

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM

DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, HASSELT

PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT

DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT

DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

27e JAARGANG 1951/52

IV

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 3,00 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van de **Wimecos** storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 Septémbre 1950 t/m 31 Augustus 1951 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) ten bedrage van f 5,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107III, Amsterdam, aan wie tevens alle correspondentie gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, van Lenneplaan 16. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt; in het vel gedrukt.

I N H O U D.

	Blz.
P. W., Dr H. J. E. BETH †	145
H. J. E. BETH †, Over de afleiding van de formules voor de scheve worpbeweging	146
Drs H. PLEYSIER, Desiderata van het hoger economisch onderwijs t.a.v. het wiskundeonderwijs op de middelbare school	151
Discussie over de voordracht van de heer Drs H. Pleysier	161
Wimecos	164
Nederlandsche Economische Hogeschool.	
Propaedeutisch herexamen September 1950	166
Propaedeutisch herexamen September 1951	166
Propaedeutisch examen Mei 1951	167
Propaedeutisch herexamen September 1951	168
Prof. ir. F. M. ROETERINK, Wordt aanpassing aan de veranderde maatschappelijke structuur bereikt door de richtlijnen van de Ministeriële nota's van 11 Januari en 19 Juli 1951?	169
Boekbespreking	179
Korrel CIV. Over de verticale cirkelbeweging	184
Korrel CV. Hoe bewees Pythagoras de stelling van Pythagoras?	185
Dr M. v. VLAARDINGEN, Enige opmerkingen naar aanleiding van het eindexamen H.B.S. Stereometrie 1950	188
Dr W. P. THIJSEN, Over het terugbrengen van een omgekeerde bewerking van hogere trap tot de rechtstreekse bewerking	196
Staatsexamen Gymnasium, bedoeld in artikel 12 van de Hoger-Onderwijswet	207
Mondeling Wiskunde (A)	207

Dr H. J. E. BETH

Op 6 Febr. 1952 in de ouderdom van 71 jaar is onze vriend Beth de eeuwigheid ingegaan; nagestaard door de velen, die hem kenden en dus hoogachtten. Beth, de veelzijdige geleerde, de bescheiden arbeider in de wiskundige hof: lid van verdienste van het Wiskundig Genootschap, (een zeldzame onderscheiding, van 1900 tot heden slechts twee!), 13 maal bekroond voor prijsvragen van het genootschap; vragen over onderwerpen, die de meesten onder ons nauwelijks kunnen lezen, laat staan beantwoorden, zoals hij dat deed.

Laat ik niet verder gaan met de overledene te schetsen in zijn werk, men sla afl. 5 op van de 25e jaargang van „Euclides”, verschenen op 5 Juli 1950 ter gelegenheid van zijn 70e verjaardag, het z.g. Beth-nummer.

Kennis, geleerdheid, wilskracht, hij bezat ze in ruime mate, wij stellen die hoog; maar wat zijn ze zonder „de mens”? Gezegend is de mens, die naast deze gaven, ook een „mens” is in de hoge, zuivere betekenis van het woord; hij was gezegend. Hij stelde zijn hart open voor hen, die hem lief en dierbaar waren en voor zijn vele vrienden. De eersten verliezen in hem een man en een vader, een voorbeeld voor ieder. De laatsten eren hem om zijn hartelijke, ware vriendschap. We zijn hem dankbaar voor wat hij voor ons was; we brengen hem hulde voor wat hij deed voor de wetenschap en het onderwijs en daardoor voor ons volk, dat trouwe, gave karakters zo bitter nodig heeft.

De werktuigen zijn hem ontvallen; hij ruste in vrede. Het eeuwige licht moge hem deelachtig zijn.

P. W.

8 Febr. 1952.

OVER DE AFLEIDING VAN DE FORMULES VOOR DE SCHEVE WORPBEWEGING

door

H. J. E. BETH †

§ 1. Om de vraag duidelijk te kunnen stellen, begin ik met het vraagstuk van de vrije valbeweging. Ik formuleer dit, gesplitst in twee vragen, aldus:

een gegeven stoffelijk punt wordt zonder beginsnelheid in de omgeving van de aarde losgelaten; 1° beschrijf de beweging, die het zal uitvoeren; 2° bepaal de kracht, aan welke het onderworpen is.

Het antwoord op de eerste vraag is kinematisch, dat op de tweede dynamisch. Het laatste zal dus pas gegeven kunnen worden nadat een stelsel axioma's aan de dynamica zal zijn ten grondslag gelegd.

De vraag 1° kan alleen worden beantwoord volgens de weg van de meting, gevolgd door inductie. In zijn eenvoudigste vorm luidt het kinematische antwoord: de beweging is er een, waarbij de versnellingsvector constant is; deze is verticaal naar beneden gericht, en de grootte is g .

Op grond van een van de axioma's van de dynamica kan, na de invoering van deze, als antwoord op de vraag 2° gegeven worden: het punt beweegt zich onder de werking van een standvastige kracht, die verticaal naar beneden gericht is en waarvan de grootte bedraagt mg .

Het volledige vraagstuk van de vrije val is dynamisch; we waren echter in staat uit dat dynamische vraagstuk een kinematisch vraagstuk af te zonderen, dat we zouden kunnen noemen de *kinematische zijde* van het volledige dynamische vraagstuk.

§ 2. Ik kan nu overgaan tot de scheve worpbeweging, en formuleer het vraagstuk, weer gesplitst in twee gedeelten: een stoffelijk punt wordt in de omgeving van de aarde losgelaten met een niet-verticale beginsnelheid v_0 ; 1° beschrijf de beweging, die het uitvoert; 2° bepaal de kracht, die het gedurende de beweging ondervindt.

Mijn vraag is nu, of dit vraagstuk, hetzij geheel, hetzij gedeeltelijk, door redenering alleen, dus zonder nieuwe hulp van de empirie, tot het in § 1 gevondene kan worden teruggebracht.

Ik zal twee pogingen wagen.

Het punt heeft, omdat het in de omgeving van de aarde is, een standvastige versnellingsvector g . Gegeven is de beginsnelheid v_0 . De onder 1° gevraagde beweging is er dus een, die een beginsnelheid v_0 en een standvastige versnellingsvector g heeft. Deze gegevens stellen ons in staat, dadelijk de zo bekende formules van de scheve worpbeweging neer te schrijven, waarmee de vraag onder 1° beantwoord is en de kinematische zijde van het vraagstuk gevonden. Voor het antwoord op vraag onder 2° kan (de invoering van het dynamische axiomenstelsel wordt ondersteld) weer uit een van de axioma's afgeleid worden, dat de werkende kracht voorgesteld wordt door mg en dat ze dus dezelfde is als in het geval van de vrije val.

De fout in deze redenering is hierin gelegen, dat ik uit § 1 meer heb willen lezen dan daarin voorkomt. Het punt is daar in de toestand van de vrije val; het heeft òf geen snelheid òf een verticaal naar beneden gerichte snelheid. Uit het feit dat *zulk* een punt een konstante versnellingsvector g heeft, heb ik in mijn redenering geheel ten onrechte besloten tot de aanwezigheid van *zulk* een versnellingsvector in een willekeurige bewegingstoestand. Bij deze onderstelling omtrent de versnelling is niet verrassend, wat als antwoord op de vraag onder 2° gevonden werd.

Deze poging is dus mislukt.

Men maakt de fout op dezelfde manier, als men, om de moeilijkheid te ontlopen, het vraagstuk van de scheve worp vervangt door het kinematische vraagstuk van de beweging van een punt, dat een beginsnelheid v_0 en een versnellingsvector g heeft.

§ 3. Men kan de fout ook op een andere manier maken. Ik denk het hoofdstuk omtrent verandering van omgeving („samenstelling van bewegingen”) behandeld en maak hiervan gebruik doordat ik een nieuwe omgeving invoer. Deze heeft ten opzichte van de oorspronkelijke omgeving, ten opzichte waarvan ik de beweging beschouwd heb en die ik met de aarde denk samen te vallen, een rechtlijnige eenparige translatie met snelheid v_0 . Door deze kunstgreep wordt het punt in de begintoestand tot rust gebracht. Op grond van het in § 1 gevondene kan ik nu zeggen, dat het punt gedurende zijn beweging ten opzichte van de nieuwe omgeving een standvastige versnellingsvector g heeft. Gewapend met dit resultaat keer ik tot de oorspronkelijke omgeving terug. Bekend is, dat de versnelling van een punt niet verandert door een sleepbeweging, die een eenparige rechtlijnige translatie is. Het punt heeft dus ten opzichte van de eerste omgeving een standvastige versnellingsvector g . De verdere behandeling verloopt als zoeven.

In deze redenering maakt men de fout (om het bij deze te laten), dat men vergeet, dat door de verandering van de omgeving de aarde zelf niet meer in rust blijft, of als vanzelfsprekend aanneemt, dat de invloed van een bewegende aarde dezelfde is als die van een stilstaande.

§ 4. Ik zal niet meer foutieve redeneringen verzinnen (de vorige heb ik ook niet zelf verzonnen!), want het zal nu wel duidelijk zijn, dat iedere poging moet mislukken. Men kan het antwoord op de in § 2 gestelde vragen niet uit het in § 1 gevondene halen, om de eenvoudige reden, dat het er niet in zit.

Hieruit volgt, dat men de scheve worpbeweging eerst aan de orde kan stellen nadat een stelsel axioma's aan de dynamica is ten grondslag gelegd. De worpbeweging blijkt het eenvoudigste dynamische vraagstuk te zijn, omdat het een voorbeeld is voor het geval, dat de werkende krachten standvastig zijn. Dit algemene geval wordt wel eens met de benaming „parabolische beweging” aangeduid, welke naam echter niet gelukkig gekozen is: de beweging is nl. nog niet bepaald door de vorm van de baan alleen. Tot dit algemene geval behoort het tegenwoordig zo geliefde vraagstuk, waarin op de kogel, behalve de zwaartekracht, nog een tweede standvastige kracht werkt.

§ 5. De mogelijkheid doet zich echter voor, dat men geen dag langer wil wachten, en onmiddellijk, nadat de kinematica afgehandeld is, niet alleen de vrije val, maar ook de worpbeweging aan de orde wil stellen. Men zal dan als ervaringsfeit moeten invoeren (en kan dat een axioma noemen, met de geruststellende verzekering, dat de gevolgtrekkingen in overeenstemming zijn met de resultaten van metingen), dat de versnelling, die een punt heeft bij de vrije beweging in de omgeving van de aarde, onafhankelijk is van de bewegingstoestand van het punt.

Deze methode is volkomen verantwoord, in alle geval verre te verkiezen boven redeneringen, zoals ik ze hierboven gegeven heb, omdat deze niet deugen.

Echter zou de methode van behandeling van de dynamische problemen weinig overtuigend worden, als men voor elk nieuw probleem zijn toevlucht moest nemen tot een nieuw ervaringsfeit of een nieuw axioma. We zouden het alleen kunnen verdedigen, als er didactische overwegingen waren, buiten het beperkte gebied van het mechanica-onderwijs gelegen, die ons noopten, er toe over te gaan.

Zulk een overweging zou betrekking kunnen hebben op behoeften, die andere leervakken aan een vroegtijdige behandeling van de kogelbaan gevoelen.

In dit verband zouden we er aan kunnen denken, dat het wiskundeonderwijs stellig gebaat is bij de toepassing van de wiskunde in andere leervakken. De theorie van de kogelbaan nu is een van de aardigste voorbeelden van zulk een toepassing. Ieder zal echter voor zichzelf moeten beslissen, of hij voor dit voordeel het bedoelde offer wil brengen.

Hierbij zal men nog moeten overwegen, dat de nu geschetste methode toch slechts een voorlopige behandeling van de „parabolische” beweging kan geven; men zal er later op moeten terugkomen en dan blijft het voor mij nog een vraag of hier niet van een nadeel moet gesproken worden.

§ 6. Ik ben me er van bewust, dat een enkele collega bij het lezen van deze beschouwing naar aanleiding van mijn onvoorwaardelijke veroordeling van de redeneringen van 2 en 3 zal komen tot het besluit: „deze schrijver is erger dan Schogt zelf”. Hij zal zich daartoe beroepen op het klassieke opstel van Schogt in Bijvoegsel 2e jg. 1925/26, waarin op blz. 65 als voetnoot 4) gelezen wordt: „Strict genomen zijn natuurlijk ook val en kogelbaan dynamische onderwerpen, maar het ontbreken van drukkingen maakt, dat men ze zonder veel bezwaar bij de kinematica kan behandelen, mits men maar zwijgt over de oorzaak der versnelling”.

Ik heb dit opstel bij zijn verschijning zo van harte toegejuicht en zo uitbundig geprezen, dat ik na 25 jaar wel de moed heb te verklaren, dat deze voetnoot op een aantal plaatsen bij mij bezwaar ontmoet.

Om te beginnen zou ik de eerste twee woorden willen laten vervallen. Val en kogelbaan zijn dynamische onderwerpen, niet strict genomen, maar dynamische onderwerpen, zonder meer.

Schogt zegt, dat men ze zonder veel bezwaar bij de kinematica kan behandelen. Hij heeft dus tegen de „behandeling”, zoals ik die bijv. in § 2 gaf (wie had anders verwacht?) wél bezwaar, m.a.w. hij acht haar foutief. Hij ziet niet véél bezwaar, m.a.w. hij vindt de fout niet erg. Maar ik geloof niet, dat het zin heeft te spreken over de grootte van een redeneerfout; er is hier slechts plaats voor een goedkeuring of een afkeuring.

Hij wil dus nog wel, zij het onder zwak protest, berusten in de behandeling volgens de laatste alinea in § 2, en deze behandeling houdt in, dat men niet spreekt over de oorzaak der versnelling,

d.w.z., dat men zich niets laat ontvallen over gravitatie, over zwaartekracht, maar ook niets over een invloed van de aarde, zelfs niet over het feit dat de aarde als omgeving fungeert of iets dergelijks, dat de hele zaak zou kunnen bederven. Maar zou Schogt dan wel in staat zijn het vraagstuk van de worpbeweging (maar dan ook werkelijk dat van de worpbeweging, en niet een ander vraagstuk) behoorlijk te formuleren?

Tenslotte: hij verklaart de mogelijkheid van de behandeling in de kinematica met de afwezigheid van drukkingen. Maar hoe moet het dan, als de worpbeweging opgeluisterd wordt door tegenwind (zie slot van § 4)?

Amersfoort, Februari 1952.

DESIDERATA VAN HET HOGER ECONOMISCH ONDERWIJS T.A.V. HET WISKUNDE- ONDERWIJS OP DE MIDDELBARE SCHOOL

Voordracht gehouden door Drs H. PLEYSIER
op de Jaarvergadering van Wimecos op 3 Januari 1952.

De titel van het onderwerp dat onze aandacht vraagt, eist een nadere toelichting. „Desiderata van het Hoger Economisch onderwijs t.a.v. het wiskunde-onderwijs op de Middelbare School” is als onderwerp van de inleiding aangekondigd. Dit moet niet zo verstaan worden dat vanwege het Hoger Economisch onderwijs bepaalde verlangens langs officiële weg geuit zijn, maar wel zo dat in kringen van hen, die belast zijn met het onderwijzen en bestuderen van de naar de wiskunde toegewende zijde van de economische wetenschappen een zekere eenstemmigheid heerst wat betreft bepaalde verlangens inzake het wiskunde onderwijs op de middelbare school.

De tijd is, dunkt mij, wel voorbij dat een dergelijk complex van verlangens door de middelbare school werd gezien als een overschrijding van bevoegdheid van de kant der vraagstellers. Immers veel meer dan vroeger is men zich in de kring van het middelbaar onderwijs bewust van het feit dat wij niet onderwijzen met als einddoel de school, maar dat wij juist het volle leven willen dienen door ons onderricht.

Daarom zal het goed zijn dat men zijn oor te luisteren legt voor de eisen van de praktijk.

Eigenlijk is dat niet iets nieuws.

Wie kennis neemt van de ontwikkeling van het H.B.S. programma moet toch wel sterk getroffen worden door het feit dat de wiskunde-opleiding op de H.B.S. sterk de kant van de studie te Delft uitwijst. Het komt mij voor dat men hierbij tegemoet gekomen is aan zekere eisen, die de ingenieursopleiding stelde en m.i. niet ten onrechte.

Sta mij daarom toe ook van uit de hoek van het Economisch onderwijs een aantal opmerkingen te maken en verlangens te uiten.

Daarbij zij aangetekend, dat deze opmerkingen mutatis mutandis ook gelden vanwege het onderwijs in Biologie en aanverwante vakken en, zij het in mindere mate, ook voor de medische studie.

Om deze verlangens te kunnen aanvoelen lijkt het mij dienstig met enige woorden te schetsen, waarom vanuit de Economie een roep komt om bepaalde zaken niet en andere anders en beter te behandelen in het wiskunde-onderwijs op de middelbare school.

Het beste is dit te doen door uit te gaan van een aantal voorbeelden.

Wanneer iemand een salarisverhoging krijgt is dat niet altijd een voordeel voor hem. Immers het is zeer goed mogelijk dat hij daardoor in een hogere belastingklasse valt. Daardoor kan het voordeel geheel opgeheven worden.

Van belang is hier de verhouding van de *toename* van de belasting tot de *toename* van het inkomen. Nu kan men zich indenken dat men niet zou werken met inkomensklassen maar dat voor *elk* inkomen een *bepaald* belastingbedrag zou vastgesteld zijn. De bedoelde verhouding zou dan van de aard van een differentiequotient zijn.

Het is duidelijk dat de differentiaalrekening over een dergelijk marginaal verschijnsel licht kan laten vallen.

Problemen betreffende maximale bevrediging van gezins-behoeften, en in 't algemeen alle situaties waar gestreefd wordt naar maximaal posities vereisen de wiskundige bestudering van maxima en minima.

Ook het belangrijke probleem van de elasticiteit vereist om zonder omslachtige redeneringen te kunnen worden voorzien, een wiskundige behandeling.

Zoals wellicht U bekend is verstaat men onder de elasticiteit van de vraag naar een goed de uitdrukking $-\frac{dx}{x} : \frac{dp}{p}$ ¹⁾ waarin x de hoeveelheid is en p de prijs.

Men zou het ook zo kunnen definieren: Elasticiteit is de verhouding van de procentuele afname van de vraag tot de procentuele toename van de prijs, voor een hoeveelheid en een prijs die men beschouwt.

Laat ik als voorbeeld nemen de accijns op gedestilleerd. Wanneer de elasticiteit gelijk aan 1 was, zou dit betekenen dat bij benadering bij 1 % verhoging van de accijns 1 % minder zou worden omgezet.

Zou de elasticiteit 0 zijn, dan wil dit zeggen dat het publiek in zijn aankopen zich niets van accijnsverhoging zou aantrekken.

Zou de elasticiteit oneindig groot zijn, dan zou het betekenen, dat het publiek zich bij prijsverhoging van alle aankopen zou onthouden.

¹⁾ Zie Allen, Mathematical Analysis for Economists, blz. 255 en 256.

Er zijn artikelen, waarvan de elasticiteit practisch nul is b.v. zout, lucifers en dergelijke.

Van belang, o.a. voor de belastingpolitiek, is het na te gaan hoe bij een bepaalde elasticiteit het verband tussen prijzen en gevraagde hoeveelheid is.

Het is eenvoudig in te zien dat wanneer de elasticiteit gelijk is aan 1, de vraagkrommen takken van gelijkzijdige hyperbolen zijn, terwijl bij een elasticiteit ongelijk aan 1 de situatie dadelijk gecompliceerder wordt wanneer men zich niet van het wiskundig apparaat zou bedienen.

Van deze onderwerpen en andere, zoals b.v. het gebruik van differentievergelijkingen moge ik verwijzen naar het boek over Econometrie van de hand van Prof. Tinbergen. Hierin wordt voor niet-economisten op glasheldere wijze de toepassing van de wiskunde op de economische wetenschappen uiteengezet.¹⁾

De Nederl. Economische Hogeschool te Rotterdam besloot in 1947 na ampele besprekingen in de stof voor het propaedeutisch examen ook de wiskunde in te lassen. Men ging er van uit, dat de opleiding van de aankomende studenten het niet mogelijk maakte om hen gezamenlijk de wiskunde-colleges te laten volgen. Deze werden daarom gesplitst in colleges voor oud-leerlingen van Gymnasium α en H.B.S. A en voor die van gymnasium β en H.B.S. B, in het vervolg genoemd colleges voor A's en voor B's. Het programma voor beide groepen is hetzelfde, voor wat het einddoel betreft, echter de wijze, waarop dit bereikt wordt, verschilt.

Beide groepen ontvangen 1 uur per week differentiaal- en integraalrekening, bovendien ontvangen beide groepen een uur per week instructie in de vorm van een practicum waar op sommige stukken van de theorie nader wordt ingegaan en waarbij een intensieve training in het vraagstukken maken plaats vindt.

Daar de A's een onvoldoende voorbereiding hebben om de colleges te volgen, is voor hen een applicatiecursus ingesteld, waarbij onderwerpen aan de orde komen, die van direct belang voor hen zijn om de colleges differentiaal en integraalrekening te kunnen volgen. Ook deze applicatiecursus is gecombineerd met 1 uur practicum.

Resumerend zien wij dus dat de A's 2 uur per week college hebben en 2 uur practicum, terwijl de B's een uur per week college hebben en 1 uur practicum. Voorts is de bepaling gemaakt, dat de A's, die afgewezen worden voor het examen, maar voldoende hebben voor

¹⁾ Prof. Dr. J. Tinbergen. Econometrie. Noordduyn's wetenschappelijke reeks.

het elementaire gedeelte, bij herhaling van het examen beschouwd worden als B's.

Het programma voor de colleges te Rotterdam is als volgt:

Voor het elementaire gedeelte:

Logarithmen, reeksen, gehele functies van de eerste, tweede en derde graad, andere rationale functies, irrationale functies, logaritmische schaalverdeling, trigonometrische functies. Toepassingen in de economie.

Voor het tweede gedeelte:

Het differentiaalquotient, regels voor het differentieren, meetkundige interpretatie van het differentiaalquotient, bepaling van maxima en minima. Meetkundige interpretatie van de integraal; begrip integraal, regels voor integratie. Toepassingen in de economie.

Dit programma is nader gedefinieerd door de aard der examen-vraagstukken. Zo horen partiële differentiaalquotienten, sommatieformules en reeksontwikkelingen zeker tot de stof. Van de differentiaalvergelijkingen alleen die, welke dadelijk met eenvoudige integraalrekening kunnen worden opgelost.

Voor studenten, die geregeld de practica volgen, is trouwens een preciese omschrijving niet nodig, omdat de examens volledig aansluiten op de stof, die gerespondeerd is.

In 1947 was deze hele opzet nog geheel provisorisch. Een tweetal problemen deed zich voor:

1. Wordt het programma door de wiskunde niet overladen?
2. Zal dit experiment geen onoverkomelijke bezwaren geven aan de A's?

Alleen de practijk kon hier antwoord op geven.

Dit antwoord was voor alle partijen een grote verrassing. In de eerste plaats bleek, dat de wiskunde geen essentiële verzwaring aan het programma gaf en ten tweede, dat het slaagpercentage van A's en B's practisch gelijk was.

In het eerste jaar van de nieuwe regeling slaagden 29 % A's en 31 % B's. De cijfers van de herexamens (na de grote vacantie) staan niet tot mijn beschikking.

Dit gunstige verschijnsel zette zich voort.

In 1948 kon prof. Houwing in zijn rectorale rede opmerken, dat de „wiskunde niemand van de studie in de economische wetenschappen behoeft af te houden”. Tevens maakte hij hierbij de opmerking: „Het is een harde waarheid, die er noch minder hard, noch minder waar door wordt, als men haar verdoezelt, dat velen door eind- en staatsexamens toegang verkrijgen tot het hoger onderwijs, die er niet thuis behoren en tot het behoorlijk volgen ervan

niet in staat zijn." Tot het uitzeven van dergelijke studenten droeg de wiskunde daadwerkelijk bij.

In 1949 maakte Prof. Wisselink in zijn rectorale rede de opmerking: „de propaedeuse beantwoordt in hoofdzaak aan haar doel en de gevreesde wiskunde blijkt wederom niet het grote struikelblok.”

En verder: „Voor de wiskunde slaagden reeds in eerste instantie 77 % der deelnemers.” „Na twee jaar propaedeuse kan men in deze nog slechts spreken van een ongeveer vastliggende koers.”

De ervaring na die tijd wijst in volkomen dezelfde richting.

Het zou, hoe interessant het ook zou zijn, ons thans te ver voeren, om in te gaan op het merkwaardige feit, dat vele A-studenten met zoveel succes zich een wiskundige kennis eigen maakten. Hun vooropleiding deed dit niet verwachten. Er moet bij velen niet een gebrek aan wiskundige aanleg de keuze van de A-richting bepaald hebben.

Een tweede merkwaardig feit kunnen wij ook slechts terloops vermelden. Het is, dat de oud-Gymnasiasten in het algemeen veel beter uit de bus komen dan de H.B.S.'ers. Ik heb, zoals gezegd, in 1948 eens een onderzoek ingesteld bij het eerste examen dat wij afnamen. Het bleek toen, dat Gymnasium β uitmuntte, dan volgde H.B.S. B, daarna Gymnasium α en tenslotte H.B.S. A.

Conclusies durf ik hier niet aan te verbinden, daarvoor is het onderzochte aantal te gering. Wel valt tijdens de responsies vaak de grote slagvaardigheid van de gymnasiumleerlingen op, alsmede hun vaardigheid om zich juist uit te drukken en zich in een nieuw probleem in te werken.

Bij de H.B.S.'ers A bleek het vaak nodig een zekere afkeer van de wiskunde te overwinnen. De reden daarvan is zeer zeker, dat in de A-kant wiskunde een aflopend vak is, dat blijkbaar niet al te zeer au sérieux wordt genomen.

Een α -gymnasiast staat veel gunstiger in deze. Ook al heeft hij een beperkt wiskunde-programma bestudeerd, toch behoort het tot de eindexamenstof met alle gunstige gevolgen van dien.

Bij de nadere bespreking van onze wensen inzake de vooropleiding hoop ik hier nader op in te gaan, maar reeds nu mag ik wellicht de vraag opwerpen „Zou het kiezen van A- of B-richting op de middelbare school alleen bepaald moeten worden door een samenloop van rapportcijfers? Zou een meer psychotechnisch ingesteld onderzoek niet beter de keus doen bepalen?” Deze vraag tot een oplossing te brengen is zeer belangrijk. Studenten, die een A-vooropleiding hadden, gaven soms voor hun keus op de middelbare school redenen op, die hun opleiders wel zeer in gebreke stelden. Vaak bleek, dat

de oorzaak van hun afkeer van de wiskunde ontsproot aan lessen in de 1e of 2e klas genoten. De gewoonte om op sommige scholen in de lagere klassen onbevoegde en vaak ook onbekwame leraren te laten doceren, lijkt mij dan ook funest.

Wat het wiskunde-onderwijs betreft, zoals dit gegeven wordt in Tilburg en aan de economische faculteiten te Amsterdam (S. U.) en Groningen, kan opgemerkt worden, dat dit in grote trekken met het programma te Rotterdam overeenstemt.

De economische faculteit aan de Vrije Universiteit te Amsterdam heeft een iets meer beknopt programma, terwijl ook de differentiatie naar A- en B-richting niet zo streng is doorgevoerd als te Rotterdam.

Nauw verwant met het wiskunde-onderwijs is het onderwijs in de statistiek. Er bestaat vaak een samentreffen in onvoldoende prestaties in beide vakken. Echter komt het geval van onvoldoende statistiek-examens naast voldoende wiskunde-examens vaak voor.

Het zou ons te ver voeren om ook deze kwestie onder ogen te zien. Mogelijk zijn er oorzaken aan te wijzen, die wortelen in 't middelbaar onderwijs, mogelijk is echter ook een oorzaak de eigeengeaardheid van dit studievak, dat, wil men het meer dan oppervlakkig behandelen, steunt op een brede wiskundige fundering.

Wanneer wij thans nader op het H.B.S.-programma ingaan in verband met de wensen, die het Economisch Hoger onderwijs stelt, dan treft ons al dadelijk de Stereometrie.

Practisch is er niets in deze tak van wetenschap, dat dadelijk toepasbaar is in een der Economische wetenschappen. Nochtans hebben wij voor ons de mening, dat men goed doet dit vak in zijn geheel te behouden.

Immers door dit te bestuderen heeft een leerling, die gedurende 5 jaren de H.B.S. B bezoekt een duidelijk overzicht gekregen van de wiskundige erfenis der Grieken. Ik ben mij er zeer van bewust, dat daarmee het laatste woord over de Griekse wiskunde niet gezegd is. Vele van de schoonste stellingen worden nooit onder het oog onzer leerlingen gebracht en van het levenswerk van mannen als Apollonios en Archimedes wordt in het algemeen maar zeer terloops melding gemaakt.

Maar goed, laten we niet het onmogelijke wensen. De commissie-Beth heeft suggesties gedaan om ook de meetkunde der kegelsneden te doen onderwijzen, maar het komt mij voor, dat het opvolgen van deze suggesties tot de vrome wensen behoort. Immers op het eind-examen wordt het toch niet gevraagd!

Is met de meetkunde dus een zeker afgerond gedeelte bestudeerd, dit geldt ook voor de driehoeksmeting.

De stof, die in de 4e en 5e klas onderwezen wordt, is weliswaar uit te breiden, maar deze uitbreidingen zijn in het algemeen niet van groot belang. De stof, die onze leerlingen met het oog op het eind-examen moeten kennen, is van voldoende omvang om een behoorlijk inzicht te verschaffen in de mogelijkheden, om het bestudeerde toe te passen in de meetkunde. Dat de goniometrische functies vaak niet behoorlijk gekend worden en nog minder de grafieken er van is jammer. Mogelijk dat eindexamenvraagstukken, die over deze onderwerpen gaan, de belangstelling er voor meer centraal zullen stellen.

Het gunstig oordeel over het afgerond zijn van meetkunde en driehoeksmeting gaat helaas niet op voor de algebra en de beschrijvende meetkunde.

De toepasbaarheid van de beschrijvende meetkunde in de economische wetenschappen is nihil.

Men kan echter de vraag ook zo stellen: „Waar is de beschrijvende meetkunde, zoals die op de H.B.S. onderwezen wordt, in de praktijk van waarde, anders dan misschien in Delft of misschien op een M.T.S.?”

De omvang van wat we doceren van de Beschrijvende Meetkunde is wel zeer beperkt. De resultaten, die wij bereiken (zie de eindexamenvraagstukken) zijn pover. Iemand, die een behoorlijke aanleg voor wiskunde heeft, kan dit vak in betrekkelijk korte tijd onder de knie krijgen, in zover het de H.B.S.stof betreft.

M.i. is de reden, dat met zoveel tijd zo weinig resultaat wordt bereikt, gelegen in het feit, dat de stof zowel voor leraar en leerling saai is. Er wordt veel gedaan en weinig bereikt. Het verrassende moment, dat in de meetkunde zo vaak voorkomt, treedt hier praktisch nooit op.

Zien wij nu een ogenblik naar het Gymnasium β . Daar is de Beschrijvende Meetkunde vervangen door Analytische meetkunde. En met welke grote voordelen!

Om te beginnen de intensieve studie van het coördinaat-begrip. Het bestuderen van de betekenis van de vergelijking van een rechte of kromme lijn, waardoor zoveel kan worden bijgedragen tot het helder en duidelijk worden van het functiebegrip! Het gevoel krijgen, dat er in de wiskunde iets overkoepelends is, waarbij én algebra én meetkunde een gelijke rol spelen!

En niet in de laatste plaats: het ongezochte voordeel, dat als oefenmateriaal veel van de schoonste eigenschappen der kegelsneden op ongezochte wijze naar voren komen! Als oefenmateriaal in het

scherp en logisch deduceren en combineren is de Analytische Meetkunde zeker niet de mindere van de Beschrijvende Meetkunde met zijn vele routineproblemen.

Rest nu de Algebra. Kan men in de eerste drie klassen spreken van een logische opbouw, dit ontbreekt grotendeels bij de uitbouw in de 4e en 5e klas.

Laat ik enige voorbeelden geven.

In de 3e klas spreekt men over de rekenkundige en meetkundige reeks. Logisch zou hieruit moeten volgen dat ook met enige woorden zou worden gesproken over de even eenvoudige harmonische reeks en de z.g. reken-meetkundige reeks. Niets daarvan. Toepassingen ontbreken op het gebied der financiële rekenkunde.

In de 3e klas wordt met enige woorden gewezen op de oneindig voortlopende meetkundige reeks. Wat zou nu meer voor de hand liggen, dan dat daarop intensief voortgebouwd zou worden in klas 4 en 5 en dat daardoor meer inzicht zou verkregen worden in het zo belangrijke limietbegrip!

En dan de functies! In klas 2 en 3 geeft men iets over coördinaten en eenvoudige grafieken (eigenlijk een laf aftreksel van de Analytische Meetkunde). In klas 4 en 5 dient men hier nader op in te gaan, maar, zoals zo velen van ons weten, er wordt niet grondig op in gegaan. Dat kan ook niet. Immers er staan nog andere onderwerpen te wachten. O.a. de reststelling. Misschien wel de meest mishandelde stelling op de H.B.S. Lees er b.v. Landau op na en zie wat er in onze leerboekjes van terecht komt. En dat in een tijd dat er helaas nog mensen voor de klas staan, die hun kennis moeten putten uit de boekjes, waaruit zij les geven!

Is het wonder dat het meest essentiële deel van onze H.B.S.-algebra n.l. het functiebegrip er zo ongelukkig van afkomt?

Naar mijn mening moet het vak Algebra radicaal op de helling. De maatschappij is niet gebaat met mensen, die met grote routine alle mogelijke logaritmische, puzzle's kunnen oplossen, maar wel met mensen die inzicht hebben in het functiebegrip. Die dit niet hebben als een van buiten geleerd lesje, maar die in de beginselen der wiskunde hebben leren graven!

Is dit nu wel te bereiken voor een middelmatige leerling? Mij dunkt van wel. Althans bij beperking van de omvang van de leerstof. Immers, als zo'n middelmatige leerling later wil doorstuderen, dan zal hij vroeg of laat toch aan een ernstige studie moeten geloven.

Trouwens, het examenprogramma van de H.B.S. zal toch enige

verstrakking moeten ondergaan. De naoorlogse jaren hebben een tijd van soepele opvattingen inzake de schoolprogramma's gebracht. Het is dunkt mij hoog tijd, dat hier een eind aan komt. Er zullen op sommige scholen, waar men nog steeds speculeert op continuatie van deze toestand, dan stukken gemaakt worden. Het zij zo. Wie achter de schermen kan kijken bij toelatingsexamens en overgangsrapporten, ziet daar vaak schrikwekkende toestanden.

Wie echter als rector of directeur het wel meent met het onderwijs, dat hij dient te leiden, zal het een uitkomst vinden als ook van de kant van de inspecties de eisen voor de examens in volle strengheid weer worden gehandhaafd. Daar zal dan een meer conservatieve bevorderingsmethode mee moeten samenhangen.

Het leerlingenmateriaal, dat wij thans in de hoogste klassen aantreffen, is vaak ontstellend slecht. Gesprekken met deskundige deskundigen doen vaak de meest ondenkbare toestanden kennen.

Zoals zoeven al is gezegd: het functiebegrip is van enorm groot belang voor de Economische wetenschappen.

Bij zeer veel problemen in de theoretische Economie en de Econometrie is doorgvorsing onmogelijk, als men geen inzicht heeft in de verbanden, die tussen de bestudeerde verschijnselen kunnen liggen. Dat wil niet zeggen, dat men hiermee volstaan kan. Immers de practijk leert, dat men behoorlijk moet kunnen differentiëren en eenvoudig integreren. Dit is echter na een degelijke propaedeuse niet onoverkomelijk.

Een ander verlangen is, dat de middelbare school iets meedeelt over eenvoudige statistiek. De volle nadruk valle hier op het woord eenvoudig. Problemen als normale verdeling e.d. kunnen nu eenmaal op een middelbare school slechts aangeduid worden. Maar dit is al heel wat waard.

Nu is het wel zo, dat officieel op de H.B.S.-A iets over statistieken wordt meegedeeld, maar practisch gaat men niet verder dan eenvoudige beeldstatistieken. De algebra, die aan de H.B.S.-A onderwezen dient te worden in klas 4 en 5, gaat naar ons gevoel veel te veel de weg op van experimenteren met zeer eenvoudige problemen uit de financiële rekenkunde. Ook daar wordt de tijd niet voldoende gebruikt om het functiebegrip te ontwikkelen. De particuliere opleidingen voor het Staatspraktijkdiploma mogen het H.B.S. onderwijs in deze ten voorbeeld worden gesteld. Men eist daar b.v., dat de kandidaten voor dat examen vlot overweg kunnen met het gebruik van de verschillende rentesymbolen, en ook de grafieken ervan terdege kunnen afleiden.

Het lijkt ons zeer nodig dat ook het wiskunde-programma van de

H.B.S.-A, dat ongeveer in 1925 werd opgemaakt aan een grondige herziening wordt onderworpen. Het is onbegrijpelijk, dat een zo op de praktijk ingestelde opleiding niet meer contact zoekt met het voortgezet economisch onderwijs, om te komen tot een betere en meer doordachte aanpassing.

Wat het Gymnasiumleerplan betreft, dit heeft voor het Economisch Hoger onderwijs weinig punten, waarbij verandering gewenst wordt. Bovendien lijkt het mij niet gewenst, dat op een vergadering van „Wimecos” het terrein van de zustervereniging „Liwenagel” zou worden betreden.

Reeds ongeveer 90 jaar is een bepaald stempel gedrukt op de H.B.S., die oorspronkelijk niet bedoeld was als opleidingsinstituut voor het Hoger onderwijs. Dit stempel wordt m.i. niet veranderd door het programma om te buigen in die zin, dat de H.B.S. meer dan tot nu toe het geval was, uitziet naar nieuwe mogelijkheden, die haar opleiding biedt voor haar leerlingen.

Het is immers nooit de bedoeling geweest, dat de H.B.S. doel in zich zelf was, maar wel, en de geschiedenis bewijst dit, dat zij een dienende taak voor de samenleving had.

Juist in deze tijd, waarin de positie van de H.B.S. van verschillende kanten wordt aangevochten, eensdeels doordat de wetenschappelijke kwaliteit van haar onderwijs moest dalen door vele onbevoegde leraren, anderzijds door de plannen om haar bestaan te ondermijnen door haar om te buigen in de richting van de Algemeen Middelbare School, zij het de taak van allen, die het welmenen met deze eerbiedwaardige schepping van Thorbecke om pal te staan voor de kwaliteit van haar onderwijs. De aard van het door U gestelde onderwerp is het duidelijke teken van Uw vaste wil om te streven naar een weloverwogen vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde op de H.B.S.

Dat U daarbij ook wilt acht geven op de wensen, die opkomen vanuit het Economisch Hoger onderwijs stemt tot voldoening. Ook vanuit andere studierichtingen zullen zeer zeker wensen opkomen. Wellicht geheel andere. Het moet mogelijk zijn een zodanige synthese te vinden, dat enerzijds de wetenschappelijke standing van het wiskunde-onderwijs in niets tekort gedaan wordt en aan de andere zijde met de verlangens uit de praktijk voldoende rekening wordt gehouden.

DISCUSSIE OVER DE VOORDRACHT VAN DE HEER DRS H. PLEIJSIER

De Heer Dwinger zegt, dat hetgeen de inleider over de Beschrijvende Meetkunde heeft gezegd, hem uit het hart gegrepen is. Het was vooral Delft, dat in deze materie de toon aangaf, maar hij meent, dat ook daar de laatste jaren een andere wind is gaan waaien.

Minder enthousiast is spreker over hetgeen de Heer Pleijsier heeft gezegd t.a.v. de Algebra. De Heer Pleijsier heeft dit vak nogal gedeprecieerd en het op de Middelbare School een *rommelig* karakter toegékend. Volgens de Heer Dwinger is er ook in de vierde en vijfde klasse wel degelijk een logisch verband. Men streeft hier zeer zeker een verdieping na. Het limietbegrip wordt behoorlijk bestudeerd zowel bij het Mechanica- als bij het Wiskundeonderwijs. Aan het functiebegrip wordt aandacht besteed. Ook de logaritmische functie heeft de volle aandacht. Hij erkent, dat de Reststelling vaak verkeerd wordt bewezen en verwijst naar de in Euclides verschenen artikelen.

In de derde plaats vraagt de Heer Dwinger, wat de inleider met een soepeler programma bedoelt. Men moet vasthouden aan een scherpe vaststelling der begrippen. In dit verband verwijst hij naar de bekende rede van Dr Dijksterhuis over „Epistemisch Wiskundeonderwijs”.

De Heer Brinkman wenst te weten, of de gelijkheid der resultaten van A- en B-leerlingen alleen maar voor de Rotterdamse Hogeschool geldt of dat dit ook voor de overige universiteiten zo is.

De Heer Bunt is het er mee eens, dat de eisen voor het Wiskundeonderwijs niet mogen verslappen. Volgens de inleider heeft er aan het Wiskundeprogramma niet heel veel te veranderen. De kwestie van de Beschrijvende Meetkunde tegenover Analytische Meetkunde moet voorlopig eerst door het Bestuur van Wimecos nader bekeken worden. De inleider heeft gesproken over „stof-nesten”, die opgeruimd moeten worden. Zou hij deze nader willen preciseren?

Wat de statistiek aangaat, zou men enige zeer eenvoudige voorbeelden kunnen behandelen. Maar de H.B.S. A heeft te weinig uren voor Wiskunde en deze moeten worden gebruikt voor de Financiële Rekenkunde.

De Heer Oort maakt melding van een door hem ontvangen cir-

culaire van de Leraren in Handelswetenschappen, waarin wordt aangedrongen het ene uur Wiskunde in de vierde klasse der H.B.S. A op te dragen aan de leraar in de Handelswetenschappen. Hij vraagt de mening van de inleider.

De Heer Wansink waarschuwt tegen afschaffing der Beschrijvende Meetkunde. Hij zou het betreuren, als deze constructieve Stereometrie zou vervallen. Er is misschien wel aanleiding het programma voor de Beschrijvende Meetkunde te herzien.

De Heer van Andel plaatst de interruptie: „En het Gymnasium dan!”

In zijn antwoord aan de verschillende sprekers stelt de Heer Pleijsier de Heren Dwinger en Wansink tegenover elkaar voor wat de Beschrijvende Meetkunde betreft. Hij zou het toejuichen, als men er in slaagde de Beschrijvende Meetkunde in een nieuw gewaad te steken.

Eventueel had spreker statistisch materiaal naar voren kunnen brengen, maar dit betreft alleen Rotterdam, waar men juist uit deze gegevens conclusies probeert te trekken. Hij heeft zijn mening vooral gebaseerd op de gesprekken, die hij met de studenten heeft gehad. Na afloop van de practische oefeningen heeft spreker veel gelegenheid gehad de studenten te laten praten en daarbij heeft hij allerlei weinig optimistische ontdekkingen gedaan. Het komt o.a. voor, dat iemand op zijn eindexamen een goed cijfer voor Algebra heeft gehad, maar nog nooit van het woord asymptoot heeft gehoord. Men bedenke wel, dat het een groot verschil is, of iets aan de orde had *moeten* komen dan wel, of het werkelijk behandeld *is*. Vooral in de jaren 1947, 1948 en 1949 schijnt er met de te behandelen stof nogal eens de hand te zijn gelicht. Het woord „rommelig” heeft spreker niet gebruikt, maar wel zou hij voor meer samenhang willen pleiten.

Hij wenst geen soepeler eisen, maar een verstrakking hiervan. Wat het limietbegrip aangaat, heeft spreker de indruk, dat er te veel „omheen gezeuld” wordt.

Wat de vraag van de Heer Brinkman aangaat, moet spreker tot zijn spijt medelen, dat hij van de andere universiteiten geen gegevens heeft. Men heeft spreker wel eens verweten, dat hij ook voor Rotterdam voorzichtig moest wezen met zijn conclusies, daar hij met *goede* A's en *minder goede* B's in het algemeen zou werken. Over het geheel zijn er weinig gymnasiasten, dus daar moet men zeker oppassen met gevolgtrekkingen in algemene zin te maken.

Wat de z.g. „stofnesten” aangaat, wijst spreker op gecompliceerde logarithmische vergelijkingen en vormen, op vraagstukken, waarin men vragen niet kan beantwoorden, voordat men tal van andere

vragen heeft beantwoord, enz. Hij wijst op de „verrassingen”, die zich nog steeds bij het eindexamen voordoen.

Wat de statistiek aangaat, deze geeft ontzettend veel moeilijkheden bij verschillende studenten, ook al doordat de grafieken hier vaak volgens een geheel ander systeem zijn opgebouwd. Zeer zeker zijn vraagstukken uit de Financiële Rekenkunde als die over Rentabiliteit goed, maar naar sprekers mening kan men met de A's veel meer bereiken.

Het uur Wiskunde in klasse 4 aan de leraar Handelswetenschappen geven, acht spreker niet juist.

Wat de Beschrijvende Meetkunde aangaat, spreker gaat hier zeker niet lichtvaardig langs. Men heeft hier onderscheid te maken tussen het verlangen van het Hoger Onderwijs en sprekers mening als Wiskundeleraar. Spreker heeft bij de Beschrijvende Meetkunde meermalen de indruk, als hij het werk van zijn leerlingen ziet: „Heb ik daar nu al die tijd voor staan praten?” Zij, die naderhand de Beschrijvende Meetkunde nodig hebben, leren dit vak toch wel, getuige de prestaties van de Gymnasium- β -leerlingen.

Hoe ver men met de te behandelen stof voor de Wiskunde moet gaan in verband met het Hoger Economisch Onderwijs is moeilijk te zeggen. Men hoede zich hierbij echter om „met kanonnen op mussen te schieten”. Het lijkt het beste dit serieus in een commissie door te spreken.

Aan de Leden van Wimecos.

Het Bestuur van WIMECOS nodigt U uit aan het adres van ondergetekende opgaven voor proefwerken in te zenden, die U in het laatste kwartaal van het lopende cursusjaar over de wiskundeleerstof van de klassen I, II en III van de H.B.S. opgeeft en die van zodanige samenstelling zijn, dat naar Uw mening een leerling, tegen wiens bevordering naar een hogere klasse U t.a.v. het desbetreffende onderdeel der wiskunde geen bezwaar zoudt willen maken, het bij deze proefwerken stellig tot een voldoende prestatie zal moeten kunnen brengen.

Het Bestuur zal het op prijs stellen, als U de in te zenden stellen werk vergezeld wilt doen gaan van een overzichtelijke staat, waaruit blijkt, volgens welke criteria het werk is beoordeeld, hoe vaak elk der opgaven voldoende is gemaakt, onvoldoende is gemaakt en niet is gemaakt. Voorts de cijfers die aan het proefwerk zijn toegekend. Door voor elk der leerlingen tevens het laatste rapportcijfer te vermelden, zult U ons zeer verplichten.

Het is uiteraard niet de bedoeling van het Bestuur een beroep te doen op iedere collega om de opgaven van al zijn proefwerken in te zenden. Men beperke zich tot die stellen werk, welke men op grond van ervaring als normatief zou willen beschouwen voor de overgang naar een hogere klasse.

Het spreekt wel vanzelf, dat t.a.v. Uw inzending de nodige discretie zal worden betracht. Bij publicaties naar aanleiding van het hier bedoelde onderzoek zal er voor gezorgd worden, dat de herkomst van de diverse inzendingen geheim blijft.

Het Bestuur wil graag met enkele woorden aangeven, welke omstandigheden de aanleiding vormen tot het hierboven geformuleerde verzoek.

Ten aanzien van de eisen, die we bij ons onderwijs aan onze leerlingen mogen stellen, ontbreekt het ons tot dusverre aan algemeen aanvaarde normen. Uit de verplichtingen, die het schoolprogramma ons oplegt door leerstofomschrijvingen zoals: „ontbinding in factoren”, „evenredigheden”, „logarithmen”, „beginselen der vlakke meetkunde tot aan de evenredigheid van lijnstukken”, kunnen we geen enkele norm afleiden ten opzichte van de eisen die we in concreto mogen of moeten stellen.

Het Bestuur overweegt nu plannen om op den duur te komen

NEDERLANDSCHE ECONOMISCHE HOOGESCHOOL
PROPAEDEUTISCH HEREXAMEN
SEPTEMBER 1950

Wiskunde 1e gedeelte, Dinsdag 12 September 1950, 3.30—5.00 u.

1. Bepaal: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 12}{3x - 6}$.
2. Onderzoek voor welke waarden van x de functie

$$y = \frac{x - 6}{x^2 + 4x - 5}$$

positief, negatief of nul is. Zijn er ook asymptoten? Zo ja, hoe zijn deze gelegen?

3. Van een Meetkundige Reeks van 7 termen is de som van de eerste 3 termen 42 en de som der laatste 3 termen 10752. De termen zijn alle positief.
Bepaal de reeks.

PROPAEDEUTISCH HEREXAMEN
SEPTEMBER 1951

Wiskunde 1e gedeelte, Dinsdag 11 September 1951, 3.30—5.00 u.

1. Bepaal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 2x - 1}{8x^2 + 4}$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{3x^2 - 1}$$

2. Los op:

$$\log \sqrt[3]{x - 4} + \log \sqrt[3]{x + 15} = \log \sqrt[3]{48} + \frac{1}{6} \log 81 - \frac{1}{3} \log 2.$$

3. Onderzoek de grafiek van de functie

$$y = \frac{-x + 3}{x - 2}.$$

Bepaal de vergelijking van de raaklijn, die evenwijdig is met

$$y = -x.$$

4. Gevraagd na te gaan bij welke van de volgende functies het voordeel geeft enkel- resp. dubbel logarithmisch papier te gebruiken wanneer men er een grafiek van wil maken.

$$y = e^{2x}$$

$$y = 3x^4$$

$$y = \sqrt{x}$$

$$y = 1,04^x.$$

PROPAEDEUTISCH EXAMEN
MEI 1951

Wiskunde 2e gedeelte, Dinsdag 22 Mei 1951, 1.30—3.00 uur.

1. Differentieer: $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{3x}$

Bepaal: $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ en $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ als $z = \ln(x^2 + y^2)$.

2. Integreer: $\int x^3 \ln x \, dx$

$$\int_1^4 \frac{2x+1}{x^2+x} \, dx$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+6}} \, dx$$

$$\int_0^1 (x^3 - 1)^2 dx.$$

3. Bepaal de uiterste waarden van

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 15.$$

4. Een monopolist verkoopt op een markt van een zeker artikel x stuks per week tegen p gulden per stuk. De totale kosten van x stuks bedragen $8x + 4$ gulden.

De hoeveelheid x hangt als volgt af van de prijs: $x = 20 - p$.

Hoeveel stuks moeten per week verkocht worden om een maximale winst te krijgen?

PROPAEDEUTISCH HEREXAMEN
SEPTEMBER 1951

Wiskunde 2e gedeelte, Dinsdag 11 September 1951. 1.30—3.00 u.

1. Bepaal en onderzoek de uiterste waarde(n) van de functie:

$$y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x}.$$

2. Bereken:

$$\int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx$$

$$\int_0^1 \frac{e^x dx}{3e^x - 1}$$

$$\int \frac{dx}{1 + e^{-x}}.$$

3. Gegeven is

$$z = \frac{x^2 + 1}{e^y}.$$

Bepaal:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

4. Zij de vraag naar een artikel een functie van de prijs, die voorgesteld wordt door $x = f(p)$, waarin x de vraag en p de prijs is. Gegeven is nu, dat de elasticiteit = 1 is. Gevraagd wordt te bepalen welke functie x van p is.

N.B. elasticiteit $\varepsilon = -\frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$

WORDT AANPASSING AAN DE VERANDERDE MAAT-
SCHAPPELIJKE STRUCTUUR BEREIKT DOOR DE RICHT-
LIJNEN VAN DE MINISTERIËLE NOTA'S VAN 11 JANUARI
EN 19 JULI 1951?

Voordracht, gehouden door Prof. ir. F. M. ROETERINK,
op de Algemene vergadering van WIMECOS op 3 Januari 1952.

Op grond van opgedane ervaringen gedurende een langjarige praktijk bij de opbouw van een internationale industrie, zowel op technisch-organisatorisch terrein als in de opleidingssector, meent spreker gerechtigd te zijn in deze kring een nadere beschouwing te mogen geven over de beide ministeriële nota's. Getracht zal worden de fundamentele ondergrond, zoals deze door hem gezien wordt, nader te belichten.

Vóór de wereldoorlog waren door de geografische ligging en de daaruit gevolgde historische ontwikkeling, de voornaamste welvaartsbronnen van ons land te vinden in de activiteiten verbonden aan het verplaatsen van goederen, waarbij de rol, die onze voormalige overzeese gebiedsdelen hierbij speelden, uiterst belangrijk was. Onze industrie bestond toen, behalve uit verzorgingsnijverheid, voornamelijk uit industrieën voor het verlenen van diensten bij genoemde activiteiten. Wij weten allen, hoe de economische structuur na de oorlog grondig is gewijzigd. Daarbij komt, dat ons land de grootste bevolkingsdichtheid bezit en bovendien de grootste bevolkingstoename.

Op welke wijze moeten wij nu handelen om iets van de vroegere welvaart terug te krijgen en bovendien voldoende werkgelegenheid te behouden voor de volgende generatie?

Neemt men kennis van de wijze, waarop in andere landen wordt gewerkt, waar de bestaande voorsprong op industrieel gebied gedurende de oorlog aanmerkelijk werd vergroot, dan zal een extra inspanning van ons volk worden gevraagd om onze achterstand op dit terrein in te halen. Wij zullen de goederen, die wij verhandelen willen voor een deel zelf dienen te maken en daarbij voornamelijk onze aandacht moeten wijden aan kwaliteitsartikelen en veredelde producten. Grondstoffen hebben wij immers practisch niet. Het zijn dus werkzaamheden, waarvoor veel intellect, speurzin en technische vaardigheid vereist worden. Ons volk heeft zeker in voldoende mate

intellectuele kwaliteiten om dit uitvoerbaar te maken. Van oudsher was hier grote belangstelling voor de Wiskunde en andere exacte vakken. Deze capaciteiten van ons volk zullen geleid moeten worden in de richting van grotere geschiktheid voor het produceren van kwaliteitsartikelen. Onze jonge generatie dient hierop te worden gewezen en in deze richting te worden opgeleid.

Nu kan niet ontkend worden, dat behalve grondstoffen ook financiën, belastingen, enz. een grote rol spelen bij het doorvoeren van de industrialisatiegedachte, *maar van primair belang blijven instelling, activiteit en kundigheid van de mensen, die de goederen moeten maken.*

Spreker wil nu pogen beide nota's in dit licht te bezien. De Minister toch heeft deze stukken ter discussie gesteld in de Staten-Generaal en daarbuiten. Ongetwijfeld heeft daarbij de bedoeling voorgezet niet alleen de verschillende inzichten van ons volk nader te leren kennen, maar tevens — in verband met de ontwikkeling van de maatschappelijke en economische structuur — inspirerend te werken in de richting, welke ons onderwijs behoort in te slaan, zowel voor de algemene vorming als ten behoeve van de technische ontwikkeling.

Inderdaad moet ons onderwijs in de eerste plaats zorgen voor de persoonlijkheidsvorming met alle daarbij behorende facetten, maar hiernaast dient het gericht te zijn op het aankweken van dië kennis en vaardigheid, welke in de maatschappij nodig zijn om tot blijvende werkgelegenheid en zo mogelijk terugkeer van welstand te geraken.

Wij allen weten, dat kinderen vaak gezonden worden naar een schooltype, waarvan niet te verwachten valt, dat het onderwijs aldaar voor het kind inderdaad kan bijdragen tot de twee hierboven gestelde doeleinden. Men zoekt de „positie” vaak in bureau of kantoor en niet in werkplaats of fabriek. Zo is er een te grote toeloop van in wezen niet capabelen naar de bestaande U.L.O. en H.B.S., terwijl technische vorming, vooral langs de weg van de werkelijke vakbekwaamheid, (leerlingstelsel) op de duur tot een meer bevredigende positie zou kunnen leiden. Het spreekt van zelf, dat de hiervoor nodige mentaliteitswijziging van ons volk niet sprongsgewijze tot stand zal kunnen komen, maar vooral het onderwijs zal mede één der factoren zijn, die deze mentaliteitswijziging kan voorbereiden. Daartoe behoort dit onderwijs dan ook langs een geleidelijke weg in nieuwe banen te worden geleid.

Interessant is om in dit gezelschap van wiskundigen eens een citaat voor te lezen uit het „Programme” van een beroemd werk van Gaspard Monge, geschreven in de beginjaren der Franse Revo-

lutie, waarin de „Géométrie descriptive” voor het eerst een wetenschappelijke behandeling kreeg. Dit is te meer interessant, omdat in deze vergadering de waarde van de beschrijvende meetkunde als didactisch middel ter sprake is gekomen. Bovendien zal blijken dat na 1½ eeuw, de woorden van de Franse wiskundige nog de volle waarde hebben behouden voor de huidige situatie in ons land.

„Pour tirer la nation française de la dépendance où elle a été jusqu'à présent de l'industrie étrangère, il faut premièrement diriger l'éducation nationale vers la connaissance des objets qui exigent de l'exactitude, ce qui a été totalement négligé jusqu'à ce jour, et accoutumer les mains de nos artistes au maniement de tous les genres qui servent à porter la précision dans les travaux . . . Il faut en second lieu, rendre populaire la connaissance d'un grand nombre de phénomènes naturels, indispensable au progrès de l'industrie . . .

„Il faut enfin répandre, parmi nos artistes, la connaissance des procédés des arts et celle des machines qui ont pour objet ou de diminuer la main-d'œuvre ou de donner aux résultats des travaux plus d'uniformité et plus de précision; et à cet égard il faut l'avouer, nous avons beaucoup à puiser chez les nations étrangères. On ne peut remplir toutes ces vues qu'en donnant à l'éducation nationale une direction nouvelle.”

Ook wij zullen aan onze „éducation nationale” een „direction nouvelle” moeten geven, en wel voornamelijk i.v.m. de ombuiging van de activiteit van ons volk naar productie van goederen van hoge kwaliteit (*industrialisatie*). Tevens dient hierbij, gezien onze verarming, gelet te worden op het *rendement* van onze opleidingen, volgens de bestaande indeling in schooltypen.

Wij zijn er helaas vertrouwd mede geraakt het reeds mooi te vinden, indien 45 % der op de H.B.S. binnengekomen leerlingen de eindstreep haalt. Volgens generatiestatistieken verkreeg 57 % der studenten aan de Technische Hogeschool vóór de oorlog, binnen het tijdvak van 10 jaar, het ingenieursdiploma. Bij de propadeutische examens aldaar klappt men bij een rendement van rond 50 % in de handen.

Op te merken valt, dat de *maatschappelijke waardering* voor de technische vakman van alle niveaus, in ons land nooit zo bijzonder groot is geweest, anders zouden niet zoveel ouders voor hun kinderen de U.L.O. of H.B.S.-opleiding kiezen i.p.v. de weg van de vorming langs technische school en leerlingstelsel. Overdreven eerzucht der ouders, overmatige eisen van werkgevers omtrent gevraagde schoolopleiding en de daaruit voortkomende diploma-aanbidding hebben

deze situatie steeds slechter gemaakt. Ter illustratie zij vermeld, dat de Nederlandse industrie vóór de oorlog in vele bedrijfstakken vakarbeiders uit het buitenland, vnl. Duitsland moest aantrekken, omdat ze in ons land niet te vinden waren. Mede door het bestaande onderwijs is er in ons volk een vrij grote mate van *onbekendheid* met de industrie. Zo weet „men” nog onvoldoende wat in de laatste decennia in vele belangrijke industrieën is bereikt. Ook weet men onvoldoende, zelfs in onderwijskringen, dat men in de bedrijven grote aandacht heeft besteed aan het opleiden van vaklieden en technici. Ook beseft men te weinig, hoeveel gebieden voor spoorwerk, ontwikkeling en fabricage er nog braak liggen, omdat het hier voor geschikte mensenpotentieel in onvoldoende mate aanwezig is.

Het is daarom zo verheugend, dat de Minister eerst zijn nota over het technisch onderwijs heeft doen verschijnen en deze niet als aanhangwagen bij de nota over het gewone onderwijs heeft gepubliceerd. Met name heeft de Minister gepleit voor een behandeling met *voorrang* van de nota over technische opleidingen. Hierin wordt de nadruk gevestigd o.m. op de bevordering van de zuigkracht van het lager technisch onderwijs, samenwerking met het bedrijfsleven en verbetering in kwaliteit en kwantiteit van het leerlingstelsel. Gepleit wordt voor een nieuw technisch schooltype, dat men wel eens omschreven ziet met het woord „Technische M.U.L.O.” Het is de uitgebreid technische school, die een uitzicht opent op de verdere ontwikkeling van de hoog gekwalificeerde vakman, terwijl tevens gedacht is aan een opleiding van het lager technisch kader.

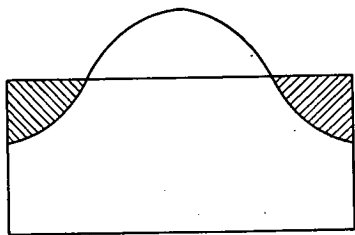
In de 2e nota wordt een nieuwe *indeling in schooltypen* gegeven. Het wil spreker voorkomen, dat deze indeling tegemoet komt aan de verschillende verlangens, die in de hierboven genoemde overwegingen omtrent de toekomstige maatschappelijke structuur, naar voren zijn gekomen. De zesjarige school voor voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs is *uitsluitend en alleen* bedoeld voor hen, die voor het hoger onderwijs zijn bestemd.

De tweede groep leerlingen, die de algemeen middelbare school zullen bevolken, zijn de leerlingen, die naderhand de uitvoerende werkers zullen zijn. Zij zullen o.a. later die functies bezetten, waarvoor geen hoger onderwijs nodig is.

Dan heeft men de school voor eenvoudige administratieve functies, welke bedoeld is voor hen, die later een werkkring in middenstandszaken of op kantoren zullen vervullen. In elk dezer schooltypen is voor de eerste 2 jaar een E.V.O. afdeling gedacht, met de bedoeling om hier de selectie en de doorschuiving tot uitvoering te kunnen brengen, waardoor de leerlingen naar de voor hen ge-

schikte schooltypen gebracht worden. In deze E.V.O. afdelingen behoren de beste leerkrachten geplaatst te worden, met uitgebreide kennis van de maatschappij en scherp observatievermogen omtrent de aanleg van het kind. Immers hier zal een goede voorlichting aan de ouders gegeven moeten worden, waaruit besluiten voor de verdere opleiding van het kind kunnen volgen.

Dadelijk komt hier naar voren de *keuze in de te behandelen leerstof* in de verschillende schooltypen. De aandacht wordt gevestigd op de in de Angelsaksische landen meer in gebruik zijnde kern- en keuzevakken, waardoor de mogelijkheid geopend wordt om de leerlingen zich meer te doen verdiepen in de vakken, die met hun aanleg stroken, terwijl een zeker gemiddelde aan kennis van de overige vakken voldoende wordt geacht.



Zet men in een figuur langs de horizontale as de verschillende vakken van het programma uit, en langs de verticale as de vereiste hoeveelheid kennis van elk vak, dan prefereert men in de Angelsaksische landen de lijn, die overeenkomt met

een kromme van Gauß, boven een rechthoekige figuur. De top ligt in het gebied van de aanleg van het kind en deze top kan dus voor verschillende kinderen op andere plaatsen liggen.

De nota's zijn te uitvoerig om elk detail in dit kort tijdsbestek te bespreken. Moge dit summiere overzicht echter behulpzaam zijn om nader te komen tot de fundamentele gedachtengang. Naar sprekers mening is deze gebaseerd op een juist aanvoelen van de veranderende maatschappelijke structuur en op een grote psychologische kennis van de groeiende mens.

Ligt het nu niet op de weg van de docenten om de nota's in het licht van het bovenstaande te bestuderen, om vervolgens na te gaan hoe het wiskunde-onderwijs voor de verschillende schooltypen dient te worden ingericht, overeenkomstig de doelstellingen, die in de nota's tot uitdrukking zijn gebracht? Hierbij moeten de wiskundeleraars zich steeds voor ogen blijven houden, dat mede door hun onderwijs begaafde jonge mensen kunnen worden ontdekt, die in de toekomst vooraan zullen staan in de strijd nodig voor het terugwinnen van onze welstand en voor het behouden van voldoende werkgelegenheid voor ons gehele volk.

Ik moge dus een beroep op U doen om de nota's in de kring van

Uw Vereniging, zo mogelijk in commissoriaal verband, te willen bestuderen, en de nodige conclusies te trekken, opdat op deze wijze ook Uw aandeel kan worden gegeven in de noodzakelijke heroriëntering van ons onderwijs.

Discussie.

Bij de bespreking van de voordracht zegt de Heer Thijssen uit Nijmegen, dat hij vroeger aan één van de grootste scholen van het land heeft gewerkt, waar men niet minder dan zeven einddiploma's verstrekke. Hij meende, dat daar reeds de gedachte van keuze- en kernvakken min of meer verwezenlijkt was.

Verder vraagt hij welke remedie de Nota-Rutten biedt voor een verkeerde keuze.

Tenslotte merkt hij op, dat de inleider de richting bepaald wenst te zien door eigen aanleg en het plezier, dat een kind in een bepaald vak heeft, alsmede door de eisen, die de maatschappij stelt. Moeten deze drie feiten de richting bepalen? Zijn er niet veel dieper liggende oorzaken voor de juiste keuze aan te wijzen?

Prof. Roeterink wijst er in zijn antwoord op, dat in ons land een kind een school moet kiezen met een „rechthoekig programma”, terwijl zijn natuurlijke aanleg door de kromme lijn wordt aan gegeven. Het kind krijgt zodoende geen gelegenheid méér te weten te komen van de vakken, waarin het groot belang stelt, terwijl het gedwongen wordt onverteerbare leerstof op te nemen van vakken, waarvoor het zich minder interesseert. Het is zonder twijfel goed, als een kind ook eens „tegenwind” ondervindt, maar ieder zal het er mee eens zijn, dat we op de verkeerde weg zijn, als we een kind practisch alle energie laten besteden aan vakken, waarvoor het de aanleg mist. Men moet zorgen, dat het kind niet alle energie moet besteden aan de leerstof van de gearceerde hoekjes. Als voorbeeld haalt hij aan, dat sommige categorieën de Beschrijvende Meetkunde absoluut nodig hebben, maar andere niet. Welnu, dwing deze laatste niet. Het rendement, dat men van de hiervoor nodige inspanning, die veel tijd kost, zal behalen is toch beneden de maat. De beschikbare tijd had men met meer succes kunnen besteden aan meerdere kennis in de vakken, waarvoor het kind aanleg heeft. In Amerika ziet men, dat de leerlingen met het systeem van kern- en keuzevakken hun werk met vreugde en plezier verrichten.

Wat de kwestie van de verantwoordelijkheid voor de keuze betreft, deze moet bij de ouders berusten. De juiste richting kiezen is echter door het systeem van kern- en keuzevakken vereenvoudigd,

omdat het kind zelf deze richting aangeeft door het aanwezig zijn van de mogelijkheid om een uitgesproken belangstelling te tonen. Het doubleren op grond van het onvoldoende zijn van bepaalde vakken, terwijl andere ruimschoots voldoende zijn, is fout.

Wat het derde punt aangaat, merkt de inleider op, dat het onderwijs in de allereerste plaats zorgen moet voor de vorming van de persoonlijkheid, maar men moet ook zijn brood kunnen verdienen. Het onderwijs heeft dus te zorgen voor de persoonlijkheidsvorming, daarbij rekening houdende met de aanleg om zich in een bepaalde sector een bestaan te verzekeren.

De Heer Rooth merkt op, dat de leerlingen naderhand op b.v. 18-jarige leeftijd in een maatschappij komen, die een paar eeuwen cultuur bezit. Het kader evenals het middenkader mag niet vreemd staan tegenover allerlei cultuuruitingen. Het komt hem daarom gevaarlijk voor, als men te vroeg met kern- en keuzevakken komt. Wat denkt de inleider van de A.M.S.?

In zijn antwoord zegt prof. Roeterink, dat op het ogenblik op de scholen voor voortgezet onderwijs een menging van de eisen voor kader en middenkader plaats heeft. Dit is niet goed. Spreker is er tegen, dat de A.M.S. in serie geschakeld wordt als vierjarige onderbouw van de school voor V.W.O. Wanneer we nu de vierjarige A.M.S. instellen bestaat de mogelijkheid het V.W.O. te ontlasten van de minder geschikte leerlingen, waardoor dit onderwijs doeltreffender kan worden ingericht voor hen, die later H.O. gaan volgen. Speciaal wordt hier gedacht aan de a.s. studenten voor Delft. Zo gezien behoeft men de A.M.S. en de 6-jarige V.W.O. toch niet te zien als opleidingen zonder cultuur. Integendeel. Wel zal i.v. hiermede het toepassen van het systeem van kern- en keuzevakken beter pas in de hogere klassen dienen te geschieden, zodat in de eerste jaren het programma „rechthoekig” zal moeten zijn.

De Heer Wansink vraagt de inleider, of hij de Nederlandse leraar capabel acht om de onderlinge doorstroming der verschillende onderwijstypen tot stand te brengen. De nota stelt geen enkele maatregel t.a.v. de opleiding der Nederlandse leraren voor.

Prof. Roeterink antwoordt, dat men verschil moet maken tussen de reeds aanwezige leerkrachten en de toekomstige. In verband met zijn onderwijstaak in het bedrijfsleven is hij tot de conclusie gekomen, dat het bedrijfsleven niet weet hoe het onderwijs werkt. Omgekeerd is het bedrijfsleven voor het onderwijs terra incognita. Men heeft als het ware twee werelden: die van het onderwijs en die van de maatschappij. Hij heeft gedurende zijn loopbaan getracht beide werelden in elkaar te interesseren. Het zou van groot belang

zijn, als er regelmatig contacten plaats vinden tussen onderwijs en maatschappij. Hij is een voorstander van excursies van onderwijsmensen naar het bedrijfsleven, vacatiecursussen in samenwerking met het bedrijfsleven, enz. Hij zou dus de tegenwoordige leerkrachten willen aanraden zich dienovereenkomstig te heroriënteren. Voor de opleiding van nieuwe leerkrachten is het van groot belang, dat zij op de hoogte gebracht worden van psychologie, paedagogie, maatschappijleer, enz.

De Heer Turkstra vraagt zich af, waarom er toch eigenlijk niets gebeurt ten aanzien van de kwestie der kern- en keuzevakken. Men voelt wel voor vernieuwing, maar alles blijft bij het oude. Is dit misschien te danken aan de financiële kant van het vraagstuk? Onze school blijft een selectieapparaat in plaats van een educatieapparaat.

Prof. Roeterink antwoordt hierop, dat wij te veel kosten maken i.v.m. de grote „uitval”. Zijn mening is, dat de nodige financiële middelen zeker ter beschikking gesteld zullen worden, als ons volk in zijn geheel de noodzakelijkheid van de heroriëntering van ons onderwijs zal inzien. Werkgevers en scholen moeten samenwerken om het onderwijs te krijgen, dat de maatschappij vraagt. Daarom herhaalt spreker nog eens zijn verzoek om behandeling van de beide nota's in Wimecos.

De Heer Buseman zegt, dat het op de hoogte van de rechthoek aankomt. Is die hier voldoende? In Engeland is de basis, waarop men voortbouwt, wel erg smal en dit wordt door de Engelse collega's gevoeld. Dit klemmt daar des te meer, nu Engeland druk bezig is een natie van de tweede orde te worden. Bovendien moet men nooit vergeten, dat wij altijd een moderne taal meer moeten kennen. Ook houde men in het oog, dat we in onze Middelbare Scholen toch altijd een categorie hebben, die vlot door de school gaat en die een brede basis *moet* hebben. Het probleem, waar wij mee zitten, is de tobvende massa, die niet mee kan. De A.M.S. zal alleen dan aan zijn doel beantwoorden, als deze school aantrekkelijk wordt gemaakt. Tot nu toe zijn de belangen van de zwakke leerlingen verwaarloosd, maar we mogen nu niet het omgekeerde gaan doen.

Prof. Roeterink heeft de materie van de technische opleiding in Engeland en Amerika bestudeerd. In Engeland staat de klassieke opleiding in hoog aanzien. In Amerika ging men vóór 40 jaar veel meer in de richting van de specialisatie. Dit standpunt heeft men geheel verlaten. Men is voorstander van de z.g. „broad fundamentals”. Men eist een groot deel van de tijd voor de humaniora op. Bij de ingenieursopleiding gaat dit tot 30 % van de college-uren.

Een belangrijke rol speelt hierbij de „Society for the promotion of engineering education”. Hierin werken maatschappij en onderwijs samen in de richting van de broad fundamentals. Het zou goed zijn, als Wimecos ook eens sprekers uitnodigde, die in Amerika geboren zijn en die sociologisch goed geïnformeerd zijn.

Wat de A.M.S. moet zijn, is geen U.L.O., maar een schooltype tussen de huidige U.L.O.-school en de H.B.S. Zoals reeds eerder gezegd, behoort de A.M.S. *naast* de 6-jarige school voor voorbereidend wetenschappelijk onderwijs te staan en niet als onderbouw hiervan te fungeren. Uit de nota's kan men niet lezen, dat de Minister een „versmalling” van de opvoeding bedoelt.

De Heer Broekhuijsen vraagt, of de inleider wel genoeg aandacht geschonken heeft aan het feit, dat de kwestie van kern- en keuzevakken noodzakelijk een verbreking van het klasseverband tengevolge heeft. De klassegemeenschap is te veel buiten beschouwing gelaten. Wij in Holland gaan gebukt onder een gebrek aan „teamspirit”. In een derde klasse kan men eigenlijk pas min of meer van een gemeenschap spreken.

Prof. Roeterink antwoordt hierop, dat het aankweken van „teamspirit” natuurlijk aanbeveling verdient. Bij Philips besteedt men grote aandacht aan dit punt, speciaal bij nieuwelingen. Deze hebben immers op de scholen afgeleerd om te „spieken”, terwijl men in ondernemingen gewend is om deze kunst (in overdrachtelijke zin bedoeld) in hoge mate te verstaan. Het komt hier immers op samenwerking aan d.i. gebruik maken van ervaringen van medewerkers.

Hij moet echter het antwoord schuldig blijven op de vraag, of de klassegemeenschap lijdt door de invoering van kern- en keuzevakken. Maar is het nodig zo ver te differentiëren?

De Voorzitter vreest, dat wij in Holland te kleine gemeenschappen hebben, om met succes de volledige doorvoering van kern- en keuzevakken mogelijk te maken. Over de „rechthoek” zijn we het wel eens, evenals over het principe van kern- en keuzevakken. Maar ook de splitsing in Openbaar en Bijzonder Onderwijs geeft moeilijkheden. Wat zou de inleider er van denken, als een neutrale commissie de leerlingen, die van het basisonderwijs komen, zou selecteren?

Het antwoord van prof. Roeterink is, dat de suggestie voor een dergelijk onderzoek na het basisonderwijs theoretisch mogelijk is, maar praktisch onuitvoerbaar. Immers de leerling is op dit ogenblik nog in de overgangstijd, zodat nog allerlei wijzigingen op kunnen treden. Bovendien spelen wij het niet klaar om alle eindexaminandi van het M.O. te doen onderzoeken i.v.m. het beschikbare aantal psychologen. Hoe moeten wij dan een onderzoek uitvoeren voor een

veel groter aantal kandidaten van het basisonderwijs. Laten wij niet vergeten, dat de „pédagogie dirigée" in de eerste plaats door ouders en docenten tezamen moet worden beoefend.

De Heer Thijssen uit Enkhuizen vestigt er tenslotte nog de aandacht op, dat men nog maar al te veel meemaakt, dat leerlingen, die zeer geschikt zijn voor het Middelbaar Onderwijs, hier niet komen.

Hierna brengt de Voorzitter Prof. Roeterink de dank der vergadering over voor het zo buitengewoon belangrijke referaat, dat deze heeft gehouden. Al zal niet binnen veertien dagen, zoals Prof. Roeterink heeft gevraagd een reactie van Wimecos volgen, toch kan deze er van overtuigd zijn, dat de Nota's de volle aandacht van het Bestuur hebben. Ook de door de spreker te berde gebrachte samenwerking van Maatschappij en School o.a. door excursies is een punt, dat men bij Wimecos niet zal vergeten.

BOEKBESPREKING.

René Dugas, Histoire de la Mécanique. — Editions du Griffon. Neuchatel 1950. 649 p.

Een Geschiedenis der Mechanica was reeds lang een desideratum. Wij bezaten natuurlijk Mach's beroemde werk *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*, maar dit boek leert meer over de denkbeelden van Mach dan over de wijze waarop de mechanica gegroeid is. De wens is thans vervuld door het hierboven aangekondigde werk van een Franssen docent aan de Ecole polytechnique, dat in de Zwitserse Editions du Griffon de fraaie uitvoering kreeg die men van deze uitgeverij gewend is.

Het is een boek van 649 bladzijden, dat de geschiedenis der mechanica verhaalt van het allereerste begin in de aan Aristoteles toegeschreven *Mechanica Problemata* af tot aan de allernieuwste ontwikkeling in de golf- en quantemmechanica. Wie het onderwerp enigmata kent, zal begrijpen, dat zelfs in een boek van dezen omvang nog een sterke beperking moest worden toegepast en dat men er geen volledigheid van kan verwachten.

Men verbaze er zich dus niet over, dat het boek lang niet op alle vragen die de geschiedenis der mechanica doet rijzen, antwoord geeft en verheuge zich liever over het vele, dat het wel bevat en over de duidelijkheid van den globalen kijk, dien het op het historisch verloop geeft.

Het werk stelt aan den lezer tamelijk hoge eisen. De schrijver heeft niet een soort leerboek der mechanica op historischen grondslag willen geven (dat blijft een wens), maar voor lezers, die geacht worden, met de klassieke analytische mechanica op de hoogte te zijn, een aantal karakteristieke trekken van de ontwikkeling willen verduidelijken. Daardoor krijgt zijn uiteenzetting wel een enigermate rhapsodisch karakter en menigmaal kan men zich door een al te summier behandeling van een onderwerp, waar men graag meer over had willen horen, teleurgesteld voelen. Als voorbeeld noemen we de wel zeer oppervlakkige bespreking van Euler's *Mechanica*, waaruit men toch eigenlijk geen indruk krijgt van de historisch

belangrijke wijze, waarop in dit werk de mechanica wordt opgebouwd.

Teleurstellend door groote beknoptheid is ook de behandeling van het werk van d'Alembert, wiens vaak zo duistere beschouwingen onvoldoende worden toegelicht. Zo vindt men op p. 243 een paragraaf, getiteld „d'Alembert et le principe des forces vives”, die, als men er niet het oorspronkelijke *Traité de Dynamique* bijhaalt, volslagen onbegrijpelijk is (het is een redenering over een figuur die er niet bijstaat) en waarvan, ook met het *Traité* er bij, naar te vrezen staat, slechts weinige lezers zullen begrijpen, wat nu eigenlijk het gevonden resultaat in verband met het opschrift te betekenen heeft.

Er blijven dus zeker wensen on vervuld. Men kan overtuigd zijn, dat de auteur, die zijn onderwerp kennelijk geheel beheerst, ze gemakkelijk zou hebben kunnen vervullen en dat hij dit ook zeker graag zou hebben willen doen, wanneer hij over onbeperkte plaatsruimte had kunnen beschikken. Maar dan zou het boek nog duurder zijn geworden dan het al is: de prijs (65 Zw. frs.) gaat nu al, naar Nederlandse maatstaven gemeten, de perken te buiten.

E. J. DIJKSTERHUIS.

E. W. Beth, *Les fondements logiques des mathématiques*. Paris. Gauthier Villars. 1950. 222 pages, prijs 1400 fr.

De Nederlandse lezer, bekend met Beth's „Inleiding tot de wijsbegeerte der wiskunde” (1940) en diens „Wijsbegeerte der wiskunde” (1948) (dat een sterk uitgebreide 2e druk van de niet-meetkundige hoofdstukken der „Inleiding” vormt), zal bij het doorzien van de inhoudsopgave van dit nieuwe werk onmiddellijk bemerken, dat vrijwel dezelfde onderwerpen als in de beide vorige werken ter sprake komen; volgorde en aantal der hoofdstukken is hier zelfs hetzelfde als in de „Wijsbegeerte”, afgezien van een nu ontbrekend hoofdstuk over psychologische beschouwing van het wiskundig denken. Toch is hier geen sprake van een vertaling zoals Mme P. Destouches-Février in het door haar geschreven préface opmerkt. De Hollandse werken waren mede voor filosofen bestemd; het technisch apparaat moest daarom, voor zover behandeld, in den brede worden uiteengezet; daarnaast moest de schrijver zich toch de nodige beperking in aantal der behandelde formalismen opleggen ten einde plaats over te houden voor beschouwingen van wijsgerige aard, die daar een ruime plaats innamen. In dit nieuwe werk, dat, naar het mij voorkomt, in de eerste plaats voor mathematici is geschreven, wier abstractie-vermogen reeds in behoorlijke mate is ontwikkeld en die reeds iets afweten van de theorie der transfinitiete getallen, is de weergave veel gedrongener; met uitzondering der „Introduction” en

„Conclusion” staat in de verschillende hoofdstukken de bespreking der techniek op het eerste plan. De lezer wordt hier op voortreffelijke wijze met de verschillende moderne ideeën betreffende de grondslagen der wiskunde en hun samenhang op de hoogte gebracht; daarnaast raakt hij bekend met en kan zich aan de hand van de 40 „Exercices” in voldoende mate oefenen in de techniek der bijbehorende formalismen.

Thans moge een korte bespreking van de rijke inhoud volgen. In de „Introduction” wordt een uiteenzetting van Aristoteles’ wetenschapstheorie gegeven, gewezen op het feit dat zij als grondslag diende voor traditionele metaphysica en kennistheorie, doch, naar schrijvers mening, tekort schiet als verklaringsgrondslag van de door de moderne ontwikkeling der wiskunde opgeworpen problemen.

Livre II (Axiomatique élémentaire) behandelt de axiomatic der wiskunde in de semi-symbolische vorm, die men gemeenlijk inmathematische werken aantreft. Na invoering van het begrip „definitie door abstractie” volgen de theorie van het gehele getal (opgebouwd op die van het natuurlijke getal) en aanwijzingen betreffende die van het rationale, van het reële en van het complexe getal benevens van verschillende generalisaties (ringen, lichamen). Het boek eindigt, na invoering van de redeneringen en definities door middel van volledige inductie, met de theorie van het natuurlijk getal volgens Dedekind.

In boek III wordt de geformaliseerde axiomatic der wiskunde behandeld. Begonnen wordt met het formaliseren der de logica der proposities en de elementaire praedicatenlogica omvattende z.g. elementaire logica. Ter behandeling van mathematische theorieën dienen naast de logische begrippen en -axioma’s nog specifiek mathematische begrippen en -axioma’s te worden ingevoerd; gewezen wordt op het probleem van een „grote logica”, welke alleen reeds voldoende zou zijn de mathesis te grondvesten (grondprobleem van het logicisme). Een uitvoerig hoofdstuk over de bewijstheorie bevat o.m.: een (metamathematisch) bewijs van de contradictieeloosheid van de elem. logica met behulp der matrixmethode (van een op de logica der proposities betrekking hebbend theorema van Lindenbaum vindt men hier, naar het schijnt, voor het eerst een volledig bewijs); een (finitistische) bewijsschets van de math. stelling van Herbrand, welke een nodige en voldoende voorwaarde geeft, onder welke een uitdrukking der elementaire logica tevens theorema van die logica is, de niet-finitistische gevolgtrekking uit de stelling van Herbrand van het bestaan van uitdrukkingen der elem. logica, welke geen theorema’s dezer logica zijn en welker ontkenning zich in een aftelbaar individuenveld laat realiseren (een model heeft); een niet-finitistische afleiding van de stelling van Gödel, volgens welke de theorema’s der elem. logica samenvallen met die uitdrukkingen dezer logica, welke in ieder veld geldig zijn; idem van de stelling van Löwenheim—Skolem, volgens welke een contradictievrije theorie, die opgebouwd is op eindig of aftelbaar oneindig vele, in de terminologie der elem. logica uitdrukken axioma’s, zich laat realiseren in een aftelbaar veld; beschouwingen over onafhankelijkheid van axioma’s, over verzadigde axiomastelsels, over het decisie-probleem. Het hoofdstuk „Syntaxe” handelt over het axiomatiseren en arithmetiseren der syntaxis van geformaliseerde deductieve systemen (i.h.b. van de logica der p proposities); bevat bewijsschetsen voor

twee beroemde theorema's van Gödel [1. in alle van voldoende ruime (hier niet nader aan te geven) arithmetische bewijsmiddelen voorziene geformaliseerde theorieën laten zich uitdrukkingen vormen, welke in zo'n theorie niet afleidbaar zijn evenmin als hun ontkenning; 2. het is onmogelijk het contradictie-loosheidsbewijs van zo'n theorie in haar te formaliseren]; laat ten slotte zien, dat deze theorema's tot een herziening van het strict finitistisch standpunt in de bewijstheorie nopen (Gentzen). Terwijl in de syntaxis de formalismen slechts als zodanig worden beschouwd, wordt in de van Tarski afkomstige semantiek verband gelegd tussen deze en de door haar gerepresenteerde mathem. entiteiten; van begrippen als geldigheid, waarheid, model laten zich exacte definities geven. In het aan de semantiek gewijde hoofdstuk treft men een stelling van Tarski aan, volgens welke het waarheidsbegrip voor bepaalde deductieve systemen zich niet in de syntaxis van zo'n systeem laat uitdrukken; verder beschouwingen over de analogie van semantiek en topologie.

Boek IV (Het bestaan der mathem. entiteiten) behandelt achtereenvolgens het logicisme van Frege (opbouw der rekenkunde uitgaande van de logica) en de daarop door Russel uitgeoefende kritiek, de leer der verzamelingen (naïeve theorie van Cantor; axiomatische opbouw van Zermelo, van Fraenkel; formalisatie van Skolem; de verzamelingsleer omvattende, logicistische opbouw der wiskunde van Whitehead en Russell), het intuïtionisme (ook zijn meest extreme vormen).

Boek V handelt over de paradoxen, die ingedeeld worden in de 2 klassen der logische en der semantische paradoxen; afzonderlijk staat de verzamelingstheoretische paradox van Skolem, die af te leiden is uit het bovengenoemde theorema van Löwenheim-Skolem, en volgens welke zekere axiomastelsels voor de leer der verzamelingen, zo ze contradictie-loos zijn, een aftelbaar model moeten hebben.

Hiermee is de grote verscheidenheid in de „technische” hoofdstukken in zeker onvoldoende mate geschetst. In een „Conclusion” keert de schrijver tot de betekenis van het mathem. grondslagenonderzoek voor de filosofie terug. Terwijl naar zijn mening een diepe kloof bestaat tussen dit onderzoek en de op de wetenschapstheorie van Aristoteles grondende, traditionele rationele filosofie, ziet hij de verhouding tot het irrationalisme van onze tijd vanuit een optimistische gezichtshoek.

Ik moge eindigen met enkele korte kritische opmerkingen. Met het oog op de toepassing in § 7 leze men p. 23, 3e al. aanvang: „Soit donné un élément ω d'un ensemble M et une application de M en M ”; 3e al. eind: M i.p.v. N . Op pag. 37, 3e al. geeft „ $a(x)$ représente l'énoncé „Platon est périssable” de bedoeling niet juist weer. Op p. 59, 6e regel leze men: „ $(u) (Ev)W(y, u, v)$. Celle de $V(x)$ sera $(Es)(t) W(x, s, t)$ ”; verder moet daar „hauteur $\geq 3[3]$ ” veranderd worden in „hautaur $\leq 2[2]$ ”. Op pag. 60 boven moet de lezer zelf de betekenis van „expression Q ” uitzoeken. Het komt mij voor, dat de wijze van invoering der ordeningsrelatie $<$, die in de theorie M van boek III, hfdst. 2, §§ 17—20 wordt onderzocht, niet voldoende scherp is. De elementen van M zullen gehele getalwaarden hebben. Dan wordt op pag. 69 gezegd: „Le signe $<$ sera interprété comme indiquant la relation d'ordre dans le système des nombres entiers.” Op pag. 75 wordt echter als voorbeeld

van een model van het bijgehorende axiomastelsel genoemd een systeem $E + E'$, waarbij zowel E als E' uit gehele getallen in de gewone volgorde bestaan, en ieder element van E gedacht wordt vooraf te gaan aan ieder element van E' . Dit laatste nu ligt in de aangehaalde interpretatie van $<$ niet opgesloten. De jaartallen op pag. 78 boven kunnen niet beide juist zijn. Op p. 122, 2e al. moet het toch wel zijn: „un ensemble bien ordonné m d'ensembles bien ordonnés.” Op p. 142 boven zal men de definitie van a dienen te veranderen in $a = 1 + (\frac{1}{10})^n$ of 1; dit in verband met de er op volgende bewering betreffende de k_e decimaal. In de voorlaatste al. van pag. 142 is N niet gedefinieerd en staat éénmaal n voor N . Op p. 143 ontbreekt de definitie van $h(k)$. In de bibliografie wordt het Nederlands woordje „in” niet vertaald.

Verder merkte ik een kleine 100-tal drukfouten op. De typografische verzorging laat helaas, in tegenstelling met wat we van Gauthier Villars gewend zijn, te wensen over; zo maken de rechterzijde der bladzijden door het niet op gelijke hoogte beeindigen der regels een onrustige indruk.

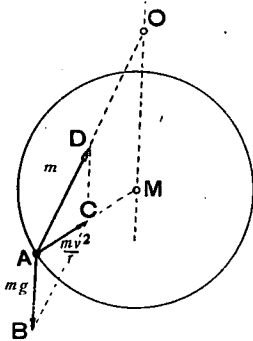
Toch zal men begrepen hebben, dat ik de lectuur van dit helder geschreven boek van rijke inhoud met warmte aanbeveel.

J. RIDDER.

KORREL CIV

OVER DE VERTICALE-CIRKELBEWEGING.

In het onderwijs in de Mechanica op de H.B.S. B neemt de beweging van een s.p. volgens een verticale cirkel een grote plaats in. Deze beweging is dan steeds *niet-eenparig* (bij haar behandeling maakt men lustig gebruik van de formule $a = \frac{v^2}{r}$, hoewel die in de theorie alleen voor de eenparige cirkelbeweging bewezen wordt!). Ik wil hier echter nagaan, of de verticale cirkelbeweging ook nog interessant is, als hij *eenparig* is.



Zij in nevenstaande figuur M het middelpunt van een cirkel (straal r), die door een s.p. A (massa m) met constante snelheid v doorlopen wordt. Dit is slechts mogelijk bij constante middelpuntzoekende kracht $\frac{mv^2}{r}$. Be-

halve het gewicht mg moet er dan nog een kracht mp op A werken¹⁾, zodanig dat $\frac{mv^2}{r}$ de resultante van mg en mp

is. In het parallelogram ABCD zijn AB en DC verticaal. Is O het snijpunt van de werklijn van AD met de verticaal door M, dan geldt blijkbaar, als $OM = d$:

$$OM : AM = DC : AC, \text{ of}$$

$$d : r = mg : \frac{mv^2}{r} \text{ of}$$

$$d = \frac{gr^2}{v^2},$$

dus d is, bij gegeven v en r , constant. Derhalve gaat de werklijn van mp door het vaste punt O.

Verder is

$$OA : AM = AD : AC,$$

of, als men $AO = l$ stelt:

¹⁾ In de figuur is de p van mp weggefallen.

$$l : r = mp : \frac{mv^2}{r},$$

$$l = p \cdot \frac{r^2}{v^2},$$

zodat p recht evenredig is met l .

We vinden dus:

De verticale cirkelbeweging van een s.p. is slechts eenparig, als op het s.p. behalve het gewicht een kracht werkt, die naar een vast punt gericht is, verticaal boven het middelpunt van de cirkel gelegen, en die o.a. recht evenredig is met de afstand van het s.p. tot het vaste punt.

Wil men een voorwerp, dat men in de hand houdt, eenparig een verticale cirkel laten beschrijven, dan moet de hand op dit voorwerp de bovenomschreven veranderlijke centrale kracht uitoefenen.

H. STR.

KORREL CV

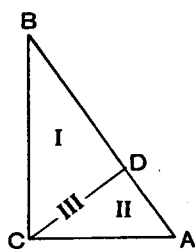
HOE BEWEES PYTHAGORAS DE STELLING VAN PYTHAGORAS?

In zijn boek „Getal en Kosmos” (Wetenschappelijk-wijsgerige bibliotheek, no 1, Meulenhoff, Amsterdam, 1947) wijdt Prof. dr C. H. van Os ook een paragraaf aan Pythagoras. Daarin deelt hij mede, dat volgens dr H. A. Naber het oorspronkelijke bewijs van Pythagoras het bewijs is, dat men in vrijwel alle schoolboekjes aantreft, en dat, door mij kort weergegeven, aldus luidt: $a^2 = pc$, $b^2 = qc$, $a^2 + b^2 = pc + qc = c \cdot (p + q) = c^2$. Nu kan men verschil van mening hebben over de vraag, hoe Pythagoras zijn stelling gevonden en bewezen heeft; men kan echter géén verschil van mening hebben over de vraag, wat *volgens dr Naber* „het bewijs” van P. was! Zijn eerste publicatie daaromtrent viel in 1894 in het tijdschrift „Propria Cûres”, zijn laatste in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs omstreeks 1933 (1934?). Daartussen liggen andere publicaties: „Das Theorem des Pythagoras” en „Meetkunde en Mystiek” (ik noem slechts, wat mij bekend is!). In al deze veertig jaren was zijn bewering steeds dezelfde: het bewijs van onze schoolboeken is *niet* het bewijs van Pythagoras, daar is het veel te gekunsteld voor!

Dr Naber was tot het volgende resultaat gekomen:

- a. P. noemde zijn stelling een „theoremata”, d.w.z. iets, waarvan de juistheid onmiddellijk duidelijk is uit het *beschouwen* van de figuur; iets, waarvan de juistheid onmiddellijk „gezien” wordt. Hieraan voldoet bovenstaand bewijs niet.
- b. P. heeft in het geheel geen bewijs van zijn stelling *gewild*, het theorema was immers volkomen doorzichtig, nadat ... ja, nadat men eerst tot een ander inzicht gekomen was. En wel het inzicht, dat
 - 1°. een rechthoekige driehoek door de hoogtelijn op de hypotenusa in twee driehoeken verdeeld wordt, die beide met de oorspronkelijke driehoek gelijkvormig zijn (gnomon);
 - 2°. de oorspronkelijke driehoek gelijk is aan de som van de beide in 1° genoemde driehoeken.

Men heeft dan het volgende:



$$\triangle CBD + \triangle ACD = \triangle ABC, \text{ of:}$$

drieh. op a + *drieh.* op b = *drieh.* op c
(de drieh. zijn gelijkvormig); of:

figuur op a + *figuur* op b = *figuur* op c
(als de figuren gelijkvormig zijn); of:

het *vierkant* op a + het *vierkant* op b =
het *vierkant* op c .

Zoals men ziet: men *ziet* het! Tevens ziet men, waarom volgens dr Naber P. zich niet interesseerde voor *vierkanten* speciaal: dat is maar een bijzonder geval.

In het gangbare bewijs (dat Prof. v. Os ook weergeeft) wordt wel met 1° rekening gehouden, maar niet (*zichtbaar*) met 2°; juist 2° maakt het bewijs *zichtbaar* en de *stelling* tot een *theoremata*. In schooltaal omgezet zou het volgend bewijs dus P. dichter benaderen: (gemakshalve stel ik opp. $\triangle CBD$ door I, opp. $\triangle ACD$ door II en opp. $\triangle ABC$ door III voor)

$$I \sim II \sim III, \text{ dus } I : II : III = a^2 : b^2 : c^2;$$

daaruit volgt $(I + II) : III = (a^2 + b^2) : c^2$;

maar $I + II = III$, dus $a^2 + b^2 = c^2$.

Ik wijs er echter op, dat, volgens Naber, P.'s eigenlijke theorema dus zou moeten luiden: $I + \text{de gelijkvormige II} = \text{de gelijkvormige III}$, en het doet er niet toe, als men I, II en III door welke andere gelijkvormige figuren (met a , b en c als gelijkstandige zijden) vervangt.

In zijn laatstgenoemde artikel haalt dr Naber met grote instemming de volgende uitlating van Bolzano aan (die hij daar vet laat drukken):

„Der Lehrsatz vom Quadrat der Hypotenusa lautet allgemein: Eine Figur über der Hypotenusa, gleicht dem Inhalt der Summe zweier ähnlicher Figuren über den Katheten. Und um dieses zu beweisen, genügt es, wenn man dieses nur von irgend einer Art von Figuren darthut. Es lässt sich dieses am kürzesten (von? an?) einem rechtwinkligen Dreieck darthun; denn das rechtwinklige Dreieck selbst, zerfällt durch ein Loth in der Spitze auf die Hypotenusa in zwei ähnliche rechtwinklige Dreiecke, deren Hyp. die Katheten sind”.

Veertig jaar heeft dr Naber gestreden om dit aan wiskundig Nederland duidelijk te maken; naar zijn eigen mening tevergeefs. Maar zo bitter als de pil, die Prof. van Os hem nu te slikken geeft, was er nog géén! Hij wordt nu vereeuwigd als de man, die datgene verkondigd heeft, wat hij 40 jaar lang verwoed bestreden heeft! Het is de moeite waard hier het slot van zijn laatste artikel te herhalen:

Dit zij de laatste maal dat ik hiervoor in dit Weekblad een plaatsje verzoek. Vele debatten over onderwijs-saneering, maar geen pèn die zich in beweging stelt voor deze kardinale quaestie, den Magister Matheseos! Wie maalt wat om Trendelenburg's geestig woord: „In den Hilfslinien zeigt sich der willkürliche Griff?” Wie waagt het, zich los te maken van het vierkant als oppervlaktemaat?

Derhalve steken Pythagoras, Plutarchus, Kepler, Bolzano en ondergeteekende de degens in de scheede...

„faute de combattants”.

(w.g. H. A. N.)

H. STR.

EINDEXAMEN H.B.S. STEREOMETRIE 1950.

door

Dr. M. v. VLAARDINGEN

§ 1. Het tweede vraagstuk Stereometrie begint als volgt: T is de top van een pyramide $TABCD$. De projectie van T op het grondvlak valt samen met het midden M van CD . $ABCD$ is een rechthoek, $AB = 2p$, $BC = p$, $TM = p\sqrt{3}$.

a) Maak een duidelijke figuur en teken daarin nauwkeurig de lijn PQ die AT en BC loodrecht snijdt.

Als deskundige kreeg ik natuurlijk vele tekeningen onder ogen. De bedoeling zal wel iets geweest zijn als in fig. 1 is aangegeven.

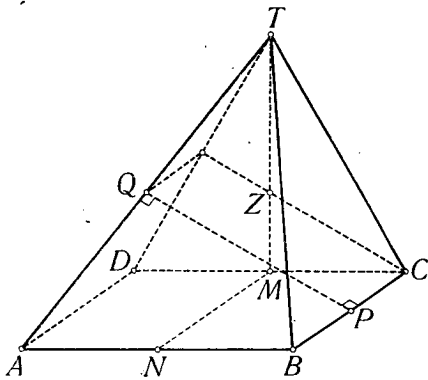


Fig. 1

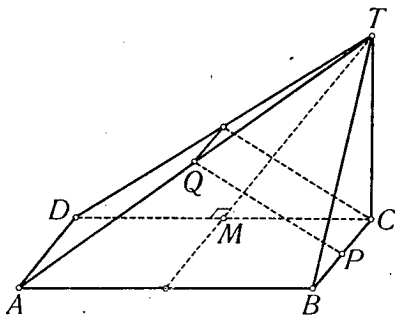


Fig. 2

Onder „nauwkeurig tekenen” van de lijn PQ zal dan wel verstaan worden 1e het trekken van de hoogtelijn uit C in $\triangle TCD$, daarna het tekenen van een lijn door het midden van TD $\parallel AD$ en daarna het door Q trekken van een lijn evenwijdig aan de genoemde hoogtelijn. Stilzwijgend is dan blijkbaar verondersteld dat we met een parallelprojectie van onze ruimtefiguur te maken hebben. Maar moest nu een fig. als fig. 2 fout worden gerekend?

De vraag is meer aan de orde geweest. Het was een merkwaardige coincidentie dat Wijdenes mij juist de 9e druk van Molenbroek en Wijdenes „Stereometrie” toezond. Er is daaraan toegevoegd een

aanhangsel over scheve projectie juist naar aanleiding van een dergelijke vraag.

De bedoeling is blijkbaar geweest dat de candidaat een scheve projectie van de pyramide zou tekenen, waarbij TCD als tafreel is gedacht. Maar in fig. 2 kan een ander tafreel genomen zijn en de vraag is: kan zo'n fig. ontstaan?

De vraag komt hierop neer. Als N het midden is van AB en we in een willekeurig tafreel de lijnen $M'N'$, $M'C'$, $M'T'$ (geheel willekeurig) trekken, kunnen deze dan beschouwd worden als de scheve projecties van drie lijnstukken MN , MC en MT die in de ruimte loodrecht op elkaar staan en waarvan de lengten zich verhouden als $1 : 1 : \sqrt{3}$?

Deze vraag is bevestigend beantwoord door Pohlke in 1853. Van deze stelling bestaan een groot aantal bewijzen en het is jammer dat deze tegenwoordig vrijwel onbekend zijn. In het vervolg zal ik een elementaire weg trachten te volgen, die men eventueel in een goede 5e klasse kan voordragen. Ik zal niet alle bewijzen volledig geven of alle bijzonderheden aangeven, daar ik anders te veel plaatsruimte nodig zou hebben.

We behandelen eerst een paar hulpstellingen en zullen zien dat de stelling daaruit volgt en zullen vervolgens een constructie laten zien, die het vraagstuk als het ware tot een schaduwvraagstuk van de bol in orthogonale projectie terugbrengt.

§ 2. Van een vierzijdig prisma is het grondvlak een parallelogram en de evenwijdige ribben staan loodrecht op het grondvlak. Kan men een vlak aanbrengen, dat het prisma snijdt volgens een vierkant?

Een oplossing ligt voor de hand. Beschouw de ellips, die in de middens der zijden raakt aan de zijden van het grondvlak. Van deze ellips zijn twee toegevoegde middellijnen bekend. Construeer de assen. De ellips is te beschouwen als de orthogonale projectie van een cirkel, die de halve lange as van de ellips tot straal heeft. Het parallelogram is de orthogonale projectie van een omgeschreven vierkant van de cirkel, welk vierkant ons tevens de gevraagde doorsnede oplevert. In fig. III is de constructie uitgevoerd. Men krijgt twee oplossingen. Bij het natekenen zal men wel merken welke voorzorgen men in acht moet nemen.

§ 3. Zij nu een driezijdig prisma gegeven, waarvan het grondvlak een willekeurige driehoek is en waarvan de evenwijdige ribben loodrecht staan op het grondvlak. Kan men een vlak aanbrengen,

Het prisma met $A'B'F'E'$ als grondvlak kunnen we nu snijden volgens een vierkant. In het vlak van dit vierkant ligt loodrecht boven C' het punt C en het is duidelijk dat $\triangle ABC \propto \triangle PQR$.

§ 4. Wanneer men bezwaar maakt tegen de „ellips” dan wil ik hier nog even op een andere methode opmerkzaam maken.

We gaan een gegeven $\triangle ABC$ orthogonaal projecteren op de vlakken van een vlakkenbundel gaande door een lijn l door C en in het vlak van $\triangle ABC$ gelegen en slaan die vlakken vervolgens om l neer in het vlak van $\triangle ABC$. Als l AB snijdt in D dan komen A' en B' bij het neerslaan te liggen op een lijn door D . Trek nu $CE \perp l$ (E op AB) en kies daarop F zodanig dat $\frac{CF}{CE} = \cos \vartheta$ (ϑ is de hoek die een vlak door l maakt met vlak ABC) dan gaat de genoemde lijn door D ook door F . Trek nu de cirkel op DE als middellijn en trek dan $CS \perp DF$ (S op de cirkel). Daar $\angle CDF = \angle EDS$ en $DA' : DB' = DA : DB$ is $\triangle CA'B' \propto \triangle SAB$. Men ziet nu de gang van zaken: Ga uit van $\triangle ABS$ en teken $\triangle ABC$ gelijkvormig met de gegeven $\triangle PQR$. Construeer de cirkel door C en S met middelp. op AB . M en trekt CD en vindt $\cos \vartheta$ (discussie aan de lezer overgelaten!).

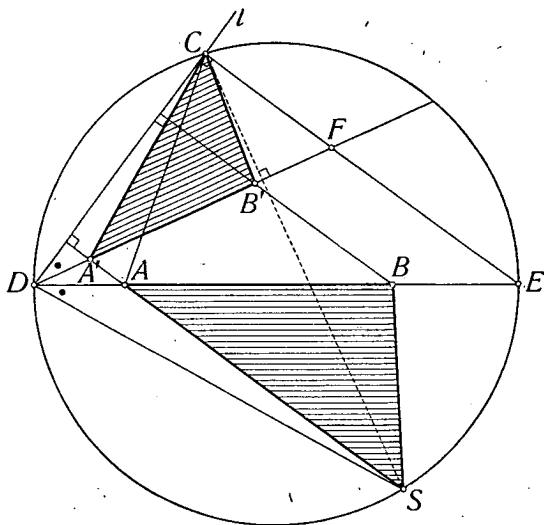


Fig. 5

§ 5. Wanneer we nu een prisma zouden nemen met een willekeurige vierhoek $ABCD$ als grondvlak en we zouden de vraag stellen deze te snijden volgens een 4 hoek gelijkvormig met een

gegeven vierhoek dan ziet men in, dat dit zonder meer niet mogelijk is.

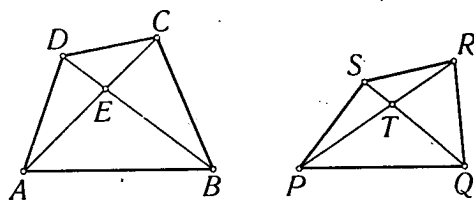


Fig. 6

Immers, volgens het voorgaande kunnen we het 3-zijdig prisma met $\triangle ABC$ als grondvlak snijden volgens een $\triangle$ die gelijkvormig is met $\triangle PQR$, maar het vlak van die $\triangle$ zal de 4e ribbe door D slechts dan snijden in een punt, dat de $\triangle$ aanvult tot een 4-hoek gelijkvormig met vierhoek $PQRS$ als voldaan is aan:
 $AE : EC = PT : TR$ en aan: $BE : ED = QT : TS$.

§ 6. Gaan we nu over tot Pohlke.

We gaan dus uit van de lijnen $O'A'$, $O'B'$, $O'C'$ die in één vlak liggen en stellen de vraag of deze figuur de scheve projectie kan zijn van een viervlak $OABC$, dat gelijkvormig is met een gegeven viervlak $O_1A_1B_1C_1$.

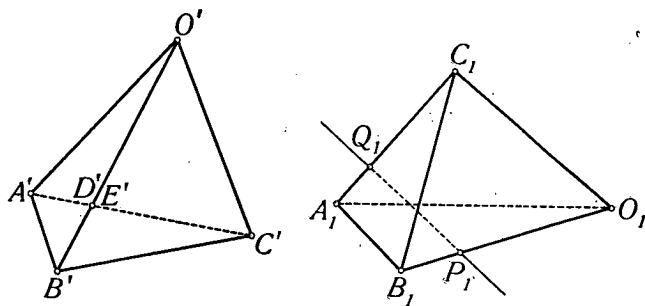


Fig. 7

We noemen het snijp. van $A'C'$ en $O'B'D'$ als het de projectie is van een punt op OB en E' als het de projectie is van een punt op AC .

Bepaal op O_1B_1 een punt P_1 zodanig, dat $O_1P_1 : P_1B_1 = O'D' : D'B'$ en op A_1C_1 een punt Q_1 zodanig, dat $A_1Q_1 : Q_1C_1 = A'E' : E'C'$.

Projecteer nu $O_1A_1B_1C_1$ orthogonaal op een vlak $\perp P_1Q_1$. Er

ontstaat een vierhoek $O_2A_2B_2C_2$ waarin: A_2C_2 en O_2B_2 elkaar in D_2 snijden, zodanig, dat $A_2D_2 : D_2C_2 = A'D' : D'C'$ en $O_2D_2 : D_2B_2 = O'D' : D'B'$.

Het rechte prisma met $O_2A_2B_2C_2$ als grondvlak kan nu volgens § 5 worden gesneden volgens een vierhoek $O_3A_3B_3C_3$ die gelijkvormig is met $O'A'B'C'$ en daarmee is de zaak theoretisch uit (op bijzondere gevallen na).

§ 7. Van F. Schur is een andere methode afkomstig die gebruik maakt van eenvoudige Stereometrische overwegingen. Laat gegeven zijn een bol en drie onderling loodrechte stralen OA , OB en OC daarvan en projecteer deze figuur scheef op een vlak. De schijnbare omtrek van de bol wordt een ellips α en de grote cirkels van de bol gelegen in de vlakken OAB , OBC en OCA gaan over in ellipsen α_1 , α_2 en α_3 die α dubbel raken.

De lijn die de raakpunten P en Q van α en α_1 verbindt ontstaat uit de snijlijn van vlak OAB met het vlak waarin de aanrakingscirkel van bol en omhullingscylinder is gelegen.

Trek in beide cirkels de stralen loodrecht op genoemde snijlijn. In het vlak door die stralen ligt ook OC . Daar dit vlak evenwijdig is met het raakvlak in een der uiteinden van genoemde snijlijn met de bol aan deze aangebracht, volgt hieruit dat de scheve projectie van OC valt lang een middellijn van de α en α_1 die in beide toegevoegd is aan de richting PQ . We krijgen dus in het tafreel de volgende situatie. Er ontstaan drie ellipsen α_1 , α_2 en α_3 die een 4e ellips dubbel aanraken volgens middellijnen, die toegevoegd zijn aan de richtingen O_sA_s , O_sB_s , O_sC_s .

We merken op, dat deze situatie blijft bestaan als we de figuur aan een affiene transformatie onderwerpen.

Ga nu omgekeerd uit van O_sA_s , O_sB_s en O_sC_s . We kunnen dan de ellipsen α_1 , α_2 , α_3 constureren en de vraag is nu of er een ellips α van de besproken soort is.

We gaan nu de fig. affien transformeren.

Kies A_sB_s als aff. as en bepaal O' , zodanig, dat $O'A_s = O'B_s$ en construeer C' . ($\angle A_sO'B_s = 90^\circ$).

$O'A_sB_sC'$ is nu de scheve projectie van 3 onderling loodrechte stralen van de bol met O' als middelp. en straal $O'A_s$. Richt nl. maar in O' een loodlijn $O'C = O'A_s$ op.

Door neerslaan vindt men dan de projectierichting terwijl volgens een bekende stelling C' brandpunt is van de schijnbare omtrek van

de bol. $O'C_n$ is halve korte as en C_nC' de halve lange as. Door terug transformeren vindt men twee toegevoegde middellijnen van de ellips α .

Construeer nu van deze ellips de assen. Zij F een brandpunt. Beschouw de bol rakende in F aan het tafreel met straal gelijk aan de halve korte as van de ellips α . Als O het middelp. is van de bol zo zal bij verlichting $// OO_s$ α de slagschaduw zijn op het tafreel. Door invoering van een hulpvlak $\perp$ de korte as van α kan men (met enige voorzorg!) de stralen OA , OB , OC vinden.

Uit een beschouwing van deze fig. kan men dan omgekeerd afleiden dat $OA \perp OB$ etc.

Opm.

In de grote leerboeken b.v. van Rohn und Popperitz of van Müller vindt men constructies, die gebruik maken van eigenschappen van ellipsoïde etc.

Deze elegante constructie is gegeven door F. Schur in Crelle's Journal No. 117 (1896).

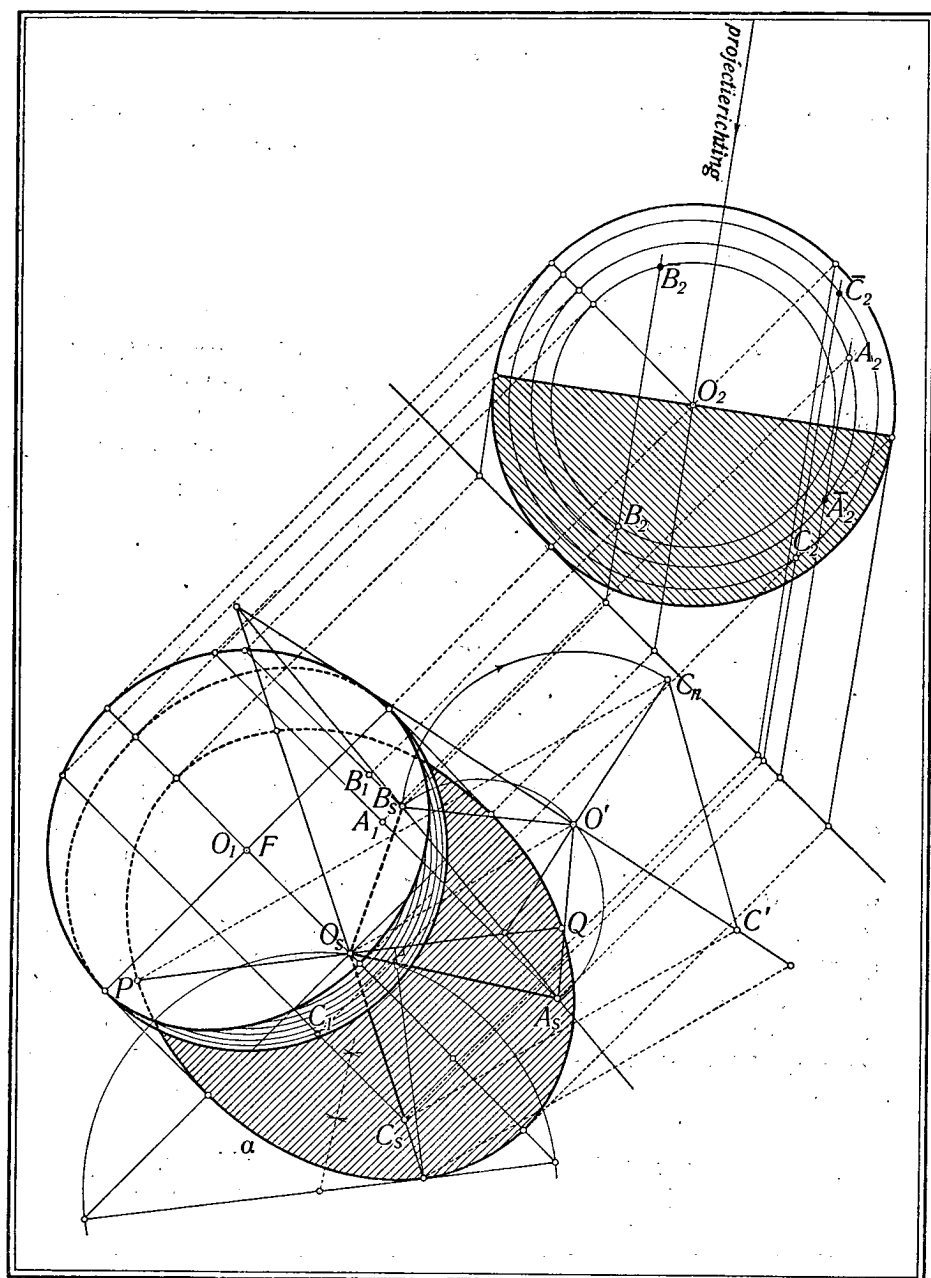


Fig. 8

OVER HET TERUGBRENGEN VAN EEN OMGEKEERDE BEWERKING VAN HOGERE TRAP TOT DE RECHTSTREEKSE BEWERKING

door

Dr. W. P. THIJSSEN.

§ 1. *Het gestelde vraagstuk.* Reeds meermalen is opgemerkt, dat het streven om de omgekeerde bewerkingen van optelling, vermenigvuldiging en machtsverheffing in de grootste mate mogelijk te maken het paradoxale gevolg heeft, dat die omgekeerde bewerkingen grotendeels overbodig worden. Zo heeft men:

$$a - b = a + (-b)$$

$$a : b = a \times \frac{1}{b}; b \neq 0$$

$$\sqrt[b]{a} = a^{1/b}; b \neq 0$$

Een uitzondering vormt de andere omkering van de machtsverheffing: het nemen van de logarithme.

Wij willen hier onderzoeken, of het overbodig worden van een omgekeerde bewerking zich ook voordoet bij een der beide rechtstreekse bewerkingen van de vierde trap. Daarbij zal blijken, dat dit inderdaad het geval is, zij het ook, dat zulks op niet zo eenvoudige wijze als bij de genoemde rechtstreekse bewerkingen kan geschieden. De daarbij optredende omkeringsfunctie zal alleen bewerkingen van lagere trap blijken te bevatten. Zoals van te voren kon worden verwacht, is het niet nodig nieuwe getalsoorten in te voeren. Wel blijkt, dat voor het omkeren van de bedoelde functie oneindige processen nodig zijn, waarin ook machten optreden.

§ 2. *Algemene notatie voor de rekenkundige bewerkingen.* Het is gewenst, om een algemene notatie voor de rechtstreekse en omgekeerde rekenkundige bewerkingen in te voeren.

Stelt

$$a \overset{(n)}{+} b \tag{1}$$

voor $n = 1, 2$ en 3 opvolgend voor:

$$a + b; a \times b; a^b,$$

waarbij wij a het *passieve* en b het *actieve* getal zullen noemen, dan kan men zich uit

$$a \overset{(n)}{+} b = c$$

a of b onder zekere voorwaarden opgelost denken met de notatie:

$$a = c \overset{(n)}{\leftarrow} b; \quad b = a \overset{(n)}{\rightarrow} c \quad (2)$$

Zo heeft men dus:

$$\begin{aligned} c &\overset{(1)}{\leftarrow} b = c - b; & a &\overset{(1)}{\rightarrow} c = c - a \\ c &\overset{(2)}{\leftarrow} b = c : b; & a &\overset{(2)}{\rightarrow} c = c : a \\ c &\overset{(3)}{\leftarrow} b = \sqrt[n]{c}; & a &\overset{(3)}{\rightarrow} c = {}^a\log c \end{aligned}$$

Bij de beide omkeringen van de vermenigvuldiging heeft men zo tevens afzonderlijke notaties voor de verhoudings- en de verdelingsdeling, terwijl het zo ook mogelijk is een dergelijk onderscheid tussen de beide omkeringen van de optelling tot uitdrukking te brengen.

Bepaalt men zich tot het gebied der natuurlijke getallen, dan zijn de bewerkingen (2) alleen mogelijk onder bepaalde beperkingen, die wij hier als genoeg bekend zullen voorbijgaan. Voor uitgebreidere getalgebieden zullen wij om dezelfde reden niet ingaan op de een- of meerwaardigheid der genoemde omgekeerde bewerkingen.

§ 3. *De aanvankelijke definities der rechtstreekse bewerkingen.* Hierbij neemt de definitie van de optelling in het gebied der natuurlijke getallen een afzonderlijke plaats in. Neemt men de bewerking $+ 1$ als gegeven aan, dan luidt deze definitie volledig-inductief:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1; \quad b = 1, 2, 3, \dots \quad (3)$$

Voor de hogere bewerkingen heeft men dan de algemene definitie, volledig-inductief van de n -de op de $(n + 1)$ ste trap;

$$a \overset{(n+1)}{+} 1 = a; \quad a \overset{(n+1)}{+} (b + 1) = (a \overset{(n+1)}{+} b) \overset{(n)}{+} a; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4a)$$

of anders:

$$a \overset{(n+1)}{+} 1 = a; \quad a \overset{(n+1)}{+} (b + 1) = a \overset{(n)}{+} (a \overset{(n+1)}{+} b) \quad (4b)$$

Wegens de commutatieve eigenschap bij de optelling en bij de vermenigvuldiging is het onverschillig, welke van beide definities men voor $n = 1$ en $n = 2$ neemt.

Voor de vierde trap heeft men zo echter twee verschillende rechtstreekse bewerkingen:

$$\text{I. } a \overset{(4)}{+} 1 = a; \quad a \overset{(4)}{+} 2 = a^a; \quad a \overset{(4)}{+} 3 = (a^a)^a, \text{ enz.}$$

en algemeen:

$$a +^{(4)} b = a^{(ab-1)} \quad (5)$$

II. $a +^{(4)} 1 = a$; $a +^{(4)} 2 = a^a$; $a +^{(4)} 3 = a^{(aa)}$, enz.

Wij zullen ons hier tot de eerste rechtstreekse bewerking van de vierde trap bepalen.

§ 4. *Uitbreiding van het geldigheidsgebied der definitie.* Beschouwen wij in het vervolg (5) als definitie van de eerste rechtstreekse bewerking van de vierde trap, dan kan deze ook dienen voor een ruimer getallengebied. Wij bepalen ons tot positief reële waarden van het passieve getal, terwijl voor het actieve getal ook complexe waarden zijn toegelaten.

Daarbij wordt onder

$$a^{p+iq} \quad (p \text{ en } q \text{ reëel})$$

niets anders verstaan dan

$$a^p \{ \cos (q \log a) + i \sin (q \log a) \},$$

waarbij voor $\log a$ de gewone Napieriaanse logarithme is te nemen.

Zo is dan de bewerking $a +^{(4)} b$ niet alleen steeds mogelijk, maar ook eenduidig bepaald.

Voor b reëel is $a +^{(4)} b$, zoals men gemakkelijk inzielt, een monotone functie van b .

§ 5. *De logarithmische omkering.* Sluit men het triviale geval $a = 1$; $c = 1$ uit, dan heeft men voor c positief reëel:

$$a \rightarrow^{(4)} c = 1 + {}^a \log {}^a \log c \quad (6)$$

hetgeen weinig interessants oplevert. Blijkbaar moet voor een reële uitkomst gelden, dat voor $a \leq 1$, tevens $c \leq 1$ is.

§ 6. *De andere omkering.* Zoals reeds was te verwachten, is het de andere omkering

$$c \leftarrow^{(4)} b,$$

die tot de rechtstreekse bewerking kan worden teruggevoerd.

Men kan aan dit vraagstuk de vorm geven, of het — onder uitsluiting van het triviale geval $a = 1$ — mogelijk is, c zodanig te bepalen, dat bij gegeven a en b geldt:

$$(a +^{(4)} c) +^{(4)} b = a \quad (7a)$$

Want dan en dan alleen volgt hieruit door omkering:

$$a \stackrel{(4)}{\leftarrow} b = a \stackrel{(4)}{+} c \quad (7b)$$

Gemakkelijk blijkt met behulp van (5):

$$(a + c) \stackrel{(4)}{+} b = a \stackrel{(4)}{+} \{c + (b - 1)a^{c-1}\} \quad (7c)$$

zodat noodzakelijk en voldoende is:

$$c + (b - 1)a^{c-1} = 1, \quad (8)$$

waarin c als onbekende is te beschouwen.

§ 7. *Vervorming van de vergelijking voor c .* Stelt men:

$$\xi = (c - 1) \log a \quad (9a)$$

en

$$\eta = (1 - b) \log a \quad (9b)$$

dan vindt men de betrekking:

$$\eta = \xi e^{-\xi} \quad (10)$$

In het rechterlid komen alleen bewerkingen van de tweede en van de derde trap voor. De zo gedefinieerde functie zullen wij de *omkeringsfunctie* noemen, daar deze het vraagstuk van de reductie der beschouwde omgekeerde bewerking van de vierde trap volkomen beheerst.

Zijn n.l. a en b gegeven, dan is η ook eenduidig bepaald. Elke wortel ξ van (10) geeft dan één en slechts één waarde van c :

$$c = 1 + \frac{\xi}{\log a} \quad (9c)$$

waardoor dan de omgekeerde bewerking wegens (7b) tot de rechtstreekse bewerking is teruggebracht. Volgens (5) kan men de uitkomst ook schrijven in de gedaante

$$a \stackrel{(4)}{\leftarrow} b = a^{(a^{\xi : \log a})}$$

§ 8. *Nader onderzoek van de omkeringsfunctie.* Aan het bovenstaande dient zich een onderzoek naar de één- of meerwaardigheid van de beschouwde omkering aan te sluiten.

Beschouwen we vooreerst bij de functie (10) alleen reële waarden van het argument, dan heeft men:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = e^{-\xi} (1 - \xi),$$

zodat er een extreme waarde optreedt voor

$$\xi = 1; \eta = \frac{1}{e},$$

welke een maximum blijkt te zijn.

Men heeft dan:

$$a \stackrel{(4)}{\leftarrow} \left(1 - \frac{1}{e \log a} \right) = a^{(a^1 : \log a)}$$

Voor $0 < \eta < \frac{1}{e}$ zijn er blijkbaar twee positief reële wortels ξ , waarvan er één tot 0 en de andere tot $+\infty$ nadert, als η tot 0 nadert.

Voor $\eta < 0$ is er slechts één reële en wel negatieve wortel ξ , terwijl voor $\eta > \frac{1}{e}$ geen reële waarden voldoen.

§ 9. *De reeks van Bürmann.* Zoals bekend kan de functie (10) door middel van de reeks van Bürmann worden omgekeerd:

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!} \eta^{n-1}, \quad (11a)$$

welke, ook voor complexe waarden van η , convergeert voor

$$|\eta| < \frac{1}{e} \quad (11b)$$

Deze reeks stelt in het positief reële gebied blijkbaar de kleinste van de beide wortels voor.

Met (9a) en (9b) kan men hiervoor ook schrijven:

$$c = 1 + (1-b) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\{(n+1)(1-b) \log a\}^{n-1}}{n!} \quad (12a)$$

met als convergentie-voorwaarde

$$|(1-b) \log a| < \frac{1}{e} \quad (12b)$$

Is bijv.

$$a = e; b = \frac{\pi}{3} = 1,04720$$

dan vindt men:

$$c = 0,95678$$

§ 10. *Andere methode van onderzoek van het complexe geval.* Bepalen wij ons vooreerst tot reële waarden van η , met uitsluiting van de waarde $\eta = 0$.

Stelt men:

$$\xi = \alpha + i\beta = \varrho e^{i\theta}; \quad \beta \neq 0 \quad (13)$$

dan vindt men uit (10):

$$\varrho e^{i\theta} = \eta e^{\varrho(\cos \theta + i \sin \theta)} \quad (14)$$

Is η positief, dan heeft men:

$$\varrho = \frac{\theta + 2k\pi}{\sin \theta}; \quad \eta = \varrho e^{-\varrho \cos \theta} \quad (15a)$$

Is daarentegen η negatief, dan is

$$\varrho = \frac{\theta + (2k + 1)\pi}{\sin \theta}; \quad -\eta = \varrho e^{-\varrho \cos \theta} \quad (15b)$$

Dit geeft aanleiding tot het beschouwen van

$$\varrho = \frac{\theta + k\pi}{\sin \theta}, \quad (15c)$$

in al welke betrekkingen k een geheel getal voorstelt, zodanig echter, dat ϱ positief is.

Wegens (13) is dit ook te schrijven als:

$$\alpha = \beta \cotg \beta, \quad (16)$$

een even functie van β , hetgeen betekent dat met een gegeven reële waarde van η toegevoegd complexe waarden van ξ overeenkomen.

§ 11. *Afbeelding in het complexe vlak.* Beeldt men $\alpha + i\beta$ af in het complexe vlak, waarbij we ons tot $\beta > 0$ kunnen bepalen, dan zijn er blijkbaar asymptoten voor $\beta = k'\pi$; $k' \neq 0$.

Neemt men op een der takken een willekeurig punt P, dan zijn ϱ en θ als poolcoördinaten daarvan op te vatten en is η te schrijven

$$\eta = (-1)^k \varrho e^{-\alpha} \quad (17)$$

De onderste tak strekt zich links van de lijn met vergelijking $\alpha = 1$ uit. In het punt $\alpha = 1$, $\beta = 0$ is de raaklijn verticaal.

Neemt men $0 \leq \theta < \pi$, dan horen bij de takken van beneden af opv. de waarden $k = 0, 1, 2, \dots$, waarop links van de verticale as η afwisselend tot $+\infty$ en $-\infty$ nadert, terwijl rechts van de verticale as op de takken η tot 0 nadert.

Met de snijpunten der takken, met de verticale as corresponderen de waarden van η ,

$$(-1)^k (2k + 1) \frac{\pi}{2}$$

Zoals in § 12 nog algemener zal worden aangetoond, ligt voor een gegeven positieve waarde van η op de takken $k = 2, 4, 6, \dots$ steeds één en niet meer dan één punt P en bovendien één op de tak voor $k = 0$, als $\eta \geq \frac{1}{e}$ is. Voor een gegeven negatieve waarde van η ligt telkens één bijbehorend punt P op de takken $k = 1, 3, 5, \dots$

Dit geeft een vrij volledig inzicht in de ligging der punten in het complexe vlak, die de complexe wortels ξ van (10) bij gegeven η voorstellen.

Op andere bijzonderheden komen wij nog nader terug.

Voor het bepalen van verschillende punten der grafische voorstelling kan men ook gebruik maken van (15c).

§ 11. *Complexe waarde der functie.* In dit geval stelle men

$$\eta = \sigma e^{i\omega}, \quad (18)$$

waarin ω geen veelvoud van π mag zijn.

Men vindt dan op dezelfde manier:

$$\alpha = \beta \cotg (\beta + \omega) \quad (19)$$

Dit is nu geen even functie van β . Zij verandert echter niet, als men ω door $\omega + \pi$ vervangt, zodat de afbeelding in het complexe vlak tegelijkertijd bij gegeven ω ook het geval $\omega + \pi$ omvat.

Het punt $\alpha = 0$; $\beta = 0$ ligt nu niet langer geïsoleerd, maar is op een der takken gelegen, die door de asymptoten voorgesteld door

$$\beta = -\omega + k'\pi; \quad k' \text{ geheel}$$

zijn gescheiden.

Is $P_{(\varrho; \theta)}$ wederom een punt op een der takken, dan heeft men voor de modulus van de bijbehorende waarde van η :

$$\sigma = \varrho e^{-\alpha}, \quad (20)$$

terwijl het argument ω of $\omega + \pi$, afgezien van een veelvoud van 2π , overeenstemt met

$$\theta - \beta \quad (21)$$

Verder heeft men

$$\frac{d\alpha}{d\beta} = \cotg (\beta + \omega) - \frac{\beta}{\sin^2 (\beta + \omega)} \quad (22)$$

Hieruit volgt, dat er een verticale raaklijn in T $(a, b)^{1)}$ zal zijn, als voldaan is aan:

$$b = \frac{1}{2} \sin (2b + 2\omega) \quad (23a)$$

Uit (19) volgt voor de bijbehorende waarde van a :

$$a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos (2b + 2\omega) \quad (23b)$$

zodat dus voor verschillende waarden van ω de punten met verticale raaklijn gelegen moeten zijn op de cirkel met vergelijking

$$\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + b^2 = \frac{1}{4} \quad (23c)$$

Hier volgt een tabel voor enkele waarden van ω

ω	a	b
0,0000000	1,0000000	0,0000000
0,0117994	0,9305127	0,2500000
0,0391457	0,8535539	0,3535539
0,0905861	0,7500000	0,4330127
0,2853982	0,5000000	0,5000000
0,6141842	0,2500000	0,4330127
0,8245439	0,1464461	0,3535539
1,0589970	0,0669873	0,2500000
1,5707963	0,0000000	0,0000000

Neemt ω met $\frac{\pi}{2}$ toe, dan krijgt men op de cirkel het diametraal tegenover gelegen punt.

Men kan (23a) ook de gedaante geven:

$$\omega = -b + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \sin 2b \quad (23d)$$

hetgeen de reeksontwikkeling geeft voor $|b| \leq \frac{1}{2}$:

$$\omega = \frac{2}{3}b^3 + \frac{6}{5}b^5 + \frac{20}{7}b^7 + \frac{70}{9}b^9 + \dots \quad (23e)$$

Voor $\omega = \frac{\pi}{4}$ zijn a en b de wortels van de vergelijkingen

$$2a = 1 - \sin 2b; \quad 2b = \cos 2b,$$

¹⁾ Hier hebben a en b dus een andere betekenis, dan in § 6 e.v.

waarvoor men vindt door achtereenvolgende rechtlijnige interpolaties, uitgaande van twee naburige waarden uit de vorige tabel:

$$a = 0,1657; b = 0,3698$$

Uit (22) volgt nog, dat de raaklijn in de oorsprong de hoek ω met de positieve richting van de α -as maakt, dus verticaal is voor $\omega = \pm \frac{\pi}{2}$, d.w.z. voor η zuiver imaginair.

Is $\alpha = 0$; $\beta = (2k + 1) \frac{\pi}{2}$, dan heeft men:

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = -\frac{1}{\beta}$$

zodat dus in deze punten $\frac{d\beta}{d\alpha}$ en β tegengesteld teken hebben.

§ 12. *De ligging van de wortels.* Stelt men ter afkorting

$$p = \theta - \omega + 2k\pi,$$

dan kan men σ de gedaante geven

$$\sigma = \frac{p}{\sin \theta} e^{-p \cotg \theta}$$

Bij standvastige waarde van ω en k kan men dit naar θ differentiëren en vindt dan

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{(\sin \theta - p \cos \theta)^2 + p^2 \sin^2 \theta}{\sin^3 \theta} e^{-p \cotg \theta}$$

Behalve bij het passeren van de waarden 0 en π door θ heeft dit standvastig teken, hetgeen ook voor $\omega = 0$ of π juist blijft.

Merkt men nog op, dat volgens (21) op de tak gaande door de oorsprong bij het passeren van dit punt het argument van η met π toe of afneemt, dan blijkt, dat in het geval van een gegeven complexe waarde van η op elk der takken één en slechts één punt is gelegen, dat de daarmede corresponderende wortel ξ voorstelt.

§ 13. *Reeksontwikkelingen.* Het is gewenst, reeksontwikkelingen te vinden, uitgaande van (19).

Stelt men

$$\gamma_k = (2k + 1) \frac{\pi}{2} - \omega; k \neq 0$$

en

$$\zeta = \gamma_k - \beta; |\zeta| < \frac{\pi}{2}$$

dan heeft men:

$$\alpha = (\gamma_k - \zeta) \operatorname{tg} \zeta$$

Hieruit volgt wederom:

$$\alpha^{(n)} = (\gamma_k - \zeta) D^{(n)} \operatorname{tg} \zeta - n D^{(n-1)} \operatorname{tg} \zeta$$

Voor $\zeta = 0$ geeft dit:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \gamma_k; \alpha'' = -2; \alpha''' = 2\gamma_k; \alpha^{\text{IV}} = -8; \\ \alpha^{\text{V}} &= 16\gamma_k; \alpha^{\text{VI}} = -96; \dots \end{aligned}$$

Zo verkrijgt men de ontwikkeling voor $|\zeta| < \frac{\pi}{2}$:

$$\alpha = \gamma_k \zeta - \zeta^2 + \frac{1}{3} \gamma_k \zeta^3 - \frac{1}{3} \zeta^4 + \frac{2}{15} \gamma_k \zeta^5 - \frac{2}{15} \zeta^6 + \dots \quad (24a)$$

Door omkering vindt men hieruit:

$$\zeta = \frac{\alpha}{\gamma_k} + \frac{\alpha^2}{\gamma_k^3} - \alpha^3 \left(\frac{1}{3\gamma_k^3} - \frac{2}{\gamma_k^5} \right) + \alpha^4 \left(\frac{2}{3\gamma_k^5} + \frac{5}{\gamma_k^7} \right) - \dots \quad (24b)$$

Wegens de ingewikkeldheid der coëfficiënten is het echter ondoenlijk de convergentie van deze reeks te onderzoeken.

Voor $k = 0$ heeft men zich bijv. voor het geval $\omega < \frac{\pi}{2} - b$ tot waarden van ζ te bepalen:

$$-\frac{\pi}{2} < \zeta < \frac{\pi}{2} - b - \omega$$

Voor $\alpha = 0$, $\beta = 0$ heeft men:

$$\alpha' = \operatorname{cotg} \omega; \alpha'' = -\frac{2}{\sin^2 \omega}; \alpha''' = \frac{6 \cos \omega}{\sin^3 \omega}; \dots$$

en door verwisseling der variabelen

$$\beta' = \operatorname{tg} \omega; \beta'' = \frac{2 \sin \omega}{\cos^3 \omega}; \beta''' = -\frac{6 \sin \omega}{\cos^3 \omega}; \dots$$

waaruit wederom reeksontwikkelingen van hetzelfde karakter als (24a) en (24b) volgen. Blijkbaar heeft men zich te bepalen tot waarden van $\alpha < a$ en van $\beta < b$.

Bizondere belangstelling verdienen nog de buigpunten. Uit (19) volgt gemakkelijk, dat deze alle liggen op de lijn met vergelijking $\alpha = 1$, terwijl de ordinaat voldoet aan:

$$\operatorname{tg} (\beta + \omega) = \beta \quad (25)$$

STAATSEXAMEN GYMNASIUM, BEDOELD IN ARTIKEL 12 VAN DE HOGER-ONDERWIJSWET

De Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, brengt ter kennis van belanghebbenden, dat, behoudens onvoorziene omstandigheden, het mondeling gedeelte van het Staatsexamen gymnasium, bedoeld in artikel 12 van de hoger-onderwijswet zal worden gehouden van 10 Juli tot en met 23 Augustus a.s. in het gebouw van de Rijks hogere burgerschool te Amersfoort, Thorbeckeplein 1.

's-Gravenhage, 2 April 1952.

Voor de Minister,

Het wnd. Hoofd van de Afdeling
Voorbereidend Hoger en
Middelbaar Onderwijs,

(get.) A. F. Monna.

Voor eensluidend afschrift,

De Chef van het Kabinet,

(get.) Schölvinck.

Mondeling Wiskunde (A) voor het eindexamen Gymnasium A en Staatsexamen A door D. J. Sakkers en H. M. J. van Overeem, 3e, geheel omgewerkte druk, 1951, Bosch en Keuning, Baarn; prijs f 1.50.

Bevatte de 2e (eveneens geheel omgewerkte) druk ook stof voor het B-examen, de 3e druk beperkt zich tot het A-examen (voor het B-examen wordt een afzonderlijk boekje in het uitzicht gesteld); de omvang is dan ook tot iets minder dan de helft gereduceerd.

Mij dunkt, dat dit boekje vooral geschikt is voor kandidaten voor het staatsexamen. Zij toch zitten veelal alleen te tobben en zullen in dit boekje een bruikbaar richtsnoer aantreffen. Als zij zich maar voor ogen stellen, dat elk „examen” gefingeerd is; dat bij het echte examen niet, zoals hiet, netjes 6 onderwerpen uit de algebra, 5 uit de vlakke meetkunde en 6 uit de stereometrie aan de orde komen; dat vele „examens” rijkelijk zwaar zijn; dat de echte examiner humaner is en minder veeleisend dan de papieren; dat de afgod van de gebroken functie met kwadratische noemer en/of teller niet door hen aangebeden behoeft te worden, althans niet met het ook in dit boekje gebruikelijke ceremonieel.

Dr H. STREEFKERK

NIEUW MEETKUNDEBOEK

VOOR M.O. EN V.H.O.

Met de verschijning van het derde deeltje is dit nieuwe meetkundeboek compleet. Op de volgende punten moge de aandacht gevestigd worden:

Vele leerboeken voor het M.O. gaan mank aan de eigenschap, dat de leerlingen van klas 1 op dezelfde wijze aangesproken worden als die van klas 5 of 6 - een 3-delig leerboek is van het begin tot het eind in eenzelfde taal geschreven; de zinnen uit deel 1 zijn even moeilijk als die uit deel 3 -. In het Nieuw Meetkundeboek is de taal van deel 3 ongeveer gelijk aan die in de andere leerboeken voor Meetkunde; in deel 1 wordt het kind, dat pas van de lagere school komt, in voor hem begrijpelijke taal aangesproken.

Het aanspreken van de leerlingen in voor hun begrijpelijke taal vereist meer woorden dan in een meetkundeboek strikt nodig zijn; het Nieuw Meetkundeboek is daardoor wat dikker dan vele andere meetkundeboekjes. Dat betekent niet, dat het doorwerken ervan meer tijd zou kosten; integendeel, de practijk heeft reeds uitgewezen, dat men zeer vlug vooruitkomt, doordat men weinig tijd voor bespreking nodig heeft en doordat de leerlingen door enthousiasme vlug opschieten. Men behoeft de klas niet aan het werk te „zetten”.

Daltonscholen. *De speciale behoeften van deze scholen hebben de schrijver steeds voor ogen gestaan: Dit komt tot uiting in de volgende punten:*
a. Eenvoudige, suggestieve taal en nauwkeurig omschreven opdrachten.
b. Telkens wordt een klein stukje theorie gevolgd door opgaven ter vastlegging, zodat het niet nodig is lange theorielessen in te schakelen.
c. Bij moeilijke vraagstukken is een aanwijzing gegeven of een verwijzing naar een stelling.

De volgorde van de leerstof wijkt van de traditionele volgorde af. In verband met de wensen van de Natuurkundeleraars kon echter de gelijkvormigheid niet nog later gesteld worden. Moeilijke onderwerpen als meetkundige plaatsen, ongelijkheden en constructies met behulp van een analyse zijn nog na de gelijkvormigheid gesteld.

De voor de 3de klas H.B.S. benodigde driehoeksmeting is in het boekje verwerkt. Terwille van de scholen, die geen driehoeksmeting wensen te behandelen - sommige Gymnasia - is echter de berekening van lijnstukken tweemaal behandeld: eenmaal met, eenmaal zonder driehoeksmeting.

Het boek is niet geschreven voor die leraren, die het volle lesuur zelf aan het woord willen zijn, maar voor die leraren, die de klas gedurende het grootste deel van het lesuur aan het werk willen zien.

deel I - met 174 figuren f 3,75

deel II - met 91 figuren f 3,25

deel III - met 74 figuren f 2,75

Ook bij de boekhandel verkrijgbaar

P. NOORDHOFF N.V. -:- GRONINGEN - DJAKARTA

P. WIJDENES – Dr H. STREEFKERK

OEFENBLADEN

Volledige leergang in de Beschrijvende Meetkunde voor de H.B.S.

Eerste deeltje - zesde druk f 1,25

Tweede deeltje - zesde druk f 1,60

Handleiding - zesde druk f 2,25

★

Voordelen van de Oefenbladen:

1. Alle leerlingen tekenen de figuren in dezelfde stand, hetgeen contrôle mogelijk maakt.
2. De leerlingen behoeven niet eerst de gegevens op te zetten (met de daaraan verbonden mislukkingen), waardoor veel tijd gewonnen wordt en men meer opgaven kan maken.
3. Men kan werkstukken laten uitvoeren, waarvan de opgave bijna niet onder woorden te brengen zou zijn; dit betreft vooral de inleidende oefeningen en werkstukken over figuren, die gewenteld moeten worden.
4. De notaties zijn volgens de regelen van de Hoofdcommissie voor de Normalisatie; dus dezelfde als in „Delft”.
5. Dit is een nevenvoordeel: de leerlingen behoeven geen tekenpapier te kopen: de kosten daaraan verbonden zijn hoger dan van de Oefenbladen.

P. NOORDHOFF N.V. -- GRONINGEN - DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel