

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM

DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, HASSELT

PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT

DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT

DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

27e JAARGANG 1951/52

V/VI

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 3,00 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van de **Wimecos** storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1950 t/m 31 Augustus 1951 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) ten bedrage van f 5,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107^{III}, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Ruysdaellaan 53. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

I N H O U D.

	Blz.
Dr E. J. DIJKSTERHUIS, De wiskunde op het α -gymnasium	209
Dr P. G. J. VREDENDUIN, Strengheid en inzicht	227
Dr A. C. ZAAENEN, Enige motieven die bij de beoefening der wiskunde ook een rol spelen	237
Vacantie cursus van het M.C. voor leraren in de wiskunde en voor andere belangstellenden	249
Uit het verslag van het Staatsexamen A	250
J. W. DEKKER, De inhoud van de prismoïde: formules, waarin slechts 2 vlakken optreden	254
A. D. FOKKER, Onstoffelijkheden in de natuur	260
Dr P. BRONKHORST, Normen	266
Dr J. RIDDER, Aard en structuur der wiskunde	271
Mededeling over wiskunde films	291

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM

DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, HASSELT

PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT

DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT

DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

27e JAARGANG 1951/52

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Inhoud van de 27ste jaargang 1951—1952.

Officiëel

Notulen van de vergadering van de Groep L.i.w.e.n.a.g.e.l.	1
Mededelingen Amerikaanse studiebeurzen.	60
† Dr H. J. E. Beth	97
Kort verslag van de algemene vergadering van Wimecos	118
Mededeling van het bestuur van L.i.w.e.n.a.g.e.l.	119
Aan de leden van Wimecos.	164
Mathematisch Centrum	249
Verslag staatsexamen.	250
Aanvullingen van de conferentie te Baarn (zie jaargang 26 blz. 97)	3
Examen Artium Denmark 1950.	13
Dr. J. KOKSMA, Het limietbegrip II.	15
S. J. GEURSEN, Voor de volgende les § p leren en vraagstuk 1 en 2 maken	41
M. EILANDER, Geometrografie.	62
R. W. SCHIEVEN, Iets over levensverzekeringswiskunde	70
Prof. Dr P. H. VAN LAER, Onstoffelijkheden in de natuur.	74
W. P. VAN PEYPE, Wiskunde en psychotechniek.	84
Dr L. CRIJNS, Een voorstel aan het Mathematisch Centrum	89
F. CARLABUR en FRED. SCHUH, Benadringsconstructies van de regelmatige vijfhoek en vijftienhoek.	91
Baccalauréat de Toulouse première et deuxième partie 1950.	93
Verslag van de Ned. vereniging voor logica en wijsbegeerte van de exacte wetenschappen	95
Prof. Dr O. BOTTEMA, Euclides in Wonderland.	98
Dr JOH. H. WANSINK, Het leerboek en de leraar in het wis- kundeonderwijs	121
P. WIJDENES, Dr H. J. E. Beth †	145
† Dr H. J. E. BETH, Over de afleiding van de formules voor de scheve worpsbeweging	146
H. PLEYSIER, Desiderata van het hoger economisch onderwijs ten aanzien van het wiskunde onderwijs op de middelbare school (met discussie)	151
Propadeutische examens van de Nederlandse Economische hoge- school.	166
Prof. ir. F. M. ROETERINK, Wordt aanpassing aan de veranderde maatschappelijke structuur bereikt door de richtlijnen van de Ministeriële nota's van 11 Januari en 19 Juli 1951?.	169

Korrels

CIV. Over de verticale cirkelbeweging	184
CV. Hoe bewees Pythagoras de stelling van Pythagoras? . .	185

Dr M. VAN VLAARDINGEN, Enige opmerkingen naar aanleiding van het eindexamen H.B.S. Stereometrie 1950	188
Dr W. P. THIJSEN, Over het terugbrengen van een omgekeerde bewerking van hogere trap tot de rechtstreekse bewerking .	196
Dr E. J. DIJKSTERHUIS, De wiskunde op het α -gymnasium	209
Dr P. G. J. VREDENDUIN, Strengheid en inzicht	227
Dr A. C. ZAAENEN, Enige motieven die bij de beoefening der wiskunde ook een rol spelen	237
J. W. DEKKER, De inhoud van de prismoïde: formules, waarin slechts 2 vlakken optreden	254
Prof. Dr A. D. FOKKER, Onstoffelijkheden in de natuur . .	261
Dr P. BRONKHORST, Normen	267
Prof. Dr J. RIDDER, Aard en structuur der wiskunde	271
Mededeling over wiskunde-film	291
Boekbesprekingen	96, 179

Het bestuur van L.i.w.e.n.a.g.e.l. heeft Dr Dijksterhuis verzocht de rede, die hij voor docenten in de klassieke talen gehouden heeft, te publiceren in Euclides. Hij is zo vriendelijk geweest aan dit verzoek te voldoen en we danken hem voor zijn bereidwilligheid.

DE WISKUNDE OP HET α -GYMNASIUM ¹⁾

door

Dr E. J. DIJKSTERHUIS

Zelden heb ik een uitnodiging, ergens een voordracht te houden, met meer bereidwilligheid en groter genoegen aangenomen dan toen Uw Bestuur mij vroeg, hier vanmiddag te komen spreken over de mogelijkheid, het onderwijs aan de α -afdeling van het Gymnasium in dien zin te reorganiseren, dat het mede tot het hoofddoel van dit schooltype, de klassieke vorming, zou kunnen bijdragen. Voor eerst is het natuurlijk altijd prettig, belangstelling te ondervinden voor een jarenlang gekoesterd denkbeeld, dat echter nooit verwikelijkt scheen te kunnen worden; dan is het met het oog op den aard van dit denkbeeld voor mij van veel belang, dat die belangstelling van de zijde van een groep classici komt, d.w.z. van hen die ik in deze zaak als mijn natuurlijke bondgenoten meen te mogen beschouwen; en ten slotte is het mij om zuiver practische redenen veel waard, mijn gedachten over wat wiskunde-onderwijs op het α -Gymnasium zou kunnen zijn, te onderwerpen aan het kritisch oordeel van onderwijsmensen die over dit schooltype het allereerst tot oordelen bevoegd zijn. Er is namelijk een omstandigheid die maakt, dat zij die deskundige kritiek wel zeer van node hebben en ik zal U maar dadelijk bekennen, waaruit deze bestaat, op gevaar af, dat ik daardoor aanzienlijk in Uw achting zal dalen en zelfs twijfel zal wekken, of het eigenlijk wel op mijn weg ligt, een plan tot hervorming van een onderdeel van het gymasiaal onderwijs op te stellen en te verdedigen. Ik heb over het Gymnasium geen enkele ervaring, noch als leerling noch als docent. Wat ik aan klassieke vorming bezit, heb ik verworven langs een weg dien U — terecht — slechts met enige minachting, althans niet zonder wantrouwen pleegt te beschouwen, den weg namelijk van studie voor het examen

1) Voordracht, gehouden te Rotterdam op 19 Jan. 1952 voor een vergadering van docenten in Oude Talen aan Rotterdamse Gymnasia en Lycea.

ex art. 12 H.O.-wet, en daarna ben ik teruggekeerd tot het schooltype, dat U — opnieuw terecht — nog nooit als een gelijkwaardig naast het Gymnasium staanden vorm van voorbereiding tot hoger onderwijs wenst te erkennen, de H.B.S. Ik ben mij volkomen bewust van de zwakheid der positie die ik door dit alles in discussies over gymnasiale aangelegenheden inneem en ik zou U dan ook willen verzoeken, alle meningen die ik er vanmiddag over te berde zal brengen, ook wanneer zij den vorm van kategorische of misschien zelfs van normatieve oordelen mochten aannemen, te willen verstaan als bescheidenlijk geopperde denkmogelijkheden, niet als „zo kan het; zo moet het” maar als schuchtere vragen: „zou het ook zo kunnen?”

Ik overweeg bij dit alles trouwens wel de mogelijkheid, dat mijn gebrek aan gymnasiale ervaring, naast de onmiskenbare nadelen, misschien toch ook nog een voordeel heeft en wel in den vorm van een zekere ideale voorstelling van wat een Gymnasium moet zijn, die niet door teleurstellende praktische ervaringen iets van zijn glans heeft ingeboet. Een bevriend classicus heeft mij eens verzekerd, dat ik wel anders over gymnasiaal onderwijs zou denken en spreken, wanneer ik zelf aan een Gymnasium werkzaam was.

Ik zal U echter niet langer ophouden met zelfkwellende twijfelingen over de vraag, of ik wel het recht heb, over het wiskunde-onderwijs aan α -leerlingen te spreken. Het feit, dat ik hier sta en er over spreken zal, bewijst immers, dat ik mij dit recht toeken en slechts de ervaring zal U kunnen leren, of dat al dan niet een usurpatie is. Laat ik dus dadelijk in medias res komen door een stelling uit te spreken en deze daarna toe te lichten en te verdedigen. Zij luidt als volgt:

Het is mogelijk, het onderwijs in wiskunde aan de α -afdeling van het Gymnasium zo in te richten, dat het, zonder aan wiskundig vormende waarde iets in te boeten, bijdraagt tot de klassieke vorming.

Er worden in deze stelling twee termen gebruikt, waarvan U een nadere omschrijving zult, althans kunt verlangen, nl. „wiskundig vormende waarde” en „klassieke vorming”. Van het eerste begrip geef ik U die nadere omschrijving niet; of er zo iets bestaat, als de gebruikte term uitgedrukt en zo ja, of er van die vormende waarde ook buiten de wiskunde zelf iets te bespeuren valt, is een open vraag, waarover wiskunde-docenten eindeloos kunnen redetwisten, maar waarover ook alleen zij in staat zijn, niet al te vruchteloos te discussiëren. Voor ons doel van vanmiddag behoeven wij op dit strijdpunt gelukkig niet in te gaan. Het gaat er immers niet om, of het al dan niet wenselijk is, wiskunde als leervak op het α -Gymnasium in te voeren, maar hoe men dit vak, nu het er eenmaal is, het best

aan de hoofdbedoeling van dit schooltype dienstbaar kan maken. Dat het er is, bewijst, dat men er enig heil van verwacht. Welnu: verstaat U mijn formulering „zonder aan wiskundig vormende waarde iets in te boeten” als volgt: „zonder dat het thans nagestreefde doel in mindere mate bereikt zal worden” en laten wij de nauwkeurige omschrijving van dit doel in het midden laten.

Van de kwestie, wat klassieke vorming is, kunnen wij ons niet zo gemakkelijk afmaken, al zal het niet nodig zijn, haar tot op den grond te behandelen. Ik onderscheid drie opvattingen, niet bij wijze van uitputtende opsomming, maar als drie mogelijkheden, die mij voldoende verscheidenheid bieden. De eerste: klassieke vorming bestaat in de onderwerping aan de denktucht, die de studie der Oude Talen, met name het in goed Nederlands weergeven van wat in het Grieks of Latijn gezegd wordt, vereist. De tweede: zij bestaat hierin en bovendien in het doordringen worden van wat men, zolang geen nadere omschrijving bepaald verlangd wordt, met den onder ingewijden voldoende duidelijken term „geest der Oudheid” kan omschrijven. De derde: zij bestaat in de beide, volgens de tweede opvatting onderscheiden verworvenheden met daarnaast een inzicht in de historische betekenis van de Grieks-Romeinse cultuur voor de ontwikkeling van het Europese geestesleven. Het zijn drie opvattingen die niet naast elkaar staan, maar waarvan iedere volgende de vorige omvat; zij sluiten elkaar niet uit, maar de tweede sluit de eerste in en de derde de tweede. Men zou de eerste de philologische kunnen noemen, de tweede de philologisch-culturele, de derde de philologisch-cultureel-historische.

Het is nu met mijn these zo gesteld, dat zij steeds beslistere formuleringen verdraagt, naarmate men de opvatting van wat klassieke vorming mag heten, van de eerste tot de derde verruimt. Als men zich tot de eerste beperkt, zegt zij, dat de voorgestelde methode van wiskunde-onderwijs tot de klassieke vorming kan bijdragen maar laat zij de mogelijkheid open, dat de in het vooruitzicht gestelde medewerking onbeduidend is. Aanvaardt men de tweede, dan kan die bijdrage reeds als een aanzienlijke worden aangemerkt. Kiest men echter de derde, dan kunnen de woorden „bij kan dragen tot de klassieke vorming” reeds vervangen worden door „een onmisbaar element van de klassieke vorming betekent”. Anders gezegd: als men onderwijs in oude talen op een gymnasium uitsluitend als taalonderwijs waardeert, kan men den steun dien de wiskunde leveren kan, desgewenst ontberen; als men naast kennis der oude talen ook vertrouwdheid met de antieke cultuur, als in den tijd geïsoleerd verschijnsel beschouwd, beoogt, kan men van den door de

wiskunde aangeboden steun een dankbaar gebruik maken; wil men echter de leerlingen bovendien nog doordringen van de wezenlijke betekenis van de antieke cultuur voor een juist begrip van de onze, dan kan men het zonder dien steun helemaal niet stellen. Daar nu de derde formulering die van de wijdeste strekking is, kan ik volstaan met haar verder te adstrueren. Ik beperk daarbij het begrip klas-sieke vorming — wel te verstaan voor het doel van dezen middag — door uitsluitend over Hellas te spreken. Rome heeft voor ons onder-werp geen andere betekenis dan dat het Latijn onvergankelijke diensten heeft bewezen als voertaal voor de producten van den Grieksen geest.

Ik formuleer nu dus de these opnieuw:

Het is mogelijk het onderwijs in wiskunde aan de α -afdeling van het Gymnasium zo in te richten, dat het, zonder aan wiskundig vormende waarde iets in te boeten, een bijdrage levert tot de kennis der Griekse taal, den leerling met een belangrijk aspect der Griekse cultuur in aan-raking brengt en hem een indruk geeft van de historische betekenis dier cultuur voor het Europese geestesleven.

Wanneer U deze these met de vereiste kritische gezindheid be-schouwt, zult U ongetwijfeld nog vallen over den dubbelzinnigen term: het is mogelijk. Waar is het mogelijk, zult U willen weten, in een fictieve wereld, waarin volmaakte docenten volmaakte leer-lingen onderwijzen? Of op onze concrete gymnasia, waar geen van beide categorieën de volmaaktheid zelfs maar benadert?

Ik wil met nadruk verzekeren, dat mijn plan zeer zeker bestemd is voor de realiteit van ons schoolleven. Ik ken uit ervaring veel te goed de verleiding die er in ligt, om thuis op de studeerkamer of in een vergadering met gelijkgestemden plannen voor hervorming van het onderwijs samen te stellen die het door hun wereldvreemdheid nooit verder zullen brengen dan tot een bestaan op papier, om nog lust te hebben, daaraan tijd en moeite te besteden. Een voorstel tot vernieuwing van het onderwijs moet geïnspireerd zijn door een ideaal, niet door een illusie. Het onderscheid bestaat hierin, dat een ideaal krachtens zijn aard vatbaar is voor partiële realisering, een illusie principieel echter niet. Zoals bij een stoommachine het Nuttig Effect, d.i. de verhouding tussen den nuttig verrichten arbeid en de in den vorm van warmte toegevoerde energie nooit 100 % kan be-dragen; — er is een diepliggende theoretische reden, waarom dit niet kan; men kan slechts trachten, het zo hoog mogelijk op te voeren, maar er zijn omstandigheden waarin men met enkele procenten te-vreden moet zijn — zo kan men in het onderwijs niet verlangen, dat al de door den docent bestede energie volledig in de prestaties van

den leerling wordt teruggevonden; ook hier moet men met een bescheiden percentage tevreden zijn. Maar men moet geen plannen maken, waarvan te voren vast staat, dat men een redelijk Nuttig Effect nooit bereiken kan.

Ik geloof, dat ik hiermee mijn algemene beschouwingen wel mag besluiten en tot de concretisering van mijn these kan overgaan. Wij staan, zotelik me voor, aan het begin van het vijfde leerjaar van een gymnasium; de splitsing in α en β is voltrokken; een docent in wiskunde krijgt een α -klasse voor zich en wil deze volgens de voorgestelde methode de wiskunde onderwijzen. Wat gaat hij doen?

Hij begint met een gans andere houding tegenover het vak wiskunde aan te nemen dan in de eerste vier klassen. Daar was het voor alles zijn taak, zijn leerlingen een zekere technische beheersing van de lagere delen van de hedendaagse elementaire wiskunde bij te brengen. Hij moest daar telkens nieuwe mathematische begrippen invoeren en door het laten maken van talrijke oefenvoorbeelden een zekere vertrouwdheid met die begrippen trachten te bewerken, op gevaar af, dat zijn leerlingen den averechtsen indruk zouden kunnen krijgen, dat het eigenlijke doel van de wiskunde bestaat in het leren oplossen van vraagstukken en dat de z.g. theorie, d.i. het systeem der bekend te rekenen en zonder nadere toelichting toe te passen stellingen, eigenlijk alleen maar dient, om hem tot dat oplossen in staat te stellen. In de β -afdeling, waar de leerlingen met het oog op hun latere studie ook de hogere gedeelten der elementaire wiskunde met voldoende techniek moeten leren beheersen, moet hij die methode wel blijven volgen. Hier bij de α 's heeft hij echter het voordeel, dat deze noodzaak vrijwel ontbreekt en hier bestaat dan ook de gelegenheid, zich gans anders in te stellen.

Hij zal dus beginnen met de wiskunde als historisch verschijnsel te beschouwen en dus voor alles de vraag naar haar oorsprong opwerpen. Dat voert, zoals alle historische vragen naar den oorsprong van 's mensen geestelijke verworvenheden, dadelijk en onvermijdelijk naar Hellas, waar uit de reeds lang bestaande toepassing van mathematische methoden in de praktijk van het leven zich het begrip der zuivere wiskunde ontwikkeld heeft. Ten dele, namelijk waar het om de wordingsgeschiedenis van teltaal en cijferschrift gaat, waarmee de wiskunde in de praktijk van het leven wortelt, voert het onderzoek nog verder in het verleden, voornamelijk naar wat men met een verzamelnaam de Babylonische cultuur pleegt te noemen en enigermate ook naar de Aegyptische. Een behandeling van het Babylonische en het Aegyptische getallenstelsel en van de wijze

waarop men hierin getallen schreef en er mee rekende, geeft reeds dadelijk de mogelijkheid, veel juistere denkbeelden over elementaire rekenkundige zaken bij te brengen dan men bij menigen overigens wel ontwikkelden volwassene pleegt aan te treffen. In de Babylonische wiskunde komt namelijk de uiterst vruchtbare gedachte van het positiestelsel voor, waarop ook ons eigen voortreffelijk Indo-Arabisch cijferschrift berust: zoals bij ons het teken 1, al naar de plaats die het in het getaltekens inneemt, een eenheid, een tiental, een honderdtal enz. kan betekenen, maar ook in de positioneel geschreven breuken die door den term decimaal slechts zeer onvoldoende worden gekarakteriseerd, een tiende, een honderdste enz. deel van de eenheid, is er een spijkerschriftteken dat zowel één kan beduiden, als 60, 60² enz. en ook weer 1/60, 1/60² enz. Het enige verschil is, dat niet tien, maar zestig als nieuwe eenheid geldt. En het belangrijke historische onderscheid is, dat terwijl de West-Europese mathematici na de invoering van het positiestelsel voor gehele getallen nog vier eeuwen nodig hebben gehad, om dit denkbeeld ook voor het schrijven van breuken toe te passen, de Babyloniërs van het begin af deze gedachte als een eenvoudige consequentie van het gronddenkbeeld van het stelsel hebben begrepen. Het Aegyptische stelsel, waarin men aparte tekens heeft voor 1, 10, 100 enz. en grote moeilijkheden ondervindt bij het schrijven van en rekenen met breuken, kan als vergelijkingsobject dienen; met beide kunnen zowel de twee Griekse systemen van cijferschrift, het acrophonische en het alphabetische, als het ongelukkige Romeinse stelsel worden gecontrasteerd.

Men zal aan de verleiding, al te lang bij dit boeiende en cultuur-historisch zo uiterst belangrijke onderwerp stil te staan, weerstand moeten bieden om zich vooreerst te concentreren op wat de hoofdzak is en blijven moet, de Griekse wiskunde. Hier kan een tijdlang de historische behandelingswijze boven de zuiver mathematische praevaleren, nl. zolang men over Pythagoras en zijn school spreekt en over de schaarse berichten die ons over de wordingsgeschiedenis van de Griekse wiskunde voor het jaar 400 v. Chr. ter beschikking staan. Over de betekenis van de wiskunde voor het denken van Plato en over de fundamentele positie die zij van dit ogenblik af in het menselijk geestesleven zal gaan innemen, zal eerst nog gezweven moeten worden. Het gaat er immers in de eerste plaats om, te laten zien, hoe zich langzamerhand bij de Griekse denkers de zo uiterst vruchtbare gedachte van de *Στοιχείωσις*, de elementatio, ontwikkelt, die dan haar voorlopig, d.w.z. voor de eerstvolgende twintig eeuwen, definitieven vorm aanneemt in de *Στοιχεία* van Euclides, de

gedachte van de ordening van de mathematische kennis in een logisch opgebouwd systeem, gebaseerd op niet nader te definieren termen en niet nader te bewijzen beweringen.

Het is, na iets over de ook maar schaars bekende voorgeschiedenis van de uitwerking van deze conceptie te hebben gezegd — Simplicius bewaart in zijn commentaar op de *Physica* van Aristoteles een allermerkwaardigst fragment van een werk op dit gebied van den waarschijnlijk 5e-eeuwsen wiskundige Hippokrates van Chios en Proklos noemt een aantal namen van *Στοιχεῖα* -samenstellers die ouder zijn dan Euclides — nu tijd, de *Elementen* zelf ter hand te nemen en met diezelfde directheid die alle Griekse mathematische auteurs kenmerkt, zich maar dadelijk in de lectuur te storten.

Het begint met de "Οροι (Definitiones): *Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.* en als het goed is, moet hierbij iets van de ontzaglijke historische betekenis van dit begin gevoeld worden. Toen ik nog op de H.B.S. was, heeft mijn natuurkundeleraar, de latere Utrechtse hoogleraar Grondijs, mij eens verteld, hoe hem, toen hij voor de eerste maal de *Ilias* in handen had gekregen en daar de eeuwenoude woorden *μῆνιν ἄειδε, θεά* had gelezen, de tranen over de wangen waren gelopen. Ik verwacht en verlang geen tranen in de wiskunde-lessen op het α -Gymnasium, maar ik zou wel willen, dat de beginwoorden van het mathematische epos der *Stoicheia* den leerling bijbleven als een herinnering aan het ogenblik waarop in de Griekse oudheid de weg werd ingeslagen die den mens naar het fantastische kenavontuur van de wiskunde en de mathematische physica gevoerd heeft.

Hierna volgen dan de *Αἰτήματα* (Postulata) en de *Κοινὰ ἔννοια* (Communes animi conceptiones), waarna met de lectuur der proposities begonnen kan worden.

Reeds dadelijk, stel ik me, terugdenkend aan den tijd waarin ik zelf Grieks leerde; voor, zal er een verruimende werking uitgaan van de nu reeds teweeggebrachte uitbreiding van den Grieksen woordenschat. Deze is over het algemeen bij den gymnasiast enigszins wonderlijk samengesteld, sterk militair en politiek georiënteerd en gespeend van al die mathematische, natuurwetenschappelijke en philosophische termen waardoor het Grieks op den duur juist zulk een sterken invloed op de Europese talen zou uitoefenen. Het zal verder een aangename verrassing zijn, de taal die anders zo vaak tot een moeizaam opsporen van den uit te drukken gedachteninhoud dwingt, nu ook eens in zeer eenvoudigen vorm als voertaal te zien gebruiken voor een, eveneens zeer eenvoudigen wetenschappelijken inhoud; het gaat immers om stellingen die tot het aller-

eerste begin van de wiskunde behoren: de gelijkbenige driehoek, congruentiegevallen.

Nu echter herneemt de wiskunde haar rechten; wat wordt eigenlijk met deze wijze van opbouwen van het systeem der meetkunde, waarmee in het wiskunde-onderwijs in de eerste klasse wel kennis is gemaakt, maar waarop toen niet nader kon worden ingegaan, beoogd? Welk kenideaal steekt er achter? Wat is eigenlijk een definitie, een postulaat, een axioma? Zijn de Euclidische *ᾠοι* inderdaad echte definities? Bestaat er werkelijk verschil tussen een axioma en een postulaat? Wat is bewijzen, wat construeren? Van hieruit opent zich een blik op de latere geschiedenis. Er kan getoond worden, hoe de Griekse opvattingen over wat wiskunde eigenlijk is, het denken voor goed zullen gaan beheersen, hoe nog de wijze waarop tegenwoordig wiskunde wordt onderwezen, er in hoge mate door bepaald wordt. Bij de lectuur van de *αἰτήματα* komt het befaamde vijfde postulaat aan de orde, dat equivalent is met het axioma, dat door een punt buiten een lijn niet meer dan een enkele rechte evenwijdig aan de eerste te trekken is (dat er een is, wordt onafhankelijk van het postulaat bewezen). Dit geeft aanleiding, iets te zeggen over de eeuwenlang voortgezette pogingen, van deze uitspraak een bewijsbaar theorema te maken en te laten zien, hoe deze ten slotte in het begin van de 19e eeuw leidden tot de opstelling van niet-Euclidische meetkunden, waarin door een punt buiten een lijn twee parallelen of geen enkele getrokken kunnen worden en waarin de som van de hoeken van een driehoek kleiner of groter dan 180° is. Iets te begripen van het aanvankelijk verbijsterende feit, dat het woord meetkunde een meervoud bezit, lijkt mij belangrijker dan het uitvoeren van berekeningen over inhouden van veelvlakken, die meestal neerkomen op het substitueren van getallen in van buiten geleerde formules.

Kritische beschouwing van de eerste Euclidische bewijzen leidt tot het inzicht dat de in de *αἰτήματα* en de *κοναὶ ἐννοιαὶ* gegeven fundering niet toereikend is, dat menigmaal stilzwijgend een beroep wordt gedaan op aanschouwelijke evidenties die evengoed om expliciete formulering vragen. Ook hier kan iets over de latere ontwikkeling behandeld worden, over 19e- en 20e eeuwse pogingen, den Euclidischen opbouw te verbeteren en over de verandering in betekenis die het woord axioma daarbij heeft ondergaan: vroeger onbetwifelbaar en onbewijsbaar inzicht; nu zonder bewijs aangenomen grondstelling. Als men ziet, hoeveel niet-mathematisch geschoolde volwassenen rondlopen met verkeerde voorstellingen over een fundamentele wetenschappelijke werkzaamheid als axiomatisering, die

gebaseerd zijn op wat ze er destijds bij het begin van het wiskunde-onderwijs over hebben gehoord, kan men het niet anders dan een simpele noodzaak noemen, dat hun daarover, voordat ze de school voor V.H.O. verlaten, betere begrippen worden bijgebracht. Het komt mij voor, dat bij leerlingen die op een α -Gymnasium thuishoren, die dus, om het anders te zeggen, voor klassieke vorming vatbaar zijn, deze wijze van behandeling aan moet spreken. Het is gedaan met de vraagstukken-training; er wordt thans reproductie van een enigszins wijsgerig getinten gedachtengang verlangd en niet langer een beroep gedaan op een gewoonlijk niet aanwezig mathematisch uitvindings-vermogen; het wiskundig denken wordt enerzijds geschilderd als typisch Grieks cultuurverschijnsel en gebruikt als illustratie van de Helleense intellectuele geesteshouding, die scherpzinnig is en geneigd tot spitsvondigheid en redetwist: anderzijds geplaatst in een groten historischen samenhang, waarin onze wetenschap met de Griekse in onmiddellijk contact staat.

Intussen wordt de lectruur van Euclides voortgezet. De leerlingen raken vertrouwd met de traditionele indeling van een Euclidische propositie in *πρότασις*, *ἐκθέσις*, *διορισμός*, *κατασκευή*, *ἀπόδειξις* en *συμπέρασμα*, besloten met de rituele woorden *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*, als het een theorema, met *ὅπερ ἔδει ποιῆσαι*, als het een problema betreft. Zij kunnen er zich in oefenen, de bewijzen, die hun uit mathematisch oogpunt geen enkele moeilijkheid in den weg kunnen leggen, in het grieks te geven.

Uit mathematisch en logisch oogpunt leidt ook de verdere beschouwing van het vijfde postulaat nog tot belangrijke inzichten. Het blijkt, dat Euclides de toepassing ervan zo lang mogelijk uitstelt, met het belangrijke gevolg, dat alle proposities voor de 29e, waarin het voor het eerst gebruikt wordt, ook in althans een der niet-Euclidische meetkonden gelden. De manier waarop er ten slotte gebruik van wordt gemaakt, geeft aanleiding tot bewuste kennismaking met elementaire logische aangelegenheden, zoals de onderscheiding tussen nodige en voldoende voorwaarden, de begrippen omgekeerde stelling en logische omkering van een stelling.

Aan het slot van Boek I geeft de z.g. stelling van Pythagoras voor een rechthoekigen driehoek de gelegenheid, de zuiver geometrische opvatting die de Griekse wiskundigen van dit theorema hebben, tegenover de meer arithmetisch-algebraïsche van onze elementaire wiskunde te stellen. Euclides I 47 luidt: *In rechthoekige driehoeken is het vierkant op de den rechten hoek onderspannende zijde gelijk aan de vierkanten op de den rechten hoek insluitende zijden*. Er staat dus, dat de oppervlakte van het vierkant op de schuine zijde van een

rechthoekigen driehoek als zijde beschreven gelijk is aan de som van de oppervlakten der vierkanten die op de rechthoekszijden beschreven zijn. Onze leerboeken zeggen, dat het *quadraat van* de schuine zijde gelijk is aan de som van de *quadraten van* de rechthoekszijden en denken daarbij kennelijk aan de tweede machten van de getallen die de lengten der zijden uitdrukken. Voor een Grieksen wiskundige zou dit zinloos zijn, omdat een lijnstuk in het algemeen niet een door getallen uitdrukbare verhouding tot een lengte-eenheid bezit.

Wanneer U bedenkt, dat de *Elementen* van Euclides dertien boeken bevatten en dat elk van deze dertien een overmaat van onderwerpen oplevert, die op de wijze waarvan ik U een indruk heb trachten te geven, behandeld kunnen worden, zal het U duidelijk zijn, dat het een docent, die volgens de voorgestelde methode te werk wil gaan, zeker niet aan leerstof zal ontbreken en dat hij zelfs genoodzaakt zal zijn tot een scherpe selectie.

Hoë hij deze ook wil uitvoeren, één onderwerp is er, dat hij nooit ter zijde zal kunnen laten, omdat het zowel typerend is voor het logisch rigorisme van de Griekse denkers als van onoverzienbaar belang voor de historische ontwikkeling der wiskunde. Dit onderwerp wordt gevormd door de befaamde in Hellas gedane ontdekking waarop ik zo juist al zinspeelde, namelijk die van het irrationale, en van de met volledig succes bekroonde pogingen, de daardoor ontstane denkverlegenheid te boven te komen. Die ontdekking leerde, dat zijde en diagonaal van een vierkant geen gemene maat bezitten en zette daardoor het gehele verhoudingsbegrip, dat oudere wiskundigen waarschijnlijk onbekommerd voor elk tweetal lijnstukken hadden toegepast, op losse schroeven. Dit nooddaakte tot een diepgaande heroriëntering der meetkunde, die bij Euclides o.m. ten gevolge heeft, dat in de eerste vier boeken het verhoudingsbegrip niet voorkomt. Het begrip *λόγος* (reden) wordt eerst in Boek V ingevoerd, op een waarschijnlijk door Eudoxos van Knidos aangegeven wijze, die mathematisch equivalent is met een in de 19e eeuw door Dedekind ontwikkelde theorie van het irrationale getal. Het gevolg is, dat het begrip gelijkvormig eerst in Boek VI aan de orde kan komen, dus in een veel later stadium dan in onze elementaire meetkunde, waarin men over de diepliggende moeilijkheden van het irrationale heel gemakkelijk pleegt heen te lopen. Ik haast mij, te erkennen, dat dit in de lagere klassen om didactische redenen eenvoudig noodzakelijk is. Maar daaruit volgt nog niet, dat men ook de oudere leerlingen ten aanzien van het irrationale in een toestand moet laten dien Plato meer zwijgen dan menswaardig noemt.

Het is hier natuurlijk niet de plaats op dit alles dieper in te gaan.

Ook moet ik voor een andere, eveneens aan Eudoxos toegeschreven hoofdstuk van de *Stoicheia* waarin een strenge methode ter behandeling van oneindige processen (wat wij tegenwoordig limietovergangen noemen) geleerd wordt en dat eveneens voor ons doel geschikte leerstof zou kunnen leveren, met een korte vermelding volstaan. Hetzelfde geldt voor de boeken VII — IX, waarin de getallentheorie behandeld wordt.

Het wordt namelijk tijd, op te merken, dat de *Elementen* van Euclides, van hoe fundamentele betekenis zij ook zijn, niet het enige Griekse werk mogen blijven, waaraan wij leerstof voor het α -onderwijs in wiskunde ontleenen. Men zal het niet, althans slechts in geringe mate, kunnen aanvullen met geschriften van latere mathematici, als Archimedes, Apollonios, Pappos, Diophantos, omdat deze voor het gestelde doel over het algemeen mathematisch te moeilijk zijn, maar wel met een behandeling van de beginselen der Griekse astronomie (en misschien van de Griekse mechanica). Deze onderwerpen verdienen om dezelfde redenen als de elementaire Griekse wiskunde de volle aandacht: om de uitbreiding van den woordenschat met Griekse termen die voor een groot deel in de moderne cultuurtalen voortleven; om den typerenden kijk dien zij op de Griekse geesteshouding geven; en om hun cultuurhistorische betekenis. In niet mindere mate dan Euclides de wiskunde heeft namelijk Ptolemaios in Oudheid en Middeleeuwen de astronomie beheerst en bij den sterken opbloei van het Westerse denken in de 16e eeuw bouwt de astronomie even effectief op het werk van haar Griekse voorgangers voort (Copernicus sluit zo onmiddellijk bij Ptolemaios aan, dat men hem voor een Griek zou kunnen houden) als de wiskunde zich door de werken van Archimedes, Apollonios en Diophantos laat inspireren.

Men zal met Griekse astronomie op het α -Gymnasium echter niet zo ver kunnen gaan als met Griekse wiskunde; het vak wordt al spoedig te moeilijk en ook bestaat er geen Grieks elementair leerboek voor, dat als pendant van de *Elementen* van Euclides zou kunnen fungeren.

Dat er iets van behandeld wordt, is echter niet alleen om zuiver vakwetenschappelijke en algemeen cultuurhistorische redenen van belang, maar moet tevens bepleit worden met het oog op een ander doel, dat ook van den wiskundigen kant benaderd kan worden en dat als het ware het sluitstuk van de gehele wiskundige α -opleiding zal moeten vormen. Ik denk aan een wiskundig-astronomisch georiënteerde inleiding in het denken van Plato.

Een gymnasiale opleiding voor α -leerlingen kan namelijk niet als

volledig geslaagd worden beschouwd, wanneer zij hen niet ook in kennis brengt met enkele fundamentele punten van de Griekse wijsbegeerte. Hiervoor pleiten vooreerst de straks reeds voor wiskunde en astronomie aangevoerde argumenten (ruimere taalkennis, inzicht in een typerende Helleense geestesactiviteit; besef van de historische waarde der Griekse cultuur), maar ook de overweging, dat de meeste leerlingen op den leeftijd waarop zij de hogere klassen van een Gymnasium doorlopen, een sterke behoefte aan wijsgerige voorlichting gevoelen.

Er is kort geleden door van Straaten in zijn werkje *Prothuron*¹⁾ een, naar het mij voorkomt, geslaagde poging gedaan, aan deze behoefte binnen het kader der klassieke opleiding tegemoet te komen. Zijn behandelingswijze laat echter een aanvulling toe — vraagt er zelfs om —, waarin het Griekse wijsgerig denken van mathematischen en natuurwetenschappelijken kant benaderd wordt.

Ik kan opnieuw niet in details treden, maar wil bij wijze van voorbeeld er op wijzen, dat er geen eenvoudiger en meer ongedwongen toegangsweg tot de Platoonse ideeënleer is dan vanuit de elementaire wiskunde, waar de vraag naar de zijnswijze der mathematische objecten, van een cirkel of een driehoek, waarvan we met krijt op een bord een ruwe verstoffelijking tekenen, vanzelf tot de beschouwing van ideale existentie voert. Dat verder Plato's opvattingen over wiskunde en astronomie de historische ontwikkeling van beide vakken in de allerhoogste mate beïnvloed hebben (het heeft twintig eeuwen moeten duren, voordat iemand den moed vond, af te wijken van het Platoonse axioma, dat hemellichamen geen andere dan eenparige cirkelbewegingen kunnen uitvoeren) maakt het des te meer wenselijk, zich met hem bezig te houden. Eerst van Plato's standpunt uit zal de wijsgerige ondergrond van de Euclidische stoicheiosis geheel duidelijk kunnen worden. En het is niet alleen wenselijk, dat α -leerlingen met de grotvergelijking uit de *Politeia* kennis maken, maar ook, dat ze de voor de filosofie der wiskunde zo fundamentele lijnvergelijking uit hetzelfde werk (VI; 509 D — 510 E) leren kennen.

Ik besluit hiermee mijn globaal overzicht over den inhoud van het mij voor den geest zwevende wiskunde-onderwijs op het α -Gymnasium, om nu nog een aantal vragen en tegenwerpingen te bespreken, die mij zowel door anderen als door mijzelf zijn voorgelegd.

1) Dr Modestus van Straaten O.E.S.A., *Prothuron. Gids bij het eerste wijsgerig denken met als achtergrond de Griekse filosofie*. Leiden 1951.

Een eerste groep vragen is deze: waarop is de verwachting gebaseerd, dat de α -leerlingen het voorgestelde onderwijs met vrucht zullen kunnen volgen, dat zij het meer op prijs zullen stellen dan het thans gebruikelijke, dat zij niet te kort zullen komen in mathematische vorming; en in verband hiermee: wanneer het inderdaad zo wenselijk wordt geacht, de wiskunde volgens de voorgestelde methode aan de α 's te doceren, waarom dan niet voorgesteld, het ook aan de β 's te doen? Waarop geantwoord kan worden: ik ben er helemaal niet van overtuigd, dat het te geven onderwijs aan iederen α -leerling besteed zal zijn en dat zij het allemaal zo prettig zullen vinden. Maar men kan hierbij ten eerste de wedervraag stellen, of het thans gebruikelijke wiskunde-onderwijs zoveel nut heeft en zoveel genoegen opwekt.

Ik geloof niet, dat iemand die bewering voor zijn rekening zal willen nemen. De tegenwoordige α -wiskunde is niets anders dan een verzwakte β -wiskunde, gegeven aan leerlingen die er over het algemeen weinig belangstelling voor hebben en die er zich alleen moeite voor geven, omdat ze er examen in zullen moeten doen. Zij is niet in het minst aangepast aan het speciale karakter van de afdelingen vormt een volkomen vreemd element, dat zich alleen daarom altijd heeft kunnen handhaven, omdat de organisatie van ons onderwijs nu eenmaal in hoge mate beheerst wordt door wat met een mooi woord traditie en met een lelijk sleur heet. Het is dan ook helemaal niet te verwonderen dat er al zo vaak, o.m. door mensen van onverdacht wetenschappelijke geesteshouding, op is aangedrongen, het wiskunde-onderwijs op de α -afdeling af te schaffen. Ik heb meer dan eens gelegenheid gehad, met dezulken over het onderwerp van gedachten te wisselen en kreeg dan altijd te horen: wij zagen en zien nog niet het minste nut in een training in het oplossen van algebraïsche en stereometrische vraagstukken, die ons niet in het minst interesseerden en waarvan wij sterk den indruk kregen, dat ze alleen werden opgegeven om ons te oefenen in het toepassen van stellingen die geen ander doel schenen te hebben dan er vraagstukken mee op te lossen. Wij waren best in staat, die vraagstukken te maken, maar we hadden er eenvoudig geen aardigheid in. Ik stelde dan altijd de wedervraag: maar als die wiskunde nu eens op een heel andere manier gedoceerd was, niet als vraagstukken training opgevat, maar meer logisch en cultuurhistorisch georiënteerd, wanneer men haar eens had getoond als typerend element van de Griekse cultuur en als een der invloeden waardoor de Helleense geest tot in het heden doorwerkt, zoudt ge er dan iets op tegen hebben gehad? En dan was het antwoord altijd:

natuurlijk niet, maar men heeft altijd zorgvuldig voor ons verborgen gehouden, dat de wiskunde zo behandeld kan worden; wij hebben er altijd voornamelijk een techniek in gezien, nuttig voor wie haar nodig hebben, maar waardeloos voor wie haar nooit zal toepassen; en we hebben van den culturelen kant van het wiskundig denken, van de cultuurhistorische betekenis der wiskunde, nooit iets vermoed.

Al degenen met wie ik er ooit in dezen zin over gesproken heb, waren ongetwijfeld in hun schooltijd goede, wellicht zelfs uitmuntende leerlingen geweest. En voor dezen durf ik dan ook de vraag: Kan een α -leerling het voorgestelde onderwijs met vrucht volgen, zal hij het op prijs stellen, zal hij er iets van waarde uit meenemen? volmondig bevestigend beantwoorden. En de zwakkeren? 'Ja, wat ik straks het Nuttig Effect van het onderwijs noemde, loopt nu eenmaal voor verschillende leerlingen enorm uiteen en er zullen er altijd wel bij zijn, waarvoor het een bedroevend lage waarde heeft. Maar opnieuw: zou voor hen dat effect bij de thans gebruikelijke methode groter zijn en zullen ook zij er niet in ieder geval op vooruitgaan, wanneer zij van den druk van het vraagstukken maken bevrijd zullen worden? Overigens moet men ook bij onderwijsbeschouwingen oppassen, niet altijd naar beneden te nivelleren. De goede leerlingen hebben ook rechten.

En nu: waarom niet aan de β 's? Dat zou natuurlijk ook heel wenselijk zijn. Want U zult al lang begrepen hebben, dat toen ik in mijn these zei, dat de bedoelde verandering van methode kan plaats hebben zonder dat het onderwijs aan wiskundig vormende waarde inboet, dat pure hypocrisie was. Ik bedoelde eigenlijk, dat die waarde er enorm op vooruit zou gaan, maar nu ik dat gezegd heb wordt het nog noodzakelijker, te motiveren, waarom mijn plan zich tot de α 's beperkt. Het antwoord is echter uiterst eenvoudig: om geen andere dan de nuchter practische reden, dat de β 's voor hun verdere studie een mate van mathematische techniek nodig hebben die slechts door heel veel oefening te verwerven is en dat er dan geen tijd overblijft, ook nog iets te doen aan dien anderen kant van het vak, die op de α -afdeling wel verzorgd kan worden.

Een tweede groep vragen waarop ik bij voorbaat wil antwoorden, betreft de docenten die het voorgestelde onderwijs zullen moeten geven. Zal iedere wiskundeleraar er voor voelen en er toe in staat zijn? Het antwoord is: Natuurlijk niet; het zou een wonder zijn, als het anders was. Bij de universitaire opleiding tot leraar in wiskunde — zo blijft men met een verwonderlijke hardnekkigheid een studie noemen, waarin men de ogen vastberaden gesloten houdt voor de mogelijk-

heid, dat er een leraarschap op zou kunnen volgen — wordt de historische en wijsgerige vorming van den student in de meeste gevallen nog verwaarloosd op een wijze die ten hemel schreit. Hoe zou men dan kunnen verwachten, dat iedere wiskunde-docent in staat zal zijn datgene te presteren wat het ontworpen plan op historisch en wijsgerig gebied van hem eist?

Hij kan dat alleen, indien en voorzover hij den culturelen achterstand waarmee de universiteit hem heeft laten gaan, op eigen initiatief en uit eigen kracht heeft aangevuld. Daarom zal de voorgestelde methode ook nooit algemeen imperatief voorgeschreven kunnen worden. Wat beoogd wordt is alleen, de docenten aan gymnasia die deze methode kunnen en willen toepassen, de gelegenheid te geven, dit te doen, door hun den waarborg te verschaffen dat ze een eindexamen zullen kunnen afnemen, dat bij het gegeven onderwijs aansluit.

Er zullen ongetwijfeld voorlopig slechts weinige gymnasia zijn, waar men met de voorgestelde methode een proef zal willen nemen. Dat is mij zeer welkom. Niets is funester voor een nieuwe methode dan noodgedwongen en zonder bezieling te worden toegepast. Het is namelijk niet zo gemakkelijk, in het onderwijs een nieuwen weg in te slaan; het is op de α -afdeling ongetwijfeld gemakkelijker, den ouden beproefden leergang te blijven volgen en zich over haar bestaansrecht maar geen zorgen te maken; wie volgens de nieuwe methode te werk wil gaan, komt voor grote practische moeilijkheden te staan, b.v. al door het ontbreken van een leerboek; en hij moet sterk overtuigd zijn van het nut van wat hij gaat doen om aan al die moeilijkheden het hoofd te kunnen bieden.

Het is hier de plaats, iets over het eindexamen te zeggen. Men heeft aanvankelijk wel eens gemeend, dat de voorgestelde vernieuwing door de wet onmogelijk werd gemaakt, omdat de leerling niet langer in staat zou zijn, aan de wettelijke eisen voor het eindexamen te voldoen. Dat is echter een onjuiste mening. De wet zegt, dat er examen in wiskunde wordt afgenomen, maar laat iedere precisering van den term wiskunde achterwege. Welnu: Griekse wiskunde is ook wiskunde. Griekse physica is in den actuelen zin van het woord geen physica; zij is physica geweest. Griekse wiskunde heeft echter actuele mathematische waarde. De wijze waarop Archimedes in zijn werk *Over drijvende lichamen* de naar hem genoemde wet over de opwaartse kracht die een in een vloeistof gedompeld lichaam ondervindt, bewijst, zou men onmogelijk in een hedendaags leerboek der natuurkunde kunnen opnemen; deze redenering overtuigt ons niet meer; maar de manier waarop hij de opper-

vlakke en den inhoud van een bol afleidt, is nog even bewijskrachtig als in de derde eeuw voor Chr.

Natuurlijk moet echter een wiskunde-docent die volgens de voorgestelde methode te werk wil gaan, de zekerheid hebben, dat hij een gecommiteerde zal krijgen, die in staat is, het resultaat van het gegeven onderwijs te beoordelen en die ook sympathie voor de nieuwe opvatting heeft. De Tweede Afdeling van den Onderwijsraad heeft daarom in een rapport aan den Minister, waarin zij de in het bovenstaande geschetste methode aanbeveelt, voorgesteld, bij de benoeming van gecommiteerden hiermede rekening te houden. Dat kan natuurlijk aanvankelijk wel eens tot praktische moeilijkheden leiden, doordat niet iedere gecommiteerde de vereiste kennis en sympathie bezit, en het hem, zo hij de tweede wel en de eerste niet heeft, allicht moeite zal kosten, zich voldoende in de behandelde leerstof in te werken om een daarover afgenomen examen te beoordelen. Dit blijft echter een secundair bezwaar. In laatste instantie moet de gecommiteerde zich bij het gegeven onderwijs aanpassen en niet andersom.

Ik moet nu nog de mogelijkheid onder ogen zien, dat een wiskunde-docent die de methode wil toepassen, niet klassiek gevormd is. Dat is natuurlijk een bezwaar; hij zal zich met vertalingen moeten redden en daarmee gaat een deel van het te verwachten nut, nl. de verruimende werking die van het lezen van Griekse mathematische auteurs op de kennis van het Grieks kan uitgaan, verloren. De wiskundige kant behoeft er echter niet onder te lijden. Het geval zal practisch echter wel altijd tot de uitzonderingen blijven behoren.

Ik ben er mij van bewust, dat er over dezen kant van de zaak ook heel andere opvattingen bestaan. Zo heeft Dr Bolkestein in een artikel in *De Nieuwe Stem*¹⁾, waarin hij het rapport van den Onderwijsraad met veel waardering bespreekt, het gebruik van vertalingen in dit concrete geval en ook in het algemeen als iets normaals, ja, aanbevelenswaardigs voorgesteld. Ik zou mij met alle respect voor den auteur wel zeer beslist van deze opvatting en in het algemeen van het z.g. integraal-klassieke onderwijs, dat voornamelijk cultuurhistorisch van aard zou zijn, willen distantiëren. Men moet leerlingen van het V.H.O., toekomstige beoefenaren van een wetenschap dus, opvoeden in wantrouwen jegens vertalingen en hen ervan doordringen, dat de wetenschappelijke geesteshouding met zich meebrengt, dat men, zolang het enigszins mogelijk is, altijd terug-

1) Dr G. Bolkestein, *Integraal klassiek onderwijs*. *De Nieuwe Stem* VI (1951) 513-517

gaat tot de oorspronkelijke bron en daarbij voor geen taalkundige moeilijkheden terugschrikt.

Er is ten slotte nog een derde vraag die beantwoording vereist. Wanneer men eenmaal het beginsel heeft aanvaard, dat de α -wiskunde iets principieels anders mag, ja moet zijn dan die voor de β -afdeling, is men dan ook verplicht tot de consequentie, dat zij dus Griekse wiskunde moet zijn? Zijn er niet tal van andere wiskundige onderwerpen aan te wijzen, die zich voor het nagestreefde doel lenen? Het antwoord hierop kan luiden: misschien wel, maar laat de voorstanders van een anders gerichte vernieuwing dan beginnen met een schets van een leerplan te geven en aan te tonen: 1e dat het evengoed aan het in de lagere klassen bereikte mathematisch ontwikkelingspeil is aangepast als een behandeling van de Griekse wiskunde in den voorgestelden zin; 2e dat het gekozen onderwerp voldoende inhoud bezit om gedurende twee jaar althans een deel van den beschikbaren tijd te vullen, zonder dat de mathematische moeilijkheden te groot worden; 3e dat het in staat is, de zelfstandige activiteit van den leerling evengoed te stimuleren als de lectuur van Griekse wiskundige auteurs; 4e dat het even harmonisch kan worden ingepast in den algemenen geest der afdeling als dit met de beoefening van de Griekse wiskunde het geval is.

Ik sta natuurlijk volkomen open voor iedere suggestie die in deze gegeven kan worden, maar ik voel mij een weinig verontrust door de vrees, dat men den kant van behandeling van capita selecta uit wil. Daarin schijnt namelijk tegenwoordig veel aantrekkelijks te schuilen. Men voelt zich — terecht — enigszins beangst door de fatale culturele gevolgen van een reeds te ver doorgevoerde differentiatie in het V.H. en M.O. en beraamt nu een antidotum daartegen in den vorm van, als ik goed zie, een soort lezingen over die gebieden van het weten die men eerst uit het betrokken schooltype gebannen heeft, omdat zij voor de latere studie van den leerling niet nodig heetten te zijn. Zo kan men in de Nota van Minister Rutten capita selecta over antieke cultuur voor de H.B.S. voorgesteld vinden en over moderne natuurwetenschap voor het Gymnasium A. Dit streven nu geeft aanleiding tot grote bezorgdheid, omdat het zo volkomen in strijd is met den geest van rustig en geleidelijk van onder af opbouwen die een school voor V.H.O. behoort te kenmerken. Er komt een gans andere opvatting van onderwijs in tot uiting, die men als de zaaitheorie van de bouwtheorie kan onderscheiden en waarvoor ik bitter weinig sympathie gevoel.

Ik zal hierop niet verder ingaan, maar ik heb niet willen verzuimen te doen uitkomen, dat het plan dat door den Onderwijsraad is voor-

gesteld, een diametraal tegenovergestelde strekking heeft als het integraal klassieke onderwijs van Dr Bolkestein en de capita selecta van Minister Rutten.

En ten slotte: wanneer wiskundigen op het α -Gymnasium andere onderwerpen willen gaan behandelen dan de tot dusver gebruikelijke, dan kunnen de plannen daartoe meer of minder interessant en belangrijk zijn, maar dan vormen zij in ieder geval een aangelegenheid, die een groep classici als zodanig niet regardeert. Bij het plan, op de α -afdeling Griekse wiskunde te onderwijzen, althans deze als grondslag voor het onderwijs te kiezen, zijn zij echter ten nauwste betrokken en daarom heb ik mij tot de bespreking hiervan beperkt. En het zijn ook speciaal hun reacties op dit bepaalde plan die ik gaarne zal vernemen.

STRENGHEID EN INZICHT

door

DR. P. G. J. VREDENDUIN¹⁾

De leerling dient een helder inzicht te krijgen in de mathematische methode en moet de betekenis van de eis van strengheid dus ten volle leren begrijpen. Een te ver doorgevoerde strenge behandeling kan echter nadelig werken op het inzicht. De leerling dreigt daarbij door de bomen het bos niet meer te zien. Zo is het, ter voorkoming van waandenkbeelden omtrent begrippen als „oneindig” en asymptoot, noodzakelijk een serie strenge limietdefinities te geven. Het consequent hanteren van deze definities, b.v. bij het bewijs van stellingen over de limiet van een som, product of quotient, lijkt mij te veel gevegd. Wel moet men steeds op de definities kunnen teruggrijpen, als misverstand dreigt, b.v. bij het bepalen van de limiet van een constante of bij het duidelijk maken, dat een grafiek de horizontale asymptoot gerust mag snijden. Een ander voorbeeld vormen de machten met irrationale exponent. Een definitie hiervan is wel gewenst, maar daarmee zijn wij dan ook aan de grenzen van de didactische mogelijkheden.

Als een onderwerp van vitaal belang is, doch een strenge behandeling niet mogelijk is, is er geen enkel bezwaar het in het leerplan op te nemen. De behandelingswijze moet dan echter zodanig zijn, dat het gebrek aan strengheid zich niet wrekt in een gebrek aan inzicht. Voorbeeld: de differentiaal- en integraalrekening.

Als echter een onderwerp in de samenhang van het geheel zeer wel gemist kan worden en een strenge behandeling moeilijkheden met zich mee brengt, verdient het sterk aanbeveling het van het leerplan af te voeren. *Een dergelijke uitwas van het programma vormt het hoofdstuk over de reststelling (in zijn algemene vorm).*²⁾

Allereerst is de redactie van de stelling meestal niet zuiver. „Als een gehele rationale functie $f(x)$ gedeeld wordt door $x - a$, dan is de rest . . .” Wie geeft ons het recht te spreken over de rest? Bij het

¹⁾ Inhoud van een lezing gehouden voor het didactisch colloquium van het Mathematisch Centrum op 5 Maart 1952.

²⁾ Zie ook: Prof. Dr. H. Freudenthal, *De dwarskijsker*, Euclides 26 (1950—51), 245—251.

deelproces zoeken we een gehele rationale functie $q(x)$ en een getal r met de eigenschap, dat

$$f(x) \equiv (x - a) q(x) + r.$$

Dat r door deze eis eenduidig bepaald is, zal toch bewezen moeten worden, voordat over *de* rest gesproken wordt. Eerst nadat de reststelling bewezen is, is het eenduidig bepaald zijn van r evident.

Een geliefkoosd soort vraagstukken is verder: voor welke waarden van a , b en c is $f(x, y) \equiv ax^2 + xy + y^2 + bx + c$ deelbaar door $x - y - 1$? De oplossing luidt meestal: substitueer $x = y + 1$ in de gegeven functie $f(x, y)$. Er ontstaat dan een gehele rationale functie van y van de graad 2. Deze moet identiek gelijk aan 0 zijn. Stel de coëfficiënten 0 en los a , b en c op.

Inderdaad, als $f(x, y)$ deelbaar is door $x - y - 1$, dan volgt daaruit, dat $f(x, a)$ voor elke waarde van a deelbaar zal zijn door $x - a - 1$. En dus moet $f(a + 1, a)$ voor elke a gelijk aan 0 zijn. In deze richting is de redenering dus juist. Maar een algebravraagstuk oplossen vereist het vinden van een resultaat, dat gelijkwaardig met het gegeven is. De redenering moet dus ook omkeerbaar zijn. De juistheid van de omkering is echter geenszins duidelijk. Als $f(x, a)$ voor elke a deelbaar is door $x - a - 1$, dan zal het quotient een gehele rationale functie van x zijn met coëfficiënten, die van a afhangen. Hoe deze van a zullen afhangen, is niet zonder meer duidelijk. Geenszins evident is dus, dat de coëfficiënten gehele rationale functies van a zullen zijn. En dit resultaat zouden we moeten bereiken, wil aangetoond zijn, dat $f(x, y)$ deelbaar is door $x - y - 1$.

Een analoog bezwaar doet zich voor bij het bewijs van de formules voor de merkwaardige quotienten. Hier vragen we b.v., of $x^n - y^n$ deelbaar is door $x - y$. Substitutie van y voor x levert inderdaad een resultaat, dat identiek gelijk aan 0 is. Hieruit volgt dus alleen, dat het nog niet uitgesloten is, dat $x^n - y^n$ door $x - y$ deelbaar is. We weten nl., dat de deling een quotient geeft, dat geheel rationaal in x is. Het quotient zou dus ook nog wel geheel rationaal in y kunnen zijn. Aangemoedigd door dit succes gaan wij de deling uitvoeren en vinden, dat inderdaad een quotient ontstaat, dat geheel rationaal in x en y is. En hiermee is het bewijs van de deelbaarheid geleverd. Het vooronderzoek door middel van de reststelling is daarbij volmaakt overbodig. (Wel kan het bewijs van de deelbaarheid op juiste wijze door middel van de somformule van de meetkundige reeks gegeven worden.)

Om misverstand te voorkomen zij opgemerkt, dat de volgende

stelling onmisbaar is: als $f(x)$ geheel rationaal in x is en $f(a) = 0$, dan is $f(x)$ deelbaar door $x - a$. Het gaat hier niet om het verkrijgen van een quotient, dat geheel rationaal in x en a is, doch slechts om het verkrijgen van een quotient, dat geheel rationaal in x is. Dit is de reden, dat de bovengenoemde bezwaren hier niet optreden.

In het volgende wil ik aan de hand van twee begrippen laten zien, van welk groot belang het kan zijn de leerlingen inzicht bij te brengen. Deze twee begrippen zijn elimineren en gelijkwaardigheid.

Het elimineren. Wat is elimineren volgens de wetenschappelijke definitie? Het eliminatieresultaat van y uit

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x, y) = 0 \\ (2) \quad & g(x, y) = 0 \end{aligned} \quad \text{is } h(x) = 0 \quad (3)$$

betekent, dat (3) de noodzakelijke en voldoende voorwaarde er voor is, dat (1) en (2) een gemeenschappelijke oplossing hebben. Korter geschreven:

$$(3) \Leftrightarrow \text{er is een } y, \text{ waarvoor } (1) \text{ en } (2).$$

Een prachtige definitie, maar stellig volmaakt onbruikbaar.

Op welke wijze maakt de leerling kennis met het elimineren? Laten we als voorbeeld nemen het oplossen van het stel vergelijkingen

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 5 & (1) \\ 2x - y &= 0. & (2) \end{aligned}$$

De oplossing luidt

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 = 5 \\ (2) \quad & 2x - y = 0 \rightarrow y = 2x \end{aligned} \right\} \rightarrow x^2 + (2x)^2 = 5 \quad (3) \rightarrow x = \pm 1,$$

waarna substitutie in $y = 2x$ levert $y = \pm 2$.

Van het grootste belang is, dat ingezien wordt, dat het verkregen resultaat gelijkwaardig is met het gegeven stel vergelijkingen. Inderdaad is direct in te zien, dat (1) en (2) gelijkwaardig is met (1) en (3). Hierop berust de oplossingsmethode. Als dit ingezien is, zal men de fout kunnen vermijden, dat $x = \pm 1$ gesubstitueerd wordt in (1), waardoor vier stellen wortels gevonden worden.

Wat wil het nu zeggen, dat (3) het eliminatieresultaat is van y uit (1) en (2)? Dit betekent, dat y in (3) niet meer voorkomt en dat (1) en (3) gelijkwaardig is met (1) en (2).

We krijgen zo de volgende voor didactisch gebruik passende „schooldefinitie” van elimineren: het eliminatieresultaat van y uit

$$\begin{aligned} (1) \quad & f(x, y) = 0 \\ (2) \quad & g(x, y) = 0 \end{aligned} \quad \text{is } h(x) = 0 \quad (3)$$

betekent, dat (1) en (2) gelijkwaardig is met (1) en (3) of met (2) en (3).

Om een juist inzicht te krijgen in de methode van het elimineren, dienen eliminaties van deze soort de eerste te zijn, waarmee de leerling in contact komt. Als bijzonder geval hiervan kan daarna behandeld worden het oplossen van twee vergelijkingen van de eerste graad met twee onbekenden, waarbij het elimineren door optellen of aftrekken geschiedt. M.i. is het voor de leerling verwarrend hiermee te beginnen. Men ziet dan vaak, dat later fouten gemaakt worden, die hun oorsprong vinden in een verkeerd inzicht in het elimineren.

Zijn de wetenschappelijke definitie en de schooldefinitie van elimineren gelijkwaardig? Geenszins. We zullen dit aan twee voorbeelden laten zien.

1. Eliminatie volgens de schooldefinitie.

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad x^2 + xy + 1 = 0 \\ (2) \quad xy = x - 1 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 + x = 0 \quad (3).$$

Direct duidelijk is, dat (1) en (2) gelijkwaardig is met (2) en (3). Echter is het niet juist, dat (3) de noodzakelijke en voldoende voorwaarde is, waaronder (1) en (2) een gemeenschappelijk stel wortels hebben. Aan (3) voldoet namelijk $x = 0$. Substitutie hiervan in (2) geeft een valse vergelijking.

2. Eliminatie volgens de wetenschappelijke definitie.

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad y^2 = x \\ (2) \quad y^2 - 3y + 2x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 = x \quad (3).$$

Als aan (1) en (2) voldaan is, is ook aan (3) voldaan. Omgekeerd voldoet $x = 0$ en $y = 0$ aan beide vergelijkingen en ook $x = 1$ en $y = 1$. Aan de wetenschappelijke definitie is dus voldaan.

De leerling kan dit resultaat gemakkelijk verkrijgen. Hij wenst het kwadratische deel te verwijderen en substitueert dus x voor y^2 in (2). Zo vindt hij $x - 3y + 2x = 0$ en dus $y = x$. Dit resultaat substitueert hij in (1). Inderdaad wordt zo (3) verkregen. De leerling heeft gegoocheld zonder iets van zijn doen en laten te begrijpen. Hij is zich er niet van bewust, in hoe verre verkregen stellingen vergelijkingen nog met het oorspronkelijk stel gelijkwaardig zijn. Dit zal zich dra wreken. Hij vindt uit (3) $x = 0$ of $x = 1$. Nu moet y nog gevonden worden. Indien hij nu het voor de hand liggende geluk grijpt en $x = 0$ substitueert in (1), vindt hij inderdaad $y = 0$. Maar indien hij pech heeft en in (2) substitueert, vindt hij $y = 0$ of $y = 3$. En de laatste waarde voor y is een gevolg van

fraude. Met $x = 1$ kan hij alleen maar pech hebben. Substitutie in (1) geeft $y = \pm 1$, substitutie in (2) $y = 1$ of $y = 2$. Zijn resultaat blijkt dus fout te zijn. Hij heeft hieruit toch iets geleerd, namelijk, dat je om onverklaarbare redenen altijd weer moet oppassen. Als men hem vraagt, of de mogelijkheid bestaat, dat hij niet alleen verkeerde stellen wortels wel gevonden heeft, maar ook goede stellen niet, zal hij het antwoord schuldig blijven.

De moeilijkheden vinden hun oorsprong in de omstandigheid, dat de eliminatie niet conform de schooldefinitie heeft plaats gevonden. Er bestaat geen gelijkwaardigheid tussen (1) en (2) enerzijds en (1) en (3) of (2) en (3) anderzijds. De leerling, die deze gelijkwaardigheid verwacht, gaat fouten maken. Eliminatie van y volgens de schooldefinitie zou hier alle moeilijkheden voorkomen en het voordeel hebben, dat men in elk stadium van de oplossing nog kan begrijpen, wat men gedaan heeft.

3. Een geval, waarin de schooldefinitie tot moeilijkheden aanleiding geeft.

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad y - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{y} \\ (2) \quad z - x^3 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow z = (\pm \sqrt{y})^3 \rightarrow z^2 = y^3.$$

Als men het nagaat, blijkt $z^2 = y^3$ het resultaat te zijn van eliminatie van x uit (1) en (2) volgens de wetenschappelijke definitie. Combinatie van $z^2 = y^3$ met (1) of met (2) geeft geen stel, dat met (1) en (2) gelijkwaardig is. Tegen de verwachting in is $z^2 = y^3$ dus niet het eliminatieresultaat van x uit (1) en (2) volgens de schooldefinitie. Waar schuilt de fout? In het kwadrateren, dat aan het slot geschied is. Met (1) en (2) is namelijk gelijkwaardig:

$$x = +\sqrt{y} \text{ en } z = (+\sqrt{y})^3 \text{ of } x = -\sqrt{y} \text{ en } z = (-\sqrt{y})^3.$$

Op deze wijze is eliminatie volgens de schooldefinitie verantwoord. Bij het laatste kwadrateren, dat toch wel zeer verleidelijk is, wordt uit het oog verloren, dat de tekens op een bepaalde manier gecombineerd moeten worden. Ik zou hieruit de conclusie willen trekken, dat men verstandig doet een dergelijk vraagstuk niet op te geven.

4. In de analytische meetkunde geeft alleen de wetenschappelijke definitie het juiste eliminatieresultaat. Willen we de meetkundige plaats hebben van de snijpunten van de krommen

$$(1) \quad f(x, y, k) = 0$$

$$(2) \quad g(x, y, k) = 0,$$

dan elimineren we k en vinden

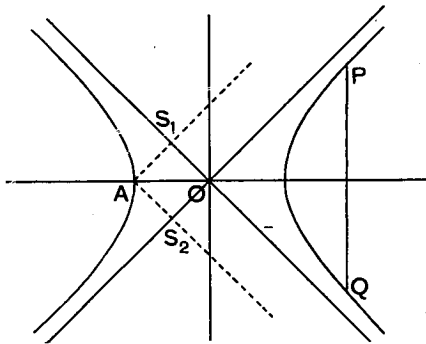
$$(3) \quad h(x, y) = 0.$$

Wil (3) de gevraagde meetkundige plaats zijn, dan moet (3) de noodzakelijke en voldoende voorwaarde zijn, waaronder (1) en (2) een gemeenschappelijke oplossing hebben.

Wat is nu het gevolg van het toepassen van de schooldefinitie? We lossen dan b.v. k op uit (1) en substitueren in (2). Hierdoor vinden we

$$(3') \quad h'(x, y) = 0.$$

Nu zijn (1) en (2) gelijkwaardig met (1) en (3'). Onderstel, dat (x_1, y_1) aan (3') voldoet. We substitueren dan x_1 voor x en y_1 voor y in (1). Indien we dan een waarde voor k vinden, is (x_1, y_1) het snijpunt van (1) en (2) voor die waarde van k . Maar het is ook mogelijk, dat na de substitutie geen waarde voor k gevonden wordt, doordat (1) overgaat in een valse vergelijking. In dat geval behoort het punt (x_1, y_1) dus niet tot de meetkundige plaats. Het is dus mogelijk, dat ten gevolge van het toepassen van de schooldefinitie punten tot de meetkundige plaats gerekend worden, die er niet toe behoren.



Aan de hand van een concreet voorbeeld zullen we zien, dat dit niet ernstig is vanuit didactisch gezichtspunt. Gegeven is een hyperbool, b.v. $x^2 - y^2 = a^2$. Een rechte loodrecht op de X -as snijdt de hyperbool in P en Q . De hyperbool snijdt de negatieve X -as in het punt A . Gevraagd wordt de meetkundige plaats van het snijpunt van de rechten AP en OQ .

Welke punten worden nu ten gevolge van het toepassen van de schooldefinitie te veel gevonden? Trek door A twee rechten evenwijdig aan de asymptoten. Deze snijden de andere asymptoot in S_1 resp. S_2 . Deze twee punten zouden we eigenlijk moeten uitzon-

deren. We zouden ons onderwijs echter ongaarne belasten met het opsporen van de punten, die op deze wijze te veel gevonden worden. Integendeel, het is algemeen gebruik deze punten ook tot de meetkundige plaats te rekenen. Te grote strengheid zou hier veroorzaken, dat de leerlingen de grote lijn uit het oog verliezen.

5. Uit het vorige voorbeeld blijkt duidelijk, in welk opzicht de schooldefinitie te kort schiet. Het is mogelijk, dat de schooldefinitie een resultaat levert, waaraan meer waarden voldoen dan de wetenschappelijke definitie zou leveren. Dit was het geval in het voorbeeld 4. Ernstig is dit niet. In de analytische meetkunde zou het euvel voorkomen kunnen worden door homogene coördinaten te gebruiken (hetgeen ik echter vanuit didactisch gezichtspunt niet zou willen propageren).

Bij het oplossen van vergelijkingen is het niet storend, dat aan het eliminatieresultaat te veel waarden kunnen voldoen. Dit wordt duidelijk aan de hand van voorbeeld 1. De waarden, die aan het eliminatieresultaat (3) te veel voldoen (i.c. $x = 0$), worden namelijk automatisch uitgeschild, zodra ze in (1) of (2) gesubstitueerd worden. Ze blijken dan een valse vergelijking op te leveren. De toepassing van de schooldefinitie is hier dus verantwoord, terwijl toepassing van de wetenschappelijke definitie slechtsodeloze complicaties met zich mee zou brengen.

Gelijkwaardigheid. In het voorgaande is bij het bespreken van het elimineren reeds naar voren gekomen, dat het van belang is op elk punt van de redenering de gelijkwaardigheid van het gegeven met het bereikte resultaat in het oog te houden. Aan de hand van enkele voorbeelden willen we nader de gelijkwaardigheid bespreken.

1. Voor welke waarden van a is

$$x^2 + 1 \equiv ax + 2?$$

Een vaak toegepaste, maar zeer gevaarlijke methode is de volgende. Omdat beide leden voor elke waarde van x aan elkaar gelijk moeten zijn, moeten ze gelijk zijn voor $x = 1$. Substitutie levert dan $a = 0$. Klaarblijkelijk is dit resultaat fout. De redenering is niet omkeerbaar. Alleen, als van te voren bekend is, dat er een a bestaat, waarvoor de identiteit geldt, is deze methode geoorloofd.

2. Bewijs, dat uit $a > 5$ volgt

$${}^4\log (a - 5) < \frac{{}^4\log (a - 3)^2 + {}^2\log (a + 1)}{2}$$

(Staatsexamen 1939, I).

Veelal vindt men een oplossing van de volgende soort.

$${}^4\log (a-5) < \frac{{}^4\log (a-3)^2 + {}^4\log (a+1)^2}{2} \quad (1)$$

$${}^4\log (a-5) < \frac{2 {}^4\log (a-3) + 2 {}^4\log (a+1)}{2} \quad (2)$$

$${}^4\log (a-5) < {}^4\log (a-3) + {}^4\log (a+1) \quad (3)$$

$${}^4\log (a-5) < {}^4\log (a-3) (a+1) \quad (4)$$

$$a-5 < (a-3) (a+1) \quad (5)$$

waarna gemakkelijk ingezien wordt, dat dit uit het gegeven volgt.

Dit is gerekend zonder enige zelfkritiek. In de eerste plaats merken we op, dat we bij het volgen van de redenering er op moeten letten, dat de richting van de conclusies juist tegengesteld is aan de richting, waarin de berekening verloopt. We moeten dus nagaan, of inderdaad (4) volgt uit (5), enz. Bij de overgang van (5) naar (4) wordt van beide zijden de logarithme genomen. Dit hoeft niet geoorloofd te zijn. Het is hier wel geoorloofd, omdat we weten, dat $a-5 > 0$ en omdat het grondtal groter dan 1 is.

Bij de overgang van (4) naar (3) is de logarithme van een product vervangen door de som van de logarithmen van de factoren. Ook dit is niet steeds geoorloofd. Het is niet geoorloofd, als de factoren beide negatief zijn. Wegens $a > 5$ is dit hier echter niet het geval.

De overgang van (2) naar (1) is verantwoord. Als (2) waar is, dan zijn $a-3$ en $a+1$ beide positief. En er is dus geen enkel bezwaar tegen uit (2) te concluderen tot (1). (De omgekeerde conclusie zou echter wel reden tot kritiek geven.)

Ten slotte is de overgang van (1) naar de te bewijzen ongelijkheid weer precair. We mogen ${}^4\log (a+1)^2$ alleen door $2\log (a+1)$ vervangen, als we weten, dat $a+1 > 0$. En dat weten we gelukkig.

Na kritiek blijkt de redenering dus toch houdbaar te zijn. Het is zeer wel mogelijk de leerlingen er aan te gewennen zich bij deze en dergelijke overgangen er rekenschap van te geven, of zij toelaatbare herleidingen uitvoeren. Het is echter te veel gevegd ze geheel zelfstandig op een schriftelijk eindexamen aan een dergelijke krachtproef te onderwerpen. Het vraagstuk is dus voor een schriftelijk examen ongeschikt, maar kan op een mondeling examen goede diensten bewijzen.

Uit eigen ervaring is mij gebleken, dat redeneringen van deze soort voor leerlingen niet te moeilijk zijn en zelfs, dat zij er stellig belangstelling voor hebben.

3. Maakt men nu ooit wel eens fouten, als men de kritiek achterwege laat? Als men zijn vraagstukken geschikt kiest uiteraard niet. Probeert U echter eens het volgende stel vergelijkingen op te lossen:

$$\begin{aligned}x^y &= 6 \\ 2y + {}^6\log x^2 &= 5.\end{aligned}$$

Er komen twee stel wortels uit. Een kleine onvoorzichtigheid en één stel wordt verduisterd.

De vergelijking

$$x^{3x+1} = x^x - 5$$

lost de leerling, die enige tijd geen exponentiële vergelijkingen gezien heeft, op door van beide zijden de logaritmie te nemen. Hij verduistert daarbij de wortel $x = -1$.

Van de vergelijking $3^x = -1$ zal hij zeggen, dat de vergelijking vals is, omdat er na het nemen van de logaritmie $\log -1$ komt. Hij krijgt zo op wonderbaarlijke wijze het juiste resultaat. Hij had echter verstandiger gedaan op te merken, dat de wortels van deze vergelijking, gezien het negatieve rechter lid, alle verduisterd worden, als van beide zijden de logaritmie genomen wordt. Dat hij dus na het nemen van de logaritmie geen wortels vindt, spreekt vanzelf en zegt niets aangaande de oorspronkelijke vergelijking.

Veelvoudig zijn de fouten, die gemaakt worden door het klakkeloos vervangen van ${}^y\log x^2$ door $2 {}^y\log x$, of omgekeerd, b.v. bij het oplossen van een ongelijkheid als ${}^2\log x^2 > 1$.

4. Gevraagd wordt te onderzoeken de aard van de kromme

$$6x^2 + 5xy - 4y^2 + 3x + 4y = 0.$$

Het onderzoek levert, dat de kromme een lijnenpaar is. De richtingscoëfficiënten van de rechten zijn $-\frac{3}{4}$ en 2. We kunnen de kromme dus schrijven in de vorm

$$(2x - y + p)(3x + 4y + q) = 0.$$

Door gelijkstelling van de coëfficiënten van x en van de bekende termen vinden we

$$\begin{aligned}3p + 2q &= 3 \\ pq &= 0\end{aligned}$$

en dus $p = 0$, $q = \frac{3}{2}$ of $p = 1$, $q = 0$. Een kennelijk verkeerd resultaat, want de kromme kan niet uit twee verschillende lijnenparen bestaan.

Wat is er gebeurd? De gelijkwaardigheid is uit het oog verloren. De conclusie is in teruggaande richting niet mogelijk, omdat ver-

zuimd is ook de coëfficiënten van y gelijk te stellen. Doet men dit, dan vindt men als derde eis

$$4p - q = 4.$$

Alleen $p = 1$, $q = 0$ blijkt nu te voldoen.

5. Onderzoek, of in elke driehoek geldt

$$\sin 2\alpha < 2 \sin \beta \cos \alpha + 2 \sin \gamma \cos \alpha. \quad (1)$$

Herleiding levert

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \cos \alpha &< 2 (\sin \beta + \sin \gamma) \cos \alpha \\ a \cos \alpha &< (b + c) \cos \alpha \\ (a - b - c) \cos \alpha &< 0 \\ \cos \alpha &> 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Nu is (2) niet in elke driehoek juist en dus (1) ook niet.

In welke richting zijn nu de conclusies getrokken, van (1) naar (2) of omgekeerd? Van te voren weten we niet, of we zullen vinden, dat (1) wel altijd juist of niet altijd juist is. Het kan dus zijn, dat we een resultaat (2) vinden, dat steeds juist is. Dan concluderen we daaruit, dat (1) ook steeds juist is. In dat geval is de conclusierichting van (2) naar (1). Maar het kan ook zijn, dat we vinden, dat (2) niet altijd juist is. Dan concluderen we uit het niet juist zijn van (2), dat ook (1) niet juist is. Dit komt op hetzelfde neer als uit de juistheid van (1) te concluderen tot de juistheid van (2). In dat geval is de conclusierichting dus van (1) naar (2). We moeten er dus van te voren op bedacht zijn, dat we de overgangen zo kiezen, dat elk volgend resultaat gelijkwaardig is met het voorgaande.

Conclusie. Zowel bij het elimineren als bij het onderzoek naar gelijkwaardigheid is een eerste eis, dat inzicht verkregen wordt. Bij het elimineren zal een strenge behandeling door zijn te grote gecompliceerdheid het inzicht in de weg staan. Met betrekking tot de gelijkwaardigheid is juist strengheid vereist, omdat zonder een rigoureuze behandeling het wezenlijke niet begrepen kan worden en de moeilijkheden te veel incidenteel opgelost moeten worden.

ENIGE MOTIEVEN DIE BIJ DE BEOEFENING DER WISKUNDE OOK EEN ROL SPELEN ¹⁾

door

Dr A. C. ZAAZEN

Thans, voor de zesde keer in een tijdvak van vijf jaren, stelt zich opnieuw vanaf deze plaats een hoogleraar in de wiskunde aan deze Technische Hogeschool aan U voor. Tevens, in overeenstemming met het oude gebruik, vraagt hij enige kwartieren Uw aandacht voor een beschouwing over het vak waarin hij onderwijs geeft. Ik ben mij er van bewust dat zich hierbij een moeilijkheid voordoet; een moeilijkheid, die veroorzaakt wordt door de beperkte mogelijkheden die aan een spreker over wiskunde geboden worden bij een gelegenheid als deze. Het zal mij daarom welhaast onmogelijk zijn U mee te voeren tot ver in de wiskunde zelve, teneinde U aldus even te doen verblijven in één dier gebieden waar nieuwe wiskunde gemaakt wordt. Ik buig mij voor de geschetste moeilijkheid, en zal dus niet van U vragen een wiskundig betoog te volgen. In plaats daarvan wil ik trachten Uw belangstelling op te wekken voor de vraag, welke beweegredenen iemand er toe kunnen brengen zich met de wiskunde bezig te houden, en dat steeds opnieuw en zonder zich af te vragen of de gevonden resultaten wel onmiddellijk aanspraak mogen maken op de naam van *nuttige* kennis. Een analyse toch van enkele van deze beweegredenen zal U evengoed een blik gunnen, zij het vanuit een heel andere richting, op het werkgebied der wiskunde. Bovendien zal dit U een zeker inzicht kunnen geven in de mentaliteit der werkers. Alleen al indien mijn woorden ertoe mogen bijdragen bij verscheidene Uwer een vermeerdering of verdieping van dit inzicht teweeg te brengen, dan zal ik van mening zijn dat in mijn beschouwing een element van nuttigheid niet ontbreekt.

Uit den aard der zaak zullen de bespiegelingen, die nu volgen, van subjectieve aard zijn, en daarom voor tegenspraak vatbaar. Zulks is mij trouwens reeds enige malen in persoonlijke gesprekken wel gebleken. Aan de niet-mathematici onder U bied ik bij voorbaat

¹⁾ Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van gewoon hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de theoretische mechanica aan de Technische Hogeschool te Delft op Woensdag 24 Januari 1951.

mijn verontschuldiging aan, wanneer ik een enkele keer mijn betoog zal illustreren met een voorbeeld, dat niet algemeen bekend is. Ik hoop echter dat de algemene lijn voor een ieder duidelijk zal blijken te zijn.

De Bruijn, in het voetspoor van Huizinga, heeft in zijn Delftse intree-rede [1] de drang naar „onbetwistbare kennis”, onverschillig of deze kennis ons van direct nut kan zijn of niet, genoemd als één der krachtigste beweegredenen, die verantwoordelijk zijn voor de instandhouding en verdere uitbreiding van ons wiskundig cultuurbezit. Hiermee van harte instemmend, zou ik ter nadere precisering nog enige woorden toe willen voegen. Het is de drang naar „onbetwistbare en *tot persoonlijk bezit geworden* kennis”, die voert tot een verdieping van ons inzicht in vele wiskundige problemen. Om U duidelijk te maken wat mijn bedoeling is bij deze toevoeging van de woorden „tot persoonlijk bezit geworden”, voer ik U in gedachten terug naar de tijd, waarin U op de H.B.S. of het Gymnasium hebt geleerd te spelen met, of, zoals sommige mensen het prefereren te zeggen, te gooichelen met goniometrische uitdrukkingen. De opgaven, waarbij gevraagd wordt een gegeven goniometrische vorm te herleiden tot een andere gedaante, zijn in de leerboeken zeer geliefd, zoals U zich misschien nog zult herinneren. Het blijkt nu dat in een schoolklas de meeste leerlingen al zeer tevreden over zichzelf zijn als zij bij een dergelijke opgave na enig gerekken het gewenste resultaat vinden. Vraagt men waarom zij in een bepaald stadium der berekening een bepaalde formule gaan toepassen, dan luidt het antwoord dikwijls: „Och, ik heb het maar eens geprobeerd, en het ging goed.” Verder komt het soms voor dat de leerling bij zijn berekening een bepaalde weg inslaat, vervolgens gedeeltelijk langs diezelfde weg terugkeert, en tenslotte in een geheel andere richting op het doel afstevent. In de beide geschetste gevallen bereikt de leerling het gestelde doel; de ene keer omdat hij geluk gehad heeft, en de andere keer met een onnodige omweg. Men zou dus ietwat schertsend kunnen volhouden dat het resultaat, belichaamd in het opgegeven vraagstuk, op dat moment tot de „onbetwistbare” kennis van de leerling behoort. Men kan echter niet beweren dat dit resultaat nu werkelijk tot zijn persoonlijk bezit geworden is, dat hij ermee vertrouwd geworden is als met de dingen, die hij dagelijks in zijn zakken met zich mee draagt. Gelukkig zijn er in de schoolklas, die wij beschouwen, meestal ook wel enige leerlingen, die anders voor de dag komen. Dikwijls hebben zij hun oplossing van het vraagstuk eveneens gevonden met zoeken en proberen, opschrijven en weer doorstrepen,

maar zij hebben achteraf deze oplossing nog eens kritisch bekeken op de mogelijkheid vereenvoudigingen aan te brengen. In de meeste gevallen gelukt het hun dan wel een berekening te verkrijgen, die recht op het doel afgaat, en waarbij elke stap voorwaarts ook gemotiveerd kan worden. In dit geval nu kan men zeggen, dat een stukje wiskundige kennis tot persoonlijk bezit van de leerling geworden is.

U hebt na dit verhaal over de wiskundige moeilijkheden in een schoolklas nu misschien de indruk gekregen, dat de wiskundeleraars, of de wiskundigen in het algemeen, met ietwat goedge minachting neerzien op dit gestumper, waaraan zelfs de beste leerlingen zich van tijd tot tijd schuldig maken. Ja, U denkt misschien wel dat deze wiskundigen eigenlijk voortdurend in een toestand van geamuseerde verbazing leven omdat zulke eenvoudige problemen zoveel moeilijkheden op kunnen leveren. Toch zou een dergelijke gedachte onjuist zijn. Immers, de vorm, waarin de leerstof van de middelbare school thans voor ons ligt, is het resultaat van een eeuwenlang evolutieproces; en met de problemen, die ons nu zo eenvoudig toeschijnen, hebben de grootste wiskundigen van vroegere tijden geworsteld. Zo gold het in de middeleeuwen nog voor een waar kunststuk een vierkantsvergelijking op te lossen, terwijl een eenvoudige en toch volkomen verantwoorde behandeling van de theorie der complexe getallen, zoals die te vinden is in verscheidene schoolboeken, pas mogelijk geworden is door de verheldering, die ten aanzien van de begrippen „complex getal” en „imaginair getal” omstreeks het jaar 1800 opgetreden is. Het imaginaire getal werd daarbij ontdaan van het mystieke waas waarin het gehuld was, en waaraan thans nog slechts een herinnering aanwezig is in de naam „imaginair getal”, die behouden bleef. De theorie der complexe getallen, en daarmee ook een afgeronde theorie van de vierkantsvergelijking, behoort dus nog niet langer dan anderhalve eeuw tot onze onbetwistbare en tot werkelijk persoonlijk bezit geworden kennis. Nog een andere overweging dringt zich hier aan ons op. Onze opvolgers zullen *ons* beschouwen zoals *wij* dat onze voorgangers doen, en ongetwijfeld zullen zij zich er wel eens over verwonderen, dat de wiskundigen van thans kans gezien hebben sommige eenvoudige wiskundige feiten zo hardnekkig over het hoofd gezien te hebben. U begrijpt de gevolgtrekking reeds: de wiskundige, ja, ik mag wel zeggen de wetenschappelijke werker op vrijwel elk terrein, de werker dus, die zich ten doel stelt nieuw gebied te veroveren, bevindt zich in de situatie van de schooljongen, die tastend en zoekend, schrijvend en weer

doorstrepend, en gehoor gevend aan impulsen uit het onderbewustzijn, voorwaarts gaat. Behalve overeenkomst is er ook wel enig verschil; ik behoef het nauwelijks te zeggen. Alles gebeurt op grotere schaal. Terwijl bijvoorbeeld de oplossing van een moeilijk eind-examenvraagstuk of van een vraagstuk bij de propaedeutische examens aan deze Hogeschool zelden meer dan één pagina van een schoolschrift zal vullen, kan een bewijs van een diep liggende stelling uit de moderne wiskunde gemakkelijk dertig of veertig van dergelijke pagina's in beslag nemen. Terwijl verder een schooljongen met enige trots zal vertellen, dat hij wel eens een hele avond naar een wiskundig bewijs gezocht heeft, komt het bij de hogere wiskunde wel voor dat iemand jaren zoekt alvorens succes te hebben. Nog sterker; de wiskunde stelt aan haar beoefenaars problemen, die al verscheidene eeuwen geleden voor het eerst geformuleerd werden, en waarvoor het nog steeds niet gelukt is een oplossing te vinden. Een aantal van deze problemen behoort tot het gebied der getallentheorie, en dat zijn juist problemen waarvan een grote aantrekkingskracht uitgaat, omdat zij zo gemakkelijk en ook voor de leek begrijpelijk onder woorden te brengen zijn. Daar is bijvoorbeeld het probleem van Goldbach dat uit 1742 dateert, en waarover in de Delftse intree-rede van Visser [2] het een en ander verteld wordt. Bij dit probleem wordt de vraag gesteld of het juist is dat elk even getal, groter dan 2, de som is van twee priemgetallen. Ter verduidelijking zij hier even opgemerkt dat een priemgetal een positief geheel getal is, minstens gelijk aan 2, dat slechts door zichzelf en door 1 deelbaar is. De getallen 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 zijn dus priemgetallen; het getal 15 is geen priemgetal, want $15 = 3 \times 5$. Om terug te komen op het probleem van Goldbach; als U het eens gaat proberen met niet al te grote getallen, dan wil het wel gelukken elk even getal te splitsen in twee priemgetallen. Zo vindt men dat $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 5 + 3$, $10 = 7 + 3$, $20 = 13 + 7$ en ook $20 = 17 + 3$, enz. U begrijpt echter wel dat met het maken van een dergelijke lijst, zelfs al is die lijst lang, ja zelfs al bevat die lijst de splitsing van alle even getallen vanaf 4 tot en met tien millioen, geen bewijs geleverd is voor de juistheid van het vermoeden van Goldbach. Immers, deze lijst geeft geen enkele waarborg dat ook het getal elf millioen de som is van twee priemgetallen. Wel zou het vinden van één enkel even getal (≥ 4), dat beslist niet als som van twee priemgetallen te schrijven is, de strijdvrage beslissen. Daarmee zou namelijk de onjuistheid van het vermoeden van Goldbach bewezen zijn. Een dergelijk getal is echter nooit gevonden, en, al is dan het gestelde probleem

nog niet opgelost, er zijn aanwijzingen dat het vermoeden juist is. Er zijn nog wel meer onopgeloste problemen in de getallentheorie, maar ik wil hier liever nog een ander probleem noemen, dat een eeuw lang onopgelost gebleven is, totdat door twee personen bijna gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar een antwoord op de gestelde vraag gegeven werd. Dit antwoord staat bekend als de priemgetalstelling, en het is interessant op de geschiedenis van deze priemgetalstelling iets nader in te gaan, omdat hier, zij het ook vele malen vergroot, een geval aanwezig is dat te vergelijken is met dat van de schooljongen, die met zijn wiskundig bewijs, hoewel geniaal gevonden, niet geheel tevreden is. Vele beoefenaars van de getallentheorie hebben namelijk jarenlang het idee gehad dat men de zaak nog niet geheel doorgrondde, en dat in het bewijs van de priemgetalstelling een wending zat, die daaruit misschien wel te verwijderen zou zijn. De meningen over de vraag, of een poging in deze richting wel of niet met succes bekroond zou kunnen worden, waren verdeeld, en er is een halve eeuw na het vinden van het eerste bewijs voorbijgegaan alvorens het, nu enkele jaren geleden, gelukt is een nieuw en principieel verschillend bewijs te maken. Om U nu duidelijk te maken, waarom deze nieuwe bewijsmethode er aanspraak op mag maken het inzicht in de theorie der priemgetallen verdiept te hebben, moet ik wel even in bijzonderheden treden. Laat mij U eerst het volgende voorbeeld noemen: Als in een dorp met precies 1000 inwoners en 510 tot het vrouwelijk geslacht behoren en dus 490 tot het mannelijk geslacht, dan zegt men dat de *dichtheid* der vrouwen $510/1000 = 0,51$ bedraagt en de dichtheid der mannen $490/1000 = 0,49$. Op dezelfde wijze kan men nu vragen naar de dichtheid der priemgetallen tot en met 1000. Men neemt dan het aantal priemgetallen beneden 1000 en deelt dit aantal door 1000. Er blijken tussen 1 en 1000 nu 168 priemgetallen aanwezig te zijn; wij vinden dus voor de dichtheid $168/1000 = 0,168$. Tussen de getallen 1 en 10.000 blijken 1229 priemgetallen te liggen; voor de dichtheid der priemgetallen tot 10.000 vinden wij dus $1229/10.000 = 0,123$. Zo voortgaande heeft men voor de dichtheid tot 100.000 gevonden $9592/100.000 = 0,096$, en, om nu maar ineens een groot getal te noemen, voor de dichtheid tot 1.000.000.000 krijgen we 0,051. Als wij de dichtheid van de priemgetallen tot en met het getal x (x geheel en positief) voorstellen door $d(x)$, dan is dus $d(100) = 0,168$, $d(1.000) = 0,123$, $d(100.000) = 0,096$ en $d(1.000.000.000) = 0,051$. U ziet dat hoe groter het getal x wordt tot waartoe men de dichtheid neemt, hoe kleiner deze dichtheid wordt. Het is dan ook niet moeilijk om te

bewijzen dat, als x nadert tot oneindig, deze dichtheid $d(x)$ nadert tot nul. Reeds omstreeks 1800 hebben Legendre en Gauss echter de behoefte gevoeld zich aan een nauwkeurigere uitspraak te wagen, en zij hebben onafhankelijk van elkaar het vermoeden geopperd dat de dichtheid $d(x)$ even vlug tot nul nadert als de functie $1/\log x$, waarbij $\log x$ de natuurlijke logarithme van x voorstelt, dat is dus de logarithme van x bij het grondtal $e = 2,7183\dots$. Nauwkeurig geformuleerd luidt hun vermoeden aldus:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{d(x)}{1/\log x} = 1.$$

Nu iets over de pogingen om dit vermoeden te bewijzen. Aan Legendre en Gauss zelf is dat niet gelukt, en het heeft zelfs tot 1859 geduurd, alvorens door Riemann [3] een belangrijke stap vooruit gedaan werd, alhoewel ook Riemann nog niet het doel bereikte. Reeds Euler had in 1737 gevonden dat er verband bestaat tussen de priemgetallen en de hyperharmonische reeks

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Zoals welbekend, convergeert deze reeks voor (reële) $s > 1$. De som van de reeks hangt dan af van de beschouwde waarde van s , zodat wij, in navolging van Riemann, deze som voor kunnen stellen door $\zeta(s)$. Er ontstaat dan een functie van de veranderlijke s , de beroemde Zetafunctie van Riemann. De nieuwe behandelingswijze, door Riemann in de theorie gebracht, bestaat nu hierin dat deze Zetafunctie niet uitsluitend wordt beschouwd voor reële waarden van s , doch ook voor complexe waarden van de veranderlijke s . Door dit te doen kon Riemann de theorie der functies van een complexe veranderlijke op het priemgetallenprobleem toepassen. De complexe functietheorie was echter in zijn tijd nog niet voldoende ontwikkeld om reeds de priemgetalstelling zelf te kunnen bewijzen. Wel gaf het werk van Riemann aanleiding tot weer nieuwe onderzoekingen, en in 1893 kon Hadamard [4] de resultaten publiceren, waartoe hij gekomen was bij zijn bestudering van de theorie der gehele functies (gehele functies zijn functies, die voorgesteld kunnen worden door een machtreeks, die in het gehele complexe vlak convergeert). Tot de belangrijkste resultaten van Hadamard behoorde wel de stelling, die sindsdien bekend staat als de productstelling van Hadamard. Het werd nu al spoedig duidelijk dat hiermee de bezwaren overwonnen konden worden, die een bewijs van de priemgetalstelling in de weg

stonden, en zo gelukte het dan in 1896 aan Hadamard [5] zelf en aan de la Vallée Poussin [6] om onafhankelijk van elkaar succes te boeken. U ziet, juist een eeuw nadat Legendre en Gauss hun vermoeden geuit hadden. Deze eerste bewijzen uit 1896 zijn later nog aanzienlijk vereenvoudigd. Zo gelukte het bijvoorbeeld om een bewijs te construeren, dat geen beroep meer deed op Hadamard's theorie der gehele functies. Het gelukte evenwel niet om een bewijs te construeren, dat in het geheel geen beroep meer deed op de complexe functietheorie, en het was *dit* feit dat aanleiding gaf tot het gevoel van ontevredenheid waarover ik U zoeven al sprak. Immers, de priemgetalstelling is een uitspraak over reële getallen, en daarom vroeg men zich af of het niet mogelijk zou zijn een zuiver reëel bewijs te leveren, dat wil dus zeggen een bewijs, waarbij elk gebruik van complexe functietheorie vermeden wordt. Jaren lang is elke poging in deze richting mislukt, zodat men zelfs min of meer tot de overtuiging kwam dat een reëel bewijs door de aard van het probleem zelf tot de onmogelijkheden behoorde. Des te groter moet de voldoening van de beide wiskundigen Selberg [7] en Erdős geweest zijn, toen zij er enkele jaren geleden in slaagden toch een dergelijk bewijs te leveren.

Ongetwijfeld zullen er mensen zijn, die het een wat vergezochte en gekunstelde subtiliteit vinden om, behalve de natuurlijke eis dat een wiskundig bewijs geen fouten en overbodigheden bevat, nu nog extra eisen gaan stellen. In het zojuist genoemde voorbeeld van de priemgetalstelling was dat de eis, die uitgedrukt kan worden in de slagzin: „Een reëel bewijs voor een reële bewering.” Men kan het ook zo zien dat er bij het wiskundige spel een extra spelregel ingevoerd wordt, die de bewegingsvrijheid beperkt. In ons voorbeeld zegt die spelregel dus dat het verboden is gebruik te maken van complexe functietheorie. Ik wil nu diegenen, die bezwaren gevoelen tegen de invoering van zo'n extra spelregel, een stap tegemoet komen door direct te erkennen dat ook aesthetische motieven in deze kwestie een rol spelen, waardoor de appreciatie van persoon tot persoon verschillen kan. Ter verdediging echter van het spelregelstandpunt merk ik het volgende op: In de moderne wiskunde wordt meer en meer de nadruk gelegd, niet alleen op de behaalde resultaten in een theorie, maar ook op de structuur van die theorie. In dat licht bezien behoeft het dan geen verwondering te wekken dat ook aan de bewijsmethoden bepaalde eisen gesteld kunnen worden, opdat niet door de middelen, waarmee men het doel tracht te bereiken, bepaalde zaken in de theorie binnenge-smokkeld worden, die te beschouwen zijn als vreemde elementen

in het lichaam van deze theorie. Nogmaals een slagzin gebruikend, zouden wij hier dus kunnen zeggen: „Het doel heiligt niet alle middelen.”

Het is misschien interessant om nog even te vermelden dat ook in de theorie der (lineaire, niet-singuliere) integraalvergelijkingen enige stellingen bestaan, bij het bewijs waarvan tot kort geleden een rol gespeeld werd door diezelfde gehele functies, die ik reeds noemde, in het bijzonder ook door de productstelling van Hadamard. Hoewel de grenzen ten aanzien van het wel of niet gebruiken van complexe functietheorie hier niet zo scherp te trekken zijn als in het vorige geval, is het toch de moeite waard om op te merken dat men er in geslaagd is andere bewijzen te vinden, die geen beroep meer doen op de eigenschappen van gehele functies, terwijl in een enkel geval zelfs elk gebruik van complexe functietheorie vermeden kan worden.

Ik wil nu een voorbeeld noemen van een wiskundige spelregel, die eveneens beperkingen oplegt aan de bewijsmethoden, doch waarbij zich bovendien nog een nieuw aspect voordoet. In de algebra, in de leer der oneindige verzamelingen en in de theorie der reële functies wordt bij de bewijzen veelvuldig gebruik gemaakt van twee bepaalde principes. Het eerste daarvan is het principe, uitgedrukt in het zogenaamde „*keuzeaxioma*” en het tweede is het ten nauwste met het keuzeaxioma samenhangende principe van de *transfinitie inductie*. Het is voor mijn betoog niet van belang om U precies uiteen te zetten wat deze principes inhouden. Wel is het van belang te weten dat de mening van een bepaalde persoon over de toelaatbaarheid van een onbeperkte toepassing van deze principes in een wiskundig bewijs samenhangt met de houding, die deze zelfde persoon aanneemt ten aanzien van zekere wijsgerige kwesties, die optreden bij het onderzoek van de grondslagen der wiskunde. De situatie is nu zo dat er wiskundigen zijn, die zich weliswaar niet direct op een wijsgerig standpunt willen vastleggen, maar die toch met een zeker onbehaaglijk gevoel staan tegenover bewijzen waarin de beide genoemde principes gebruikt worden. Het is duidelijk dat er bij deze groep behalve alleen een methodisch of een aestetisch, nu ook nog een principieel verschillend motief naar voren treedt om te trachten dergelijke bewijzen te vervangen door andere bewijzen, waarin geen keuzeaxioma en geen transfinitie inductie gebruikt worden. Soms gelukt dit niet in zijn volle algemeenheid en dan heeft men zich tevreden te stellen met een bijzonder geval. Als voorbeeld moge ik vermelden dat in de eerste druk van een over de gehele wereld bekend leerboek over moderne

hogere algebra [8] stellingen voorkwamen, die slechts bewijsbaar zijn met behulp van het keuzeaxioma. In de tweede druk heeft de schrijver deze stellingen laten vervallen, en zich beperkt tot een belangrijk bijzonder geval, waar het bewijs zonder het keuzeaxioma gevoerd kan worden.

In verscheidene gevallen, waarin het gelukt keuzeaxioma en transfiniete inductie weg te werken, moet dit ondertussen betaald worden met verlies aan eenvoud in het wiskundige bewijs. Tegenstanders van het keuzeaxioma merken hierbij uit den aard der zaak op dat er niets verloren gaat, omdat er eerst eigenlijk geen bewijs aanwezig was, zodat volgens hun mening er alleen maar winst te behalen kan zijn. Een voorbeeld vindt men in een groep stellingen in de theorie der Banachse ruimten [9], welke stellingen twee aan twee dual zijn. Wat een Banachse ruimte precies is, doet er voor mijn uiteenzetting verder niet toe; ietwat globaal gezegd is het een ruimte met een oneindig aantal dimensies. Wat duale stellingen zijn is echter wel te vertellen, waarbij ik van tevoren aan de meetkundigen excuus vraag voor het gebruik van het woord dual in iets ruimere zin dan in de projectieve meetkunde gebruikelijk is. Twee stellingen heten dual indien de ene stelling uit de andere ontstaat door systematische verwisseling van bepaalde woorden. Een eenvoudig voorbeeld uit de vlakke meetkunde kent U allemaal. Als eerste bewering nemen wij dan: Door twee punten is één rechte lijn bepaald (nl. de rechte lijn, die door deze beide punten gaat). Verwisselt U nu de woorden „punt” en „rechte lijn”, dan krijgt U de duale bewering: Door twee rechte lijnen is één punt bepaald (nl. het punt, dat op deze beide rechte lijnen ligt). Het komt nu dikwijls voor dat, als men het bewijs van één der twee duale stellingen heeft, men dan ook het bewijs van de andere stelling vindt door verwisseling van bepaalde woorden, of letters in formules. Deze situatie dan was aanwezig bij die groep stellingen in de theorie der Banachse ruimten, waarover ik U zoeven al sprak. De gehele groep was keurig verdeeld in onderling duale tweetallen, en de bewijzen waren ook dual; men had dus slechts enkele woorden in het bewijs van stelling 1 te veranderen, om het bewijs van stelling 2 te verkrijgen; op een dergelijke manier ontstond het bewijs van stelling 4 door een kleine verandering in het bewijs van stelling 3, enz. Helaas berustte deze dualiteit in de bewijzen op een hulpstelling, waarin het principe der transfiniete inductie gebruikt was. Het is nu wel gelukt om andere bewijzen te vinden, onafhankelijk van deze noodlottige hulpstelling, waardoor het duale karakter van de stellingen zelf in hoofdzaak is bewaard

gebleven [10]. De dualiteit van de bewijzen is echter geheel verloren gegaan. Voor de meetkundigen onder U kan ik er nog bijvoegen dat het falen van de duale bewijsmethode te wijten is aan het feit, dat contravariante en covariante vectoren in een ruimte van oneindige dimensie zich in een bepaald opzicht geheel verschillend kunnen gedragen.

Nog een ander interessant voorbeeld wordt geleverd door de theorie der reguliere functies in een abstracte ruimte. Dit zijn functies $x(z)$, waarbij de onafhankelijke veranderlijke z een gewoon complex getal is, terwijl de afhankelijke veranderlijke x een vector is in een oneindigdimensionale abstracte vectorruimte. Het blijkt dat een groot gedeelte van de klassieke functietheorie voor complexe functies ook op deze nieuwe functies van toepassing is. Ja, als men gebruik maakt van een bepaalde hulpstelling, dan kan men zelfs de bewijzen voor deze nieuwe klasse van functies direct terugbrengen tot de welbekende bewijzen voor gewone complexe functies [11]. Helaas — mijn verhaal wordt eentonig — deze hulpstelling berust weer op keuzeaxioma en transfiniete inductie. Ook hier gelukt het nu wel de theorie te verlossen van verdachte elementen, doch dit betekent dat nu elke stelling apart bewezen moet worden, onafhankelijk van de klassieke analoge stelling.

Alvorens te eindigen zou ik nog één motief onder Uw aandacht willen brengen; een motief dat bij de beoefening van de wiskunde eveneens een zeer belangrijke rol speelt. Het laat zich ook in de vorm van een slagzin weergeven, en wel als volgt: „Haal uit elke situatie, wat er inzit.” Nu zult U zeggen dat dit niets bijzonders voorstelt; de wereld is vol van mensen, die op alle mogelijke gebieden trachten uit elke situatie te halen wat er inzit. Laat ons echter eens zien welke consequenties het voor een wiskundige meebrengt, als hij zich voorneemt deze slagzin bij zijn werk in toepassing te brengen. Daartoe merk ik op dat men zich bij het bewijs van elke wiskundige stelling voortbeweegt van een gegeven beginsituatie naar een te bereiken eindsituatie. Bij de stelling bijvoorbeeld, dat in een willekeurige driehoek de drie zwaartelijnen door één punt gaan, heeft men in de beginsituatie alleen een willekeurige driehoek, tesamen met de mededeling dat er vanuit elk hoekpunt een lijn naar het midden van de overstaande zijde getrokken is. In de eindsituatie aangekomen heeft men het inzicht verworven dat deze drie lijnen, zwaartelijnen genaamd, één gemeenschappelijk snijpunt hebben. Men kan zich nu bij deze gang van zaken afvragen of er meer te bereiken valt. Er treden dan twee mogelijkheden naar voren. In de eerste plaats zou het kunnen

dat men, uitgaande van een ongunstigere beginsituatie, toch hetzelfde eindresultaat kan bereiken, en in de tweede plaats bestaat de mogelijkheid dat men, uitgaande van dezelfde beginsituatie, tot een gunstiger eindresultaat komt. Een combinatie van beide gevallen kan natuurlijk ook optreden. In meer wiskundige taal gezegd betekent dit, dat men een reeds bekende stelling mooier kan maken door òf de gegevens te verzwakken òf het eindresultaat te versterken. Het ideaal is nu om bij dit streven zo ver mogelijk te gaan, d.w.z. men zal proberen de bewuste stelling in haar scherpste vorm uit te spreken en te bewijzen. Het is hierbij dat de wiskundige wel eens onbegrip ontmoet bij hen, die wel belang bij deze stelling hebben, doch slechts teneinde haar toe te passen bij het oplossen van een ander probleem van wiskundige, natuurkundige of technische aard. Immers, bij een dergelijke toepassing is het lang niet altijd nodig de stelling in haar scherpste vorm te gebruiken; dikwijls kan volstaan worden met een zwakkere vorm. En nu zou dit alles niet zo erg zijn als niet, om het scherpste resultaat te behalen, er ook dienovereenkomstige moeite gedaan moest worden. Ook hier geldt dat de laatste loodjes het zwaarst wegen, en een kleine verscherping van een stelling kan dikwijls slechts bereikt worden ten koste van een onevenredige toename van de lengte en de geraffineerdheid van het bewijs. Zij, die al met de zwakkere vorm tevreden zijn, voelen soms die toename van de lengte als een overbodigheid, en de toename van de geraffineerdheid als een zich verliezen in pathologische bijzonderheden. Ten aanzien van dit punt moge echter van hen begrip gevraagd worden voor de eisen, die het wiskundige spel stelt, en één van deze eisen is nu eenmaal om een stelling in zo scherp mogelijke vorm uit te spreken. Trouwens, indien een iets zwakkere, maar toch belangrijke, variant met aanzienlijk minder moeite verkregen kan worden, dan zal de wiskundige meestal niet nalaten daarop te wijzen.

Ik hoop dat het mij in deze korte tijd gelukt is U te doen beseffen, dat bij het beoefenen van de wiskunde niet alleen de koude logica op het toneel aanwezig is, maar dat andere motieven, die zelf soms niet in wiskundige termen te definiëren zijn, ook hun rol spelen; een rol, die wel eens een hoofdrol is.

LITTERATUURAAANWIJZINGEN

- [1] Dr N. G. de Bruijn, Eenige beschouwingen over de waarde der wiskunde, P. Noordhoff N.V. (1946).
- [2] Dr C. Visser, De leer der getallen, P. Noordhoff N.V. (1946).
- [3] B. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen

- Grösse, Monatsberichte der Preuss. Akad. d. Wissensch. (1859—1860), bl. 671—680.
- [4] J. Hadamard, Essai sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann, Journal de Math. (4) 9 (1893), bl. 171—215.
- [5] J. Hadamard, Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques, Bull. de la Soc. math. de France 24 (1896), bl. 199—220.
- [6] C. J. de la Vallée Poussin, La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général, Ann. de la Soc. sc. de Bruxelles 20 (1896), bl. 183—256.
- [7] A. Selberg, An elementary proof of the prime-number theorem, Ann. of Math. 50 (1949), bl. 305—313.
Démonstration élémentaire du théorème sur la distribution des nombres premiers, Math. Centrum (Amsterdam), Scriptum I, (1949) (tekst samengesteld door Prof. dr J. G. van der Corput).
- [8] B. L. van der Waerden, Moderne Algebra I, Berlin (1e druk 1930, 2e druk 1937).
- [9] S. Banach, Théorie des Opérations linéaires, Warschau (1932), ch. X, Th. 1—7.
- [10] S. Kaczmarz und H. Steinhaus, Theorie der Orthogonalreihen, Warschau (1935), Kap. I [183].
- [11] E. Hille, Functional analysis and semi-groups, New-York (1948), Ch. 3 (3.9—3.14).

VACANTIECURSUS VAN HET M.C. VOOR LERAREN IN DE WISKUNDE EN VOOR ANDERE BELANGSTELLENDE

De vacatiecursus zal dit jaar worden gehouden op Donderdag 21, Vrijdag 22 en Zaterdag 23 Augustus (de keuze dezer data hangt samen met het feit, dat de grote lerarenorganisaties vergaderen in de week van 25 tot 30 Augustus). Als centraal onderwerp is gekozen de *mechanica*. Sprekers uit diverse kringen zijn uitgenodigd. Behalve aan de mechanica zelf zal aandacht worden geschonken aan haar toepassingen, haar geschiedenis en haar didactiek.

De cursus zal ditmaal worden gehouden in het gebouw van het MATHEMATISCH CENTRUM, 2de Boerhaavestraat 49, Amsterdam.

Gegadigden kunnen zich aanmelden bij de administratie van het M.C. De kosten bedragen fl. 2.50.

Namens de Raad van Beheer van het
Mathematisch Centrum,

Prof. Dr J. F. Koksma,

Secretaris.

Naar aanleiding van de stemmen, die opgegaan zijn om de Beschrijvende Meetkunde op de H.B.S geheel of gedeeltelijk te vervangen door Analytische Meetkunde, worden in het najaar door het Mathematisch Centrum twee avonden georganiseerd, waar Dr J. Wansink de Beschrijvende Meetkunde (zij 't in enigszins gewijzigde vorm) zal verdedigen en Dr Ph. Dwinger de invoering van de Analytische Meetkunde zal bepleiten.

De eerste bijeenkomst zal plaats vinden

WOENSDAG 22 OCTOBER

's avonds 8 uur in het gebouw van het Mathematisch Centrum, 2de Boerhaavestraat 49, Amsterdam (O.).

De volgende bijeenkomst is eventueel Woensdag, 19 November op dezelfde plaats.

De bedoeling is na de inleiding(en) voldoende tijd beschikbaar te stellen voor discussie.

Opgave voor deelname: Dr H. Mooij, Churchillaan 107, Amsterdam.

UIT HET VERSLAG VAN HET STAATSEXAMEN A.

Wiskunde

De subcommissie voor de wiskunde is van oordeel, dat verscheidene A-candidaten zich wel ingespannen hebben om de nodige parate kennis te verkrijgen en bepaalde rekenwijzen te memoriseren, maar dat bij hen toch het nodige inzicht ontbreekt. Evenals in vorige jaren wil de subcommissie met nadruk vaststellen, dat de kandidaten hun tijd niet dienen te verspillen met te trachten een veelheid van parate kennis te verkrijgen. Zij kunnen zich beter concentreren op het verwerven van wiskundig inzicht. De subcommissie meent, dat het in het belang van a.s. kandidaten is, als zij kennis nemen van de onderstaande raadgevingen, die met name de A-candidaten gelden.

*Stelkunde**a. Wortelvormen*

Men moet in staat zijn eenvoudige wortels, zoals $\sqrt{5}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$ enz., in één decimaal nauwkeurig te berekenen. Het is voldoende, dat de candidaat vormen als $\sqrt{(6 \pm 2\sqrt{5})}$ kan herleiden door twee getallen te vinden, waarvan de som 6 en het product 5 is, zonder daarbij van een uit het hoofd geleerde rekenwijze (het zg. $\sqrt{x} \pm \sqrt{y}$ stellen) gebruik te maken.

Geen waarde wordt gehecht aan vaardigheid met betrekking tot het herleiden van ingewikkelde wortelvormen. Wel wordt van het grootste belang geacht, dat de candidaat inzicht heeft in de betekenis van de wortelfuncties. Men dient de definitie van $\sqrt{a}$ (a reëel) te kennen en behoort te weten, dat $\sqrt{4}$ dus niet gelijk is aan -2 en dat $\sqrt{a^2}$ gelijk is aan de absolute waarde van a , als a reëel is. Men moet begrijpen dat men daarom voorzichtig moet zijn met het toepassen van de formule $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. Elementaire kennis van de imaginaire getallen is wel een vereiste. Een eenvoudige ongelijkheid, als $\sqrt{x} + 1 < 2$ mag geen onoverkomelijke moeilijkheden opleveren.

b. Vraagstukken over vierkantsvergelijkingen.

Er wordt geëist, dat een candidaat in staat is eenvoudige vierkantsvergelijkingen, zoals $x^2 + 6x = 1$ op te lossen, zonder de formule toe te passen.

Het is overbodig parate kennis te bezitten betreffende methoden om vraagstukken op te lossen over:

twee vierkantsvergelijkingen, die een wortel gemeen hebben;
het opstellen van een vierkantsvergelijking, waarvan de wortels ingewikkelde functies zijn van de wortels van een gegeven vierkantsvergelijking.

c. De reststelling

Het is voldoende, dat de candidaat kennis draagt van de volgende stelling: als a voldoet aan een gehele rationale vergelijking $f(x) = 0$, dan is het linker lid deelbaar door $x - a$. Met behulp hiervan moeten derdegraads vergelijkingen, waarvan een wortel bekend is, kunnen worden opgelost.

d. Grafische voorstellingen

Het komt voor, dat de candidaat niet in staat is in de figuur bij een gegeven waarde van x de bijbehorende ordinaat te tekenen of grafisch te onderzoeken, welke waarden een gegeven functie aanneemt. Ook het grafisch onderzoeken van ongelijkheden levert grote moeilijkheden.

Het blijkt telkens weer, dat candidaten een grafiek tekenen aan de hand van een van buiten geleerd schema, maar geen begrip schijnen te hebben van het verband tussen functie en grafiek. In het bijzonder geldt dit bij het ontwerpen van grafieken van gebroken functies. Men moet trachten door een logische redenering tot de opbouw van een grafiek te komen, zonder daarbij gebruik te maken van een mechanisch procédé.

Zo kan men de grafiek van $\frac{x^2 + 1}{x}$ b.v. zeer wel doen ontstaan

uit de grafieken van de functies x en $\frac{1}{x}$, door de overeenkomstige ordinaten op te tellen. Ook zou men deze grafiek kunnen afleiden uit de grafieken van de functies $x^2 + 1$ en x . Men kan daarna de grafiek nader gaan onderzoeken. Dit onderzoek kan zich beperken tot vragen, voor welke beantwoording uitsluitend verondersteld wordt, dat de candidaat beschikt over het nodige inzicht in de betekenis van een grafiek.

In het algemeen beveelt de subcommissie de candidaten aan zich bij het bestuderen van de grafieken te beperken tot grafieken van functies en er zich van te onthouden grafieken van vergelijkingen te beschouwen. Het weglaten van de Y -as is dus sterk aan te bevelen.

e. De subcommissie brengt in herinnering, dat kennis van de volgende onderwerpen niet ondersteld wordt:

eigenschappen van de wortels van derde en hogere graads-vergelijkingen;

wederkerige vergelijkingen;

Planimetrie

De formules voor de lengte van hoogtelijn, zwaartelijn, bissectrix en verder de stelling van Stewart en de s -formule voor de oppervlakte van een driehoek behoeft men niet te kennen. Dit betekent niet een beperking van de omvang van het vraagstukken-materiaal. De sub-commissie stelt het juist op prijs indien men zich in voorkomende gevallen kan redden met eenvoudige stellingen, zoals de stelling van Pythagoras, projectiestelling of desnoods met de volgende stelling: In driehoek ABC is $a^2 - b^2 = p^2 - q^2$, waarin p en q de projecties van de zijden a resp. b op de zijde c voorstellen.

De subcommissie schenkt de kandidaten gaarne de stelling van Ptolemaeus. Belangrijker is, dat de candidaat weet wanneer 4 punten op een cirkel liggen en dat hij beseft dat het ontdekken van 4 zodanige punten een machtige hulpmiddel is om tot gelijkheid van hoeken te komen. De candidaat dient te weten wat het betekent, dat een lijnstuk in uiterste en middelste reden wordt verdeeld (geen formule!). Verder kan het memoriseren van formules over regelmatige veelhoeken achterwege gelaten worden.

Stereometrie

Het is noodzakelijk, dat de candidaat meer aandacht besteedt aan het onderwerp constructies door middel van meetkundige plaatsen. Men moet weten, dat een bol bepaald is door 4 punten, die niet in een plat vlak liggen, terwijl de constructie van het middelpunt geen moeilijkheden mag opleveren. Het ontwerpen van een netwerk van een prisma wordt van geen belang geacht, evenmin als kennis van formules betreffende de inhoud van een afgeknotte pyramide, een afgeknotte kegel en van de delen van een bol.

De subcommissie brengt in herinnering, dat kennis omtrent de prismoïde en de stelling van Euler niet ondersteld wordt.

Vele van de hierboven gemaakte opmerkingen zijn ook van belang voor de B-candidaten (zie vooral algebra d), met dien verstande dat de genoemde beperkingen uiteraard niet alle gelden. Wel kunnen de B-candidaten kennis nemen van het onder algebra a en b vermelde en de wederkerige vergelijkingen, de prismoïde en de stelling van Euler met een gerust geweten laten rusten.

Het is de subcommissie opgevallen, dat het oplossen van ongelijkheden ook veel B-candidaten in grote moeilijkheden brengt. Zij geven er zich onvoldoende rekenschap van, dat bij elke overgang zorgvuldig nagegaan dient te worden of de nieuwe ongelijkheid gelijkwaardig is met de oorspronkelijke. Bij het oplossen van exponentiële vergelijkingen en ongelijkheden doet het onaangenaam aan, als de candidaat onnodig naar het grondtal 10 overgaat. Men kiese steeds een passend grondtal. Het grondtal 10 verdient eerst dan principieel de voorkeur, als men berekeningen door middel van een tafel moet uitvoeren.

De subcommissie vestigt er met nadruk de aandacht op, dat grondige kennis van de planimetrie is vereist. Deze is een onmisbaar hulpmiddel bij het oplossen van stereometrische vraagstukken.

De kennis van de trigonometrie liet dikwijls veel te wensen over. Vooral vraagstukken, waarin extrema voorkomen, bleken velen te machtig.

Bij de analytische meetkunde had men over het algemeen nog te veel moeite met de herleiding van een vergelijking van een kegelsnede (zonder term x) tot middelpunts- resp. topvergelijking.

De subcommissie beveelt haar opvolgsters aan met bovenstaande uiteenzettingen rekening te houden. Voor de B-candidaten bedroeg het gemiddelde cijfer bij de stelkunde 5,3 (in 1950 5,6), bij de meetkunde 5,1 (4,4), bij de trigonometrie en de analytische meetkunde 5,5 (5,3).

Voor de A-candidaten bedroeg het gemiddeld cijfer bij de stelkunde 5,4 (in 1950 5,3), bij de meetkunde 5,3 (5,1).

DE INHOUD VAN DE PRISMOIDE: FORMULES, WAARIN SLECHTS 2 VLAKKEN OPTREDEN

door

J. W. DEKKER.

1. *Inleiding.*

Wordt, zoals o.a. bij de prismoide het geval is, de doorsnede van een lichaam met een vlak, evenwijdig met het vlak $x = 0$, uitgedrukt door de formule

$$D(x) = a + bx + cx^2,$$

dan is de inhoud van dat lichaam tussen de vlakken $x = 0$ en $x = h$:

$$I = \int_0^h D(x) dx = ah + \frac{1}{2}bh^2 + \frac{1}{3}ch^3.$$

In verband met het voorkomen in deze formule van de 3 constanten a , b en c is het duidelijk dat de inhoud bepaald is als behalve h de oppervlakten van 3 doorsneden gegeven zijn.

Geeft men b.v. $D(0) = G$, $D(\frac{1}{2}h) = M$ en $D(h) = B$, dan wordt

$$\begin{aligned} a &= G, \\ a + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{4}ch^2 &= M, \\ a + bh + ch^2 &= B \end{aligned}$$

en bijgevolg

$$\begin{aligned} bh &= -3G + 4M - B, \\ ch^2 &= 2G - 4M + B \end{aligned}$$

en

$$I = \frac{1}{6}h (G + 4M + B).$$

2. *Een formule, waarin slechts 2 vlakken optreden.*

Men kan natuurlijk in de plaats van G , M en B ook drie andere met G evenwijdige doorsneden aan de berekening van de inhoud ten grondslag leggen. Geeft men nu echter het grondvlak en de doorsnede op $\frac{2}{3}$ van de hoogte, $D(\frac{2}{3}h)$, verder korthedshalve D_2 te noemen, dan blijkt dat de inhoud reeds door de hoogte en deze 2 oppervlakten bepaald is. Immers, uit

$$\begin{aligned} a &= G \text{ en} \\ a + \frac{2}{3}bh + \frac{4}{9}ch^2 &= D_2 \end{aligned}$$

volgt

$$a + \frac{1}{2}bh + \frac{1}{3}ch^2 = \frac{1}{4}(G + 3D_2),$$

dus

$$I = \frac{1}{4}h (G + 3D_2).$$

Evenzo is natuurlijk, als we $D(\frac{1}{3}h) = D_1$ stellen,

$$I = \frac{1}{4} h (B + 3 D_1),$$

terwijl uit de twee formules samen de symmetrische formule

$$I = \frac{1}{8} h (G + 3 D_1 + 3 D_2 + B)$$

voortvloeit.

Opmerking.

Uit de waarden van G en D_2 kunnen niet die van a , b en c en dus ook niet de oppervlakken van willekeurige andere doorsneden afgeleid worden. I , G en D_2 vormen echter een afhankelijk stelsel lineaire functies van a , b en c .

De vervanging van 3 vlakken door 2 is te vergelijken met de vervanging van de evenwijdige zijden door de middenparallel bij de oppervlaktebepaling van een trapezium.

3. *Afleiding zonder integratie.*

De in § 2 gevonden inhoudsformules kunnen ook op elementaire wijze uit de formule

$$I = \frac{1}{6} h (G + 4 M + B)$$

afgeleid worden.

Beschouwen we hiertoe in de eerste plaats de prismoïde als de som van de lichamen tussen de vlakken G en D_2 en tussen B en D_1 , verminderd met dat tussen D_1 en D_2 .

We vinden dan voor de inhoud

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} h (G + 4 D_1 + D_2) + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} h (D_1 + 4 D_2 + B) - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} h (D_1 + 4 M + D_2) \\ &= \frac{1}{18} h (2 G + 9 D_1 - 4 M + 9 D_2 + 2 B). \end{aligned}$$

Elimineren we M uit deze formule en de formule

$$I = \frac{1}{6} h (G + 4 M + B),$$

dan vinden we

$$I = \frac{1}{8} h (G + 3 D_1 + 3 D_2 + B).$$

Om ook de asymmetrische formules af te leiden, merken we verder op dat het verschil

$$G - B$$

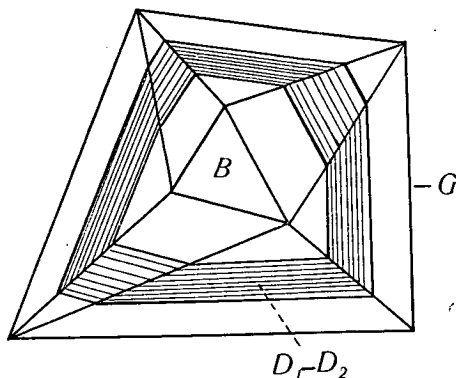
gelijk is aan de som van de projecties van de opstaande zijvlakken op het grondvlak, van mintekens voorzien bij opstaande zijvlakken die stompe hoeken met het grondvlak maken, dat die opstaande zijvlakken driehoeken zijn, waarvan de opstaande zijden door D_1 en D_2 in 3 gelijke delen verdeeld worden en dat dientengevolge

$$D_1 - D_2$$

als som der, c.q. van dezelfde tekens voorziene, projecties van de middelste delen van die driehoeken gelijk is aan

$$\frac{1}{3} (G - B)$$

(zie figuur).



Hieruit volgt

$$3 (D_1 - D_2) = G - B,$$

dus

$$G + 3 D_2 = B + 3 D_1,$$

zodat

$$I = \frac{1}{4} h (G + 3 D_2) = \frac{1}{4} h (B + 3 D_1).$$

4. *Andere formules met 2 vlakken, ook een symmetrische.*

We zullen nu, meer algemeen, onderzoeken, aan welke voorwaarde 2 doorsneden door de prismoïde moeten voldoen opdat de inhoud in hun oppervlakten en de hoogte uitgedrukt kan worden.

Nemen we aan, dat dit met de doorsneden

$$D(ph) = a + bph + cp^2h^2 \text{ en}$$

$$D(qh) = a + bqh + cq^2h^2$$

mogelijk is.

Dan moeten de getallen λ en μ zo bepaald kunnen worden dat de inhoud voor een willekeurige waarde van h voorgesteld wordt door

$$h\{\lambda D(ph) + \mu D(qh)\}.$$

Dus moet

$$\lambda(a + bph + cp^2h^2) + \mu(a + bqh + cq^2h^2) \equiv a + \frac{1}{2} bh + \frac{1}{3} ch^2,$$

dus

$$\lambda + \mu = 1, \lambda p + \mu q = \frac{1}{2}, \lambda p^2 + \mu q^2 = \frac{1}{3}$$

zijn. Elimineren we uit deze 3 vergelijkingen λ en μ , dan vinden we, dat p en q moeten voldoen aan de vergelijking

$$6 pq - 3(p + q) + 2 = 0.$$

Stellen we nu

$$p = \frac{1}{2} + p_1 \text{ en } q = \frac{1}{2} + q_1,$$

dan gaat deze betrekking over in

$$p_1 q_1 = -\frac{1}{12}.$$

Daar $p_1 h$ en $q_1 h$ de hoogten zijn, waarop onze deelvlakken liggen, gerekend vanaf het middenvlak, zien we dus dat deze vlakken aan weerszijden van het middenvlak moeten liggen en dat het product van hun afstanden tot dat vlak

$$\frac{1}{12} h^2$$

moet zijn.

De vergelijking $\lambda p + \mu q = \frac{1}{2}$ gaat over in

$$\lambda(\frac{1}{2} + p_1) + \mu(\frac{1}{2} + q_1) = \frac{1}{2},$$

dus, in verband met $\lambda + \mu = 1$,

$$\lambda p_1 + \mu q_1 = 0,$$

zodat

$$\lambda : \mu = -q_1 : p_1.$$

Neemt men b.v. $p_1 = -\frac{1}{3}$ en $q_1 = \frac{1}{4}$, dan wordt

$$p = \frac{1}{6}, \quad q = \frac{3}{4} \quad \text{en}$$

$$\lambda : \mu = \frac{1}{4} : \frac{1}{3} = 3 : 4,$$

dus

$$\lambda = \frac{3}{7}, \quad \mu = \frac{4}{7},$$

zodat

$$I = \frac{1}{7} h \{ 3 D(\frac{1}{6}h) + 4 D(\frac{3}{4}h) \}.$$

Bij de vlakken G en D₂ uit § 2 is $p_1 = -\frac{1}{2}$ en $q_1 = \frac{1}{6}$, bij D₁ en B is $p_1 = -\frac{1}{6}$ en $q_1 = \frac{1}{2}$.

Voor $|p_1| < \frac{1}{6}$ wordt $|q_1| > \frac{1}{2}$ en valt dus de 2e doorsnede buiten het lichaam waarvan men de inhoud wil berekenen.

Een symmetrische formule krijgen we als we $p_1 = -q_1$ nemen, dus

$$|p_1| = |q_1| = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{6}\sqrt{3}.$$

In dit geval wordt

$$\lambda = \mu = \frac{1}{2},$$

dus

$$I = \frac{1}{2} h \{ D(\frac{1}{2}h + \frac{1}{6}h\sqrt{3}) + D(\frac{1}{2}h - \frac{1}{6}h\sqrt{3}) \}$$

5. Zijn de gevonden formules ook geldig voor integralen van 3e graads functies?

De formule

$$\int_0^h D(x) dx = \frac{1}{6} h \{ D(0) + 4 D(\frac{1}{2}h) + D(h) \} \quad (\text{formule van Simpson})$$

geldt ook nog als $D(x)$ een 3e graads functie van x is.¹⁾

¹⁾ Zie over de geldigheid van deze formule o.a. het artikel van Dr Joh. H. Wansink, Euclides, jg. 25, blz. 132.

Is dit nu met de in § 2 en § 4 afgeleide inhoudsformules ook het geval? Alleen dan, als ze symmetrisch zijn.

We zullen dit aantonen voor de formules waarin slechts 2 doorsneden optreden; het geldig blijven van de formule met $G + 3D_1 + 3D_2 + B$ kan op dezelfde manier bewezen worden.

Merken we eerst op dat de formule

$$\int_0^h f(x) dx = h\{\lambda f(ph) + \mu f(qh)\}$$

hetzelfde uitdrukt als

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \varphi(x') dx' = h\{\lambda \varphi(p_1 h) + \mu \varphi(q_1 h)\},$$

wanneer $\varphi(x')$ die functie van x' is, die we krijgen als we in $f(x)$ x vervangen door $x' + \frac{1}{2}h$ en als $p = p_1 + \frac{1}{2}$, $q = q_1 + \frac{1}{2}$.

Bij elke $f(x)$ hoort een $\varphi(x')$ en omgekeerd; de functies $f(x)$ en $\varphi(x')$ zijn van dezelfde graad. Geldt dus de eerste formule voor een willekeurige functie van zekere graad, dan is dit ook het geval met de tweede en omgekeerd. We hoeven dus slechts na te gaan onder welke omstandigheden de geldigheid van de tweede formule voor de willekeurige 3e graadsfunctie

$$\varphi^{(3)}(x') = kx'^3 + \varphi^{(2)}(x')$$

volgt uit de geldigheid voor de 2e graadsfunctie

$$\varphi^{(2)}(x').$$

Welnu, door de toevoeging van kx'^3 blijft het linkerlid onveranderd, want

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} kx'^3 dx' = 0.$$

Het rechterlid echter neemt toe met

$$h\{\lambda(p_1 h)^3 + \mu(q_1 h)^3\}.$$

Deze uitdrukking is in het symmetrische geval ($p_1 = -q_1$, $\lambda = \mu$) ook 0, terwijl omgekeerd uit het voor willekeurige h wegvallen van de vorm volgt

$$\lambda p_1^3 + \mu q_1^3 = 0, \text{ dus}$$

$$\lambda p_1^3 = -\mu q_1^3 \text{ en dus, wegens}$$

$$\lambda p_1 = -\mu q_1,$$

$$p_1^3 = q_1^3$$

en bijgevolg, daar $p_1 \neq q_1$,

$$p_1 = -q_1 \text{ en}$$

$$\lambda = \mu.$$

6. *Integralen van 4e en 5e graadsfuncties. Iets over de toepassing bij numerieke integratie.*

De formule van Simpson wordt ook gebruikt als benaderingsformule bij numerieke integratie. Doet men hetzelfde met de hierboven afgeleide formules, dan zal men bij gebruik van de symmetrische formules, wegens het ook nog geldig zijn voor functies van de 3e graad, een nauwkeurigheid van dezelfde orde bereiken als bij de formule van Simpson, bij de asymmetrische formules echter één van lagere orde.

Ook bij analoge formules voor integralen van gehele algebraïsche functies van hogere dan de 3e graad hebben de symmetrische formules het voordeel dat ze bij geldigheid voor functies van de graad $2n$ tevens juist zijn voor die van de graad $2n + 1$.

Is

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4,$$

dan is

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \varphi(x) dx = ah + \frac{1}{12} ch^3 + \frac{1}{80} eh^5.$$

Verdelen we nu h in 4 gelijke delen en bepalen we λ , μ en ν zo, dat

$$\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \varphi(x) dx \equiv h[\lambda\{\varphi(-\frac{1}{2}h) + \varphi(\frac{1}{2}h)\} + \mu\{\varphi(-\frac{1}{4}h) + \varphi(\frac{1}{4}h)\} + \nu\varphi(0)],$$

dan vinden we

$$\lambda = \frac{7}{90}, \mu = \frac{32}{90}, \nu = \frac{12}{90}.$$

In verband met het voorgaande is het dus duidelijk, dat voor iedere gehele algebraïsche functie $f(x)$ tot en met de 5e graad geldt:

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{1}{90}h\{7f(0) + 32f(\frac{1}{4}h) + 12f(\frac{1}{2}h) + 32f(\frac{3}{4}h) + 7f(h)\}$$

We kunnen echter ook, evenals in § 4, met een geringer aantal waarden van x proberen uit te komen. Houden we hierbij vast aan de symmetrie, dan komen we tot een resultaat dat als speciaal geval al opgesloten ligt in de uitkomsten van Dr F. de Kok in zijn artikel over numerieke integratie in een vorige jaargang van dit tijdschrift¹⁾, nl.

$$\int_0^h f(x) dx = \frac{1}{12}h\{f(0) + 5f(\frac{1}{2}h) - \frac{1}{10}h\sqrt{5} + 5f(\frac{1}{2}h + \frac{1}{10}h\sqrt{5}) + f(h)\}.$$

We zien dat deze formule een vrij grote overeenkomst vertoont met de laatste formule van § 4.

¹⁾ Dr F. de Kok. Numerieke integratie. Euclides, jg. 25, blz. 271.

ONTSTOFFELIJKHEDEN IN DE NATUUR

door

A. D. FOKKER

Onlangs is er in dit tijdschrift op gewezen dat er in de natuurkunde wel eens aandacht wordt besteed aan de onderscheiding van wat in de natuur stoffelijk en wat onstoffelijk heten moet. Mag men den schrijver geloven, — dien ik, op zijn voorbeeld, niet noemen wil omdat het niet om de persoon, maar om de zaak gaat — dan geschiedt dit zo vaak en zo algemeen, dat hij zich geroepen voelde, om der lieven waarheid wil, daartegen op te komen en te concluderen dat „ieder gebruik van het woord onstoffelijk, voor welk physisch verschijnsel dan ook, misplaatst is en misleidend” en „getuigt van een gebrekkige visie op het probleem van stoffelijkheid en onstoffelijkheid”. „Zo hoort het woord onstoffelijk naar mijne mening in geschriften over natuurwetenschap niet voor te komen, tenzij om te zeggen dat het er niet thuis hoort”.

De grote stelligheid waarmede dat geschreven is maakt het wel duidelijk dat men over belangrijke zaken zeer verschillend kan oordelen. Zij bevat een uitdaging om het goede recht van de gewraakte onderscheiding in het licht te stellen, en zulk een betoog met een even stellige conclusie in tegenovergestelde zin te doen sluiten.

Het zal nauwelijks nodig zijn eraan te herinneren hoe de experimentele natuurkunde, opkomende uit de in de ambachten vergaarde kennis, zich heeft bezig gehouden met de dingen die men grijpen en tasten kon en vasthouden, allereerst de vaste lichamen, voorts de vloeistoffen en de gassen. Maakte men zich een beeld van wat men zag gebeuren, dan legde men in dat beeld zijn ervaringen ontleend aan het omgaan met die stof. Het is niet eens zo lang geleden dat men ook warmte, die immers door een lichaam aan een ander lichaam kon worden afgestaan, zich voor den geest stelde als een stof. De uitdrukkingen warmte afgeven, warmte verdelen en derg. dragen daarvan nog de stempel. Voor kort hebben alle fysici de honderdjarige ontdekking van Robert Mayer herdacht, dat n.l. de warmte geen stof was maar een vorm van ar-

beidsvermogen. Velen kennen nog die triomfantelijke titel van Tyndall's boek: „Heat, a mode of motion"! Daarmee schudde voor het fysisch brein de warmte haar gewaad van stoffelijkheid af: géén stof, maar een wijze van beweging. De moleculen, die waren stof, maar niet de warmte, niet de energie van de ongeroemde beweging!

Driekwart eeuw eerder had men zich in de wetenschap vrijgemaakt van die andere voorstelling van de brandbaarheid als een stof, het phlogiston, dat men bij de verbranding uit de brandende stoffen zag ontwijken. Lavoisier heeft toen onze voorouders ingehamerd dat alleen dát stof was, wat men op de weegschaal kon leggen en wegen. Nog een eeuw eerder had Newton de ruimte tussen de planeten leeggebezemd en al de hypothetische stof opgeruimd die Descartes daar had laten wervelen om de gravitatie zogenaamd te verklaren.

Later heeft Faraday, gezien de betekenis van de diëlektrica voor de elektrische aantrekkingen, ook het vacuum als een diëlektricum, als een stof opgevat, en in de periode na Maxwell hebben velen, die men reeds lang bezig is weer te vergeten, getracht van dien aether mechanische modellen te verzinnen die zijn, bij bekende stof vergeleken uitzonderlijke, ja onstoffelijke eigenschappen moesten verklaren. Hij moest volmaakt doordringbaar zijn, onweegbaar, en hij moest schuifspanningen kunnen verdragen als een vaste stof. Van lieverlede is men daar anders over gaan denken, en tegenwoordig zullen weinigen onder het woord aether meer verstaan dan onder het woord ruimte.

Indien men met Lavoisier stof noemt wat men op de weegschaal kan leggen en wegen, bedoelt men dan het gewicht als attriboot en kenmerk van de stof te stellen? Stellig niet. Sinds de correctie die Einstein gaf op de gravitatie-theorie van Newton hebben wij immers geleerd dat er geen wezenlijk onderscheid kan gemaakt worden tussen wat wij gewicht plegen te noemen en traagheidskracht, bijvoorbeeld middelpuntvliedende kracht. Terecht heeft de bedoelde schrijver tegen de onstoffelijkheid in de natuur aangestipt dat „een vrij vallend lichaam geen gewicht heeft. Fundamenteler dan het gewicht is de massa". Toch laat hij op dezelfde bladzijde drukken dat „straling, zoals ze in werkelijkheid is, nl. bewegende lichtquanta, wel massa en gewicht heeft". Gewicht heeft een vrij vliegend foton (om dat beeld te gebruiken) evenmin als een vrij vallend deeltje, dat massa heeft. En massa heeft het juist in het geheel niet! Men mag niet over het hoofd zien, dat het foton tegelijk een hoeveelheid beweging en energie ver-

tegenwoordigt, zonder dat er nochtans van massa gesproken mag worden. Men behoort voor ogen te houden dat de massa op een bepaalde manier wordt samengesteld uit impulsie en energie en dat het juist kenmerkend voor een foton is dat impulsie en energie zo afgemeten zijn, dat daar een massa nul uit te voorschijn komt. Met massa wordt niet een variabele traagheidscoëfficiënt (k/a) bedoeld, maar scalaire massa, massa bij stilstand. Een foton kan niet stilstaan. Men kan een foton niet, ook in gedachten niet, tot staan brengen, of op een weegschaal leggen. Het kan ook geen stilstaande massa hebben. Het heeft geen durende aanwezigheid. Het is geen stuk stof.

De bedoelde invariante betrekking tussen de impulsie en de energie behoort tot de nieuwe inzichten van de theorie die zich na 1904 uit de transformatie-formules van Lorentz heeft ontwikkeld en die gemeenlijk relativiteitstheorie genoemd wordt: Einsteins theorie der absolute invarianten. Het meeste gerucht hebben gemaakt de nieuwe opvattingen aangaande tijd en ruimte. Andere inzichten zijn buiten de kring der fysici tot dus ver minder bekend geworden. In de eerste decennia had men daar wat moeite mee. Men gevoelde zich onwennig, en dat behoeft geen verwondering te wekken. Thans wordt de theorie door de fysici reeds de klassieke theorie genoemd. Twijfel ontmoet zij niet meer, en de enkelingen die thans na bijkans een halve eeuw nog onwillig zijn om haar consequenties te aanvaarden zijn betreurenswaardige uitzonderingen.

Dieper nog heeft de quantumtheorie in de gewone wijze van denken ingegrepen. Vooral na de formulering der golfmechanica hebben wij fysici veel van Bohr en Heisenberg geleerd. Ook de filosofen hebben leren inzien dat Kant ten onrechte begrippen waarmee de natuurkundige kennis van zijn tijd beschreven kon worden heeft aangezien als noodzakelijke vormen a priori van ons denken. Zij zien in dat de uitbreiding van de proefondervindelijke kennis van de laatste halve eeuw gebiedend eist het hanteren van andere wetenschappelijk verantwoorde begrippen. Dat daarbij enige betekenis gehecht kan worden aan iets als een „onvolmaakte zijnsstructuur” der stof is uiterst onwaarschijnlijk. Voor het onvolmaakte in de stof interesseert de fysicus zich niet, en de samenstelling van iets als structuur met het als substantief gebruikte op zichzelf inhoudsloze koppelwerkwoord zijn is slechts een onvolmaakte poging om iets onbegrepen te zeggen.

In het licht van thans overbekende beschouwingen die handelen over de fundamentele discrepanties doet het wel heel vreemd aan iemand in ernst te zien schrijven dat men stralingsquanta kan

localiseren en hun beweging ten opzichte van de gewone stof kan beschrijven. Dat is nu juist wat men *niet* kan doen. Dat is de zin van de gangbare interpretatie van het elementaire quantum werking als een ondeelbare en onherleidbare speling in de coördinaten en impulsies. Is de schrijver zo'n vreemdeling in Jeruzalem dat hij zonder een woord van nadere rechtvaardiging zo lichtvaardig heen-stapt over het beste en grote werk dat hier geleverd is? Aan de stralingsquanta wordt door hem een wederzijdse gedeeltelijke ondringbaarheid toegeschreven, vermoedelijk om ze te doen delen in de ondoordringbaarheid die de ouden aan de stof als kenmerk toeschreven. Maar waar haalt de schrijver die ondoordringbaarheid vandaan? Reeds Christiaan Huygens merkt in zijn dioptrica uitdrukkelijk op dat het feit dat wij elkander kunnen zien alrede bewijst dat lichtstralen volkomen doordringbaar en doordringend zijn. Heeft de schrijver soms voor ogen gehad de wisselwerking van foton en electron in het effect van Compton? Inderdaad is er daar uitwisseling van impulsie en energie. Dat men aan een foton impulsie en energie toekent is geen reden om het stoffelijk te noemen, immers de massa is niettemin nul. Verstrooiing van fotonen door elektronen kent men. Verstrooiing van fotonen door fotonen is denkbaar. Men heeft er wel naar gezocht, maar nooit iets daarvan gevonden.

Een foton is nooit aanwijsbaar of identificeerbaar. Soms gaan twee stofdeeltjes, positon en negaton, samen op in de productie van twee fotonen. De stof wordt vernietigd tot niet-stof, al rekent men dat de totale impulsie en energie daarbij behouden blijft. Bij een kernsplitsing blijft er in de brokstukken minder stof, dan er in de moederkern was. Een deel van de massa is tot onstoffelijke energie vervluchtigd. Omgekeerd kan de energie van een gammafoton zich verdichten tot de stof van een elektronenpaar. Ook kan een kern zijn overtollige energie ontladen in de schepping en uitzending van een beta-straal, positon of negaton.

Voor het huidige geslacht is het een voorrecht het grootse in deze dramatische ontwikkeling der natuurkunde te zien. Daarbij heeft men nodig een duidelijke onderscheiding van begrippen. Men mag dankbaar zijn dat men juist in de scalaire massa een formulering kan vinden van wat stof mag heten en wat niet, en aldus een invariante maat heeft voor de stof als quantiteit.

Men behoeft niet in het onzekere te verkeren omtrent de beweegreden tot de ontkenning van onstoffelijkheid in de natuur door den schrijver. Voor hem is niet-stoffelijk synoniem met geestelijk, hij

reserveert het woord onstoffelijk alleen om de niet herleidbare tegenstelling van geest tegenover stof aan te duiden en hij vreest daarover verwarring. Hier valt op te merken, allereerst dat sprekende over onstoffelijkheid *in de natuur*, uit het laatste woord duidelijk blijkt, dat men niet over geestelijkheid spreekt. Bovendien: de bedoelde tegenstelling ligt niet tussen geest en stof, maar tussen geest en natuur. In de natuur, buiten de fysica, leeft zeer veel dat geen stof is, bijvoorbeeld een levensdrift als de honger, die stellig niet geestelijk is. Geestelijke honger is iets anders. De geest staat niet tegenover de stof alleen, maar tegenover de natuur. Vanwaar schrijvers verwarring van stof met natuur? Uit welk oud boek is dit overblijfsel van een tegenstelling stof-geest afkomstig? De schrijver zocht naar een universeel criterium ter onderscheiding van stof en geest, en hij vindt daartoe de „aanwezigheid of afwezigheid van de uitgebreidheid”. „Het uitgebreide is stoffelijk, het niet-uitgebreide is niet-stoffelijk of geestelijk”. Dat een voorwerp uitgebreid kan zijn of niet, laat zich horen. Maar dat de uitgebreidheid iets is, dat aan- of afwezig kan zijn, kan men moeilijk zeggen. In die uitdrukking rammelt iets. Opzettelijk onthoudt de schrijver zich van het geven van een definitie van uitgebreidheid. Maar het gaat in de moderne natuurkunde om scherper en helderder onderscheiding in begrippen, waarvan de gewone man denkt, dat zij „voor ieder duidelijk zijn”. Quod licet bovi, non licet Jovi! Het is niet goed, dat met zo’n dooddouner de schrijver zich aan de plicht tot duidelijke rekenschap onttrekt. Als voorbeeld van omschrijving noemt hij echter „die eigenschap waardoor iets delen heeft die buiten elkaar liggen”. Laat onseens denken aan onze gedachtengang die het bewijs uitmaakt van een of andere stelling, bijvoorbeeld de stelling van Pythagoras. Stellig is die geen stoffelijk ding. Maar daarin zijn delen, die buiten elkaar vallen, al waren het slechts het onderstelde, het gestelde en het bewijs! Dus uitgebreid. En dus toch stof? — En zijn er in een beleving van geestelijke verzonkenheid, of geestelijke aanschouwing geen delen die de betrekking hebben van voor en na? Wederom een uitbreiding! Men zal zeggen: uitbreiding in de tijd is geen uitgebreidheid in de ruimte. Hoe weet men dat? Daarmee trekt men de vraag naar de onafscheidelijkheid van tijd en ruimte binnen de kring der discussie. Dan staat het nog te bezien of wat geest genoemd mag worden niet uitgebreid is. Een zeer bekend filosoof heeft herhaaldelijk gezegd dat een ware geest twee benen nodig heeft om op te lopen. Gaat het om denk- en wilsdaden, dan geschieden die ontegenzeggelijk binnen de levensgeschiedenis van een stoffelijke, in tijd en ruimte „uitgebreide” mens, zij kunnen

zich ook slechts daarin voor ons uiten en kenbaar worden. Daardoor zijn die denk- en wilsdaden evenzeer uitgebreid als de stralings-
quanta van den schrijver, maar nog niet stoffelijk. De uitgebreid-
heid is geen kenmerk voor de stof alleen. Zoekt men, afgezien van
de quantitatieve maat, naar een kwalitatief kenmerk voor het
stoffelijke, dan kan men beter denken aan het attribuut van
durende aanwezigheid. Heeft men een foton en een meteorsteen-
tje, dan heeft de steen een durende aanwezigheid, het foton niet.

Onze beschaving heeft zich in de wetenschap aanvankelijk
voornamelijk met statische beschouwingen bezig gehouden, met
bestaan en stilstaan. De tijd deed niet mede. Men dacht er niet aan
dat het bestaan een onmogelijk nietig bestaan van één ogenblik was
tussen een onherroepelijk niet meer bestaand verleden en nog al-
tijd niet bestaande toekomst. Sinds de theorie van Einstein heeft
de natuurkunde behalve de nietigheid ook de betrekkelijke wil-
lekeur van de keuze van een bestaand nu in het licht gesteld. De
natuur, ook de levenloze, is een geschiedenis in de tijd, niet een
bestaan.

Op het statische tijdperk volgt het dynamische tijdperk. Wij
zitten er midden in. Er is een onophoudelijke stroom van vernieu-
wing van ervaring en van kennis. De nieuwe wijn vereist nieuwe
zakken. Reeds laat de jongere generatie de oudere weer achter
zich. Bij de noodzakelijke ontwikkeling der begrippen die zij nodig
heeft mag men geen stenen voor brood geven (geen stof zonder
onstoffelijke levenskracht). Wie zich tegen die ontwikkeling ver-
zet en niets beters te bieden heeft dan een ondoeltreffend en ver-
sleten woord als uitgebreidheid, getuigt van een gebrekkige ken-
nis van de vlammende bezieling en daden der tegenwoordige fysici.
Zulke geschriften behoren naar mijne mening niet in tijdschriften
voor de exacte vakken te verschijnen tenzij met de mededeling dat
zij er eigenlijk niet in thuis horen.

NORMEN

door

Dr P. BRONKHORST.

De eisen, die speciaal leraren in de wiskunde aan hun leerlingen stellen, zijn zo sterk uiteenlopend, dat de vraag rijst, of hierin niet een beetje meer eenheid gebracht kan worden. Er zijn collega's, die 25 % onvoldoendes in een klas heel gewoon vinden, zelfs zijn er met 50 %, ja, ook 90 % komt voor! Het is duidelijk, dat de oorzaak *niet* is de intelligentie van de kinderen, maar de eisen, die de leraar stelt. Vóór de oorlog moest in Indië een leraar, die meer dan een bepaald percentage onvoldoendes had — ik meen 40 %, maar dit weet ik niet zeker — hiervan rekenschap geven aan de inspecteur. Men krijgt de indruk, dat een te groot aantal onvoldoendes een soort brevet van onvermogen toekende aan de docent. Dit „onvermogen” behoefde natuurlijk niet altijd te zijn, dat de leraar de kunst van het les geven niet verstond; het kon ook zijn, dat hij zich niet voldoende bewust maakte, wat van leerlingen geëist kan en mag worden.

Prof. Langeveld schrijft in zijn: „Beknopte handleiding tot de paedagogische psychologie van de middelbare-schoolleeftijd” op blz. 200 het volgende: „Uit verschillende gegevens schijnt men te mogen afleiden, dat de schoolwereld in Nederland niet verontrust is, wanneer er ongeveer 25 % onvoldoendes gegeven worden voor een vak of wanneer een gelijk percentage kinderen zitten blijft. Men kan zich het standpunt voorstellen, verontrust te zijn, wanneer 1 % zakt, of onvoldoende krijgt.” Even verder op blz. 201: „Maar hoe moet men *dán* objectiviteit in deze materie brengen? We weten toch al sedert jaren en uit tal van bronnen, hoe het met de objectieve waarde der beoordeling gesteld is. Stasch en Elliott lieten één stuk wiskunde-werk door 116 vakmensen beoordelen (puntenschaal van 1 tot 100). Men verschilde over hetzelfde stuk rijkelijk, het kreeg van 30 tot 90 punten!” De zaak schijnt dus hopeloos! Toch zijn mijn ervaringen bij de eindexamens heel anders; ik verschilde praktisch nooit meer dan een half punt met de betrokken deskundigen. Trouwens Prof. Langeveld laat op blz. 204 ook een ander geluid horen: „En toch . . . worden vele leraren over

de beoordeling van allerlei werk het bij onderling overleg meestal vrij spoedig eens, zijn de controversen met gecommiteerden meestal beperkt tot kleine verschillen. Er is nu eenmaal een zeker aantal kenmerken, waarnaar men zich richt op de meeste eindexamens. — ook in een zo gecompliceerde materie als het opstel. Het is merkwaardig om te zien, hoe een gecommiteerde met een uitermate gecompliceerde cijfermethode ten slotte vrijwel precies terecht komt op de bij-schatting-uit-ervaring neergeschreven cijfers van den leraar.”

Daar me uit gesprekken met collega's bleek, dat ook zij dezelfde ervaring hadden, durf ik aannemen, dat we althans voor het schriftelijk eindexamen een redelijke uniformiteit in de beoordeling hebben. Maar ook al zouden hier en daar grotere afwijkingen voorkomen, dan is er toch in ieder geval de gelijkheid van de *opgaven* voor alle kandidaten. Dat deze opgaven zelf vaak sterk in moeilijkheid uiteenlopen — mijn gemiddelde cijfers voor eindexamensommen variëren van 5 tot 9 — is een bewijs te meer, hoe moeilijk deze materie is. Gelukkig bepalen telkens twee onderdelen samen één cijfer, waardoor bijna steeds grove onjuistheden worden vermeden. Bovendien is er dan nog het mondeling examen, dat in sommige gevallen nog een juiste correctie kan geven.

Wat dus voor het eindexamen mogelijk blijkt te zijn, moet in principe ook kunnen voor rapport- en overgangscijfers! Er *moet* een maatstaf te vinden zijn, als we er *samen* ernstig naar streven! Voor ik nu zelf een poging waag voor normen in de eerste klas, eerst nog enkele opmerkingen.

1. Ik geloof, dat het inventief vermogen van de leerlingen, vooral bij meetkunde nog steeds door vele leraren sterk wordt overschat. Prof. Bottema heeft, toen hij nog HBS-directeur was, op een congres in Utrecht eens verklaard, dat als bij het eindexamen een vraag maar even teveel van „het gewone” afweek, de resultaten bedroevend waren. Het is mijn overtuiging, dat wij nog veel te bang zijn om „gewone dingen” te vragen. Ik sluit me dan ook van harte aan bij een opmerking van Dr. Wansink op een congres in Amsterdam: „Het eindexamen heeft tot taak om te onderzoeken, of de kandidaten het geleerde op een behoorlijke wijze verwerkt hebben.”
2. Als een leraar te hoge cijfers geeft, of te lage eisen aan zijn leerlingen stelt, zal een slecht eindexamen hem spoedig tot rede brengen, maar als een leraar aan leerlingen, die zeer hoge cijfers op het eindexamen halen, op de rapporten slechts zessen toe-kende, dan zal hij er niet steeds van zijn te overtuigen, dat hij de leerlingen te laag getaxeerd had, maar zal eerder het eindexamen

te gemakkelijk vinden. Deze leraren leggen in hun individualisme hun eigen normen aan en dat is verkeerd. Wel hindert het de begaafden niet, maar de middelmaat komt bij deze leraren in het moeras, terwijl ook *die* leerlingen, die overigens een redelijke aanleg, maar geen specifiek wiskundige begaafdheid hebben, het slachtoffer worden.

3. Het mag m.i. in de lagere klassen niet voorkomen, dat een leerling met zeer behoorlijke cijfers voor de andere vakken onvoldoende heeft voor wiskunde. Ik weet wel, dat in de laagste twee klassen bij de wiskunde *eerder* dan bij andere vakken, die in die klassen nog in hoofdzaak een beroep op het geheugen *alleen* behoeven te doen, een tekort aan verstandelijke aanleg kan blijken, maar de tegenstelling mag niet te groot worden.
4. Voor het bepalen van normen is niet in de *eerste* plaats nodig een afbakenen van de hoeveelheid stof, maar wel de graad van moeilijkheid van de opgaven! Om b.v. te bewijzen, dat een driehoek stomphoekig is, als $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{1}{2}$, behoeft men vrijwel niets van trigonometrie te kennen en toch is deze vraag te moeilijk voor de doorsnee-leerling. Hiermee is deze opgave op zich zelf niet veroordeeld; het is een goede test om de knappe leerlingen er uit te halen. Zo was ook voor het laatste vraagstuk van het algebra-werk van 1949 alleen maar de kennis nodig van de grondformules van de rekenkundige reeks; toch was dit een moeilijke som, tenzij natuurlijk dergelijk soort vraagstukken was ingeoeft!

Na deze opmerking wil ik heel in het kort mijn normen voor de eerste klas aangeven. Ik maak bij voorbaat excuus voor de vanzelf sprekende dingen, die ik zal moeten noemen en die nu eenmaal onvermijdelijk zijn.

Algebra. De hoofdbewerkingen kan de gemiddelde leerling zonder veel moeite onder de knie krijgen; leerlingen, die b.v. niet het regeltje kunnen toepassen, dat -4 aftrekken mag vervangen worden door $+4$ optellen, horen niet op de middelbare school thuis. Ik zeg met opzet „toepassen” en niet „begrijpen”; het goed begrijpen van de theoretische grondslagen lijkt me te moeilijk voor kinderen, die zo juist de lagere school verlaten hebben; bovendien betekent dat z.g. „begrijpen” meestal alleen maar „napraten”. Gevolg: weinig of geen onvoldoende cijfers op het eerste rapport, tenzij men eist, dat de leerlingen *te* ingewikkelde vormen met veel haken, en vermenigvuldigingen en machten binnen deze, kunnen maken.

Ingeklede vergelijkingen zijn m.i. bijna direct te moeilijk; wil men hier pittige vraagstukken geven, dan kost dit enorm veel moeite

en tijd en men krijgt een soort parallel met de toelatingsexamens van vroeger, waar zulke ingewikkelde sommen over hazen- en hondensprongen werden opgegeven, dat alleen kinderen met een ongelooflijke training ze konden maken. Het is een algemeen didactische wet, om onderwerpen, die *te* veel moeite kosten, tot een later tijdstip uit te stellen; het is verloren moeite, omdat het inpompen wordt en dus geen vormende waarde heeft. Ik heb het altijd jammer gevonden, dat ingeklede vergelijkingen er zo moeizaam ingaan, maar de ervaring dwingt me er toe, me juist hier tot het elementaire te beperken. Misschien hebben collega's andere ervaringen; ik hoop, dat zij zich zullen uitspreken!

De merkwaardige producten gaan dan weer gemakkelijker, terwijl ten slotte de ontbindingen de eigenlijke test voor de overgang vormen. Indien ergens, dan blijken wel hier uit de verschillende leerboeken de grote verschillen in eisen, die de leraren stellen. Mijn mening is, dat men hier vooral niet te ver moet gaan en tevreden kan zijn, als ze de meest voorkomende gevallen beheersen en vooral goed het onderscheid *tot*, en anderzijds de overeenkomst *met* de merkwaardige producten begripen.

Meetkunde. Wat is hierover al in de loop der jaren niet geschreven! Allerlei inleidende boekjes verschenen ten einde de moeilijkheden te overbruggen. Blijkbaar is hier nog iets niet in de haak. Het is ook geen wonder, als men bedenkt, dat volgens sommige wetenschappelijke onderzoekers kinderen van 12 jaar nog niet logisch kunnen denken! Mijn ervaring is, dat men rustig de tijd moet nemen, zich over niets moet verwonderen en zich vooral aan niets moet ergeren en dat dan na ongeveer 4 of 5 maanden de zaak ineens gaat lopen. Waar op de lagere school nooit iets bewezen werd, maar alles aangenomen op gezag van de onderwijzer, is het wel haast een wonder, dat er aan het eind van de eerste klas haast geen leerling is, die niet de innerlijke noodzaak van een bewijs is gaan voelen! Het zou dan ook beter en juister zijn om op het eerste rapport nog geen cijfer voor meetkunde te geven.

Bij de congruentie vind ik het voldoende, als de kinderen een vraagstuk van de volgende vorm kunnen maken: bewijs, dat twee driehoeken congruënt zijn, als ze twee paar hoeken en de bissectrices van het éne paar gelijk hebben. Als ze dan de gegevens, het gevraagde en het bewijs goed en zonder overtolligheden kunnen opschrijven, is er reeds veel bereikt.

Meetkundige plaatsen zijn moeilijker, maar toch eis ik hier, dat het bewijs, dat de 3 middelloodlijnen van de zijden van een driehoek door één punt gaan, gekend en begrepen wordt. Bij de vierhoeken

vind ik het belangrijk, dat ze naast het bewijs voor het gelijk zijn van de overstaande zijden van een parallelogram, het omgekeerde kunnen bewijzen. Vraagt men bij een eerste behandeling van het laatste, waarom de hoeken BAC en ACD van de *vierhoek* ABCD gelijk zijn, dan antwoordt de halve klas: „omdat het verwisselende binnenhoeken zijn!” Leerlingen, die op de duur, dergelijke stellingen met hun omgekeerden niet uit elkaar kunnen houden, geef ik onvoldoende. Daarentegen vind ik het niet nodig, dat de gemiddelde leerling vraagstukken kan maken als b.v.: bewijs, dat een *vierhoek* een ruit is, als de diagonalen drie van de vier hoeken halveren: of: construeer een vierhoek, als gegeven zijn 3 zijden en de hoeken aan de onbekende zijde. Op de grens staat m.i. een som als: bewijs, dat de lijn, die in een gelijkbenig trapezium de middens van de evenwijdige zijden verbindt, loodrecht op deze zijden staat. In het algemeen eis ik dus behoorlijke reproductie van het geleerde, maar zeer weinig inventief vermogen, waarbij mijn eisen dus parallel lopen aan die voor de algebra! Natuurlijk is het bovenstaande als minimum bedoeld; willen de kinderen hoge cijfers krijgen, dan moeten ze meer presteren.

Er komt nog iets bij: als een leerling de eerste klas moet doubleren, steekt hij de eerste helft van de nieuwe cursus niets op; dit halve jaar is verloren tijd. Laat men hem met een niet te erge onvoldoende overgaan naar de tweede klas, dan kan het nog vaak in orde komen! Dit in tegenstelling tot de algebra, waar een het onvoldoende beheersen van de ontbindingen direct bij de breuken al tot een *débâcle* leidt.

Hiermee heb ik zeer beknopt mijn normen gegeven voor de eerste klas; ik hoop, dat anderen zich geroepen voelen om hetzelfde eens te doen voor de andere klassen of ook voor de eerste klas. Ligt hier misschien een taak voor Wimecos of voor Dr. Bunt? Het zou én voor het onderwijs én voor de kinderen van zeer groot belang zijn, als onze eisen in de verschillende klassen meer gingen overeenstemmen.

Naschrift. Inmiddels verscheen de oproep van Wimecos, zodat in feite reeds aan mijn suggestie voldaan is. Ik hoop, dat zoveel mogelijk leraren dit fraaie initiatief zullen steunen door hun proefwerken in te zenden. Het bestuur neemt een enorme arbeid op haar schouders, maar het is een arbeid, die voor leerling en leraar beide van buitengemeen belang zal kunnen blijken.

AARD EN STRUCTUUR DER WISKUNDE*)

door

Dr J. RIDDER

De Nederlandse mathematicus-filosoof E. W. Beth doet ons in een zijner werken¹⁾ volgende mededeling: „Omtrent den huidige stand van het wiskundig onderzoek bestaat, bij niet-mathematici in den regel een voorstelling, op welker onjuistheid wel even mag worden gewezen. Men treft bij den ontwikkelden leek in het bijzonder twee fundamenteele misvattingen aan. De eerste misvatting betreft den *omvang* van de huidige wiskundige kennis. De gangbare meening daaromtrent kan wellicht tennaastenbij als volgt worden weergegeven. De leerling van onze inrichtingen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs moet een betrekkelijk groot — volgens sommigen een overmatig groot deel van de voorhanden wiskundige kennis — zeg 20 à 25 % — in zich opnemen. En de universitair gevormde mathematicus, nu, die kent natuurlijk de wiskunde, heelemaal’.” Enige alinea’s verder vervolgt hij: „Daarom moge de volgende, zeer bescheiden taxatie den niet-mathematicus een indruk geven van den omvang, dien de wiskunde in onze dagen reeds heeft aangenomen. De wiskundige leerstof van onze scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs omvat hoogstens 0,1 %, die van een technische hoogeschool tennaastenbij 0,25 %, het programma voor een normaal doctoraal examen met hoofdvak wiskunde niet meer dan 1 % van de voorhanden wiskundige kennis.” Met voorbijgaan van de tweede misvatting, op welke Beth zinspeelt — die betreffende de exactheid in de wiskunde — zou ik, voor wat haar omvang aangaat, nog even de mening naar voren willen halen van de jonge, actieve, „veelhoofdige” Franse mathematicus Nicolas Bourbaki²⁾: „Donner, à l’heure actuelle, une idée d’ensemble de la science mathématique, est une entreprise qui semble au premier abord offrir des difficultés presque insurmontables, en raison de l’étendue et de la variété du sujet. . . . Pas un mathématicien, même en y consacrant toute son activité, ne serait aujourd’hui en mesure de suivre ce développement (d. i. die der wiskunde) dans tous ses détails. Nombre d’entre eux se cantonnent

*) Uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van buitengewoon hoogleraar aan de Rijks-Universiteit te Groningen op Vrijdag 26 Mei 1950

dans un coin des mathématiques d'où ils ne cherchent pas à sortir, et non seulement ignorent à peu près complètement tout ce qui ne touche pas à leur sujet, mais encore seraient hors d'état de comprendre le langage et la terminologie employés par leurs confrères qui se réclament d'une spécialité éloignée de la leur." Mathematici, als Poincaré en Hilbert, die ook nog in de moderne tijd in staat bleken op vrijwel alle gebieden der wiskunde het stempel van hun genie te drukken, zijn tot aves rarissimae geworden.

Ook de spreker van hedenmiddag is dus gedwongen in zijn hoek te blijven. Het was in de laatste oorlogswinter, dat hij intenser kennis maakte met de onderzoekingen betreffende de grondslagen van zijn vak. Eind 46 en begin 47 kwam hij tot zijn eerste publicaties op dit gebied, en sedert dien heeft het onderwerp hem bij voortdurend gefascineerd. Nochtans beschouwt hij het als een waagstuk U in dit uur over enkele aspecten van „Aard en structuur der wiskunde" te willen onderhouden. Te kort is het tijdsverloop, in welke hij deze aspecten bestudeerde, te groot is nog het aantal door hem niet bezochte provincies van het domein van het grondslagenonderzoek om te mogen verwachten, dat niet een betere keuze uit deze aspecten mogelijk ware dan die welke hij U gaat voorleggen.

Zijn onderwerp werd mede bepaald door overwegingen van ethische aard; de mathesis is de wetenschap, in welke het formaliseringsproces het verst is doorgevoerd, in die mate — de geciteerde uitlating van Bourbaki toont dit eens te meer — dat zelfs mathematici de voordrachten hunner vakgenoten niet of niet ten volle kunnen volgen. Wat mag dan van een Auditorium verlangd worden, dat toch voor een belangrijk deel uit niet-mathematici bestaat? Hier ontstaat voor de spreker de verplichting een onderwerp te behandelen, dat om althans in hoofdzaak begrepen te kunnen worden van de toehoorder naast enige kennis van elementaire algebra en meetkunde slechts die rijpheid van geest verlangt, die hem in staat stelt zich in enigszins abstrakte gedachtenassociaties thuis te gevoelen, — en wie zou willen beweren, dat wiskunde en natuurwetenschap alleen in staat zijn de mens dit vermogen te verlenen? Dat het grondslagenonderzoek daarom als bij uitstek geschikt moet worden beschouwd, toont ook een uitlating van de bekende Amerikaanse beoefenaar der mathematische logica Quine ³⁾: „The passage from non-mathematical, non-philosophical common sense to the first technicalities of mathematical logic is thus but a step, quickly taken. Once within the field, moreover, one need not travel to its farther end to reach a frontier; the field is itself a frontier, and investigations are active over much of its length."

De dichter da Costa trachtte het heden uit het verleden te begrijpen. De spiegel der geschiedenis toont ook de beoefenaar van het mathematisch grondslagenonderzoek zijn voortreffelijkheden en zijn feilen, zowel de aspecten, in welke hij boven zijn voorgangers is uitgegroeid, als die, in welke het hem niet is gelukt in het verleden opgevatte concepties tot verdere ontplooiing te brengen ⁴⁾).

De intense bestudering der Egyptische en Babylonische wiskunde in de laatste decennia hebben, voor wat de wiskunde betreft, slechts een bevestiging opgeleverd van Plato's trotse uitspraak: „wat de Hellenen ook van de barbaren overgenomen hebben, steeds hebben zij het tot hoger volmaaktheid ontwikkeld.” Ja, eerst deze onderzoekingen hebben, naar van der Waerden opmerkt ⁵⁾), ons een juister inzicht kunnen geven in de prestaties der eerste Griekse mathematici. De wiskunde begint, naar wij nu weten, niet met Thales, maar minstens 1200 jaar vroeger in Babylon. Daardoor komen de weinige schaarse gegevens betreffende Thales' prestaties op mathematisch, speciaal meetkundig terrein in een geheel ander licht te staan. De gebruikelijke opvatting, dat de oudste Griekse wiskundigen de meetkunde geheel en al zelf ontdekt en bijna niets aan andere beschavingen ontleend zouden hebben, moet daarin gewijzigd worden, dat zij, en met name reeds Thales, de meetkunde logisch hebben opgebouwd, dat Thales het bewijs in de meetkunde heeft ingevoerd.

Het voortschrijden van stelling tot stelling door middel van het bewijs is een procédé, dat ergens een aanvang moet nemen; niet nader bewezen stellingen vormen het uitgangspunt van ieder logisch systeem. Het invoeren van nieuwe begrippen door middel van definities moet bij niet expliciet gedefinieerde grondbegrippen een aanvang nemen. Althans de eerste dezer beide opvattingen hebben de Griekse meetkundigen zich in de periode van drie eeuwen, welke ligt tussen Thales' werken en het ontstaan der *Elementen* van Euclides op afdoende wijze eigen gemaakt; al is dit niet direct uit de *Elementen* op te maken, toch mag men met grote waarschijnlijkheid hetzelfde omtrent de tweede opvatting onderstellen. Naar men weet, moeten er vóór Euclides verschillende elementen-verzamelingen hebben bestaan, waarvan men mag aannemen, dat ze naar tijdsvolgorde een voortdurende verbetering hebben vertoond. Geen dezer verzamelingen is voor het nageslacht behouden gebleven; Euclides' werk moet reeds in zijn tijd en onmiddellijk daarna een dusdanig overweldigende indruk hebben gemaakt, dat vroegere *Elementen* aan de vergetelheid werden prijsgegeven ⁶⁾. Euclides begint in zijn eerste boek (of hoofdstuk) met de formulering van drie groepen van

niet nader toegelichte of bewezen uitspraken, de definities, de postulaten en de axiomata. Tot de definities behoren uitspraken als: „Een punt is, wat geen deel heeft. Een lijn is breedteloze lengte. Een rechte lijn is een lijn, die gelijk ligt met de punten er op.” Daarnaast: „Wanneer een rechte, op een rechte staand, de aan elkaar grenzende hoeken aan elkaar gelijk maakt, heet elk der gelijke hoeken recht en de opstaande lijn heet de loodlijn op die, waarop ze staat. Een stompe hoek is een hoek, die groter is dan een rechte. Parallel zijn lijnen, die in hetzelfde vlak gelegen zijn en naar weerszijden tot in het oneindige verlengd, naar geen van beide zijden elkaar ontmoeten.” De Euclidische definities blijken, bij nadere beschouwing, geen andere betekenis te hebben dan die van een voorlopige omschrijving der te behandelen meetkundige vormen; de vraag of die vormen bestaan, blijft daarbij geheel buiten beschouwing. Ik deelde de geciteerde definities in twee groepen in. De eerste groep bevat zulke, die in een mathematische redenering onmogelijk kunnen worden toegepast; ze dienen slechts om het ideale karakter van punt, lijn en rechte vast te leggen. Daarentegen voert de tweede groep begrippen in, welke uit die der eerste aangevuld met enkele algemene begrippen als gelijk, groter dan, niet, enz. kunnen worden afgeleid. Terwijl het bestaan der geometrische begrippen van de eerste groep steeds zonder meer wordt aangenomen, wordt dat van die der tweede groep in het systeem van Euclides óf uitdrukkelijk gepostuleerd óf bewezen. Het hier gemaakte onderscheid tussen de verschillende definities wordt door Euclides niet met zoveel woorden uitgesproken. De moderne mathesis heeft in het feit, dat de definities der eerste groep in de mathematische redeneringen geen toepassing vinden, voldoende aanleiding gevonden deze zonder meer weg te laten; ze beschouwt de in deze groep voorkomende begrippen door de axiomata impliciet gedefinieerd.

Een tweede punt, waarin de hedendaagse geometer van Euclides afwijkt, is dat eerstgenoemde geen onderscheid maakt tussen postulaten en axiomata; ook is het hem niet duidelijk, waarin dit onderscheid voor Euclides kan hebben bestaan ⁶⁾.

De overtuiging der Griekse mathematici, dat de axiomatische methode een tak van wetenschap op zekere basis plaatst, kwam voort uit hun opvatting, dat er een absolute wetenschap bestaat; grondbeginselen en grondstellingen ener wetenschap leert de mens door inductie uit de zintuiglijke waarneming kennen; deze inductie geeft ons echter niet het volle inzicht in deze grondbeginselen, de volle zekerheid der grondstellingen; beide worden ons gegeven door de intuïtie; de inductie is slechts een hulpmiddel, dat ons het in-

tuïtieve inzicht in grondbeginselen en -stellingen verleent; de wetenschap wordt niet uit de ervaring geabstraheerd, ze wordt ons slechts door de ervaring tot bewustzijn, tot volle evidentie gebracht; vandaar haar absoluut karakter. Ook de regels der logica, die, uitgaande van de grondstellingen of axioma's tot verdere resultaten voeren, worden als intuïtief duidelijk en als invariant bij alle voortgaande ontplooiing der wetenschap beschouwd?).

Deze opvatting ener absolute wetenschap (dus in het bijzonder ener *absolute meetkunde*) is uit het Griekse in het West-Europese denken overgegaan, gelijk blijkt uit de „idées innées” van Descartes, de „primae veritates” van Leibniz, de „synthetische Urteile a priori” van Kant. Over het totaal ander standpunt van het hedendaagse mathematisch denken kom ik nog te spreken.

Afziende van de laatste meer kennistheoretische beschouwingen, kan men zich afvragen of naar moderne opvattingen het Euclidisch systeem vrij is van leemten. Het antwoord daarop moet ontkennend luiden; de afleidingen der theorema's is op vele plaatsen uitmuntend door strengheid, op andere daarentegen wordt een beroep op de aanschouwing gedaan, zonder dat dit als zodanig wordt uitgesproken; dit is o.m. het geval op al die plaatsen, waar de moderne mathesis zich op ordenings- of continuïteitsaxioma's beroept.

De opbouw der Griekse meetkunde is axiomatisch-synthetisch; „synthetisch” vanwege de samenstelling van haar begrippen uit grondbegrippen en eerder afgeleide begrippen, van haar eigenschappen uit grondeigenschappen, de axioma's en postulaten, en eerder afgeleide eigenschappen. Negentien eeuwen na Euclides' *Elementen*, — om precies te zijn op 8 Juni 1637 — verscheen Descartes' *Discours de la méthode* met drie aanhangsels, van welke het tweede tot titel heeft *La Géométrie*. Hier maken we kennis met de analytische opbouw der elementaire meetkunde; weliswaar verschilt de inhoud van de *Géométrie* aanmerkelijk van die der tegenwoordig op onze gymnasia in zwang zijnde leerboeken der analytische meetkunde, maar toch ligt hier het uitgangspunt van die meetkunde zoals ze in 17e en 18e eeuw zal gaan worden opgevat en zoals ik ze nu voor het platte vlak kort wil aangeven. Men denke zich een stelsel van twee loodrecht op elkaar staande lijnen van het vlak, de z.g. coördinaatassen. De plaats van een punt in het vlak wordt bepaald door de op geschikte wijze van + of — teken voorziene afstanden van het punt tot de beide assen, de coördinaten van het punt. Het is dus nodig een lengteenheid aan te nemen en te onderstellen, dat bij ieder lijnsegment een positief

reëel getal behoort, dat zijn lengte in de eenheid uitdrukt. Het zal duidelijk zijn, dat de coördinaten der punten van een rechte, een cirkel, een ellips, etc. aan zekere vergelijkingen zullen voldoen; door bestudering dezer analytische betrekkingen leert men de eigenschappen der meetkundige figuren kennen.

Er bestaat hier een karakteristiek verschil niet alleen met de meetkunde van Euclides, doch ook met de analytische meetkunde zoals Descartes deze opvatte ⁸⁾. Euclides kent in zijn systeem uitsluitend natuurlijke getallen, en is daardoor genoodzaakt een geheel meetkundige theorie van de verhoudingen van lijnsegmenten te geven, een theorie die door haar exactheid van opbouw nog onze bewondering opwekt, en als een in meetkundige vorm geklede, nog onvolledige theorie van het positieve reële getal kan worden beschouwd; onvolledig waar in deze theorie lijnsegmenten niet verenigvuldigd noch op elkaar gedeeld kunnen worden. Doordat nu Descartes deze bewerkingen in zijn meetkunde weet in te voeren, is het hem mogelijk tot een rekenen met lijnsegmenten te komen, dat een isomorph beeld oplevert van de theorie van het positieve reële getal. Laat men (wat bij Descartes niet geschiedt) ook negatieve lijnsegmenten toe, zo wordt het rekenen met lijnsegmenten isomorph aan een theorie van het reële getal. Terwijl dus de analytische betrekkingen later als relaties tussen getallen (die lengten van lijnsegmenten voorstellen) werden opgevat, waren ze voor Descartes betrekkingen tussen lijnsegmenten zelve.

De behoefte aan exakte opbouw was in de loop der eeuwen verslapt; enkele uitzonderingen daargelaten, bleef dit zo ook onder de mathematici der 18e eeuw. De opvatting der meetkunde als een absolute wetenschap was sedert de Griekse bloeiperiode onveranderd behouden gebleven.

Het is juist deze opvatting, die aanleiding was tot de herhaalde pogingen het beroemde vijfde postulaat (het parallelen-postulaat) uit de andere en de axiomata langs logische weg af te leiden; immers men kende dit postulaat niet die evidentie toe, welke men aan de andere onbewezen onderstellingen verleende. Bekend is de poging van de Italiaan Saccheri, die, uitgaande van de onderstelling dat het vijfde postulaat niet geldt, een aantal resultaten afleidde voor de twee meetkunden, die later de naam van hyperbolische en elliptische meetkunde zouden krijgen; beide verwierp hij, omdat hij in beide gevallen tot een contradictie meende te komen. Zo bleef ook Saccheri in het geloof aan het bestaan ener absolute meetkunde volharden, overtuigd als hij was langs indirecte weg het vijfde postulaat te hebben bewezen.

Eerst ⁹⁾ Lobatschewsky, Bolyai en Gauß, die aan de aanvang der 19e eeuw, onafhankelijk van elkaar, een axiomatisch-synthetische opbouw der hyperbolische meetkunde gaven (d.w.z. van een meetkunde, in welke het vijfde postulaat vervangen was door de onderstelling, dat door een punt buiten een rechte meer dan één rechte kan worden getrokken, die met de vorige in één vlak ligt en haar niet snijdt), waren van de juistheid van de door hen ontwikkelde stelsels overtuigd; hoe ver hun deducties ook reikten, het nieuwe axioma voerde tot geen contradicties. Het systeem der overige axioma's bleef voorlopig als bij Euclides onvolledig. Het belangrijk evenement was, dat drie mathematici van naam de geldigheid van twee meetkunden hadden geconstateerd; het geloof in een absolute meetkunde, in de grondslagen der Euclidische meetkunde als „synthetische Urteile a priori” zou in de loop der 19e eeuw verdwijnen. Het begrip „meetkunde” was gerelativeerd; voortaan zou meetkunde zijn ieder axiomatisch opgebouwd stelsel, dat elementen bevat, die een aanschouwelijke interpretatie toelaten, dan wel analogieën vertonen met aanschouwelijk te interpreteren elementen, waardoor het mogelijk wordt de aanschouwing richtend te doen werken zowel op het geheel der af te leiden resultaten als op de redeneermethoden, door welke men tot die resultaten zou kunnen komen. Het zou tot in de 20e eeuw duren, voordat deze zeer ruime opvatting van een „meetkunde” tot volle ontplooiing kwam; we zijn hier eerst aan de aanvang van de weg, die tot dit inzicht gaat voeren.

Voorlopig was nog de geldigheid der hyperbolische meetkunde in het geding. Het was niet zeker, dat de deducties der drie grondleggers uit de axioma's dezer meetkunde bij verdere voortzetting niet toch tot tegenspraken zouden kunnen voeren. Hier kwam de analytische opbouw der meetkundige stelsels te hulp. Uit de Cartesiaanse Euclidisch-analytische meetkunde had zich de differentiaalmeetkunde van krommen en gebogen vlakken der Euclidische ruimte ontwikkeld. Deze voerde Beltrami omstreeks 1870 tot het merkwaardig resultaat, dat de hyperbolische vlakke meetkunde zich laat interpreteren op de oppervlakken van konstante negatieve kromming in de Euclidische ruimte (in het bijzonder op de pseudosfeer). M.a.w.: het bleek mogelijk punten en rechten en tussen deze in de hyperbolische meetkunde geldende relaties éénéénduidig af te beelden resp. op punten en zekere krommen van de pseudosfeer en op relaties tussen deze laatste, zodanig dat de axioma's der hyperbolische meetkunde in ware beweringen voor de pseudosfeer, als deel der Euclidische ruimte beschouwd, overgaan. Daarmee was een contradictieeloosheidsbewijs voor een niet-Euclidische meet-

kunde geleverd, aannemende dat de Euclidische driedimensionale meetkunde vrij is van tegenspraak. Nadien is op velerlei wijze verband gelegd tussen Euclidische en niet-Euclidische meetkunden, en tussen deze meetkunden en de in de 19e eeuw tot volle ontwikkeling gebrachte projectieve meetkunde. Niet-Euclidische meetkunden bleken Euclidisch te interpreteren, en omgekeerd. Hyperbolische en Euclidische meetkunden evenals de van Riemann afkomstige elliptische meetkunde, in welke geen evenwijdige rechten bestaan, en alle rechten eindige lengte hebben, waren binnen de projectieve meetkunde te realiseren. Het aantal meetkundige systemen, die werden beschouwd, en die ook in andere punten dan paralleliteit of lengte der rechten van elkaar kunnen afwijken, werd ten slotte zo groot, dat men behoefte ging voelen aan overzichtelijke samenstelling; op voorstel van Klein vond men het middel daartoe in de invariantentheorie van continue transformaties in de ruimten ¹⁰⁾. Dat het op den duur afdoend zou blijven, mocht niet verwacht worden, en bleek ook inderdaad niet het geval te zijn.

Voor ons is het van belang te wijzen op een verschijnsel, dat zich in analyse (waartoe ik ook de algebra reken) en logica zal blijken te herhalen. Reeds Euclides schijnt het wenselijk te hebben geacht een aantal stellingen van zijn meetkunde te bewijzen zonder daarbij gebruik te maken van het parallelen-axioma. Deze stellingen zijn dus zowel geldig in Euclidische als in hyperbolische meetkunde. Ze behoren tot een meetkundig systeem, dat generlei aanname over evenwijdigheid van lijnen doet, en Euclidische en hyperbolische meetkunde in zich bevat. Zo kan in 't algemeen een meetkunde zich door toevoeging van elkaar uitsluitende nieuwe axioma's gaan vertakken in twee of meer nieuwe systemen. Dit toont tevens, dat zuiverheid in methode eist, dat binnen een gegeven stelsel een theorema zo mogelijk dient te worden afgeleid alleen met behulp van zulke axioma's van het stelsel, zonder welker aanname het beschouwde theorema zijn geldigheid verliest. Hier ligt een aanknopingspunt met de moderne axiomatica, die voor elk systeem de opbouw verlangt uit een zo gering mogelijk aantal evidente en onderling onafhankelijke axioma's.

Vermeld ik even, dat ook de axiomatisch-synthetische methode er in slaagt de contradictie-loosheid van hyperbolische en elliptische meetkunde uit die der Euclidische af te leiden, en dat het sedert Pasch en Hilbert gelukt is de axiomastelsels voor deze meetkunden zodanig uit te breiden, dat ze volledig werden (in hier niet nader aan te geven zin).

Talrijk zijn de meetkunden, die onder beïnvloeding van relati-

viteitstheorie en quantenmechanica, in de loop der 20e eeuw zijn ontstaan. Het is daardoor duidelijk, dat men deze systemen, die dan toch op enigerlei wijze met het evoluerend begrip der physische ruimte zijn verbonden, moeilijk de naam van meetkunden kan ontszeggen.

Alle tot hier beschouwde meetkunden, Euclidisch of niet, axiomatisch-synthetisch of analytisch gedefinieerd, hebben de eigenschap, dat tussen haar punten een afstand bestaat of kan worden ingevoerd. Voor de meetkunde der projectieve ruimte b.v. heeft de invoering van zo'n afstands-begrip weliswaar weinig nut; het feit echter, dat in deze ruimte rechten en vlakken naast punten als grondelementen optreden, en dat in haar die eigenschappen van figuren onderzocht worden, die behouden blijven bij een groep van transformaties der ruimte, die rechten in rechten en vlakken in vlakken overvoeren, toont dat ook bij het onderzoek van haar eigenschappen het maat-begrip toch niet geheel ontbreekt. Het was in het midden der 19e eeuw, dat Riemann wees op het belang voor de analyse van ruimten, waarin het afstands-begrip van punten vervangen is door het algemener begrip van omgeving van een punt; het was de aanvang der studie van topologische ruimten. Aan de omgevingen worden axiomatisch zekere eigenschappen toegekend; deze kunnen in aantal en omvang variëren wat tot onderscheidene klassen van topologische ruimten voert. De mogelijkheid bestaat daarbij, dat alle ruimten van zekere klasse K_1 tevens tot een klasse K_2 behoren, doch niet omgekeerd, of wel dat de klassen K_1 en K_2 ten dele samen-vallen, of wel dat er geen ruimte is aan te wijzen, die zowel van type K_1 als van type K_2 is. Als voorbeeld van zo'n klasse noemen we die der door Fréchet ingevoerde accessibele ruimten. Deze laten zich door volgende omgevingsaxioma's karakteriseren: I. Ieder punt p heeft minstens één omgeving; p behoort tot elk van haar omgevingen, II. Zijn $U(p)$ en $V(p)$ omgevingen van p , zo is de verzameling $U(p)$. $V(p)$ van punten, die zowel tot $U(p)$ als tot $V(p)$ behoren, ook een omgeving van p , III. Bij iedere omgeving $U(p)$ van een punt p behoort een in $U(p)$ liggende tweede omgeving $V(p)$, zo dat ook ieder punt in $V(p)$ een in $U(p)$ liggende omgeving heeft, IV. Het enige gemeenschappelijke punt van alle omgevingen van een punt p is p zelf. Welke eigenschappen onderzoekt men nu in zo'n ruimte? Het antwoord luidt: die eigenschappen, welke bij iedere éénéénduidigebicontinue afbeelding der ruimte op zichzelf onveranderd blijven. De afbeelding is daarbij éénéénduidig als met ieder punt één beeld-punt korrespondeert, terwijl ieder punt der ruimte ook omgekeerd slechts beeld is van één punt; ze is bicontinu, als uit het feit dat q

beeldpunt van p is, volgt, dat: 1° voor iedere omgeving $V(q)$ van q minstens één omgeving $U(p)$ van p bestaat zo dat alle beeldpunten van punten van $U(p)$ binnen $V(q)$ komen te liggen, 2° voor iedere omgeving $U(p)$ van p minstens één omgeving $V(q)$ van q bestaat zo dat alle punten van $V(q)$ beeldpunten van in $U(p)$ liggende punten zijn. De meetkunde van een accessibele, algemener van enige topologische ruimte, is dus de invariantentheorie van de groep der éénéénduidige bicontinue transformaties in die ruimte.

De Euclidische ruimte en ook de getallenrechte zijn als accessibele ruimten te beschouwen. Als omgevingen van een punt heeft men daartoe slechts te nemen resp. de bollen om zo'n punt en de (lijn-) intervallen, in welke het punt ligt. Op de getallenrechte kan men echter ook als omgeving van een punt (getal) x nemen de verzameling der punten y met $x \leq y < x + h$, waarbij h een willekeurig pos. getal. De axioma's I—IV zijn weer vervuld. Echter heeft de zo ontstane accessibele ruimte de merkwaardige eigenschap niet metrisch te zijn. Daarbij verstaat men onder metrische ruimte een puntverzameling, voor welker punten een afstandsbegrip is ingevoerd, dat volgende eigenschappen bezit: *a.* de afstand $d(P, Q) = d(Q, P)$ der punten P en Q is een niet-negatief getal, *b.* $d(P, Q) = 0$ impliceert dat P en Q samenvallen, en omgekeerd voor samenvallende punten is de afstand nul, *c.* voor drie punten P , Q en R geldt dat de som van twee der drie afstanden groter is dan of gelijk aan de derde, een uit de meetkunde van de driehoek bekende relatie.

Accessibele en metrische ruimten zijn voorbeelden van abstracte ruimten. De mathematicus abstraheert van de meeste eigenschappen, die de ruimtelijke aanschouwing hem geeft, en onderzoekt de gevolgtrekkingen uit een gering aantal door hem expliciet in het oog gevatte eigenschappen van zijn voorstellingsruimte, al of niet in gegeneraliseerde of gesimplificeerde vorm; hij experimenteert a.h.w. met zijn ruimtebegrip.

Ook andere begrippen dan die van omgeving en afstand kan men als groundbegrip nemen. Zo o.a. het begrip van gesloten hulsel (af-gesloten omhulling) ener verzameling V , d.i. die verzameling, die naast de punten van V elk ander punt bevat, dat in al zijn omgevingen een punt van V bevat. Aldus ingevoerd is het begrip „gesloten hulsel” een afgeleid begrip. Men kan het echter als groundbegrip nemen, o.a. voor de theorie der accessibele ruimten, zo men het slechts geschikt gekozen axiomatische eigenschappen toekent. Zelfs wordt het daardoor mogelijk ruimten te konstrueren, welker delen niet uit punten als laatste niet verder te splitsen elementen zijn opgebouwd ¹¹⁾.

Moet men ook nog als meetkunde beschouwen de theorie van ruimten, in welke weliswaar het punt als laatste element gehandhaafd blijft, doch dit zijn aanschouwelijk karakter geheel verloren heeft? Ik moge hier als voorbeeld noemen de ruimte der voor $0 \leq x \leq 1$ continue functies $f(x)$, waarbij men iedere dergelijke functie als „punt” beschouwt, en de ruimte metrisch wordt door als afstand van twee „punten” $f(x)$ en $g(x)$ de grootste der absolute waarden van $f(x) - g(x)$ te nemen. In ruimten met dergelijke vreemdsoortige punten kan het gevoel voor analogie en generalisatie ons dikwijls op het spoor van interessante eigenschappen brengen; men denke hier b.v. aan de theorie der voor de quantenmechanica zo belangrijke Hilbertse ruimte. Deze functieruimten liggen wel op of nabij de grens, die meetkunde en analyse scheidt. Zo min als de mathematicus van heden zich waagt aan een definitie van zijn vak, zal hij pogen voor de „meetkundigen”, die hij onderzoekt, een samenvattende karakteristiek te geven. Wel verre vindt hij zich van Euclides’ en Plato’s absolute meetkunde!

Het reeds bij Descartes voorkomend gezichtspunt met lijnsegmenten als met getallen te werken schijnt Barrow, de leermeester van Newton, tot een op Euclides’ *Elementen* steunende, volkomen exacte, meetkundige theorie van het reële getal te hebben gevoerd, waarbij alleen de natuurlijke getallen als bekend worden beschouwd¹²⁾. Op de mathematicus van het eind der 19e eeuw, gewend onder gebruikmaking van een der bekende theorieën van Dedekind, Cantor of Weyerstraß de reële getallen genetisch uit de rationale getallen af te leiden, en vertrouwd met het streven de niet-strijdigheid der meetkunde terug te voeren tot de onderstelling dat de analyse dit is, moet een dergelijke meetkundige theorie van het reële getal wel de indruk hebben gemaakt van een wiskunde op haar kop!

De samenhang tussen de theorieën van natuurlijk getal, van rationaal getal en van reëel getal mag ik in grote trekken bekend onderstellen, en wil ik daarom slechts kort aanduiden. Men kan hier als zo vaak het streven naar generalisatie, dat de gehele wiskunde doortrekt, aan het werk zien. Van de vier hoofdbewerkingen der rekenkunde: optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen zijn slechts de eerste en derde in het systeem der natuurlijke getallen onbeperkt uitvoerbaar. Toevoeging der nul en der negatieve gehelen doet het systeem der gehele getallen ontstaan, waarin ook de aftrekking onbeperkt uitvoerbaar is. De overgang tot de rationale getallen doet alle bewerkingen onbeperkt uitvoerbaar worden, de deling

door nul buiten beschouwing gelaten. Voor het praktisch gebruik is dit laatste systeem geheel voldoende. Reeds Pythagoras, of in ieder geval zijn school, wordt bekend ondersteld met het feit, dat $\sqrt{2}$ geen rationaal getal is; evenmin zijn dit de getallen e en π , die daarenboven geen wortels zijn van hogere machtsvergelijkingen met gehele coëfficiënten. Een nieuwe uitbreiding was nodig; de vier bovengenoemde mathematici gaven verschillende, doch precies even ver voerende, z.g. isomorfe theorieën van het reële getal.

Naast de door hen gevolgde genetische weg, uitgaand gelijk de eerste van de theorie der natuurlijke getallen en meetkundige onderstellingen, of gelijk de laatste drie van de theorie van het rationale getallensysteem, kan men zich ook een axiomatische opbouw denken. Deze is inderdaad mogelijk en berust op het begrip van getallenlichaam. Daaronder wordt verstaan een klasse van elementen, getallen genoemd, welke paarsgewijs een som en een product hebben, waarbij dan de volgende axioma's als vervuld worden beschouwd: de optelling is associatief, dus $a + (b + c) = (a + b) + c$, en commutatief, d.w.z. $a + b = b + a$, verder heeft $a + x = b$ steeds een oplossing x ; de vermenigvuldiging is associatief, dus $a \cdot bc = ab \cdot c$; tussen optelling en vermenigvuldiging bestaan twee distributieve relaties: $a \cdot (b + c) = ab + ac$ en $(b + c) \cdot a = ba + ca$; er is nu één element 0 , waarvoor dus steeds $a + 0 = a$ is; ten slotte zullen voor $a \neq 0$ ook de vergelijkingen $ax = b$ en $ya = b$ oplossingen voor x resp. y toelaten. Het getallenlichaam heet commutatief, als steeds $ab = ba$ is.

Men verifieert gemakkelijk, dat de rationale getallen een commutatief lichaam vormen. De klasse der reële getallen laat zich nu axiomatisch definiëren als het grootste getallenlichaam, dat de rationale getallen „omvat”, lineair geordend is (d.w.z. tussen 2 getallen α, β geldt steeds één en slechts één der betrekkingen $\alpha < \beta$, $\alpha = \beta$, $\beta < \alpha$, waarbij de ordeningsrelatie de eigenschappen heeft: $1^\circ \alpha < \beta, \beta < \gamma$ geeft $\alpha < \gamma$, $2^\circ \alpha < \beta$ geeft $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$, $3^\circ \alpha < \beta$, $0 < \gamma$ geeft $\alpha\gamma < \beta\gamma$), en voor welke uit $0 < \alpha$, $0 < \beta$ het bestaan van een natuurlijk getal n met $\alpha < n \cdot \beta$ volgt¹³). De laatste aanname staat bekend als axioma van Eudoxus, naar de mathematicus van wie de in Euclides' *Elementen* voorkomende theorie der geometrische verhoudingen afkomstig is. Wie in Hilbert's *Grundlagen der Geometrie* de groep V der continuïteitsaxioma's naleest, bemerkt de grote overeenstemming tussen de wijze, waarop een modern axiomastelsel de continuïteit in de Euclidische meetkunde invoert, en die, waarop het lichaam der rationale getallen boven tot dat der reële getallen werd uitgebreid. Bij de immer aanwezige rivaliteit

tussen meetkundigen en analytici en om een verwijt te ontgaan, dat in een analoog geval als juist geschetst door Bieberbach in de volgende bewoordingen wordt gevat: „der peinliche Eindruck bleibt, daß da die Geometrie in etwas anstößiger Weise hinter den Begriffsbildungen der Analysis hersteigt”¹⁴⁾, mag men van de moderne geometer een poging verwachten de invoering der reële getallen te geometriseren. Dit is dan ook geschied; in 1932 karakteriseerde de Rus Pontrjagin¹⁵⁾ het systeem der reële getallen als een commutatief getallenlichaam, dat een Hausdorffse (d.i. een speciale accessibele) ruimte is, welke de drie hier niet nader toe te lichten eigenschappen heeft van continu, samenhangend en lokaal-bicompact te zijn, en in welke de rationale getallen overal dicht liggen.

De tot nu toe beschouwde talstelsels zijn ontstaan door generalisatie, uitgaand van de natuurlijke getallen. Ook toevoeging der complexe getallen geeft slechts een verdere uitbreiding. De vraag rijst nu: vormen alle talstelsels, die de mathesis benut, een nest, dus een verzameling, waarbij het ene stelsel steeds deel van het andere uitmaakt? Of bestaan er talstelsels, die door uitbreiding een gegeven stelsel in verschillende richtingen voortzetten? Zijn er ook talstelsels, die geheel los van elkaar staan? Beide laatste vragen kunnen bevestigend beantwoord worden; evenmin als er een absolute meetkunde bestaat, rust de analyse op een absoluut talstelsel; evenals de meetkunde is het begrip „analyse” gerelativeerd.

Laat mij hier enkele voorbeelden geven, en wel eerstens van talstelsels, die allen getallenlichamen zijn. De restklassen modulo p , waarbij p een ondeelbaar getal, vormen een lichaam; een bepaalde restklasse bevat alle natuurlijke getallen, welke bij deling door p dezelfde rest laten. Het is duidelijk, dat haar aantal gelijk is aan p . Tussen deze restklassen laten zich nu de hoofdbewerkingen zo definieren, dat aan de axioma's voor commutatieve getallenlichamen wordt voldaan. Aldus ontstaan talstelsels, die slechts uit eindig veel „getallen” zijn opgebouwd. Zij spelen een rol bij de opbouw van meetkunden, die slechts een eindig aantal punten bezitten.¹⁶⁾

De reeds genoemde complexe getallen laten zich als (geordende) paren van reële getallen opvatten; ze vormen een commutatief getallenlichaam. Ook groepen van n reële getallen (met $n > 2$) kunnen als z.g. hypercomplexe getallen worden beschouwd; volgens een beroemde stelling van Frobenius¹⁷⁾ zijn slechts voor het geval $n = 4$ de definities voor optelling en vermenigvuldiging zo te kiezen, dat het systeem weer een lichaam is; dit lichaam der z.g. quaternionen is echter niet commutatief.

Zowel complexe getallen als quaternionen zijn niet lineair geordend¹³⁾. Er bestaan daarnaast getallenlichamen, die weliswaar lineair geordend zijn, doch niet aan het axioma van Eudoxus voldoen¹⁸⁾.

Deze voorbeelden zijn reeds voldoende ter beantwoording der gestelde vragen. Ze leiden ook weer tot interessante meetkundige gevolgtrekkingen. Zo geldt in een projectieve meetkunde, aan welke een niet-commutatief getallenlichaam ten grondslag ligt, de bekende stelling van Pascal voor het lijnenpaar niet¹⁹⁾; de getallenlichamen, welke lineair geordend zijn, doch aan het axioma van Eudoxus niet voldoen, voeren tot z.g. niet-Eudoxische of niet-Archimedische meetkunden¹⁸⁾.

Vorderen wij van een talstelsel niet, dat alle voor een getallenlichaam gevorderde axioma's vervuld zijn, zo wordt het aantal mogelijkheden nog belangrijk groter; o.a. door toetreding der vele hypercomplexe systemen. In geheel andere richting liggen de uitbreidingen der natuurlijke getallen tot transfinitie kardinaal- en ordinaalgetallen. Een natuurlijk getal kan op twee wijzen opgevat worden: 1° als aantal, d.w.z. twee eindige verzamelingen met even veel elementen hebben een zelfde aantal, 2° als ordinaalgetal, d.w.z. een eindige lineair geordende verzameling heeft het ordinaalgetal n , als de elementen der verzameling zich met behoud der volgorde laten afbeelden op $1, 2, 3, \dots, n$. Iedere eindige lineair geordende verzameling heeft een zelfde natuurlijk getal als kardinaal- en als ordinaalgetal. Laten we verzamelingen met oneindig veel elementen toe, zo verandert de situatie geheel; zo hebben de verzamelingen $0, 1, 2, 3, \dots$ en $1, 2, 3, \dots, 0$ hetzelfde kardinaal-, doch verschillend ordinaalgetal. Hier ontstaat een bifurcatie van het stelsel der natuurlijke getallen. Met beide soorten z.g. transfinitie getallen kan men, zij het in beperkte en in verschillende mate, werken als met natuurlijke getallen. Dat er oneindig veel verschillende transfinitie ordinaalgetallen zijn, is evident na invoering van het begrip van welgeordende verzameling; dat er ook oneindig veel transfinitie kardinaalgetallen zijn, is een der grote ontdekkingen van de schepper van de leer der verzamelingen, Georg Cantor²⁰⁾.

Ik ga thans over tot de bewijsmethoden. Uitgaande van axioma's voert de deductie tot steeds dieper liggende stellingen. De afleidingsregels zijn of karakteristiek voor de wiskunde of de wiskunde is slechts één der gebieden voor haar gebruik. Voor de strikt mathematische regels kan men zich dan weer de vraag naar haar herkomst voorleggen. Geeft de intuïtie de zekerheid, dat toepassing niet tot contradicties voeren zal?

Er zijn in de geschiedenis der wiskunde drie perioden aan te wijzen, die enig antwoord op deze vraag vermogen te geven; de eerste is die waarin het oneindige een probleem was voor Griekse wiskunde en - wijsbegeerte beide, de tweede de 17e en 18e eeuw, de tijd van ontstaan en opbouw der infinitesimaalrekening, ten slotte de derde, nog niet afgesloten, uit het wetenschappelijk werk van Cantor voortgekomen periode. In elk is het het begrip van het oneindige in een of andere vorm, dat de mathematicus door het poneren van nieuwe axioma's en het toepassen van tot dan ongebruikelijke deductieregels tracht te reduceren tot eigenschappen van het eindige.

De Griekse periode wijst naar de zo vaak behandelde sophismen van Zeno. Deze brachten, naar aangenomen wordt, de Griekse mathematici inzicht in de principiele denkmoeilijkheden van de begrippen continuïteit en oneindigheid. Met de ontdekking van de algemeenheid van het verschijnsel der irrationaliteit, dat vele vroegere bewijzen waardeloos maakte, toonden zij de noodzakelijkheid de opbouw der meetkunde te herzien; de exacte redentheorie van Eudoxus uit boek V der Elementen en de z.g. exhaustiemethode waren de hulpmiddelen om deze eerste crisis te overwinnen.

In de tweede periode was het de invoering der oneindig kleine grootheden in differentiaal- en integraalrekening, welke tot redeneermethoden voerde, die de moderne mathematicus niet meer als stringent vermag te beschouwen, en ook reeds destijds aanleiding gaven tot kritiek en een enkele poging tot verbetering; genoemd moet hier worden de door Lagrange aan het eind der 18e eeuw ondernomen, doch mislukte poging de analyse op te bouwen op een formeel werken met machtreeksen ²¹⁾. Volgens Waismann kan men in een tot deze periode te rekenen leerboek lezen: „die Differentialrechnung ist ein mystisches Operieren mit unendlich kleinen Größen; das Differential ist ein Hauch, ein Nichts; das Differential ist der Geist einer abgeschiedenen Größe” ²²⁾. Convergentievragen bij reeksen werden niet gesteld. De eerste helft der 19e eeuw toonde hoe deze moeilijkheden met behulp van het limietbegrip kunnen worden overwonnen.

De derde kritische periode heeft haar afsluiting nog niet bereikt. Ze ontstond met het optreden van paradoxen in de theorie van kardinaal- en ordinaalgetallen. Door inperking van het verzamelingsbegrip heeft men deze weten op te heffen, al is geen zekerheid verkregen, dat het optreden van paradoxen nu voorgoed is uitgesloten.

De leer der verzamelingen berust voor een deel op het z.g. keuzeaxioma, dat zegt: is M een verzameling van verzamelingen, die paarsgewijs geen gemeenschappelijke elementen hebben, zo bestaat

er minstens één verzameling S , die met elke tot M behorende verzameling één element gemeen heeft, en geen verdere elementen bevat. Het is door toelating van dit axioma, dat o.m. volgend theorema kan worden afgeleid: twee bollen van ongelijke straal kunnen in een eindig, voor beiden gelijk aantal deelverzamelingen worden gesplitst: $A_1, A_2, \dots, A_n$ voor de 1e bol, $B_1, B_2, \dots, B_n$ voor de 2e bol, zo dat twee verzamelingen A_j, B_j met gelijke index kongruent zijn ²³). Dit en meer dergelijke paradoxaal aandoende resultaten hebben vele mathematici met wantrouwen tegenover het keuzeaxioma vervuld. Speciaal de Poolse mathematische school heeft echter gedurende tientallen jaren het axioma met grote virtuositeit en succes benut. Het standpunt van de Pool Sierpinski tegenover dit axioma kan als zuiver empirisch worden aangeduid: „il n'est ni pour ni contre l'axiome du choix. Il convient de savoir où on l'applique et d'en tirer les conséquences. Bien des théorèmes ont été démontrés à l'aide de cet axiome et il est à désirer que les mathématiciens les connaissent" ²⁴).

De indeling der functies in de klassen van Baire onderstelt bekendheid met de ordinaalgetallen. Denjoy, leerling van Baire, gebruikte ze bij de invoering der totalisatie, een uitbreiding van het integraalbegrip van Lebesgue. Weliswaar kan men de totalisatie ook behandelen zonder ordinaalgetallen, en gaf Kuratowski een methode aan ze uit de bewijzen van vele stellingen, in welke formulering ze niet optreden, te elimineren. Dat neemt niet weg, dat bewijzen met deze getallen een veel dieper inzicht schijnen te geven dan die zonder hun gebruik. Het is dan ook niet te verwonderen, dat Denjoy ten aanzien dezer getallen een soortgelijk standpunt inneemt als Sierpinski ten aanzien van het keuzeaxioma ²⁵).

Het schijnt mij toe, dat deze voorbeelden reeds de conclusie wettigen, dat ook in de huidige kritische periode begrippen en redeneerprincipes, nodig voor het exploreren van nieuwe terreinen der mathematische wetenschap, niet in volmaakte vorm uit het onderbewuste omhoog komen, gelijk Pallas Athene uit het hoofd van Zeus; het is al experimenterend, dat de wiskundige bemerkt, welke vorm hij ze dient te geven om contradicties te vermijden.

Eerst met Peano (eind 19e eeuw) is het streven opgekomen theorema's en bewijzen der wiskunde geheel in een speciaal formalisme of symbolisme uit te drukken; niet alleen de mathematische, ook de logische axioma's moeten daarin worden weergegeven; ieder mathematisch bewijs dient uitsluitend in het formalisme te worden uitgedrukt; de bij het opstellen der deducties toe te passen aflei-

dings- en omvormingsregels moeten expliciet en scherp worden vermeld in een grotendeels in omgangstaal uitgedrukte metamathematica.

Na de mathematische axioma's en de aan de wiskunde eigen redeneermethoden dienen de specifiek logische axioma's en -redeneerschema's te worden beschouwd. De vraag in hoeverre een dergelijke scheiding is door de voeren, laat ik rusten. Bekend en dikwijls geciteerd is de uitspraak van Kant ²⁶⁾, naar welke de logica met Aristoteles „abgeschlossen und vollendet" is. De logica van Aristoteles was een niet-symbolische klassen- of begrippenlogica; ook niet-symbolisch was de propositie-logica der Stoicijnen. Alle ontwerpen tot symbolisering, zo die van Leibniz, leden schipbreuk, tot in 1847 Boole's *Mathematical analysis of logic* een begin maakte met het als logische algebra bekend staand symbolisme. Joergensen's oordeel over het door Boole bereikte zegt o.m.: „the mathematical method renders the operations effected and the expressions arising in dealing with the problems more or less obscure It is thus only the premises and the final results of treatment which directly represent logical facts, whereas the road by which he (d.i. Boole) proceeds from premises to results, is, logically speaking, meaningless nonsense." ²³⁾ Heeft ten slotte de logische algebra haar definitieve vorm gevonden, zo luidt zijn oordeel: „the algebra of logic is a purely formal calculus, the fundamental principles and theorems of which express those formal qualities which are common to different groups of objects such as propositions, classes, relations and areas;; common to all these forms of calculus is the fact that they assume the validity of a series of principles of inference, which are not expressly formulated, . . ." ²⁸⁾ Afleidings- en omvormingsregels ontbraken evenals in de gehele wiskunde van die tijd; de logische algebra was een onderdeel dezer wiskunde, doch geen logica. In 1879 plaatste Frege in zijn *Begriffsschrift* de propositielogica aan de aanvang der symbolische logica, en bracht haar direct in bijna volmaakte vorm; ze berust op zes axioma's; daarnaast formuleert hij één afleidingsregel, welke aldus te interpreteren is: „als „ p impliceert q ” en „ p ” ware proposities zijn, dan is ook „ q ” dit; de nog ontbrekende invullingsregel laat zich gemakkelijk toevoegen.

Aan het voorbeeld der klassieke propositie-logica is hiermee gebleken, hoe ook de redeneermethoden der logica door het experiment de vorm verkrijgen, die duisterheden en contradicties uitsluit.

De klassieke propositie-logica van Frege is nadien op velerlei wijzen geaxiomatiseerd. Ik wijs hier op een axiomastelsel voor deze

logica, dat nauw aansluit bij de Boole'se logische algebra, en aldus verkregen wordt. In een z.g. affirmatieve logica A_1 treden als relaties tussen proposities op „en” en „impliceert”. Er zijn 3 axioma's, een invullingsregel en 2 afleidingsregels; door toevoeging der relatie „of”, één axioma en één afleidingsregel ontstaat de affirmatieve logica A_2 ; toevoeging der relatie „niet-” en 2 axioma's geeft de minimaalcalculus M van Johansson voor proposities; nogmaals een axioma toevoegend, ontstaat de door Heyting geconstrueerde intuïtionistische propositie-logica I , terwijl ten slotte de toevoeging van het principe van het uitgesloten derde (te interpreteren als: een propositie is óf waar óf onwaar) de klassieke propositie-logica K geeft. De in deze logische stelsels uit de axioma's met de regels af te leiden formules, in welke een assertie-teken (νC) vooropgaat, zijn als ware proposities te interpreteren; alle ware proposities voor een dezer stelsels zijn het ook in elk der er op volgende. Evenals bij de meetkunde ontmoeten we hier in elkaar geschakelde systemen.

Nu kan men naast de affirmatieve stelsels A_1 , A_2 , M , I en K , welke tot ware theorema's voeren, analoog gebouwde ontkennende stelsels A_1' , A_2' , M' , I' en K' van propositie-logica aangeven, welke tot steeds onware theorema's voeren. Daarbij is weer ieder stelsel deel van het volgende, terwijl K en K' als identiek kunnen worden beschouwd, daar ieder theorema in K door ontkenning een steeds onwaar theorema van K' wordt, en omgekeerd. De stelsels I en I' daarentegen zijn niet op deze wijze in elkaar over te voeren; waar in I het principe van het uitgesloten derde niet, daarentegen het principium contradictionis wel is af te leiden, is in I' juist het omgekeerde het geval.

Zo blijkt ook bij het stelsel der propositielogica (K , K') bifurcatie op te treden, zij het dan in andere richting dan die ik bij de meetkunden liet zien ²⁹⁾.

Het begrip: interpretatie van een propositie-logica kan op verschillende wijzen gedefinieerd worden. Ik duidde reeds de gewone 2-waardige interpretatie der klassieke propositie-logica aan; in zekere zin is ze ook 2^n -waardig te interpreteren, met n een natuurlijk getal. Daar de intuïtionistische propositie-logica deel uitmaakt van de klassieke, kan men haar als 2- of 2^n -waardig opvatten; daarnaast vond Heyting een 3-waardige interpretatie ³⁰⁾; aan Jaskowski is echter gebleken, dat in de meest scherpe zin deze logica alleen een interpretatie toelaat, waarbij de elementaire proposities aftelbaar oneindig veel waarden hebben ³¹⁾. In laatst bedoelde zin 3-waardig is een door Lukasiewicz gekonstrueerde propositie-logica, die geheel vrij staat van de klassieke ³²⁾. Indien ik ten slotte nog vermeld,

dat men naast product-ruimten ook producten van propositie-logica's kan konstrueren ³³), en nog vele verdere (o.a. modale) stelsels waren toe te voegen, zal het duidelijk zijn, dat de propositie-logica een zelfde beeld vertoont als meetkunde en analyse, een beeld als zich ook voor praedicaten- en relatie-logica zou kunnen laten schetsen.

Op een ieder, die als Plato en Kant in de wiskunde een absolute wetenschap, een wetenschap van eeuwigdurende waarheden wenst te zien, moeten mijn beschouwingen wel ontnuchterend hebben gewerkt. Relativering vindt men allerwege in de mathesis; haar beoefenaar heeft de deugd der bescheidenheid moeten leren. Door deze in toepassing te brengen heeft hij te meer gewonnen. Niet één meetkunde, niet één analyse, niet één logica staan tot zijn beschikking, doch vele in bonte schakering. De mathesis zelve laat zich moeilijker dan ooit omschrijven. Ze is niet meer de leer van de continue en discontinue grootheden; het natuurlijk getal heeft zijn overheersende plaats, die het in de 19e eeuw scheen in te gaan nemen, tot op heden niet kunnen verkrijgen; abstracte algebra, leer der puntverzamelingen, abstracte ruimten, symbolische logica tonen ons gebieden, in welke het natuurlijke getal geen dominerende rol meer heeft, doch de structuur van relaties het hoofdthema der onderzoekingen uitmaakt. Mede daardoor is de mogelijkheid van toepassingen van mathematische methoden uitgebreid tot die buitenmathematische gebieden, waar maat en getal slechts een ondergeschikte rol kunnen spelen. De moderne ontwikkeling heeft de „koningin der wetenschappen” haar eretitel niet ontnomen, doch deze bevestigt in een zin, die naamgever Gauß zeker niet heeft bevroed.

NOTEN.

- ¹⁾ Zie E. W. Beth, *Wijsbegeerte der wiskunde*, 2e druk, Antwerpen-Nijmegen 1948, p. 18 e. 19.
- ²⁾ Zie N. Bourbaki, *L'architecture des mathématiques* in: *Les grands courants de la pensée mathématique présentés par F. le Lionnais*, Cahiers du sud 1948.
- ³⁾ Zie W. V. Quine, *Mathematical logic*, New York 1940, p. V.
- ⁴⁾ Men zie hierover nader F. Enriques, *Signification de l'histoire de la pensée scientifique*, Act. sci. Paris 1934.
- ⁵⁾ Zie B. L. van der Waerden, *Euclides* 22 (1946/47), p. 300—309, en zijn boek: *Ontwakende Wetenschap*, Groningen 1950.
- ⁶⁾ Zie ook E. J. Dijksterhuis, *De elementen van Euclides I e. II*, Groningen 1929 e. 1930.
- ⁷⁾ Vergelijk E. J. Walter, *Dialectica* 3 (1949), p. 247 e.v.; Beth, loc. cit. 1), boek I, hfdst. 1; L. O. Kattsoff, *A philosophy of mathematics*, Ames (Iowa) 1948, ch. 15.
- ⁸⁾ Zie N. Bourbaki, *Éléments de math.*, 1re partie, livre III, chap. 3 e. 4, Act. sci. 916, Paris 1942, p. 142—148 (note historique); E. J. Dijksterhuis, *Descartes als wiskundige*, *Euclides* 9 (1932/33), p. 57—76.
- ⁹⁾ Voor een historisch overzicht der niet-Euclidische meetkunden zie Bonola-Liebmann, *Die nichteuclidische Geometrie*, Leipzig-Berlin 1921, of H. J. E. Beth, *Inleiding in de niet-Euclidische meetkunde*, Groningen 1929.
- ¹⁰⁾ Zie O. Bottema, *De meetkunde als invariantentheorie*, Openbare les, Groningen 1931; E. T. Bell, *Development of mathematics*, New York-London 1945, p. 423, 424, 442—453; J. A. Schouten, *Over de wisselwerking tussen wiskunde en physica in de laatste 40 jaren*, *Euclides* 24 (1948/49), p. 268.
- ¹¹⁾ Zie J. Ridder, *Über topologische Eigenschaften von Strukturen*, Verhand. Ned. Akad. Wet. Amsterdam, sectie I, 18 no 4 (1944), 43 pag.; G. Birkhoff, *Lattice theory*, New York 1948, ch. 11, alsmede daar genoemde lit.
- ¹²⁾ Zie Bourbaki, loc. cit. ⁸⁾, p. 148.
- ¹³⁾ Zie Enzykl. Math. Wiss., Band I. 1, Heft 2 (1939): F. Bachmann, *Aufbau des Zahlensystems*, p. 21; A. Loewy, *Lehrbuch der Algebra I*, Berlin 1914, p. 174—188; D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Berlin 1930, Anhang 6.
- ¹⁴⁾ Zie L. Bieberbach, *Einl. in die höhere Geometrie*, Leipzig-Berlin 1933, p. 43.
- ¹⁵⁾ Zie L. Pontrjagin, *Ann. of math.* (2) 33 (1932), p. 163—174.
- ¹⁶⁾ Voor meetkunden met eindig veel punten zie Bieberbach, loc. cit. ¹⁴⁾, Kap. I; O. Bottema, *De elementaire meetkunde van het platte vlak*, Groningen 1938; J. van IJzeren, *Moderne vlakke meetkunde*, Zutphen 1941.
- ¹⁷⁾ Zie P. Dienes, *The Taylor series*, Oxford 1931, p. 62, 63.
- ¹⁸⁾ Zie Hilbert, loc. cit. ¹³⁾, § 12 (en daar genoemde lit.); ter inleiding: F. Waismann, *Einführung in das mathem. Denken*, Wien 1936, Kap 14, en J. C. H. Gerretsen, *Niet-Archimedische meetkunde*, *Euclides* 19 (1942/43), p. 14—26.
- ¹⁹⁾ Zie Bieberbach, loc. cit. ¹⁴⁾, p. 30.
- ²⁰⁾ Zie G. Cantor, *Gesammelte Abhandlungen* (herausgegeben von E. Zermelo), Berlin 1932; deze Abh. vormen ook thans nog een der beste inleidingen in deze fascinerende theorie. Verder: W. Sierpinski, *Leçons sur les nombres transfinis*, Paris 1928; W. Sierpinski, *Hypothèse du continu*, Warszawa-Lwow 1934; A. Denjoy, *L'énumération transfinie I*, Paris 1946 (met uitvoerige bibliografie).
- ²¹⁾ Zie Bell, loc. cit. ¹⁰⁾, ch. 13.
- ²²⁾ Zie Waismann, loc. cit. ¹⁸⁾, p. 2.

²³⁾ Zie S. Banach en A. Tarski, *Fund. math.* **6** (1924), p. 244 e.v.; W. Sierpinski, *Fund. math.* **33** (1945), p. 229 e.v.; 235 e.v.

²⁴⁾ Zie een voordracht van Sierpinski in: *Les entretiens de Zurich*, publiés par F. Gonseth, Zurich 1941, p. 139.

²⁵⁾ Zie A. Denjoy, *La part de l'empirisme dans la logique mathématique* in: *Travaux du Congrès Descartes VI*, *Act. sci.* no 535 (1937).

²⁶⁾ Zie Emm. Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, Einleitung zur zweiten Auflage.

²⁷⁾ Zie J. Joergensen, *A treatise of formal logic I*, Copenhagen-London 1931, p. 115, 116.

²⁸⁾ Zie Joergensen, *A treatise of formal logic II*, 1931, p. 144.

²⁹⁾ Zie Ridder, *Proceed. Ned. Akad. Wet. Amsterdam* **53** (1950).

³⁰⁾ Zie A. Heyting, *Sitz. ber. Preuss. Ak. Wiss. (Phys. Math. Kl.)* **1** (1930), p. 56.

³¹⁾ Zie S. Jaskowski, *Actes Congrès Phil. scient. VI*, *Act. sci.* no 393, Paris 1936.

³²⁾ Zie een voordracht van J. Łukasiewicz, loc. cit. ²⁴⁾, p. 82 e.v.; M. Wajsberg, *C. R. Soc. Sci. Varsovie* **24** (1931), p. 126 e.v.; J. Slupecki, *C. R. Soc. Sci. Varsovie* **29** (1936), p. 9 e.v.

³³⁾ Zie Ridder, *Proceed. Ned. Akad. Wet. Amsterdam* **51** (1948).

MEDEDELING OVER WISKUNDE FILMS

Dr J. T. Groenman, directeur van de „Rijks Hogere Burgerschool” te Assen verzoekt ons mee te delen, dat hij twee wiskunde-films (meetkundige plaatsen en regelmatige veelhoeken) onder zijn hoede heeft, die bestemd zijn om uitgeleend te worden aan andere scholen en die bij hem te bevragen zijn.

Opleiding voor de akten

WISKUNDE L.O. en K I

F. A. VERNAC, Anton Mauvestraat 9 - Heemstede - Tel. 35050

Verschenen:

Dr J. J. W. BERGHUYS S. J.

GRONDSLAGEN VAN DE AANSCHOUWELIJKE MEETKUNDE

De schrijver behandelt de vraag of de aanschouwelijke meetkunde tot de zuivere wiskunde gerekend moet worden op een wijze die ook voor wiskundigen aanvaardbaar is. De vele argumenten, ontleend zowel aan de geschiedenis als aan de moderne ontwikkeling der wiskunde, die hij voor zijn opvatting aanvoert, maken het moeilijk bij het verdere onderzoek van de hier aangeerde problemen aan zijn werk voorbij te gaan.

240 pag. f 9,50 - geb. f 11,—

N.V. Erven P. NOORDHOFF - Groningen-Djakarta

Ook bij de boekhandel verkrijgbaar

NOORDHOFF'S AANTEKENBOEKJE

voor het aantekenen van cijfers — 11de druk

Handig zakformaat - 13 bij 23 cm - in zeer sterk Linsonbandje
prima houtvrij schrijfpapier. Bevat een liniatuur voor 36 namen
op elk folio

Uitgave A - 13 folio's f 0,90

Uitgave B - 21 folio's f 1,10

Verder nog een lesrooster en lerarenlijst

Bij de boekhandel verkrijgbaar

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Zo juist verschenen:

C. J. ALDERS

DRIEHOEKSMETING

voor M.O. en V.H.O.

14de-17de druk

f 1,90 - gecart. f 2,30

C. J. ALDERS

ALGEBRA

voor M.O. en V.H.O.

deel II A

18de-20ste druk

f 2,60 - gecart. f 3,10

Dr H. J. E. BETH

en

Dr P. J. VAN LOO

MECHANICA

voor het M.O.

met vraagstukken

7de druk f 4,75

Dr D. J. E. SCHREK

BEGINSELEN DER ANALYTISCHE MEETKUNDE

11de druk

f 3,90 - gebonden f 4,75

Zeer binnenkort verschijnt:

P. WIJDENES

VLAKKE MEETKUNDE

voor voortgezette studie

geschreven op verzoek van
opleiders voor de akte

Wiskunde L.O.

305 blz. - 342 fig.

65 uitgewerkte voorbeelden

f 13,— - gebonden f 14,50

Prof. Dr B. L. van der Waerden

ONTWAKENDE WETENSCHAP

Egyptische, Babylonische en
Griekse wiskunde

321 blz. - rijk geïllustreerd,
met uitvoerig register - in heel
linnen band f 13,50

Im ganzen: ein ausgezeichnetes
Buch.

Gnomon

The high scientific standard which
the author set himself has made
this popular interpretation of an-
cient mathematics into a very
readable book.

Archives Internationales

d'Histoire des Sciences

Es kann als sicher angenommen
werden, daß die große Bedeutung,
welche dieser erstmaligen Gesamt-
darstellung zukommt, bald die
Übersetzung aus dem Hollän-
dischen in andere Sprachen mit
sich bringen wird, so daß das be-
deutsame Werk einem noch größe-
ren Leserkreis zugänglich wird.

Monatsheft für Mathematik

Ook bij de boekhandel verkrijgbaar.

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN