline{LNBV}$, waarmee het theorema „gezien” is.

Het was dr H. A. Naber, die in zijn verschillende geschriften de aandacht voor de drie theorema's vroeg en daarbij speciaal op de betekenis van het woord theorema lette ²⁾ (zie korrel CV). Hij ging

¹⁾ Met $\overline{ABCD}$ is bedoeld: de oppervlakte van ABCD.

²⁾ Naber schrijft (Das Theorem des Pythagoras, P. Visser, Haarlem, 1908, blz. 21): *Θεωρεῖν* (theorein) bedeutet „betrachten”; Theorem muss also anfänglich bedeutet haben: etwas das durch die bloße Betrachtung erkannt wird. En in een noot: ... dasjenige, was zugleich einfach und bedeutend ist sollte man Theorem nennen.

daarbij zover, dat hij de mogelijkheid opperde, dat niet alleen het eerste theorema, maar ook de beide andere aan Pythagoras en zijn school bekend waren. Hij ging van het standpunt uit, dat de figuur van de regelmatige tienhoek met zijn diagonalen uit religieuze motieven door Pythagoras uitvoerig bestudeerd werd, en dat de drie theorema's uit deze figuur te voorschijn gekomen zijn.

Verder suggereerde dr Naber, dat Pythagoras voor z'n oppervlaktetheorie niet aan het *vierkant* als oppervlaktemaat vastzat, maar werkte met een gelijkbenige driehoek met vaste tophoek als oppervlakte-eenheid (is de opp. eenheid een gelijkbenige driehoek met tophoek α en met de eenheid als lengte van de benen, dan is de opp. van een ongelijkbenige driehoek met tophoek α of $180^\circ - \alpha$ en a en b als lengten van de benen gelijk aan ab). In korrel CVI heeft de heer van den Ende hetzelfde principe gebruikt. Hoe heeft nu, naar de onderstelling van dr Naber, Pythagoras de drie theorema's misschien „gezien”?

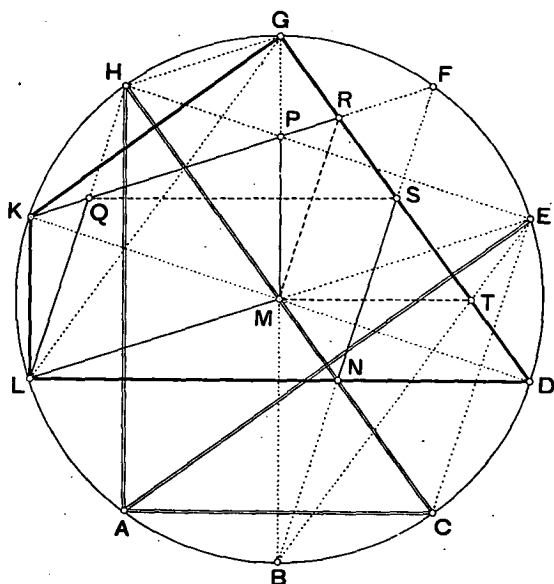


fig. 2. (Deze figuur bevat, behalve de hulplijnstukken MR, MT en QS, niet anders dan zijden en diagonalen van de regelmatige tienhoek).

I. *Het theorema van Pythagoras.* Men zie hiervoor korrel CV; alleen wijs ik er nog op, dat, volgens N., het *trekken* van de hoogtelijn en het *uitslaan* van de driehoek de fundamentele ontdekkingen waren; welnu, beide zijn te *zien*. Zie fig. 2: $\triangle HAC$ is rechthoekig; AE is de hoogtelijn op de hypotenusa HC ; $\triangle HEC$ is de uitgeslagen $\triangle HAC$.

II. *Het theorema van Ptolemaeus.* Beschouw de „heilige” vierhoek LDGK ($LK = a_{10}$, $KG = a_5$, $LG = GD = a_{10}^*$ —zijde van de regelmatige „ster”tienhoek —, $LD = a_5^*$, $KD = 2R$, $bg\ LK : bg\ KG : bg\ GD : bg\ DL = 1 : 2 : 3 : 4$, $1 + 2 + 3 + 4 = 10$). Neem als opp. eenheid een gelijkbenige driehoek met een tophoek van 72° . Men „ziet”, dat $\triangle LKG$ door $\triangle LHG$ te vervangen is;

$$\triangle \overline{HGD} \text{ (toph. } 108^\circ = 180^\circ - 72^\circ) = \overline{HG} \times \overline{GD}$$

$$\triangle \overline{HLD} \text{ (toph. } 72^\circ) = \overline{HL} \times \overline{LD}$$

$$\overline{LDGK} \text{ (hoek van de diag. } = 72^\circ) = \overline{GL} \times \overline{KD}.$$

Hier *ziet* men dus (een bijzonder geval van) het theorema van Ptolemaeus (zie verder korrel CVI), en wel in een van de zeer weinige gevallen met behoorlijke getallen (stel $R = 1$, $a_{10} = c$, dan is $a_5 = \sqrt{2 - c}$, $a_{10}^* = 1 + c$, $a_5^* = (1 + c)\sqrt{2 - c}$).

III. *Het theorema van Pappus.* Beschouw de zijde en diagonalen LK, LH, LE, LD, KF, HC, GD, GB, FB en EB (tien stuks!) met de snijpunten N, P, Q, R, S en T. Men heeft nu fig. 1 weer voor zich: $\triangle LNM$ met de par. LMPK, NMTD (trek MT), LNSQ (trek SQ), de hulppar. LQRM (trek RM) en RMNS. Het gehele theorema is, met bewijs, zichtbaar, zij het in een min of meer bijzonder geval.

Het is duidelijk, dat het, bij deze bewijzen, niet de minste moeite gekost moet hebben, om van het bijzondere geval tot het algemene te komen. Vanzelfsprekend was het niet mijn bedoeling een lans te breken voor dr Naber's speculaties in dit opzicht, maar wel om de aandacht te vestigen op zijn ongetwijfeld interessante publicaties, die o.a. aardige stof bieden voor een „laatste” les.

H. STR.

DE PLAATS VAN DE MECHANICA IN ONS V.H.M.O.¹⁾

door

Dr JOH. H. WANSINK.

1. „De plaats van de mechanica in ons V.H.M.O.” is een thema, dat in de laatste decennia zo dikwijls onderwerp van discussie is geweest, dat ik eerst na enige aarzeling het als titel voor een inleiding op deze vacantiecursus heb gekozen. Zijn in de strijd om de mechanica en de strijd vóór de mechanica niet reeds alle pijlen vershoten? Is er nog wel nieuw geschut in stelling te brengen? Besecht is de strijd in elk geval nog niet, en het heeft daarom nog wel enige zin om na te gaan, waar die strijd om gaat en om aan te geven, welke de plaats is, die de mechanica in ons onderwijs ingenomen heeft, thans inneemt en in een nabije toekomst behoort in te nemen.

Voor de literatuur, die ten grondslag ligt aan mijn oriënterende inleiding, die althans ten dele een historisch en refererend karakter heeft, verwijs ik naar bijlage II.

2. „De plaats van de mechanica in ons V.H.M.O.”; dit is enerzijds een vraagstuk van algemene, anderzijds van bijzondere didactiek. De theorie van het leerplan neemt immers in de algemene didactiek een centrale plaats in, terwijl de vaststelling van de plaats der mechanica binnen dit leerplan ons brengt op het terrein van de didactiek van dit speciale vak. De ontwikkeling van de didactiek is echter heden ten dage nog niet zo ver gevorderd, dat we nu reeds in staat zijn onze meningen te gronden op didactische experimenten in plaats van enkel op didactische ervaring. Ik heb de indruk, dat vooral de wis- en natuurkunde-docent nog wat huiverig staat t.o.v. de zo nodige didactische experimenten.

We moeten voorts beseffen, dat bij de plaatsbepaling van een leervak niet enkel rationele factoren een rol spelen. Zonder een rangorde van waarden aan vakken of vak delen toe te kennen komt geen leerplan tot stand. Welke criteria gelden er bij het afwegen van het ene vak tegen het andere? Deze criteria zijn deels van subjectieve

¹⁾ *Inleiding*, gehouden op de zevende Vacantiecursus van het *Mathematisch Centrum* over „Mechanica”, op Vrijdag 22 Augustus 1952, te Amsterdam.

aard. Ze zijn anders bij degene, die in problemen van onderwijs en opvoeding, ook in het V.H.M.O., het onderwijs alleen zinvol acht, wanneer men het zijn plaats geeft in het wijdere verband der opvoeding en dus deze opvoeding als primair ziet, dan bij hem, die hier het onderwijs primair acht. De bedoelde criteria hangen samen met onze levens- en wereldbeschouwing.

Als redelijke wezens zullen we weliswaar steeds bereid moeten zijn tot een kritische analyse van onze waarderingsoordelen, maar bij deze rationele analyse stuiten we toch op den duur op een rest, die we niet verder kunnen of willen analyseren, zodat pogingen om langs uitsluitend rationele weg met tegenstanders tot overeenstemming te geraken, dreigen te mislukken.

Het lijkt me goed toe dit te overwegen om te beseffen, dat er bij discussies over leerplanaangelegenheden hoogstens een redelijk compromis mogelijk is. Deze discussies zijn dus nuttig, maar het feit, dat er van een theoretisch verantwoorde theorie van het leerplan nog geen sprake is, maakt, dat we onze verwachtingen ten aanzien van dit nuttige effect niet te hoog mogen spannen.

Welke criteria er mogen gelden bij de keuze van de leerstof, op nuttigheidsgronden, om denkpsychologische overwegingen, terwille van de culturele betekenis van de leerstof, — het zijn alle vragen, die in ons aan instituten voor paedagogische research zo arme vaderland nog op onderzoek wachten. De paedagogische psychologie geeft ons geen ondubbelzinnig bescheid; de sociologie van het onderwijs staat nog te zeer in haar kinderschoenen, om de maatschappelijke factoren bloot te leggen, die bij schoolorganisatie en leerplaninrichting gewicht in de schaal dienen te leggen.

3. Ik hoop nu opvolgend te kunnen geven:

- a. een historische beschouwing over de plaats der mechanica in ons V.H.M.O.;
- b. een afbakening van de plaats der mechanica tussen de deductieve wiskunde en de inductieve natuurkunde;
- c. een beschouwing over de wijze, waarop de mechanica schoolorganisatorisch nu en in de naaste toekomst het best tot zijn recht zal kunnen komen.

Een gedetailleerde bespreking van de leerstof en van de examenstof zal ik in mijn inleiding niet geven; ik verwijs U ervoor naar bijlage I.

4. In de wet op het M.O. van 1863 werd de mechanica als zelfstandig schoolvak opgenomen. Men kan dit zien als één der symptomen van de waardering voor de voordien te zeer verwaarloosde

studie van de wis- en natuurkundige vakken. Er was behoefte aan een schooltype, dat aan een brede schare van leerlingen kennis van de natuur zou bijbrengen en dat zou kunnen helpen bij het aanwijzen van de middelen die dienstig zouden kunnen zijn voor de beheersing van de natuur. In deze behoeften heeft de H.B.S. voorzien.

De omschrijving voor het nieuwe vak luidde in 1863:

„de beginselen van de theoretische en toegepaste mechanica, van de kennis der werktuigen en van de technologie.”

In 1952 staat er in de wet enkel nog „de mechanica”. Deze wijziging doet ons reeds vermoeden, dat er in de verwachtingen die men t.a.v. de desbetreffende leerstof koesterde en in de waardering ervan, een belangrijke verschuiving te constateren zal moeten zijn.

De technische toepassingen waaraan aanvankelijk relief werd gegeven, zijn geheel uit de leerstof verdwenen en deze leerstof is, op de statica na, ingeperkt tot de kinematica en dynamica van het stoffelijk punt en als zodanig tot een hulpvak voor andere vakken geworden. Over de technologie heb ik slechts eindexamenopgaven kunnen vinden voor de jaren 1866 en 1867, en ook van opgaven die we onder toegepaste mechanica zouden willen laten ressorteren, is spoedig afgezien.

Bevreemden kan ons – achteraf – de gesignaleerde verschuiving niet.

Thorbecke wenste op zijn nieuwe school speciale aandacht te schenken aan de talrijke burgerij, die het lager onderwijs te boven zich wenste voor te bereiden voor de onderscheiden bedrijven der nijvere maatschappij. Hij verklaarde echter tevens, dat hij de scholen niet tot werkplaatsen wilde maken, maar dat hij geest en zintuig zo wilde ontwikkelen, dat ze voor de praktijk geschikt werden. Zo zien we, hoe eigenlijk reeds bij de geboorte van de H.B.S. het nuttigheidsdoel moest wijken voor het paedagogisch doel der algemene vorming, dat ook nu nog geldt. Door dit algemeen vormend karakter van het onderwijs is de H.B.S. groot geworden.

Zien we thans naar het wetsontwerp ter regeling van het Voorbereidend Hoger Onderwijs, dat in Juni 1952 door minister Rutten bij de Tweede Kamer is ingediend, dan valt op, dat de mechanica niet alleen op het programma van het Gymnasium β , maar ook op dat van het Ahtenaeum B ontbreekt. In het feit, dat de mechanica zelfs niet meer als onderdeel van de natuurkunde afzonderlijk wordt vermeld, zie ik een symptoom van de onderschatting, waaronder dit vak heden te lijden heeft.

De overschatting van weleer en de onderschatting van thans hangen samen met veranderde paedagogische inzichten en met een

andere waardering der techniek. De algemene tijdgeest in een periode van zich fabelachtig ontwikkelende techniek heeft stimulerend gewerkt op het onderwijs in de wis- en natuurkunde op het destijds nieuwe schooltype, de H.B.S., en op de verheffing van de mechanica tot afzonderlijk schoolvak. Men moest immers de natuur technisch leren beheersen. De waardering voor de centrale plaats, die de natuurwetenschappen toeviel, was echter niet algemeen. Er was een tegenstrooming, die inging tegen het materialistisch karakter, dat men van deze zijde aan de H.B.S. meende te moeten toeschrijven.

Deze tegenstroom, die het mechanistisch-deterministisch wereldbeeld, dat in de „geest van Laplace” zijn meest pregnante uitdrukking vindt, niet aanvaardde, en die inging tegen de groeiende opvatting, als zouden enkel de natuurwetenschappelijke methode van onderzoek rechtgeven op het praedicaat „wetenschappelijk”, deze tegenstroom stond begrijpelijkerwijze argwanend of afwerend tegenover de overheersende positie door de natuurwetenschappen op het nieuwe schooltype ingenomen.

5. Vrijwel van de eerste jaren van haar bestaan af heeft de H.B.S. dan ook ernstige aanvallen op haar program te verduren gehad, en tot de omstreden punten behoorde, vrijwel van het begin af, de positie van de mechanica. Reeds in 1875 verklaart de toenmalige inspecteur van het m.o., dr Steyn Parvé, dat vereenvoudiging van program en eindexamen nodig is en daartoe wenst hij o.m. de beginselen van de theoretische en toegepaste mechanica, van de kennis der werktuigen en van de technologie te laten vervallen. De kennis der werktuigkunde die wenselijk is, kan z.i. heel goed bij de natuurkunde worden ondergebracht. Aanwijsbaar succes heeft het streven van Steyn Parvé niet gehad.

Als echter in 1919 het gymnasium zijn achterstand ten aanzien van de wis- en natuurkundige vakken tracht te verminderen, vindt daar de onderbrenging plaats zoals Steyn Parvé die in 1875 voor de H.B.S. propageerde. De mechanica wordt in het eindexamen-program niet genoemd, maar het leerplan voor natuurkunde bevat de zinsnede: „Bovendien worden in de zesde klasse drie uur meer bijzonderlijk besteed aan een meer uitvoerige behandeling van de beginselen der mechanica en aan een herhaling en uitbreiding van de in de vorige klassen behandelde onderwerpen, welke het meest geschikt zijn tot vorming van het natuurkundig begrip.”

Op de H.B.S. werd een jaar later, in 1920, de toestand van het mechanica-onderwijs chaotisch. De mechanica werd met de cosmographie van het eindexamenprogram afgevoerd. Leerlingen konden

bij de overgang van de vierde naar de vijfde klassen kiezen tussen mechanica en lijntekenen enerzijds, handelswetenschappen anderzijds.

Deze beschikkingen kunnen door mij niet anders gezien worden dan als een symptoom van didactisch onvermogen bij de destijds verantwoordelijke instanties. De toestand van het mechanica-onderwijs in de twintiger jaren werd onderwijskundig een wangedrocht. Voor de leerlingen die boekhouden kozen, werd de leerstof mechanica der 5e klasse gewoon geamputeerd. Wat er van het leer vak overschoot, was geen didactisch verantwoord geheel meer. De natuurkundeleraar in klasse 5 moest les geven aan leerlingen, waarvan sommigen wel en anderen niet de hoofdstukken arbeid en arbeidsvermogen op de mechanicalessen hadden gehad. Aan de natuurwetenschappen, nog wel kernvakken van de H.B.S.-B, was door deze programherziening grote schade toegebracht.

De getroffen regeling gaf aanleiding tot vinnige strijd. Het herstel van de mechanica als examenvak (1931) en de weder-invoering ervan in 1934 als verplicht leervak moeten beschouwd worden als een bekroning van het werk, dat vooral van mathematische zijde in de twintiger jaren verzet is om uit de impasse te geraken.

Tot de voornaamste feiten uit de periode van de facultatiefstelling der mechanica reken ik de publicatie van:

- a. het ontwerp-leerplan der commissie Beth-Dijksterhuis voor wiskunde, mechanica en cosmographie op hogere burgerscholen met 5-jarige cursus (1926);
- b. het rapport der commissie-Fokker inzake het onderwijs in de natuurkunde aan gymnasia, hogere burgerscholen en lycea (1928).

Deze commissie-Fokker had van de Nederlandse Natuurkundige Vereniging opdracht tot het doen van voorstellen betreffende de leerstof, de wijze van behandeling en de eindexamens, die zouden kunnen strekken tot bevordering, ev. verbetering van dat onderwijs. Ze stelde o.m. voor de experimenteel-natuurkundig georiënteerde behandeling der mechanica toe te vertrouwen aan het natuurkunde-onderwijs en de hierdoor gelegde grondslag te doen dienen om er een wiskundig georiënteerde behandeling in de 5e klasse op te laten volgen. Een deel der vier uren op de rooster voor mechanica uitgetrokken zou aldus bij de natuurkunde komen, een ander deel zou voor de behandeling der rationele mechanica blijven gereserveerd.

Overleg met de commissie-Beth leidde t.a.v. deze materie tot een compromis, dat echter helaas teniet werd gedaan doordat op de algemene vergadering der N.N.V. het voorstel werd aangenomen de

gehele mechanica bij de natuurkunde te incorporeren. Dit doel is niet bereikt; vanaf 1934 was het vak mechanica voor school- en eindexamenprogram weer een normaal, volwaardig vak.

De strijd om de mechanica duurde echter voort. Door Velines werd (o.a. in het rapport-Houdijk van 1948) de opheffing der mechanica opnieuw bepleit.

Naar aanleiding van dit rapport-Houdijk richtte het College van Inspecteurs aan Velines het verzoek voor de H.B.S. een leerplan op te stellen voor het apart blijvende vak mechanica, waarin toch aan verschillende wensen in het rapport-Houdijk geformuleerd, zou kunnen worden voldaan. Een commissie, door Velines en Wimecos ingesteld, kreeg nu opdracht een program te ontwerpen voor het onderwijs in de mechanica als afzonderlijk leervak op de H.B.S.-B, waarbij zou worden nagegaan in hoeverre het vigerend programma diende te worden gemoderniseerd in verband met de noodzakelijke coördinatie met de natuurkunde, terwijl tevens zou moeten worden onderzocht, in hoeverre, zonder het rationele karakter van het vak te miskennen, aan het experiment een plaats zou kunnen worden toegekend.

Deze commissie kwam met een belangrijk rapport, waarin een gemoderniseerd leerplan werd opgenomen, dat U in bijlage I van de syllabus aantreft. Dit rapport werd aan de inspectie doorgezonden met uitzondering van de voorstellen, die op het eindexamen betrekking hadden. Van de zijde der inspectie is sindsdien niets meer vernomen; van de zijde van de minister wel: in het ontwerp V.H.O. van 1952 bleek immers de mechanica als zelfstandig leervak te zijn geschrapt.

6. Na deze korte historische uiteenzetting wil ik trachten aan te geven, hoe ik het schoolvak mechanica zie en daarbij pogen de plaats af te bakenen, die het tussen de vakken wiskunde en natuurkunde inneemt.

Dijksterhuis heeft in de „Mechanisering van het Wereldbeeld” (1950) in de geschiedenis der mechanica drie hoofdperioden onderscheiden, die hij met de namen antiek – klassiek – modern aanduidt. Voor het begin van deze perioden geeft hij opvolgend aan: Thales van Milete ($\pm$ 600 v. Chr.), de verschijning van Newton's Principia Mathematica (1687) en Planck's invoering van het quantbegrip (1900). De moderne mechanica met relativiteitsmechanica en quantum-mechanica blijft geheel buiten beschouwing, als we de plaats van het schoolvak mechanica in het V.H.M.O. bekijken, de antieke komt in de praktijk van het onderwijs slechts

occasioneel ter sprake, als we onjuiste ideeën, b.v. bij de begrippen traagheid en kracht, willen opruimen. In feite is onze schoolmechanica niet anders dan een inleiding tot de klassieke mechanica van Newton. De inhoud ervan kunnen we aangeven als de leer der beweging van stoffelijke punten en puntenstelsels in mathematische behandeling.

In mathematische behandeling: immers, de taal der mechanica is dezelfde als die der wiskunde; de grondbegrippen zijn mathematisch van aard; de structuur van het vak is evenals die der wiskunde logisch-deductief. Uit enige grondbegrippen en als axioma's vooropgestelde, als evident beschouwde theorema's worden de eigenschappen der mechanica door redenering gevonden.

Het begrip punt behoort tot de grondbegrippen van de meetkunde en tot de grondbegrippen van de kinematica; het begrip stoffelijk punt behoort tot de grondbegrippen van de dynamica. Niet de stoffelijke lichamen worden aan de dynamica ten grondslag gelegd, zoals men bij experimentele behandeling zou mogen verwachten, maar de abstractie „stoffelijk punt” staat als „freie Setzung” van de menselijke geest aan het begin.

De erkenning, dat er een rationele mechanica van logisch-deductieve structuur bestaat, impliceert nog geenszins, dat nu ook de deductieve behandeling van het vak op H.B.S. en Gymnasium de aangewezen moet worden geacht. Andere dan vakwetenschappelijke motieven zijn hier beslissend, n.l. didactische.

M.i. zal een mengvorm van deductieve en inductieve behandeling te prefereren zijn, met de prioriteit voor de tweede en de klemtoon op de eerste.

Voor een eerste kennismaking met de mechanica is de mathematische methode stellig ongeschikt. Voor het bijbrengen van juiste begrippen is een fundament van aanschouwelijke kennis onontbeerlijk. „Willen de begrippen kracht, snelheid, versnelling, vector, massa, arbeid, moment en impuls niet inhoudsloos voor de leerlingen blijven, dan zal bij de invoering zeker begonnen moeten worden op concreet niveau, waarna de rationele sfeer bereikt kan worden door bewuste abstractie”, aldus het rapport-Houdijk (blz. 13). Op dit concrete niveau ligt reeds een behoorlijke dosis intuïtieve voorkennis, door ervaringen in de buitenschoolse sfeer verkregen, en bovendien al wat het experimentele physicaonderwijs in de lagere klassen opzettelijk aan dit niveau heeft toegevoegd.

Aan een tweede ronde, die der rationele mechanica, kan niet begonnen worden voor het wiskunde-apparaat der leerlingen een voldoende hoge graad van ontwikkeling heeft gekregen. Zo moeten uit

de goniometrie de sinus- en de cosinusregel bekend zijn, uit de algebra de grafische voorstellingen en het limietbegrip. Onmiddellijk bij de aanvang van de rationele mechanica moet den leerlingen het begrip differentiaalquotiënt, en later het begrip integraal bijgebracht kunnen worden.

Voor het slagen van het onderwijs op abstract niveau is het voorts noodzakelijk, dat de docent telkens weer bereid en in staat is van dat abstracte niveau tot het concrete terug te gaan, zodat de leerlingen leren de abstracties van de mechanica fysisch te interpreteren. Het tijdrovende procédé telkens weer waar dit nodig is, tot concrete zaken te willen terugkeren, is voor de docent een waarschuwing niet naar de hoogste graad van abstractie en strengheid te grijpen. Steeds moet hij de grenzen van de kinderlijke belangstelling en van het kinderlijk bevattingsvermogen in acht nemen.

7. De moeilijkheden die de rationele leergang met zich meebrengt, dwingt ons tot beperking. Beperking wat betreft de mate, waarin we het vak willen formaliseren, beperking wat de omvang van de leerstof betreft. Het is de verdienste van Schogt geweest, dat hij (in 1925) vele grove fouten in de in gebruik zijnde leerboeken voor mechanica heeft aangewezen. Zijn scherpe kritiek heeft op ons onderwijs stellig een gunstige invloed gehad. Door zijn leerboek „Beginselen der Theoretische Mechanica” (in 2 delen, 1926) heeft hij er echter toe bijgedragen de onderwijswereld kopschuw te maken voor het schoolvak mechanica. Hier werd overvraagd. De grenzen van de kinderlijke belangstelling en van het kinderlijk bevattingsvermogen werden in dit schoolboek stellig uit het oog verloren.

Ook in het ontwerp-leerplan Beth-Dijksterhuis werd overvraagd, o.a. door de historische motivering van de axioma's der mechanica onder de verplichte leerstof op te nemen. Er zal reeds veel gewonnen zijn, als de leraar bij zijn opleiding tot een bestudering van de historische aspecten van zijn vak gedwongen wordt, zo dat hij bij zijn onderwijs van betrouwbare historische kennis occasioneel gebruik kan maken.

In de praktijk van het onderwijs zijn we telkens weer gedwongen tot een compromis tussen methodische eisen en didactische eisen. Een enkel voorbeeld. Verlangen naar methodisch perfectionisme kan ons er toe brengen vrije val en kogelbaan uit het aanvangsonderwijs in de rationele mechanica te bannen. Hier speelt immers de zwaartekracht een rol en komen we op het gebied der dynamica (zie het artikel van H. J. E. Beth in *Euclides* XXVII, blz. 146 e.v.). Didactisch lijkt het me echter verantwoord de kinematische

zijde van deze problemen, zo nodig met opoffering van de zuiverheid der methode, naar voren te brengen, voor de dynamica systematisch wordt behandeld. De aansluiting aan het concrete niveau, waarover ik sprak, kan aldus verzekerd worden.

Zelfs Schogt was hier voor een compromis, zoals moge blijken uit het volgende citaat: „Strict genomen zijn natuurlijk ook val en kogelbaan dynamische problemen, maar het ontbreken van drukkingen maakt, dat men ze zonder veel bezwaar bij de kinematica kan behandelen, mits men maar zwijgt over de oorzaak der versnelling”.

Ook bij de invoering van het traagheidsprincipe en de hypothese van het vaste stelsel acht ik een compromis onontkoombaar.

8. Zonder metingen — van leerling of leraar of van anderen, is de toepassing van de theorie der kinematica op val en worp niet sluitend te maken. Is het didactisch verantwoord de hier bedoelde metingen alle in het schoollokaal uit te voeren? Betekenen de zinsneden: „de waarnemingen hebben geleerd dat . . .”, of „nauwkeurige waarnemingen hebben geleerd dat . . .”, die we t.a.v. deze materie in mechanica- en natuurkundeboeken aantreffen, dat we ons er maar met een Jantje van Leiden afmaken? M.i. gaat er door een beroep op experimenten als met het toestel van Atwood veel tijd verloren, en is dit voorbarig beroep methodisch noch didactisch verantwoord.

Als wij de bedoelde valproeven niet uitvoeren en na een beroep op experimenten van anderen enkel deductief te werk gaan, mogen we ons troosten met de gedachte, dat ook Galileï niet alle valproeven die hem worden toegeschreven, heeft uitgevoerd. Zelfs experimentele contrôle achtte Galileï niet nodig, als door redenering gevonden kon worden, wat er zou gebeuren (Dijksterhuis, *Mechanisering*, blz. 389). „Men moet — aldus Dijksterhuis t.a.p. blz. 371) in het algemeen tegen verhalen over gedane proeven, zowel bij Galileï als bij zijn tegenstanders, een zekere reserve in acht nemen. Meestal zijn ze alleen in gedachten uitgevoerd of worden ze slechts als mogelijkheid beschreven”. Een analoge voorzichtigheid dienen we in acht te nemen, als ons experimenten voor het onderwijs in de mechanica worden aanbevolen.

Voor zover het lesproeven betreft ter illustratie en verificatie van het in de les deductief gevondene, heb ik enkel waardering. Ze verhogen de belangstelling voor een zo abstracte materie. Zolang dit gebeurt (belangstelling opwekken, opmerkzaamheid binden, de activiteit door leerlingen-proeven prikkelen), is hun plaats in het onderwijs reeds gerechtvaardigd.

Tot de hier bedoelde proeven reken ik die met de vacuum-valbuis, met de centrifugaalmachine, met het hellend vlak, met een looping-the-loop-apparaat, met de conische slinger, enz.

Anders wordt het, wanneer we kwantitatieve doeleinden nastreven (bepaling van g en van f); de vraag dringt zich op of bij tijd-rovende metingen in het klasselokaal de didactische nadelen niet de overhand hebben op de voordelen. Ik heb op grond van wat bestaande leerboeken voor gymnasia β me leren (zie b.v. Krans en Vrij), de indruk, dat het niet slechts de wiskundedocenten zijn, die aan het experiment in het mechanica-onderwijs ternauwernood een plaats inruimen (zie rapport-Houdijk), maar dat deze plaats door de aard van het vak zelf ook bij de physica bescheiden blijft.

Belangrijker dan enige experimentele verificatie in het mechanica-onderwijs acht ik de mathematische verificatie, waardoor de leerlingen met de steun van meetuitkomsten van anderen leren inzien, hoe aanvankelijk heterogene verschijnselen als het vallen van een steen op aarde en de beweging van de maan in haar baan, vanuit één gezichtspunt, volgens één methode, kunnen worden verklaard: de triomf van Newton's mechanica is haar succes als mechanica der hemelverschijnselen.

9. Ik hoop tot dusver voldoende te hebben laten uitkomen, dat de schoolmechanica niet uitsluitend in de rationele hoek of uitsluitend in de experimentele hoek kan worden ondergebracht, maar dat er naar een verantwoorde mengvorm moet worden gezocht. In de strijd om de mechanica zijn extreme standpunten verdedigd, waarvan ik er één in Uw herinnering wil terugroepen.

In het adres van de N.N.V. (1928) stond, dat de mechanica op de H.B.S. behoort te zijn, wat zij overal en ten allen tijde geweest is, n.l. een onderdeel der natuurkunde en tevens één harer grondslagen.

Tegen de tendens van deze uitspraak, n.l. dat het onderwijs in mechanica moet worden vrijgemaakt uit de mathematische sfeer en moet worden ondergebracht bij de experimentele natuurkunde, heeft Dijksterhuis (Euclides V, blz. 61 e.v.) zich te weer gesteld. Gewapend met een historische kennis van deze materie als geen ander, heeft hij aangetoond, dat de uitdrukking „overal en ten allen tijde” een miskennis is der historische feiten. De geschiedenis leert eer het tegendeel van wat in de uitspraak der N.N.V naar voren werd gebracht. Dijksterhuis laat zien, dat de mechanica zelden of nooit als een tak der experimentele natuurwetenschap is beschouwd, maar dat vraagstukken van rust en beweging steeds weer, bij voorkeur op rationalistische, mathematische wijze zijn behandeld. Hij

komt tot de conclusie, dat de wijze waarop het mechanica-onderwijs in onze scholen wordt gegeven, dichter aansluit bij de historische behandelingswijze, dan de voorstanders van de experimenteel-inductieve methode toegeven. Didactische argumenten pleiten noch voor enkel deductieve argumententatie, noch voor een zuiver inductieve methode, maar voor een mengvorm, waarin het accent echter blijft liggen op het deductieve aspect, evenals dit trouwens voor de gehele moderne wetenschappelijke physica het geval is.

10. Het feit, dat op het Gymnasium de onderbrenging van de mechanica bij de natuurkunde mogelijk blijkt, wordt vaak gebruikt als wapen tegenover hen, die voor de H.B.S. de zelfstandigheid van het vak blijven bepleiten. Waarom zou hier onmogelijk zijn, wat ginds wel mogelijk blijkt? Deze mogelijkheid wil ik geenszins bestrijden, maar deze mogelijkheid impliceert nog geen wenselijkheid. De aard van de beide schooltypen maakt, dat de plaats van de natuurwetenschappen i.h.a. en daardoor van de mechanica i.h.b. op het Gymnasium anders moet uitvallen dan op de H.B.S. Ginds zijn de klassieke talen de kernvakken van de school, hier zijn het de wis- en natuurkundige vakken. Eerst toen de H.B.S. reeds meer dan een halve eeuw in deze vakken zijn sporen had verdiend, is men er toe overgegaan op het Gymnasium voor de β -s een passende plaats aan de wis- en natuurkunde te geven. Maar de H.B.S.-B kon haar eisen ten aanzien van deze vakken hoger blijven stellen, omdat ze deze vakken als kernvakken heeft en de ereplaats niet met een vakkengroep als die der klassieke talen behoeft te worden gedeeld.

Het onderwijs op het Gymnasium in de onderwerpen, die onder mechanica ressorteren, ondervindt m.i. een gunstige, stimulerende invloed van de zelfstandigheid van dit vak op de H.B.S. Die stimulans verdwijnt, zodra het vak op de H.B.S. bij natuurkunde wordt ingelijfd. Mijn persoonlijke indruk, die ik echter niet met statistische cijfers kan toelichten, is overigens, dat bij de regeling van thans de mechanica-onderwerpen op het gymnasium nog wel eens in het gedrang komen, sterker dan op de H.B.S. mogelijk is.

11. Het is voor de beoordeling van de argumenten pro- en contra de mechanica een verwarrende omstandigheid, dat de ideële strijd vóór de belangen van het onderwijs de schijn kon krijgen van een materiële strijd om betaalde uren, uren die de wiskundeleraar — door traditie vaker met het onderwijs in mechanica belast dan de natuurkundeleraar — zich niet gaarne ziet ontglippen, extra-uren voor de natuurkunde-leraar, als het zou lukken de mechanica bij de

physica te incorporeren. De rivaliteit tussen de wiskundeleraren en de natuurkundeleraren is m.i. misplaatst. Er is geen enkele wettelijke belemmering om ook onder de thans geldende voorschriften het mechanica-onderwijs aan de physicus op te dragen, indien de schoolleiding deze de daarvoor aangewezen man mocht achten. Van een essentieel verschil in de effectieve behandeling van de H.B.S.-mechanica door physici en mathematici is naar buiten tot dusver weinig gebleken. Noodzakelijk is slechts dat de mechanica-docent zich van de mathematische structuur van het vak en van de dienstbaarheid aan de natuurwetenschappelijke vorming van de leerlingen volkomen bewust blijft.

De vakwetenschappelijke opleiding van de Nederlandse leraar staat op zodanig peil, dat één docent wel twee vakken van uiteenlopende structuur kan onderwijzen. Ook de vakken algebra en meetkunde b.v. zijn van verschillende structuur, zonder dat dit de wenselijkheid van aparte algebra-leraren en aparte meetkunde-leraren meebrengt. Het ware het vakspecialisme ten top gedreven, als we bij ons onderwijs physici, mathematici, mechanici, algorithmici en geometrici zouden moeten onderscheiden. Of de opleiding van leraar niet te kort schiet t.a.v. de didactische problemen die hier rijzen, is een andere vraag, die ik niet zal behandelen.

Ik ben er van overtuigd, dat de m.i. ongewenste onderbrenging van de mechanica bij de natuurkunde nog niet noodlottig voor het onderwijs zal behoeven te zijn, indien men deze onderbrenging maar met de nodige garanties zou weten te omgeven. Garanties, waardoor het gevaar wordt bezworen, dat het „onderbrengen” uitloopt op een „ten onder brengen”.

12. Welke zijn die garanties?

a. De coördinatie tussen de vakken wiskunde en natuurkunde moet door bindende voorschriften der bevoegde instanties worden geregeld. Niet alleen moet vaststaan, welke wiskundebegrippen ter wille van het natuurkunde-onderwijs (i.h.b. ter wille der mechanica-onderwerpen uit dit onderwijs) dienen te worden bijgebracht, maar ook op welke ogenblikken dit moet gebeuren.

b. Onderbrenging van de mechanica bij de natuurkunde maakt het gewenst de kinematica af te splitsen en aan de wiskunde toe te vertrouwen, en de dynamica aan de natuurkunde te laten. De natuurkunde wordt dan ontlast van een hoofdstuk, dat door zijn structuur buiten de geest der experimentele natuurkunde valt. In de franse „horaires et programmes de l'enseignement du second degré” vinden we de cinématique en de statique ook als onderdelen der

wiskunde opgegeven (in Engeland treffen we de gehele mechanica aan als onderdeel van de „applied mathematics”).

Roostermoeilijkheden in verband met de bedoelde onderbrenging kunnen misschien eenvoudiger worden opgelost door in de geest van het Rapport van de Nederlandse Maatschappij voor Nijverheid en Handel (1946) semesters in te voeren en de thans voor mechanica in de vierde klasse uitgetrokken uren in het eerste semester aan de wiskunde, in het tweede aan de natuurkunde te geven. Zie ook het voorstel van Krans (Congresverslag 1948) tot verhoging van het aantal wiskunde-uren in de vierde klasse van de H.B.S. bij afschaffing van de mechanica als zelfstandig vak.

c. Er worde voor de mechanica een gedetailleerde leerstofomschrijving in de programma's opgenomen. Noch op het Gymnasium, noch op de H.B.S. is dit thans het geval. De detaillering in het ontwerp-program *Velines-Wimecos*, dat U onder de bijlagen vindt, gaat m.i. te ver. Men zoeke een middenweg.

d. De mechanica blijve eindexamenstof.

e. Er kome een goed geregelde leraarsopleiding, waarbij er zorg voor wordt gedragen, dat de docent de structuur der door hem te onderwijzen vakken en vakdelen doorziet en dat hij in staat is zowel het experimentele als het deductieve karakter der onderscheiden delen op didactisch verantwoorde wijze tot zijn recht te laten komen.

13. Voor het handhaven van het peil van ons onderwijs acht ik de leerstofomschrijving en de examenregeling van groot belang.

Wat het examen betreft, is de eindexamenregeling op de H.B.S. m.i. te verkiezen boven die van het Gymnasium. Momenteel worden de bezwaren, verbonden aan het ontbreken van een centraal schriftelijk examen op het Gymnasium, getemperd door enkele gunstige factoren:

a. de selectie der leerlingen;

b. de deskundigheid der gecommiteerden.

Het is maar een relatief kleine groep, die het β -program — zwaar geladen door klassieke talen en de wis- en natuurkunde — weet te verwerken; hoe meer geselecteerd de oproep is, hoe eenvoudiger de controle mag worden.

Voor deze relatief kleine groep zijn vrijwel steeds deskundige gecommiteerden te vinden. Het is echter een publiek geheim, dat het peil van deskundigheid bij de deskundigen op de H.B.S.-examens nog wel eens te wensen overlaat. Het aanbod van deskundigen zou ontoereikend blijken, als naast de kandidaten voor Gymnasium- β ook nog de viermaal zo grote groep van de kandidaten voor H.B.S.-B

op analoge wijze (mondeling, zonder centrale opgaven) zou moeten worden geëxamineerd.

14. Wegvallen van het centrale examen op de H.B.S. zou een ernstige bedreiging betekenen voor het onderwijs peil op dit schooltype. De overheid zou zich door dit laten wegvallen de mogelijkheid ontnemen tot het instellen van een periodiek, objectief onderzoek inzake de schoolresultaten. En dit onderzoek blijft gewenst, zolang het eindexamen studierechten geeft.

Een deel der leraren ziet echter in deze officiële contrôle een aanslag op de door hen gewenste didactische vrijheid en een ernstige belemmering voor de ontplooiing van hun vak. Deze leraren zijn van oordeel, dat een mondeling examen door zijn plooibaarheid gemakkelijker aangepast kan worden aan de speciale verhouding van deze docent, deze klasse, deze leerling. Ze achten het uitsluitend mondelinge examen een betere toets voor het eigenlijke mechanisch inzicht dan een centraal schriftelijk examen. In dit schriftelijk examen vrezen ze de starheid en een overheersing van technisch bewerkelijke vraagstukken ten koste van die, welke inzicht peilen.

Al deze bezwaren zijn naar voren gebracht in het reeds genoemde rapport aan de besturen van Velines en Wimecos (1949); deze bezwaren zijn echter door die besturen in hun schrijven aan de inspectie niet overgenomen. Deze besturen stellen dan ook geen wijziging voor in de manier, waarop aan de H.B.S.-B het uit een schriftelijk en een mondeling gedeelte bestaande examen wordt afgenomen. Wel wijzen ze op de grote verantwoordelijkheid, die de opstellers van opgaven voor het centraal examen op hun schouders dragen. Door het opstellen van didactisch verantwoorde opgaven behoren deze opstellers een goede contrôle van de leerstof en het geleidelijk ingroeien van de nieuw voorgestelde leerstof mogelijk te maken.

Wat er van een uitgebreid nieuw program, zoals de besturen van Velines en Wimecos hebben ingediend, terecht zou komen zonder de officiële contrôle van een centraal examen, zou zich bij een uitsluitend mondeling examen op een schooltype als de H.B.S.-B aan efficiënte contrôle onttrekken.

15. Er is in de onderwijswereld al sinds lang een roep naar centralisatie en naar concentratie van leervakken. Dit is een lofwaardig streven, zolang het paedagogisch effect ervan niet verloren gaat, doordat de besnoeiingsdrift de overhand krijgt op de lust tot concentratie en er daardoor meer zou worden geamputeerd dan gereconstrueerd.

Wie tot taak heeft het onderwijs van thans te reorganiseren, zal uiteraard voor de gevaren, die er aan de bedoelde concentratie verbonden zijn een andere waardering hebben dan hij die vanuit zijn dagelijkse ervaring een waardevol vak of vakdeel bedreigd ziet.

Zo zal een wetgever, die aan een docent, die in het bezit is van volledige onderwijsbevoegdheid voor *enig* vak, het recht wenst te geven om in klasse I en eventueel in klasse II van Gymnasium of Athenaeum les te geven in *alle* vakken, waarvoor hij krachtens *enige* onderwijswet bevoegdheid bezit, uiteraard niet gemakkelijk meer onder de indruk komen van motieven, die ervoor zouden kunnen pleiten om mechanica en natuurkunde dan wel mechanica en wiskunde aan verschillende docenten toe te vertrouwen.

De aangegeven mogelijkheid door minister Rutten in zijn ontwerp van Juni 1952 voor het onderwijs in de klassen I en II geopend, acht ik een gevaar voor ons onderwijs. De onderbrenging van de mechanica, deels bij de wiskunde, deels bij de natuurkunde, acht ik niet de ideale oplossing, maar eventueel aanvaardbaar, mits er zorgvuldige garanties tot stand komen.

16. Tot slot nog een opmerking over de leraarsopleiding. Indien deze goed verzorgd is, zal de jonge leraar zich o.m. moeten leren bezinnen op:

a. de plaats, die een bepaald onderwerp inneemt in het leerplan voor zijn vak;

b. de plaats die dit vak inneemt in het leerplan van zijn school;

c. de plaats die zijn school inneemt in het nationale schoolstelsel;

d. de plaats van dit schoolstelsel in onze volksgemeenschap.

Op twee manieren zou ik deze vragen beantwoord willen zien:

1°. beschrijvend: welke plaats werd of wordt in feite ingenomen;

2°. normerend: welke plaats behoort te worden ingenomen.

Bij deze normerende beschouwing komen de subjectieve opvattingen het sterkst tot gelding.

Een systematische uitwerking van het hier geschetste program valt buiten het bestek van een inleiding als deze.

BIJLAGE I (programma's).

Om de evolutie, die het vak mechanica op de H.B.S. doormaakt, aan te geven, worden hier opvolgend opgesomd:

a. de exameneisen volgens het *reglement van 1870*;

b. de exameneisen volgens het *thans geldende reglement (1929)*;

c. de programeisen volgens het *K.B. van 1937*;

d. de programeisen volgens het *ontwerp Velines-Wimecos (1950)*.

a. Door *theoretische en toegepaste mechanica* is te verstaan de kennis der wetten van evenwicht en beweging van vaste lichamen, vloeistoffen en gassen en van haar toepassing op werktuigen. De candidaat behoort de evenwichtsvergelijking te kunnen opmaken van de enkelvoudige en van enige samengestelde werktuigen (windas, takel, bok), met inachtneming der wrijving en het beginsel der virtuele snelheden te kunnen toepassen op het evenwicht van werktuigen zonder wrijving. Hij behoort bekend te zijn met de leer van de koppels, van het zwaartepunt en van de stabiliteit. De wetten der beweging van vaste lichamen, hierboven vermeld, omvatten die der eenparig versnelde beweging, de algemene eigenschappen der kromlijnige beweging (middelpuntvliedingskracht), de wetten van de slinger, de beweging om een vaste as, de botsing en de leer van het behoud van arbeidsvermogen. De leer van het evenwicht en de beweging van vloeistoffen en gassen bepaalt zich tot de wetten der drukking van vloeistoffen en gassen tegen de wanden der vaten, waarin ze besloten zijn, en op ingedompelde lichamen, en tot die van de uitstroming door nauwe openingen.

Bij het examen in de *kennis van werktuigen* en de *technologie* behoort geëist te worden, dat de candidaat bekend zij met de voornaamste mechanische hulpmiddelen tot het overbrengen en veranderen van beweging, met enkele der voornaamste werktuigen, welke dienen om de beweegkracht van wind, water en stoom aan te wenden, alsmede met de wijze, waarop de mechanische en scheikundige verwerking van enkele der meest voorkomende stoffen, zoals metalen, glas, aardewerk, vezelstoffen, wol, papier, vetten, zeep en lichtgas, geschiedt (Bartels, blz. 110—111).

b. Het examen omvat de eerste beginselen van de leer der bewegingen en der krachten.

Geëist wordt de kennis van de eenparige en eenparig veranderlijke bewegingen en de leer der samenstelling van die bewegingen; de dynamische grondbegrippen met toepassing op eenvoudige gevallen van beweging, ook van verbonden lichamen; eenhedenstelsels; de samenstelling van krachten en koppels; de leer van het zwaartepunt en zijn plaatsbepaling voor enkele zeer eenvoudige lichamen; eenvoudige gevallen van evenwicht, ook met inachtneming van de wrijving (géén tapwrijving); de leer van arbeid en arbeidsvermogen met toepassing op eenvoudige gevallen van beweging.

De candidaat behoort zowel door het beantwoorden van vragen over onderwerpen, die in de theorie behandeld zijn, als door het oplossen van vraagstukken, te kunnen tonen, dat deze onderwerpen zijn eigendom geworden zijn.

Toelichting bij deze eisen van de zijde der Inspectie (1929).

De cirkelvormige beweging behoort stellig tot het programma der mechanica; zij behoort tot de eenvoudige gevallen van beweging en is een der weinige voorbeelden, die men behandelen kan van de kromlijnige beweging. Deze beweging ook dynamisch te behandelen, nl. de veranderlijke beweging in een verticale cirkel als toepassing van de leer van het arbeidsvermogen. Hoewel de botsing niet tot het examen-programma behoeft gerekend te worden, verdient het aanbeveling de volkomen veerkrachtige en de volkomen onveerkrachtige botsing wel op de les te behandelen; dit onderwerp behoort tot de toepassingen van de leer van het arbeidsvermogen en kan van belang zijn voor het natuurkundeonderwijs.

c. Beginselen der kinematica en der dynamica. Ten behoeve van het onderwijs

in de natuurkunde worden zo spoedig mogelijk de harmonische beweging en de begrippen arbeid en arbeidsvermogen behandeld.

Beginselen der statica. Algemene herhaling.

(K.B. van 27 Mei 1937).

d. Klasse 4.

Kinematica.

Bewegingsgrootheden voor een stoffelijk punt, met toepassing op eenvoudige voorbeelden van beweging: valbeweging, harmonische beweging, worpbeweging en beweging langs een cirkel.

Translatie van een vast lichaam; rotatie van een vast lichaam om een vaste as.

Samenstelling van translatorische bewegingen.

Dynamica.

Kracht en massa. Gewicht. Eenheden: meter-kilogramkracht-seconde-stelsel; centimeter-grammassa-seconde-stelsel; meter-kilogrammassa-seconde-stelsel.

Parallelogram van krachten. Eenvoudige toepassingen: stoffelijk punt op een horizontaal of een hellend vlak zonder wrijving; middelpuntzoekende kracht; mathematische slinger; beweging van verbonden punten, zonder wrijving.

Arbeid door een kracht verricht; algemeen geval en bijzondere gevallen (gewicht; kracht, recht evenredig met de afstand tot een punt; kracht, omgekeerd evenredig met het kwadraat van die afstand). Arbeidsvergelijking.

Arbeidsvermogen van beweging en van plaats. Behoud van mechanisch arbeidsvermogen.

Wet van Newton; krachtvelden; potentiaal en potentiële energie. Beweging met wrijving; verlies van mechanisch arbeidsvermogen. Impuls van een kracht, hoeveelheid beweging van een stoffelijk punt (scalair). Impulsvergelijking.

Elastische botsing tegen een wand; elastische rechte botsing van stoffelijke punten. Toepassing op een ideaal gas.

Klasse 5.

Samenstellen van krachten, die in één vlak op een vast lichaam werken en van evenwijdige krachten, ook als zij niet in één vlak werken. Koppels in één vlak of in evenwijdige vlakken, op een vast lichaam werkend. Momentenstelling.

Het begrip zwaartepunt als middelpunt van massa. Ligging van het zwaartepunt van de volgende homogene lichamen: regelmatig prisma, driezijdig prisma, parallelepipedum, viervlak, regelmatige pyramide, kegel en bol.

Hoeveelheid beweging als vector.

Willekeurige botsing van twee lichamen.

Behoud van hoeveelheid beweging en van moment van hoeveelheid beweging bij een afgesloten stelsel.

Inleiding tot de begrippen traagheidsmoment en impulsmoment van een lichaam. Arbeid verricht door een koppel bij draaiing van het lichaam om een as loodrecht op het koppelvlak. Arbeidsvermogen van beweging van een lichaam, dat om een as draait (deels geciteerd uit *Faraday* XIX, nummer 2).

BIJLAGE II (lectuur over het onderwerp).

- 1) *Euclides*, tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken, jaargang 1—26; hieruit in het bijzonder de bijdragen:
 - a. J. H. SCHOOT: 1. enige opmerkingen over het onderwijs in de mechanica (II, 54—75);

2. de mechanica als afzonderlijk leervak op de Hogere Burgerschool (V, 70—79);
 - b. E. J. DIJKSTERHUIS: 1. de aanslag op de mechanica (V, 61—69);
2. de historische behandelingswijze van de axiomata der mechanica van Newton (IV, 245—255);
 - c. H. J. E. BETH: 1. het experimenteel georiënteerde onderwijs in de mechanica (V, 49—60);
2. mechanica opnieuw eindexamenvak (VI, 44—48);
 - d. G. C. GERRITS: het onderwijs in de natuurkunde aan de Hogere Burgerschool (IV, 256—268);
 - e. A. J. STARING: doel en middelen van het onderwijs in de mechanica (XVIII, 115—124);
 - f. D. VAN DANTZIG: woord en werktuig (V, 86—103);
 - g. J. SCHELTENS: natuurkunde en wiskunde (V, 268—269);
 - h. H. H. BUZEMAN: enige Engelse „eindexamen”-opgaven voor wiskunde, mechanica en natuurkunde (XXV, 107—123).
- 2) *Faraday*, orgaan van de vereniging van leraren in natuurkunde en scheikunde, jaargang 1—21, hieruit i.h.b.:
- a. het rapport der Commissie-GROOSMULLER (1938, jaargang VIII);
 - b. het rapport van VELINES inzake het natuurkunde-onderwijs op de H.B.S.-B (rapport-HOUDIJK, 1948, jaargang XVII);
 - c. het rapport betreffende het onderwijs in de mechanica, uitgebracht aan de besturen van VELINES en WIMECOS in October 1949 (jaargang XIX);
 - d. verslag van het achtste congres voor leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen (1948) i.h.b. de inleidingen van VAN MELSEN en ZERNIKE;
 - e. verslag van de internationale Zomerconferentie voor natuur- en scheikunde (1950), i.h.b. de inleiding van VAN DEN ENDE (blz. 7).
- 3) Verspreide artikelen in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs i.h.b.:
- a. D. VAN DANTZIG: de „Putschversuch” der Nederlandse Natuurkundige Vereniging (jaargang 25, 870—879);
 - b. D. COSTER: de Nederlandse Natuurkundige Vereniging en het onderwijs in de Mechanica aan onze Hogere Burgerscholen (jaargang 25, 812—816);
 - c. M. MINNAERT: het experiment in de mechanica (jaargang 25, 842—845);
 - d. F. ZERNIKE: het oude en het nieuwe mechanica-onderwijs (jaargang 25, 901—904).
- 4) Enige rapporten, o.a.:
- a. ontwerp leerplan der Commissie BETH-DIJKSTERHUIS, in Euclides II, i.h.b. blz. 134—138; met het rapport van WIMECOS inzake deze materie in Euclides III, blz. 82.
 - b. het rapport inzake het onderwijs in de natuurkunde aan Gymnasia, Hogere Burgerscholen en Lycea door de Commissie-FOKKER in 1928 uitgebracht aan het Bestuur der N.N.V.;
 - c. natuurkundige proeven voor leerlingen; rapport der Commissie-REINDERSMA (1934);

- d.* het rapport van de Commissie inzake aansluiting tussen het Middelbaar en Gymnasiaal en het Hoger Onderwijs (rapport-BOLKESTEIN, 1938), i.h.b. blz. 57—63;
 - e.* het rapport van de Haagse Werkgroep voor voortgezet onderwijs en jeugd-studie (Concentratieplan voor het V.H.O., 1939), i.h.b. blz. 21;
 - f.* the Teaching of Mechanics in Schools, a report prepared for the Mathematical Association, 1929;
 - g.* het rapport-VEENSTRA inzake taak en inrichting van het Gymnasium (1947), i.h.b. blz. 9 en 14;
 - h.* rapport van de Nederlandse Vereniging voor Nijverheid en Handel (1946), i.h.b. blz. 72, 102, 118;
 - i.* ontwerp ter regeling van het voorbereidend hoger onderwijs van minister RUTTEN, 16 Juni 1952.
- 5) *a.* A. BARTELS: 75 jaar Middelbaar Onderwijs (1863—1938), i.h.b. voor de onderwijsprogramma's, de eindexamenregelingen, de eindexameneisen en de kritiek op het onderwijs;
- b.* H. J. E. BETH: Newton's Principia I en II (1932);
- c.* E. J. DIJKSTERHUIS: 1. Val en worp (1924);
2. Simon Stevin (1943);
3. De Mechanisering van het Wereldbeeld (1950);
- d.* J. KONING: 1. Enige problemen uit de didactiek der natuurwetenschappen, (1948);
2. Mogelijkheden en gevaren voor de didactiek der natuurwetenschappen, in *Vernieuwing* 87, blz. 1—4, 1951;
- e.* KUNO FLADT: Didaktik und Methodik des mathematischen Unterrichts (1950), i.h.b. blz. 19, 28 en 163—165;
- f.* KARL HAHN: Methodik des physikalischen Unterrichts (1927), i.h.b. blz. 43 e.v.;
- g.* H. W. F. STELLWAG: Begane wegen en onbetreden paden (1952), i.h.b. hoofdstuk VII, over de betekenis van de algemene didactiek als wetenschap;
- h.* M. J. LANGEVELD: Inleiding tot de studie der paedagogische psychologie (1937), i.h.b. hoofdstuk XII en XIII, psychologie van het leren en de psychologie van het onderwijzen.
- i.* G. MANNOURY: Handboek der analytische signfica, deel I, i.h.b. blz. 157-159.

De opleiding tot leraar in de wiskunde. Referaat gehouden door dr D. N. van der Neut op 3 Nov. 1951 te Rotterdam op de bijeenkomst van het Wiskundig Dispuut „Thomas J. Stieltjes”. Paedagogische Studiën, XXIX, blz. 97—112.

Hoewel de opleiding tot het leraarsambt door het K.B. van 28 Aug. 1952 definitief geregeld is, kan het toch zijn nut hebben de aandacht te vestigen op bovengenoemd referaat. Het gedeelte hieruit, dat op de leraarsopleiding in het algemeen ziet, is, hoewel zeer lezenswaard, nu niet meer urgent. Maar de ref. geeft ook richtlijnen aan voor de *speciale* opleiding tot *wiskundeleraar*. En daarover bevat het K.B. niets.

De referent verlangt o.a. van de toekomstige leraar

1. dat hij een verantwoorde relatie heeft tot de wiskunde heeft als wetenschap;
2. dat hij de bekwaamheid heeft de leerstof, die hij te onderwijzen, te bezien van hoger standpunt;
3. dat hij in staat is, zich op deskundige wijze rekenschap te geven van de methode, volgens welke hij die leerstof aan zijn leerlingen moet onderwijzen.

Hierbij wordt dus niet van psychologie en van paedagogiek gerept, omdat deze vakken het leraarschap *op zich zelf* aangaan, en niet speciaal dat in de wiskunde.

Voor punt 1 sluit ref. zich aan bij de bekende rede van dr E. J. Dijksterhuis (School en Wetenschap, 1936).

Voor punt 2 onderscheidt ref. „de leerstof als resultaat van een historisch groeiproces” en „de leerstof in het organisch verband met het geheel der mathematische wetenschap”. Bij dit laatste voert ref. onderwerpen ten tonele, gekenmerkt door de namen Gergonne, Nagel, Lemoine, Brocard, Torricelli, Mascheroni, enz. Tot mijn spijt kan ik deze problemen niet erg waarderen, ze zijn meer „aardig” dan „ernstig”. Meer belangrijk zijn de, ook door ref. genoemde, onderwerpen als: meetkundige behandeling der kegelsneden, inversie, axiomatic. Ik zou daaraan toe willen voegen: de meetkundige theorie van de dubbelverhoudingen, involuties, pooltheorie, affiene

meetkunde, projectieve meetkunde, meetkundige stelsels behorende bij een lichaam met gegeven karakteristiek, enz.

Ik zou nog willen opmerken, dat ook de studie van onderwerpen, die in geen verband meer staan met de schoolwiskunde voor de aanstaande leraar zeer nuttig is: hij leert er door zien, hoeveel ballast de huidige schoolwiskunde nog bevat, en hoe hij rustig een bepaald onderdeel van de schoolmeetkunde eens kan verwaarlozen: het is allemaal zo ernstig niet.

Het belangrijkste is echter punt 3: de wiskundeleraar en de didactiek van de wiskunde. Ref. maakt hier vele behartigenswaardige opmerkingen. Eén opmerking maakt hij echter niet: dat er eigenlijk geen algemeen erkende didactiek van de wiskunde *bestaat*. Boven het het peil van „ik doe het zus” en „ik doe het zo” komt de didactiek toch eigenlijk niet uit; er zijn net zoveel didactieken als er boekjes-schrijvers zijn; of misschien toch niet? Zijn de didactieken, die aan al die boekjes ten grondslag liggen, (op een enkele uitzondering na, ik denk bijv. aan de boeken van drs van Hiele) eigenlijk niet allemaal gelijk, zodat er toch maar één (misschien glad verkeerde) didactiek is?

Men kan m.i. pas aan een didactiek voor de wiskunde gaan denken, als men eerst heeft vastgesteld, *aan wie* men de wiskunde wil onderwijzen. Moet iedere huidige middelbare-scholier wiskunde-onderwijs genieten (ik zeg niet wiskunde leren!), of is dit alleen nuttig voor degenen, die er, zelfs bij de slechtste didactiek, geen moeite mee hebben (voor deze laatste groep zijn onze boekjes over 't algemeen geschreven)? Is de didactiek, die voor de eerste groep de beste is, ook voor de tweede groep het meest aan te bevelen? Indien we voor de eerste groep een prachtig uitgebalanceerde didactiek opgesteld hebben, zal dan tenslotte misschien blijken, dat de resultaten van dien aard zijn, dat de kool het sop toch niet waard is? De toekomstige docent in de didactiek mag wel tegelijkertijd een paedagogisch genie en een revolutionair zijn, en niet bevreesd zijn voor de critiek van conservatieven of progressieven!

Ik keer terug tot het referaat van dr van der Neut. In een rustig betoog toont hij aan, dat het onvermijdelijk is, dat de studie voor het leraarsschap langer zal moeten duren, dan tot nog toe, en uit hij de suggestie, dat het Rijk voor deze verlenging aan de student een subsidie zou kunnen verlenen.

Het gehele referaat is bezadigd en goed overwogen, waard om er kennis van te nemen voor hen, die zich voor de opleiding van de toekomstige leraar interesseren.

H. STR.

VERZOEK IN VERBAND MET PROEFWERKEN-ENQUÊTE.

In *Euclides* XXVII, blz. 164 en 165 heeft het Bestuur van WIMECOS de leden uitgenodigd aan het adres van ondergetekende proefwerken in te zenden die in de klassen I, II en III van de HBS worden opgegeven en die voor de overgang tot een hogere klasse als normatief beschouwd kunnen worden.

Het Bestuur stelt er prijs op, als men de in te zenden stellen werk vergezeld wil doen gaan van een overzichtelijke staat, waaruit blijkt volgens welke criteria het werk is beoordeeld, hoe vaak elk der opgaven voldoende is gemaakt, onvoldoende is gemaakt, niet is gemaakt. Voorts de cijfers aan het werk in zijn geheel toegekend, en zo mogelijk het laatste rapportcijfer. Het Bestuur van WIMECOS is dankbaar voor de inzendingen die zijn binnengekomen; het aantal is echter niet toereikend voor het beoogde doel.

Ondergetekende verzoekt daarom de leden die voor deze enquête voelen, om in de loop van deze cursus nog de beschikbare proefwerken in te zenden. Hij is tot nadere inlichtingen, als men die mocht wensen, gaarne bereid.

Arnhem, 30 October 1952.
Julianalaan 84.

JOH. H. WANSINK.

NEDERLANDSE VERENIGING VOOR LOGICA EN WIJSBEGEERTE DER EXACTE WETENSCHAPPEN.

Deze vereniging hield op 11 October te Utrecht haar jaarvergadering. Na ommekomst van het eerste lustrum kon opnieuw een aanwas van het ledental worden vastgesteld. Begonnen met 60 leden in November 1946 is dit thans gestegen tot 122.

Op de jaarvergadering gaf het bestuur een uiteenzetting van de regeling, welke in Augustus 1952 te Parijs werd getroffen ten aanzien van het bestuur der Union Internationale de Philosophie des Sciences. Deze regeling biedt uitzicht op verdere ontplooiing van de werkzaamheden van de Union Internationale, wat ten goede zal komen aan hetgeen de Nederlandse Vereniging voor Logica en Wijsbegeerte der exacte Wetenschappen haar leden heeft te bieden.

In verband met de werkzaamheden in internationaal verband werd de contributie op f 3,50 per jaar gesteld.

Het Secretariaat is gevestigd Cort van der Lindenlaan 12, Enschede, waar verdere inlichtingen zijn te verkrijgen en aanmeldingen kunnen geschieden.

Het afgelopen verenigingsjaar kenmerkte zich wederom door een aantal belangrijke voordrachten als volgt:

- 20 Oct. 1951 te Amsterdam: Prof. Dr E. W. Beth: „De paradoxen van logica en verzamelingsleer”.
- 1 Dec. 1951 te Utrecht: Mr. B. H. Kazemier: „Over de verhouding van wijsbegeerte tot wetenschap”.
- 19 Jan. 1952 te Amsterdam: Prof. Dr A. D. de Groot: „Juiste en „onjuiste” interpretatie in de psychologie”.
- 8 Mrt. 1952 te Utrecht: Prof. Dr H. Freudenthal: „De logica der rekenmachines en hypothesenlogica”.
- 5 April 1952 te Amsterdam: Prof Dr J. Dopp, Leuven: „Première introduction à la théorie des combinateurs”.

Voorts werd een proef genomen met een werkbijeenkomst, waarop korte inleidingen met debat over speciale onderwerpen, gehouden

werden die zich minder goed lenen voor de algemene bijeenkomsten, op 10 Mei 1952 te Utrecht. Sprekers:

E. Teensma over: „Een formalisatie van de rekenkunde volgens de methode van Gentzen (zie Mathem. Annalen 1936), met diverse variabelen, o.m. voor rationale en natuurlijke getallen”.

Justus Meyer over: „Iets over het inhaerent logische karakter van de taal.”

Tenslotte verdient vermelding, dat in samenwerking met het Mathematisch Centrum op 14 Februari 1952 Prof. Dr A. Fraenkel, Jerusalem, een druk bezochte voordracht hield, met als onderwerp: „Axiom of Choice”.

STRENGHEID EN INZICHT

door

L. CRIJNS.

Naar aanleiding van 't artikel onder bovenstaande titel op blz. 227 en volg. „Euclides” 27 V/VI, meen ik nog eens 'n lans te moeten breken voor 'n meer rationele behandeling van elementaire vraagstukken; vooral heb ik daarbij 't oog op 'n voorbeschouwing van de opgave zelf. Zonder dat lijkt de methode naar mijn smaak te veel op 't gedrag van de spreekwoordelijke bok tegenover de haverkist.

Een en ander hoeft niet uit te gaan boven de bevassing van de gemiddelde leerling, mits men hem daarin voorgaat en daaraan went.

Naast de voorbeelden van behandeling, gegeven op blz. 90 van jg. 27 1/2, verschaffen m.i. nagenoeg alle op blz. 230—233 besproken vraagstukken even zovele bewijzen voor 't belang van een vóór-onderzoek.

No. 2 blz. 230. Hier moet m.i. begonnen worden met de opmerking, dat (1) geen negatieve waarden voor x toelaat en dat x en y alleen tegelijk nul kunnen worden. Daardoor is van meet af aan 0; 3 als oplossing uitgesloten.

Naar aanleiding van (2) meen ik 'n aanbeveling te moeten plaatsen, om de leerlingen er aan te wennen, dat ze bij 't zien van 'n vierk. verg. of van 'n kwadratische functie allereerst 't teken van de waarde van de determinant vaststellen.

No. 3 blz. 231. Wat boven bij no. 2 aangaande x en y opgemerkt werd, moet hier gezegd worden van y en x ; voorts dat x en z 'n gemeenschappelijk teken hebben en (dus) alleen tegelijk nul kunnen zijn. Daardoor is dan 't resultaat $z^2 = y^3$ volledig verantwoord.

No. 1 blz. 233. Niemand is m.i. gebonden, 'n foutieve opgave op te lossen. Of zit de bedoeling voor, dat voor a gesubstitueerd wordt $x - \frac{1}{x}$? Maar dan is de uitdrukking „voor welke waarden van a ” misplaatst.

No. 2 blz. 233. De plaatsing én de behandeling van dit vraagstuk vind ik wel zeer vreemd.

Bewijs, dat uit $a > 5$ volgt

$${}^4\log(a-5) < \frac{1}{2} {}^4\log(a-3)^2 + \frac{1}{2} {}^2\log(a+1).$$

'n Kort onderzoek brengt hier aan 't licht, dat 'n bewijs gevraagd wordt van de waarheid: 't kleinste van 3 getallen (welk getal zelfs negatief kan zijn) is kleiner dan de som van de 2 grotere getallen, die positief zijn! Dit blijkt ook uit (3) blz. 234, waarna (4) en (5) geheel overbodig zijn.

't Volgende is, meen ik, 'n verbeterde uitgaaf:

Bewijs, dat uit $a > 7$ volgt

$${}^2\log(a+1) < {}^4\log(a^2-6a+9) + 2 {}^4\log(a-5).$$

No. 3 blz. 235. Er zal wel bedoeld zijn: er komen *drie* stellen wortels uit.

De aanwezigheid van x^2 achter 't log-teken moet ook voor de II 'n waarschuwing zijn, dat wellicht voor x ook negatieve waarden gevonden kunnen worden.

No. 4 blz. 235. Als de II. zich de gewoonte, die boven bij 't eerste voorbeeld werd aangeprezen, eigen gemaakt hebben en daarnaar handelen, wat x of y betreft, vinden ze aanstonds hun beloning bij de ontdekking van 't kwadratische v. d. discriminant en is voor hen alle leed geleden.

No. 5 blz. 236. De meeste II. zullen wel, vermoed ik, bij (1) beide leden delen door $\cos \alpha$; dat ze daarbij voorzichtig moeten zijn, dienen ze toch wel geleerd en ingezien te hebben.

BOEKBESPREKING.

Prof. Dr H. Freudenthal, *Inleiding tot het denken van A. Einstein* („Hoofdfiguren van het menselijk denken". nr. 9), Born, Assen. 54 p., prijs f 1.45.

Op populair wetenschappelijke wijze wordt een overzicht gegeven over de belangrijkste ontdekkingen van Einstein. Achtereenvolgens worden de Bose-Einsteinse statistiek, de theorie van de lichtquanta, de speciale en de algemene relativiteitstheorie en de kosmologische consequenties daarvan behandeld. Hoewel ik veel respect heb voor de uiterst heldere en bekwame wijze, waarop de schrijver deze onderwerpen behandelt, moet mij toch van het hart, dat hij zich voor een onoplosbaar probleem gesteld heeft gezien. Het is onmogelijk in een zo kort bestek deze veelvuldigheid van diepgaande fysieke theorieën te populariseren. Toch is het een waardevol boekje voor hen, die hun kennis wensen op te frissen. Het meest geslaagd is m.i. de uitstekende behandeling van de relativiteitstheorie (p. 19—43). Deze is voor een geschoolde leek te begrijpen. Alleen voor dit gedeelte zou ik het boekje willen aanbevelen voor plaatsing in een schoolbibliotheek.

P. G. J. VREDENDUIN

Dr J. J. W. Berghuys S.J., *Grondslagen van de aanschouwelijke meetkunde*. — P. Noordhoff N.V. 1952. Groningen—Djakarta. 231 blz. f 9.50; geb. f 11.—.

Dit boek is gewijd aan het eeuwenoude probleem, hoe de wereld der meetkunde samenhangt met die der zintuiglijke ervaring. De schrijver geeft eerst een beknopt historisch overzicht over de verschillende antwoorden die men in den loop der tijden op de vraag naar dien samenhang gegeven heeft en toont zich evenmin bevredigd door de opvatting die de beide gebieden vereenzelvigt als door de, in reactie daarop ontstane en veelal door mathematici gehuldigde zienswijze, dat zij volkomen van elkaar gescheiden zijn. De eerste is door een bezinning op de meest kenmerkende eigenschappen van het wiskundig denken gemakkelijk te weerleggen; de tweede, die zich in de beide vormen van axiomatisering en arithmetisering voordoet, bezit weliswaar een aanzienlijk hogeren graad van logische consistentie, maar laat op den duur toch een zeker gevoel van onbevredigdheid over: men kan natuurlijk onder punten, lijnen en vlakken zekere niet nader omschreven dingen verstaan, waar-tussen dan door axiomata betrekkingen worden gevestigd, die de grondbegrippen gezamenlijk impliciet definieren; men kan ook een punt als een getallengreep beschouwen en in meetkunde niet meer zien dan een eigenaardige terminologie voor analytische bewerkingen die op die getallen worden uitgevoerd. In beide gevallen wordt echter het probleem niet zozeer opgelost als wel ontlopen. Men blijft zich afvragen, in welke relatie die dingen, getal, grepen en analytische bewerkingen staan tot de voorstellingen die de meetkundige termen spontaan bij ons opwekken.

De oplossing die de schrijver geeft, bestaat daarin, dat hij de grondgedachte van de intuitionistische fundering der wiskunde uitbreidend op de meetkunde, empirisch materiaal aanwijst, dat zonder voorafgaande oefening en zonder kunstmatige hulpmiddelen toegankelijk is en dat aanleiding geeft tot een idealisering in meetkundige vormen. De mogelijkheid van zulk een opbouw der meetkunde als zelfstandig onderdeel der wiskunde wordt in het tweede deel in principe aangetoond en in het derde gerealiseerd.

Het zal zonder meer duidelijk zijn, van hoe groot nut het voor iederen docent in wiskunde is, van beschouwingen als deze kennis

te nemen. Wanneer hij niet totaal van iedere behoefte aan wijsgerige bezinning verstoken is (iets wat zeer zelden voorkomt) zal hij zich bij zijn onderwijs telkens weer moeten afvragen, waar hij, meetkunde docerend, dus woorden als punt, lijn, vlak, driehoek, cirkel in den mond nemend en met stoffelijke hulpmiddelen grove krijtfiguren makend, nu toch eigenlijk over spreekt, wat toch eigenlijk de zijnswijze van de door die woorden aangeduide, in die figuren verstoffelijke geometrische vormen is. Moet hij de allereerste beginselen van het vak doceren, dan zullen die vragen zich nog sterker aan hem opdringen, omdat hij zich dan allicht voortdurend op ervaringen aan stoffelijke lichamen beroept. Wellicht lijdt hij daarbij onder het besef, dat hij zodoende, zwichtend voor didactische noodzaak, tegen den geest der mathesis zondigt.

De leatuur van het boek van Dr Berghuys zal hem in kennis brengen met een opvatting van de grondslagen der meetkunde, waarbij voor dit schuldbesef in het geheel geen plaats is, waarbij integendeel de empirie als de ware voedingsbodem der meetkunde gezien wordt.

En dat niet alleen waar het om het leggen van de grondslagen gaat. Volgens de in het boek ontwikkelde beschouwingen oscilleert het wiskundig denken onophoudelijk tussen de beide ideale polen van zintuiglijke ervaring en zuivere mathesis en laat de empirie zich in geen enkel stadium van den opbouw der wiskunde elimineren.

Men zal begrijpen, dat wat hier in enkele woorden wordt samengevat, in werkelijkheid een uitvoerige en diepgaande uiteenzetting behoeft, die het ingenomen standpunt duidelijk afgrenst ten opzichte van andere, die er bij oppervlakkige beschouwing wellicht enige overeenstemming mee vertonen, maar er in feite toto genere van verschillen.

Het werk verlangt dan ook een aandachtige bestudering, gepaard met opschorting van het oordeel, zolang men het betoog niet tot het einde toe gevolgd heeft. Wie het slechts oppervlakkig doorbladert, zal gemakkelijk een geheel verkeerden indruk van de bedoelingen van den schrijver kunnen krijgen. Hij heeft in den titel „aanschouwelijke meetkunde” zien staan, leest telkens weer over het empirische element dat het wiskundig denken in alle stadia van zijn ontwikkeling vertoont en komt allicht tot de conclusie, dat de auteur iemand is, die de meetkunde als een tak der natuurwetenschap beschouwt en de eigenschappen van meetkundige entiteiten niet door zuiver redeneren, maar door waarneming aan stoffelijke modellen tracht te bewijzen.

Voor een zo elementair misverstaan van zijn bedoelingen kan de

auteur uiteraard nooit verantwoordelijk worden gesteld. Men zou echter wel kunnen vragen, of hij zelf niet soms door zijn woordenkeus aanleiding tot vergeeflijker misverstand geeft. Dit gevaar dreigt met name door het veelvuldige gebruik van het woord „aanschouwelijk”, dat met blijkbaar opzet reeds in den titel voorkomt. In de gewone omgangstaal beduidt „aanschouwelijk” immers datgene wat gezien of aanschouwd kan worden; aanschouwelijk onderwijs is volgens van Dale onderwijs, waarbij de leerlingen het behandelde (werkelijk of in afbeelding) te zien krijgen. Van de entiteiten der aanschouwelijke meetkunde wordt echter herhaaldelijk met nadruk betoogd, dat zij onwaarneembaar en onvoorstelbaar zijn. In de wereld der zintuiglijke ervaring komen punten, lijnen, vlakken, driehoeken en cirkels niet voor en aangezien het voorstellingsvermogen niet meer vermag dan zintuiglijke waarnemingen in een phantasiebeeld voor den geest te brengen, is het ook niet mogelijk, zich die meetkundige vormen voor te stellen. Deze heten dan ook alleen daarom aanschouwelijk, omdat de geest ze door een idealiseringsproces naar aanleiding van de waarneming of voorstelling van letterlijk aanschouwelijke dingen als stippen, strepen, bladen, driehoekige voorwerpen en kringen voortbrengt, waarna ze door het geestesoog in die stoffelijke voorwerpen impliciet geschouwd kunnen worden. Dat niet zintuiglijke schouwen is natuurlijk een heel bekende metafoor, maar ongevaarlijk is het gebruik ervan niet, omdat het woord „aanschouwelijk” b.v. reeds bij het weergeven van de opvattingen van anderen, ook nog al eens in de letterlijke betekenis (die tevens de meest voor de hand liggende is) voorkomt (zie b.v. p. 80). Men moet zich dus voortdurend rekenschap geven van den zin waarin het gebruikt wordt, waarbij men dan wel eens het gevoel heeft, dat voor den auteur het aanschouwelijke ook niet altijd iets onvoorstelbaars beduidt (b.v. p. 120). Het zou daarom aanbeveling verdiend hebben, voor „aanschouwelijk” in den specifieke zin waarin het in het boek voorkomt, een ander woord te kiezen.

Het besproken geval is niet het enige waarin de toegepaste terminologie aanleiding tot onzekerheid geeft. Men kan natuurlijk juist bij de meest fundamentele termen bezwaarlijk een correcte definitie verwachten, maar de auteur toont zich zo bedreven in het hanteren van een voor-wiskundige taal om de vorming van wiskundige begrippen voor te bereiden, dat hij ook wel in staat zou zijn, in voorwijsgerige taal wijsgerige termen te verduidelijken. Hij had dit met name moeten doen met het woord schema, dat op blz. 68 onvoorbereid uit de lucht komt vallen en dat dan verder

zo onbevangen wordt toegepast, dat aan de mogelijkheid, dat men het niet direct zo zou verstaan als het bedoeld is, blijkbaar helemaal niet gedacht is.

Het zou ons te ver voeren, hier in te gaan op de talrijke plaatsen waarbij men den auteur gaarne nadere inlichtingen over zijn bedoelingen zou willen vragen of, in de stellige verwachting dat hij ze bevredigend zou kunnen beantwoorden, tegenwerpingen tegen zijn betoog zou willen maken. Wel mogen hier nog enkele woorden worden gewijd aan de wijze waarop de stof behandeld is.

Men moet het dan vooreerst als een niet geringe verdienste beschouwen, dat de schrijver er bij de behandeling van zijn filosofisch-wiskundig onderwerp in geslaagd is, voortdurend even begrijpelijk te blijven voor beoefenaren der wijsbegeerte die geen diepere mathematische scholing hebben ondergaan als voor wiskundigen die niet geoefend zijn in wijsgerig denken. Voorts ontleent het boek een bijzondere bekoring (dit woord nu niet opgevat in den specifiek-roomskatholieken zin van verleiding, waarin de schrijver het op p. 82 gebruikt, maar in de algemenere betekenis van aantrekkelijkheid die hij er zelf op p. 78 aan hecht) aan den tegelijk bezadigden en levendigen betoogtrant, aan het voortdurend streven van den auteur, bij de bespreking van opvattingen die hij niet kan delen, meer nadruk te leggen op wat hij daarin wel dan op wat hij niet kan aanvaarden en aan zijn kennelijke behoefte, denkwijzen waarvan de extreme voorstanders vaak fel tegenover elkaar hebben gestaan, met elkaar te verzoenen.

Samenvattend kunnen wij het werk van Dr Berghuys begroeten als een belangrijke aanwinst van de wijsgerig-mathematische literatuur en het een ruime verspreiding, speciaal onder wiskundeloozen, toewensen.

E. J. Dijksterhuis.

Verschenen:

P. WIJDENES

VLAKKE MEETKUNDE

voor voortgezette studie

ing. f 13,—; geb. f 14,50

304 blz., 342 fig., 65 uitgewerkte voorbeelden

Uit het Voorbericht:

Het grote werk over vlakke meetkunde onder de naam **Molenbroek** is een handboek voor dit vak; een zeer goed leerboek tevens; maar het stelt rijkelijk hoge eisen aan de studenten. Het was dus te verwachten, dat mij vragen bereikten om de inhoud te besnoeien en de stof wat eenvoudiger te bereiden; aan beide wensen is voldaan.

Het eerste stuk van „Molenbroek” is weggelaten; alleen de stellingen zijn verkort weergegeven. Omdat de verplaatsingen; verschuiving, draaiing en spiegeling (symmetrie) een voorname rol spelen in dit boek en de theorie hiervan ontbreekt, zal het goed zijn, dat de gebruiker die eerst leert uit Wijdenes’

NIEUWE SCHOOLMEETKUNDE

Zeer in het bijzonder vestigen wij de aandacht op de hoofdstukken IV en VI; daarin worden lijnstukken, die zich verhouden als a en b , aangegeven als ka en kb . De doorvoering betekent een grote vereenvoudiging.

HET boek voor de akte Wiskunde L.O. en als voorbereiding voor K I. Ook voor examens, die meer eisen dan de H.B.S. stof; voor studenten enz.

Opleiders gelieven zich voor een present-exemplaar te wenden tot de schrijver; adres Amsterdam-Z., Jac. Obrechtstr. 88.

Spoedig ter perse de tweede druk van

W i j d e n e s

NIEUWE SCHOOLMEETKUNDE I

Ter perse:

NOORDHOFF's WISKUNDIGE TAFELS

in 5 dec.,

geheel nieuwe en vergrote uitgave van Versluys Tafel H.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

P. WIJDENES — Dr H. STREEFKERK

OEFENBLADEN

Volledige leergang in de Beschrijvende Meetkunde voor de
H. B. S.

deel I — zevende druk	f 1,25
deel II — zesde druk	f 1,60
Handleiding	f 2,25

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Dr H. STREEFKERK

NIEUW MEETKUNDEBOEK VOOR M. O. EN V. H. O.

I

- 1 Tekendriehoek en passer
 - 2 Lijnstuk, halve lijn, lijn
 - 3 Driehoek, hoek
 - 4 De cirkel, constructies
 - 5 De opbouw van de meetkunde
 - 6 Congruentie
 - 7 Evenwijdige lijnen
 - 8 Lengte en oppervlakte
- Herhaling

f 3,75

II.

- 9 De cirkel (vervolg)
 - 10 Evenredigheid v. oppervl. vermenigvuldiging van figuren
 - 11 Gelijkvormigheid
 - 12 Ongelijkheden, afstand
 - 13 De figuur van 2 cirkels
 - 14 Constructies, m.p.'s
 - 15 De rechthoekige driehoek goniometrie
- Tweede herhaling

f 3,25

III

- 16a Berekening van lijnstukken in een driehoek zonder trigonometrie
- 16b Berekening van lijnstukken in een driehoek met behulp van trigonometrie
- 17 De gelijkvormigheidspunten van 2 cirkels
- 18 Hoeken en bogen
- 19 Berekening van lijnstukken in een cirkel - Constructie van lijnstukken
- 20 Berekening bij omgeschreven cirkels - in- en aangeschreven cirkels
- 21 Regelmatige veelhoeken
- 22 Constructies - Meetkundige plaatsen

Aanhangsel

f 2,75

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel