

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. Dr. E. W. BETH, AMSTERDAM
Dr. R. BALLIEU, LEUVEN - Dr. G. BOSTEELS, HASSELT
PROF. Dr. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - Dr. L. N. H. BUNT, UTRECHT
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
Dr. R. MINNE, LUIK - PROF. Dr. J. POPKEN, UTRECHT
Dr. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. Dr. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
Dr. H. STEFFENS, MECHELEN - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

27e JAARGANG 1951/52
Nr 1/2

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 3,00 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van de **Wimecos** storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1950 t/m 31 Augustus 1951 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) ten bedrage van f 6,00 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107^{III}, Amsterdam, aan wie tevens alle correspondentie gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, van Lenneplaan 16. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

I N H O U D.

	Blz.
Notulen van de vergadering van de Groep L.i.w.e.n.a.g.e.l. in het Eykmanhuis te Driebergen op Vrijdag 31 Augustus 1951	1
Aanvulling der mededelingen op de conferentie te Baarn	3
Denmark, Examen artium 1950	13
Dr J. KOKSMA, Het limietbegrip II	15
S. J. GEURSEN, Voor de volgende les § p leren en vraagstuk 1 en 2 maken	41
Prof Dr P. H. VAN LAER, Een magistraal boek over de geschiedenis der natuurwetenschappen	51
Kan het wiskundeonderwijs tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen	57
Mededeling over Amerikaanse Studiebeurzen	60
M. EILANDER, Geometrografie	62
R. W. SCHIEVEN, Iets over levensverzekeringswiskunde	70
Prof Dr P. H. VAN LAER, Onstoffelijkheden in de natuur	74
W. F. VAN PEYPE, Wiskunde en Psychotechniek	84
Dr L. CRIJNS, Een voorstel aan het Mathem. Centrum	89
F. CARLABUR en FRED. SCHUH, Benaderingsconstructie van de regelmatige vijfhoek en vijftienhoek	91
Toulouse, Baccalauréat 1 ^{er} Partie 1950.	93
Verslag Ned. Vereniging voor logica en wijsbegeerte van de exacte wetenschappen	95
Boekbespreking	96

Notulen van de vergadering van de Groep L.i.w.e.n.a.g.e.l. in het Eykmanhuis te Driebergen op Vrijdag 31 Augustus 1951.

De Voorzitter opent de druk bezochte vergadering en overhandigt allereerst aan Dr Schrek het diploma van het erelidmaatschap van L.i.w.e.n.a.g.e.l., waartoe hij in de vergadering van 28 December 1950 was gekozen.

Daarna begroet de voorzitter de vertegenwoordigers van de bevriende verenigingen, Dr J. Wansink (Wimecos), Dr A. de Gee (Velines), H. Jacobs (W.V.O.) en Dr J. van der Steen (Velebi).

Nadat de notulen van de vorige vergadering zijn goedgekeurd, komt aan de orde punt 3 van de agenda:

Bespreking van de tot nu toe bereikte resultaten met het onderwijs in de Natuurwetenschappen in de α afdeling der Gymnasia en Lycea. Aanleiding tot deze bespreking was, het ter algemene genootschapsvergadering ingekomen voorstel van de afdeling Sneek om het aantal hiervoor beschikbare uren bij de Gymnasia van 3 op 2 te brengen. Het bestuur van L.i.w.e.n.a.g.e.l. acht het, in verband met dit voorstel, gewenst om de mening van de leden over het nuttig effect van dit onderwerp te horen. Als 1e spreker houdt Dr v. d. Steen een korte voordracht, naar aanleiding van een enquête, die Velebi onder de rectoren van gymnasia en lycea heeft gehouden. Uit deze zeer interessante inleiding blijkt, dat er bij de α leerlingen voor dit onderwijs heel grote belangstelling bestaat en dat het zeer zeker zin heeft.

Er volgt nu een zeer levendige discussie, waaraan door velen wordt deelgenomen. De voorzitter vat ten slotte het besprokene samen in de volgende punten:

1. Gelet op de grote moeilijkheden kunnen de tot nu toe bereikte resultaten over 't algemeen van dien aard worden beschouwd, dat in elk geval aanbevolen kan worden, dat dit onderwijs wordt voortgezet.

2. We moeten er naar streven, dat het één vak Natuurwetenschappen wordt en niet een extract van 3 verschillende β vakken, Biologie, Scheikunde en Natuurkunde.

Door de vergadering wordt de aandacht er op gevestigd, dat een der moeilijkheden is — de omstandigheid, dat de opleiding der leraren, vooral tegenwoordig, nogal gespecialiseerd is.

In dit verband merkt Dr de Gee op, dat de leraar *Biologie* wellicht de meest geschikte docent kan zijn voor dit vak, omdat zijn studie voor het candidaatsexamen als bijvakken altijd de Natuurkunde en de Scheikunde omvat. De voorzitter is van mening, dat

het aanbeveling verdient, dat het vak door één docent gegeven wordt; indien deze de 3 vakken niet volledig beheerst, dan beperke hij zich tot de behandeling van capita uit de stof, die hij wel meester is. Het gaat hier ten slotte niet om een volledige behandeling van de Natuurwetenschappen, maar om een demonstratie van de Natuurwetenschappelijke denkmethode.

Dr Baudet merkt op, dat, zo de vakken niet in één hand kunnen zijn, dat dan coördinatie tussen de betrokken leraren noodzakelijk is.

Merkwaardiger wijze was geen vertegenwoordiger van de afdeling Sneek bij deze besprekingen aanwezig.

Na een korte pauze komt dan punt 4 aan de orde:

Bespreking van het rapport van de 2e afdeling van de onderwijsraad over het Wiskunde-onderwijs op de α -afdeling van het Gymnasium.

De voorzitter leidt deze bespreking in met de opmerking, dat de commissie blijkbaar geen kennis heeft genomen van het rapport van L.i.w.e.n.a.g.e.l., dat in de vorige zomervergadering besproken is en in 't najaar van 1950 is gepubliceerd in het weekblad (No. 47 van 26 Juli 1950) van het Genootschap en in Euclides.

Uit de bespreking van het rapport van de onderwijsraad blijkt, dat dit rapport kenmerken draagt van grote eenzijdigheid, deels te wijten aan de geboorneerdheid van de commissie, die het blijkbaar niet nodig acht om kennis te nemen van uitvoerig en grondig werk, dat in het cursusjaar 1949/1950 is verricht door de L.i.w.e.n.a.g.e.l. commissie, anderzijds doordat de commissie zich nagenoeg uitsluitend heeft beperkt tot het uitwerken van de ideeën, die door Dr Dijksterhuis reeds sinds ongeveer 25 jaar met zoveel vuur worden gepropageerd. Op grond hiervan meent de vergadering, de verschijning van dit rapport te moeten betreuren.

Dr Bunt meent te weten, dat de commissie van de onderwijsraad met de beste bedoelingen bezield was, waardoor het jammer zou zijn, wanneer dit rapport een minder gunstig onthaal zou vinden.

De vergadering neemt gaarne nota van de goede bedoelingen van de commissie en geeft aan het bestuur volmacht om deze zaak nader te behandelen. De voorzitter zegt toe binnenkort een bestuursvergadering te zullen beleggen, waarin de onderhavige kwestie grondig onder de loupe genomen zal worden.

Nadat door de vertegenwoordigers van de bevriende verenigingen een woord van dank gesproken is voor de ontvangst, sluit de voorzitter de vergadering.

A. T. M. KRAMER,

Kruisbessenstraat 12, 's-Gravenhage.

Secretaresse.

AANVULLINGEN DER MEDEDELINGEN VAN DE BUITENLANDSE DEELNEMERS OP DE CONFERENTIE IN BAARN OVER HET MIDDELBAAR ONDERWIJS IN DE DIVERSE LANDEN.

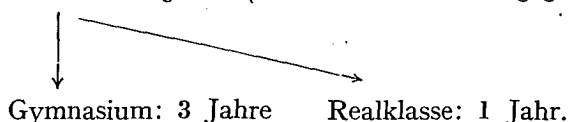
In verband met aan hen gestelde vragen volgt hier nog een nadere uitwerking van het behandelde door de verschillende deelnemers. Daar vertaling soms verkeerde begrippen kan doen ontstaan, zal ik mij hiervan zoveel mogelijk onthouden en de deelnemers zelf aan het woord laten.

Denemarken.

Dr. M. Pihl licht Het Middelbaar Onderwijs daar te lande als volgt nader toe:

Unterschule: 5 Jahre.

Mittelschule: 4 Jahre (hieronder verder aangegeven met Mi.



Altsprachlich (A) Neusprachlich (N) Mathematisch-Naturwissenschaftlich (M)

Abiturienten haben das Recht an einem Universität studieren zu können.

Um an der Technischen Hochschule zu studieren, muss man M mit gutem Ergebnis bestanden haben oder eine spezielle Prüfung ablegen.

Stundenplan der Mittelschule (Mi).

Klasse	1	2	3	4	
Dänisch	5	4	4	4	} oder umgekehrt
Englisch	5	4	3	3	
Deutsch	0	5	4	4	
Lateinisch	0	0	0	4	
Mathematik	4	5	6	6	} wahlfrei, obligatorisch für Zutritt: A und N
Physik und Chemie	2	2	2	2	
Naturgeschichte und Geographie	4	4	4	4	
Religion	2	2	2	1	
Geschichte	2	2	2	2	
Gymnastik	4	4	4	4	
Gesang	2	2	2	1	
Zeichnen	1	1	1	0	

Stundenplan A, N und M.

A, N und M gemeinsam

Klasse	1	2	3
Dänisch	4	4	4
Französisch	4	4	4
Geschichte	3	3	4
Alttertumskunde	2	2	2

Klasse	1	2	3
Religion	1	1	1
Gymnastik	4	4	4
Gesang	2	2	1
Geologie und Biologie	2	2	4

Weiter haben die verschiedenen Abteilungen dann noch:

A			
Griechisch	6	6	6
Lateinisch	6	6	6
Mathematik	2	2	0
Deutsch	1	1	0
Englisch	1	1	0

N			
Lateinisch	4	4	3
Englisch	4	4	4
Deutsch	5	5	5
Mathematik	2	2	0

} oder (häufigst)
umgekehrt.

M

Mathematik	6	6	6	Die Mechanik ist in Mathematik und Physik inkorporiert.
Physik und Chemie	6	6	6	
Deutsch	1	1	0	
Englisch	1	1	0	

Die Abteilung A kommt selten vor. Jetzt dominiert Abteilung M, früher war das N.

Der Religionsunterricht soll in den Gymnasiumabteilungen in objektiver Weise stattfinden, Geschichte ebenso.

Der Unterricht wird von Inspektoren in *jedem* Fache inspiziert.

Das Unterrichtsministerium wird — natürlich mit Ausnahme des Ministers — von Juristen geleitet. Es gibt aber einen Hauptleiter sämtlicher Gymnasien, der Pädagoge ist und dessen Einfluss recht gross ist. Zensoren werden unter den Lehrern gewählt. Etwa $1/4$ — $1/3$ der Gymnasiallehrer sind Zensoren.

Die Gymnasiallehrer müssen 27 Stunden wöchentlich unterrichten, 24 nach dem 55sten Lebensjahre. Wenn sie mehr unterrichten, bekommen sie extra Honorar. Für das Korrigieren von Aufgaben und Aufsätzen bekommt man auch extra Honorar.

België.

Dr. G. Bosteels geeft nog de volgende aanvullingen:

Tot de Middelbare School worden zij toegelaten, die een toelatingsexamen hebben afgelegd, dat loopt over de Moedertaal en het Rekenen. De vragen worden opgesteld binnen de perken van de z.g. „Kennis-barema's Lager Onderwijs”.

De vakken op de Algemene Middelbare School zijn de volgende:

Moedertaal	6 (of 7) uur	Godsdienst	2
Tweede taal Frans	4 (of 6)	Geschiedenis	2
Rekenen	4	Aardrijkskunde	2 (of 1)
Natuurlijke Historie	2	Lichamelijke Opvoeding	3
Tekenen	2	Muziek	1
Handenarbeid	2 (of 1)		

In de oude humaniora — Latijn (6 u).

Het maximum aantal lesuren is 36 per week (lesuren van 50 minuten).

Voor de leerling van de Algemene Middelbare School staan aan het Atheneum, in de hogere cyclus, open:

de wetenschappelijke afdeling (3 jaar) en de economische afdeling (3 jaar)

Moedertaal	5	5
Frans	5	5
Wiskunde	7	3
Engels	3	3
Duits	2 (niet verplicht)	2 (verplicht)
Handel	—	5
Natuurkunde	2	2
Scheikunde	1	1
Biologie	1	1
Geschiedenis	2	2
Aardrijkskunde	1	1 en 1 economische aardrijksk.
Lichamelijke Opv.	3	3
Kunstgeschiedenis	1	1
Tekenen	2	2 (niet verplicht)
Steno/dactylo	—	2

In de afdelingen (hogere cyclus) Latijn-Wiskunde:

geen Grieks, 5 u Latijn, 7 u Wiskunde en 3 u Wetenschappen (biologie, natuur- en scheikunde),

en in Latijn-Wetenschappen:

geen Grieks, 5 u Latijn, 5 u Wiskunde en 5 u Wetenschappen.

Een leerling, die met goed gevolg de humaniora doorlopen heeft, krijgt een „certificaat”. Dit certificaat wordt voorgelegd aan de „homologatie-commissie” (van het Rijk), die onderzoekt, of alle wettelijke voorschriften werden nageleefd. Wordt het certificaat goed bevonden, dan wordt het gehomologeerd en kan de candidaat universitaire studiën aanvatten. Wordt het geweigerd, b.v. omdat een bepaalde cursus niet onderwezen werd of omdat een minimum voorzien aantal huistaken niet gemaakt werd, enz., dan wordt de

candidaat in de gelegenheid gesteld om voor een centrale commissie een certificaat te behalen, dat hem in staat stelt naar een universiteit te gaan. Deze examens dekken de leerstof van heel de humaniora (hoofdzakelijk de hogere cyclus), maar staan als zeer zwaar aangeschreven.

Tot slot nog de urentabel van het Middelbaar Onderwijs van de lagere graad.

Vakken	Lat. 6e	L-g 5e	L-g 4e	L-w 4e	Mod. 6e	Mod. 5e	Mod. 4e
Godsdienst of zedenleer	2	2	2	2	2	2	2
Nederlands	6	6	5	5	7	6	6
Frans	5	5	4	5	6	6	6
Engels			2	2		3	3
Latijn	6	6	5	6			
Grieks			6				
Wiskunde	4	4	4	4	4	4	4
Wetenschappen	2	3	2	3	2	3	3
Geschiedenis	2	2	2	2	2	2	2
Aardrijkskunde	2	1	1	1	2	2	1
Handelswetenschappen							3
Tekenen	2	2		2	2	2	2
Handenarbeid	1	1		1	2	2	
Muziek	1	1			1	1	1
Lich. Opvoeding	3	3	3	3	3	3	3
Totaal	36	36	36	36	33	36	36

Lat. = Latijnse afdeling; L-g = afdeling Grieks-Latijn; L-w = afdeling Latijn-Wiskunde; Mod. = moderne afdeling.

Zwitserland.

Van de helaas in Januari j.l. overleden Dr. Erwin Voellmy zijn nog de volgende opmerkingen afkomstig:

In die Bundesverfassung ist der wichtige Artikel 27 eingebaut. Er lautet:

„Der Bund ist befugt, ausser der bestehenden polytechnischen Schule (sie heisst heute durch Gesetz „Eidgenössische Technische Hochschule“-ETH) eine Universität und andere höhere Unterrichtsanstalten zu errichten und solche Anstalten zu unterstützen.

Die Kantone sorgen für genügenden Primarunterricht, welcher ausschliesslich unter staatlicher Leitung stehen soll. Derselbe ist obligatorisch und in den öffentlichen Schulen unentgeltlich. Die öffentlichen Schulen sollen von den Angehörigen aller Bekenntnisse ohne Beeinträchtigung ihrer Glaubens- und Gewissensfreiheit besucht werden können.

Gegen Kantone, welche diesen Verpflichtungen nicht nachkommen, wird der Bund die nötigen Verfügungen treffen.

Artikel 27bis. Den Kantonen werden zur Unterstützung in der Erfüllung der ihnen auf dem Gebiete des Primarunterrichtes obliegenden Pflichten Beiträge geleistet.

Das Nähere bestimmt das Gesetz.

Die Organisation, Leitung und Beaufsichtigung des Primarschulwesens bleibt Sache der Kantone, vorbehalten die Bestimmungen des Artikels 27."

Der Bund hätte also das Recht, eine eidgenössische Universität zu gründen. Das ist nicht geschehen und wird wahrscheinlich für alle Zeiten unterbleiben. Hingegen hat der Bund als einzige eidgenössische Schulanstalt die ETH zur grossen, weltbekannten, polytechnischen Schule ausgestaltet. In Ihrer sogenannten Freifächerabteilung hat er die Möglichkeit, Gelehrten verschiedenster „Geisteswissenschaften" einen eidgenössischen Lehrstuhl zu verschaffen; denn der Schüler der Technischen Hochschule soll Akademiker sein und als solcher vielseitige Interessen pflegen.

Sechstausend Franken kostet den Bund jeder ausgebildete Ingenieur, der nach sieben Semestern seinen „Dipl. Ing. ETH." holt.

Eigenartigerweise hat der Bund auf einem bemerkenswerten „Umweg" in ein Schulgebiet eingegriffen, das verfassungsmässig eine eigentlich kantonale Domäne zu sein scheint: in das Mittelschulwesen, das vor allem durch die Kantonsschulen repräsentiert ist. Es sind die Schulen, welche die Berechtigung zum Studium an den Hochschulen durch die Maturazeugnisse verleihen. Der Bund greift nun hier durch das Eidgenössische Medizinalgesetz ein. Dieses stellt die Normen fest für die Erlangung der Diplome als Arzt, Zahnarzt, Veterinär, Apotheker und Lebensmittelchemiker. Diese Diplome werden nur abgegeben, wenn ein eidgenössisches Maturitätszeugnis vorgelegt wird. Aus eigener Machtvollkommenheit verlangt auch die ETH einen solchen Ausweis und die Kantone selbst können die Ausübung anderer akademischer Berufe, z.B. der Rechtsanwälte, an die gleiche Bedingung binden, die der Bund vorsieht. Damit ist der eidgenössischen Maturitätskommission Aufbau und Studienzeit der Mittelschulen in die Hand gegeben. Keine Mittelschule kann praktisch auf die Erteilung der eidgenössischen Ausweise verzichten. So müssen sich staatliche, private, auch die vielen klösterlichen Mittelschulen der Bundesaufsicht unterwerfen, welche in der Maturitätsverordnung von 1925 das Ziel aufstellt: „Der Unterricht soll dem Schüler diejenige geistige Reife und Selbstständigkeit im Denken vermitteln, die zu einem erfolgreichen akademischen Studium notwendig ist."

Man hat drei Typen Schulen an einem Gymnasium, die aber nicht immer alle vorhanden sein. Zumeist sind vorhanden die Typen A (altsprachlich) und C (math.-naturwissenschaftlich) oder B (mit Latein ohne Griechisch) und C oder endlich wie in Basel alle drei.

Matur A berechtigt für alle Fakultäten und die ETH, wenn nachgewiesen wird, dass der Schüler einen freiwilligen Kurs in Darstellende Geometrie besucht hat. Matur C berechtigt nur für Math. und Naturwissenschaften, kann aber durch eine besondere Lateinmaturprüfung zu einer Matur B ergänzt werden, die auch zum Studium der Medizin und der neueren Sprachen berechtigt.

Die Dauer der Mittelschulen wechselt mit den Kantonen. Das Reglement des Bundes fordert nur, dass die Totalschulzeit minimal $12\frac{1}{2}$ Jahre betrage. Die Grundschuljahre sind nicht überall gleich.

Ist die Anzahl der Grundschuljahre g , so hat man $12-g$ Jahre Gymnasium (Basel) oder auch $12\frac{1}{2}-g$; für die Realschule hat man $8-g$ oder $9-g$.

Unterrichtsplan des mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasiums Basel

a) Obligatorische Fächer:

Fach	Klasse I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
Deutsch	6	6	5	4	4	4	4	4	37
Französisch	6	6	5	5	4	4	3	4	37
Englisch	—	—	3	3	3	3	3	3S/0W	$16\frac{1}{2}$
Geschichte	—	2	2	3	2	2	2	3	16
Geographie	2	2	2	2	2	0	2	1	$13^*)$
Naturkunde (Biologie)	2	2	2	2	2	2	2	—	14
Physik (Mechanik dabei)	—	—	—	—	2	3	3	3	11
Chemie	—	—	—	—	—	2	2	3	7
Rechnen und Algebra	4	4	3	5	3	4	3	3	29
Geometrie	—	—	3	3	3	3	2	3	17
Darst. Geometrie	—	—	—	—	—	—	3	3	6
Geom. Zeichnen	—	—	—	—	2	—	—	—	2
Freihandzeichnen	2	2	2	2	2	2	—	—	12
Schreiben	2	2	1	—	—	—	—	—	5
Turnen	3	3	3	3	3	3	3	3	24
Singen	2S/3W	2	1S/1W	—	—	—	—	—	5
Zahl der oblig. Stunden	$29\frac{1}{2}$	31	$31\frac{1}{2}$	32	32	32	32	$31\frac{1}{2}$	$251\frac{1}{2}$

*) In der achten Kl. vom Math. lehrer gegeben
S = Sommersemester; W = Wintersemester.

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - Prof. Dr. E. W. BETH, AMSTERDAM
Dr. R. BALLIEU, LEUVEN - Dr. G. BOSTEELS, HASSELT
Prof. Dr. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - Dr. L. N. H. BUNT, UTRECHT
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
Dr. R. MINNE, LUIK - Prof. Dr. J. POPKEN, UTRECHT
Dr. O. VAN DE PUTTE, RONSE - Prof. Dr. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
Dr. H. STEFFENS, MECHELEN - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

26e JAARGANG 1950/51

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Inhoud van de 26ste jaargang 1950—1951.

	Blz.
Officiëel.	
Rapport van de commissie ter bestudering van een reorganisatie van het wiskundeonderwijs in de A-afdelingen van de Gymnasia en de Gymnasiale afdelingen der Lycea	49
Rapport van de commissie ter bestudering van het onderwijs in infinitesimaal rekening in de B. afdelingen der Gymnasia en der Gymnasiale afdelingen der Lycea	55
Examens in de wiskunde.	81, 201
Notulen van de vergadering van de Groep L.i.w.e.n.a.g.e.l. in het Eykmanhuis te Driebergen op 1 September 1950	177
Beknopt verslag van de algemene vergadering van Wimecos op 3 Januari 1951	178
Herdenking van het 25-jarig bestaan van Wimecos op de Jaarvergadering op 3 Januari 1951 door de voorzitter.	181
Verzoek van het Ministerie voor O.K.W.	224
Mededelingen	165, 166 304
 Wijdenesnummer.	
Na 25 jaren.	1
Uit de levensloop van P. WIJDENES.	2
Dr H. STREEFKERK, De betekenis van P. WIJDENES voor de didactiek van de wiskunde.	3
 P. WIJDENES:	
Over het onderwijs in rekenen in de eerste klas van de H.B.S.	9
Voor het laatst twee vraagstukken?	24
De vergelijking $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$	35
Korrels I en II	39
De Klinografische projectie	40
 S. J. GEURSEN, Evenredigheden en de schoolvakken, waarin ze toepassing vinden	61
Dr J. KOKSMA, Het samenstellen van een vlak krachtenstelsel	69
Dr G. WIELENGA, Enige aspecten van het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappelijke vakken op de Amerikaanse High School	82
De zomerconferentie in Baarn.	97
Dr JOH. H. WANSINK, Mathematical teaching in Dutch secondary Schools	99
Dr G. BOSTEELS, Het wiskunde onderwijs in België.	115
Dr ERRWIN VOELLMY, Die Dezentralisierte Organisation des Mathematikunterrichtes in der Schweiz.	143
Outline of the address by W. J. LANGFORD. J. P. M. Sc.. . . .	146

	Blz.
MOGENS PHIL, The teaching of mathematics in the Danish senior secondary school.	152
E. JACQUEMART, Mathématiques et cinema d'enseignement	158
KAY PIENE, The place of Mathematics in the Norwegian Secondary Schools.	225
Dr D. J. E. SCHREK, De „Mathematical Association”, haar geschiedenis en haar beteekenis van het Engelsche Wiskunde-Onderwijs.	167
Dr JOH. WANSINK, Dr Erwin Voellmy †	185
Prof. Dr G. HOLST, Wiskunde en techniek	186
Dr H. J. E. BETH, Over momenten	202
Prof. Dr B. L. VAN DER WAERDEN, Over de ruimte	207
H. G. BRINKMAN, De algemene momentenstelling.	220
Mathematical problems „Examen Artium of Norway”.	242
Prof. Dr HANS FREUDENTHAL, De dwarskijker.	245
Prof. Dr O. BOTTEMA, Verscheidenheden.	
XXIX. De som van de hoeken van een driehoek	252
XXX. De ladder tegen de muur	256
XXXI. De hoogtelijnen van een viervlak	259
Dr J. KOKSMA, Het limietbegrip I.	261
Dr L. LIPS, Over een misleidend algebravraagstuk.	297

KORRELS.

CI. HERMEN J. JACOBS Jr., De decimale ontwikkeling van het getal π	77
CII. Dr L. CRIJNS, Een probleem van Euler	79
CIII. Dr L. CRIJNS, Op de ribben van een gelijkzijdige drievlakshoek enz.	81
Boekbesprekingen	96, 301

b) Fakultative Fächer:

Fach	Klasse I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total
Latein	—	—	—	—	3	3	3	3	12
Italienisch	—	—	—	—	2	2	—	—	4
Englische Konversation	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Kunstgeschichte	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Freihandzeichnen	—	—	—	2	2	2	2	2	10
Physik-Laboratorium	—	—	—	—	—	—	1	1	2
Chemie-Laboratorium	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Stenographie	—	—	—	—	2	—	—	—	2
Philosophie	—	—	—	—	—	—	—	1	1
Collegium musicum vocale	—	—	—	—	1	1	1	1	4
Collegium musicum instrum.	—	—	—	—	2	2	2	2	8

Man sieht wie vielen Mathematikstunden, wobei Rechnen, Algebra, Geometrie, Darstellende Geometrie und Geom. Zeichnen zusammengefasst werden müssen; auf der achten (letzten) Klassenstufe kommt auch noch die Mathematische Geographie, Kosmologie umfassend, weil vom Mathematiklehrer erteilt, also dort Summe 10 Stunden.

Als Gegenstück kommt der Unterrichtsplan des Humanistischen Gymnasiums in Basel, einer Hochburg des Typus A mit seinen wenigen Mathematikstunden, zum Schluss drei.

Unterrichtsplan für das Humanistische Gymnasium in Basel.

Fächer	Klasse I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total der Jahr.Std.
<i>A. Obligatorische</i>									
Lateinische Sprache	7	7	7	7	7	7	6	7	55
Griechische Sprache	—	—	—	6	6	6	6	6	30
Deutsche Sprache	4	3	3	3	3	3	3	3	25
Französische Sprache	—	5	5	3	3	3	3	3	25
Geschichte	2	2	2	2	3	3	3	3	20
Geographie	2	2	2	1	1	1	1½	—	10½
Mathematik	4	4	4	4	4	4	3	3	30
Naturkunde (Bot. Zool. Min.)	—	—	2	2	2	2	½	—	8½
Physik	—	—	—	—	—	—	3	2	5
Chemie	—	—	—	—	—	—	—	2	2
Zeichnen	2	2	2	—	—	—	—	—	6
Schreiben	3	S2/W1	—	—	—	—	—	—	4½
Singen	S2/W3	2	S1	—	—	—	—	—	5
Turnen	3	3	3	3	3	3	3	3	24
	29½	31½	30½	31	32	32	32	32	250½

S = Sommersemester; W = Wintersemester.

B. Fakultative	Klasse I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	Total der Jahr.Std.
Italienische Sprache	—	—	—	—	—	—	2	2	4
Englische Sprache	—	—	—	—	—	—	2	2	4
Hebräische Sprache	—	—	—	—	—	—	W2	3	4
Chemisches Praktikum	—	—	—	—	—	—	—	W2	1
Kunstgeschichte	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Gesundheitslehre	—	—	—	—	—	S1	—	—	$\frac{1}{2}$
Zeichnen	—	—	—	2	S2	2	—	—	5
Stenographie	—	—	—	—	2	—	—	—	2
Total	—	—	—	2	3	2 $\frac{1}{2}$	6	8	21 $\frac{1}{2}$

Ähnlich wie das M.N. Gymnasium in Basel sind noch das Städtische Gymnasium in Bern mit ebenfalls 8 Jahresklassen und die Oberrealschule in Zürich mit 5 $\frac{1}{2}$ organisiert (Unterbau Primarschule 6 Jahre, Sekundarschule 1 Jahr). Dagegen hat kein Gymnasium der Schweiz weniger Mathematikstunden als das Hum. Gymnasium in Basel. Darum zeigen Ihnen die beiden Berichte die beiden *Gegenpole* der grossen Spannung in dem Unterricht der Mathematik in der Schweiz.

Frankrijk.

Naar aanleiding van de door de Heer E. Jacquemart naderhand verstrekte gegevens is de volgende opbouw van het Franse onderwijs te maken.

Na één of twee jaar eventueel een Ecole Maternelle (bewaarschool) te hebben bezocht, gaat een kind op zesjarige leeftijd naar de Lagere School. Men noemt dit onderwijs in Frankrijk „Enseignement du 1^{er} degré”. Dit bestaat uit:

11. Cours préparatoire
10. Cours élémentaire, 1^{ère} année
9. Cours élémentaire, 2^{ème} année
8. Cours moyen, 1^{ère} année
7. Cours moyen, 2^{ème} année.

Terloops zij opgemerkt, dat men bij „Lycées” en „Collèges”, waar deze z.g. Cours primaires zijn, van 11de, 10de, enz. Cours (klasse) spreekt. Nu komt een splitsing: een aantal leerlingen gaat naar een „Enseignement primaire prolongé” gedurende maximaal 4 jaar. Dit zijn de z.g. „Cours complémentaires”. Zij die naar het Middelbaar Onderwijs willen (Enseignement du 2^{me} degré), moeten nu een toelatingsexamen doen (l’Examen d’entrée en 6e). Als zij slagen, kunnen zij kiezen tussen

6e Classique	en	6e Moderne
avec latin et une langue vivante		sans Latin et une langue vivante
daarna 5e Classique		5e Moderne

4e A	4e B		4e Moderne
latin	latin		sans latin, deux langues vivantes
grec	une langue vivante		
	deux langues vivantes		
3e A	3e B	3e M	
2e A	2e B	2e C	2e M
latin	latin	latin	sans latin
grec	deux langues vivantes	une langue obligatoire	deux langues vivantes
		une facultative	
		et enseignement scientifique renforcé	

Vervolgens heeft men

1e A 1e B 1e C 1e M

met dezelfde structuur als de tweede klassen. Aan het eind van dit jaar wordt afgelegd: Baccalauréat 1ère partie.

Hierna krijgt men drie afdelingen:

<i>Philosophie</i>	<i>Sciences expérimentales</i>	<i>Mathématiques</i>
9h de Philo	5h de Philo	9h de Mathématiques
1½h de Mathématiques	4h de Mathématiques	5h de Physique
2h de Sciences Physiques et	5h Sc. phys.	3h Philo
2h Naturelles	4h Sc. Naturelles	2h Sc. Nat.

Aan het eind van het jaar volgt dan: Baccalauréat 2e partie.

Na met succes dit examen te hebben afgelegd, moet men zich gedurende een jaar voorbereiden voor een „Certificat de propédeutique”, dat het volgende jaar de toegang tot de Universiteit geeft. Men kan gedurende dit jaar zich voorbereiden voor het

- 1°. Certificat de Mathématiques générales (voor de a.s. wiskundigen);
- 2°. Certificaat M.P.C. (Math., Phys., Chimie) voor de physici en scheikundigen;
- 3°. Certificat P.C.B. (Phys., Chimie, Biologie) voor de a.s. medici, „techniciens de laboratoire”, enz.;
- 4°. Certificat de Propédeutique littéraire (langues mortes, langues vivantes, histoire, enz.).

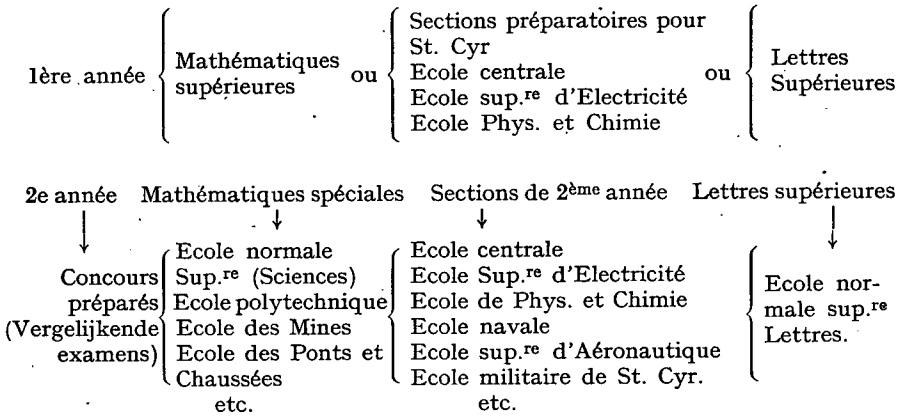
Dan kan de student eindelijk aan de Universiteit zich voorbereiden voor zijn *Licence* (het is beter deze uitdrukkingen niet te vertalen; uit het verslag worden zij vanzelf duidelijk). Vervolgens kan hij een „diplôme d'études supérieures” verwerven en eventueel promoveren. Een licence bestaat in het algemeen uit drie of vier „certificats”. Zo bestaat b.v. bij de Wiskunde een licence d'enseignement behalve uit een „Certificat de Mathématiques générales” uit:

- a) een Certificat de Calcul différentiel et intégral
- b) een Certificat de Mécanique rationnelle
- c) een Certificat de Physique générale.

In verband met de z.g. Licences d'enseignement zij opgemerkt, dat men ook de z.g. Licences libres kent. Bij de eerste categorie is de candidaat verplicht bepaalde „certificats” te halen, bij de tweede, die niet geldig zijn voor een onderwijsloopbaan, kan de candidaat zijn „certificats” zelf kiezen.

Bij de voorbereiding voor de z.g. „Grandes Ecoles” zijn de studenten verplicht een andere weg te bewandelen, dadelijk nadat zij hun Baccalauréat 2e partie hebben afgelegd. Zij komen dan in de z.g. classes préparatoires aux Grandes Ecoles, welke aan de lycea verbonden zijn.

Men heeft de volgende afdelingen:



De twee zwaarste, vergelijkende examens zijn die van de Ecole normale supérieure de l'Enseignement secondaire en vervolgens van de Ecole Polytechnique. De eerste bereidt zijn leerlingen voor de verschillende „agrégations” voor. Een „agrégation” is het moeilijkst vergelijkende examen en is bestemd om de leraren te selecteren.

DENMARK.

Examen artium May—June 1950.

1. Find x from the equation

$$x^2 - (3 - 2i)x + (5 - i) = 0$$

p and q being the roots of this equation, construct a new equation of second degree $x^2 + Ax + B = 0$, the roots of which are $1/q$ and $1/p$.

p and q as well as A and B must be given in the form $a + ib$, where a and b are real numbers.

2. Examine and draw the curve, the equation of which is

$$y = \frac{x - 3}{x + 3}.$$

Compute the area of the closed figure determined by the curve and the coordinate-axes.

The figure enclosed by the curve, the y -axis and the straight lines $y = 1$ and $x = 3$ is rotated 360° around the straight line $y = 1$. Compute the volume of the resulting solid.

3. Solve and discuss the equation

$$a (\cos x + \sin x) = \sin x \cos 2x.$$

Example: $a = -\frac{1}{2}$.

1. The tangents from the point $N (0,5)$ to the ellipse

$$9x^2 + 25y^2 = 225$$

touch this in the points P and Q .

Demonstrate that the circle circumscribing the triangle NPQ passes through the foci of the ellipse.

Compute the acute angle between the ellipse-tangent and the circle tangent in P .

2. In a regular 4-sided pyramid the side of the basis is a and the altitude of the pyramid is $2a$. A plane parallel to the basis cuts the surface of the pyramid in a square the inscribed circle of which is one basis in a circular cylinder, the other basis of which lies in the basis of the pyramid.

Determine the altitude of the cylinder in such a way as to maximize its volume and compute this maximal volume.

3. Construct an acute-angled triangle ABC from the angle A and the radius of the circumscribed circle, when it is further given that the distances from the centre O of this circle to the sides b and c have the ratio $p : q$, where p and q are given segments.

When $A = 62^{\circ}, 80'$; $R = 3,456$; $p = 1$; $q = 2$ compute the angles in which AO divides the angle A . Compute further the unknown angles and sides of the triangle ABC .

VEREENIGING VAN LEERAREN IN DE WISKUNDE,
DE MECHANICA EN DE COSMOGRAFIE AAN HOGERE BURGER-
SCHOLEN EN LYCEA (WIMECOS).

De Jaarlijkse Algemene Vergadering zal op Donderdag 3 Januari a.s. in Hotel Krasnapolsky (bij de Dam gelegen) te Amsterdam worden gehouden. Aanvang der vergadering om half elf. De voorlopige agenda luidt als volgt:

1. Opening door de Voorzitter.
2. Notulen van de vorige Algemene Vergadering.
3. Jaarverslag.
4. Financieel verslag van de Penningmeester.
5. Vaststelling contributie volgend verenigingsjaar.
6. Verslag kascommissie.
7. Benoeming kascommissie.
8. Verslag commissie leesportefeuille.
9. Bestuursverkiezing wegens periodiek aftreden van de H.H. Ir J. J. Tekelenburg en Dr Joh. H. Wansink. Het Bestuur stelt candidaat:

a. Ir J. J. Tekelenburg	en a. Dr Joh. H. Wansink
b. Dr P. J. A. M. Kouwenhoven	b. Drs P. Beimers.
10. Lezing door de Heer Drs H. Pleysier, docent aan de Economische Hogeschool te Rotterdam, over het Wiskundeonderwijs in verband met de eisen voor het Economisch Hoger Onderwijs.
11. Lezing door Prof Ir F. M. Roeterink te Eindhoven over:
„Wordt aanpassing aan de veranderde maatschappelijke structuur bereikt door de richtlijnen van de Ministeriële Nota's dd. 11 Januari en 19 Juli 1951?”
12. Rondvraag, daarna sluiting.

Punt 11 komt in de middagvergadering om kwart over twee aan de orde. Leden, die bepaalde onderwerpen op de agenda geplaatst wensen te zien, worden verzocht deze voor 1 December a.s. aan de Secretaris op te geven.

De Secretaris

Ir J. J. Tekelenburg
Bergselaan 13a, Rotterdam.

HET LIMIETBEGRIIP II

door

Dr J. KOKSMA.

Zoals werd aangekondigd gaat dit tweede deel¹⁾ in hoofdzaak over de algemene behandeling van het limietbegrip in de algebra. Daarmee komen we op een meer betreden terrein, men kan er in Euclides vaak een opmerking of een passage over vinden, meestal echter terloops geplaatst in ander verband. De laatste opzettelijke en uitvoerige behandeling dateert al weer van een tiental jaren terug; ik doel op de voordracht, die Prof. Gerretsen (nog als collega) voor de algemene vergadering 1939 van Wimecos hield en die voor de helft er aan gewijd was. Men kan ze vinden in de zestienste jaargang; het over limieten handelende deel begint op bladzijde 207 (de eerste helft blijft hier geheel buiten beschouwing). De schrijver legt de moeilijkheden van de exacte limietdefinitie bloot door een analyse van haar logische structuur, vervolgens toetst hij een aantal uit leerboeken geciteerde definities aan de exacte en tenslotte stelt hij zelf een behandeling voor, die het begrip toegankelijker bedoelt te maken.

De waarde van het artikel wordt nog verhoogd door het feit, dat het discussie uitlokte, de genoemde jaargang bevat niet minder dan drie reacties; voor mijn doel is alleen de derde van belang (p. 260). De schrijvers, Dr. Th. G. D. Stoelinga en Dr. M. G. van Tol, verweren zich daar tegen de op hun definitie geoeffende critiek en doen ook hunnerzijds voorstellen.

Gezien vanuit het psychologisch standpunt, dat in het eerste deel van dit (mijn) artikel ingenomen werd, is in deze polemiek vooral één ding opmerkelijk: terwijl zijn opposenten kennelijk vanuit het daar getekende naderingsstandpunt redeneren, blijft het antwoord van Gerretsen geheel in het logische vlak. Wel zinspeelt hij hier en daar op de voorstellingen, die blijkbaar aan het verweer ten grondslag liggen, hij gaat daar evenwel niet dieper op in, met het gevolg, dat zijn weerlegging zijn tegenstanders glad voorbij gaat. Ik kan me niet voorstellen, dat hij er bewust geen prijs op zou hebben gesteld, door hen te worden „verstaan”; het lijkt me eerder, dat hij zijnerzijds geheel vrij is van de tekortkomingen, die ik in het vorige artikel, zij het voorzichtig, toch eigenlijk wel ons gehele corps ten laste heb gelegd. Met andere woorden: bij hem schijnen intuïtief en exact limietbegrip zo zeer samen te vallen, dat hij eenvoudig niet op de gedachte komt, dat dit haarscherp betoog zijn uitwerking zou kunnen missen. Toch moet dat het geval geweest zijn, het is immers ondenkbaar, dat Stoelinga en van Tol niet de juistheid van dat betoog hebben

¹⁾ Voor het eerste deel zie men Eucl. 26, blz. 261 e.v.

ingezien, desalniettemin vertoont de limietbehandeling in de latere drukken van hun leerboek geen spoor van radicale wijziging vergeleken met de door Gerretsen gecritiseerde. Zij erkennen doodeenvoudig niet een *logische* weerlegging van hun *didactische* inzichten; de wetenschappelijke wiskunde en die van het onderwijs zitten bij hen in aparte hokjes.

Als het waar is, dat deze kwaal, zij het in minder hevige graad, algemeen verbreid is (en in die richting wijst de inhoud van het vorige artikel), dan valt het te verwachten, dat de voordracht van Prof. Gerretsen niet de invloed gehad heeft, die ze verdiende. Daarvoor zou trouwens nog een oorzaak zijn aan te wijzen, namelijk het ongelukkige tijdstip, waarop ze werd gepubliceerd: voorjaar 1940. Nadien zal er bij menigeen vooreerst niet veel meer van strenge limietbehandeling gekomen zijn. Het lijkt me niet uitgesloten, dat er in dezen nog collega's (speciaal jongere) naar hun vorm lopen te zoeken; hun kan lezing worden aanbevolen. Intussen maakt dat de voortzetting van mijn artikel niet overbodig; juist omdat Prof. Gerretsen het psychologisch aspect in het geheel niet beschouwt, laat hij mij de ruimte tot mijns inziens gewenste aanvulling.

Ik knoop aan bij de zes in de voordracht geciteerde limietdefinities, die daar gerangschikt staan in volgorde van opklimmende strengheid. De laatste twee behoeven ons niet bezig te houden, het zijn correcte ε - δ -definities van Wijdenes. Wanneer we echter zien, dat volgens no. 1 een limiet „een (vast) getal” is, waartoe een „veranderlijke grootheid onbepaald dicht nadert”, volgens no. 2 „een eindige standvastige grootheid, waartoe een veranderlijke grootheid steeds meer en meer nadert”; dat in no. 3 althans nog een „veranderlijk getal n ” „aangroeit” en dat eerst in no. 4 de veranderlijke eens een beetje stil begint te staan, dan openbaart zich daarin het geenszins verwonderlijke feit, dat de gekozen volgorde er tevens ene is van *afnemende veranderlijkheidssuggestie*.

Dat eenmaal geconstateerd zijnde, is het evenmin verwonderlijk, dat Gerretsens structurele analyse een onnodig subtiel toetsingsapparaat blijkt. Van de eerste twee definities kan ook hij moeilijk wat anders zeggen, dan dat ze volslagen onzin bevatten; aan de letterlijk gebruikte termen is immers geen redelijke zin te hechten. Eerst op de derde krijgt ze enigszins vat, terwijl inderdaad bij de vierde met enige scherpste blijkt aan te geven te zijn, wat er aan mankeert.

Nu is het helemaal geen kunst een strenge limietdefinitie in een leerboek te laten afdrukken, de stellers der gewraakte definities hadden het stuk voor stuk uit hun blote hoofd kunnen doen. Daarvan hebben zij afgezien *op didactische gronden*, ze hebben de leerling de toegang tot het begrip willen vergemakkelijken. Het wél verwonderlijke is, dat ze dat gedaan hebben op een wijze, die deze toegang ten zeerste bemoeilijkt, om niet te zeggen onmogelijk maakt.

Het spreekt toch eigenlijk vanzelf, dat elke vereenvoudigde be-

handeling moet worden verkregen *vanuit de exacte*, op een wijze, die in staat stelt, *ten eerste*, precies aan te geven, waaruit de vereenvoudiging bestaat en *ten tweede*, te allen tijde de behandeling weer tot de exacte te kunnen verdiepen. Deze stelregel is blijkbaar bij de schrijvers in het geheel niet opgekomen. De oorzaak is duidelijk het reeds genoemde „aparte hokjes”-verschijnsel, of, zoals ik het eerder uitdrukte, de divergentie, die er bestaat tussen hun intuïtieve limietvoorstelling en de wetenschappelijke. Daarom is ook te verwachten, dat ze voor een zuiver logische critiek geheel ontoegankelijk zullen zijn; ze zijn immers met de exacte opvattingen vertrouwd en hebben bij de keuze van hun definitie die critiek als het ware reeds zelf geleverd en . . . afgewezen.

Ik wil het, wat de slechte definitie betreft, eerst bij het bovenstaande laten. Ik weet niet, hoe verbreid ze in ons onderwijs is, vermoedelijk speelt ze er nog een aanzienlijke rol in.

Gelukkig geven ook tal van boeken de exacte definitie of een daaruit door vereenvoudiging verkregene. Op zichzelf zegt dat natuurlijk niets, alles hangt af van de vraag: hoe staat het met de *voorbereiding* ertoe, is die vrij van naderingssuggesties? Het valt niet te verwachten, dat die op in het oog lopende wijze aanwezig zullen zijn, het aansturen op de exacte definitie verhindert het te lang volgen van een verkeerde koers. Verder kan geen mens de naderingsterminologie vermijden; het ware te goedkoop, in elk gebruik daarvan een ongeoorloofde suggestie te zien. Dat ik desondanks meen in de enkele leerboeken, die ik naging; passages te vinden, die slechts in die zin zijn te verstaan, is een persoonlijke overtuiging, die ik niet met citaten wil trachten te staven. Ik vermeld ze, omdat de leerboeken zich tegenwoordig wel wat veel over de docent heen tot zijn leerlingen richten en de eerste zo hun didactische opvattingen opdringen. De schrijver heeft het daarbij betrekkelijk gemakkelijk, hij richt zich tot een hypothetische leerling; acht hij die bevredigd, dan kan hij zijn Imprimatur geven en is verder van alles af. Voor de docent begint het dan echter pas; hij staat voor de taak, alle duistere passages te verhelderen en waar de schrijver alle tijd heeft zorgvuldig een inkleding te bedenken, die net binnen de perken blijft, kan het in de les gebeuren, dat zelfs een zwakke suggestie tot gigantische afmetingen aangroeit.

Zo herinner ik mij levendig de verlegenheid, waarin ik jaren geleden geraakte, toen ik in de mechanica's de limieten volgens het boek van Beth en van Loo behandeld had en dat de volgende keer wegens niet begrijpen over moest doen. Ik raakte hoe langer hoe

meer verstrikt in het accentueren van de puntjes, waar de schrijvers wijselijk lichtjes overheen waren gegleden, begreep er tenslotte zelf ook niets meer van en beëindigde de discussie daarom maar met het uitmaken van mijn pupillen voor uilen en stommeriken.

Misschien doe ik goed de hele betreffende passage hier te laten volgen; door het sterk gecompriëerde karakter illustreert ze mijn bedoeling duidelijker dan citeren van verspreide zinnnetjes zou doen. Ze luidt ¹⁾:

„(1) We beschouwen de uitdrukking $2 - \frac{1}{n}$, waarin we voor n achtereenvolgens de waarden 1, 2, 3, 4, substitueren. (2) De uitdrukking $2 - \frac{1}{n}$ wordt daardoor een veranderende grootheid, die achtereenvolgens de waarden $1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \dots$ aanneemt, en wel des te groter waarden, naarmate n groter gekozen wordt. (3) Hij bereikt nooit de waarde 2, hoe groot men n ook neemt; het verschil van de waarde van de uitdrukking en 2 kan echter, door n voldoende groot te nemen, kleiner worden gemaakt dan een willekeurig gekozen klein positief getal. (4) Om bijvoorbeeld dat verschil kleiner dan 0,001 te maken, moet men $n = 1001$ minstens nemen. (5) We noemen nu 2 de limiet van $2 - \frac{1}{n}$, als we n onbepaald laten aangroeien, en schrijven dit: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = 2$ (in plaats van te zeggen, dat men n onbepaald laat aangroeien, spreekt men het symbool $n \rightarrow \infty$ korthedshalve aldus uit: „ n naar oneindig”).

(6) Stelt g_n een uitdrukking voor, waarin de letter n voorkomt, dan bedoelt men met de bewering $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$, dat het onbeperkt toenemen van n ten gevolge heeft, dat g_n onbeperkt nadert tot g . (7) We drukken dit als volgt uit:

Definitie: Men zegt, dat een veranderende grootheid g_n het getal g tot limiet heeft, als men bij elk positief getal ε een natuurlijk getal m kan vinden zo, dat $|g - g_n| < \varepsilon$ is voor elke n , die groter is dan m .”

De zinnen van het citaat zijn door mij genummerd. De definitie aan het slot is in het boek vetgedrukt; het woord „definitie” behoort eigenlijk niet tot de tekst, maar staat in de marge.

Voor mijn gevoel kwispelt deze uiteenzetting besluiteloos van het ene uiterste, de letterlijke naderingsvoorstelling, naar het andere:

¹⁾ Dr. H. J. E. Beth en Dr. P. J. van Loo, *Mechanica voor het M.O.*, zesde druk (1948), p. 14.

de statische exacte opvatting. Dat in zin 1 voor n *achtereenvolgens* de waarden 1, 2, 3, 4, . . . worden gesubstitueerd, wil ik daar laten, men kan de rij willen opstellen. Toch had ik dan liever de rij eerst geschreven, in plaats van die uit $2 - \frac{1}{n}$ te laten ontstaan; deze

uitdrukking is enkel de algemene voorstelling van alle getallen der rij, met andere woorden, de rij zelf. Dat de schrijvers er iets anders in zien, blijkt in 2: de uitdrukking wordt „daardoor”, dat is door het *achtereenvolgens substitueren*, een „veranderende grootheid.” Het woord „veranderend” is geen technisch wiskundige term, men behoeft dus niet aan formeel gebruik te denken. Dat de schrijvers het invoeren, kan niets anders betekenen, dan dat ze het *letterlijk* bedoelen en de er door gewekte voorstelling voor het limietinzicht *onontbeerlijk achten*; zo *leeft de limiet in hen*. Ze brengen de „veranderende grootheid” bij door een voorbeeld; inderdaad, dieper kunnen ze ook niet gaan, noch voelen ze daartoe behoefte, het is een intuïtief groundbegrip.

Terloops worde de monotonie in het slot van 2 aangestipt, evenals het „nooit de waarde 2 bereiken” in zin 3, twee puntjes, die beter achterwege waren gebleven, omdat ze na zo’n korte inleiding allicht als inhaerent aan het limietbegrip bij de leerling zullen blijven hangen. De letterlijk naderende leerling heeft trouwens met schommelende varianten toch al grote moeite en nota bene met constante de allergrootste.

Overigens komen we in zin 3 nu in exact vaarwater, we „nemen” maar zo een waarde van n en behoeven blijkbaar niet te wachten, tot we daar aan toe zijn. Zin 4 is geheel statisch, toch is er nergens een abrupte overgang, de vier zinnen zijn duidelijk als doorlopend betoog bedoeld. Het woordje „nu” in zin 5 duidt aan, dat dit betoog

afgesloten is en het getal 2 als $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right)$ definieert. De omschrijving daarvan in woorden is echter wel heel duister; het wordt niet duidelijk, welke rol de met „als” beginnende voorwaardelijke bijzin speelt; vooral de herhaling van het onderwerp „we” stelt voor vragen. Luidde de omschrijving: „we noemen 2 de „limiet van

$2 - \frac{1}{n}$, als n onbepaald aangroeit””, dan was ze acceptabel, de gehele gecursiveerde uitdrukking tussen aanhalingstekens zou daarmee zijn gedefinieerd; daarmee zou van het hechten van een zin aan het onbepaald aangroeien van n zijn afgezien. Zoals het er staat zijn er nog verschillende interpretaties mogelijk. Het zinnetje herinnert

me sterk aan de boodschap, die zeker patroon aan zijn loopjongen placht mee te geven: „Het kost dertig cent, als ze er naar vragen”. Het jongetje kon meestal niet laten te informeren, wat het kostte, als ze er niet naar vroegen. Zo opgevat zouden we de bijzin dus als zinloze toevoeging kunnen beschouwen; bij weglaten komt er „we noemen 2 de limiet van $2 - \frac{1}{n}$ ”, en dat is precies, wat ook de algemene definitie aan het slot zegt. Intussen is de toevoeging stellig niet als zinloos bedoeld, maar dan blijft alleen de interpretatie over, volgens welke de omschrijving logisch van dezelfde structuur is als de uitspraak: „de man noemde zijn vrouw Petronella, als hij in een boze bui was”.

Dat dat nu ook weer onzin is, kan ik niet helpen; ik heb maar willen aantonen, dat de schrijvers betogen vanuit een limietinzicht, waarin de naderingsvoorstelling als een onverteerd brok aanwezig is. Heel merkwaardig komt dat uit in de zinnen 6 en 7, die als gelijkwaardig naast elkaar worden geplaatst. Men merke echter op, dat volgens 6 met $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$ wordt bedoeld, „dat het onbeperkt

toenemen van n ten gevolge heeft, dat g_n onbeperkt nadert tot g ” en dat we „dit”, deze *bedoeling* dus, „uitdrukken als volgt” in zin 7, die de exacte definitie bevat. Maar daarmee is toch eigenlijk de rol van essentiedrager, van *echte* definitie dus, van 7 naar 6 verhuisd. Immers, wat ik *bedoel*, is de *kern* van de zaak; mijn „uitdrukken” van mijn bedoeling betreft slechts mijn wijze van zeggen. Men kan concluderen, dat de schrijvers het *wezen* van het limietbegrip in zin 6 menen te hebben neergelegd; wat de exacte definitie dan voor hen betekent, is een psychologisch raadsel, waarvan de oplossing boven mijn krachten gaat. Het moet samenhangen met de bekende krachtmeting tussen „natuur” en „leer”; de laatste leeft sterk genoeg in hen om dit boek de meest succesvolle impuls te doen zijn, die ons mechanicaonderwijs ooit in exacte richting ontvangen heeft, echter niet sterk genoeg, om hen te verhinderen, in deze passage van het begin tot het eind op twee gedachten te hinken.

Natuurlijk zijn de woorden „bedoelen” en „uitdrukken” slechts toevallig zo geplaatst; in de „Nieuwe Schoolalgebra” van Wijdenes — Beth ¹⁾ kan men ze trouwens in hetzelfde verband verwisseld aantreffen. Juist het onopzettelijke in de woordkeus lijkt me echter de limietvoorstelling te onthullen, waarvan ik het bestaan als onbewuste ondergrond bij ons limietonderwijs wil aantonen.

De passage is stellig niet lichtvaardig neergeschreven, integendeel

¹⁾ Deel III, zesde druk (1938), p. 140.

geloof ik, dat ze heel wat hoofdbrekens gekost zal hebben, ze gaat ook nergens opvallend over de schreef. Maar dan zal nu ook begrijpelijk zijn, dat een leraar, die aan deze dingen nooit speciaal aandacht gegeven heeft en uit dezelfde vage voorstellingen denkt, wel in verlegenheid moet raken, wanneer hij ze in spontane beoordingen moet verduidelijken.

Ik heb geprobeerd de passage met zo weinig mogelijk veranderingen om te werken tot een vorm, waarin mijn bezwaren ondergaan zijn; het resultaat laat ik hier volgen. Daarmee is niet zozeer een voorstel tot wijziging in deze zin bedoeld, het dient enkel ter illustratie; ik geloof namelijk niet, dat de variant de meest geschikte inleiding tot de limietbehandeling is.

„We beschouwen de rij getallen

$$1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{2}{3}, 1\frac{3}{4}, \text{ enz.}$$

De bedoeling is, dat deze rij nergens afbreekt, dus geen laatste getal bevat; men zegt, dat de rij uit „oneindig veel” getallen bestaat, of dat ze een „oneindige getallenrij” is. We kunnen de getallen dus niet alle uitschrijven, wel kan men ze alle tegelijk voorstellen door de uitdrukking $1 + \frac{n-1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$, wanneer men afspreekt, dat n daarin een willekeurig natuurlijk getal voorstelt.

We merken op, dat al deze getallen vrij dicht bij het getal 2 liggen, het verschil met 2 is hoogstens 1 en van het vierde getal af zelfs hoogstens $\frac{1}{4}$. Wil men weten of er ook getallen in de rij staan, die minder dan 0,001 van 2 verschillen, dan blijkt gemakkelijk, dat dat geldt voor alle getallen, waarvoor $n \geq 1001$. Zelfs als we 0,001 door een willekeurig klein positief getal vervangen, blijkt het mogelijk een rangnummer aan te geven, waarboven de getallen van de rij minder van 2 verschillen dan dat getal. Immers, noemen we dat getal ε , dan geldt de ongelijkheid

$$2 - \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

voor elke $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Het is gemakkelijk in te zien, dat 2 het enige getal is, dat ten aanzien van deze rij deze eigenschap bezit.

We noemen nu 2 de limiet van de rij $1 + \frac{n-1}{n}$ en schrijven dat $\lim \left(1 + \frac{n-1}{n}\right) = 2$.

In ons voorbeeld waren alle getallen der rij kleiner dan 2, ze zouden echter ook wel groter dan of gelijk aan 2 hebben mogen zijn, het komt maar op het verschil (absoluut genomen) aan. Zo heeft ook de rij

$$3, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{3}, 1\frac{3}{4}, \dots,$$

algemeen voorgesteld door $2 - \frac{(-1)^n}{n}$ de limiet 2, omdat voor elk positief getal ε

$$\left| 2 - \left(2 - \frac{(-1)^n}{n} \right) \right| < \varepsilon$$

is voor $n > \frac{1}{\varepsilon}$.

Algemeen: stelt g_n een oneindige getallenrij voor, dan bedoelt men met de bewering $\lim g_n = g$, dat men bij elk positief getal ε een getal m kan vinden, zodanig dat $|g - g_n| < \varepsilon$ voor elke n , die groter is dan m .

Men drukt dat vaak als volgt uit: „de getallenrij g_n nadert tot het getal g ”, of „ g_n nadert tot g , als n naar oneindig nadert”. Dit zijn historisch overgeleverde spreekwijzen, waarvan de termen op zichzelf geen zin hebben. In aansluiting met de laatste schrijft men ook wel $\lim_{n=\infty} g_n = g$, mede om verwarring door het straks te bespreken limietbegrip bij functies te voorkomen.”

De „veranderende grootheid” uit het citaat werd boven een intuïtief groundbegrip genoemd. Dat zou inhouden, dat men er mee op zo diep mogelijke bodem stond, op die diepte namelijk, waarop naar verdere exacte omschrijving niet gevraagd mag worden. „Mag” is daarbij wat te veel gezegd; bij een werkelijk intuïtief duidelijk begrip komen dergelijke vragen in het geheel niet op, het zou trouwens niet zo uitdrukkelijk vooropgesteld worden. Hier zijn ze echter in menigte

te stellen: de uitdrukking $2 - \frac{1}{n}$ wordt door de substituties een veranderende grootheid, wat was ze dan daarvoor? Ze neemt achtereenvolgens waarden aan; hoe zit het met die waarden, zijn ze meteen weer „verdwenen”, nadat ze „niet meer aangenomen” zijn, of blijven ze liggen als een reeks van sporen? Kan men zich het gebeuren in de tijd voorstellen; kan men zeggen: nu zijn we met de grootheid hier, maar het duurt nog wel een kwartiertje, voor we ginds zijn?

De tegenwerping, dat deze vragen onzinnig zijn, kan alleen gemaakt worden vanuit de kennis van de voltooide ontwikkeling, voordien hadden ze zin en zou men er mee gezeten hebben. Het zou mogelijk zijn door het stellen van zulke vragen een willekeurig

meetkundeboek te verdiepen tot de „Grundlagen” van Hilbert en dat is nu precies de manier, waarop de wiskunde haar fundamenteen gevonden heeft, ze moet het juist van zulke vragen hebben. In één opzicht verschilt echter de ontwikkeling van het limietbegrip met die op andere gebieden, ze heeft de voor de hand liggende vragen niet beantwoord, die zijn er zinloos door geworden; de begrippen, welker verdieping ze beoogden, zijn eenvoudig geëcarteerd, alleen de termen zijn overgebleven.

Uit het citaat blijkt duidelijk, dat men zich deze afwijking niet realiseert. Men begint wel degelijk met te trachten de termen zin te geven en meent zo door voortdurende verdieping bij de exacte definitie uit te komen; de werkelijkheid is echter, dat men ergens een draai neemt, die die verdieping tot illusie maakt. Inderdaad figureert de veranderende grootheid slechts pro forma in de slot-definitie.

De schrijvers van de eerste twee door Gerretsen geciteerde (*slechte*) definities trachten de veranderlijkheid van hun grootheid essentieel te *houden*, ze zien dan ook van de exacte definitie af. Daarvoor in de plaats trachten ze een levendige voorstelling van de veranderlijkheid te wekken; verder dan een vage komen ze natuurlijk niet, meer bezitten ze zelf ook niet. Voor een n , die de rij der natuurlijke getallen doorloopt, zou het nog ongeveer gaan; ze is eerst een poosje (hoe lang?) gelijk 1 en springt dan verder van getal op getal als Eliza over de ijsschotsen. Maar een tot a naderende x moet men maar liever niet te uitdrukkelijk behandelen: sprongetjes maakt men niet op de volbezette getallenrechte; de blijkbaar steeds sterker wordende aarzeling, die x verhindert ook eindelijk eens in a te arriveren, doet al zeer onnatuurlijk aan; tenslotte is er $f(x)$, die naar b nadert en die toch eigenlijk onder hetzelfde hoedje gevangen behoort te zijn.

Maar stel, dat een levendige voorstelling te bereiken valt, dan komt de eigenlijke moeilijkheid nog pas voor hem, die nu nog zoiets produceren wil als de exacte definitie. Die moeilijkheid ligt in de synthese; weet men, wat „ x nadert tot a ” betekent en wat „ $f(x)$ nadert tot b ” wil zeggen, dan behoort de uitspraak: „als x tot a nadert, nadert $f(x)$ tot b ” geen verdere toelichting meer te eisen. En daar is natuurlijk geen sprake van, men zal er niet aan kunnen ontkomen, als sluitstuk een wiskundig analogon te moeten construeren van de verbinding, die in het grammaticale door het voegwoord „als” gelegd wordt. Maar in dat sluitstuk ligt dan eigenlijk de gezochte definitie, die dus in het geheel niet op de gewekte voorstelling berust en daardoor allerm minst verduidelijkt wordt.

Ik moet bekennen het bij mijn eerste limietonderwijs in mijn onschuld een eind in deze richting gezocht te hebben; ik herinner me een vage verwondering gevoeld te hebben, omdat niet alles scheen te kloppen; toch is dat blijkbaar niet duidelijk genoeg geweest, om me toen al tot nader onderzoek te brengen. Ik doe deze bekentenis zonder al te veel schaamte; men bedenke, dat ik nog maar klein was; ook was mij wel iets over limieten geleerd, maar niets over de kunst, dezelve te onderwijzen. Gelukkig had ik een grote broer, die deze kunst blijkbaar wel verstond, althans, in een gesprek, dat naar deze dingen afdwaalde, wist hij mij in luttele minuten van mijn dwaasheid te overtuigen. „Je moet”, besloot hij toen, „de uitdrukking „als x tot a nadert, nadert $f(x)$ tot b ” zien als een onverbreekbaar geheel, dat als zodanig door de limietdefinitie gedefinieerd wordt”. Dat heb ik dan ook sinds gedaan, het is de centrale gedachte van dit artikel; eigenlijk is die opmerking dan ook wel het zaadje geweest, waaruit het als late vrucht gesproten is.

Ten einde toe is de boven geschetste weg bewandeld in het artikel van Stoelinga en van Tol, dat in het begin genoemd werd. Het resultaat, dat ze ter vervanging van de door Gerretsen voorgestelde behandeling aanbieden, laat ik hier volgen. Ze schrijven (zestiende jaargang p. 262):

„We geven drie definities, waarvan de derde de limiet-definitie is.

Definitie 1. x „groeit onbepaald aan” of „wordt oneindig groot”, wanneer x achtereenvolgens waarden aanneemt, die groter zijn dan een willekeurig getal N .

Definitie 2. De functie $f(x)$ „nadert onbepaald dicht tot” het getal L , wanneer $|L - f(x)| < \varepsilon$ voor een willekeurig gekozen positief getal ε .

Definitie 3. De limiet van $f(x)$ is het getal, waartoe $f(x)$ onbepaald dicht nadert.

Nu volgen twee verklaringen:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ betekent:

x kan zodanig onbepaald aangroeien (d.w.z. men kan N in def. 1 zodanig kiezen), dat $f(x)$ onbepaald dicht tot L nadert.

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ betekent:

x kan zodanig onbepaald dicht tot a naderen, zonder er nochtans aan gelijk te worden, dat $f(x)$ onbepaald dicht tot L nadert.

We willen hiermee natuurlijk niet beweren, dat bovenstaande behandeling nu volkomen streng en niet meer te verbeteren is.”

Merkwaardig, ik moet dit stuk tien jaar geleden toch ook gelezen hebben; ik kan me niet herinneren, dat er mij iets speciaal in opviel.

De laatste maanden heb ik het echter zeker twintig keer gespeld en ik begrijp er nu geen woord meer van.

Veel commentaar zal ik er niet meer op geven; de inleiding ertoe kan als zodanig dienen. Ik wijs even op de „afbuigende” werking van de exacte definitie, het gebruik van de symbolen N en ε ver-raadt die. Te redden viel er overigens niets; aan de voorwaarden van def. 1 is voldaan, als men x achtereenvolgens telkens $N + 1$ stelt; def. 2 eist $f(x) = L$.

De „verklaringen” vormen het bovengenoemde sluitstuk, dat overbodig zou moeten zijn. Misschien zou men in hun licht enige zin aan def. 2 kunnen toekennen, dan echter ware het beter geweest die er in op te nemen. Ten koste van de splitsing natuurlijk en mogelijk tot schade van verklaring 2, waarin $x \rightarrow a$ blijkbaar weer door def. 2 bepaald gedacht wordt. Ik zoek het verder maar niet uit; tot zelfs in de strekking van hun slotopmerking kan ik maar gedeeltelijk met de schrijvers meegaan: voor verbetering vatbaar lijkt me hun definitie niet.

Dit citaat is niet maar een uit een oude jaargang van Euclides opgediepte curiositeit, in feite is deze gedachtengang in het Leerboek der Algebra van de schrijvers (deel III, hoofdstuk 1) gevolgd en maakt hij tot op de huidige dag ons onderwijs onveilig. De behandeling is daar overigens wel wat tammer; vermoedelijk bedoelden de schrijvers ze als „minder streng” dan de geciteerde. Dit valt althans op te maken uit de amusante mededeling in het voorwoord van de derde druk, dat hun pogingen om dit hoofdstuk in de vierde of vijfde klasse „strenger te behandelen” als mislukt moeten worden beschouwd; de gemiddelde leerling blijft het dan niet goed begrijpen. Nu, dat was te verwachten en dat is precies, wat ik in deze artikelen heb willen betogen; ik maak gaarne van de gelegenheid gebruik, om me ter staving van mijn beweringen op de ervaring van de auteurs te beroepen.

Intussen is het niet zonder betekenis, dat de schrijvers hun strengheid de vrije teugel laten, zodra ze zich met de collega's als mathematici onder elkaar voelen. Elke discussie, elke meningsuiting zelfs, veronderstelt toch een fond van gemeenschappelijke overtuigingen, waar vanuit geredeneerd wordt, maar die zelf niet worden genoemd. Hoe minder dit fond bewust is, des te duidelijker onthult het blootleggen er van de geestesgesteldheid van de spreker en zelfs ook enigszins die van zijn milieu, omdat grondvoorstellingen, die scherp als onaanvaardbaar werden onderkend, reacties zouden teweegbrengen, die daarop ingingen en ze als onhoudbaar zouden doen zien.

Om de onthulling van dit fond is het hier te doen. Het wordt al dadelijk scherp belicht door het feit, dat de schrijvers een stukje particuliere surrogaat-wiskunde als het geciteerde zonder verdere toelichting publiceren. Er staat echter tussen de regels wel meer te lezen.

Het „lijkt hun minder gelukkig”, dat Gerretsen in zeker geval spreekt van de limiet van een getallenrij, zij zouden in dat geval liever spreken van de „limiet van een variant”. Er wordt geen reden vermeld, die is echter niet moeilijk te raden. Het is, omdat een variant *varieert*; de variant is het symbool a_n , het doorloopt de rij $a_1, a_2, a_3, \dots$ of brengt die mogelijk zelfs voort.

Wanneer ze de vele manieren releveren, waarop n oneindig groot kan worden, vinden ze dat „een prachtgelegenheid om het begrip „ x wordt oneindig groot” te definiëren”. Blijkbaar heeft Gerretsen deze gelegenheid dan verzuimd; als hij werkelijk een *begrip* „ x wordt oneindig groot” kent, zal hij dat wel zeer betreurd hebben.

Voor mij interessant is de opmerking (naar aanleiding van de critiek op het vage begrip „veranderlijke grootheid”): „Wij althans hebben nooit de noodzakelijkheid, zelfs niet de wenselijkheid gevoeld om de term „grootheid” voor de leerlingen nader te definiëren”. Ik geloof dat onmiddellijk letterlijk, zoiets is stellig nooit bij hen opgekomen. Maar als ze dit nu zo zeggen, nadat Gerretsens critiek hen tot bezinning heeft gemaand, moet dit toch wel weer een beroep op een veronderstelde communis opinio inhouden. Die kan zijn, dat er wel definities bestaan, maar dat die algemeen voor te moeilijk gehouden worden. Of wel, dat de grootheid een dier grondbegrippen is, waarvan het maar beter is er verder af te blijven. Uit het verband besluit ik tot het laatste; mocht ik daarin gelijk hebben, dan wil dat zeggen, dat de schrijvers zich hier de enige weg afgesneden hebben, waarlangs ze hun leerlingen werkelijk grondig met het functiebegrip vertrouwd hadden kunnen maken.

Ik kan het hierbij wel laten, men zal het probleem wel zien, dat mij bezighoudt. Aan het begin van hun academische studie hebben de schrijvers kennis gemaakt met het exacte functie- en limietbegrip, sindsdien hebben ze die begrippen dagelijks in honderdvoudig verband gehanteerd. Men kan aannemen, dat ze dat feilloos doen, *zodra ze wetenschappelijk bezig zijn*. Toch hebben ze die begrippen niet *beleefd*, ze hebben niets nagevoeld van de psychologische noodzakelijkheid, die mannen als Cauchy, Dedekind en Weierstrasz gedreven heeft, de onontkomelijkheid van hun resultaten niet gezien, noch ook de triomf, die daarin lag.

Bezinning op dit alles kwam pas, toen ze gingen onderwijzen en boeken gingen schrijven en zie, toen is als dun vernis die hele „vorming” van hen afgevallen; als in volslagen atavisme schiepen zij zich hun eigen functiebeeld uit eeuwenoude termen, die in de tijd, waarin ze leefden, nooit voorwerp van reflectie waren. En dat zo argeloos, zo onbewust van dit proces, dat ze nog steeds geloven, het wetenschappelijke begrip te hanteren en daarin door anderen verstaan te worden.

En tot op zekere hoogte hebben ze in het laatste nog gelijk! Dit was het laatste citaat over deze materie, het was het eerste niet. De extreme opvattingen van Stoelinga en van Tol zullen door weinigen worden gedeeld, toch staat hun definitie niet geïsoleerd, ze is een verdichtingspunt, waartoe de „rij” der voorbeelden op bedenkelijke wijze „nadert”. In feite had dit gewas niet kunnen tieren, als het *niet een gunstige voedingsbodem gevonden had in algemeen verbreide opvattingen*; daarvan is het de exponent.

Met deze conclusie moge de misschien overmatig schijnende aandacht zijn gerechtvaardigd, die aan dit punt geschonken is. Ik had ze nodig om nu eindelijk de stelling als bewezen te durven poneren, die ik al meerdere malen uitsprak: *er is in ons onderwijs een divergentie tussen exact en intuïtief limietbegrip en deze divergentie wordt niet beseft*. Men tracht vanuit het intuïtieve begrip tot het exacte te komen; welnu, dat zal nooit bevredigend gelukken: *het laatste kan niet worden bereikt, dan na volledige afbraak van het eerste*.

Met deze stelling is datgene in discussie gebracht, wat tot nu toe tot de verzwegen vooronderstellingen in opvattingen en beschouwingen omtrent limietonderwijs behoorde. Ze houdt in, dat alle daarin wortelende meningen behoren te worden herzien, inzonderheid zijn alle moeilijkheidsovertuigingen daaronder vooreerst discutabel. Kortom, ze stelt de didactiek voor de taak, de weg tot het limietbegrip, *vanaf het begin van de algebra*, opnieuw te doordenken.

In het begin van het eerste deel werd de mening uitgesproken, dat die taak voor een deel wel zal samenvallen met het zoeken naar een verbeterde invoering van het functiebegrip; limiet en functie zijn beide ten eerste gebaat bij een helder grootheidsbesef. Het laatste komt eigenlijk neer op het vermogen getalverzamelingen te overzien; het zou kunnen worden bevorderd door een minder strenge indeling naar onderwerpen; speciaal voor de limieten zou een vroegtijdige vertrouwdheid met ongelijkheden gewenst zijn.

Hier te trachten meer gedetailleerde voorstellen te doen, heeft weinig zin; men kan hoogstens hopen op een ontwikkeling, die daar-

toe op de duur duidelijker mogelijkheden schept. Van meer belang is het, het limietbegrip nu nog eens nader te onderzoeken, om die ontwikkeling een duidelijker doel te geven.

Allereerst lijkt me dan een nader onderzoek noodzakelijk naar de opvallend dominerende plaats, die in ons onderwijs wordt ingenomen door de *variant*. Vrijwel elke limietbehandeling begint er mee; het is niet te gewaagd te veronderstellen, dat de variantlimiet het best toegankelijk geacht wordt en de geschiktste voorbereiding op de overige. Niet sporadisch worden andere limieten er ook toe herleid, dat is zelfs regel voor de buiten-algebraïsche toepassingen. Dat daarbij een groot logisch tekort op de koop toe moet worden genomen is bekend, er is dus reden te onderzoeken, in hoeverre we de variant behoeven.

Ten aanzien van de limieten van functies werd in het eerste stuk al duidelijk afwijzend stelling genomen tegen dat herleiden tot de variant, daartoe is inderdaad geen enkele reden. Hieronder vallen al vele limieten, die van enig belang zijn, onder andere het differentiaalquotiënt. Na de behandeling van $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ voor het geval, dat

$f(x)$ bij substitutie $x = a$ de vorm $\frac{0}{0}$ aanneemt, geeft $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ geen nieuwe moeilijkheden (behalve misschien in verband met de notatie) en heeft het geen zin, eerst een rij differentiequotiënten met „naar nul naderende” Δx te construeren. Van de in het vorige stuk behandelde voorbeelden is dat van de raaklijn van deze soort.

Wat de andere voorbeelden betreft, vrees ik daar de variant wel wat te argeloos in haar fundamentele positie geaccepteerd te hebben. Bij de benadering van de cirkel bleek overigens het beschouwen van de verzamelingen van *alle* in- en omgeschreven veelhoeken nog wel zo natuurlijk en iets overeenkomstigs geldt ook voor de andere voorbeelden. In de grond van de zaak betreft het bij alle *integralen*; voor een nader onderzoek kunnen we dus het beste de bepaalde integraal beschouwen.

Het blijkt daarbij, dat de integraal als „limiet” niet bij het functie- of varianttype onder te brengen is. Bij een som als $\sum f(\xi) \Delta x$ is geen onafhankelijk variabele aan te wijzen; de som hangt af van de gekozen verdeling van het integratieinterval en van de keuze van ξ in elk deelinterval. Wel komen de schrijfwijzen $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum f(\xi) \Delta x$ of

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(\xi) \Delta x$ voor; ze zijn echter òf bedrieglijk, òf ze betreffen een behandeling, die op zekere afspraken omtrent die beide punten berust en dus om streng te zijn nog het bewijs behoeft, dat het

resultaat niet van die afspraken afhankelijk is. Zo'n bewijs zou strikt genomen niet tot de definitie van de integraal gerekend behoeven te worden, het is echter duidelijk, dat men er zonder het begrip nauwelijks welgefundeerd kan achten. We kunnen dus wel stellen, dat bij de definitie van de bepaalde integraal essentieel alle mogelijke sommen $\sum f(\xi)\Delta x$ betrokken zijn. Maar daarmee is tevens gesteld, dat ze, wegens het ontbreken van een onafhankelijk variabele, geen „limiet” is in de zin, waarin we het woord voor functies gebruiken. Wel is er natuurlijk een sterke verwantschap: bij beide wordt een getalverzameling beschouwd en geëist, dat zekere elementen in het ε -interval liggen; bij beide betreft die eis de „voortbrenging” van de verzameling. Bij de functie moet ze vervuld zijn voor de waarden, waarvoor de onafhankelijk variabele in het δ -interval ligt; bij de integraal voor alle sommen, die behoren bij een verdeling van het integratieinterval, waarbij alle deelintervallen kleiner dan δ zijn.

Vergelijken we nu de drie limiettypen met elkaar, dan blijkt er in alle drie gevallen een getalverzameling te worden beschouwd; de getallen van de variant zijn geïsoleerd, in de beide andere gevallen liggen ze (tenminste in de school) in een voldoende klein, de limiet bevattend, interval overal dicht.

Stelt men zich nu de in het ε -interval gelegen limiet op de getallenrechte voor, „dicht” omringd door de „benaderende” getallen, dan komt de herleiding tot de variant neer op het daaruit kiezen van een afgetelde rij. Het is alvast een vraag, of dat in enig opzicht verhelderend werkt; volgt men echter deze weg, dan moet het slot weer het samenvoegen van alle mogelijke varianten zijn tot het dichtge vulde interval; het is juist het oorspronkelijke beeld, dat we moeten hebben. Deze laatste stap wordt meestal niet gedaan, dat is het defect, dat de behandeling in strengheidsofzicht vertoont.

Het direct dicht vullen van het interval is dus niet alleen het strengst, maar tevens het meest natuurlijke en, naar het mij voorkomt, in wezen ook het eenvoudigst. Wie de moeite wil nemen de strenge, maar zeer overzichtelijke behandeling van de bepaalde integraal in het boekje van Prof. de Bruijn ¹⁾ eens na te lezen, kan zich daarvan gemakkelijk overtuigen.

Natuurlijk moet die behandeling voor de school worden vereenvoudigd, er is echter gemakkelijk aan te zien, hoe dat zou kunnen gebeuren. Er wordt bij elke verdeling een „benedensom” en een

¹⁾ Dr. N. G. de Bruijn, *Beknopt Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening*. Amsterdam, 1949. Hoofdstuk V § 1.

„bovensom” geconstrueerd door in het deelinterval de kleinste resp. grootste waarde van de functie te nemen; elke andere bij de verdeling behorende som ligt daartussen. Het komt er nu maar op aan in te zien, dat de bovenste grens van de verzameling der benedensommen samenvalt met de onderste grens van de verzameling der bovensommen; dat kan aan de aanschouwing worden overgelaten.

In wezen gebeurt dat natuurlijk net zo in onze schoolboeken; het is evenwel le ton qui fait la musique: hier wordt geen variant gebruikt, van „naderen” wordt niet gesproken, zelfs komt het woord limiet er niet bij voor. Het is niet opzettelijk vermeden, het komt er eenvoudig niet bij te pas. Daaruit blijkt, dat de voorstelling van een door de getalverzameling dicht gevuld interval op de getallenrechte *direct* tot het integraalbegrip voert, ze levert natuurlijk nog gemakkelijker het eenvoudiger begrip van de functielimiet.

Als dus het integraalbegrip nog niet eens op het limietbegrip berust, moet de weg over de variant toch wel een complicerende omweg zijn. De gebruikelijke herleiding is traditioneel overgeleverd; daaraan zal het feit wel niet vreemd zijn, dat men bij de variant het „naderen” het duidelijkste ziet. Inderdaad is het letterlijke naderen alleen bij de variant een zich opdringende voorstelling; bij de andere typen is het steeds gekunsteld en zou het zelfs tot grote denkmoeilijkheden aanleiding geven (en vermoedelijk *doet* het dat bij de leerling!) als men zich niet met een vage voorstelling vergenoegde. Dit traditionele „voordeel” van de variant blijkt zo op zichzelf nog een nadeel te meer, er is dus alle reden voor een serieuze poging het bij de behandeling en het gebruik van limieten van het integraal- en functietype zonder de variant te stellen.

Wanneer de school dit standpunt zou willen innemen, zou daarmee dus gepaard gaan een terugdringen van de variant tot die gevallen, waarin ze onvermijdelijk is. Zo zie ik er echter maar één, dat van de convergente reeksen. Zelfs bij de benadering van irrationaliteiten dankt de variant de noodzaak van haar optreden alleen aan de toevallige omstandigheid, dat men zich daarbij van decimale breuken bedient, want ook het irrationale getal zit knusjes „dicht” omringd door rationale.

De vraag naar de waarde van de variant als inleiding op het limiethoofdstuk is in het bovenstaande ook vrijwel beantwoord: wanneer ze in de voorafgaande toepassingen, die daartoe toch ook voorbereiden, in het geheel niet gebruikt wordt, heeft ze die waarde grotendeels verloren. Los daarvan komt de vraag neer op de nader gepreciseerde, wat zich het best op de getallenrechte laat voor-

stellen: een verzameling, die een interval „dicht” vult, of ene, die uit geïsoleerde getallen bestaat.

Eigenlijk geeft deze vraag ook nog een scheef beeld van de situatie, want bij het werken met ongelijkheden stelt men zich nauwelijks een getalverzameling voor. In verband daarmee werd in het eerste deel betoogd, dat streng werken met variantlimieten niet impliceert, dat men de rij duidelijk voor ogen moet hebben, men mag met de algemene term werken als met een „zeker” getal. Eerst de bezinning op het wezen van de limiet zou dan het zien van de gehele rij vragen; dat vergt echter een zo geheel andere instelling, dat de algemene theoretische behandeling allerminst *begripsverhelderend* kan worden genoemd, hoe funderend ze ook moge zijn.

Er komt zo dus een kloof tussen theoretische behandeling en praktische toepassing en die lijkt me een der hoofdoorzaken van de moeilijkheid van het limietbegrip. Voor het grootste deel komt ze echter voor rekening van de variant, die het hoofdstuk inleidt. Immers juist bij de variant geeft men zich grote moeite de gehele rij te laten zien, men schrijft ze zelfs een eindweegs uit. Maar bij de andere typen werkt men evenzeer met het „algemene” element van de betrokken getalverzameling en laat het daar kalmweg bij! Een blik op het ε -interval leert bovendien, dat er, zelfs ook bij de variant, geen enkele noodzaak bestaat, de elementen van die verzameling *in een of andere volgorde te zetten*.

Natuurlijk moet de leerling in dat algemene element de verzameling leren zien, maar dat is een vermogen, dat bij een goed opgebouwd functieonderricht geleidelijk in voldoende mate zou worden verkregen. Zoals de zaak nu is, wordt bij de inleiding tot het limietbegrip via de variant getracht dit vermogen *plotseling geforceerd* aan te brengen en wel *in hogere mate*, dan voor de beoogde behandeling noodzakelijk is.

De meest geschikte inleiding lijkt mij het geval $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, waarbij men begint met op te merken, dat men, ook al mocht $f(x)$ voor $x = a$ niet zijn gedefinieerd, toch voor x een waarde *dicht bij* a kan substitueren; alle op die wijze verkregen getallen blijken dicht bij het getal b te liggen. Precisering kan dan volgen, zonder dat van een geforceerd doen voorstellen der ontstane getalverzameling sprake behoeft te zijn.

Tot nog toe is de inhoud dezer artikelen te beschouwen als een poging om de grondslagen, die de wiskunde voor functie- en limietbegrip geleverd heeft, serieus te nemen, dat wil zeggen ze in het onderwijs te verwerken. Dat laatste moet er bij, want over het algemeen neemt de didactiek zulke grondslagen serieus genoeg, hun

juiste betekenis is mij daarbij echter niet steeds duidelijk. Dat betreft ook de limiet, daarom wil ik de rest van dit artikel aan daarmee samenhangende vragen wijden.

Het probleem is analoog aan de quaesties, die de laatste jaren ten aanzien van het beginonderwijs in de meetkunde in discussie zijn. De klassieke leergang is geïnspireerd op het door Euclides nagelaten model. Dat hij zich heeft gehandhaafd is in 't geheel geen wonder; het uitgangspunt wordt gevormd door vanzelfsprekende waarheden, de betoogtrant leidt op duidelijke en overtuigende wijze tot de rest. Toch is er critiek op de methode, speciaal voor het aanvangsonderwijs; voorzover de argumenten der tegenstanders hier van belang zijn, komen ze er op neer, dat de leerling enigszins met de meetkundige objecten vertrouwd moet zijn en zich ook de betoogwijze min of meer eigen moet hebben gemaakt, voordat hij iets van de zin zijner bezigheden begrijpt. Heeft hij eerst gezien, hoe uit voor de hand liggende waarheden minder doorzichtige door redenering kunnen worden bewezen, dan zal hij ook open beginnen te staan voor de verdieping van het uitgangspunt en de daarmee gepaard gaande verfijning van het logische apparaat, die geëist worden door de in de meetkunde geldende normen.

Zo gezien heeft het misschien zin in de wiskunde en haar werkwijze een *essentiël* en een *formeel* aspect te onderscheiden. Het eerste komt dan daarin uit, dat de (op verzwegen analyse berustende) opbouw, het uitgaan van „grondslagen” en het logisch ontwikkelen der gevolgtrekkingen, tot op zekere hoogte een ideaal duidelijke wijze is om kennis mede te delen. Het formele element ligt in het feit, dat zowel grondslagen als redenering moeten voldoen aan de eisen, die door de genoemde normen worden gesteld en die niet, althans niet direct, op helderheid of overtuigingskracht gericht zijn; integendeel zijn zij het grotendeels, die de wiskunde moeilijk maken. Voor de didactiek lijkt me zo'n onderscheiding van belang, omdat men zich bij het meedelen van wiskundige kennis van het essentiële in de methode moet bedienen; tot het gevoel voor de formele eisen kan het onderwijs echter slechts opvoeden; mijns inziens behoeft men daarbij niet verder te gaan, dan men nuttig of verantwoord acht.

Deze onderscheiding brengt zo een onderscheiding in doelstelling mede en het is ook duidelijk te zien, dat de pogingen, het meetkundeonderwijs te verbeteren, meteen pogingen zijn het doel van dat onderwijs preciezer te omschrijven. Wanneer dat doel enkel zou zijn meetkundige kennis bij te brengen, is de logische methode de aangewezen, men hoeft zich dan echter niet om formele finesses te bekommeren. Voor een groot deel wordt het verkrijgen van vaardigheid in de beoefening van de meetkunde beoogd, ook daarbij is het essentiële element hoofdzaak; daarenboven is het van belang, zich in dit opzicht bij het onderwijs te oriënteren op de wijze, waarop de wiskundige tot zijn resultaten komt, liever dan dat resultaat zelf tot model te nemen. Voor zover tenslotte het aankweken van de typisch wiskundige denkwijze wordt beoogd, moet worden bedacht, dat het wiskundige betoog naar zijn vorm toch eigenlijk ook *resultaat* van wiskundige werkzaamheid is. In het bijzonder geldt dat van de grondslagen, die immers eenmaal *ontdekt* zijn en zo eindresultaat zijn van *naar de diepte gericht* wiskundig onderzoek, dat juist vanuit het (dus *bekende*) te funderen gebied begonnen werd. De didactische consequenties uit dit alles (waarvan ik speciaal het terugwerken naar de grondslagen wil noemen) worden sinds jaren tegen het klassieke standpunt verdedigd.

Mijns inziens is deze gang van zaken grotendeels veroorzaakt door het moderne grondslagenonderzoek van Hilbert en anderen. Het heeft de absolute positie van de Euclidische grondslagen sterk gerelativeerd door de ontdekking daarvan als het ware weer te laten beleven; hun eigenlijke karakter werd daardoor beter doorzien.

De verdedigers van het klassieke standpunt kregen het zwaar, omdat ze hun stelling „grondslag = uitgangspunt” ten aanzien van de nieuwe grondslagen wel niet konden handhaven en dus het „natuurlijke” in de Euclidische extra moesten accentueren. Een uitstekend argument, dat echter niet afdoende bleek, omdat juist in dat opzicht de waarderingen verschilden.

Natuurlijk is er ook een directe invloed van het stelsel van Hilbert in formele richting. In dit verband is het van belang op te merken, dat de onderscheiding tussen essentieel en formeel aspect, die uiteraard toch al niet scherp te maken is, nog wordt bemoeilijkt door het feit, dat de scheidingslijn zowel in de historische als in de individuele ontwikkeling steeds meer naar de formele kant verschuift. Naarmate men zich in de denkwijze inleeft, worden haar normen reëler; wat voor debeginneling gezocht lijkt, is voor de gevorderde misschien echte geestelijke behoefte aan houvast. Dat maakt het de leraar moeilijker zich zijn leerling in te denken; het is dan ook geen wonder, dat onze leerboeken hier en daar Hilbert-sporen vertonen, al is het alleen maar in de mededeling, dat dit of dat begrip niet nader zal worden gedefinieerd. Voor zover echter de Hilbert-axiomatiek als schoolstof ter sprake is geweest, werd ze uitdrukkelijk als specimen van grondslagenonderzoek-achteraf in de hogere klassen geprojecteerd en dat is een belangrijk feit.

In de algebra liggen namelijk de zaken zo duidelijk niet. Het valt op, dat in dezelfde jaren, waarin de „psychologische richting” in de meetkunde zoveel veld won, de algebra zich juist sterk in formele richting ontwikkelde. In het bijzonder vraagt daarbij de uitbreiding van het getalbegrip de aandacht. De wetenschappelijke fundering van bijvoorbeeld irrationaal en complex getal vormt een apart grondslagenhoofdstukje, waarvan de betekenis vrijwel geheel in het formele ligt. De hanteerders dezer getalsoorten kijken er alleen naar om, wanneer ze speciaal geïnteresseerd zijn in de vraag, hoe het met die fundering nu precies zit. Desondanks is het *essentiële*, de *idee* van die fundering in hun werken met die getallen aanwezig, in diepere zin *berust* het er wel degelijk op. Dat ook het onderwijs in wezen daarop berusten kan, zonder dat er ook maar een woord over de strenge fundering zelf valt, is enige jaren geleden door Prof. Freudenthal overtuigend aangetoond ¹⁾. Daaruit volgt, dat het ten tonele voeren van fundamentealrijen en getallenparen (die inderdaad in de leerboeken verschenen zijn) niet meer behoeft te beogen dan te laten zien, hoe hier aan de formele eisen der wiskunde voldaan kan worden en zo in te leiden tot de wetenschappelijk-wiskundige opvattingen in engere zin.

Hier zit nu de onduidelijkheid, waarvan boven sprake was. Het lijkt er namelijk op, dat de betekenis dezer hoofdstukjes minder beperkt gezien wordt, dat ze van wezenlijk belang geacht worden als grondslag voor het werken met zulke getallen. Dat valt bijvoorbeeld op te maken uit de vaak gehoorde opmerking, dat het irrationale getal een „zwak punt” in ons onderwijs zou zijn en uit het feit, dat het werken met complexe getallen na de strenge behandeling is geplaatst, waarmee het ook zo ongeveer van het H.B.S.-program is afgevoerd. De onderscheiding essentieel-formeel wordt hier dan niet gemaakt, of liever, het wiskundig noodzakelijke wordt als essentieel gevoeld. Dat klopt met de gemaakte opmerking omtrent het verschuiven van de scheidingslijn naar de formele kant; de gevormde mathematicus moet zichzelf wel vaag vinden, wanneer hij minder tracht te geven, toch moet hij voor zijn leerlingen de scheidingslijn anders trekken, wil zijn onderwijs niet ook in psychologische zin een formeel karakter krijgen, dus tot schijnvertoning worden.

Dit alles is meteen over te dragen op de strenge behandeling van het limietbegrip.

¹⁾ Eucl. 24, p. 106 e.v.

De stof, die in het limiet hoofdstukje wordt geboden, is sterk formeel van aard, evenwel is ze in het program opgenomen met het oog op de infinitesimaalrekening. Dat ze als grondslag daarvoor als essentieel gezien wordt, blijkt uit het feit, dat de bezwaren tegen de differentiaal- en integraalrekening toch eigenlijk alleen de moeilijkheid van het limietbegrip betreffen, soms gaat men daarbij zelfs wel tot de onbevredigende behandeling van het irrationale getal terug!

Het is begrijpelijk, dat deze bezwaren van mathematische kant gemaakt en als reëel gevoeld worden, toch houden ze geen steek; men zou op zulke gronden de gehele wiskunde van het program kunnen schrappen. Het onderwijs heeft het nergens met de formeel-fijne puntjes al te nauw te nemen, als het maar zorgt, dat de behandeling *in wezen juist* is, dus met de strenge opvattingen klopt. Dat hiëraan, breder gezien, in ons limietonderwijs nog al wat bleek te mankeren, doet aan de klemmendheid der bezwaren bovendien nog af.

Natuurlijk kan men aanvoeren, dat het *wezen* van de exacte behandeling nooit beter tot zijn recht kan komen dan in die strenge behandeling zelf, maar daarvoor is meer nodig dan een paar lessen. Wanneer de differentiërende leerling onderwijf al aan limieten denkt (en wie zou dat als regel doen?), staat hem daarbij toch niet meer dan een globaal beeld voor ogen. Het onderwijs heeft eerst te zorgen, dat dat een *juist* beeld is en kan daar desnoods mee volstaan. De mogelijkheid daartoe is in de voorbeelden van het eerste deel aangetoond, voor de infinitesimaalrekening ligt de zaak principiëel niet anders.

Mijns inziens zou men dus de beoordeling van de mogelijkheden voor de infinitesimaalrekening op de middelbare school los moeten zien van de strenge limietbehandeling en zeker de betekenis van de laatste voor de grondlegging van de eerste niet moeten verabsoluteren. Natuurlijk is er niets op tegen de strenge limietbehandeling als uitgangspunt te nemen, men heeft echter meer armslag, als men inziet, dat het er ook zonder kan. Bovendien zijn dan waarde en doel van het limiet hoofdstukje zuiverder te bepalen, men is dan vrij het alleen te zien als oefenstof in de wiskundige denkwijze in engere zin. Met het oog daarop leek het me nuttig, de tot nog toe wel wat erg schematische onderscheiding van essentieel en formeel aspect voor het strenge limietbegrip nog wat nader uit te werken.

De genoemde onderscheiding betreft speciaal het streven naar *strengheid*, dat de wiskunde kenmerkt; aan de strengheid stelt ze normen. De strengheidseis wordt gesteld aan de *begripsomschrijving* en aan de *bewijsvoering*, de laatste eis impliceert de eerste. Het doel is allereerst *helderheid*, het begrip moet *scherp* begrensd, het bewijs moet *overtuigend* zijn. De wiskunde echter gaat verder en daar ligt het formele element in de strengheid: elk begrip moet worden ingepast in het schema der rekenkunde, dat op zo weinig mogelijk grondbegrippen moet berusten; elk bewijs moet in geijkte, elk voor zich uit een minimum van onbewezen grondstellingen afgeleide stappen zijn uiteengelegd.

De strenge limietdefinitie zou dus in eerste instantie nodig zijn, als men daarzonder bij het *werken* met het begrip, dus bij de *toepassing*, niet een voldoende heldere voorstelling er van zou kunnen wekken. Overigens wordt de strengheid, die voor de definitie nodig is, bepaald door de strengheid, die men bij de redenering in acht wil nemen. Nu wordt bij de toepassingen in ons onderwijs nergens streng geredeneerd, daarbij blijkt een globaal (mits correct!) limietinzicht voldoende om het wezenlijke in het begrip op juiste en duidelijke wijze tot zijn recht te laten komen. Bij de infinitesimaalrekening gaat de limiet bovendien direct op in hogere begrippen, die zelf weer tot snelle routinevorming in hun gebruik leiden.

Een beroep op het limiethoofdstukje is dus nergens nodig en zou ook niet veel zin hebben, het kan immers niet veel meer dan een *begin* van grondslagonderzoek zijn. Het bijbrengen van de definitie alleen vergt reeds zoveel, dat het hoofdstuk daarbij praktisch moet blijven staan. Bij een volledige grondlegging zou het accent vallen op de streng bewezen *resultaten*, het streng willen bewijzen zou streng definiëren nodig maken. Hier echter is het definiëren hoofdzaak; het bewijzen dient slechts ter illustratie en oefening. In hoofdzaak betreft het immers het controleren van de voorwaarden der definitie in bijzondere, eenvoudige gevallen; dat moeten zelfs zeer speciale zijn, als men de bijbehorende ongelijkheidentechniek niet grondig wil doen oefenen. De behandeling der meer ingewikkelde gevallen berust dan verder inderdaad op de elementaire limietstellingen; dat dat echter een zeer formeel „berusten” is, blijkt daaruit, dat de leerling aangenaam verrast is ineens voor zulke gemakkelijke vraagstukken te worden geplaatst. Hij realiseert zich de grondige analyse van het begrip dan al niet meer, maar werkt uit zijn intuïtieve limietvoorstelling.

De zoeven genoemde stellingen worden als regel niet alle, soms geen van alle bewezen. Als fundering zijn ze alleen uit zuiver mathematisch oogpunt van belang, ze liggen geheel aan de formele kant van de scheidingslijn. Dat bijvoorbeeld $\lim (f(x) + g(x)) = \lim f(x) + \lim g(x)$ is in het gebruik zo vanzelfsprekend, dat zelfs het formuleren van de stelling al een toegeven aan een drang in de formele richting is. Natuurlijk is dat formuleren nuttig, omdat het weer bezinning op het limietbegrip eist; deze levert overigens meteen de overtuiging van de juistheid. Weliswaar is er dan niets „bewezen”, toch is er even een verificatieproces geweest, waarin wel degelijk dezelfde rekenkundige inzichten een rol hebben gespeeld, die in het bewijs stuk voor stuk worden opgesomd, zonder dat het daarom dieper gaat.

Niet vergeten mag worden, dat in het streng redeneren ook tal van conventionele elementen steken. In het bewijs van de bedoelde stelling bijvoorbeeld moet de limietdefinitie driemaal worden toegepast, de er in genoemde δ en ε moeten dus tweemaal door andere symbolen worden vervangen. Een trucje als het werken met halve epsilon-netjes doet zien, dat men daarbij volgens model werkt. Bovendien blijkt er uit, dat men bij het begin van het bewijs al rekening houdt met het slot; men begint dus met het gehele bewijs te overzien en werkt zo naar de strenge vorm toe. Zoiets vraagt echter oefening, die ik natuurlijk niet als onnut beschouw, maar van welker resultaat men toch wel niet het al of niet toepassen van het limietbegrip kan laten afhangen.

Wanneer zo de bedoeling van het limiethoofdstukje hoofdzakelijk is de strenge limietdefinitie bij te brengen, mag dat een lofwaardig streven heten. Er zit iets onbevredigends in het werken met een, zij het correct aanvoeld, begrip, zonder het exact te kunnen omschrijven. Kan men de leerling zover brengen, dat hij de exacte definitie als de natuurlijke omschrijving van het begrip vlot kan formuleren, dan is daarmee zijn inzicht stellig ook belangrijk verhelderd. Bij deze procedure blijkt echter, dat hij eventueel reeds aanwezige vertrouwdheid met het begrip aanvankelijk kwijt raakt; wanneer de behandeling niet het doel van de volledige vertrouwdheid met de exacte definitie bereikt, kan dat verschijnsel een permanent karakter krijgen. De poging ware dan beter achterwege

gebleven; wil men ze wagen, dan moet men er ook goed de tijd voor nemen.

Dat de exacte definitie niet bij de toepassingen te pas komt, heeft tot consequentie, dat er geen gelegenheid is de leerling er echt door het gebruik vertrouwd mee te maken. Het bijbrengen er van is daarom vrijwel uitsluitend zaak van oefening in het scherp omschrijven van wat men globaal ziet; dat lukt het beste door het voortdurend weer doorlopen van een reeks steeds scherper formuleringen. Daarbij komt dan vanzelf de vereenvoudigde definitie naar voren; zodat kan worden nagegaan aan welke eisen die moet voldoen. Beide quaesties liggen eigenlijk opgelost in de analyse van Prof. Gerretsen. Hij slaagt er namelijk in de behandeling in etappes uiteen te leggen. De voordracht geeft die splitsing voor verschillende gevallen, ik licht er de behandeling voor het functiegeval uit en laat die in iets gewijzigde vorm hier volgen. Er komt dan:

„Laat E een bewering zijn, die voor een willekeurig reëel getal waar of niet waar is. Ik zeg, dat E waar is voor voldoende dicht bij a gelegen waarden van x , als er een positief getal δ bestaat, zodanig dat E waar is voor elk getal x met $0 < |x - a| < \delta$.

Onder de *afwijking* van twee getallen zal ik verstaan de absolute waarde van hun verschil. Ik kan ook zeggen, dat de genoemde absolute waarde het bedrag is, waarmee de getallen van elkaar afwijken.

Laat nu $f(x)$ een functie zijn, die gedefinieerd is voor voldoende dicht bij a gelegen waarden van x .

Dan kan de definitie luiden:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ betekent: de functiewaarden wijken voor voldoende dicht bij a gelegen waarden van x willekeurig weinig van b af.

De term „willekeurig weinig” kan nog worden gepreciseerd tot „minder dan een willekeurig gekozen positief getal ϵ .”

De oorspronkelijke definitie is iets algemener, ze houdt rekening met de verzameling der getallen x , waarvoor de functie gedefinieerd is; mijns inziens had die verzameling trouwens iets nader omschreven moeten zijn. De genoemde wijziging bestond hoofdzakelijk in het weglaten van deze formele verfining, in de plaats daarvan is $f(x)$ in een omgeving van a gedefinieerd verondersteld.

Nog een kleine wijziging moge hier verantwoord worden; in plaats van: „het getal l is limiet van de functie voor $x \rightarrow a$ ” schreef ik „ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ betekent:”. Prof. Gerretsen ziet in de definitie allereerst de bepaling van een zeker reëel getal l , voor mijn gevoel is ze meer de omschrijving van een eigenschap der functie. Het lijkt

me dan verkieslijk in de definitie de symbolische aanduiding van die eigenschap te omschrijven. De voordelen daarvan zijn, dat een iets vlotter lopende en gemakkelijker te onthouden zin wordt verkregen, dat elke naderingssuggestie, althans in de definitie, vermeden wordt, en tenslotte, dat ook de „oneigenlijke” gevallen in analoge vorm kunnen gegoten worden.

Intussen is het dan nu mogelijk door substitutie van de preciseringen tot een telkens exacter definitie te komen. Men kan zo, te beginnen met de rompddefinitie, bijvoorbeeld achtereenvolgens krijgen:

„Lim $f(x) = b$ betekent:

$x=a$

1) de functiewaarden wijken voor voldoende dicht bij a gelegen waarden van x willekeurig weinig van b af.

2) is ε een willekeurig positief getal, dan wijken de functiewaarden voor voldoende dicht bij a gelegen waarden van x minder dan ε van b af.

3) is ε een willekeurig positief getal, dan bestaat er een positief getal δ , zodanig dat de functiewaarden minder dan ε van b afwijken voor elk getal x met $0 < |x - a| < \delta$.

4) is ε een willekeurig positief getal, dan bestaat er een positief getal δ , zodanig dat $|f(x) - b| < \varepsilon$, als $0 < |x - a| < \delta$."

Mij intrigeert de vraag, in hoeverre hier nu werkelijk van een opklimming in exactheid kan worden gesproken. In formeel opzicht is die er stellig wel, termen als „voldoend” en „willekeurig” kunnen (en moeten dus) per definitie tot de fundamentele begrippen worden teruggebracht. Ook in duidelijkheidsoptzicht lijkt me dat wel gewenst, maar voorzover exactheid synoniem is met duidelijkheid, wil dat immers niet zeggen, dat de simpele mededeling van def. 4 voldoende zou zijn om het limietbegrip bij te brengen. Wel houdt het in, dat iemand met voldoende voorkennis en verstandsscherpte daar verder zelfstandig achter kan komen. Het komt blijkbaar aan op *inleven* in de gehele problematiek, opdat de definitie de *juiste associaties* kan wekken.

Onze leerlingen redden dat niet alleen; vermoedelijk is het gemiddelde intellect daarvoor niet scherp genoeg, maar zeker ontbreekt hun de gewendheid zelfstandig in zulke problemen hun weg te zoeken. Merkwaardig is nu, dat het veel gemakkelijker is begrip te wekken voor def. 1 dan voor de zoveel helderder def. 4. De wiskundige symboliek in de laatste spreekt niet erg aan; blijkbaar doen de genoemde, in def. 1 nog ongedefinieerde, termen dat wel; al zijn de aanvankelijk er mee gepaard gaande associaties niet geheel de juiste, ze bieden toch aanknopingspunten genoeg voor de training, die hier zuiverend moet werken, dat wil zeggen, verkeerde associaties moet wegslijpen en juiste vormen. Het heeft daarom zin na te gaan, wat er aan de vereenvoudigde definities in dat opzicht precies mankeert.

Nummer 1 is voor mijn gevoel al vaag, omdat er niet met zoveel woorden staat, dat het „voldoend dicht” afhangt van het „willekeurig weinig”. Natuurlijk moet die afhankelijkheid wel bestaan, anders zou de functie constant zijn; het bezwaar betreft dus niet zozeer een dubbelzinnigheid als wel een onvolledigheid, het doet evenwel schade aan de suggestiviteit van de definitie. In def. 2 is het gebrek verdwenen, dat is bereikt door eerst de term „willekeurig weinig” te preciseren.

Met opzet is de omschrijving van het „afwijken” het laatst gesubstitueerd. De term is zeer suggestief en eigenlijk op zichzelf duidelijk, de leerling zou hem ook bij

onopvallend onomschreven gebruik verstaan. De eis tot omschrijving is dus meer van formele aard; dat de leerling ze vanzelfsprekend als verduidelijkend accepteert, wijst erop, dat de specifiek wiskundige denkwijze hem niet vreemd meer is. Intussen kan men volhouden, dat def. 4 essentieel niet exacter is dan 3.

De term „willekeurig weinig” behoeft evenzeer nauwelijks verscherping. Vaag kan hij in zover zijn, dat hij bij onomschreven gebruik de aandacht te veel bepaalt bij de precieze grootte van de afwijking; men moet al wat met deze dingen vertrouwd zijn, om aan een bovengrens te denken. Overigens bevat hij één ongewenste implicatie: hij houdt in, dat men de afwijking nul zou kunnen realiseren.

Het geval ligt voor het woord „willekeurig” zo gunstig, omdat het vrijwel uitsluitend wiskundige associaties wekt. Met „voldoend” is dat anders, in dit verband passende wiskundige associaties zijn er nauwelijks mee verbonden; trouwens ook in het dagelijks leven zal de leerling er zich weinig van bedienen. Vandaar dat ik in de les liever spreek van „dicht genoeg”; het woord „genoeg” mist echter voor mijn gevoel weer de scherppte, die voor een exacte uitspraak (ook in de essentiële zin) nodig zou zijn. Ga ik na waarom, dan lijkt het me in de eerste plaats, dat het in het dagelijks gebruik niet steeds de voldoendeheid van de voorwaarde *garandeert*, waarop het betrekking heeft. Hoeveel mensen zijn er niet, die „oud genoeg zijn om wijzer te wezen”? Misschien kan een willekeurige graad van wijsheid niet beneden een daarvan afhankelijke leeftijd worden verwacht, blijkbaar is ze daarboven niet steeds aanwezig. Nog erger is, dat het woord de vervulbaarheid van die voorwaarde soms zo doorzichtig ongerechtvaardigd suggereert, dat men in het algemeen de *existentie* van een werkelijk „genoeg” als te zwak gegarandeerd kan voelen. Spreek ik de waarheid, als ik mijn leerlingen verzeker: „men kan de limieten zo goed leren beheersen als men wil, als men er maar lang genoeg op studeert”? Het lijkt me zinloos over „waar” of „niet waar” te twisten; het meer of minder lang studeren is in elk geval noodzakelijke voorwaarde, de vraag is maar, of een „genoeg” werkelijk existeert. Die onzekerheid verhindert me intussen niet me nu en dan in deze geest uit te laten en al zal ik nu niet zeggen: „men kan x^2 willekeurig weinig van 5 af laten wijken, als men x maar dicht genoeg bij 2 kiest”, toch heb ik het gevoel, dat zulke associaties het woord voor de limietdefinitie te zwak maken.

Intussen meen ik, dat het mogelijk is de leerling door oefening zo ver te brengen, dat de besproken termen bij hem levendig de juiste associaties wekken. Het blijven staan bij de vereenvoudigde definitie zou dan een verantwoord standpunt mogen heten; het wezen van de definitie is dan immers begrepen, zodat de overgang op de $\varepsilon - \delta$ -formulering dan slechts een formele verscherping zou zijn.

Men zou kunnen menen, dat het dan ook slechts een kleinigheid zou moeten zijn, die laatste stap te doen, de ervaring leert echter, dat dat *niet* het geval is, het kost integendeel de grootste moeite. Aanvankelijk begrijpt de leerling er niets meer van; is hij er eindelijk achter, dan wordt hij er toch meteen weer afgereden, zodra men er mee gaat werken; er is geen denken aan, dat hij dat dadelijk zelf zou kunnen. Dat bewijst, dat men zich in de hele *redeneertrant* van een gebied moet hebben ingeleefd om aan het strenge redeneren mee te kunnen doen, ook al weet men er globaal de weg.

De oorzaak ligt dunkt me daarin, dat de wiskundige redeneertrant aan suggestiviteit inboet, wat ze aan precisie wint. Geeft men een wiskundige een globale gedachtengang, dan zal hij pas bevredigd zijn, wanneer hij ze in strenge, precieze vorm gebracht heeft; legt men hem daarentegen een wiskundig streng betoog voor, dan zal hij, om het goed te vatten, trachten de hoofdgedachten er in globale vorm uit te pellen. In die zin hebben def. 1 en def. 4 elkaar als verduidelijking nodig. Is

eenmaal het volledige verstaan bereikt, dan is def. I als uitdrukking daarvan voldoende, bij het gebruik zal het limietbeeld, dat voor ogen staat, zeker niet scherper zijn.

Voor de practijk van het vertrouwd maken met de exacte definitie is er mijns inziens, zoals gezegd, maar één mogelijkheid. Die bestaat in het voortdurend weer laten omschrijven van de betekenis van een bewering als $\lim_{x=a} f(x) = b$, ook als voor $f(x)$ een speciale functie en voor a een speciaal getal gekozen is. Verder moet dan zo'n bewering een behoorlijk aantal malen met die omschrijving als leidraad worden bewezen.

Het duurt lang voor de definitie er vlot uitkomt. Zolang dat niet het geval is, zal ze telkens moeten worden gevonden door het doorlopen van een rijtje definities als de boven afgedrukte. Die zijn trouwens nauwelijks suggestief genoeg voor dit doel, het is beter zich veel huiselijker uit te drukken en bovendien een meer actieve vorm te kiezen, waarin een handelende „ik” of „we” of „men” optreedt. Bijvoorbeeld: „ $\lim_{x=2} x^2 = 4$ ” betekent: als men x dicht bij 2 neemt, ligt x^2 dicht bij 4; men kan x^2 zelfs zo dicht bij 4 brengen als men wil, als men x maar dicht genoeg bij 2 neemt; men kan x^2 minder van 4 laten afwijken dan ... enz.”

Het valt op, dat zelfs na deze training de termen soms nog zo weinig aanspreken, dat ze op de klank af worden gebruikt. Vaak worden dan „willekeurig” en „genoeg” verwisseld of zelfs wordt de opvatting vertolkt, dat men (schrikkelijk om aan te horen) x „zo dicht mogelijk” bij 2 zou moeten nemen. Dan is het het beste de termen geheel in de dagelijkse sfeer te brengen. In de oorlogstijd, toen dit onderwerp met de Franse slag moest worden afgehandeld, kon een bewering als: „Ik kan zo veel sigaretten kopen als ik wil, als ik maar genoeg betaal” op belangstelling rekenen en lokte ze zelfs wel nuttig commentaar uit. Ze geeft direct aanleiding tot de essentiële vragen:

- a. Hoeveel sigaretten wil ik kopen?
- b. Hoeveel moet ik dan betalen?

Het oefenveld wordt vergroot, doordat er zoveel gevallen zijn en dus zoveel verschillende definities moeten worden opgesteld. De laatste jaren kom ik tot niet minder dan zestien; de laatste kunnen gewoonlijk zonder aanloop direct door de leerlingen worden geformuleerd.

In het bovenstaande is de definitie van Prof. Gerretsen gebruikt als uitgangspunt voor een analyse. Ze bleek bruikbaar als

richtlijn bij het onderwijs, zonder dat men ze daarbij als zodanig expliciet behoeft uit te spreken. Het (telkens weer) doorlopen van de rij definities 1—4 in de mondelinge les maakt nog niet nodig, dat bijvoorbeeld de verschillende preciseringen in een leerboek staan afgedrukt. Wil men ze laten leren, dan dragen ze toch het karakter van „verscherpingen-achteraf”, dat bij de aard van het hoofdstuk als wiskundige verdieping past.

Intussen is dit vermoedelijk de bedoeling van de schrijver niet geweest. Het lijkt me, dat hij speciaal de omschrijving van de term „voldoende” uitdrukkelijk als aan de limietdefinitie voorafgaande gedacht heeft. Dat is belangrijk, omdat het de richting wijst, waarin het algebraonderwijs zich zou moeten ontwikkelen, om op de duur tot een meer bevredigende limietbehandeling te komen.

Dat zou neerkomen op nog intensiever beoefening van de ongelijkheden. Het eigen karakter van het werken met limietongelijkheden ligt geheel uitgedrukt in de omschrijving van het „voldoend dicht bij”, maakt men die omschrijving zelfstandig, dan kan ze in vraagstukken worden geoefend, geheel los van het limietbegrip; Gerretsen geeft daarvan tal van voorbeelden. Zin heeft deze handelwijze alleen, wanneer het begrip „voldoend dicht bij” de leerling inderdaad geheel vertrouwd is, als hij met de limieten begint; of de procedure zich op zinvolle wijze in het algebraonderwijs in laat vlechten, kan ik niet beoordelen.

Wel lijkt het me, dat zulke opgaven een zeer nuttige oefening zouden vormen. Elke opgave heeft op zichzelf zoveel eigens, dat ze, hoewel ze veel routine vergt, toch nooit met routine alleen kan worden opgelost; het gevaar van mechanisch werken is hier kleiner dan bij vele andere onderwerpen.

Haren (Gron.), Maart 1951.

Noot bij de correctie: Het gedeeltelijk met kleine letter drukken van dit artikel is buiten weten van de schrijver, dus niet op diens aanwijzing geschied.

„VOOR DE VOLGENDE LES § p LEREN EN
VRAAGSTUK 1 EN 2 MAKEN”

door

S. J. GEURSEN.

Als een leerling een 1, een 2 of een 3 op zijn rapport heeft, dan is de kans groot, dat men met een geval te maken heeft, dat niet te redden is. Leerlingen met een 8, een 9 of een 10 redden in het algemeen zichzelf, hoe ook de omstandigheden mogen zijn.

In het volgende wordt enige belangstelling verzocht voor diegenen van de overigen, die zulke tekorten vertonen in hun wiskunde-capaciteiten, dat zij slechts op gebrekkige wijze mee kunnen komen, maar aan wie toch zo enigszins mogelijk de reddingsgordel dient te worden toegeworpen. Hiertoe kan men ongeveer rekenen de groep, op wier rapport een 4, een 5 of een 6 prijkt. De 6- noem ik hierbij, want de houders van een klein zesje zijn toch ook meestal leerlingen, met wier kunnen het maar zo zo gesteld is.

Ik heb nu voor een aantal klassen van mijzelf en van enige collega's (klassen 1, 2 en 3) eens nagegaan, welk percentage van de leerlingen voor bijvoorbeeld vlakke meetkunde een 4, een 5 of een 6- had, daarbij aannemende, dat het aantal kleine zessen de helft was van het aantal zessen. Steeds vond ik percentages, die tussen de (ruim getrokken) grenzen van 30 en 60 % lagen.

Nu is 30 à 60 % leerlingen, die het onderwijs niet op gezonde wijze kunnen volgen naar mijn bescheiden mening bedenkelijk veel.

Men kan met een afdeling soldaten geen flinke mars ondernemen, als minstens 30 % daarvan min of meer ernstige voeteuvels heeft. Een fietstocht met een klasse leerlingen is geen pretje, als 30 % van de fietsen of meer hinderlijke gebreken vertoont.

Wat moet hiertegen gedaan worden?

Op de soldaten wordt de ambulancedienst afgezonden, bij de fietsen wordt een reparateur gehaald. De oorzaak van de hinder wordt opgespoord en zo mogelijk weggenomen.

Wat de gebreken van meerbedoelde leerlingen betreft, het is niet de bedoeling van dit artikel, de vele oorzaken hiervan ook zelfs maar aan te wijzen en dan tot de orde van de dag over te gaan. Liever zal ik trachten slechts één oorzaak aan te geven en een denkbeeld opperen, om althans die oorzaak te verzwakken of zo mogelijk weg te nemen.

Om ons te beperken nemen wij slechts één schooljaar in oogen-schouw, bijv. het tweede, en slechts één wiskunde-vak, bijv. planimetrie.

De te behandelen stof (theorie met de gebruikelijke vraagstukken) wordt verondersteld ondergebracht te zijn in een aantal paragrafen (§ 1 tot en met n).

Een typische vertegenwoordiger van bovenbedoelde groep van min of meer zwakke leerlingen, die wij gemakshalve met „Jansen” zullen aanduiden, moet dus trachten in een vol jaar deze stof onder de knie te krijgen. Hij wordt verondersteld het jaar te beginnen met een voldoende kennis van de stof, die in het vorige jaar behandeld is.

Daar hij een zwakke leerling is, zal hij § 1 niet geheel en al voldoende meester worden. Aan zijn inzicht in deze stof ontbreekt hier en daar nog wel iets.

Na enige tijd wordt overgegaan tot § 2, waarvan de stof steunt op die van § 1. Daar hij § 1 minder goed onder de knie heeft dan de stof van het vorige jaar en hij nu eenmaal „zwak” is, zal door deze twee oorzaken § 2 minder goed beheerst worden dan § 1.

Eerstgenoemde oorzaak werkt dus steeds sterker. Elke volgende § zal er minder goed ingaan. Zijn kennis van de achtereenvolgende paragrafen wordt gaandeweg kleiner en zal dus de tendens hebben een cascade te vertonen. Wij leraren weten maar al te goed, dat dit verschijnsel zich bij sommige (misschien bij vele, in ieder geval bij te veel) leerlingen inderdaad voordoet.

Nu gaat het er om de stof van een vol jaar aan het einde des jaars het geestelijk eigendom van de leerling te doen zijn.

Men zou daarbij drie stadia kunnen onderscheiden (al dient gezegd, dat een andere indeling wellicht ook mogelijk is):

Eerste stadium: het begrijpen van de behandelde nieuwe stof zonder meer.

In het algemeen kan men aannemen (of vermoeden!), dat dit stadium bereikt is, als men op zijn vraag aan de „Jansens” of zij het begrepen hebben, geen opgestoken vingers meer ziet, doch alleen maar min of meer duidelijk ja-knikkende hoofden.

Tweede stadium: het reproduceren van de stof.

Deze eis is heel wat zwaarder. Jansen moet nu (direct of in de volgende les) de definitie of stelling zelf in woorden of formulevorm kunnen weergeven, hij moet het „gegeven”, het „te bewijzen” en het „bewijs” kunnen opschrijven of op eenvoudige maar kritisch gestelde vraagjes op de juiste wijze reageren.

Derde stadium: het toepassen van de stof (direct of na verloop van tijd).

Jansen moet nu op school en thuis vraagstukken kunnen maken, waarin de stof *tegelijk met vroegere stof* op een of andere manier is ondergebracht. Wij leraren weten allen, hoe weinig onze „Jansens” zonder onze voortdurende hulp hiervan terecht brengen.

Nu bestaan de in Nederland vrij algemeen in gebruik zijnde schoolboeken voor wiskunde bijna steeds uit twee delen, nl. een deel theorie en een deel vraagstukken.

De theorie kan dienen om het eerste stadium (het begrijpen) te bereiken, de vraagstukken zijn kennelijk bestemd voor het derde stadium (het toepassen).

Aan het zo belangrijke tweede stadium — het reproduceren van de stof — wordt in het boek geen aandacht besteed. Natuurlijk, elke leraar zal *in de klasse* aan dit onderdeel alle recht doen wederen, doch dit kan alleen maar mondeling en op het schoolbord geschieden. Hij is niet in de gelegenheid zijn leerlingen hetzij op school of thuis *gedrukte* opgaven voor te leggen van het soort, als voor het tweede stadium nodig is. Het mondeling behandelde, het voorbeeld op het bord moge voor goede leerlingen voldoende zijn, de minder vlugge „Jansens” moeten dit thuis nog eens kunnen herhalen en dat kan nu niet, want het woord van de leraar vervluchtigt, het bord wordt weer schoongeveegd en in het leerboek komt het niet voor.

En nu kom ik op de titel van dit artikeltje. Ik vermoed, dat menige les met een dergelijke zinsnede zal eindigen. Jansen moet dus een stuk theorie leren en zeg twee vraagstukken als toepassing maken. Dit „leren” vindt hij moeilijk en vervelend. Hij begint niet zonder tegenzin. De ervaring heeft hem geleerd, dat al spant hij zich nog zo in, hij toch nog best op school een onvoldoende beurt kan maken. Sommetjes maken is heel wat prettiger. Hij weet tenminste wanneer hij klaar is, want het is zwart op wit. En *als* hij de som kan maken en het goede antwoord heeft, is het wel leuk werk ook.

Jansen is dus geneigd met de theorie de hand wat te lichten en maar gauw aan de sommen te beginnen. Deze mislukken echter zeer dikwijls en Jansen is niet snugger genoeg om te begrijpen, dat die sommen juist mislukken, *omdat* hij de theorie niet onder de knie heeft.

Het eindresultaat is dat Jansen, die wij ijverig genoeg onderstellen, thuis weliswaar een kwartier, een half uur, misschien zelfs

wel een uur aan de wiskunde heeft besteed, maar niettemin met vrijwel lege handen op school komt.

Belangrijk is nu, dat geconstateerd moet worden, dat de tijd, die de zwakke leerling thuis aan de wiskunde besteedt, dikwijls een zeer gering nuttig effect heeft en derhalve voor een te groot deel verloren tijd is.

Want het tevergeefs tobben over voor hem onbegrijpelijke teksten of over voor hem te moeilijke vraagstukken is vrijwel tijd verknoeien.

Het is daarom m.i. gewenst, dat aan het tweede stadium in het boek meer aandacht wordt besteed. Bij vrijwel elk stukje theorie is m.i. nodig een aantal eenvoudige, korte vragen, opdrachten, oefeningen en dergelijke, die de leerling tot kritische overdenking van de stof dwingen, *die niets over vroeger behandelde stof bevatten*, die weinig tijd in beslag nemen en die liefst zo eenvoudig zijn, dat met een minimale toelichting van de leraar minstens zoiets als 90 % van de leerlingen ze voor 90 % kan maken. Het is mij gebleken, dat de leerlingen dit werk gaarne doen, o.a. omdat ze er succes mee hebben. Ze prefereren het boven het regel voor regel napluizen van een stuk klaargezette theorie, en het is ook nuttiger.

Men zal wellicht tegenwerpen, dat die voor het tweede stadium bedoelde oefeningen toch ook tijd kosten en dat we reeds in tijdnood zitten.

Hierop zou ik willen antwoorden: al kostte het meer tijd, dan nog zou dit werk voorrang verdienen, omdat het meer noodzakelijk is, althans voor de „Jansens”; men zou zelfs de moeilijkste van de thans gebruikelijke vraagstukken hiervoor moeten offeren.

Maar dat is niet nodig, want het kost niet meer tijd, integendeel, men spaart tijd.

In de eerste plaats spaart de leerling thuis tijd, want het dikwijls nutteloze tobben wordt voor een deel vervangen door arbeid, die succes oplevert, nl. de beheersing van een bepaald stukje theorie.

In de tweede plaats wordt op school tijd uitgespaard, want de opgaven van het tweede stadium, die nu alleen maar mondeling op school gedaan kunnen worden, kan men dan ook thuis laten doen, zodat op school tijd vrijkomt voor het moeilijke derde stadium.

In de derde plaats zullen bij goede behandeling van het tweede stadium de vraagstukken van het derde stadium heel wat vlotter verlopen.

Een voorbeeld moge een en ander toelichten. Wij nemen daartoe

de behandeling van het begrip „projectie” in de tweede klasse van een H.B.S. Dit begrip is zeer eenvoudig en daardoor spoedig afgehandeld. De leerboeken wijden er dan ook gewoonlijk weinig ruimte aan. De stof wordt in de regel onmiddellijk gevolgd door de behandeling van de stelling:

„In een rechthoekige driehoek is het kwadraat van een rechthoekszijde gelijk aan het product van de schuine zijde en zijn „projectie” daarop ($a^2 = pc$)”.

Hierop volgen dan direct andere dergelijke stellingen.

Daarna komen de gebruikelijke vraagstukken, waarbij in een rechthoekige driehoek allerlei lijnstukken moeten worden berekend.

Nu is het mij meermalen opgevallen, dat bovengenoemde stelling, die toch vrij eenvoudig is, na verloop van tijd zo slecht onthouden wordt en dat bij het weergeven daarvan de meest zonderlinge fouten worden gemaakt. Dit wordt m.i. veroorzaakt, doordat het begrip „projectie” niet voldoende is doorgedrongen. Vraagt men nl. na behandeling van het onderwerp aan zulk een leerling bij fig. 2 wat de projectie van AC op BC is, van welke lijn EH de projectie kan zijn of iets dergelijks, dan zijn de antwoorden al te vaak fout of zij komen slechts hakkelend of al te traag te voorschijn. O.a. worden projectie en projecterende met elkaar verward. Men kan dit verbeteren door deze of dergelijke dingen in de klasse te doen, men kan dit beter en met grote tijdwinst bovendien thuis laten doen, ... mits men over een flink aantal gedrukte oefeningetjes in de trant van onderstaande beschikt:

1. Wat verstaat men onder de projectie van een punt P op een lijn l?
2. Idem van een lijnstuk QR op een lijn l?
3. Fig. 1. Idem van een lijnstuk ST op een lijnstuk AB? (Hier moet de leerling denken aan het verlengde van AB).

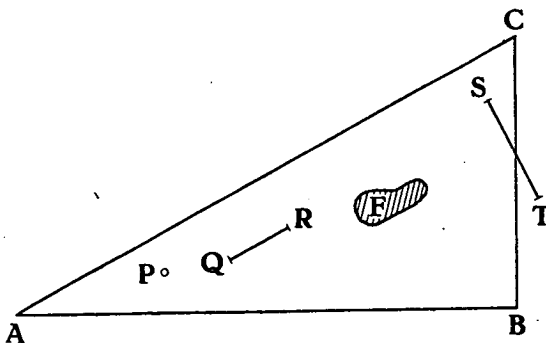


Fig. 1.

4. Fig. 1. Teken in rood de projectie op AB van punt P, ook van lijnstuk QR, van lijnstuk ST en van figuur F.

5 Idem op BC

6 Idem op CA

7. Fig. 2. Vul in:

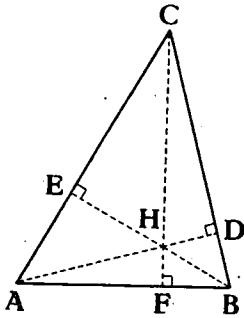


Fig. 2.

De projectie van	op	is
BA	AC	
BC	AC	
BE	AC	
B	AC	
BH		BD
BH	AD	
....		EH

Als de leerling dit gedaan heeft, heeft men nooit meer last met het begrip projectie. Bovendien is een goede grondslag gelegd voor de begrippen sinus, cosinus en tangens.

Wat hier gezegd is van het begrip „projectie” geldt mutatis mutandis ook voor onderwerpen als de volgende:

Verhouding van lijnstukken;

De begrippen „gelijk”, „gelijkvormig” en „gelijk- en gelijkvormig”;

Overeenkomstige lijnstukken bij gelijkvormige driehoeken;

Vermenigvuldigen van figuren;

Sinus, cosinus en tangens;

Rechthoekige driehoeken met een hoek van 30° of 45° .

Homogeniteit van formules, enz. enz..

Hier volgen, ter verduidelijking van de bedoeling, nog enige voorbeelden van opgaven, voor het „tweede stadium” te bestemmen:

1. *Voordat* de stelling over de som van de hoeken van een driehoek en over de buitenhoek wordt behandeld, kan men deze opdracht verstrekken:

„Teken fig. 3 zo groot mogelijk na op een stuk niet te dik karton. Knip de figuur uit. Knip de hoeken A en B er af op de manier als in de figuur is aangegeven, leg ze naast $\angle C$, zodat je kunt zien hoe groot de drie hoeken samen zijn. Doe dit op verschillende manieren. Wat vind je steeds?”

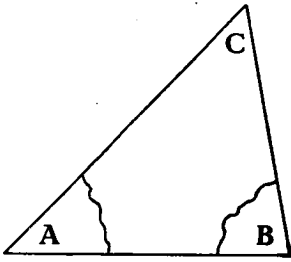


Fig. 3.

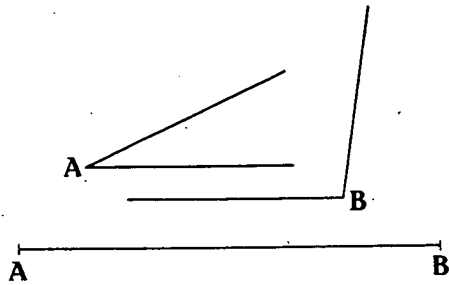


Fig. 4.

2. M.i. is er geen bezwaar tegen om enkele constructies te doen uitvoeren, voordat de bijbehorende bewijzen kunnen worden gegeven, dus bijvoorbeeld het construeren van een hoek gelijk aan een gegeven hoek vóór de behandeling van de congruentie. Is dit gebeurd, dan kan men opgeven:

„Zie fig. 4. Construeer een driehoek ABC, waarvan drie elementen de grootte hebben als in deze figuur is aangegeven. Plaats de letters bij de hoekpunten, doch binnen de driehoek. Knip de driehoek uit. Onderzoek of je eigen driehoek en die van je klasgenoten op elkaar passen”.

Deze en soortgelijke opgaven vormen een goede inleiding tot het hoofdstuk van de congruentie. Zelfs het beruchte „twijfelachtige geval” komt op deze manier bijna vanzelf tot zijn recht.

3. Na de behandeling van de bijzondere vierhoeken (parallelogram, enz.), doch vóór de z.g. „kenmerken” kan men (over enige lessen verdeeld) deze opgaven laten uitvoeren:

a. „Construeer een figuur, die bestaat uit twee niet even lange lijnstukken (willekeurige lijnstukken), welke elkaar middendoor delen. De hoek, waaronder ze elkaar snijden, moet willekeurig zijn (dus niet recht).

b. Dezelfde opgave, doch nu delen ze elkaar loodrecht middendoor.

c. Nu een figuur, waarbij de lijnstukken elkaar middendoor delen en even lang zijn en geen rechte hoek vormen.

d. Vervolgens een figuur, waarbij de lijnstukken elkaar middendoor delen, even lang zijn en loodrecht op elkaar staan.

e. Verbind in elke van bovenstaande figuren de eindpunten. Welke naam zul je aan elke van de figuren geven?

f. Bewijs dat de gegeven namen inderdaad juist zijn.”

4. Bij de behandeling van de veelhoeken kan men een staatje als het volgende laten invullen:

De veelhoek is een	Het aantal diagonalen uit één hoekpunt bedraagt	Door de diagonalen uit één hoekpunt wordt de veelhoek verdeeld in het volgende aantal driehoeken
3-hoek		
4-hoek		
5-hoek		
6-hoek		
7-hoek		
8-hoek		
20-hoek		
30-hoek		
n -hoek		

Op deze wijze vinden de leerlingen de wetmatigheid dan werkelijk zelf.

5. Na behandeling van het begrip „waarde van de verhouding van twee lijnstukken” en met behulp van het teken $\approx$ (ongeveer gelijk aan), doch vóór de behandeling van de stellingen over evenredigheid van lijnstukken bij snijding door evenwijdigen, kan men opgeven:

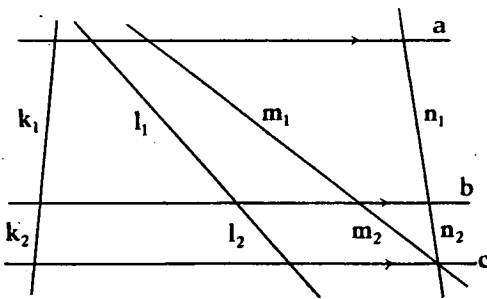


Fig. 5.

„Figuur 3. $a \parallel b \parallel c$.

Schat de waarde van onderstaande verhoudingen door in gedachte telkens het kleinste stuk (of een tiende deel daarvan) zo vaak mogelijk op het grootste af te passen.

Meet daarna elk paar lijnstukken in mm en bereken hieruit de waardeverhouding. Vul alles hieronder in. De door schatting en de door meting gevonden waarden mogen iets verschillen, doch niet meer dan 0,2 à 0,3.

Schatting: $\frac{k_1}{k_2} = \dots$, $\frac{l_1}{l_2} = \dots$, $\frac{m_1}{m_2} = \dots$, $\frac{n_1}{n_2} = \dots$

$$\text{Meting: } \begin{cases} k_1 = \dots \text{ mm}, & l_1 = \dots \text{ mm}, & m_1 = \dots \text{ mm}, & n_1 = \dots \text{ mm}, \\ k_2 = \dots \text{ mm}, & l_2 = \dots \text{ mm}, & m_2 = \dots \text{ mm}, & n_2 = \dots \text{ mm}, \\ \frac{k_1}{k_2} = \dots, & \frac{l_1}{l_2} = \dots, & \frac{m_1}{m_2} = \dots, & \frac{n_1}{n_2} = \dots \end{cases}$$

Het is mij gebleken, dat de leerlingen dit werk zeer gaarne doen. Niet zonder enthousiasme geven zij de gebleken schattingsfouten eerlijk op. De figuur moet zó getekend worden, dat alle verhoudingen mooie getallen worden. Ook hier komt de stelling vanzelf naar voren.

6. Op een stuk grafiekenpapier laat men geheel onderaan een lijn OX en geheel links een lijn OY tekenen. Geen woord wordt gerept over benamingen als coördinaat-assen en dergelijke. Slechts wordt even geleerd, waar een punt, aangeduid door bijvoorbeeld P(7,3) moet worden getekend. Men kan langs deze weg een of andere karakteristieke figuur doen tekenen en deze ten opzichte van O of een ander punt met enige geschikt gekozen getallen doen vermenigvuldigen. Het grafiekenpapier werkt tijdsbesparend voor de leerlingen en misschien nog meer — bij het corrigeren — voor de leraar. Laat men op die manier een vierkant vermenigvuldigen, dan komt het gedrag van oppervlakten bij vermenigvuldiging vanzelf naar voren, terwijl juist op dit punt anders altijd zeer veel fouten voorkomen, zelfs in hogere klassen.

6. Men kan op grafiekenpapier OX (onderaan) en OY (links) laten tekenen en een kwartcirkel met O tot middelpunt en een straal van 10 cm, alsmede een verticale raaklijn. Met behulp hiervan kan men de leerlingen onderstaand staatje laten invullen:

$\sin 15^\circ \approx 0,26,$	$\cos 15^\circ \approx \dots,$	$\text{tg } 15^\circ \approx \dots,$
$\sin 30^\circ \approx \dots,$	$\cos 30^\circ \approx \dots,$	$\text{tg } 30^\circ \approx \dots,$
$\sin 45^\circ \approx \dots,$	$\cos 45^\circ \approx \dots,$	$\text{tg } 45^\circ \approx \dots,$
$\sin 60^\circ \approx \dots,$	$\cos 60^\circ \approx \dots,$	$\text{tg } 60^\circ \approx \dots,$
$\sin 75^\circ \approx \dots,$	$\cos 75^\circ \approx \dots,$	$\text{tg } 75^\circ \approx \dots,$

7. a. „Vul in:

$1,6^2 = \dots$	$3 \approx \dots^2$	$1,3^2 = \dots$	$2 \approx \dots^2$
$1,7^2 = \dots$	$\sqrt{3} \approx \dots$	$1,4^2 = \dots$	$\sqrt{2} \approx \dots$
$1,8^2 = \dots$	$\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx \dots$	$1,5^2 = \dots$	$\frac{1}{2}\sqrt{2} \approx \dots$

b. Schrijf de volgende getallen op dezelfde wijze (dus bij benadering) als decimale breuken met één decimaal en rangschik ze daarna naar grootte:

$$1, \sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, \sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

c. Meet de zijden van je tekendriehoeken in mm en vul in

(met a_{30} wordt bedoeld de zijde tegenover de hoek van 30°):

$$\begin{array}{l} a_{30} = \dots \text{ mm} \\ b_{60} = \dots \text{ mm} \\ c_{90} = \dots \text{ mm} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{a_{30}}{c_{90}} \approx \dots, \\ \frac{b_{60}}{c_{90}} \approx \dots \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(Iets dergelijks voor de gelijk-} \\ \text{benig-rechthoekige driehoek).} \end{array}$$

Met deze en dergelijke oefeningen heb ik proeven genomen, waarvan het resultaat een aanmoediging vormde om in die richting verder te gaan.

Zoals reeds gezegd bleek mij bij een onderzoek van de toevallig in mijn bezit zijnde algemeen gebruikelijke schoolboeken, dat oefeningen van deze soort daarin niet of zeer sporadisch voorkomen, met uitzondering van enkele boeken, die meestal in de laatste tijd zijn uitgekomen.

Merkwaardigerwijze bemerkte ik onlangs, dat het bovenstaande wel degelijk, en zelfs nog veel meer systematisch, dan hierboven is omschreven, wordt gedaan in een, naar ik vernam, algemeen in gebruik zijnd Engels schoolboek.

Het meest verrassend is echter nog, dat een parallel lopende gedachtengang is te vinden in een onlangs aan een groot aantal scholen voor V.H.M.O. gehouden algebratest, ingesteld door Dr. L. N. H. Bunt, Conservator aan het Paedagogisch Instituut van de Rijks-Universiteit te Utrecht. Deze test houdt m.i. tevens een bepaalde didactische methode in en nog wel een methode met verrassende resultaten.

Naschrift van de redactie.

Hoewel verschillende redactieleden het met de strekking en vele passages van bovenstaand artikel van den heer Geursen niet eens zijn, heeft de redactie toch besloten het te plaatsen, daar het artikel een belangrijk onderwerp aan de orde stelt en tot een vruchtbare discussie aanleiding zou kunnen geven.

EEN MAGISTRAAL BOEK OVER DE GESCHIEDENIS DER NATUURWETENSCHAPPEN.

Dr E. J. Dijksterhuis: „De mechanisering van het wereldbeeld” Uitg. Meulenhoff, Amsterdam, 1950; XII, 590 blz.; geb. / 16,50.

Het is ongeveer een jaar geleden, dat ik van den Heer P. Wijdenes, den toenmaligen hoofdredacteur van Euclides, het hier genoemde boek ter recensie ontving. Dat het zo lang geduurd heeft, voordat ik dit stukje ter perse kon geven, ligt niet uitsluitend aan mijn drukke bezigheden, maar veel meer aan de unieke qualiteiten van dit werk. Geschreven met meesterlijke-taalbeheersing, zodat het lezen alleen al tot een intellectueel genot wordt, biedt het een ontzaglijken rijkdom van stof, die den aandachtigen lezer noodt tot nadere bestudering en hernieuwde bezinning, welke ongemerkt veel tijd vraagt. Steeds sterker werd bij mij de overtuiging dat dit werk, speciaal in dit tijdschrift, meer verdiende dan een korte recensie, die zelfs met het gebruiken van een aantal superlatieven toch nooit een idee zou kunnen geven van den uitzonderlijken rijkdom aan wetenschappelijk materiaal, welke in dit boek ligt opgestapeld. Ik ben er dan ook vanzelf toe overgegaan om er een meer uitvoerige beschouwing aan te wijden, zeker niet om hierdoor de lezing van het boek zelf overbodig te maken, maar integendeel om iedereen, die ook slechts enige belangstelling heeft voor de geschiedenis der exacte wetenschappen en voor de ontwikkeling van het natuurwetenschappelijk denken, door deze bijdrage te overtuigen, niet alleen van de wenselijkheid, maar zelfs van de noodzakelijkheid dit boek te bestuderen.

Met het enige doel voor ogen „na te gaan hoe de mechanistische natuurwetenschap tot het aanzijn is gekomen” heeft de schrijver met zorg en nauwgezetheid het overstelpend materiaal, dat door jarenlange studie zijn geestelijk eigendom is geworden, bewerkt en geschilderd (om niet het slachtoffer te worden van den god volledigheid), en in een prachtige synthese samengebracht.

Het gehele boek bestaat uit vier afdelingen, welke tot titel hebben: I. Het erfgoed der oudheid; II. De natuurwetenschap in de Middeleeuwen; III. De voorbereiding van het ontstaan der klassieke natuurwetenschap; IV. De geboorte der klassieke natuurwetenschap. Het is niet mijn bedoeling deze verschillende delen achtereenvolgens te bespreken, maar meer om aan de hand van enkele beschouwingen den lezer een indruk te geven van de belangrijkheid van dit boek.

De westerse natuurwetenschap heeft haar uitgangspunt gehad in de Griekse natuurbeschouwing, en door de eeuwen heen kan men er denkrichtingen in signaleren, soms afzonderlijk, soms in vereniging, welke haar oorsprong hebben gehad in de wijsgerige opvattingen der Griekse oudheid. Daarom heeft de schrijver het terecht noodzakelijk geoordeeld in het eerste gedeelte een overzicht te geven van de Griekse wijsbegeerte, zich echter beperkend tot datgene wat voor een goed begrip van het natuurwetenschappelijk denken van de latere eeuwen onontbeerlijk is. Nooit rukt hij hierbij bepaalde opvattingen uit hun verband, maar steeds weet hij hun denken over de natuur begrijpelijk te maken binnen het kader van hun hele denksysteem. In de heldere beknoptheid, waarmee hij dit telkens weet te doen, bewondert men steeds weer de grondige wijze waarop de schrijver zich met de wijsgerige systemen der Grieken vertrouwd heeft gemaakt. Achtereenvolgens bespreekt hij hier de op-

vattingen der Pythagoreërs, het Eleatisme, de corpusculaire theorieën van Empedocles, Anaxagoras en de atomisten, het Platonisme, het Aristotelisme, het Stoïcisme en het neo-Platonisme. Mijn kritische belangstelling ging hier voornamelijk uit naar de paragraaf over het Aristotelisme, omdat ik mij in het verleden zo vaak geërgerd heb over de oppervlakkige en soms hoogst onrechtvaardige wijze, waarop men in de populairwetenschappelijke boeken zich van dezen groten Grieksen wijsgeer meent te kunnen afmaken. Hoe vaak leest men over hem niets anders dan dat hij door zijn a priori-beschouwingen tot een aantal foutieve beweringen over de natuur is gekomen, en dat zijn opvattingen de vooruitgang der wetenschappen gedurende eeuwen hebben belemmerd. Bij Dijksterhuis worden de verkeerde opvattingen van Aristoteles zeker niet verdoezeld en in het vervolg van zijn boek zal nog vaak ter sprake komen hoe het vasthouden aan de Aristotelische traditie dikwijls den vooruitgang der natuurwetenschap heeft tegengehouden, maar door een heldere uiteenzetting van zijn systeem, toegelicht door verduidelijkende beschouwingen van zijn commentatoren, weet hij de waardevolle elementen ervan naar voren te brengen, en te laten zien hoe de foutieve uitspraken de kern van zijn systeem meestal niet raken, maar als accidentele vergissingen beschouwd moeten worden, welke te wijten zijn aan de gebrekkige natuurwetenschappelijke kennis dier dagen en aan een al te simpele opvatting van de ervaringswereld. De ruime plaats, welke de schrijver aan de bespreking van Aristoteles geeft, wijst duidelijk op de grote betekenis die hij voor de verdere ontwikkeling van het wetenschappelijk denken aan dezen wijsgeer toekent. Nog talrijke malen zal in de overige gedeelten van het boek de invloed van het Aristotelisme ter sprake komen.

Al acht ik de uiteenzetting van Dijksterhuis over Aristoteles een meesterlijk staaltje van stofbeheersing, toch vrees ik dat hier de al te grote beknoptheid het niet-ingewijden moeilijk zal maken de portée van sommige punten van het Aristotelische systeem te vatten, b.v. bij de uiteenzetting van substantie en accidens, van potentie en act, van stof en vorm, van de leer der vier oorzaken, etc. Dit zal evenwel nauwelijks een belemmering zijn voor een goed begrip van hetgeen volgt.

Met bijzondere belangstelling en met kritischen blik heb ik ook gelezen wat de auteur schrijft over de wetenschappelijke sfeer van de dertiende eeuw en in het bijzonder over twee van haar grootste figuren, Albertus Magnus en Thomas van Aquine, vooral omdat ook hier nog zoveel waanvoorstellingen heersen, welke steeds weer, ook in tal van moderne publicaties, als de ware opvatting worden voorgesteld. Mijn verwachting, gegrond op de kennis van andere geschriften van denzelfden schrijver, werd ook nu niet teleurgesteld. In een heldere uiteenzetting geeft hij op objectieve wijze een duidelijken kijk op de zienswijze van Albertus en Thomas op diverse punten, welke voor het verder onderzoek van belang zijn, speciaal wat betreft hun instelling ten opzichte van de kennis van de natuur. Schrijver laat zien dat deze grote geesten der dertiende eeuw zeker niet meenden dat men in de natuurwetenschappen deductief uit vooropgestelde beginselen zijn resultaten moest trachten te vinden, en in tal van welgekozen citaten laat hij hen zelf aan het woord om hun opvatting aangaande het empirisch karakter der natuurwetenschappen uit te spreken. Dat ondanks deze gunstige geestelijke atmosfeer de dertiende eeuw toch weinig vooruitgang in het natuurwetenschappelijk onderzoek heeft opgeleverd, mag op het eerste gezicht verwondering wekken, maar wordt na kennisneming van schrijvers analyse van de belemmerende factoren begrijpelijk. Deze moeilijkheden waren blijkbaar zo groot, dat zelfs een strijdbare figuur als Roger Bacon, ondanks zijn felle kritiek op de remmende opvattingen en zijn vechten voor een mathematisch-empirische wetenschap toch zelf slechts povere resultaten heeft verkregen.

In het vierde deel, getiteld: „De geboorte der klassieke natuurwetenschap”, is de schrijver eindelijk gekomen aan wat hij noemt de „anni mirabiles”, die jaren nl. waarin de tot nu toe gevolgde ontwikkelingslijnen haar eindpunt vinden. Het is het tijdperk dat begint met Copernicus en in Newton zijn afsluiting en bekroning vindt. Aan de methodische moeilijkheden, die iedere eenzijdige behandeling met zich mee brengt, weet de auteur te ontkomen door verschillende methodes te combineren, zodat zowel de ontwikkelingsgang der afzonderlijke wetenschappen als de betekenis der grote figuren, alsook de wederzijdse afhankelijkheid tot hun recht komen.

Het eerste hoofdstuk van dit deel, dat de astronomie van Copernicus tot Kepler behandelt, is een van de boeiendste hoofdstukken van het boek. Het betreft een onderwerp dat reeds jaren de bijzondere belangstelling van Dr Dijksterhuis heeft gehad, de worsteling nl. van Copernicus, Tycho Brahe en speciaal van Kepler, om te komen tot het nieuwe wereldbeeld. Nauwgezet geeft hij zich rekenschap van de nieuwe elementen die nu in de beschrijving van het zonnestelsel naar voren komen, ondanks de vele bindingen met het verleden, welke ze slechts met ongelooflijke inspanning kunnen verbreken. Hij laat zien wat ze zelf als een belangrijke vondst waardeerden en wat feitelijk voor de toekomstige ontwikkeling van de natuurwetenschappen van belang geweest is. Bepaald fascinerend is de paragraaf welke gewijd is aan Kepler, dien wonderen geest, waarin de meest heterogene gedachten door elkaar verweven zijn. Bij Kepler meent hij te stoten op het eigenlijke keerpunt van het denken, de stap van *anima* naar *vis*, die de eerste belangrijke stap geweest is op den weg naar de mechanistische wereldbeschouwing. Verder worden in dit deel nog verscheidene grote figuren behandeld als Stevin, Galilei, Descartes, Huygens, bij wie zich de ontwikkeling in mechanistische richting voortzet, en als laatste Newton, in wien deze ontwikkeling haar afsluiting vindt en de klassieke natuurwetenschap haar oorsprong.

In een slotbeschouwing zet de schrijver uiteen hoe de term mechanisering, gezien in het licht van de voorafgaande behandeling, verstaan moet worden. Zijn conclusie, die hem bij het ordenen en ontwikkelen van de stof van dit boek natuurlijk als leidend beginsel voor ogen gestaan heeft, is dan dat het kenmerk van de klassieke natuurwetenschap, waarvan hij het ontstaan geschilderd heeft, en eveneens, en zelfs meer, van de moderne natuurwetenschap, de mathematisering is, bestaande in het werken met wiskundige begrippen en methodes, in het „functionele denken met zijn essentiële mathematischen uitdrukkingsvorm”. Naar mijn mening is de schrijver in zijn opzet volkomen geslaagd. Door de eeuwen heen heeft hij den verborgen draad van de ontwikkeling met veel inspanning en volharding weten op te sporen en bloot te leggen. In een boeiend betoog maakt hij ons stap voor stap bekend met de moeizaam verkregen inzichten, die leidden van een gebrekkig pogen tot verklaren met behulp van verborgen oorzaken en qualiteiten tot een heldere beschrijving met behulp van wiskundige hulpmiddelen, waarin de klassieke natuurwetenschap (en meer nog de moderne) haar ideaal zag. Toch vrees ik dat het al te zeer benadrukken van het wiskundige karakter van de nieuwere natuurwetenschap het gevaar in zich sluit, dat menigeen, tegen de bedoeling van den schrijver in, er toe gebracht wordt te denken, dat met een wiskundige beschrijving de realiteit wordt uitgeput, welke opvatting nog steun krijgt doordat de schrijver voortdurend wijst op de tegenstelling van het nieuwe ideaal der mathematisering en het vroegere aristotelische streven naar verklaring der verschijnselen uit de natuur en de eigenschappen der stoffen. Al kunnen de natuurwetenschappen op vele gebieden niet veel verder komen dan zulk een mathematische beschrijving, hiermee is aan de

ontologisch gefundeerde „causaliteitsbehoefte” der mensen niet voldaan, en er zal ook na die beschrijving nog een taak overblijven, die wel meer tot de natuurphilosophie behoort dan tot de natuurwetenschap, maar toch evenzeer reëel is en gerechtvaardigd. Hopelijk zullen de beoefenaars van de mathematische natuurwetenschap zich er altijd van bewust blijven dat hun wiskundige behandeling de realiteit alleen grijpen kan naar haar quantitatief aspect, maar niet vermag door te dringen in het wezen der materie, die onder verschillend opzicht „geteld en gemeten” wordt. Bij het onderzoek naar den eigen aard van stof en beweging zal dan blijken dat veel van de Aristotelische natuurphilosophie tot op heden toe zijn waarde heeft behouden.

Zelfs indien de inhoud van dit boek beperkt was gebleven tot het vermelden van historische gegevens en tot het bespreken van personen en tijdperken naar hun betekenis voor de ontwikkeling van de natuurwetenschappen onder het oogpunt der mechanisering, het zou een werk zijn geworden, dat om zijn uiterst waardevolle bijdrage een ereplaats zou verdienen in de bibliotheek van de geschiedenis der natuurwetenschappen, van wege de rijke documentatie, de objectieve behandeling, het zelfstandig onderzoek van de historische bronnen, de zakelijke uiteenzetting der argumenten waarmee de schrijver zijn eigen zienswijze verdedigt, welke vaak van de gangbare afwijkt en afrekent met de mythes, die de historie om sommige personen (b.v. Leonardo da. Vinci en Galilei) heeft gevlochten en met hardnekkige opinies over de betekenis van sommige geestelijke stromingen en tijdperken (b.v. humanisme en renaissance); en ten slotte van wege de steeds duidelijke uiteenzettingen van vaak moeilijke problemen en het uiteenrafelen van een vaak misleidende terminologie (b.v. atomisme).

Men kan zich afvragen of alle onderdelen en zelfs hele paragrafen noodzakelijk zijn voor het nauw omschreven doel dat de auteur zich had gesteld. Laten we hem dankbaar zijn dat hij zich door dergelijke overwegingen niet al te zeer heeft laten beperken en ons zodoende de gelegenheid heeft gegeven op zo ruime schaal te participeren aan de schatten van zijn kennis en inzicht.

De grote betekenis van dit boek ligt m.i. echter nog op ander terrein. De schrijver beperkt zich gelukkig niet tot het uiteenzetten van de feitelijke historische gegevens en hun verantwoording, maar meer nog gaat hem ter harte de wijze waarlangs men tot de resultaten is gekomen, de langzame rijping van het inzicht bij de onderzoekers en de bespreking van de vele moeilijkheden die men heeft moeten overwinnen. De beschouwingen van dezen aard behoren naar mijn mening tot de waardevolste van het boek.

Bij de behandeling van personen openbaart zich steeds de objectiviteit van den schrijver en het ernstige streven om hun werk steeds billijk te beoordelen, naar zijn innerlijke waarde en naar de betekenis die het in hun eigen tijd heeft gehad, ook als de waarde en betekenis naar onze maatstaven gemeten uiterst gering is. Hen, die in ijdel superioriteitswaan theorieën der ouden op het gebied van de natuur menen te kunnen ridiculiseren van wege hun anthropomorfe voorstellingen en kinderlijke uitdrukkingen, en hun waarde onderschatten, wijst hij terecht door hen te wijzen op hedendaagse voorstellingen en uitdrukkingen die dikwijls niet veel beter zijn. De wonderlijke gedachtengangen en de vele tekortkomingen die er ongetwijfeld in hun opvattingen zijn, en de vaak tragische verblinding die men bij hen aantreft, tracht hij te verklaren door de interne en externe moeilijkheden te schilderen waarmee ze te kampen hadden. Wat men hun wel zou kunnen verwijten, is, dat zij meestal te veel vasthielden aan de traditie en aan het gezag van hun grote voorgangers, en, hierop steunend hun theorieën niet lieten varen als bleek dat

nieuwe en duidelijke ervaringsgegevens er mee in strijd waren. Terwijl schrijver kritisch staat tegenover hun eigen argumenten en tegenover de elementen van hun systeem welke zij zelf het belangrijkste achtten, laat hij zien wat hun werkelijke betekenis is geweest voor de ontwikkeling der natuurwetenschappen, en wat van sommige van hun denkbeelden de innerlijke waarde is, ook als de omwenteling, die ze hadden kunnen teweegbrengen, door den weerstand van den eigen tijdgeest, door een remmenden invloed van gezag en traditie, door gemis aan technische en mathematische vaardigheid, of omdat de tijd er niet rijp voor was, is uitgebleven.

Het is ondoenlijk om in dit kort bestek iets uitvoeriger in te gaan op de waardevolle en instructieve opmerkingen die op talrijke plaatsen in het boek verborgen liggen, b.v. over den wederzijdsen invloed van wijsgerige en natuurwetenschappelijke opvattingen in een vaak wonderlijke vermenging, over de wisselwerking tussen natuurwetenschap en techniek, over het gebruik van een juiste terminologie, over den stimulerenden of remmenden invloed van theologische opvattingen of factoren van wereldbeschouwelijke aard, over den invloed van aesthetische beoordelingen of overwegingen van doelmatigheid, over psychologische belemmeringen en den druk van gezag en traditie, over de verhouding van geloof en wetenschap. (Wat dit laatste betreft, vind ik het jammer dat op het einde van het vierde deel de schijn gewekt wordt dat de ontwikkeling van de natuurwetenschap noodzakelijk moest leiden tot een vervreemding van beide). Belangrijk ook vind ik zijn, met voorbeelden geïllustreerde, opmerkingen over veel voorkomende denkfouten van historici, die vaak aan hen, die technische werktuigen blijken te hanteren of bepaalde stellingen blijken te kennen, ook het wetenschappelijk inzicht toeschrijven op grond waarvan die werktuigen of stellingen te begrijpen zijn, of die menen dat iemand in het verleden op dezelfde wijze moet zijn tewerkgegaan als tegenwoordig om didactische redenen gebeurt.

Ongemeen boeiend en buitengewoon instructief zijn de talrijke passages, waarin de auteur de moeilijkheden van velerlei aard beschrijft waarmee de natuurwetenschap bij haar ontwikkeling te kampen heeft gehad, en de worstelingen van den menselijke geest bij het verwerven van inzicht in begrippen als kracht, traagheid, zwaarte, massa, en bij het zoeken van den juisten weg in een chaos van verschillende meningen (b.v. over de verklaring van de proef van Torricelli). Zo maakt hij het begrijpelijk dat soms figuren van den eersten rang, met een aangeboren geschiktheid tot natuuronderzoek en een hiervoor gunstige geestesinstelling, er toch niet in konden slagen tot werkelijk belangrijke resultaten te komen.

Het boek besluit met een uitvoerige literatuurlijst en een uitgebreid register van de besproken personen met jaartallen. Beide lijsten hebben reeds op zichzelf een grote waarde. Ik vind het echter jammer dat in den tekst niet vaker jaartallen zijn vermeld, b.v. waar in een hoofdstuk de personen voor het eerst genoemd worden of in een bepaalden tijd moeten worden geplaatst. De aandachtige lezer heeft er zeker vaak behoefte aan, en een voortdurend naslaan van het register is dan hinderlijk. Verder zou een zaakregister in dit boek van onschatbare betekenis zijn, juist omdat er zulk een ontzaglijke hoeveelheid van wetenswaardigheden in is vervat. Wat zou het nuttig kunnen zijn bij voorkomende gelegenheden eens te kunnen opzoeken, wat deze betrouwbare en deskundige auteur zegt over alchemie, astrologie, magie, mechanica, wiskunde, etc., over onderwerpen als plaats, beweging, ruimte, kracht, massa, zwaarte, traagheid, vacuum, impetus, val en worp, etc., over relativiteit, causaliteit, qualiteiten, over axioma's en beginselen, over de verhouding van geloof en weten, etc. etc. Laten we hopen dat de schrijver voor een tweede druk, welke zeker wel spoedig zal volgen, de inderdaad zeer omvangrijke taak van het maken

van een zaakregister op zich zal willen nemen. Hij zal de gebruikers van zijn boek nog des te meer tot dankbaarheid verplichten. Voor niet-klassiek-gevorinden zou het, dunkt mij, verder nuttig zijn de Latijnse termen steeds van een Nederlandse vertaling te voorzien.

Na het voorafgaande is een aanbeveling van het magistrale werk van Dr Dijksterhuis natuurlijk overbodig. Beoefenaars van de geschiedenis der natuurwetenschappen kunnen er eenvoudig niet buiten. Leraren zullen er bijzonder hun voordeel mee kunnen doen, omdat ze uit deze lessen van de historie veel zullen leren wat ze in hun eigen lessen tot groot nut van hun leerlingen te pas kunnen brengen. Maar door zijn, hier in het kort geschetste, excellente eigenschappen, die het eigen terrein van de geschiedenis der natuurwetenschappen verre transcenderen, is het een boek dat een veel brederen lezerskring verdient, en ook door beoefenaars der geesteswetenschappen en wijsgeren met groot voordeel gebruikt zal kunnen worden. Hun algemeen inzicht zal er in belangrijke mate door verrijkt worden en veel misvattingen en verwarringen zullen er door worden weggenomen. Allen, die dit boek ook maar vluchtig hebben ingezien, zullen wensen het voor goed in hun bezit te hebben, om het telkens weer te kunnen raadplegen en te bestuderen. Men hoeft niet bang te zijn dat het zal verouderen. Al is het mensenwerk en dus voor verbetering vatbaar, voor het overgrote deel zal er niets aan kunnen gewijzigd worden, omdat er geen reden voor wijziging is.

Dit werk van Dr Dijksterhuis kan met recht genoemd worden een monumentum aere perennius, het is een boek zoals er slechts weinige in een eeuw verschijnen, tot het schrijven waarvan een zeer begaafd schrijver alleen na jarenlange studie, dus meestal eerst op het einde van zijn leven, in staat is. Gelukkig wijst bij dezen auteur nog niets op een naderend einde. Gaarne wens ik hem dan ook toe dat hij nog vele jaren in ongebroken geestkracht de wetenschap mag dienen en ons van de vruchten van zijn arbeid mag laten genieten.

Ten slotte spreek ik gaarne een woord van waardering voor de uitgevers, die de uitgave van dit voortreffelijke boek op even voortreffelijke wijze hebben verzorgd.

Leiden, Mei 1951.

Prof. Dr P. H. VAN LAER.

KAN HET WISKUNDEONDERWIJS TOT DE OPVOEDING VAN HET DENKVERMOGEN BIJDRAGEN?

(Discussie tussen T. Ehrenfest—Afanassjew a en Prof. Dr H. Freudenthal; publicatie uit de Wiskunde-Werkgroep van de Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs; Muusses, Purmerend, 1951; / 1,25.)

Welk een perspectieven opent reeds de titel van deze brochure! Laten wij eens aannemen, dat het antwoord op de in de titel gestelde vraag ontkennend zou moeten luiden; welke consequenties zou dit mee moeten brengen t.a.v. ons V.H. en M.O.? Het zou dan onverantwoord zijn, de wiskunde anders te onderwijzen, dan 1° om haars zelfs wil, 2° om haar resultaten.

Om haars zelfs wil! (Hiermee bedoel ik: uit belangstelling voor de door haar opgeworpen problemen en de bij haar in gebruik zijnde methoden tot oplossing van die problemen.) Dit zou betekenen: uitstel van de wiskunde tot de hoogste klassen van slechts enkele afdelingen van V.H. of M.O.

Om haar resultaten! Dit zou betekenen: geheel verschillende programma's voor de wiskunde aan Gymnasium α , Gymnasium β , H.B.S.-A en H.B.S.-B (men zie hierover het interessante artikel van P. J. van Albada: „De wiskunde voor de niet-mathematische richtingen”, gepubliceerd in Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs, 8e jg. 49/50, nr 70, p. 154 e.v.). In ieder geval zou het dwaasheid zijn, om — wat de wiskunde betreft — aan de H.B.S.-A en de H.B.S.-B een gemeenschappelijke driejarige onderbouw te geven, of aan het Gymnasium een gemeenschappelijke vierjarige onderbouw.

Luisteren we nu echter naar de antwoorden op deze, ons allen beroerende vraag: „kan het onderwijs in de wiskunde tot de opvoeding van het denkvermogen bijdragen?” De brochure bevat vier uiteenzettingen in de vorm van een discussie, achtereenvolgens van Mevr. Ehrenfest, Prof. Freudenthal, Mevr. E. en Prof. F..

Mevr. E. betoogt, dat *goed gegeven* wiskundeonderwijs inderdaad het denkvermogen kan ontwikkelen (en ook *moet* ontwikkelen, p. 19). Wat zij echter onder zulk onderwijs verstaat, is wel iets anders, dan het onderwijs, dat wij dagelijks plegen te geven. Over het „logisch denken” zegt zij waardevolle dingen; ik citeer (p. 6):

Er wordt meestal onder het „logisch denken” het *foutenvrij trekken van conclusies uit gegeven praemissen* verstaan. Door het voorafgaande werd getracht aan te tonen, dat dit lang niet alles is: het garandeert niet een juiste oplossing van een zich voordoend probleem! Het duidelijk begrijpen van *wat het probleem is* en het vinden der juiste *praemissen*, zijn veel moeilijker en beslissender opgaven en ze moeten aan het trekken van eventuele conclusies voorafgaan.

Wie moeten we een „logisch” mens noemen? Stellig niet hem, die uit een groep willekeurige, ongecontroleerde (of door iemand anders gegeven) praemissen op een onberispelijke wijze een hoeveelheid van „*dus*”-sen aan elkaar weet te rijgen, maar hem, die de kunst verstaat om *uit een nog niet geordend geheel* van gegevens de *bij de zaak behorende gegevens voor den dag te halen*; die onderscheidt tussen „juiste” beweringen en de *bij de zaak behorende juiste* beweringen; die belang stelt in goede argumentaties en het juist gebruik der woorden en die natuurlijk ook gevoelig is voor logische fouten.

Zij wil nu het wiskundeonderwijs zo inrichten, dat dit logisch denken daardoor ontwikkeld wordt; zij meent, dat dit kan (en dan ook moet). Ik citeer nog even, hoe een goed proefwerk, er uit moet zien (p. 10):

Voor dit laatste zou men de leerlingen veel meer tijd moeten geven om iedere opgave behoorlijk door te denken: vaststellen, of de gegevens zinvol, of hun aantal voldoende dan wel onvoldoende of te groot is; gissen, welke oplossing men redelijkerwijs verwachten moet, en het resultaat daarna met deze verwachting vergelijken en de oorzaak van de eventuele discrepantie nagaan.

Zij is tamelijk optimistisch t.a.v. de vraag, of de leerlingen zulk wiskundeonderwijs zullen kunnen volgen (p. 11):

Of er echter leerlingen bestaan, die, ondanks hun overige intelligentie, niet te bewegen zijn om aan de specifiek wiskundige problemen aandacht te schenken en die daardoor aan de opvoedende invloed van het wiskundeonderwijs ontsnappen, mag men, *misschien*, ¹⁾ a priori niet zeggen. Welke graad van intellectuele slapheid voor de zegenende kracht der wiskunde toegankelijk is, kan ook slechts de ervaring leren.

Prof. F., hoewel instemmend met Mevr. E.'s omschrijving van logisch denken en vol bewondering voor Mevr. E.'s methode van ideaal wiskundeonderwijs, beantwoordt toch de in de titel van de brochure gestelde vraag ronduit met „neen” Terwijl Mevr. E. gelooft in de mogelijkheid om bij de wiskunde aangeleerde goede denkgewoonten over te dragen op andere terreinen van geestelijke werkzaamheid, is Prof. F. van het tegendeel overtuigd. Mevr. E. zegt ergens (p. 20), dat tot „het trachten om iets te begrijpen inplaats van een oordeel of een regel op vreemd gezag te slikken en uit het hoofd te leren” geen andere vak zo'n geschikte gelegenheid biedt (als de wiskunde). Prof. F. antwoordt (p. 25):

Absoluut juist — tot op 't ogenblik, dat de kwestie van overdracht aan de orde komt. De wiskunde kweekt deze goede gewoonte in hoge mate aan — ten bate van de wiskunde. En daarmee is het afgelopen. De wiskunde is nl. het slechtste terrein, om deze gewoonte met hoop op overdracht te beoefenen. Dit is het noodlottig gevolg van de „eenvoud” der wiskunde. De wiskunde is in dat opzicht veel te weinig problematisch, omdat haar te eenvoudige structuur haar in hoge mate vrijwaart tegen het optreden van tegenstrijdigheden. In de wiskunde is er ook gezag, namelijk het gezag van de juistheid. Tegen zulk gezag zich in critiek te oefenen, is uiterst moeilijk. Het denkmateriaal buiten de wiskunde is daarentegen een slagveld van tegenstrijdigheden, en hoe meer men zich van de wiskunde verwijderd, des te erger wordt het. Pas buiten de wiskunde wordt het probleem van „het niet op gezag aanvaarden” echt gesteld.

Op p. 26 herhaalt hij nog eens:

Ik ben nog een keer zo uitvoerig op principiële kwesties ingegaan, om te kunnen zeggen, waarom ik het aankweken van goede denkgewoonten door middel van de wiskunde zo secundair acht: omdat de wiskunde hiervoor het minst aangegeven terrein is.

Interessant is Prof. F.'s diagnose van iemand, die de wiskunde „niet snapt” (p. 14):

Ik heb eigenlijk nooit begrepen, hoe er mensen kunnen zijn, die de wiskunde niet snappen — het is toch allemaal zo logisch. Een enkele keer heb ik leerlingen van dit type bij het werk kunnen observeren. Waar hun falen aan toe te schrijven is, weet ik steeds nog niet, maar ik weet nu tenminste, waarin het *bestaat* (althans

¹⁾ Cursivering van mij, de komma's van Mevr. E.

in de door mij geobserveerde gevallen): in het niet kunnen substitueren. (Tussenvoeging van de recensent: Prof. F heeft hier niet in de eerste plaats op het oog het vervangen van een letter door een getal; daar ook Mevr. E. dit verkeerd opvatte, komt hij er later nog eens op terug). Er zijn mensen die in de formule $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, de a en b niet volgens de regels der kunst door ingewikkeldere uitdrukkingen kunnen vervangen; die voor de driehoek, waarvan in een vroeger bewezen stelling sprake was, niet die driehoek kunnen substitueren, die in een nu te bewijzen stelling voorkomt; die niet in staat zijn in de „Leerstellen” (lege plaatsen) van een abstract redeneerschema de nodige onderwerpen, gezegden, proposities enz. in te vullen — kortom die geheel niet toegankelijk zijn voor de methode van formele substitutie, zonder welke geen wiskunde denkbaar is.

De waarde van deze diagnose bestaat daarin, dat eruit volgt, dat iemand, die voor de wiskunde ontoegankelijk is, daarmee nog niet geoordeeld is als iemand, die niet logisch kan leren denken. Het is Prof. F. ook duidelijk om deze consequentie te doen: hij gaat na, dat er buiten de wiskunde bijna geen gebieden zijn, waar men deze methode van formele substitutie beoefent. Ook herinnert hij eraan, dat er uitstekende wiskundigen geweest zijn, die op het terrein van het door Mevr. E. omschreven logisch denken warhoofden waren!

De lezer vergeve mij, dat deze recensie bijna ontaardt in een kort verslag: ik heb de brochure met zo'n intens genoegen gelezen, dat ik niet na kon laten enkele zeer markante gedeelten over te nemen. Wie zich mijn artikel in Euclides 21, p. 31 e.v. herinnert (p. 35, laatste alinea en p. 36), zal wel begrepen hebben, dat ik geheel aan de zijde van Prof. F. sta. Niettemin vind ik ook in de artikelen van Mevr. E. veel, dat het lezen en herlezen overwaard is. Mogen vele wiskundeleraren zich de luttele aanschaffingsprijs getroosten; het gaat om het belang van onze leerlingen.

H. STR.

AMERIKAANSE STUDIEBEURZEN BESCHIKBAAR
VOOR NEDERLANDSE
ONDERWIJZERS(ESSEN) EN LERAREN(ESSEN)
VOOR HET STUDIEJAAR 1952/53

Voor het studiejaar 1952/53 worden door de Amerikaanse regering toelagen voor onderhouds- en reiskosten voor Nederlandse onderwijzers en leraren voor studie van onderwijsmethoden in de Verenigde Staten beschikbaar gesteld. Het doel van het programma, dat uitgaat van het Amerikaanse Ministerie van Buitenlandse Zaken in samenwerking met het Amerikaanse Departement van Onderwijs, is onderwijskrachten in staat te stellen praktische ervaring met bepaalde onderwijs systemen in de Verenigde Staten op te doen. Het programma omvat de volgende categorieën:

1. Lager Onderwijs.
2. Middelbaar Onderwijs.
3. Ambachts en Vak Onderwijs.
4. Het onderwijzen van Engels als tweede taal.

Opleidings cursussen voor leraren in de Engelse taal beginnen ongeveer 1 Juni, 1952 voor een periode van vier maanden; de overige cursussen beginnen ongeveer 15 Augustus, 1952 voor een periode van zes maanden.

De toelagen omvatten:

1. Reis naar en van Amerika.
2. Goedgekeurde reizen in Amerika vallende onder het programma.
3. Kosten van onderhoud ten bedrage van \$ 210 per maand.
4. Een klein bedrag in contant geld dat degenen, die een beurs krijgen, ontvangen voor hun vertrek uit Nederland (het juiste bedrag zal later worden medegedeeld).
5. Betaling van eventuele college gelden.
6. Een bedrag ter bekostiging van studie boeken.

Vereisten:

1. Nederlandse nationaliteit.
2. Grondige kennis van de Engelse taal.
3. Goede gezondheid.
4. Leeftijd van 25 tot 40 jaar.

5. Bevoegdheid om in eigen land te doceren, waarbij men een ervaring van ten minste drie achtereenvolgende jaren moet hebben.
6. Het voornemen om na afloop van de studie termijn naar Nederland terug te keren en voort te gaan met de vroegere betrekking of daarmee verband houdend werk.

De toelagen omvatten geen voorziening voor gezinsleden.

Aanvraag formulieren zijn verkrijgbaar bij het Nederland-Amerika Instituut, Museumplein 4, Amsterdam en moeten aan bovengenoemd adres worden aangevraagd vóór 15 November, 1951.

EXAMENS IN DE WISKUNDE IN 1951.

De Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, brengt ter kennis van belanghebbenden, dat, behoudens onvoorziene omstandigheden, het mondeling gedeelte van de examens ter verkrijging van

- a. de akte van bekwaamheid tot het geven van lager onderwijs in de wiskunde;
- b. de akte K I en
- c. de akte K V,

voor zover die in het openbaar zullen worden gehouden, zal worden afgenomen in het gebouw aan de Fluwelen Burgwal 22 te 's-Gravenhage onderscheidenlijk van 12 October tot 29 December, op Woensdag, Donderdag, Vrijdag en Zaterdag, telkens te 9 uur 30 en 14 uur; van 12 October tot 29 December op Woensdag, Donderdag, Vrijdag en Zaterdag, telkens te 9 uur 30 en 14 uur en van 12 October tot 29 December op Zaterdag telkens te 9 uur 30 en 14 uur, met uitzondering van de laatste Zaterdag van elke maand.

GEOMETROGRAFIE; OF: WELKE CONSTRUCTIE IS DE EENVOUDIGSTE?

door

M. EILANDER

Onder oude papieren vond ik het volgende. Misschien verdient het toch een beter lot dan de prullemand.

Het lijkt mij niet juist, de eenvoud van een constructie alleen te bepalen door telling van het aantal getrokken rechte lijnen en cirkels. Er is verschil in eenvoud tussen

- a. het trekken van een willekeurige rechte.
- b. het trekken van een rechte voor een gegeven punt.
- c. het trekken van een rechte door twee gegeven punten.

Eveneens tussen

- a. het trekken van een cirkel met willekeurige straal en willekeurig middelpunt.
- b. het trekken van een cirkel met willekeurige straal en gegeven middelpunt.
- c. het trekken van een cirkel met gegeven straal en gegeven middelpunt.

Dr Verrijp¹⁾ negeerde deze verschillen en rekende alleen met het aantal getrokken rechten en cirkels. Evenzo Dr Deknatel²⁾.

Dr Verrijp wilde evenwel het in de passer nemen van een gegeven lijnstuk als het trekken van een cirkel meetellen, wat Dr Deknatel niet doet; deze telt in zijn figuur 6 ook de gevraagde cirkel niet mee.

Het lijkt mij mogelijk, het beter te doen, zonder in de omslachtigheid van de geometrografie van Lemoine³⁾ te vervallen. Hier volgt een beschrijving van de methode, die ik in de klas toepas. De leerlingen stellen altijd hevig belang in een onderzoek naar de eenvoudigste van twee of meer oplossingen van een constructievraagstuk; en de intelligentste onder hen zoeken met genot naar de geometrografisch meest economische uitvoering van een in het boek behandelde constructie.

¹⁾ Euclides 14, 5, 254.

²⁾ Euclides 15, 4; 177.

³⁾ La géometrographie ou l'Art des constructions géométriques (Ass. française pour l'avancement des Sciences). Zie ook: Rouché et de Comberousse, Traité de Géométrie.

Met minder dan 4 symbolen kan men m.i. niet volstaan:

l = het leggen van de lineaal op een gegeven punt.

r = het trekken van een rechte.

p = het prikken van een passerpunt in een gegeven punt of in een willekeurig punt van een gegeven rechte of cirkel.

c = het trekken van een cirkel.

Past men a_1 keer l toe, a_2 keer r , a_3 keer p en a_4 keer c , dan is de eenvoud der constructie bepaald door $H = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$. H kan men noemen het aantal handelingen. De naam E = coëfficiënt van eenvoudigheid, die Lemoine aan de som van zijn coëfficiënten geeft, is minder goed gekozen, omdat de eenvoud groter is naarmate de coëfficiënt kleiner is ¹⁾.

Lemoine noemt $a_1 + a_3$ de nauwkeurigheid van de constructie; hier heeft men echter niet veel aan, omdat de nauwkeurigheid nog van zoveel andere factoren afhangt; zo is bv. de nauwkeurigheid, waarmee het snijpunt van twee rechten bepaald is, afhankelijk van de hoek van snijding.

Bepalen wij nu eens de eenvoud van verschillende constructies.

1. een willekeurige rechte trekken: r .
2. een rechte trekken door een gegeven punt: $l + r$.
3. „ „ „ „ twee „ „ punten: $2l + r$.
4. een cirkel trekken met gegeven middelpunt: $p + c$.
5. een gegeven lijnstuk in de passer nemen: $2p$.
6. een cirkel beschrijven met gegeven middelpunt en waarvan de straal gelijk is aan een gegeven lijnstuk: $3p + c$.
7. van een gegeven punt op een gegeven rechte een lijnstuk uitzetten, dat men al in de passer heeft: $p + c$.
8. de middelloodlijn van een lijnstuk construeren.

Men vindt

$$2l + r + 2p + 2c; H = 7.$$

9. In een punt A van l de loodlijn op l construeren.

a. de gewone constructie; symbool:

$$2l + r + 3p + 3c; H = 9.$$

b. De bekende constructie voor 't geval, dat A aan de rand van het papier ligt:

$$4l + 2r + 3p + 3c; H = 12.$$

c. De constructie, door Dr Deknatel ²⁾ weergegeven:

$$4l + 2r + p + c; H = 8.$$

¹⁾ Hetzelfde kan b.v. gezegd worden van de elasticiteitsmodulus in de natuurkunde.

²⁾ I.c. Dr D. telt de gevraagde rechte (cirkel) niet mee.

10. Door A buiten l een rechte trekken $//l$.

a. Door hoek overbrengen:

$$3l + 2r + 5p + 3c; H = 13.$$

b. Met een ruit:

$$2l + r + 3p + 3c; H = 9.$$

c. De constructie van Dr Deknatel:

$$2l + r + 4p + 2c; H = 9.$$

11. De vierde evenredige tot a , b en c .

a. de gewone constructie, mits men voor de evenwijdigheid $10c$ toepast:

$$4l + 4r + 13p + 5c; H = 26.$$

b. De constructie in een cirkel:

$$2l + 2r + 12p + 6c; H = 22.$$

c.

Willekeurige cirkel:

Maak $AB = a$	$3p + c$
$AC = b$	$3p + c$
$BD = b$	$p + c$
$CE = c$	$3p + c$

Trek AD en BE.

$$4l + 2r$$

Dan is BF de gevraagde; $H = 21$.

d. Trek $O(a)$; O willekeurig	$2p + c$
Maak $AB = b$; $BC = c$	$6p + 2c$
$CD = c$	$p + c$

BD is de gevraagde. $H = 13$.

$$9p + 4c$$

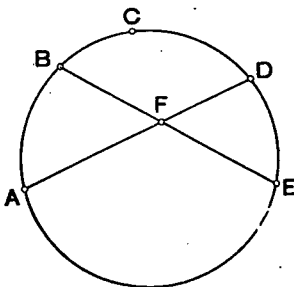


Fig. 1.

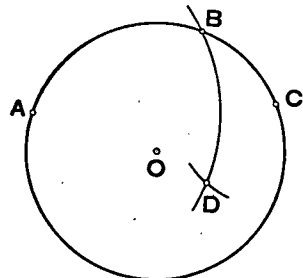


Fig. 2.

Opmerking: deze constructie is verreweg de eenvoudigste, maar zij is niet algemeen, want ze gaat alleen als $2a > b$ en c is. Het is onnodig, BD te trekken.

12. Op een gegeven lijnstuk $BC = a$ het segment te beschrijven dat een gegeven hoek α bevat.

a. Maak $\angle CBD = \alpha$	$2l + r + 5p + 3c$
$BE \perp BD$	$2l + r + 2p + 2c$
middelloodlijn van BC	$2l + r + p + c$
de gevraagde cirkel	$p + 2c$
H = 26.	$6l + 3r + 10p + 7c$

Opmerking: voor de loodlijn BE is dezelfde cirkel B (met willekeurige straal) te gebruiken, die reeds voor het overbrengen van α gebruikt is. Daarom is het hier eenvoudiger, voor de loodlijn BE de constructie 9a dan 9c te gebruiken. Deze zelfde cirkel B(ρ) doet ook weer dienst voor de middelloodlijn van BC. Om de in geometrografischen zin eenvoudigste constructie te krijgen is het dikwijls nodig, van de logische volgorde der onderdelen af te wijken; zo zal men hier na de cirkel B(ρ) onmiddellijk ook C(ρ) trekken, die later voor de middelloodlijn nodig is; en daarvoor moet dus reeds bij het begin eraan gedacht worden, $\rho < \frac{1}{2}a$ te nemen. De geometrografie zet haar detectives vooral aan het opsporen van dergelijke besparingen.

- b. Constructie van Dr Deknatel, die, zoals hij terecht opmerkt, door elke goede leerling gevonden wordt:

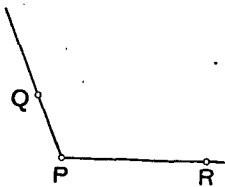


Fig. 3.

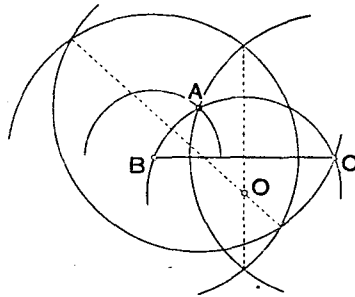


Fig. 4.

Maak een hoek $P = \alpha$.	$2l + 2r + 5p + 3c$
Q willekeurig op een been van P; Q(a)	$3p + c$
B (PQ)	$3p + c$
B (PR)	$3p + c$
C (PR) en A (PR)	$2p + 2c$
middelloodlijnen	$4l + 2r$
O (OB)	$2p + c$
H = 37	$6l + 4r + 18p + 9c$

Opmerking: Tot deze uitkomst geraakt men, wanneer men vasthoudt aan de in de regel gestelde eis: geen constructie *aan de gegevens* uitvoeren; Laat men deze eis vallen, dan is het maken van $\angle P = \alpha$ overbodig en wordt het resultaat

$$4l + 2r + 5p + 3c; H = 25,$$

hetgeen geen noemenswaard verschil maakt met de vorige constructie. Indien echter hulpconstructies aan de gegevens toegelaten worden, is de volgende constructie eenvoudiger:

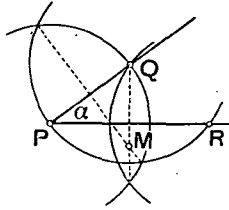


Fig. 5.

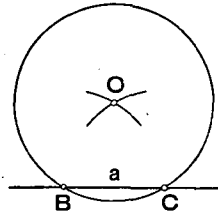


Fig. 6.

- c. Zij $P = \alpha$ de gegeven hoek en $BC = a$ het gegeven lijnstuk. Beschrijf de cirkels

$$P(a), Q(a), R(a)$$

$$5p + 3c$$

De middelloodlijnen van PQ en PR $4l + 2r$

MP is dan de straal r van de gevraagde cirkel. Construeer dus nog

$$B(r) \text{ en } C(r) \text{ en } O(r)$$

$$5p + 3c$$

$$H = 22. \quad \frac{4l + 2r + 10p + 6c}{5p + 3c}$$

13. $x = \sqrt{ab}$.

- a. de constructie waarbij x loodrecht op de middellijn komt krijgt het symbool

$$4l + 3r + 11p + 6c; H = 24.$$

- b. de constructie waarbij x koorde wordt, krijgt

$$4l + 3r + 10p + 5c; H = 22.$$

Hier is het niet nodig, x zelf te trekken.

- c. met raaklijn:

$$2l + 2r + 12p + 7c; H = 23.$$

- d. Met Pythagoras ($4x^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2$)

Men vindt $4l + 3r + 11p + 6c; H = 24.$

e.	Trek een lijn (fig. 7)	r
	$AB = b$	$3p + c$
	$AC = BD = a$	$4p + 2c$
	$DE = CE = a$	$2p + c$
	AE is de gevraagde; $H = 14.$	$r + 9p + 4c$

14. $AB = a$ in u en mr te verdelen.

De meest economische uitvoering van de gewone constructie luidt als volgt:

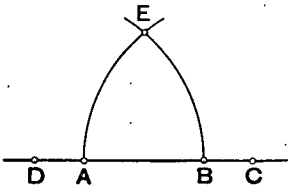


Fig. 7.

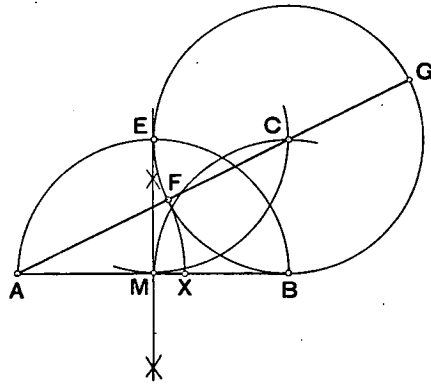


Fig. 8.

Middelloodlijn van AB	$2l + r +$	$2p + 2c$
$M (\frac{1}{2}a)$		$2p + c$
$B(\frac{1}{2}a); E(\frac{1}{2}a); C(\frac{1}{2}a)$		$3p + 3c$
AC	$2l + r$	
A(AF) geeft X en A(AG) geeft X'		$3p + 2c$
$H = 24.$		$4l + 2r + 10p + 8c$

Tweede constructie:

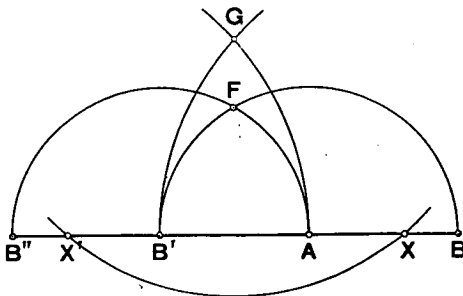


Fig. 9.

$AB' = AB = a = AF$
 $B'(a)$ geeft B'' en F
 $B''(B''A)$ en $B(B''A)$ geven G
 $G(BF)$ geeft X en X'

$H = 13.$

Derde constructie:

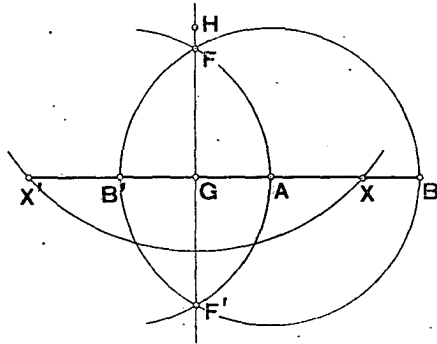


Fig. 10.

$A(a)$ geeft B'
 $B'(a)$ geeft F en F'
 FF'
 $GH = a$
 $H(GB)$ geeft X en X'

$H = 13.$

Vierde constructie:

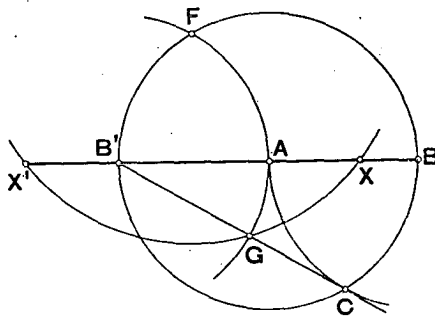


Fig. 11.

$A(a)$ geeft B' en $B(a)$ geeft C
 $B'C$ trekken
 $B'(a)$ geeft F en G
 $F(FG)$ geeft X en X'

$H = 13.$

$$\begin{array}{r}
 2p + c \\
 p + c \\
 3p + 2c \\
 2p + c \\
 \hline
 8p + 5c
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2p + c \\
 p + c \\
 2l + r \\
 p + c \\
 2p + c \\
 \hline
 2l + r + 6p + 4c
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 3p + 2c \\
 2l + r \\
 p + c \\
 2p + c \\
 \hline
 2l + r + 6p + 4c
 \end{array}$$

15. De 4 gemeenschappelijke raaklijnen te construeren van twee cirkels, die geheel buiten elkaar liggen. Voert men de gewone constructie uit zonder op geometrografische eisen te letten, dan komt men tot zoiets als:

$$28l + 14r + 31p + 19c, \text{ met } H = 92.$$

Gaat men zo economisch mogelijk te werk, dan kan het symbool gereduceerd worden tot

$$24l + 12r + 11p + 8c, \text{ met } H = 55.$$

Maakt men de constructie met behulp van de gelijkvormigheids-punten, en wel zo zuinig mogelijk, dan vindt men

$$18l + 9r + 12p + 8c; H = 47.$$

Het is natuurlijk mogelijk, dat ik hier of daar een geometrografische vereenvoudiging over 't hoofd gezien heb.

IETS OVER LEVENSVZERKERINGSWISKUNDE.

door

R. W. SCHIEVEN.

Elk contract van levensverzekering omvat een omschrijving van de uitkering(en), waartoe de verzekeraar zich verplicht, en een omschrijving van de „prijs”, die verzekerde in de vorm van een koopsom of van een periodieke premiebetaling zal hebben te voldoen om het recht op de uitkering(en) te verwerven.

Het kenmerkende van een levensverzekering is, dat de verzekerde uitkering afhankelijk is van het leven van verzekerde.

Deze afhankelijkheid kan hieruit bestaan, dat de datum, waarop de uitkering zal plaats hebben, afhankelijk is van het leven; dit is b.v. het geval bij een verzekering, waarbij een kapitaal bij overlijden zal worden uitgekeerd.

Een andere mogelijkheid is, dat weliswaar de datum, waarop het verzekerde bedrag tot uitkering komt, vast staat, maar als voorwaarde gesteld wordt, dat de uitkering alléén dan zal plaats vinden, indien verzekerde op de uitkeringsdatum in leven is.

Wordt een verzekering tegen premiebetaling gesloten, dan eindigt de premiebetaling in elk geval bij het overlijden van verzekerde, zodat dus ook de premiebetaling afhankelijk is van het leven.

Indien nu voor een bepaalde verzekeringsvorm de premie of koopsom gevraagd wordt, dan volgt uit het voorgaande, dat in de berekening de afhankelijkheid van het leven tot uitdrukking dient te komen.

Om een indruk te krijgen van de methodes, waarvan de verzekeringswiskunde zich bij het berekenen van koopsommen en premies bedient, zullen we voor de volgende concrete vorm van levensverzekering de premie en koopsom berekenen.

Een 30-jarige sluit een verzekering van f 1000,— kapitaal, uit te keren na 10 jaar, mits hij dan in leven is. Jaarlijks gedurende 10 jaar, voor de eerste maal bij het sluiten der verzekering, betaalt hij hiervoor een premie P., m.d.v. dat een premie alleen verschuldigd is, indien verzekerde op de premieervaldag in leven is, zodat dus bij overlijden de premiebetaling automatisch eindigt.

Om tot een oplossing te komen, schakelen we voorlopig de afhankelijkheid van het leven uit. De oplossing komt dan neer op de

beantwoording van de vraag, welk bedrag x jaarlijks gedurende 10 jaar naar een spaarbank gebracht moet worden om aan het einde van het 10e jaar te kunnen beschikken over f 1000,—. We hebben dan alleen te maken met een zuiver spaarcontract en de uitkomst wordt volledig bepaald door de te gebruiken rentevoet. Ter bepaling van x maken we gebruik van het principe, dat er gelijkheid dient te bestaan tussen de prestaties van de bank en inlegger. Om deze beide prestaties van uiteenlopend karakter te kunnen vergelijken, maken we gebruik van het beginsel der „contante waarde” (C.W.) dat ons leert van elk in de toekomst verschuldigd bedrag de momentele waarde te bepalen.

In bijgaand staatje vinden we onder B de C.W. van f 1,—, verschuldigd na resp. 0, 1, 2 ————— 10 jaar berekend op basis van een rentevoet van $2\frac{1}{2}$ %.

	A		B	C
Leeftijd 0	Aantal levenden 100.000	Na jaren	C.W. van een bedrag 1	C.W. der premie P
30	95138	0	1,00000	$95138 \times 1,00000 \times P$
31	94908	1	0,97561	$94908 \times 0,97561 \times ,,$
32	94668	2	0,95181	$94668 \times 0,95181 \times ,,$
33	94418	3	0,92860	$94418 \times 0,92860 \times ,,$
34	94155	4	0,90595	$94155 \times 0,90595 \times ,,$
35	93879	5	0,88385	$93879 \times 0,88385 \times ,,$
36	93589	6	0,86230	$93589 \times 0,86230 \times ,,$
37	93283	7	0,84127	$93283 \times 0,84127 \times ,,$
38	92959	8	0,82075	$92959 \times 0,82075 \times ,,$
39	92616	9	0,80073	$92616 \times 0,80073 \times ,,$
40	92253	10	0,78120	

We vinden nu gemakkelijk, dat de C.W. van f 1000,— over 10 jaar te bepalen f 781,20 bedraagt, terwijl de C.W. van een bedrag x gedurende 10 jaar te betalen 8.97087 x bedraagt, hetgeen gemakkelijk te verifiëren is door van elk bedrag x de C.W. te bepalen en deze te sommen.

Gelijkstelling der beide C.W. geeft de volgende betrekking.

$$781,20 = 8.97087 x$$

dus $x = f$ 87,08.

Keren we nu terug tot ons oorspronkelijk probleem, dan kan de oplossing volgens dezelfde principes gevonden worden als boven, nadat we de afhankelijkheid van het leven hebben ingevoerd.

Om deze in rekening te brengen, maken we gebruik van een sterftetafel. d.i. een uit statistische gegevens samengestelde tafel, die ons leert op welke wijze een bepaalde groep van even oude personen in de loop der jaren uitsterft. In ons land worden dergelijke tafels samengesteld door het Centraal Bureau voor de Statistiek. In kolom A van bijgaand staatje is een deel van een sterftetafel weergegeven. Uitgaande van een groep van 100.000 nuljarigen vinden we het aantal nog levenden na 30, 31 ——— jaar aangegeven achter de leeftijd 30, 31 ——— enz.

Om nu voor de gestelde verzekeringsvorm de premie te berekenen, wordt als volgt geredeneerd.

Stel dat niet één dertigjarige, maar 95138 dertigjarigen (= aantal levenden van leeftijd 30 in de sterftetafel) een dergelijke verzekering sluiten, dan leert de sterftetafel, dat er na 10 jaar van deze groep nog 92253 in leven zijn.

De maatschappij, waarbij de verzekeringen gesloten worden, zal dan moeten uitkeren $92253 \times f 1000,-$, waarvan de C.W. $92253 \times f 781,20$ bedraagt. Hiertegenover staat, dat elk jaar van elk van de dan nog levenden een premie P ontvangen wordt. Zo is het bedrag, dat het eerste jaar ontvangen wordt, 95138 P, waarvan de C.W. 95138 P bedraagt. Het tweede jaar wordt ontvangen 94908 P waarvan de C.W. 94908×0.97561 P bedraagt. Zo kan jaar na jaar het bedrag aan premie-ontvangst en de C.W. hiervan bepaald worden (zie staatje C) — Door sommering van al deze C.W. vinden we als C.W. der te ontvangen premies 843423 P.

Ter bepaling van P hebben we nu

$$92253 \times 781.20 = 843423 P$$

dus $P = f 85,45$.

Indien de verzekering wordt gesloten tegen koopsom, zal, indien we de koopsom K noemen, door de maatschappij een bedrag 95138 K ontvangen worden. Dit bedrag zal weer gelijk dienen te zijn aan de C.W. van de uitkering, dus:

$$95138 K = 92253 \times 781.20$$

dus $K = f 757,51$.

Tot dit voorbeeld zullen we ons beperken, omdat het een voldoende indruk geeft van de methodes, die de verzekeringswiskunde gebruikt om ook voor andere verzekeringsvormen koopsommen en premien te berekenen.

Bij de berekeningen stelden we ons op een „netto” standpunt, m.a.w. opslagen op premie en koopsom ter dekking van de onkosten, die bij het tot stand komen en tijdens de duur der verzekering gemaakt worden, zijn buiten beschouwing gelaten. Het in rekening brengen hiervan vindt volgens dezelfde beginselen plaats als de berekening der netto grootheden; er wordt n.l. voor gezorgd, dat de C.W. der opslagen gelijk is aan de C.W. der onkosten.

Ten slotte dient nog opgemerkt te worden, dat de gevonden resultaten alléén bruikbaar zijn, indien de sterfte plaats vindt zoals de sterftetafel dat aangeeft, en dit is alleen en dan nog bij benadering juist, indien de groep, waarop we de uitkomsten der sterftestatistiek toepassen, voldoende groot is. Het aantal verzekerden dient dus groot te zijn. Maar al wordt aan deze voorwaarde voldaan, dan nog dienen maatregelen genomen te worden tegen afwijkingen. Deze kunnen toevallig, maar ook systematisch zijn. Deze laatste ontstaan b.v. door het niet absolute karakter van een sterftetafel. Vergelijking van een oude en nieuwe sterftetafel laat een aanmerkelijke verlaging der sterftekansen zien. Zet een dergelijke verbetering door, dan zullen pensioenverzekeringen, gebaseerd op de huidige sterftetafel, te lage uitkomsten geven voor de premie, en wordt n.l. langer van het pensioen genoten dan waarop gerekend is. Het aanbrengen van een bepaalde veiligheidsmarge in de berekeningen is dus gewenst. Verzekeringen, waarbij bij overlijden een bedrag wordt uitgekeerd, zullen vooral aantrekkelijk zijn voor minder gezonden; indien dus geen maatregelen genomen worden, zullen de in deze groep verzekerden over het algemeen een hogere sterfte vertonen dan de sterftetafel doet verwachten. Een van de maatregelen tegen deze „selectie” is het vragen van gezondheidswaarborgen. Behalve een veiligheidsmarge t.a.v. de sterftetafel, dient ook bij het bepalen van de te gebruiken rentevoet voorzichtigheid betracht te worden. Steeds dient gezorgd te worden, dat de rentevoet toegepast in de berekeningen zo is, dat ook verwacht kan worden, dat in de toekomst zolang de verzekering duurt, ook werkelijk deze rente gemaakt kan worden.

ONSTOFFELIJKHEDEN IN DE NATUUR.

door

Prof. Dr P. H. VAN LAER.

1. Het zal iedere lezer van dit tijdschrift zijn opgevallen dat men in de laatste decennia in de natuurwetenschappen vaak spreekt van onstoffelijke dingen of verschijnselen. Speciaal wordt over z.g. onstoffelijkheden gesproken in populair-wetenschappelijke geschriften en voordrachten, welke voor een breder publiek een beeld willen geven van de ontwikkeling der moderne physica. Een dergelijke wijze van spreken in een wetenschap, die toch altijd bij uitstek werd beschouwd als de wetenschap van de stof en die tussen de andere wetenschappen in het algemeen uitmunt door de exactheid van formulering en door soberheid van uitdrukking, moet bevreemding wekken. Zelfs al zou het waar zijn dat alleen popularisators van dergelijke vreemde uitdrukkingen gebruik zouden maken (wat zeker niet uitsluitend het geval is), dan nog zou er alle reden zijn tot verwondering. Degenen, die de term onstoffelijk alleen plegen te gebruiken om de, huns inziens onherleidbare, tegenstelling van geest tegenover stof aan te duiden, zullen zonder meer geneigd zijn deze term als onbruikbaar voor de natuurwetenschappelijke vaktaal af te wijzen. Wat zou er immers voor onstoffelijks kunnen zijn in het object der natuurwetenschappen? Materialisten, voor wie de stof de enig mogelijke realiteit is, zullen zich evenmin op hun gemak gevoelen bij het horen van dergelijke uitdrukkingen over onstoffelijkheden in de natuur. Maar iedereen die de waarheid liefheeft zal zich afvragen wat de physicus met een dergelijke terminologie bedoelt. Als hij b.v. straling een onstoffelijk verschijnsel noemt, bedoelt hij dan te zeggen dat het een soort geestesactiviteit is, of zou omgekeerd de functionering van de menselijke geest niets anders zijn dan een soort stralingsverschijnsel? Men ziet: diverse vragen welke door het gebruik van zulke terminologie worden opgeroepen, en die de meeste gebruikers van de term „onstoffelijk” zeker niet bevestigend zullen beantwoorden. Dit alles is zeker voldoende reden om een onderzoek in te stellen naar de betekenis welke de term onstoffelijk heeft in de mond van een physicus.

2. Naar de etymologische betekenis is de term „onstoffelijk” synoniem met „niet-stoffelijk” en geeft hij een ontkenning aan van

iets stoffelijks. Maar wat wordt precies ontkend van het stoffelijke? Het komt er dus op aan na te gaan welke eigenschappen men als karakteristiek voor de „stof” aanziet. Wil men het specifiek-stoffelijke ontkennen, dus datgene wat aan alle stof als stof toekomt en kenmerk is van haar onvolmaakte zijnsstructuur, en waardoor ze dus staat tegenover de hogere zijnsorde van de geest; of wil men slechts ontkennen dat men te doen heeft met een bepaald soort stof, met de stof b.v. waarmee men tot nu toe vertrouwd was? In het eerste geval zou de term onstoffelijk synoniem zijn met geestelijk; in het tweede geval is de term onstoffelijk misleidend, daar hij meer suggereert dan bedoeld wordt. We zullen zien dat we met het laatste geval te doen hebben. Laten we daartoe eens nagaan welke verschijnselen of realiteiten door sommige physici met de term onstoffelijk worden gequalificeerd.

3. In de tijd toen men de bekende verschijnselen van stof en straling meende te kunnen terugbrengen tot locale beweging van kleinste deeltjes der stof en tot locale trilling van deeltjes van de eveneens als stoffelijk beschouwde aether, was er weinig reden om in de physica de term onstoffelijk te gaan gebruiken. Wel werd de aether dan vaak *imponderabele* (= niet-weegbare) *stof* genoemd, in tegenstelling tot de gewone of *ponderabele* (= weegbare) *stof* die zich kenmerkt door massa en gewicht. Dit onderscheid in benaming van de „gewone stof” als ponderabele stof en van de aether als imponderabele stof (welke benaming, naar ik meen, door Lorentz is ingevoerd, in ieder geval door hem werd gebruikt), kan nuttig zijn, en tegen het gebruik ervan is dan ook geen enkel bezwaar. Wel is het afkeurenswaardig, als men, wat tegenwoordig vaker gebeurt, de aether onstoffelijk gaat noemen. Verder bestaat dit probleem natuurlijk niet voor degenen die, m.i. zeer ten onrechte, het bestaan van de aether ontkennen, daar men over de benaming van iets wat niet bestaat natuurlijk niet gaat discussiëren.

Ik wil hier niet gaan onderzoeken hoe men in vroeger eeuwen over de stoffelijkheid van natuurverschijnselen heeft gedacht (het zou voor een historicus van de natuurwetenschappen wel een aardig onderwerp zijn), noch ook moderne beweringen omtrent z.g. „onstoffelijkheden in de natuur” met citaten illustreren. Het gaat om de zaak en niet om personen. Ieder lezer van dit tijdschrift weet welke objecten en verschijnselen men wel met de naam onstoffelijk aanduidt; zo b.v. straling, electriciteit, electromagnetische- en gravitatieverschijnselen.

Vóór de ontdekking van de electronen werd de electriciteit door velen als iets onstoffelijks beschouwd, en na die ontdekking wist

men met de electronen op dit punt ook niet goed raad. Zo spreekt Grimsehl in zijn „Lehrbuch der Physik” bij de beschrijving van het electron van „reine Elektrizität ohne Verknüpfung mit der Materie”, en hij noemt de electronen „nicht-materielle Stoff”, wat natuurlijk een contradictio in terminis is, ook al wordt die contradictie door het gebruik van termen van verschillende taalkundige oorsprong enigszins gecamoufleerd. Als „materiellen Stoff” of kortweg „Materie” beschouwt hij dan stoffen welke uit de chemische elementen of hun verbindingen bestaan. Hij voegt er nog aan toe dat het feit dat men aan niet-materiële stof massa moet toekennen een hevige aanslag betekende op bestaande denkgewoonten, over welke schok men eerst geleidelijk heenkwam toen het inzicht rijpte in de aequivalentie van massa en energie en daarmee duidelijk werd dat „Masse ohne materielles Substrat” iets heel gewoons was.

De hier vermelde opvatting over de onstoffelijkheid der electronen is zeker niet de gangbare geworden. In het algemeen heeft men in latere jaren de electronen beschouwd als bouwstenen van de stof, en dus zelf als stof of materie. Zonder uitzondering werd dan als materie beschouwd alles wat rustmassa heeft, waarbij de rust-massa of scalaire massa dan wel werd aangezien als een maat voor de stoffelijkheid.

4. Het probleem der „onstoffelijkheid” in de natuur kwam echter eerst recht naar voren in de moderne opvattingen omtrent de ware aard van het licht, of in het algemeen van iedere electromagnetische straling. Vroeger werd zulke straling beschouwd als golven of locale trillingen van deeltjes van de aether. De aether werd dan zelf beschouwd als een stoffelijke ruimtevulling, al moest men wel aannemen dat de aetherstof anders geaard was dan de stof der physische lichamen, reden waarom Lorentz de aether dan ook imponderabele stof noemde.

Toen echter bleek dat deze mechanische voorstelling van de straling en van het stralingsveld onhoudbaar was, ging men tamelijk algemeen de straling zien als iets dat geen stof was. Dit komt wel zeer duidelijk tot uiting in de uitdrukkingen, waarmee men de nieuw ontdekte processen van overgang tussen electronen en straling aanduidde. Schematisch kan men deze voorstellen als volgt: 1) positief + negatief electron $\rightarrow$ straling, en 2) straling $\rightarrow$ positief + negatief electron. In het eerste geval ging men spreken van: overgang van stof of materie in straling of energie, in het tweede geval van: overgang van straling of energie in stof of materie. Hieruit blijkt dat men hier een tegenstelling zag tussen stof of materie aan de ene kant en straling of energie aan de andere kant.

De laatste werd dan kennelijk aangezien als niet-stof, als iets onstoffelijks, hetgeen nog duidelijker blijkt uit de uitdrukkingen „dematerialisatie” (= ontstoffelijking) of „annihilatie (= vernietiging) van stof of materie” voor de eerstgenoemde overgang, en „materialisatie (= tot stof making) van straling of energie” of van „creatie (= schepping) van materie” in het tweede geval. Ook het stralingsveld werd gerekend tot de onstoffelijkheden en in het algemeen ieder electromagnetisch veld en het gravitatieveld.

Ik wil hier niet ingaan op de vraag of de genoemde uitdrukkingen, zuiver van fysisch standpunt uit gezien, gelukkig gekozen zijn. Mijns inziens zijn ze dat zeker niet. Het enige, wat de experimenten leren, is een zekere gelijkwaardigheid tussen *massa* en energie, zo dat een overgang tussen beide mogelijk is; maar hierdoor is niet aangetoond dat *materie* en *energie* gelijkwaardig zijn. De experimenten geven aan deze veronderstelling geen steun, integendeel; en ook op wijsgerige gronden moet men m.i. deze gelijkwaardigheid verwerpen. Maar nog eens, deze kwestie doet hier niet ter zake.

De vraag, waar het hier over gaat, is, of men terecht straling en energie, en de electromagnetische en gravitatievelden qualificeert met de naam immaterieel of onstoffelijk, daarmee suggererend dat men hier te doen heeft met een fysische realiteit die geen stof is. Meent men dat het verschil ligt in het al of niet bezitten van rust-massa, waarom dan niet de reeds gebruikelijke term „imponderabele stof” behouden? Of is het slechts een voorlopige term om een vooralsnog onbekend terrein aan te duiden? Is het dan wel verantwoord om een term te gebruiken die zozeer aanleiding geeft tot misverstand? Het zijn vragen die roepen om bezinning en die een stimulans zijn om te zoeken naar een oplossing van de gerezen moeilijkheden door een nadere precisering der termen.

5. Uit het voorgaande blijkt de noodzakelijkheid om te zoeken naar een duidelijk kenmerk dat aan de stof, en aan al datgene dat tot de stoffelijke orde behoort, steeds toekomt, en uitsluitend aan de stof toekomt, zodat de realiteit, die we geest of geestelijk noemen, zich inderdaad onderscheidt van de realiteit, die we stof noemen, door het streng bewijsbaar gemis van dat kenmerk. Alleen in dat geval hebben we een streng en universeel criterium gevonden dat het ons mogelijk maakt een onderscheid te maken tussen stof en niet-stof.

Zulk een universeel criterium is natuurlijk niet te vinden in accidentele kenmerken als kleur, hardheid, elasticiteit, elektrische en magnetische eigenschappen. Deze komen niet aan alle dingen, die we gewoon zijn stof te noemen, toe, en bij eenzelfde ding niet altijd

op gelijke wijze. Ook het gewicht kan niet dienen als criterium. Het hebben van gewicht is afhankelijk van de aanwezigheid in een gravitatieveld, en dan nog van de bewegingstoestand. Een vrij vallend lichaam heeft geen gewicht. Fundamenteler dan het gewicht is de *massa*. Het gewicht in een bepaald gravitatieveld is afhankelijk van en evenredig met de zware massa, die in de gravitatieformule van Newton optreedt. Ook komt aan de gewone stof de z.g. trage massa toe, die een maat is voor de weerstand die een lichaam biedt aan snelheidsverandering. De gewone stof blijkt steeds zware en trage massa te hebben, ook als ze in rust is. Daarom spreekt men van *rustmassa*. Trage en zware massa blijken aan elkaar gelijk te zijn en (in een bepaald gravitatieveld) evenredig aan het gewicht. Het gewicht kan dus gelden als een kenmerk van lichamen met rust-massa, zodat men de gewone stof terecht kan noemen „ponderabele stof”, nl. stof met gewicht en met rustmassa.

Bij de z.g. „imponderabele stof” als aether, electromagnetische en gravitatievelden, en ook bij de straling kan men geen rustmassa constateren. Toch zijn de bij de straling behorende stralingsquanta equivalent met een zekere hoeveelheid massa (volgens de bekende formule $E = mc^2$), en zulk een *bewegend* stralingsquantum ondervindt de invloed van een gravitatieveld. Het heeft dus zware massa en gewicht en is dus ook ponderabel.

Uit het vorige volgt: beschouwt men rustmassa en rustgewicht als een criterium, dan valt de erwaarbare wereld uiteen in de wereld der „gewone stof” en die der straling. Maar tevens is duidelijk dat dit criterium niet gelukkig is, want straling, zoals ze in werkelijkheid is, nl. *bewegende* lichtquanta, heeft wel massa en gewicht, en dan vervalt derhalve op dit punt het onderscheid. Zowel de gewone stof als de straling hebben massa en gewicht, en, als deze als eigenschappen van de stof beschouwd worden, dan heeft het dus geen zin om de straling onstoffelijk te noemen, alleen om de reden dat ze in de toestand, waarin ze krachtens haar eigen aard per se niet kan voorkomen, geen massa en gewicht heeft.

Overigens zijn er fysische argumenten te over om straling even goed als de „gewone stof” met de qualificatie stoffelijk te betitelen. Er zijn immers diverse verschijnselen welke duidelijk een verwantschap tussen beide aantonen. Zulke verschijnselen zijn b.v.: de overgang van electronenmassa in straling en omgekeerd; de wisselwerking tussen de „gewone stof” en straling, b.v. bij photo-effect, radioactieve processen, compton-effect, roodverschuiving bij straling uit een sterk gravitatiecentrum, kromming van straling in een gravitatieveld, etc.; het toekomen van impuls, energie en massa

aan de stralingsquanta, op gelijke wijze als aan materiedeeltjes, etc. A. Haas kon in zijn boek „Atomtheorie” dan ook terecht zeggen: „Durch die Fortschritte der Physik wurden so die hypothetischen Lichtquanten allmählich zu materiellen Korpuskeln des Lichtes”.

Uit het voorgaande is nu wel duidelijk dat er, zuiver fysisch gesproken, geen argumenten zijn om sommige fysische realiteiten zo tegenover de andere te stellen, dat men de tegenstelling redelijkerwijze met de contradictoire termen stoffelijk-onstoffelijk zou kunnen kwalificeren. Integendeel zuiver fysische argumenten pleiten er voor om in het uitgebreide terrein der physica meer eenheid te zien, en het object der physica te vereenzelvigen met de „stoffelijke natuur”.

6. In plaats van gebruik te maken van fysische grootheden, welke vaak moeilijk te constateren zijn en tot allerlei misverstand aanleiding kunnen geven, lijkt het voor het vaststellen van het onderscheid stoffelijk-onstoffelijk beter een eigenschap te zoeken die duidelijk bij al het stoffelijke (ponderabel of imponderabel) te vinden is, en welke zeker ontbreekt bij die realiteiten welke wij geest of geestelijk noemen. Bestaat een dergelijk kenmerk, dan is daarmee een criterium gegeven om het stoffelijke te onderscheiden van het onstoffelijke of geestelijke. Wij menen dat zulk een duidelijk en universeel criterium te vinden is in de aanwezigheid of afwezigheid van de *uitgebreidheid*.

Nu staat men voor de moeilijkheid dat het niet mogelijk is een definitie te geven van uitgebreidheid, daar er geen termen te vinden zijn, welke het begrip uitgebreidheid verduidelijken zonder op de een of andere wijze ditzelfde begrip in te sluiten. Deze onmogelijkheid van definiëren is echter geen zwakheid, maar is te danken aan het feit dat we hier te doen hebben met een van de meest fundamentele begrippen, voor het verkrijgen waarvan de meest elementaire ervaring voldoende is. Men kan echter het begrip uitgebreidheid op verschillende wijzen omschrijven, b.v. als die eigenschap waardoor iets delen heeft die buiten elkaar liggen, of waardoor iets een meetkundige vorm kan hebben, of datgene wat de voldoende en noodzakelijke grond is voor deelbaarheid. Maar ook zonder zulke omschrijvingen die, zoals gezegd, niet aan de eisen van een logische definitie voldoen, zal dit begrip aan ieder duidelijk zijn. Ik zal er hier dus niet nader op ingaan.

7. Dat de gewone stoffelijke dingen, die ons omringen, uitgebreid zijn, hoef ik niet te betogen. Uit de zintuiglijke waarneming ervan hebben we immers het begrip uitgebreidheid gekregen. De eigenschappen, welke we met onze diverse zintuigen waarnemen, als

vorm, kleur, hardheid, elasticiteit, etc., veronderstellen de uitgebreidheid. Een diepergaand fysisch onderzoek leert ons ook de kleinste deeltjes van de „stof”, b.v. de protonen, neutronen, elektronen, als uitgebreid erkennen. Het zijn immers geen echte puntladingen of puntmassa's, maar corpuskels met bepaalde afmetingen en met een ruimtelijke structuur. Ook zien we onmiddellijk in dat electromagnetische- en gravitatievelden een uitgebreide realiteit zijn. Dat ze uitgebreid zijn in de wiskundige beschrijving kan natuurlijk niemand ontkennen, maar sommigen willen in deze velden geen realiteit zien. Zulk een opvatting is echter onhoudbaar. De potentiaalgetallen en vectoren, waarmee men die velden beschrijft, geven toch reële eigenschappen, toestanden of activiteiten aan (die ruimtelijk uit elkaar liggen), maar dergelijke reële eigenschappen, toestanden en activiteiten kunnen toch niet op zichzelf bestaan, maar eisen noodzakelijk een reëel substraat, een reële zelfstandigheid welke die eigenschappen heeft, in die toestanden verkeert of tot dergelijke activiteiten in staat is. Die zelfstandigheid moet dan natuurlijk uitgebreid zijn evenals het veld dat er in rust. Men kan dit uitgebreid substraat zeer geschikt aether noemen in de betekenis welke Lorentz er aan gaf.

Resten nog voor een laatste onderzoek de z.g. stralingsquanta. Bij deze kan men niet met fysieke middelen aantonen dat ze zelf afmetingen of een ruimtelijke structuur hebben. We zullen dus moeten nagaan of er andere eigenschappen aanwezig zijn, welke zelf noodzakelijk de uitgebreidheid veronderstellen. Inderdaad zijn er zulke kenmerken, en wel de relaties van contact en plaats ten opzichte van de „gewone stof” en de mogelijkheid om ten opzichte van deze stof metingen aan stralingsverschijnselen uit te voeren. Deze eigenschappen gaan samen. De plaatsrelatie immers ontstaat door contact met een ander uitgebreid ding, en bij verandering van dit contact spreekt men van verandering van plaats of beweging. De mogelijkheid om metingen te doen, speciaal lengte-metingen, veronderstelt noodzakelijk een of ander contact met een meetinstrument, en zeker uitgebreidheid, want zonder deze zou een dergelijke meting geen enkele zin hebben.

Als de stralingsquanta dus in contact kunnen komen met de „gewone stof”, als men ze kan localiseren of hun beweging kan beschrijven ten opzichte van de gewone stof, dan moeten ze met deze stof hetzelfde karakter van uitgebreidheid hebben. Welnu, aan deze voorwaarden is ten volle voldaan. De stralingsquanta ontstaan door processen in de atomen van de „gewone stof”, waardoor vooreerst een verwantschap met deze stof blijkt, maar ook de plaats van hun

ontstaan bekend is. Door bepaalde hulpmiddelen kan men de richting van hun beweging vaststellen. Ze kunnen de „gewone stof” treffen en door de processen, welke zij bij hun contact met deze stof tweeebrengen, maken zij de plaats van hun aankomst bekend (b.v. photo-electrisch effect) en vaak ook de richting van hun beweging. De impuls, die men aan de stralingsquanta moet toekennen, is een vectorgrootheid, waarvan de richting wordt vastgelegd ten opzichte van de gewone stof. Dringen de stralingsquanta in een atoomkern, dan kunnen ze daar kernprocessen doen ontstaan. De wederzijdse (gedeeltelijke) ondoordringbaarheid, die blijkt uit de mogelijkheid van botsing en van overdracht van energie en impuls, veronderstelt eveneens het uitgebreid karakter van de botsende elementen. Een bundel stralingsquanta gedraagt zich als een golf met meetbare golflengte. Als zulk een golf door een ponderabel medium gaat, treedt er een meetbare breking en buiging op en een verandering van de voortplantingssnelheid. Het meten van deze grootheden veronderstelt een uitgebreidheid waarin ze bepaald en ten opzichte waarvan ze gemeten kunnen worden. Het feit dat de physici voor het beschrijven van de stralingsverschijnselen, op gelijke wijze als bij verschijnselen in de „gewone stof”, gebruik moeten maken van een coördinatensysteem, is een niet te weerleggen argument voor het uitgebreid karakter van de stralingsverschijnselen.

Uit het vorige blijkt dus wel afdoende, dat ook de z.g. „onstoffelijkheden in de natuur” gekenmerkt zijn door de uitgebreidheid die de universele eigenschap was van de „gewone stof”. Daar er ook op fysische gronden geen reden is om een scherpe scheiding te maken tussen stralingsverschijnselen en de andere verschijnselen, ligt het voor de hand ook de stralingsverschijnselen stoffelijk te noemen, en de *uitgebreidheid* aan te zien als *universeel en fundamenteel kenmerk van de stof*, als specifieke stoffeigenschap, zodat men mag zeggen: *het stoffelijke is uitgebreid*, en: *het uitgebreide is stoffelijk*, zonder nochtans hiermee een identiteit te willen aanduiden in de zin van Descartes.

Een stoffing is een op zichzelf bestaand ding, dat als wezens-eigenschap (voortkomend uit het eigen wezen van de stof) de uitgebreidheid heeft. De uitgebreidheid is gemeenschappelijk aan alle stoffelijke dingen, welke ook verder hun andere eigenschappen mogen zijn, als hardheid, elasticiteit, vorm, kleur, plaatsrelatie, en dergelijke. Deze veronderstellen alle de fundamentele eigenschap der uitgebreidheid, en zijn zelf in zekere zin uitgebreid. Om deze reden ligt het voor de hand ook de eigenschappen der stoffingen

zelf stoffelijk te noemen. Ze zijn wel zelf geen *stofdingen*, maar toch iets aan of van de stof.

Ook al zouden de stralingsquanta geen zelfstandige dingen, geen stofdingen zijn, maar slechts bepaalde energieconcentraties of iets gelijks in de aether, dan nog zou al het bovengezegde omtrent het uitgebreid karakter er onverminderd op van toepassing zijn. In ieder geval hebben we dus ook bij de stralingsverschijnselen te doen met iets in de stoffelijke orde. Hetzelfde geldt natuurlijk mutatis mutandis van alle electromagnetische en van de gravitatieverschijnselen.

8. De uitgebreidheid is het geschikte criterium om de grens tussen stoffelijk en onstoffelijk te leggen, omdat ze aan al het stoffelijke en alleen aan het stoffelijke toekomt. Aan de zelfstandigheden, die men traditioneel met de naam geest of geestelijk betitelt, komt deze eigenschap zeker niet toe. Zij hebben een hogere graad van zijn met de positieve eigenschap der enkelvoudigheid of geestelijkheid, waarvan men het begrip kan verduidelijken met de negatieve term *niet-uitgebreid*. Om de geestelijkheid of onstoffelijkheid van de menselijke ziel te bewijzen maakt men dan ook gebruik van argumenten, welke feitelijk de niet-uitgebreidheid aantonen van haar specifieke activiteiten: denken en willen. Bij denk- en wilsacten is er vooreerst niets wat op uitgebreidheid wijst, geen bestaan uit delen, geen ruimtelijke structuur, geen contact, localisatie of meetrelatie ten opzichte van stoffelijke dingen, maar verder wijzen de mogelijkheid van zelfreflexie bij de denk- en wilsacten en het bij die reflexie erkende karakter dier acten op een positieve volmaaktheid, welke men alleen met de negatieve term niet-uitgebreidheid kan aangeven. Het zou mij te ver voeren en dit artikel te lang maken, als ik op dit punt hier uitvoeriger zou ingaan. Overigens kan men dergelijke argumenten vinden in boeken over wijsgerige anthropologie of rationele psychologie.¹⁾

In het kenmerk der uitgebreidheid hebben we dus inderdaad een gemakkelijk kenbaar criterium gevonden om het stoffelijke van het onstoffelijke te onderscheiden, een algemeen geldend criterium dat ons niet in de steek laat. *Het uitgebreide is stoffelijk, het niet-uitgebreide is niet-stoffelijk of geestelijk.*

9. Na de voorafgaande uiteenzetting mogen we nu wel de conclusie trekken dat de *physica* in al haar onderdelen een *wetenschap is van de stof*. Er zijn geen onstoffelijkheden in de natuur, tenzij de

¹⁾ Men zie b.v. J. Th. Beysens: *Algemene zielkunde*, Deel III; 2e druk, b. 43—64; Bussum 1920.

menselijke ziel, als men tenminste in het begrip natuur ook de mens wil insluiten. Ieder gebruik van het woord onstoffelijk, voor welk fysisch verschijnsel dan ook, is misplaatst en misleidend, en getuigt van een gebrekkige visie op het probleem van stoffelijkheid en onstoffelijkheid.

Men mag de physici natuurlijk niet het recht ontzeggen nieuwe termen in te voeren voor vroeger onbekende dingen, of eventueel bestaande termen te gebruiken in een gewijzigde betekenis, maar in het laatste geval dan toch liever geen termen die krachtens hun etymologische betekenis per se misleidend moeten werken. Zo hoort het woord onstoffelijk naar mijn mening in geschriften over natuurwetenschap niet voor te komen, tenzij om te zeggen dat het er niet thuis hoort.

WISKUNDE EN PSYCHOTECHNIEK.

door

W. F. VAN PEYPE.

Het psychologisch onderzoek naar de mathematische begaafdheid heeft de laatste jaren methodische vorderingen gemaakt, maar er is nog steeds een zekere vermetelheid nodig van de psycholoog om onafhankelijk van de leraar een prognose te geven op diens vakgebied, want de tijd is nog niet rijp voor een uitvoerige publicatie omtrent de gebezigde methoden en de bereikte resultaten. De huidige stand van het onderzoek bij de Nederlandsche Stichting van Psychotechniek kan in het kort als volgt worden gekenschetst.

De proefleider, die met het onderzoek naar dit speciale vakgebied is belast, is behalve psycholoog ook mathematicus, zodat hij gewend is zowel om zelf in mathematische vormen te denken, alsook om de structuur van een gedachtengang te analyseren. Zijn onderzoek is ingebed in een algeheel psychologisch onderzoek, waarbij dus ook andere aspecten van de intelligentie en van de persoonlijkheid — bijv. rijpheid, vitaliteit, interessen en toewijding — aan de orde komen. Wat de prognose voor de middelbare school betreft is er geen speciale begaafdheid voor de wiskundevakken nodig om het einddiploma te kunnen behalen, maar kan men volstaan met te constateren, dat geen bijzondere hinderpalen de ontwikkeling van het denken juist op dit gebied in de weg staan, wanneer een goede algemene intelligentie en behoorlijke ijver aanwezig zijn.

Terwijl de psycholoog uiteraard bij de leraar in het nadeel is in zoverre hij zijn proefpersoon niet gedurende een langere periode ter beschikking heeft, kan hij zich althans gedurende het onderzoek intensiever met hem bezighouden dan de leraar in de klas. Bovendien is de observerende houding een geheel andere dan de docerende: men kan natuurlijk niet goed doceren zonder zijn leerlingen te observeren, maar het observeren lukt beter wanneer didactische en paedagogische motieven ontbreken. Tenslotte krijgt de psycholoog, evenals de leraar, op den duur de beschikking over een groot ervaringsmateriaal — zij het andersoortig —, en een zekere feeling voor wat leerlingen van een bepaald ontwikkelingsniveau moeten kunnen, en welke aspecten voor de prognose van belang zijn. Uitwisseling van hun verschillende ervaringen kan voor de psycholoog en de leraar beiden nuttig zijn. Hiertoe wil dit artikel bijdragen.

De fenomenologie van de wiskunde — de studie dus van de betekenis en de eigenaardigheid van de wiskunde voor het individu, dus in psychologische zin — is in opbouw. De statistische bewerking van wat in de testsituatie aan het licht is gekomen, de correlatie met de schoolcijfers en de schoolloopbaan moet nog geschieden. Om de gegeven prognose in het individuele geval goed te kunnen verifiëren zouden de didactische gaven van de leraren bekend moeten zijn, hetgeen slechts bij uitzondering min of meer het geval is.

De proefsituatie onderscheidt zich niet alleen van de les, omdat er niet gedoceerd wordt, maar ook van proefwerk en schoolbeurt doordat de gegeven vraagstukken niet beogen mede te onderzoeken of een bepaalde stof gekend wordt, maar uitsluitend in hoeverre een bepaalde veronderstelde technische vaardigheid aanwezig is, hoe de individuele aanpak is, en in hoeverre de proefpersoon ook begrijpt wat hij doet. De aard van de fouten is een belangrijk gegeven.

Op het gebied van de stelkunde is ons inziens baanbrekend werk verricht door Johannot. (*Le raisonnement mathématique chez l'adolescent*). Welke bedenkingen men ook moge hebben tegen de school van Piaget, de vraagstukjes door Johannot opgesteld zijn ons zeer bruikbaar gebleken bij het testonderzoek, en zijn conclusies kunnen wij door eigen onderzoek van leerlingen van middelbare scholen voor een goed deel onderschrijven. Ook wij vonden volgende obstakels om de algebra onder de knie te krijgen:

Er ontbreekt vaak veel aan het rekenen; de hoofdbewerkingen zitten er niet goed in, vooral het delen als reciproke bewerking van het vermenigvuldigen, en speciaal als er breuken bij te pas komen.

Het gelijktaken heeft slechts een vage en soms wisselende betekenis. De leerlingen begrijpen vaak niet, dat de letters in de algebra getallen voorstellen, waarmee op dezelfde wijze gerekend kan worden als met andere getallen. Zij lezen een algebraïsche vergelijking niet als een volzin, waarin een oordeel wordt uitgesproken, en de regels, die bij het oplossen van een vergelijking in acht moeten worden genomen, zijn voor hen vaak een soort van verkeersregels, waarvan de diepere zin hen ontgaat.

Het feilloos kunnen maken van vraagstukken berust soms op een technische vaardigheid, die verkregen is zonder begrip of zelfs ten koste daarvan. Zolang zij niet door de mand vallen, kunnen dergelijke leerlingen misschien hun cijfer redden; maar bij gebrek aan overeenstemming van hun langs algebraïsche weg verkregen resultaat en het gezond verstand trekken zij het laatste in twijfel.

Andere leerlingen zijn heel goed in rekenen, zowel cijferen als „redeneersommen”, maar nog niet rijp voor de abstract-formele

gedachtengang van de algebra. Zij leren de techniek niet, omdat zij het begrijpen willen, of blijven daarmee slechts aarzelend werken. Soms schakelen zij de algebra nog in pour acquis de conscience, nadat zij feitelijk langs rekenkundige weg het vraagstuk reeds hebben opgelost. Hun geval is niet hopeloos, maar wel hebben zij goede kans op een slecht cijfer.

Bij de lezing van Prof. van Lennep voor de Vereniging van Leraren was er veel belangstelling voor de concrete voorbeelden uit de psychotechnische praktijk. Daarom zullen wij dit artikel met de bespreking van enkele van dergelijke voorbeelden besluiten. Wij kiezen daarvoor één van de vraagstukjes van Johannot, dat luidt als volgt:

„Ik heb een getal in mijn gedachten. Daarvan neem ik de helft, en daar tel ik zes bij op. Dan krijg ik $5/6$ van het oorspronkelijke getal. Zou je kunnen uitrekenen welk getal dat is?” Pp heeft potlood en papier ter beschikking.

Eerst een paar „gezond-verstand-oplossingen”: Een matroos van 22 jaar, die alleen lagere school heeft gehad en dus alleen de rekenkundige techniek beheerst, schrijft op:

6

$3/6$ $5/6$, en zegt: ...” ’t getal is dan $2/6$, ... 18! ... 18! (wijzend naar de getallen) ... plus 6 is $5/6$. $3/6$ is de helft. Dus 6 is $2/6$. Dan is $1/6$ gelijk 3. 6 maal 3 is 18. De helft is 9; plus 6 is 15. En dat is $5/6$ van 18.”

Het tweede geval is van een leerling van een 2e klas van een middelbare school (14 jaar). Hij schrijft op: $2/6 = 6$. $1/6 = 3$. 18. De probleemstelling is goed. Het inzicht komt direct en met volkomen zekerheid. Het opstellen van de vergelijking heeft hij niet nodig, en hij zou dat misschien ook niet kunnen. Formeel zijn de formules niet in orde. Deze leerling had een laag cijfer voor algebra.

Nu twee voorbeelden van een oppervlakkige beheersing van de algebraïsche techniek, bij ontbreken van een goed begrip.

Een proefpersoon van 23 jaar met diploma Mulo B schrijft op: $\frac{1}{2}x + 6 = 5/6$. Gevraagd de opdracht te herhalen, doet hij dat goed; ... o ja ... $5/6$ van het getal ... Dan volgt:

$$\frac{1}{2}x + 6 = 5/6 x$$

$$3x + 36 = 5x$$

$$36 = 2x$$

$$x = 18.$$

De proefleider vraagt: „Is dat goed?” ...” ’t Kan ook —18 zijn. ± 18 . Want x is een onbekend getal.”

—„Wat is dat dan?” ...„dat is, ... dat is ... DE ONBEKENDE!”

Een leerling van een 3e klas (14 jaar) is zwak in wiskunde. Hij

schrijft op: 3, 6. $6 = 5/6 \times 9$. En zegt verrast: „Het komt niet uit!” De analyse van zijn gedachtengang leert, dat hij de opdracht niet begrepen heeft en zó opgevat, dat als men van een willekeurig getal de helft zou nemen en daarbij 6 optellen, het resultaat met $5/6$ vermenigvuldigd het oorspronkelijke getal weer zou opleveren. Hij probeert dit met het getal 6, het enige gehele getal, waarover gesproken is. Pl. zegt: „Maar het gaat om een onbekend getal, een getal, dat ik nog niet weet!” Antwoord: „Mag IK het ook niet weten?” Hij wil een ander getal willekeurig kiezen. Pl.: „Zou het niet algebraïsch kunnen?” *Daarna wordt het vraagstuk vlot en goed algebraïsch opgelost.* Pl.: „Waarom moet je eigenlijk het teken veranderen als je een term naar het andere lid brengt?” Antwoord: „Als er aan de éne kant iets wordt *opgeteld*, moet er aan de andere kant iets worden *afgetrokken*. Anders wordt het verschillend.” — „Maar je telt het er toch niet bij?” — „Oorspronkelijk wél. Anders krijg je een andere einduitkomst.” (Commentaar overbodig).

Een leerling van een 2e klas (14 jaar), met een 7 voor algebra, werkt als volgt:

$$\frac{1}{2}a + 6 = 5/6 a$$

$$3a + 6 = 5a$$

$$3a + 5a = 6$$

$$8a = 6$$

$$a = \frac{3}{4}$$

Proefleider: „Hoe kom je te weten of dat goed is?” — „Door 5 delen: dan krijg je $1/6$ deel.” — „Wat moet je door 5 delen?” — „Die $3/4$. En dat $\times 6$. Dan heb je het getal weer.”

Het opstellen van de vergelijking gaat goed, waarbij opvalt dat Pp de onbekende niet x noemt, maar a . Het kan zijn, dat dit minder „griezelig” wordt gevonden: het is ook mogelijk, dat hij dat op school zo heeft geleerd. In elk geval zijn er ook andere tekenen van onzekerheid: stapje voor stapje wordt de vergelijking uitgewerkt, zonder dat daardoor fouten worden vermeden. Alleen de noemers van de breuken worden weggewerkt, het gehele getal 6 wordt niet vermenigvuldigd. Bij het overbrengen van termen naar het andere lid wordt het teken niet veranderd. Tenslotte blijkt ook het symbool a geen omschreven betekenis te hebben. De wijze, waarop de proef op de som wordt genomen, schijnt erop te wijzen dat a uiteindelijk niet het getal zelf voorstelt, maar $5/6$ daarvan. Over middelen om zijn resultaat werkelijk te verifiëren, beschikt Pp niet.

Tenslotte een voorbeeld van een leerling van een 2e klas (15 jaar), met een 6 voor algebra. Hier ontbreekt elk inzicht in de bouw van de algebraïsche volzin. Pp schrijft op:

$$\frac{1}{2} + x = 65$$

$$\frac{1}{2}x = 65$$

$$x = 32\frac{1}{2}.$$

Bij herhaling van de opdracht komt er:

$$\frac{1}{2}x + 6 = 5/6.$$

Proefleider: „5/6 van het getal.”

$$\frac{1}{2}x + 6 = 5/6 x$$

$$\frac{1}{2} + 6 = 5/6 x$$

$$6\frac{1}{2}x = 5/6.$$

Bij deze voorbeelden willen wij het voorlopig laten. De algemene indruk bij het testonderzoek is, dat bij de leerlingen van de 2e klas van de middelbare school de combinatie van een goede rekentechniek met een goede algebraïsche techniek (in zoverre het gaat om het opstellen en oplossen van een dergelijke eenvoudige vergelijking) en van een helder inzicht zeldzaam is.

EEN VOORSTEL AAN HET MATHEM. CENTRUM

door

Dr L. CRIJNS.

Naar aanleiding van de artikelen van Prof. Freudenthal, Dr. Koksma en Dr. Lips, vraag ik mij af, of niet de tijd gekomen is, een beroep te doen op 't Mathem. Centrum; vooraf mogen enige opmerkingen gaan (bij Euclides 26 Nos 5, 6).

1. Met de kritiek van de heer Dr. Lips ga ik niet in allen dele accoord.

Met: meetbare of rationale of lineaire factoren wordt bedoeld: meetb., ration., lin. in de argumenten x of x en y enz. met voorbijzien van de (reële) coëfficiënten.

$(x + \sqrt{2} + 1)(x - \sqrt{2} + 1)$ en $(x + y\sqrt{3} + 2)(x - y\sqrt{3} + 2)$ b.v. zijn toch ontbindingen in meetbare enz. factoren. De vorm $x \log 2$ wordt toch, meen ik, beschouwd als een *algebraïsche* functie (v.d. 1e graad), ondanks 't optreden van de transcendente coëfficiënt.

In 't algemeen: betreffende 'n functie wordt soms opgegeven, uit welke voorraad de waarden van 't argument moeten genomen worden, zelden geschiedt dit wat aangaat de coëff. En in zover geen voorschrift gegeven wordt omtrent x en (of) de coëff., in zover zijn de waarden hiervoor te kiezen uit 't (commutatieve) lichaam R der reële getallen; à *priori* staan *alle* getallen van R ter beschikking, maar de aard van 't vraagstuk beperkt vaak vanzelf 't gebied tot 'n deelverzameling van R .

Vervangt men dus op blz. 298 (E. 26, 5/6) inderdaad, zoals dr. L. voorstelt, $-3y^2$ door $-2y^2$, dan lukt de ontbinding nog wel degelijk; alleen zal in de factoren $y\sqrt{17}$ optreden.

2. Het woord „misleidend” in de titel wekte bij mij de verwachting, dat de hr. L. in 't vaarwater zou komen van de hr. K. Ik meen met 't volgende wel in dat vaarwater te zijn (bij Euclides 25 No. 6, blz. 318 en volg.).

Bij 'n vraagstuk als „Bewijs, dat er geen enkele reële waarde van m bestaat, waarvoor de vierk. verg. $x^2 - (2m + 4)x + 2m^2 - 4m = 0$ twee negatieve wortels heeft; bepaal ook de grootste waarde, die 'n wortel kan bereiken”, staan voor m even goed als voor x à *priori* alle elementen van R ter beschikking. Dus bestaat er geen enkele reden, waarom voor die getallen verschillende streken van 't alfabet

worden afgezocht. Zodat (ongewilde) misleiding vermeden wordt, als we de gegeven betrekking schrijven als

$$x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 4y = 0.$$

Wil men vasthouden aan „vierkantsvergelijking”, dan moet 't, dunkt mij, aldus gezegd worden: denkt men aan y (m) een bepaalde waarde toegekend, dan staat er een v.v. in x ; aan een andere waarde van y beantwoordt een andere v.v. in x , enz.; omgekeerd: geeft men aan x een bep. waarde, dan heeft men te doen met een v.v. in y enz.

Ook in de opgave-vragen zelf kunnen x en y (of m) zonder bezwaar verwisseld worden.

Hij, die vertrouwd is met analytische meetkunde, ziet onmiddellijk in, dat hij te doen heeft met 'n ellips-vraagstuk.

3. Niet stelselmatig genoeg wordt er m.i. voordeel getrokken van aan de oplossing voorafgaande beschouwingen bij 'n voorgesteld vraagstuk.

Eerste voorbeeld: index. H.B.S. 1950, $x - 2 + {}^3\log(3^x - 2) = {}^9\log 49$.

Behalve dat x groter moet zijn dan 'n getal tussen $\frac{1}{2}$ en 1, ziet men met een oogopslag, dat met x de waarde v. d. functie in 't 1e lid toeneemt (als men wil: monotoon toenemende f .); voor $x = 1$ is haar waarde -1 ; voor $x = 2$ vinden we ${}^3\log 7 = {}^9\log 49$. Dus is $x = 2$ de oplossing.

Zo levert ook bij $\sqrt{x-4} - \sqrt{8-x} = 2$ de voorbeschouwing op zich de oplossing $x = 8$, mits men ook uitdrukt, dat $\sqrt{x-4} \geq 2$ moet zijn.

In dit verband moet ik 'n opmerking maken over blz. 299 tweede helft l.c. *Vóórdat* gesproken kan worden over D, dient vastgelegd te zijn: a (bekend of onbekend) $\neq 0$; immers ingeval $a = 0$, is de vorm lineair in x en dus van D geen sprake. Zouden a en c beide nul zijn, dan krijgt men voor $b \neq 0$ te doen met 'n vierterm, waarvan ook de schoolboeken leren, dat zijn ontbinding alleen mogelijk is bijaldien $b f - 2 d e = 0$, zoals natuurlijk ook $H = 0$ leert.

Eveneens geeft 'n woord *vooraf* opheldering bij beide voorbeelden op blz. 245 l.c. (prof. Fr.), in zover het de kwestie overvoert in de vertrouwde sfeer van de vierk. verg. Beide functies n.l. zijn b.v. in x vormen van de 2e graad, dus de ontbinding heeft de gedaante $A(x-x_1)(x-x_2)$, waar A gegeven wordt door de substitutie $x = 0$ b.v.

4. Ik geef nu aan 't bestuur van 't Mathem. Centrum 't volgende in overweging.

Om b.v. de 4 jaar wordt één jaar gewijd aan colloquia over 't oplossen én 't opstellen van problemen, hoofdzakelijk maar niet uitsluitend uit de elementaire wiskunde.

BENADERINGSCONSTRUCTIE VAN DE REGELMATIGE VIJFHOEK EN VIJFTIENHOEK.

door

F. CARLABUR en FRED. SCHUH.

De *regelmatige vijfhoek* en de *regelmatige vijftienhoek*, beschreven in een gegeven cirkel (middelpunt M), kunnen *bij benadering* aldus worden geconstrueerd:

Breng een middellijn AB aan en loodrecht daarop de straal MC. Bepaal op AB door omcirkelen het punt D zo, dat $AD = AC$ is. (D en B aan dezelfde kant van A). Dan is bij benadering de

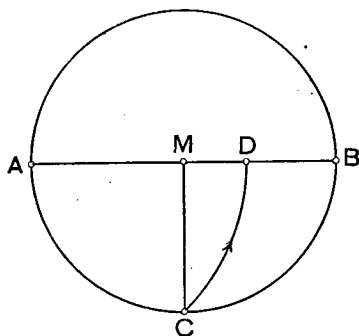


Fig. 1.

zijde a_5 van de ingeschreven 5-hoek $= 2 DB$,

zijde a_{15} van de ingeschreven 15-hoek $= MD$.

Een denkbeeld van de nauwkeurigheid hiervan krijgt men uit:

$$2 DB = 2(2 - \sqrt{2}) = 1,1715729,$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{10} - 2\sqrt{5} = 1,1755705,$$

waarbij de straal van de cirkel 1 genomen is. De benaderde waarde van a_5 is dus 0,004 te klein, d.i. $\frac{1}{5}$ mm bij een cirkel met een middellijn van 1 dm. De fout in de middelpuntshoek met een koorde a_5 bedraagt $17'$. Na 5 maal afpassen is dit nog geen $1\frac{1}{2}^\circ$.

Is 2φ de middelpuntshoek met een koorde gelijk aan MD, dan is:

$$\sin \varphi = \frac{1}{2} MD = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1),$$

$$\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi = \frac{3}{2} (\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1)^3 = 2 - \sqrt{2} = DB.$$

Bijgevolg is 6φ de middelpuntshoek met een koorde $2 DB$.

Neemt men de constructie van de regelmatige ingeschreven 5-hoek als juist aan, dan is dus MD als zijde van de regelmatige ingeschreven 15-hoek eveneens juist.

Doordat de zijde van de 5-hoek ontstaat door die van de 15-hoek driemaal uit te zetten in richtingen, die niet al te veel van elkaar verschillen, is de fout in de zijde a_{15} van de 15-hoek iets meer dan het derde van de fout in a_5 .

Men krijgt het verband tussen beide fouten nauwkeuriger aldus. Is $12^\circ - x$ de halve middelpuntshoek met een koorde MD, dan is $MD = 2 \sin (12^\circ - x)$ en $2 DB = 2 \sin (36^\circ - 3x)$. De verhouding tussen de fout f_5 in a_5 en de fout f_{15} in a_{15} is dus:

$$\frac{f_5}{f_{15}} = \frac{\sin 36^\circ - \sin (36^\circ - 3x)}{\sin 12^\circ - \sin (12^\circ - x)}.$$

Bij benadering is dit (daar x klein is):

$$\frac{f_5}{f_{15}} = \frac{3 \cos 36^\circ}{\cos 12^\circ} = 3 (2 \cos 24^\circ - 1) = 2,48,$$

dus bijna $\frac{5}{2}$. Bij een cirkel met een middellijn van 25 cm is dus de fout in a_{15} bijna $\frac{1}{5}$ mm.

TOULOUSE.

Baccalauréat Première Partie. Session de juin-juillet 1950.

Séries Classiques A et B.

I. — 1er sujet. — Déterminer le coefficient angulaire de la tangente à la courbe $y = 2x^2 - 7x - 4$ au point d'abscisse $x = 4$.

I. — 2e sujet. — Énoncer et démontrer le théorème relatif au signe d'un trinôme du second degré. Appliquer ce théorème à l'étude du signe de la fonction $y = (2x + 1)^2 - (x - 2)^2$ suivant les valeurs de la variable x .

I. — 3e sujet. — Définir deux plans perpendiculaires. Énoncer et justifier une condition nécessaire et suffisante pour que deux plans soient perpendiculaires.

II. — On donne dans un plan (Q) deux demi-droites AX, AY faisant entre elles un angle de 60 degrés; sur la perpendiculaire en A au plan (Q), on porte une longueur $AB = a$ et l'on mène par B la demi-droite BZ parallèle à AY et de même sens.

Deux points M et P sont pris respectivement sur les demi-droites AX et BZ, de telle manière que $AM = x$, $BP = 2x$.

1° Calculer en fonction de x et a la distance MP et le volume de la pyramide ABMP.

2° Déterminer x de telle manière que l'angle de la droite MP avec le plan (Q) soit égal à 60 degrés.

3° Démontrer que, quand la distance x varie, la droite MP reste parallèle à un plan fixe, et trouver dans les mêmes conditions le lieu géométrique du milieu de MP.

Séries Classique C, Moderne et Technique.

I. — 1er sujet. — Comment détermine-t-on la position d'un nombre par rapport aux racines d'une équation du second degré?

Trouver la position du nombre 1 par rapport aux racines de chacune des équations

$$x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x^2 + 3x - 1 = 0.$$

I. — 2e sujet. — Décrire le mouvement rectiligne défini par l'équation horaire $x = \frac{t^2}{2} - 2t - \frac{5}{2}$; trouver la valeur algébrique de la vitesse à l'instant $t = 6$.

I. — 3e sujet. — Définition de l'homothétie. Figures homothétiques d'un plan, d'une droite, d'un cercle.

II. — On donne deux cercles (C) et (C') situés dans deux plans parallèles: la droite joignant les centres O, O' de ces cercles est perpendiculaire à leurs plans; les rayons respectifs sont $R = 15$ cm, $R' = 20$ cm, et la distance des centres OO' mesure 25 cm..

Un point A décrit le cercle (C) et un point A' décrit le cercle (C') de manière que les rayons OA et O'A' soient constamment orthogonaux..

1° Démontrer que la distance AA' reste constante, de même que l'angle de la droite AA' avec la ligne des centres OO' . Calculer cette distance en centimètres et cet angle en degrés.

2° Déterminer la perpendiculaire commune aux droites OO' et AA' . Cette perpendiculaire commune coupant OO' en I et AA' en K, montrer que le point I reste fixe et la distance IK constante lorsque A et A' varient dans les conditions indiquées.

3° Il résulte du 2e que le point K demeure situé sur un cercle (I') dont on précisera le plan, le centre et le rayon.

Inversement, montrer que par tout point K de ce cercle passent deux droites (D) et (Δ) rencontrant les cercles donnés (C) et (C'). Prouver que les rayons de (C) et (C') aboutissant aux points d'intersection des deux cercles avec chacune de ces droites sont orthogonaux, et que les droites (D) et (Δ) sont elles-mêmes perpendiculaires.

Baccalauréat Deuxième Partie.

Mathématiques et Mathématiques et Technique.

I. — 1er sujet. — Géométrie descriptive: abaisser d'un point une perpendiculaire à un plan.

I. — 2e sujet. — Géométrie descriptive: Angle de deux plans. On exposera la méthode générale et l'on exécutera l'épure dans le cas de deux plans quelconque donnés par leurs traces.

I. — 3e sujet. — Série Mathématiques. — Projection horizontale d'un cercle en Géométrie cotée.

Série Mathématiques et Technique. — Géométrie descriptive: Représentation de l'hélice circulaire droite.

II. — Soient, dans un plan, un segment de droite OA de longueur $3a$ et sa médiatrice (Δ). On considère l'hyperbole (H) de sommet A qui admet O pour foyer et (Δ) pour directrice associée à ce foyer.

1° Trouver l'excentricité de (H). Calculer, en prenant O pour origine des abscisses le long de la droite OA et le sens de O vers A comme sens positif, l'abscisse du centre ω de cette hyperbole. Trouver l'angle que font les asymptotes avec la droite OA.

2° Une droite quelconque (L) passant par O coupe (Δ) en I, et (H) en U et V. Démontrer que AU et AV sont les bissectrices de l'angle OAI; on désignera par U' et V' les projections orthogonales de U et V sur (Δ), par U'' et V'' les symétriques de U et V par rapport à (Δ).

3° Le milieu M de UV se projette orthogonalement en M' sur (Δ). Comparer dans les divers cas de figure les longueurs MA et MM'. Trouver le lieu (K) décrit par le point M lorsque la droite (L) pivote autour du point O. Montrer que ce lieu se déduit de (H) par l'une ou l'autre de deux transformations simples.

4° Soit P un point arbitraire de (H), distinct du point A; on désigne par P' la projection orthogonale du point P sur (Δ), par P'' le symétrique de P par rapport à (Δ).

On trace le cercle (C) circonscrit au triangle OAP; soit C le centre de ce cercle. Démontrer que les angles de droites (CO, CP) et (CO, Δ) vérifient la relation $(CO, CP) = \frac{2}{3} (CO, \Delta)$.

En déduire que le cercle (C) coupe de nouveau l'hyperbole (H) en deux points Q, R formant avec P un triangle équilatéral.

NEDERLANDSE VERENIGING VOOR LOGICA EN DE WIJSBEGEERTE VAN DE EXACTE WETENSCHAPPEN.

Op 20 October 1951 hield deze vereniging haar vijfde jaarvergadering, tevens de 25ste wetenschappelijke bijeenkomst. De voorzitter, Prof. Dr. E. W. Beth, sprak over „De paradoxen van logica en verzamelingsleer”. Na een korte historische inleiding liet spreker het licht vallen op de gebleken onuitvoerbaarheid, om de paradoxen geheel uit logica en verzamelingsleer te verbannen en de moderne pogingen, om ze door analyse beter te leren begrijpen en daardoor in hun werking minder storend te maken. Het laatste werd toege-licht met behulp van de paradox van Berry.

De vereniging telt thans 118 leden. In het afgelopen jaar werden de navolgende voordrachten gehouden (in chronologische volgorde):

Prof. Dr. Philipp Frank: The Concept of relativity; its place in science and philosophy.

Prof. Dr. D. van Dantzig: Waarschijnlijkheids-logica.

Prof. Dr. P. H. van Laer: Wiskunde en natuurwetenschappen, onderling vergeleken.

Prof. Dr. A. Heyting: De meervoudigheid van de logica.

Prof. Dr. H. B. Curry: A formalist philosophy of mathematics.
 Het secretariaat van de vereniging is gevestigd te Enschede,
 Cort van der Lindenlaan 12.

BOEKBESPREKING.

Een halve eeuw Weer- en Sterrenkunde door Prof. Dr W.
 Bleeker, Dr A. Blaauw en Dr J. J. Raimond Jr.

Uit het toegezonden prospectus nemen we het volgende over:

„Ter gelegenheid van haar halve eeuwfeest heeft de Nederlandse Vereniging voor Weer- en Sterrenkunde haar leden een uitnemend verzorgd en zeer waardevol boek ten geschenke aangeboden. Ook zij, die zich als nieuw lid aanmelden, ontvangen het boek gratis.

Het is zeer beslist niet de bedoeling van het bestuur geweest het jubileum te vieren met het uitgeven van een gedenkboek, dat de geschiedenis van de vereniging behandelt; zulk een boek zou alleen de insiders belang inboezemen. Veeleer heeft de gedachte voor gezeten, dat de Vereniging ook bij dit jubileum haar taak te vervullen heeft: de kennis van de weerkunde en de sterrenkunde in wijde kring te verbreiden. Een goede gedachte, die in dit boek subliem verwezenlijkt is.

Het boek geeft een boeiend overzicht van de geweldige vlucht, die de weerkunde en de sterrenkunde gedurende de eerste helft van de twintigste eeuw namen.”

Eigenlijk zouden we hiermee kunnen volstaan, maar toch willen we de lof, die hierin aan deze jubileum-uitgave wordt toegezwaid nog even onderstrepen.

Er wordt hierin op duidelijke en grondige wijze de stand van de tegenwoordige weer- en sterrenkunde weergegeven met een bespreking van de problemen, die in de laatste 50 jaar geheel of gedeeltelijk opgelost zijn en een aanduiding van de mogelijke vraagstukken, die in de toekomst nog om oplossing vragen. Voor de belangstellende leek en voor degenen die de laatste jaren niet de vaak stormachtige ontwikkeling van de weer- en sterrenkunde hebben kunnen bijhouden, geeft dit boekje een prachtig overzicht. De hier volgende inhoud geeft duidelijk aan, welke onderwerpen de revue passeren.

Weerkunde: De meteorologie in 1900; De waarnemingen. Weersverwachting. Van allerlei.

Sterrenkunde: Het bevolkingsregister van de sterrenhemel. Het melkwegstelsel. Andere sterrenstelsels. Astrophysica. Het planetenstelsel. De planeten.

H. M.

Verschenen:

P. WIJDENES
Dr H. J. E. BETH

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

Tweede Deel - Achttiende druk
f 3,75

Derde Deel - Twaalfde druk
f 3,75

De Nieuwe School-Algebra wordt
gebruikt voor H.B.S. 5-j. c., Gym-
nasium; begin akte Wiskunde I.o.;
Staatsexamen; akte N XIII en
N XVI.

P. Noordhoff n.v. - Groningen-Djakarta
Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Verschenen:

WIJDENES
VAN DER PLOEG

MEETKUNDE voor het NIJVERHEIDSONDERWIJS

Herzien door A. C. Bruinshoofd
Leraar bij het technisch onderwijs

Deel I 84 pag. 136 fig. f 1.90

Deel II 84 pag. 139 fig. f 1.90

Ten behoeve van het Nijverheids-
onderwijs, ambachtsscholen, land-
bouwscholen, en van hen, die
kleine technische examens dienen
af te leggen.

P. Noordhoff n.v. - Groningen-Djakarta
Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Verschenen:

C. J. ALDERS

ALGEBRA VOOR M.O. EN V.H.O.

Deel II A - 15e-17e druk f 2,60
gec. f 3,10

Graphische voorstellingen; de li-
neaire functie; Vierkantsvergelij-
kingen; Irrationale vergelijkingen;
De kwadratische functie; Onge-
lijkheden; Bewijzen door volledige
inductie; Oneigenlijke machten;
Logarithmen; Reeksen; Samenge-
stelde intrestrekening; De reststel-
ling; De functie $y = \frac{ax+b}{cx+d}$
Herhalingen.

P. Noordhoff n.v. - Groningen-Djakarta
Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Verschenen:

P. WIJDENES

REKENBOEK

voor de Hogere Burgerschool

Tweede stukje.

14e druk f 2,50

Inhoud:

Vierkantsworteltrekking - Bena-
derde waarden - Optelling en
Aftrekking - Vermenigvuldiging -
Deling - Worteltrekking - Reken-
kundige Reeksen - Afhangelijkheid
van Grootheden.

30 x 5 vraagstukken.

P. Noordhoff n.v. - Groningen-Djakarta
Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Verschenen:

VRAAGSTUKKEN OVER ANALYSE EN ALGEBRA

DOOR

W. J. H. SALET e.a.

Studenten aan de Technische Hogeschool vinden in dit boek bij hun voorbereiding tot het afleggen van een propaedeutisch examen een schatkamer van oefenmateriaal in de analyse. Het boek kan tevens vruchtbaar gebruikt worden door velen, die bij hun studie wiskunde nodig hebben, welke uitgaat boven de stof van het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs. Naast vele oorspronkelijke vraagstukken zijn er verscheidene ontleend aan tentamens en examens.

f 5,90

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Verschenen:

ELEMENTAIRE LEVENSVZERKERINGSWISKUNDE

DOOR

Prof. Dr M. VAN HAAFTEN

Deel I: Netto premien van verzekeringen op één leven.

Tweede druk f 6,90 - geb. f 8,25

I. Intrestrekening.

II. Sterftetafels.

III. Verzekeringen van kapitaal bij leven en van rente bij leven.

IV. Verzekeringen van kapitaal bij overlijden en van rente bij overlijden.

V. Veranderende lijfrenten en veranderende premien.

VI. Veranderende verzekeringen bij overlijden.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Verschenen:

Systematische verzameling van Opgaven over ANALYTISCHE MEETKUNDE

door Prof. H. J. VAN VEEN

Het platte vlak:

Inleiding - Rechte lijn - Cirkel - Kegelsneden - Samen 268 vraagstukken.

De ruimte:

Inleiding - Plat vlak en rechte lijn - Bol - Oppervlakken als meetkundige plaatsen van lijnen - Oppervlakken van de tweede graad - Samen 138 vraagstukken.

Gemengde opgaven:

Het platte vlak - De ruimte.

vierde druk met antwoorden f 3,90

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel