

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. Dr. E. W. BETH, AMSTERDAM
Dr. R. BALLIEU, LEUVEN - Dr. G. BOSTEELS, HASSELT
Prof. Dr. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - Dr. L. N. H. BUNT, UTRECHT
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
Dr. R. MINNE, LUIK - Prof. Dr. J. POPKEN, UTRECHT
Dr. O. VAN DE PUTTE, RONSE - Prof. Dr. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
Dr. H. STEFFENS, MECHELEN - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

26e JAARGANG 1950/51

Nr 5/6

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 3,00 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van de **Wimecos** storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1950 t/m 31 Augustus 1951 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) ten bedrage van f 6,00 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107^{III}, Amsterdam, aan wie tevens alle correspondentie gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, van Lennepaan 16. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

I N H O U D.

	Blz.
KAY PIENE, The place of Mathematics in the Norwegian Secondary Schools	225
NORWAY, Mathematics problems "Examen Artium"	242
Prof. Dr HANS FREUDENTHAL, De dwarskijker	245
Prof. Dr O. BOTTEMA, Verscheidenheden	252
Dr J. KOKSMA, Het limietbegrip I	261
Dr L. LIPS, Over een misleidend algebra vraagstuk	297
Boekbespreking	301
Mededelingen	304

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - Prof. Dr. E. W. BETH, AMSTERDAM
Dr. R. BALLIEU, LEUVEN - Dr. G. BOSTEELS, HASSELT
Prof. Dr. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - Dr. L. N. H. BUNT, UTRECHT
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
Dr. R. MINNE, LUIK - Prof. Dr. J. POPKEN, UTRECHT
Dr. O. VAN DE PUTTE, RONSE - Prof. Dr. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
Dr. H. STEFFENS, MECHELEN - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

26e JAARGANG 1950/51

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Inhoud van de 26ste jaargang 1950—1951.

	Blz.
Officiëel.	
Rapport van de commissie ter bestudering van een reorganisatie van het wiskundeonderwijs in de A-afdelingen van de Gymnasia en de Gymnasiale afdelingen der Lycea	49
Rapport van de commissie ter bestudering van het onderwijs in infinitesimaal rekening in de B. afdelingen der Gymnasia en der Gymnasiale afdelingen der Lycea	55
Examens in de wiskunde	81, 201
Notulen van de vergadering van de Groep L.i.w.e.n.a.g.e.l. in het Eykmanhuis te Driebergen op 1 September 1950	177
Beknopt verslag van de algemene vergadering van Wimecos op 3 Januari 1951	178
Herdenking van het 25-jarig bestaan van Wimecos op de Jaarvergadering op 3 Januari 1951 door de voorzitter.	181
Verzoek van het Ministerie voor O.K.W.	224
Mededelingen	165, 166 304
Wijdenesnummer.	
Na 25 jaren.	1
Uit de levensloop van P. WIJDENES.	2
Dr H. STREEFKERK, De betekenis van P. WIJDENES voor de didactiek van de wiskunde.	3
P. WIJDENES:	
Over het onderwijs in rekenen in de eerste klas van de H.B.S.	9
Voor het laatst twee vraagstukken?	24
De vergelijking $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$	35
Korrels I en II	39
De Klinografische projectie	40
S. J. GEURSEN, Evenredigheden en de schoolvakken, waarin ze toepassing vinden	61
Dr J. KOKSMA, Het samenstellen van een vlak krachtenstelsel	69
Dr G. WIELENGA, Enige aspecten van het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappelijke vakken op de Amerikaanse High School	82
De zomerconferentie in Baarn.	97
Dr JOH. H. WANSINK, Mathematical teaching in Dutch secondary Schools	99
Dr G. BOSTEELS, Het wiskunde onderwijs in België.	115
Dr ERRWIN VOELLMY, Die Dezentralisierte Organisation des Mathematikunterrichtes in der Schweiz.	143
Outline of the address by W. J. LANGFORD. J. P. M. Sc.	146

	Blz.
MOGENS PHIL, The teaching of mathematics in the Danish senior secondary school.	152
E. JACQUEMART, Mathématiques et cinema d'enseignement	158
KAY PIENE, The place of Mathematics in the Norwegian Secondary Schools.	225
Dr D. J. E. SCHREK, De „Mathematical Association”, haar geschiedenis en haar beteekenis van het Engelsche Wiskunde-Onderwijs.	167
Dr JOH. WANSINK, Dr Erwin Voellmy †	185
Prof. Dr G. HOLST, Wiskunde en techniek	186
Dr H. J. E. BETH, Over momenten	202
Prof. Dr B. L. VAN DER WAERDEN, Over de ruimte	207
H. G. BRINKMAN, De algemene momentenstelling.	220
Mathematical problems „Examen Artium of Norway”.	242
Prof. Dr HANS FREUDENTHAL, De dwarskijker	245
Prof. Dr O. BOTTEMA, Verscheidenheden.	
XXIX. De som van de hoeken van een driehoek	252
XXX. De ladder tegen de muur	256
XXXI. De hoogtelijnen van een viervlak	259
Dr J. KOKSMA, Het limietbegrip I.	261
Dr L. LIPS, Over een misleidend algebravraagstuk	297

KORRELS.

CI. HERMEN J. JACOBS Jr., De decimale ontwikkeling van het getal π	77
CII. Dr L. CRIJNS, Een probleem van Euler	79
CIII. Dr L. CRIJNS, Op de ribben van een gelijkzijdige drievlakshoek enz.	81
Boekbesprekingen	96, 301

THE PLACE OF MATHEMATICS IN THE NORWEGIAN SECONDARY SCHOOLS

by

KAY PIENE.

The following article is the essential content of a lecture that was to be held at a conference of Dutch teachers of mathematics in Baarn (Nederland) August 1950. As at the last moment I was prevented to go to the conference and give the lecture, and as I rather often get questions from colleagues abroad concerning our teaching of mathematics, I take the liberty to occupy some pages for this journal for my survey.

First it is necessary to give a sketch of our school system. To understand it you must remember that Norway is a large country with a widespread population. Social and ideological conditions follow the general pattern of affairs in the Western European countries. New masses have found their way into the secondary schools, and the relative frequency of the leaving matriculation examination is high, distinctly higher than in our neighbouring countries.

Our school system must be evaluated taking this background into account. It is above all the work of politicians, national, socially minded, liberal and radical politicians, and it is a result of the work of a so-called "Parliamentary School Commission", not of an educational-psychological expert commission.

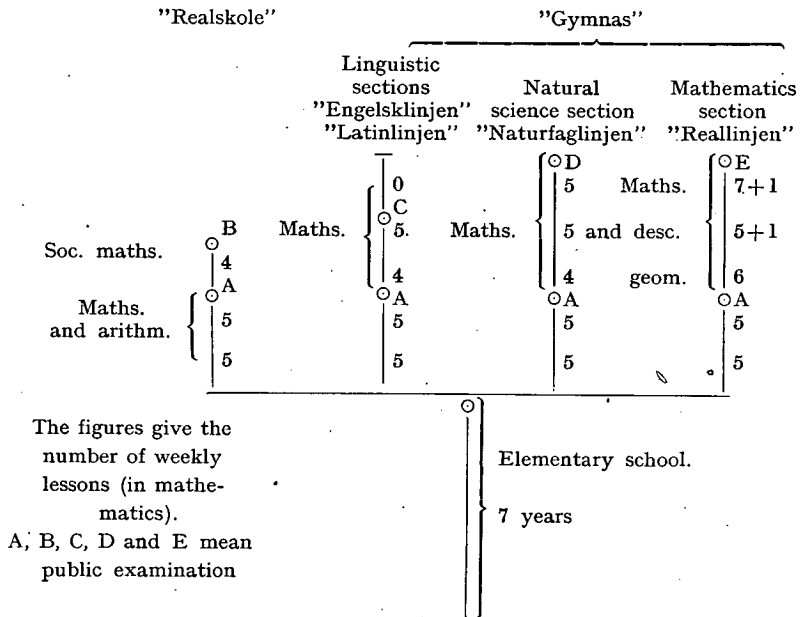
The basic idea of the organisation was to create an elementary school for *all* children, and to build all further education of any sort on the completed and finished elementary school.

Previously, the pupils who entered the secondary school left the elementary school two years earlier than the rest, and it was argued that the education in the remaining two forms of the elementary school was inferior to that in the first two forms of the secondary school. Further, it was argued that if the elementary school was made compulsory for all children, no one would be tempted to neglect it. Thus, in the last twenty or thirty years all advanced education has been based on a compulsory elementary schooling to be completed in seven years.

After the "Education Act" of 1935 our secondary schools are

organised in the following manner: After seven years elementary compulsory school from seven to fourteen two follow years with the same curriculum for all pupils.

1) These two years may be the first two years of the three years' "*realskole*" which ends with a public examination and leads to technical and different vocational schools, to jobs in the postal and telegraphic service, railways etc.



2) Or these two years may be the first years of the five years' "*gymnas*". So the school ladder to our matriculation, "*examen artium*" or student-examen as we call it, takes seven plus five, that is twelve years.

In the upper two classes of the elementary school, English, when such teaching can be given, is an *optional* subject. It is *compulsory* for the pupils who intend to go into *realskole* or *gymnas*. So in reality there is some sort of differentiation in the elementary school, it is not completely uniform.

But real secondary education starts first at the age of fourteen, or may be thirteen. There is, for instance, no teaching of mathematics in the elementary school, only *arithmetical* calculating with figures, and also calculations of areas and volume with no proof of the formulas used. Arithmetic is on the other hand a popular subject in the elementary school and good work is often done, but certainly many teachers in the secondary school would prefer to

start the pupils a little earlier, so it would be possible at an early age to begin with more mathematical training such as calculating with letters (algebra) or some quiet introduction of the teaching of geometry — drawing of figures, folding of papers and so on — on an intuitive, experimental basis. On the other hand, I have found that those pupils who obtain good results in arithmetic in the elementary school are amongst the more clever ones in the secondary school, so there is certainly a positive correlation between arithmetic and the more “pure” mathematics.

Let us then consider a little more accurately the secondary schools and how the curriculum of mathematics is arranged.

In the first and in the second class there are every week 5 lessons of 45 minutes in mathematics. After those two years there is a public examination with the same papers given to all candidates all over the country.

According to the official teaching instruction the aim is:

- a) Knowledge and skill in solving arithmetical problems from practical life, also calculation of areas and volumes.
- b) Knowledge of the elementary algebra, comprising rational numbers, understanding and command of the mathematical language of symbols and their use in easier problems within the field of rational expressions and of equations of first degree.
- c) Knowledge of fundamental geometrical theorems with proofs, and practice in their use in the solution of more simple constructions as well as carrying out easy geometrical calculations.

These vague words probably do not make the reader much wiser than before, especially concerning the teaching of *arithmetic*. This teaching is said to be founded on the work in the elementary school. The teachers are not supposed to repeat what already has been — or should have been — taught. The difficulty lies in the fact that the pupils' field of knowledge is uneven. They come from schools with teaching of different standards. Besides this, we have some trouble with the widely varying methods and forms used by the pupils in their written work. Often they are illogical and contrary to the standard plan of the elementary school. Nevertheless the pupils are permitted to continue with their methods and forms, whilst it is hoped that they will gradually pass into other and better ones according to the motive of rationalisation of work.

The plans mention the following subjects: calculation of percentages, simple rent, permille, business calculations, cheques, bonds, stocks, draughts, and ratios with practical applications, unitary method, foreign currency, specific weight, averages, constant

movement, different areas (parallelogram, triangle, trapezium, circle, sector) and volumes (prism, cylinder, pyramid, cone and sphere). Problems may also be found from other fields, especially more complete ones where "the pupils must familiarize themselves with a problem, find out what is known in advance and what must be worked out in order to plan the solution as simply as possible, through intermediate calculations".

The teaching instruction has a special chapter concerning the *calculation with numbers*. The aim is to train the pupils to make calculations quickly, safely and rationally, also to estimate in advance an approximate value of the solution.

In Norway teachers have been negligent of this, and it is a pity to see and hear how our pupils and students of all ages are uncertain and fumbling when they handle numerical expressions. Never, or very occasionally, you would find a remark like this in an examination paper: "An estimate of the answer is 22. I find 435.2, but I have no time to locate the error!"

Another sadly neglected field which some teachers, but not all, try to stimulate is the handling of approximate (rounded) numbers, for instance, numbers found by measurements. Most Norwegian teachers of mathematics find this theme difficult, I think, but the fundamental idea of significant numbers should not be too difficult for pupils of fourteen to fifteen years. Worse are the rules for reckoning with those numbers, but it is no impossible task to make these things understandable, especially when we are not too demanding in the rules for say, multiplication. (The product of two approximate numbers has no more significant figures than those contained in the factor which has the fewest).

At any rate our teachers are likely to neglect these things until the examination papers demand mastering of approximate numbers, which they do not do to-day.

Another neglected field is mental arithmetic, where the level generally is low. On the other hand, in other countries I have found what I might call an idolising of mental arithmetic which seems undeserved. Men have brains — and we could use them better — but those brains have created paper and pencils and pens — very useful instruments for *longer* calculations which otherwise are too heavy burdens — especially for wandering and unconcentrating brains. But finding estimates of more complex expressions should be done without any instruments or toil.

To facilitate calculation with numbers tables for n^2 , $\sqrt{n}$ and

$\frac{1000}{n}$ to $n = 1000$ may now be used. Finding of square roots without tables will not be demanded.

We pass over to the more mathematical part of the curriculum in the first two years. It falls in two categories:

a) *Algebra*, containing:

Addition, the orders of addends, grouping and dissolution of addends, monoms, polynoms of addends.

Subtraction, the subtraction test, relative (directed) numbers, the numberscale, absolute value, addition and subtraction of relative numbers, parentheses, contraction of polynoms.

Multiplication, the order of factors, grouping and parting of factors, powers, the theorems of $a^m \cdot a^n$, $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$, multiplication of polynoms with numbers and of two polynoms, the numbers 1 and 0, and relative numbers as factors.

Division, the division test, uncomplete division, division of and with products, division of polynom with number, the theorem of $a^m : a^n$, the numbers 1 and 0 and relative numbers in division, rules of divisibility for 2, 5, 4, 25, 3 and 9 primes and composite numbers, factorization of number and letter-expressions, common measure and multiple. Fractions, proper and improper fractions, mixed numbers; fractions with same or different denominators, fractions with relative numbers, decimal fractions, periodical fractions, the four elementary operations with fractions.

Dispositions of formulas, general solution of problems, calculating instructions or receipts written as formulas, formulas expressed as arithmetical rules.

Equations of 1st degree with 1 and 2 unknown, equations that are set up and equations that are 'dressed' in problems, testing of the roots, addition (elimination) and substitution method.

Ratios and proportions, proportional and inverse proportional sizes, the product of inner and outer members, unknown sizes in proportions.

b) *Geometry*, containing:

Body, surface, line, point, straight line, broken and curved line, plane.

Angles, adjacent, vertically opposite angles, right, acute, obtuse, reflex; complementary and supplementary angles, construction of an angle equal to a given one, bisecting and measuring of angles; set square, protactor. Normal, distance from a point to a straight line, normal constructions.

Circles, arcs and chords, the distance from a chord to the centre, sector, central angle, secant, tangent, tangent constructions, 2 circles in different positions to each other.

Triangles, names of sides and angles; isosceles, equilateral, right angled triangle; theorems of congruence, exterior angle, angle-sum; inscribed and escribed circles.

Polygons, diagonal, dividing in triangles, angle-sum.

Symmetry, about an axis and a point.

Parallel lines, angles made by a transversal, constructions of parallel lines, distances, Euclid's postulate, angles with parallel and perpendicular arms, division of a line segment with parallel lines, parallel lines cut by parallel lines.

Quadrilaterals, trapezium, parallelogram, rhombus, rectangle, square.

Loci: the circle, the perpendicular bisector, the angle bisector, the parallel line, right angles in a semicircle.

The division of a circle in 4 or 6 equal parts, regular polygon, in- and circumscribed circle.

Mensuration and ratio, angle with parallel transversals, division of a line segment in a given ratio, construction of terms in a proportion.

Area of rectangle, parallelogram, triangle, trapezium, Pythagoras' theorem.

Similar triangles, ratio between the sides, the circumferences and the areas.

It is stated that there should be a fusion between the three disciplines of mathematics, but I do not think that this fusion is found often in actual school work.

As I have said real *mathematical* training starts later than in most other countries, and we must work rather energetically to realise our aims.

In Algebra the main aim is to master the symbolic language of mathematics. The letters — symbols — do mean something real and they must be introduced in such a manner that the pupils understand this fact, that they see the meaning and the *intention* of that introduction. As a matter of fact, a leading motive in the elementary algebra training is the *intention*. We do not — or ought not to — introduce negative numbers by a pure decree of dictate. By examples from the pupils' world of experience we gradually advance to the conception and the rules for their use.

The proof plays a very modest part in this elementary algebra. Theorems that are only more precise formulations of well-known rules from the arithmetic, do not need a proof. Proofs are limited to those cases where they are necessary to show *why* the theorem is right.

In geometry, on the other hand, the pupils will find something else. Starting partly from their intuition or their earlier knowledge they build up a sort of systematic course with proofs — a course not strictly a la Euclid or Hilbert, but gradually working with theorems according to the classical scheme: hypothesis, conclusion, — demonstration.

At the same time — through exercises and otherwise — we aim at a training and a formation of a geometric "outlook", a geometric eye, imagination and intuition.

So much for the plans. I find them good, even though I am aware of the fact that they build on some presumptions which ought to be proved by joint work of psychologists and mathematicians ¹⁾. But I also know that a number of teachers find that our algebra is too loose with its lack of proofs, that an intention-filled introduction of negative numbers is not necessary, and that the exercises with formation and interpretation of formulae are too difficult.

The teaching of geometry is more traditional and is not much criticised.

At the end of the first two years, the pupils separate. Some go to a third class to complete their schooling, the others to another third class being the first of three of the advanced secondary school.

In the first case (the *realskole*) there is no subject called "mathematics" alone, but we have introduced a new and rather original subject called "social mathematics" — *samfunnsrøgning* — (mathematics applied to social and community matters). The aim is by means of concrete problems to give the pupils an orientation of private and public economic relations of modern society, and train them to use in this connection what they have learnt in arithmetic and mathematics.

We have here two important points: 1) orientation of present-day society, and especially of the matters of life which are ruled by numbers, and 2) application and development of the mathematical knowledge with regard to the handling of problems from practical life.

The plans mention the following chapters:

Banks and finance (interest and discount, compound interest and annuities, bills of exchange, mortgage bonds, rate of exchange of foreign currency, clearing), business managing (costs and profit, calculation, tender), joint stock companies (profit, reserve fund, quotation, preference stocks), companies, cooperative business, failures (dividend, secured and unsecured creditors), estate and inheritance, insurance (fire, accident, illness, -pension, life insurance, annuity, re-insurance) price-level and price-index, level of wages and real wages, correlation between levels of price and wages, taxes (indirect taxes of different kinds, stamp-taxes, duty, protection duty and fiscal duty, direct taxes to state and community, tax tables, progressive taxes, assessment, declaration), government and municipal affairs (budgeting, income, distribution of expenses for various aims, public debts, government and municipal bonds, quotation, nominal, immediate and effective interest).

¹⁾ One problem is: Is a child mature to understand proofs at thirteen or fourteen?

Separately exercises should be given that try to throw light over the variation of economical relations, for instance: the value of money through the ages, market cycles, development of individual trades¹⁾, the changes in the composition of the mercantile marine, the different trades and their relative share in the livelihood of the country etc. Further exercises with the necessary actual information that gives an orientation of forms of work and production, produce and paying in the different trades.

These matters are discussed and commented on in the class, but most of the work in "social mathematics" consists of exercises and problems. This is done by applying the tables, tariffs and other information which are given in the text-books. Otherwise the tools are: 1) methods from the ordinary arithmetic, 2) geometrical knowledge (to make pictogram etc), 3) equations, formulas and graphs. A typical circle of problems leads to judging through graphs which of two methods of production is the more advantageous. Graphs play, on the whole, an important part in "social mathematics".

"Social mathematics" is a new discipline in our school. Some teachers have been a little anxious, maybe fearing that the word "social" will be more stressed than the next one: mathematics. In my opinion the opposite is the fact, partly because the examination papers are too traditional and stress the calculation side too much. This fact influences teaching. The pupils ought to bring all necessary tables, tariffs, regulations etc., with them and the text of the examination paper should not give information which can be found there. The back-ground of the examination paper would in that manner be nearer to those problem situations which we meet in daily life, so that "social mathematics" can give a wider perspective.

I should like to add that the subject has become more and more popular. In the beginning many teachers did not at all like to take this subject, but now it is much better. We can choose between 4 text-books. They all are more or less original and well composed, and they are often studied with great interest also by people out the school. At first there were 3 lessons in "social mathematics" every week, now 4. The curriculum is the same, but the text-books have had the tendency to grow. Besides, there are 2 lessons every week in book-keeping, usually taught by the teacher of "social mathematics".

¹⁾ Say: farming, forestry, fishing, industry, shipping etc.

The differentiation in sections in the advanced part of our secondary school (the "*gymnas*") takes part after the second year. There are different possibilities, but most schools have two sections or branches: "*reallinjen*", a section where Norwegian, mathematics and physics are the main subjects, and "*engelsklinjen*", where Norwegian, English and French are the main subjects. 95 per cent or more choose one of these two sections. There is also a Latin section, "*latinlinjen*", and another section where old Norwegian is the main subject, "*norrønlinsen*". The three last mentioned sections have the same curriculum in mathematics as the "English section". At three schools there is also another section "*natur-faglinjen*" where the curriculum in Norwegian and physics is the same as in the mathematical section, but more chemistry and biology and less French and mathematics are taught here.

The problem of the position of mathematics in our language sections has been discussed for years. There we meet the "problem child" in the teaching of mathematics: the training for those pupils who specialise in humanistic subjects and languages, and for whom mathematics is a subject of minor importance. From our humanistic colleagues and from some teachers of mathematics there have been requests for dropping the subject, from the point of view that the pupils have no interest in it and no use for it in their career. Another argument is this: Many pupils are poor mathematicians but clever in other subjects. (Investigations seem to show that *many* should be reduced to *some*!).

Another proposal is not so radical: Dropping of some of the less useful "pure mathematical" part and introduction of parts of "social mathematics" instead.

Personally I have always been against a complete dropping of mathematics in the language sections. Our world has never been so mathematical as to-day. University students in subjects which in olden times were considered to have nothing in common with mathematics — as economics, psychology and biology — to-day make use of for instance applied mathematical statistics. That is an essential argument for the standpoint that mathematics should be part of the teaching in every secondary school, the language sections included. It should stress the applications, but still be mathematics, not a collection of formulas and mathematical rules.

In this year, we got new plans for our language sections, where parts of the "social mathematics" have been taken up, whereas parts of the previous "pure" mathematical curriculum, especially in geometry, have been reduced accordingly. As before the subject

has 4 weekly lessons in the third, 5 in the fourth, but none in the fifth class.

The aim will be:

1) A more extended knowledge of elementary *algebra* (rational numbers) and increased ability in using this knowledge of problems which to a large extent are taken from practical life and from subjects where mathematics are applied.

2) A somewhat extended knowledge of plane geometry with training in corresponding problems of construction and of geometrical calculations.

3) A more extended knowledge of practical arithmetic and a deeper understanding of problems from economical relations.

The teaching will have a basis in actual life and especially concentrate on actual problems. "But within the limited theoretical matter which is taken up in full, a clear, short, concise and logical teaching is demanded, so that the special value of mathematics in general education is rendered effective. It should be clearly stated, if any problem is not taken up in full, whether it is for lack of time or because a comprehensive solution demands greater maturity of the pupils."

According to the plans the curriculum consists of: ¹⁾

Algebra: Drawing of graphs, from tables and from formulas, interpreting of graphs.

Strengthening of the conception of relative numbers through solution and discussion of general problems.

Graphs, empirical and mathematical functions, also from economical life (price index, price level, market cycles, tariffs), graphic smoothing and interpolation, two functions in the same coordinate system, and ordinate differences between such functions.

The following mathematical functions shall be treated (with diagram):

ax , $ax + b$, $\frac{a}{b}$ and $\frac{a}{x} + b$.

Proportional and inverse proportional sizes, factor of proportionality and coefficient of angle.

Manufacturing costs, taxes, scale transformations, unit price and cost, tariffs, linear extension. Ohms law, work and effect, specific weight, constant movement. Determination of constants in functions by calculations and from graphs (linear functions). Graphical solutions of problems that can not be handled algebraically.

Equations of first degree. Generalisation—"problem-families". Identical equations. A system of two equations discussed graphically.

Equations of second degree. Condition for real solution. The sum and the product of the roots. The sign of the roots. Discussion only in

¹⁾ Some details have been omitted here.

teaching of mathematics: to show something of its inner structure, of its nature and its working methods. They must not forget that mathematics is "eine Geisteswissenschaft", not a science. They must stress the humanistic side as well and try to teach in such a way that there will be as much "transfer of training" as possible, — as far as such a process exists.

In the section of "natural science", "*naturfaglinjen*", the final curriculum is not yet fixed, but probably it will consist of:

- a) extended algebra including approximate numbers.
- b) elements of differential- and integral-calculus,
- c) extended plane geometry, trigonometry and some ideas of solid and analytic geometry,
- d) some chapters of the theory of probability and mathematical statistics for use in biology.

The number of lessons per week is now 4, 5 and 5.

In our "*reallinje*" mathematics has a strong position with $6 + 5 + 7$ weekly lessons. Besides, there are separate lessons in descriptive geometry" (one weekly lesson in the last two years) generally taught by the teacher in mathematics of that class. (The so-called "mathematical geography" — a sort of cosmography — is also taught separately ($0 + 0 + 1$), Mechanics is taught as a part of physics.)

This section is generally considered more difficult than the others. It gives certain preferences or is compulsory for a certain number of the more popular fields of study at the universities. According to psychological research, it also seems to attract more of the intelligent pupils than the other sections.

When our new school organisation started 10—12 years ago, differential- and integral-calculus were made compulsory subjects, earlier these were optional. At the same time we got new textbooks. Most of them were much better than the previous ones, clear and exact seen from the mathematical point of view, more readable and effective as seen from the educational point of view.

The aim of the teaching in this section is:

- a) A more complete insight into elementary algebra (*real* numbers). Familiarity with the use of this insight in practical and technical problems and some training in its use in mathematical research (theoretical problems).
- b) Knowledge of the first elements of infinitesimal calculus.

the case where there is one parameter and only one coefficient contains that parameter.

The trinomial of second degree. Variation etc.

Two equations, one of 1st., one of 2d. degree. Simple inequalities in connections with graphs.

Powers with rational exponents.

Roots. Root of products and of quotients. Reduction of very simple root expressions.

Irrational numbers only in connection with the incommensurable case of ratios.

Exponential functions with diagram.

Brigg logarithms and rather simple logarithmic calculations.

Arithmetical and geometrical series and their sums. Compound interest. Annuities. Governmental and municipal bonds; nominal, effective and immediate interest. Insurance.

Geometry: Angles in a segment of a circle. Construction methods. Similar triangles. Theorem of the (internal) bisector of an angle in a triangle. The power of a point with respect to a circle.

Construction of the fourth term in a proportion, the mean proportional and of $\sqrt{a^2 + b^2}$ where a and b are known segments. Discussion and comparison of geometrical and algebraic solutions. Sine, cosine and tangens of angles, between 0° and 90° . Trigonometric tables with intervals of $0,1^\circ$, without logarithms.

Social mathematics: Business-calculation, joint stock companies, bills. Manufacturing, calculation. Insurance, price index, price level, markets, taxes, etc.

Calculation with approximative numbers must be maintained and continued.

The mathematical tables for the linguistic lines must contain:

The values of a^2 , a^3 , $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$ and $\frac{1}{a}$ up to $a = 1000$, tables of compound interests and annuities, tables of logarithms and anti-logarithms, tables of sine, cosine and tangent for 0° ; $0,1^\circ$; $0,2^\circ$; ... $89,9^\circ$; $90,0^\circ$.

The necessary factual information regarding "social mathematics" will presumably be given in the text-books at the appropriate places in relation to its mathematical treatment.

Two schools have already tried a similar program. As far as can be judged from the opinion of the two teachers concerned, the experiments have proved satisfactory. I do not think the new curriculum will be easier or much easier than the old one — which is probably not the purpose intention of the reform — but it will make the lessons more interesting because the pupils will see that mathematics are not only a game with symbols. I should however, regret very much if the teachers neglect the other aspects of the

- c) Extended insight into elementary plane geometry, especially similar figures, and plane trigonometry.
- d) Insight into elementary solid geometry.
- e) Insight into analytical plane geometry: the conics in cartesian coordinates.

It should not be necessary to go into details in all these 5 disciplines ¹⁾. I have the impression that we teach almost the same as in other countries with regard to trigonometry and solid geometry. In analytical geometry — which in former days was our “core” — we have now made some reductions (polar coordinates, complete treatment of the equation of 2. degree in x and y). You will find a treatment of real numbers in all textbooks — in at least one or two of them a very good one — but the teachers certainly have a tendency to drop this field, only giving some intuitive idea of the concept of irrational numbers and their calculating rules. We are certainly less axiomatically minded than for instance Denmark or France.

This is a problem which does not only concern our country; to give a theory of real numbers which is mathematically well founded and pedagogically clear and at the same time understandable and psychologically well adjusted to the age-group concerned.

We have now had compulsory calculus for nearly ten years, and the experience of this has been satisfactory. May be we have aimed a little too high, especially in integration, where lately integration by a new variable or by substitution has been dropped.

On the teaching of calculus the plans say:

The first elements will be worked organically in the algebra, and the purpose is above all to lead the pupil into the infinitesimal manner of thinking, to make him familiar with the idea of limit value. A new mathematical calculating technique is not the chief aim. The derivate function can be prepared by study of the variation of simple functions ($ax + b$, $ax^2 + bx + c$) and their average rise in a certain interval. The methods that have been learned, are used when it is natural (discussions of curves, tangents and so on).

Further the plans mention: The derivate of x^n , of a constant, a sum, a product, a fraction, of a function of a function, of the trigonometric functions, exponential functions, logarithms. Variation of functions, maximum and minimum, tangents, approximative numerical determination of function increments, maximal and relative error. Velocities. y'' with applications: maximum and minimum, curvature, points of inflexion. Acceleration. Definite and indefinite integrals. Fairly simple integrations. Areas and volumes. Curves with known rise. The distance equation derived from the velocity equation.

¹⁾ Den høgre alemskolen. Undervisningsplaner. Oslo 1950 s. 124.

The tables will be the same that the linguistic lines use, but with $\lg \sin$, $\lg \cos$, $\lg \tan$ instead of sine, cosine and tangent. Besides this, the use of a slide-rule is permitted when a greater accuracy is not demanded, or for control.

I find this curriculum very suitable. It provides tools which are useful in other fields of mathematics as well as in physics. We have, however, not yet succeeded in establishing a sufficiently effective cooperation between physics and mathematics, may be the teachers have been too much inclined to go their own ways.

It is not easy to judge how good and effective the teaching of calculus actually is. The examination problems set after the last world war have, in my opinion, not demanded a sufficiently *deep* knowledge of calculus, and the papers of the candidates show that a *full* understanding often is neglected in some respects, they calculate too mechanically.

Descriptive geometry has for a long time been a subject in this section. The aim is: To draw in horizontal and vertical projection simple polyhedra in different situations to the projection planes, and with plane cuts.

The value of the subject has been discussed: How far does it really develop the visual abilities, the ability to visualise in three dimensions? What is the general educational value of the subject? Should it form an integral part of mathematics itself?

For many pupils descriptive geometry is a pleasant change. They can work individually or in groups, as in a laboratory, and they can use their hands as well as their brains. For others — fortunately not so many — the subject means trouble and worry, because they do not possess the necessary tridimensional faculty of perception in a sufficient degree.

I have just touched upon some problems of method, and it is perhaps right to add some words about our teaching practice. Let me at once state that this is one of more traditional lines. We use heuristic or genetic methods when *new* matters are introduced, with what we call "class teaching", the whole class working on the same line at the same speed, except when problems are solved *individually* (or organised on school or private initiative: in *groups* in the class or at home.) Experiments with other methods of teaching are rare, and we certainly do not sufficiently consider the fact that intelligence and abilities are widely spread in the classes. On the other hand, we can certainly say that teaching takes place in

a spirit of common activity — teacher *and* pupils work together for concise and thoroughly assimilated knowledge.

The teaching of mathematics is otherwise much influenced by the aspect of the final written examinations, and their demands will to a great extent decide which of the points of the curriculum should be generally stressed and which should be more or less dropped in the long run.

In our secondary schools there are five *public* examinations with the same sets of papers (problems) for the whole country (A, B, C, D, E at the figure p. 226). The time allowed is 5 hours, and almost all the candidates want that time! In my opinion the time allotted in other countries often must be too short. It is better to allow sufficient time and to be stricter in the marking!

The examination papers are set by "Undervisningsradet", a Council of Education which is a consulting board of the Ministry of Church and Education. In this Board there is always at least one expert in mathematics (a teacher in the secondary school) who edits the papers. The Council as a whole is, however, responsible.

For the examinations C, D and E each of the examiners must submit a set of suggestions for the examination papers to the Council, but the Council is at liberty to accept wholly or partly or to reject the suggestions. The examiners are all teachers in the secondary school with a certain amount of experience.

The answers from C, D and E are anonymous, those from A and B not. Two examiners form a "Board" in the following way:

A: 2 teachers from the district.

B: The pupil's teacher plus one teacher from another school in the neighbourhood.

C, D and E: Two teachers from anywhere in the country.

The examiners will have two to three weeks for their work. In case A they may come from the same city and be able to keep some contact with each other during their work. In case C, D or E they will probably live so far apart that they do not have this opportunity.

Much good can be said about our examination papers. The Council has been quite successful in establishing a standard type of problems with several questions (items) with an increasing degree of difficulty. The first are for the average pupils, whilst the last are so difficult that they serve to single out the very best. Unfortunately this so-called "poisonous tail" does not appear every year, and worst of all: The Council has not succeeded in keeping

a fairly constant degree of difficulty in the papers as a whole. Under such circumstances the marking is uncertain. The same mark does not indicate the same degree of mathematical ability every year.

For written papers we have a scale of six marks:

s: distinction, *m*: very good, *t*: good, *ng*: fair, *mtl*: may pass, *ikke*: fail.

As "good" is supposed to be the average mark, this scale is rather peculiar, being assymmetrical. The Council has given instructions on the use of the scale and on the meaning of each mark (without saying it directly, partly presuming that they are absolute values, and partly that they are ranking statements). Special comments on the marking in each subject are also given. The essential point is to find the *positive* side of the answers, not only a mechanical counting of errors. The teacher's marking should not, it is said, be a combination of a calculating machine and a proof-reader!

In my opinion the marking of mathematical papers is relatively easy when the problems are not too far from the normal standard. Great deviations between the two examiners do not often occur. It may be objected that our scale has only 6 marks, and that more differences would come out with say 20 marks. (The ideal number of marks for written secondary school mathematics would probably be under 10, possibly 7 or 9.)

The relative frequency of the various marks is fairly constant from year to year, more constant than the degree of difficulty (which can be estimated in a relatively objective way by means of counting the number of minor questions of different kinds — valued according to their quality and what they demand of the pupils). The most constant distribution seems to be in the section "reallinje" where mathematics are the main subject. Here the top mark is given only a few times. From about 1900 up to 1939 it has been given only 85 times. Amongst those 85 there are professors and many others in good positions, for whom the mark has been a very good prognosis. The way the papers are set has not, however, always made it possible to get the top mark. The second mark is given to approximately 25 %, for the third the average is about 35 %, and for the fourth 30 %. The last two are called negative marks. A candidate who gets the sixth mark is rejected irrespective of the marks he gets in the other subjects. The fifth mark might be termed a conditional one. Under certain circumstances the candidate can enter for a new examination in the autumn. Perhaps less than 1 % gets the 6th mark and about 5 % the fifth.

The percentages mentioned concern the pupils from the *regular* schools. There is, as well, a considerable number of candidates — often older ones — who have been attending evening classes or have studied by themselves. Some of them are very clever, but often their working conditions impede their chances of a good marks

The Council of Education provides for each board of examiners. (C, D and E) to have amongst its 250 odd papers a fair cross section of each category. The candidates' papers are often uneven, and there is often a rather great difference between the various schools. The influence of an efficient or an inefficient teacher is evident. One must on the whole presume that the candidate to a great extent is dependent upon:

his teacher,

the examination papers and their degree of difficulty,

the board of examiners.

This may lead to fatal results in days when — as in Norway — examination results are used for selection of candidates to studies where admission is limited.

Here, as in so many other fields of the School, we need research and investigations. We should not base our teaching only upon tradition, intuition and conjectures. Even if one can not transform results (or experiences) from one country to another just like that, I should like to ask my colleagues from other countries this: Would it not be worth while to start an international movement, or to revive our aged, venerable, but now inactive IMUK, La Commission Internationale de l'Enseignement mathématique, to organize scientific research in order to further our methods of teaching mathematics?

All teachers of mathematics certainly have encountered this problem once or often: Is it not possible for us to make this concise and logical science understood by *all* children and young people? You may consider this question naive, too general and insignificant, but let us reformulate it a little. How can we teach mathematics in such a way that a maximum of result is achieved? This is a problem of methods, curriculum and textbooks, and a problem of psychology, not only of the theories of intelligence and learning, but also of emotions, interests and trends of character.

Without going into details I want to express the hope that teachers of mathematics in all countries can join in doing research work which might further improve the teaching of our subject.

NORWAY.

MATHEMATICS PROBLEMS "EXAMEN ARTIUM"

(matriculation) 1950 "Reallinjen" (science-branch)

(5 hours)

I.

Prove that the three expressions $a_1 = \sin x$, $a_2 = \cos x - \frac{1}{\cos x}$ and $a_3 = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \sin x$ are the first three terms of a geometric series.

For what values of x between 0° and 360° is this series convergent, and what is the sum of this convergent series? Determine for what values of x , in the above mentioned interval, the series is convergent with a positive sum?

II.

In an isosceles triangle ABC $AB = g$ and $AC = BC = x$. The bisector of $\angle A$ intersects BC at D, and a line parallel to AB through D intersects AC at E. Find the area of $\triangle ADE$ in terms of g and x , and prove that the ratio of $\triangle ADE$ to $\triangle ABC$ is $\frac{gx}{(g+x)^2}$.

What is the greatest value this ratio can have, and what is the corresponding value of x in terms of g ?

Calculate $\angle A$ for the case where the above mentioned ratio is $\frac{2}{9}$.

III.

Find the vertex and the direction of the axis in the parabola $y = \frac{1}{4}x^2 - x + a$. Write down the equation which defines the points of intersections of the parabola and the x -axis, and explain how it is possible without calculation to see what values x must have in order that the origin shall lie inside the parabola.

The parabola is cut by a secant through the origin with the slope k . Find the abscissas for the points of intersections, and find the value of k which make the secant become tangent when the origin is situated outside the parabola.

What value must a have when the tangents from the origin shall be normal, and what are the corresponding equations for

the tangents? Draw a figure of the parabola in that case, and construct the tangents by means of the calculated values of k .

DESCRIPTIVE GEOMETRIE (Norway 1950).

Examen artium (matriculation) "reallinjen" (science branch).

5 hours.

A regular threesided prism has bases ABC and abc . The side of a base is 7 cm. and the height of the prism is 10 cm.

The prism lies with the side plane $AaBb$ on a sloping plane which makes 30° with the horizontal plane and has a horizontal trace which makes 45° with the base line. Both traces go to the right. A lies in the horizontal trace, B in the vertical trace, and the side line Aa makes 15° with the horizontal trace.

The prism is cut by a plane through the base side ab and that makes an angle of 60° with the given sloping plane. The cutting plane intersects the side line Cc at the point D . The pyramid $abcD$ is to be turned around ab to the right in such a manner that abc falls in the given sloping plane. We assume that the cutting plane is turned along with the pyramid when we turn the pyramid around ab .

Draw the horizontal and the vertical projection of the two parts of the prism in their new position. Draw also the vertical trace of the given sloping plane and the traces of the cutting plane in both positions.

In the drawing consider the given sloping plane as not transparent, the cutting plane abD as transparent.

NORWAY.

Mathematics problems "examen artium" (matriculation-eind-examen) "English or Latin branch", classes specializing in languages and having had $5 + 5 + 4 + 5$ weekly periods in the four years following after the elementary school.

1950.

I.

Find x and y by the system of equations

$$y = \frac{1 - 2x}{x - 1} \text{ and } y = x + q.$$

For what values of q does the system get

- a) two real and different solutions,
 b) coincident solutions,
 c) no real solutions? Find x and y in case b).

Draw a graph of the function $y = \frac{1-2x}{x-1}$ and, in the same coordinate system, of $y = x + q$, when q takes the values 1, -1 , -3 , -5 , -7 . Let 1 cm. be a unit. Write the value of q on each of the lines.

State for each value of q what the graph tells about the number of real solutions, and whether the discussion of the algebraic solution gave the same result?

Choose yourself a value of q and draw the graph of $y = -x + q$ in the same coordinate system. Determine by looking on the graph if the system of equations $y = \frac{1-2x}{x-1}$ and $y = -x + q$ can also have a) two real and different solutions, b) coincident solution, c) no real solutions.

II.

A circle with centre O and radius r is given. A point P lies at a distance $2r$ from O , and the straight line from O to P intersects the circle at A . Through P shall be drawn a secant that intersects the circle at B and C , B nearest to P , in such a manner the arcs AB and BC are equal. Prove that in this case PB will be twice as long as the chord BC .

Find PB and the chord BC in terms of r and construct the secant by means of one of the calculated expressions or in any other manner. Let $r = 5$ cm. in the construction and explain the procedure.

Calculate also the distance from O to the secant in terms of r , and calculate the angles in OPC by means of logarithms.

III.

Every New Year a man deposits 500 kr. in a bank that pays 2,5 % p.a. interest. What amount will be in the bank at the end of the 15th year?

What amount must he have deposited in the bank the first time, if this amount alone, also compounded at 2,5 %, should grow to an equal capital after equal many years?

DE DWARSKIJKER

door

Prof. Dr. HANS FREUDENTHAL.

I. De reststelling.

Bij mondelinge eindexamens (gymnasium) kwam ik herhaaldelijk de volgende vraagstukken tegen:

Ontbind in factoren

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3), \quad (\text{I})$$

$$(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3. \quad (\text{II})$$

De kandidaten redeneerden als volgt (voorbeeld I): De veelterm verdwijnt voor $x = -y$, is dus volgens de reststelling deelbaar door $x + y$. Om dergelijke redenen is I ook door $y + z$ en door $z + x$ deelbaar. Dus is I door $(x + y)(y + z)(z + x)$ deelbaar. Daar beide uitdrukkingen van de tweede graad in x zijn, is hun quotiënt een constante:

$$(x + y + z)^3 - (x^3 + y^3 + z^3) = C(x + y)(y + z)(z + x).$$

De constante wordt bepaald door b.v. $x = y = z = 1$ te stellen. — Analoog werd het voorbeeld II behandeld.

Deze herleiding is een opeenstapeling van onjuistheden. Om begrijpelijke redenen maak ik er bij het eindexamen geen aanmerking op; slechts één keer (met een candidaat, die een 9—10 verdiende) heb ik er een genoegelijk onderhoud aan vastgeknoopt. Bij de behandeling in de klas mag men natuurlijk hogere eisen stellen; ik twijfel er niet aan, dat talrijke paedagogen dit „mag” door een „moet” zullen vervangen, maar ik wil toch even nagaan, of het sop de kool waard is.

Wat zegt de reststelling? Een veelterm $f(x)$ verdwijnt voor $x = a$; dan is $f(x)$ deelbaar door $x - a$, dwz. er bestaat een veelterm $g(x)$ zodat $f(x) = (x - a)g(x)$.

(Eigenlijk zegt de reststelling iets meer; maar wat ik hier als zodanig heb geformuleerd, is al hetgeen men in de praktijk toepast, en meer dan dit te memoreren is overbodig — dat doet echter hier niet terzake.)

Wat zijn nu de coëfficiënten van de diverse machten van x ?

Zonder nadere toelichting, getallen. Voor de coëfficiënten van $g(x)$ geldt dan hetzelfde.

Wat zijn de coëfficiënten van vorm I, opgevat als veelterm in x ? Geen getallen, maar veeltermen in y en z .

Dit verschil is op zich zelf niet bezwaarlijk. We stappen in de schoolalgebra vaak genoeg over van „bepaalde” getallen naar „onbepaalde”. Wel moeten we ons duidelijk maken, wat hieruit voortvloeit voor het quotiënt $f(x)(x - a)$. Welnu, wanneer men een veelterm op een andere deelt (beide met gehele coëfficiënten), kan het quotiënt gebroken coëfficiënten vertonen. De gebruikelijke formulering van de reststelling behelst niet, dat $g(x) =$ gehele coëfficiënten heeft. Zijn de coëfficiënten van $f(x)$ zelfen veeltermen, dan kunnen die van $g(x)$ best *gebroken* rationale functies zijn. De reststelling in haar gebruikelijke vorm leert ons dus slechts dat I als veelterm in x deelbaar is door $x + y$, maar niet dat I als veelterm in x, y, z deelbaar is door $x + y$, dwz. dat er een veelterm $P(x, y, z)$ bestaat, zodat $I = P(x, y, z)(x + y)$.

U zult opmerken: Deel ik $f(x)$ door $x - a$; dan komen feitelijk geen delingen in de coëfficiënten voor, omdat de coëfficiënt van x in de deler gelijk aan 1 is. De redenering van daarstraks is dus wel juist. Inderdaad, de uitkomst is goed en ook deugdelijk te motiveren, indien men ten eerste de reststelling scherper formuleert en ten tweede duidelijk laat uitkomen, dat een gehele rationale functie in x , waarvan de coëfficiënten gehele rationale functies in y zijn, ook weer is: een gehele rationale functie in x en y samen. (Let wel: ik beveel deze behandelingswijze niet aan!)

Ten tweede: laat bewezen zijn, dat I deelbaar is door $x + y$, door $y + z$ en door $z + x$, volgt hieruit, dat I ook door $(x + y)(y + z)(z + x)$ deelbaar is? Wat zal een leraar antwoorden, wanneer een snuggere leerling hem confronteert met het voorbeeld van het getal 12, dat door 4 en 6 maar niet door 4.6 deelbaar is? Ik zou niet weten, hoe ik mij in zo'n geval op een didactisch en mathematisch verantwoorde wijze zou moeten redden.

Laten we nu veronderstellen, dat I deelbaar is door $(x + y)(y + z)(z + x)$ en de derde stap van de door ons gewraakte herleiding analyseren! Die is bepaald foutief. Uit het feit dat beide veeltermen kwadratisch in x zijn volgt niet, dat hun quotiënt een constante, maar alleen dat het een veelterm in y en z alleen is. Nu kunnen we wel ook van het feit gebruik maken, dat beide veeltermen van de tweede graad in y zijn. Ik vrees, dat de logica dan wel wat ingewikkeld wordt.

De vierde stap (de bepaling van C) is juist, als men het voorafgaande aanvaardt.

Is de hele redenering nu van nul en gener waarde? Neen, maar die waarde is heuristisch. Men verschaft zich een voorlopige wetenschap omtrent de mogelijke delers en schrijft de ontbinding bij wijze van experiment op. Maar dan komt de hoofdzaak: men rekent na dat het klopt. Dat is pas het bewijs! (Natuurlijk kan men ook bij elke stap de deling in extenso uitvoeren, maar dat is nogal omslachtig.)

Wenst men sommen als I en II te behandelen, dan deince men er niet voor terug, de leerling deze gang van zaken duidelijk te maken. Dit is trouwens de gang van zaken bij heel wat vraagstukken in de schoolalgebra. Een leerling, die van begin af aan is opgevoed tot het „nemen van de proef op de som”, zal er niets merkwaardigs in vinden, dat ook bij een wat achterbakse ontbinding de heuristiek wordt gevolgd door een verificatie. De „proef op de som” is immers niet alleen een gewichtig punt van „wiskundig moreel” en van elke numerieke praktijk, maar tevens in veel gevallen het enige echte bewijsmiddel.

Maar wie in een geval als som I en II de verificatie te vervelend vindt, werpe gerust dat gehele (vrij onbelangrijke) vraagstukkencomplex overboord.

Het is misschien de moeite waard, om de reststelling en haar grondslag, de „deling met rest”, nog nader te bekijken. Laten we heel naief beginnen!

Delen met rest is een uit de lagere school bekende „bezigheid”. Ik zeg uitdrukkelijk „bezigheid”; dat tekent de situatie misschien het beste....

Op de middelbare school komt er een nieuw kunstje bij; het delen van veeltermen door elkaar. Het nieuwe kunstje lijkt een simpele uitbreiding van het oude, want veeltermen zijn als het ware ontwikkelingen naar machten van x (i.p.v. de 10, die bij onze numerieke schrijfwijze van de gehele getallen hoort). De gelijkenis is in werkelijkheid zeer oppervlakkig en beperkt zich tot de aan beide procedures gemeenschappelijke „staart”. Zet b.v. naast elkaar de delingen:

$$\begin{array}{r}
 17 \overline{) 236} = 13 \\
 \underline{66} \\
 51 \\
 \underline{51} \\
 15
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 (x + 7) \overline{) (2x^2 + 3x + 6)} = 2x - 11 \\
 \underline{-2x^2 + 14x} \\
 11x + 6 \\
 \underline{-11x - 77} \\
 83
 \end{array}$$

Substitueer in de tweede $x = 10$, en je vindt $236 : 17 = 9$ rest 83!

Van een uitbreiding kan bij de overgang naar het delen van veeltermen geen sprake zijn. De leerling wordt met een (nuttige) nieuwe bewerking bekend gemaakt. Psychologisch is de situatie op de middelbare school hierbij een andere dan op de lagere. Het delen van numerieke gegevens is een onvermijdelijke consequentie van het probleem: verdeel een hoeveelheid ondeelbare dingen (b.v. eieren) onder een aantal gegadigden. Het delen van veeltermen kan misschien ook als oplossing van een zich opdringend (algebraïsch) probleem worden geïntroduceerd (ik zou niet precies kunnen zeggen hoe), maar het moet niet. Het is een nieuwe handigheid.

Dat is immers juist het vruchtbare in de algebra, dat de hoofdbewerkingen hun oorspronkelijke zin verliezen. Het meest valt dit op bij het delen met rest. Aan het verdelen van eieren onder gegadigden is elke herinnering verdwenen, wanneer veeltermen door elkaar worden gedeeld. Maar dit heeft ook een minder prettige zijde. 236 eieren onder 17 personen te verdelen is een nauwkeurig omschreven taak: ieder krijgt 13, en 15 blijven over. Door de stilzwijgende verplichting, dat de rest kleiner moet zijn dan de deler, is het probleem bepaald.

Zo bekeken gaat de analogie tussen de L.O.-deling en de algebraïsche deling toch iets verder dan dat ze allebei staartdelingen zijn. Bij het delen van veeltermen eisen we, dat de *graad* van de rest kleiner dan die van de deler is (de veelterm 0 wordt geacht van de graad -1 te zijn). Een docent, die de staartdeling niet wil opleggen, maar als een behoefte bij de leerling wil laten opkomen (ik zeg niet dat dit nodig is), moet wel in eerste instantie de eis „graad van de rest kleiner dan graad van de deler” aannemelijk maken (het lijkt me niet gemakkelijk).

Maar is nu ook bij veeltermen zulk een eis toereikend, om de eenduidige bepaaldheid van het resultaat af te dwingen? We zullen zien, dat dit alleen met zekere (onaangename) restricties kan worden beaamd.

Om het delingskunstje voor veeltermen te doen slagen, moet men allereerst alle delingen in de coëfficiënten zo kunnen uitvoeren, dat ze opgaan. Neem het voorbeeld

$$\begin{array}{r} (2x + 7) / (3x + 8) = \frac{3}{2} \\ \underline{3x + \frac{21}{2}} \\ -\frac{5}{2} \end{array}$$

Uitkomst $\frac{3}{2}$ rest $-\frac{5}{2}$. Het lijkt vreemd, dat ik $3 : 2$ ineens als opgaande deling presenteer; maar het hoort zo. We laten hier ge-

broken getallen als coëfficiënten toe. We bewegen ons in het gebied van de rationale getallen, en in dat gebied gaat de deling $3 : 2$ op. (We verdelen geen eieren, maar boter.)

Tot dusver is er geen vuiltje aan de lucht. Maar laat nu in de coëfficiënten „letters” voorkómen, b.v.

$$(ax + 7) / (3x + 8) = \frac{3}{a}$$

$$\frac{3x + \frac{21}{a}}{8 - \frac{21}{a}}$$

Uitkomst $\frac{3}{a}$ rest $8 - \frac{21}{a}$. Beschouw hiernaast

$$(by + 7) / (3b + 8);$$

uitkomst 0 rest $3b + 8$. En nu nog een stap, ga de a resp. b nu y resp. x noemen. Dan is

$$(3x + 8) : (xy + 7)$$

ten eerste $\frac{3}{y}$ rest $8 - \frac{21}{x}$ en ten tweede 0 rest $3x + 8$.

Of nog eenvoudiger: $(x + y) : x$ is ten eerste 1 rest y en ten tweede een opgaande deling met de uitkomst $\frac{y}{x} + 1$.

Treden in de coëfficiënten weer letters op, dan ontstaan moeilijkheden. Zolang deze letters $a, b, c, \dots$ heten, zijn die moeilijkheden nog niet ernstig, want dan is nog duidelijk, dat het delingskunstje op een ontwikkeling in x moet worden toegepast. Maar als alle letters uit dezelfde streek van het alfabet afkomstig zijn, wordt het een hachelijke situatie. Waarom zou men een veelterm in x en y (of a en b) niet evengoed naar x als naar y ontwikkeld aan de delingsprocedure mogen onderwerpen? Maar dan is de uitkomst niet meer eenduidig bepaald.

Nu zou men het optreden van breuken in de coëfficiënten kunnen verbieden. Dus b.v. $(3x + 8) : (2x + 7)$. Uitkomst 1 rest $x + 1$. Maar hoe is het dan met $(3x + 8) : (-2x + 7)$? Gaan we ook mintekens verbieden?

Dus numerieke breuken toelaten, maar letters in de noemer verbieden? Beschouw dan $(ax + 8) : (bx + 7)$!

Het enig doelmatige is: in de deler bij de hoogste macht van x geen andere coëfficiënten dan 1 toelaten. Deze eis geldt dan niet alleen voor de hoogste macht van x , maar ook van *iedere andere* „letter”, die in de deler voorkomt. En ook dan moet men nog bewijzen, dat de uitkomst onafhankelijk is van wat men als „ontwikkelingsletter” heeft gekozen.

Het komt me voor: een leerling, die de delingsprocedure voor

veeltermen in één veranderlijke heeft geleerd, mag bij veeltermen in twee veranderlijken als delers terecht zeggen: dat hebben we nog niet gehad. En wel ook, wanneer hij de delingsprocedure niet enkel als een loopje heeft geleerd, maar in de vorm: bepaal in

$$f(x) = q(x)g(x) = r(x)$$

de $r(x)$ zo, dat zijn graad kleiner is dan die van $g(x)$! Want wat moet hij bij veeltermen in x en y onder „graad” verstaan? Dat is een ernstige zaak: voor zulke veeltermen bestaat namelijk geen delingsprocedure en ook geen reststelling.

Dus vraagstukken zoals „is $a^2 - b^2$ deelbaar door $a - b$?” overboord gooien? Neen, hier worden twee dingen met elkaar verward: deelbaarheid en delingsprocedure. Dank zij de mogelijkheid om hier verwarring te stichten, mag men de leerling vraagstukken laten oplossen, die hij „nog niet gehad heeft”.

Wat betekent deelbaarheid? Ik formuleer het zo abstract mogelijk. R zij in 't vervolg een integriteitsgebied, dwz. een stelsel met een optelling, aftrekking en vermenigvuldiging, die aan de gebruikelijke wetten gehoorzaamt (ook aan de wet: is $ab = 0$, dan is $a = 0$ of $b = 0$). In zulk een stelsel kan men zich afvragen, of een $b \neq 0$ deler is van zekere a . Hiermee bedoelen we het bestaan van een q in R met $a = qb$.

Voorbeelden. $R =$ gebied der gehele getallen. 2 deler van 6, — 2 deler van 6, 2 niet deler van 3.

$R =$ gebied der rationale getallen. Ieder element $b \neq 0$ is deler van ieder ander.

$R =$ gebied der veeltermen in x met rationale coëfficiënten. $2x + 4$ is deler van $x + 2$.

$R =$ gebied der veeltermen in x met gehele coëfficiënten. $2x + 4$ is niet deler van $x + 2$, wel b.v. van $6x + 12$.

$R =$ gebied der veeltermen in x met als coëfficiënten de gebroken rationale functies in y : $xy + 2y$ is deler van $x + 2$.

$R =$ gebied der veeltermen in x met als coëfficiënten de gehele rationale functies in y : $xy + 2y$ is niet deler van $x + 2$.

Het zijn nu zeer speciale integriteitsgebieden, waarin een delingsprocedure (Euclidische algorithm) bestaat. De zin van die procedure is de volgende: Zijn a en b twee elementen van R , waarvan men b.v. een gemeenschappelijke deler wil berekenen, dan tracht men het vraagstuk terug te brengen op één met kleinere a en b . Is d deler van a en b , dan is het ook deler van $a - qb$, en deze uitdrukking kan in de ene of andere zin kleiner zijn dan a en b (althans voor geschikte keuze van q). Dit „kleiner” kan slaan op

de werkelijke grootte van de elementen (als R het gebied der gehele getallen is) of op de graad (bij veeltermen).

Bij de gehele rationale functies in twee veranderlijken bestaat zo'n begrip „kleiner” niet, of in elk geval niet op een wijze, die tot een delingsalgorithme leidt. Er zijn integriteitsgebieden, die zelfs de meest eenvoudige deelbaarheidseigenschappen missen: noemt men c en d onderling ondeelbaar, wanneer iedere gemene deler van c en d op de 1 deelbaar is, dan hoeft niet meer te gelden: Zijn c en d onderling ondeelbaar en delers van a , dan is ook cd deler van a . (Men realiseer zich even, hoe moeilijk deze stelling reeds voor veeltermen in meer veranderlijken te bewijzen is!)

Men ziet hieruit: het begrip deelbaarheid hangt af van wat ik als mijn integriteitsgebied wens te beschouwen. Verder: Het begrip hangt niet af van de geldigheid van een „reststelling”. En tenslotte: wenst men zich bij deelbaarheidskwesties van de reststelling te bedienen, dan betrachte men enige voorzichtigheid en deince er niet voor terug, de uitkomst te verifiëren.

VERSCHEIDENHEDEN

door

Prof. Dr O. BOTTEMA.

XXIX. *De som van de hoeken van een driehoek.*

De stelling van de som van de hoeken van een driehoek heeft op het eerste gezicht geen analogon in de stereometrie. Voor de zes hoeken, die door telkens twee zijvlakken van een viervlak worden gevormd, geldt niet dat hun som constant is en men moet zich tevreden stellen met het aangeven van de grenzen waartussen de som is gelegen.

Het blijkt echter dat een analogon van de planimetrische stelling gegeven kan worden als men besluiten wil tot een, overigens voor de hand liggende, uitbreiding van het begrip „hoek”. Terwijl gewoonlijk slechts de hoek van *twee* vlakken wordt beschouwd, is er niets op tegen ook aan de figuur van *drie* door één punt gaande vlakken een getalwaarde toe te kennen. In overeenstemming met het meten van gewone hoeken door radialen, kan de grootte van de drie-vlakshoek dan worden aangegeven door de grootte van het oppervlak van de boldriehoek, die uitgesneden wordt op een bol, met het middelpunt in het hoekpunt en met de lengte-eenheid tot straal.

Het is nu eenvoudig een verband aan te geven tussen de hoeken van een viervlak. In deze betrekking komen zowel de zes „2-hoeken” als de vier „3-hoeken” voor. Is $A_1A_2A_3A_4$ het viervlak en α_{ij} de hoek op de ribbe A_iA_j , dan is (volgens de bekende formule voor het oppervlak van boldriehoek) de drievlakshoek A_1 gelijk aan

$$\alpha_{12} + \alpha_{13} + \alpha_{14} - \pi.$$

Is dus S_2 de som der „2-hoeken” en S_3 die der „3-hoeken”, dan is

$$S_3 = 2S_2 - 4\pi.$$

De betrekking wordt nog wat eenvoudiger als men voor het meten van „2-hoeken” en van „3-hoeken” een zelfde maat kiest, door de „2-hoek” resp. de „3-hoek” te meten door de oppervlakte uitgesneden op de bol met middelpunt op de snijlijn der vlakken, resp. in het hoekpunt en daarbij als eenheid van oppervlakte te nemen het oppervlak van de bol. Stellen Σ_2 en Σ_3 de sommen der

2-hoeken en der 3-hoeken van het viervlak voor, in de nieuwe eenheden gemeten, dan geldt ten duidelijkste:

$$\Sigma_2 - \Sigma_3 = 1.$$

De vraag hoe de overeenkomstige betrekking luidt in een ruimte van meer afmetingen, is beantwoord door niemand minder dan Poincaré¹⁾. Deze vraagt zich in de eerste plaats af wat het analogon is van de formule voor het oppervlak van de boldriehoek en komt tot de conclusie dat een analogon merkwaardigerwijze alleen bestaat in ruimten met een oneven aantal afmetingen. We geven in het volgende een beschouwing, die zich in de hoofdzaken bij die van Poincaré aansluit.

Wij beschouwen in de ruimte van n afmetingen een hypersfeer en n vlakke $(n-1)$ -dimensionale ruimten door het middelpunt. De begrenzing van de sfeer wordt daardoor verdeeld in 2^n „gebieden”, die elk een sfeer-simplex zijn. Wij trachten een verband te vinden tussen de inhoud van het simplex en zijn hoeken, d.w.z. zijn 2-hoeken, 3-hoeken, ... $(n-1)$ -hoeken. Aan elke ruimte kennen wij een $+$ en een $-$ kant toe en wel zo, dat de punten van het simplex S , dat wij willen beschouwen, liggen aan de $+$ -kant van elk der begrenzende ruimten. Wij nummeren deze laatste van 1 tot en met n en kunnen dan elk der 2^n gebieden van de sfeer aanduiden door een symbool, bestaande uit n tekens $+$ of $-$, in een bepaalde volgorde. Het symbool met alleen $+$ stelt S voor, terwijl door $n-$ tekens het diametrale simplex wordt aangewezen. Een gebied welks symbool juist $m+$ tekens bevat heet een m -gebied. Er zijn blijkbaar $\binom{n}{m}$ m -gebieden.

Wij beschouwen nu een der p -hoeken van S . Deze snijdt uit de sfeer-begrenzing een stuk uit, dat uit verschillende gebieden is samengesteld en wel blijkbaar uit die gebieden in welker symbool op p vaste plaatsen een $+$ staat, terwijl de overige tekens willekeurig zijn. Er zijn dus geen m -gebieden bij als $m < p$ is, er is één p -gebied en algemeen voor $m \geq p$ zijn er $\binom{n-p}{m-p}$ m -gebieden; het simplex S is uiteraard ook één der gebieden. Wij nemen nu de som van alle p -hoeken van S , daarbij elke p -hoek metend door de inhoud van het uit de sfeer-begrenzing gesneden stuk, de totale begrenzing als eenheid genomen. Zij Σ_p deze som. Blijkbaar is

¹⁾ Poincaré, Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie; C. R. Paris 140 (1905), 113—117.

Σ_p gelijk aan de som van de inhouden van alle m -gebieden met $p \leq m \leq n$ en waarbij elk m -gebied $\binom{m}{p}$ -maal wordt geteld. Is dus I_m de som der inhouden van alle m -gebieden op de sfeer, dan is

$$\Sigma_p = \sum_{m=p}^{m=n} \binom{m}{p} I_m.$$

Spreeken wij af dat $\binom{a}{b} = 0$ is als $a < b$, dan kunnen wij ook schrijven

$$\Sigma_p = \sum_{m=0}^n \binom{m}{p} I_m.$$

Wij vestigen nu onze aandacht op de overstaande hoek van een p -hoek van het simplex. Zo'n overstaande hoek is de som van de inhouden van die gebieden in welker symbool op p bepaalde plaatsen het — teken staat. Is Σ'_p de som van de overstaanden van de p -hoeken van S , dan is

$$\Sigma'_p = \sum_{m=0}^n \binom{n-m}{p} I_m,$$

terwijl tevens geldt $\Sigma_p = \Sigma'_p$. De uitdrukkingen Σ_p en Σ'_p hebben zin voor $2 \leq p \leq n-1$.

Wij beschouwen nu de uitdrukking $A = \sum_{p=2}^{n-1} \{(-1)^p \Sigma_p\}$. Deze is blijkbaar gelijk aan

$$\sum_{p=2}^{n-1} \{(-1)^p \sum_{m=0}^n \binom{m}{p} I_m\} = \sum_{m=0}^n \left\{ \sum_{p=2}^{n-1} (-1)^p \binom{m}{p} \right\} I_m.$$

Nu is voor $m \neq 0$ en $m \neq n$

$$\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{m}{p} = \sum_{p=0}^m (-1)^p \binom{m}{p} = (1-1)^m = 0,$$

zodat voor $m \neq 0$ en $m \neq n$ geldt $\sum_{p=2}^{n-1} (-1)^p \binom{m}{p} = m-1$.

Voor $m=0$ is deze uitdrukking echter blijkbaar gelijk aan 0, terwijl zij voor $m=n$ gelijk is aan $n-1-(-1)^n$.

Wij vinden dus

$$A = \sum_{m=1}^{n-1} (m-1) I_m + \{n-1-(-1)^n\} I_n.$$

Voor $B = \sum_{p=2}^{n-1} \{(-1)^p \Sigma'_p\}$ vinden wij op overeenkomstige wijze

$$B = \{n-1-(-1)^n\} I_0 + \sum_{m=1}^{n-1} (n-m-1) I_m.$$

Hieruit volgt

$$A + B = \{n - 1 - (-1)^n\} (I_0 + I_n) + \sum_{m=1}^{n-1} (n-2) I_m$$

d.w.z. voor *oneven waarden* van n :

$$A + B = 2(I_0 + I_n) + (n-2) \sum_{m=0}^n I_m$$

en voor *even waarden* van n :

$$A + B = (n-2) \sum_{m=0}^n I_m.$$

Bedenkt men dat $\sum_{m=0}^n I_m$ gelijk is aan de inhoud van de begrenzing van de sfeer, dus gelijk aan 1, $I_0 = I_n = I$ gelijk aan die van het sfeer-simplex S , terwijl $\Sigma_p = \Sigma'_p$, dan krijgt men voor *oneven waarden* van n :

$$2I = \Sigma_2 - \Sigma_3 + \Sigma_4 \dots + \Sigma_{n-1} - \frac{n-2}{2} \quad (1)$$

en voor *even waarden* van n :

$$\Sigma_2 - \Sigma_3 + \dots - \Sigma_{n-1} = \frac{n-2}{2}. \quad (2)$$

Formule (1) is de generalisatie van die voor de oppervlakte van de boldriehoek. Voor $n = 3$ krijgt men $I = \frac{1}{2} \Sigma_2 - \frac{1}{4}$, welk antwoord in de gewone vorm overgaat als men terugkeert naar de gebruikelijke eenheden.

Formule (2) geeft een in ruimten van een even aantal afmetingen geldend verband tussen de hoeken van een sferisch simplex.

Uit (1) en (2) kan men op de bekende wijze een relatie voor de hoeken van een gewoon simplex afleiden door de straal van de sfeer tot oneindig te laten naderen. In (1) wordt dan $I = 0$; hieruit volgt dat voor een gewoon simplex (in R_{n-1}) voor elke waarde van n geldt

$$\Sigma_2 - \Sigma_3 + \dots + (-1)^{n-1} \Sigma_{n-1} = \frac{n-2}{2}.$$

Voor $n = 3$ krijgt men $\Sigma_2 = \frac{1}{2}$ (d.i. als men op de eenheden let, de gewone formule voor de som van de hoeken van een driehoek), terwijl voor $n = 4$ de betrekking $\Sigma_2 - \Sigma_3 = 1$ voor het tetraeder ontstaat, die boven reeds werd gevonden.

XXX.

De ladder tegen de muur.

Het vraagstuk van de ladder, die met het ene uiteinde op de grond en met het andere tegen een verticale muur steunt, heeft een voorname plaats onder de evenwichtsvraagstukken der middelbare mechanica.

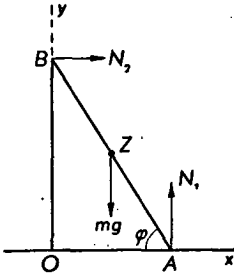


Fig. 1.

Is er geen wrijving en geen andere kracht dan de zwaartekracht, dan is geen evenwicht mogelijk, maar ontstaat een welbekend probleem der dynamica. Het interessante is daarbij, dat het contact met de muur niet bewaard blijft: in een stand, die afhankelijk is van de beginvoorwaarden, laat de ladder de muur los.

Is (fig. 1) de ladder homogeen met massa m en lengte $2l$, φ de hoek met het horizontale vlak, g de versnelling van de zwaartekracht, dan luidt de energievergelijking

$$\frac{1}{2} ml^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} ml^2 \ddot{\varphi}^2 + mgl \sin \varphi = c \quad (1)$$

Is in de beginstand $\varphi = \alpha$ en wordt de ladder zonder beginsnelheid los gelaten, dan heeft men dus

$$2\ddot{\varphi}^2 + 3\frac{g}{l} \sin \varphi = 3\frac{g}{l} \sin \alpha \quad (2)$$

Voor de beweging van het zwaartepunt Z in de X -richting geldt

$$N_2 = m(l \cos \varphi) \ddot{\varphi}$$

dus:

$$N_2 = ml(-\sin \varphi \cdot \ddot{\varphi} - \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}^2) \quad (3)$$

Uit (2) volgt:

$$\ddot{\varphi}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} (\sin \alpha - \sin \varphi), \quad \ddot{\varphi} = -\frac{3}{4} \frac{g}{l} \cos \varphi,$$

zodat

$$N_2 = \frac{3}{4} mg \cos \varphi (3 \sin \varphi - 2 \sin \alpha). \quad (4)$$

Hieruit blijkt dat de muur wordt losgelaten in de stand waarbij $\sin \varphi = \frac{2}{3} \sin \alpha$. Dit is bekend resultaat. Volgens Walton¹⁾ werd het probleem reeds gesteld en opgelost in de *Lady's and Gentleman's Diary* voor het jaar 1757.

Prof. Bremekamp maakte mij opmerkzaam op het volgende,

¹⁾ W. Walton, A Collection of problems in illustration of the principles of theoretical mechanics, third edition (Cambridge, 1876), pg. 438—440.

verwante vraagstuk, dat een merkwaardige bijzonderheid doet zien.

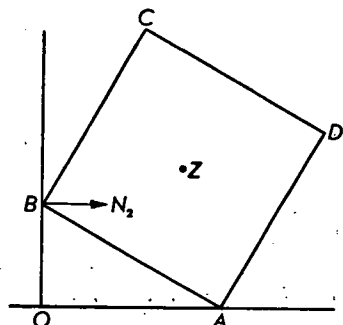


Fig. 2.

Een homogene vierkante schijf (fig. 2) beweegt zich in een verticaal vlak, loodrecht op de muur en wordt zonder beginsnelheid losgelaten in een stand waarbij twee hoekpunten A en B resp. op de grond en tegen de muur rusten.

Het blijkt nu dat het vierkant de muur onmiddellijk loslaat.

Men kan dat b.v. als volgt inzien.

OA_ZB is een koorden-vierhoek,

dus $\angle ZOA = \angle ZBA = 45^\circ$.

Bij een beweging waarbij A op de grond en B op de muur blijft, zal dus Z de rechte OZ beschrijven. Volgens het energiebeginsel zal Z zich in neerwaartse richting, dus naar O gaan bewegen. Z heeft dus een begin-versnelling, waarvan de horizontale component naar links gericht is. De enige horizontale kracht is echter N_2 , die gericht is naar rechts. Het vierkant laat dus dadelijk los.

Men kan zich de vraag stellen onder welke omstandigheden een willekeurig planimetrisch lichaam, dat in A op de grond en in B tegen de muur rust en zonder beginsnelheid onder de hellingshoek α wordt los gelaten, onmiddellijk het contact met de muur verliest.

Zij (fig. 3) Z het zwaartepunt, Z' de projectie van Z op AB, $BZ' = p$, $Z'A = q$, $ZZ' = r$, m de massa, $m\varrho^2$ het traagheidsmoment t.o.v. Z, P het snijpunt der dragers van N_1 en N_2 x en y de coördinaten van Z t.o.v. P, X en Y die van Z t.o.v. O.

Eenvoudshalve veronderstellen wij $p > 0$, $q > 0$, $r \geq 0$.

Nu is

$$X = p \cos \varphi + r \sin \varphi,$$

$$Y = q \sin \varphi + r \cos \varphi$$

zodat voor de beginstand ($\varphi = \alpha$, $\dot{\varphi} = 0$, $\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}_0$) geldt:

$$\ddot{X} = (-p \sin \alpha + r \cos \alpha) \ddot{\varphi}_0 = y \ddot{\varphi}_0,$$

$$\ddot{Y} = (q \cos \alpha - r \sin \alpha) \ddot{\varphi}_0 = -x \ddot{\varphi}_0$$

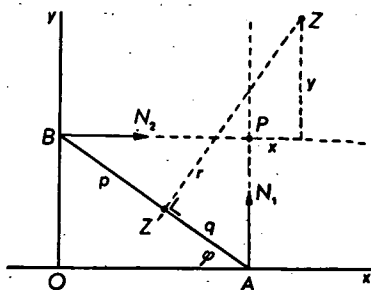


Fig. 3.

De drie bewegingsvergelijkingen luiden dus voor de beginstand:

$$\begin{aligned} N_2 &= m\ddot{\varphi}_0, \quad N_1 = mg - m\ddot{\varphi}_0 \\ N_1x - N_2y &= m\varrho^2\ddot{\varphi}_0 \end{aligned} \quad (5)$$

waaruit volgt:

$$\ddot{\varphi}_0 = \frac{gx}{x^2 + y^2 + \varrho^2} \quad (6)$$

$$N_2 = mg \frac{xy}{x^2 + y^2 + \varrho^2} \quad (7)$$

Uit (7) lezen wij af dat de muur dadelijk wordt losgelaten als $xy \leq 0$. Het contact wordt alleen bewaard als $xy > 0$, dus als Z rechts van A en tevens boven B , dan wel links van A en tevens beneden B ligt. In het eerste dezer beide gevallen zal volgens (6) $\ddot{\varphi}_0 > 0$, in het andere $\ddot{\varphi}_0 < 0$ zijn.

Deze resultaten zijn overigens ook met overwegingen der kinematica goed in te zien. Immers als het contact bewaard blijft is P de pool der beweging en daar $\dot{\varphi}_0 = 0$ is, tevens de versnellingspool. Daar A zich horizontaal beweegt is de versnellingshoek gelijk aan $\frac{\pi}{2}$; hieruit volgt dat de versnelling van Z loodrecht op PZ staat, en daar deze versnelling een neerwaartse gerichte component heeft, zal de horizontale component alleen dan naar rechts gericht zijn als Z in het eerste of derde kwadraat om P ligt. Alleen in dit geval is dus $N_2 > 0$.

Het bovengenoemde criterium voor het loslaten hangt af van α ; wij stellen de vraag bij welke vaste lichamen het verschijnsel voor elke beginstand optreedt. Kiezen wij de analytische oplossingsmethode, dan luidt de vraag: wanneer is $xy \leq 0$ voor elke waarde van α . Men heeft

$$\begin{aligned} xy &= (r \cos \alpha - p \sin \alpha) (r \sin \alpha - q \cos \alpha) \\ &= -pr \sin^2 \alpha - qr \cos^2 \alpha + (pq + r^2) \sin \alpha \cos \alpha \\ &= -\cos^2 \alpha [pr \operatorname{tg}^2 \alpha - (pq + r^2) \operatorname{tg} \alpha + qr]. \end{aligned}$$

De quadratische functie van $\operatorname{tg} \alpha$ heeft de discriminant

$$D = (pq - r^2)^2.$$

Is $pq \neq r^2$, dan is $D > 0$, zodat er waarden van α zijn, waarvoor de kwadratische vorm negatief en dus xy positief is. Zal $xy \leq 0$ zijn voor elke α , dan is dus nodig (en voldoende): $pq = r^2$.

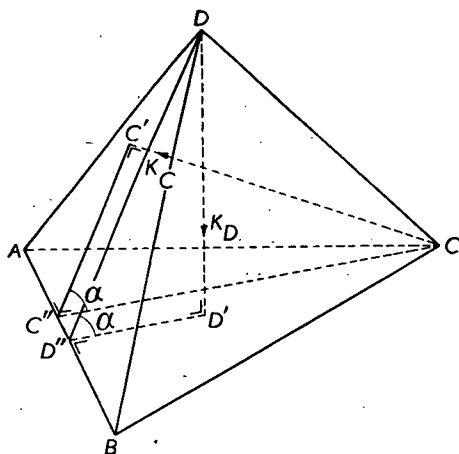
Zal het lichaam in elke beginstand onmiddellijk de muur loslaten

dan moet Z liggen op de (halve) cirkel met AB tot middellijn. Voor deze omstandigheid levert het homogene vierkant een voorbeeld.

XXXI. *De hoogtelijnen van een viervlak.*

De hoogtelijnen van een viervlak gaan in het algemeen niet door één punt. Zij vormen wel een bijzondere figuur: een bekende stelling zegt dat zij beschrijvende lijnen zijn van een hyperboloïde. Men zou deze eigenschap met behulp van overwegingen uit de statica als volgt kunnen bewijzen. Zij $ABCD$ het viervlak; AA' , BB' , CC' en DD' zijn de hoogtelijnen. Wij laten op het viervlak krachten werken, waarvan de werklijnen langs de hoogtelijnen vallen en die de richting hebben van AA' enz.; de grootte van de krachten nemen wij evenredig met de oppervlakte van het overstaande zijvlak:

$$K_A = k \cdot O(BCD), \quad K_B = k \cdot O(CDA), \quad K_C = k \cdot O(DAB), \\ K_D = k \cdot O(ABC),$$



waarin k een evenredigheidsfactor is.

We berekenen de som van de momenten van de vier krachten ten opzichte van AB . Het moment van K_A en dat van K_B is nul. Is D'' de projectie van D' op AB , dan is het moment van K_D gelijk aan

$$K_D \cdot D'D'' = k \cdot O(ABC) \cdot DD'' \cos \alpha = \frac{2k}{AB} \cdot O(ABC) \cdot O(DAB) \cdot \cos \alpha,$$

waarin α de hoek tussen de vlakken ABC en ABD voorstelt. Voor het moment van K_C vindt men

$$K_C \cdot C'C'' = \frac{2k}{AB} \cdot O(DAB) \cdot O(ABC) \cos \alpha$$

en daar de twee momenten tegengestelde zin hebben is de som van de momenten der vier krachten gelijk aan nul. Hetzelfde geldt blijkbaar ten opzichte van de andere ribben van het viervlak. Het krachtenstelsel heeft dus om elk der drie, niet in één vlak gelegen rechten AB, AC en AD het moment nul; anders gezegd: de koppels die ontstaan als men de krachten naar A „overbrengt” heffen elkaar op. De vier krachten zijn dus of gelijkwaardig met een kracht door A of zij heffen elkaar op.

Daar hetzelfde geldt voor elk andere hoekpunt, is de conclusie: *de vier krachten zijn in evenwicht*. Daaruit volgt echter dat de som van de momenten der krachten ten opzichte van elke rechte van de ruimte nul is. Kiest men een transversaal over drie der hoogtelijnen dan is dus het moment van de vierde kracht gelijk aan nul, waaruit volgt dat de transversaal ook de vierde hoogtelijn ontmoet.

Wij hebben dus: *elke rechte, die drie hoogtelijnen van een viervlak snijdt, snijdt ook de vierde hoogtelijn*.

Deze redactie van de stelling en het gegeven bewijs zijn geheel elementair. Bij het bekende bewijs van de hyperboloïdische ligging, dat berust op de constructie van vier (of drie) transversalen, wordt gebruik gemaakt van eigenschappen van de hyperboloïde (met name dat deze een oppervlak van de tweede graad is).

De stelling en het bewijs gelden voor ruimten van een willekeurig aantal dimensies. Legt men langs de hoogtelijnen van een driehoek krachten, evenredig met de overstaande zijden, dan is de som van de momenten om elk hoekpunt nul, de drie krachten zijn in evenwicht en gaan dus door één punt. In een ruimte van n afmetingen luidt de stelling: de $(n + 1)$ hoogtelijnen van een simplex zijn *geassocieerd*, d.w.z. elke $(n - 2)$ -dimensionale ruimte, die n der hoogtelijnen snijdt, ontmoet ook de $(n + 1)$ -de hoogtelijn.

HET LIMIETBEGRIIP I

door

Dr. J. KOKSMA.

De wetenschap gaat steeds voort en elke volgende generatie heeft weer meer stof zich eigen te maken, voordat ze verder kan gaan. Voor de mogelijkheid daartoe zorgt de wetenschap zelf; telkens, wanneer het overzicht dreigt verloren te gaan, komt de behoefte aan critische bezinning, samenvatting en schifting; het bijkomstige en oppervlakkige worden uitgescheiden, het essentiële steeds helderder doordacht, daardoor steeds beter toegankelijk gemaakt en steeds bondiger saamgevat. De school heeft dat proces te volgen en dat ze dat in het verleden op grandioze wijze gedaan heeft, zal ieder merken, die zich eens bezighoudt met de ontwikkeling der rekenkunde van de oude tijden tot en met de middeleeuwen; hij moet zich wel realiseren welk een formidabel stuk aldus geordende wetenschap reeds de lagere school haar leerlingen meegeeft.

Het is ongetwijfeld pikant vroegere cultuurstadia met het onze te vergelijken, daarbij te blijven staan betekent echter slechts ten halve van het verwerven van historische kennis profiteren. De eigenlijke les der geschiedenis bestaat daarin, dat men in het licht van het vorige ook het eigen stadium leert zien als phase van een ontwikkeling; waartegenover men dan van zekere distantie zijn houding bepalen kan. Gemakkelijk is dat niet, er is al zoveel sindsdien verworvens weg te denken om tot een zuivere waardering van het verleden te geraken, dat het zeker niet meevalt om het op vruchtbare wijze weer in het heden te projecteren. En wat dan de toekomst betreft, ook dan nog kunnen we ons daarvan maar een vaag beeld vormen; ook komt ze maar niet zo over ons, we vormen ze zelf mee. Het is geen wonder, dat we niet veel meer dan uiterlijkheden kunnen zien, gevangen als we zitten in eigen voorstellingen.

Zo is het interessant de Babylonische rekenkunst met onze eigene te vergelijken, moeilijker is het al de genialiteit in de eerste echt aan te voelen en de stadia van de ontwikkeling naar de onze op hun juiste waarde te schatten; waar het echter op aan komt is, eenzelfde ontwikkeling, die kort als door intuïtie geleide abstractie en formalisatie gekarakteriseerd kan worden, ook te verwachten ten aanzien van later ontstane hogere rekenmethoden.

De beperkte invoering bijvoorbeeld van de infinitesimaalrekening op de middelbare school is niet zonder strubbeling gegaan, toch is het te verwachten, dat ze nog veel meer centraal zal worden. Ik stel dat meer als profetie dan als desideratum, het laatste behoort het echter ook te zijn, zodra men met de eerste instemt. De weg naar de vervulling is niet zo duidelijk, de mogelijkheid daarvan ontkennen betekent echter een verabsolueren van eigen moeilijkheidsvoorstellingen, waarmee gesteld zou zijn, dat de ontwikkeling in ons haar eind gevonden heeft.

Het is duidelijk, dat hier taken liggen; de twee voor de hand liggende lijken me in de eerste plaats een nauwlettend nagaan of van de in de wetenschap voorgaande ontwikkeling ten volle partij getrokken wordt en ten tweede een voortdurend herzien van eigen opvattingen, vooral door te letten op de factoren, waardoor ze worden bepaald. Ten aanzien van de genoemde moeilijkheidsvoorstellingen zou dat kunnen leren, dat ze voor een goed deel nauwelijks een reële achtergrond hebben, maar eenvoudig met de stof zijn overgeleverd. Zo lijkt het me bijvoorbeeld, dat de didactiek nog lang niet de mogelijkheden heeft uitgeput van het formalisatieproces, dat bekend staat als de arithmetisering van de wiskunde, en waarvan de uitkomsten de huidige generatie van docenten als het ware met de paplepel zijn ingegoten.

In een vorig artikel ¹⁾ heb ik getracht dit voor het functiebegrip aan te tonen; het bleek historisch belast met een drietal chimerische moeilijkheden, die eigenlijk alleen nog bestaan, omdat wij er (op een vage wijze) rekening mee houden. Het zou me zelfs niet verwonderen, wanneer ze nu reëler hinderden dan in de tijd, toen ze echt reden van bestaan gehad zouden hebben, omdat het functiebegrip nog niet helder doordacht was. Dit bestond uit een complex van voorstellingen, dat zich op natuurlijke wijze aanbood en daarom niet om speciale analyse vroeg, maar waarmee door routine vlot gewerkt werd. Dat laatste gebeurt nog, zodra de gebruiker zich door de opzettelijke elementaire behandeling heengeworsteld heeft. Onze didactiek namelijk pakt alles systematisch aan en bouwt het van onder op; ze heeft de inleiding tot de functieleer tot een apart hoofdstuk van de algebra gemaakt en dat van speciaal oefenmateriaal voorzien; het merkwaardige is nu, dat de didactische bezinning in dezen er toe geleid heeft te trachten juist die aspecten van het intuïtieve functiebegrip geforceerd te doen slikken, die bij de arithmetisering van het begrip als onwezenlijk en dus vertroebe-

¹⁾ Eucl. 25, p. 313 e.v.

lend waren geëcarteerd, maar die daarvóór weinig hinderden, omdat de aandacht er toch niet speciaal op viel. Dat er van ons functie-onderwijs nu toch wat terecht komt, is mijns inziens geheel toe te schrijven aan de, evenals toen, door oefening verkregen routine; alleen wordt nu het verkrijgen daarvan door de theoretische behandeling eerder belemmerd dan bevorderd.

Aan de andere kant kan men het natuurlijk bij het bijbrengen van het functiebegrip niet bewust op de routine aan laten komen. Dat behoeft dan ook niet, het is zeer wel mogelijk voor de functie inzicht te wekken, daarvoor hoeft de didactische bezinning zich slechts te conformeren aan de wetenschappelijke van driekwart eeuw geleden. Gebeurde dat, dan zou dat al direct een aanzienlijke verbetering betekenen in het functieonderwijs zoals het reilt en zeilt, het moet echter mogelijk zijn een methode uit te werken, die het onderwijs in de algebra van het begin af op natuurlijke wijze op het functiebegrip richt.

De moeilijkheid die in het aangehaalde artikel speciaal onderzocht werd was gelegen in het *letterlijk* nemen van de suggestie van *veranderlijkheid*, die het functiebegrip aankleeft. Het is best mogelijk dat deze „veranderlijkheid” in de algemene functievoorstelling, zoals die in de toepassing naar voren komt, althans soms, wel degelijk essentieel is, de wiskundige analyse heeft er echter geen plaats voor en moet ze elimineren, beter gezegd misschien: het functiebegrip er van abstraheren. Dat x een „veranderlijke” is, wil bij haar niets zeggen dan dat x verschillende getallen betekenen kan, maar daarmee is niets meer of anders uitgesproken, dan aan het begin der algebra van de betekenis van een *letter* gezegd is of gezegd had kunnen worden. Formeel vallen de begrippen „veranderlijke” en „letter” samen, wordt dit karakter van de „letter” direct in het licht gesteld en vastgehouden, dan kan men ongedwongen, waar men wil, de functie invoeren als uitkomst van een lettervorm. Het zou gewenst zijn de „letter” daartoe een speciale naam te geven; ik stelde voor het woord „grootheid” in ere te herstellen, dat in deze betekenis, zij het ongedefinieerd, algemeen in zwang geweest is. Dit zou kunnen geschieden door de definitie: „een symbool heet een grootheid, als het elk element van een gegeven verzameling getallen betekenen kan.” Bij de overgang naar de functie kan men de grootheid „veranderlijke” of ook „veranderlijke grootheid” gaan noemen; formeel algebraïsch bestaat deze overgang net zo min als het onderscheid tussen grootheid en veranderlijke; ze wil eenvoudig zeggen dat men een speciaal soort vragen gaat behandelen. Voorzover de „veranderlijkheden”-suggestie daarbij nuttig is, zal ze

vanzelf wel optreden; voorzover ze in het functiebeeld essentieel is, zal ze in de toepassing evenzeer vanzelf naar voren komen.

Het is duidelijk dat deze beschouwingen in het bijzonder consequenties hebben voor het in het gegeven verband fundamentele begrip van de *limiet*; men zal dat het beste inzien, wanneer men zich nu even wil realiseren, dat een uitdrukking als „ n nadert naar oneindig” *geen enkele zin* heeft, wanneer ze *op zichzelf* staat. Ze kan alleen worden gebruikt als onderdeel van een volledige limietbewering; luidt die: „als n naar oneindig nadert, nadert a_n tot a ”, dan is de zin daarvan vervat in de exacte omschrijving: „bij elk positief getal ε kan een positief getal N worden gevonden, zodanig dat $|a_n - a| < \varepsilon$ als $n > N$ ” en het is dwaasheid te menen hieruit een zin voor een los van de rest naar oneindig naderende n te kunnen isoleren.

Ook deze uitdrukking stamt uit het arsenaal van intuïtieve voorstellingen, waarmee men enige eeuwen terug werkte, vermoedelijk zonder de behoefte te voelen ze nader te ontleden; eigenlijk is zo’n omschrijving nog veel te zwak, om een volslagen onbewustheid van de noodzakelijkheid ener analyse aan te duiden. Dat die noodzakelijkheid sinds gevoeld, die analyse sinds verricht is, heeft ons voorgoed de onbevangenheid ontnomen, waarmee men vroeger met die termen omgegaan moet zijn. Wij kunnen de vraag naar hun betekenis niet meer omzeilen, omdat we aansturen op een definitie van meer of minder exactheid en het gevaar is groot dat de suggestie van een „naderende” n ons daarbij in de weg staat. Natuurlijk is tegen een ietwat vrij gebruik van die n geen bezwaar; het verband met de volledige limietuitspraak behoeft *grammaticaal* niet eens zo eng te zijn, in *gedachten* moet het echter duidelijk aanwezig zijn. Dat is bij de geroutineerde mathematicus dan ook steeds het geval, hij heeft de exacte omschrijving steeds tot zijn beschikking; anders is het echter met de leerling die het begrip voor het eerst ontmoet. Ook voor hem mag de terminologie slechts op het tweede plan staan en geen letterlijke betekenis hebben; in principe is het daarom gewenst, dat hij *eerst* leert het wezen van de limiet in de exacte omschrijving te zien en pas dan met de terminologie in kennis gebracht wordt. Dat dat steeds uitvoerbaar is, zou ik niet durven beweren; in sommige gevallen zullen de didactische moeilijkheden zeker groot zijn. Het „naderen” kan zich wel zo opdringen, dat het vooropstellen van het exacte begrip een gekunstelde omweg lijkt, dus tot formaliteit wordt, die geen inzicht geeft, maar voor kennisgeving aangenomen wordt. Een dilemma is dan niet te vermijden;

het blijft een feit dat iedere klem op het naderen van het exacte begrip af voert; het laatste is immers resultaat van een bezinning die psychologisch noodzakelijk werd, zodra er aanleiding was naar de betekenis van de gebruikte termen te vragen; bij die bezinning is juist alles weggeslepen, wat nu de nadruk krijgen zou.

In haar product, de exacte definitie, ligt niets meer, dat ook maar naar „veranderlijkheid” zweemt, met elk letterlijk „naderen” vallen we daarom weer in overwonnen moeilijkheden terug, we gaan juist tegen de ontwikkeling in en blokkeren voor onze leerling de weg naar helder inzicht. Dat dat op „didactische gronden” gebeurt, is een slag in de lucht; het ontmaskert de reverentie voor de exacte definitie als slechts een lege formaliteit. Met de laatste opmerking is een interessant psychologisch probleem gesteld: indien kan worden aangetoond, dat het limietonderwijs werkelijk op de gewraakte wijze wordt aangepakt, zou dat betekenen dat het exacte begrip, ondanks jarenlange geroutineerde hantering, ons zó weinig levende geestelijke verworvenheid geworden is, dat de bezinning, die het onderwijs vergt en die van andere aard schijnt te zijn dan de wetenschappelijke, ons zonder erg de *essentie* van het begrip doet zien in de ongeanalyseerde opvattingen van tweehonderd jaar terug.

Dat dat het geval is, staat voor mij wel vast. Zelf heb ik me nu al maanden met deze dingen beziggehouden; de daarbij verworven inzichten hebben me verrast, hoe vanzelfsprekend ze achteraf ook mogen lijken. Wat het algemene functieonderwijs betreft, daarbij is het vooropstellen van een letterlijk „veranderlijkheds”-karakter als essentieel voor het functiebegrip door de subtiliteit van het onderscheid nauwelijks ergens ondubbelzinnig te constateren; dat onderwijs verkeert overigens in een toestand, waarin het aan een bewust partij trekken van deze subtiliteiten nog niet eens toe is ¹⁾. Bij het limietonderwijs ligt de zaak anders, waar van de formeel-strengere behandeling wordt afgeweken is de nadruk op het „naderen” gemakkelijk te herkennen, zelfs wordt het wel uitdrukkelijk vooropgesteld.

Deze instelling bij zich zelf te corrigeren is geen gemakkelijk werk, het betreft hier diepere impulsen dan bij wetenschappelijk hanteren van het exacte begrip in werking komen. In hoeverre dat in ons onderwijs expliciet plaats behoort te hebben, kan voorlopig in het midden blijven; vast staat, dat het dieper in onze geest moet bezinken; zó diep namelijk, dat het ook voor onze intuïtie de essentie

¹⁾ Vgl. Eucl. 25, p. 55 e.v.

van de limiet uitdrukt. Dan zal men ook vanzelf, zoals het behoort, elke vereenvoudiging van de behandeling *van het exacte begrip* uit trachten te verkrijgen en met dat begrip als norm kunnen vergelijken.

Ik kan in dit artikel geen omlijnde voorstellen doen voor een systematische limietbehandeling, die van de geschetste gebreken vrij zou zijn. Het zou ook praematuur zijn dat te trachten; een verbeterde en vervroegde entree van het functiebegrip zou stellig ook de limiet beter toegankelijk maken, maar 'of en hoe het functie-onderwijs zich in de gewenste richting zal ontwikkelen moet worden afgewacht; de limietbehandeling zal er zich dan trouwens ook wel vanzelf aansluitend uit ontwikkelen. Enige aanwijzingen zijn echter al wel te geven: zo is bijvoorbeeld een helder inzicht in het boven omschreven grootheidsbegrip al vast een zeer goede voorbereiding; naar mijn ervaring geeft vaagheid hier bij de limiet extra moeilijkheden. Verder valt te wijzen op de ongelijkheden; het lijkt mogelijk van daaruit al haast aan het limietbegrip toe te komen, zonder dat de naam nog genoemd of van „naderen” gesproken wordt. En tenslotte is onze verdeling van de stof over hoofdstukken „vergelijkingen”, „ongelijkheden”, „functies” in hoge mate een traditionele aangelegenheid, in de toepassing waarvan voorzichtigheid en soepelheid geboden zijn. Eigenlijk behoorde geen onderwerp aan de orde gesteld te worden, waarvan de behandeling niet door het voorgaande zodanig is voorbereid, dat ze daaruit als vanzelf voortvloeit. Een ordelievende geest zal er toe neigen, angstvallig te zorgen dat geen onderwerp vóór het betreffende hoofdstuk ter sprake komt, toch is dat didactisch vaak weinig verkieslijk. Het direct centraal gestelde grootheidsbegrip geeft al dadelijk aanleiding tot vragen, die in feite onder de genoemde hoofden horen; stelt men die en houdt men dat vol, dan behoeft het speciale hoofdstuk over zo'n onderwerp misschien niet veel meer dan systematische samenvatting en afronding te bevatten.

Intussen blijft er voor een artikel als dit stof genoeg over. Het boven gezegde vraagt om adstructie en verder stel ik me voor het gehele betreffende onderwijsgebied eens vanuit dit gezichtspunt te verkennen. Het zal daarbij blijken, dat op vele punten al wel detailverbeteringen aan te brengen zijn.

Het lijkt gewenst met de bovengenoemde gevallen te beginnen, waarin het „naderen” zich het sterkst opdringt. Dat zijn die gevallen, waarin de benadering van de limiet geschiedt in stappen,

waarvan elk voor de volgende noodzakelijk is, zodat er geen kan worden overgeslagen. Dit zou zich bijvoorbeeld voordoen, wanneer men de irrationaliteit $\sqrt{2}$ zou willen opvatten als de limiet van haar decimale breukontwikkeling, die immers stap voor stap moet worden uitgerekend. Een ander voorbeeld is de benadering van de cirkel door regelmatige veelhoeken met voortdurende toepassing van de verdubbelingsformule. Verréwég het belangrijkste geval is echter dat van de convergerende reeksen; het wordt voor de meetkundige in extenso behandeld, ja zelfs dient het dikwijls als eerste kennismaking met het limietbegrip. Vooral deze omstandigheid maakt een dieper onderzoek van de convergente meetkundige reeks gewenst.

Voert men de sommaties in de reeks

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$$

achtereenvolgens werkelijk uit, dan is het geheel in overeenstemming met het spraakgebruik te spreken van een *aangroeiende som*; de voorstelling van een blijvend substraat onder de wisseling van vorm is zeer vertrouwd en inderdaad kan men elke voorgaande som vergeten zodra de volgende berekend is.

Ik denk niet dat de eerste sommeerders van oneindige reeksen veel scrupules gehad, die althans niet gemakkelijk verdrongen hebben, toen ze achter deze reeks $= 2$ zetten; voor hun gevoel moet 2 werkelijk de som geweest zijn. Het kost enige opzettelijke bezinning om zich de kloof te realiseren, die tussen 2 en de aangroeiende som bestaat en in welker overbrugging men geen stap zou vorderen, ook al telde men zijn gehele leven door. Realiseert men zich dat eenmaal, dan is het woord „naderen” noodzakelijk om het begrip „som van een oneindige reeks” te omschrijven; er wordt in ons geval mee bedoeld dat de aangroeiende som elk getal $2 - \varepsilon$ met willekeurige-positieve ε op de duur voorgoed overschrijdt, al blijft ze kleiner dan 2. Hier zal ook de oorsprong liggen van het „onbepaald” naderen, immers de som „nadert” evengoed tot 3, komt daar echter niet willekeurig dicht bij.

We kunnen hier alvast aantekenen, dat het woord „onbepaald” dus het *letterlijke* karakter van het „naderen” *onderstreept*, men kan het daarom didactisch *als ongewenst beschouwen*. We willen immers voortaan het limietbegrip in zijn essentie gegrepen achten in de exacte definitie; deze laat toe het woord „naderen” formeel te blijven gebruiken, echter ligt dan de bovenbeschreven ε -historie daarin *volledig uitgedrukt*. Toevoeging van het woord „onbepaald” is dus niet alleen overbodig, het werkt door de er mee gepaard gaande associaties zelfs verwarrend.

Eerst wanneer de behoefte komt het begrip van een „aangroeiende som” te funderen op het statische getalbegrip der wiskunde, zet diepere bezinning in; ze begint met het uitdrukkelijk spreken van *sommen*, in het meervoud; de getallenrij

$$(1) \qquad 1, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, \dots$$

ontstaat. Deze behoefte is gevolg van een eeuwenlange ontwikkeling, ze treedt bij de leerling zeker niet vanzelf op. Het staat zelfs te vrezen dat wij ze *zelf* niet of nauwelijks voelen, althans niet buiten onze wetenschappelijke wiskundige activiteit en daarvoor hebben we dat *geleerd*, het is maar de vraag hoe diep het zit. De „aangroeiende som” is voor onze leerlingen volkomen aanvaardbaar, de omweg via de variant moet hun wel gekunsteld en onnodig lijken; in het laatste hebben ze trouwens gelijk, wanneer we toelaten, dat zich dan toch weer de voorstelling van een „veranderlijk getal” gaat vastzetten. De situatie is dienaangaande vrijwel hopeeloos, wanneer de variant nog moet worden ingevoerd en het limietbegrip daarvoor nog ontwikkeld. Wil men hier het dynamische op het statische terugvoeren, dan moet het laatste al vertrouwd zijn; de variant zou dus met het limietbegrip al moeten zijn behandeld, als men het sommeren van de oneindige meetkundige reeks in zijn statische essentie wil doen verstaan. Dat maakt het gewenst nu eerst de variant eens nader te onderzoeken.

Is een variant gegeven, dan dringt zich intuïtief de voorstelling op van een *wordende* rij getallen, waarvan we bij een limietbeschouwing het *gedrag* onderzoeken; de rij (1) *construeerden* we bovendien zelf. Ons strengheidsgevoel eist fundering op het statische getalbegrip, het kan dus geen genoegen nemen met een *wordende* rij; hiermee gepaard gaat een zucht tot *objectiveren* van de rij, ze wordt losgemaakt van de construerende onderzoeker. Ze moet buiten hem zijn *gegeven*, ze *ligt* er, wij onderzoeken haar *verdeling*. De laatste opvatting bevat zeker ook elementen, die bij voortgezette analyse moeilijkheden kunnen opleveren, het is ook best mogelijk dat de eerste de diepste is en de tweede zich nog in die zin verdiepen zal. Met dat al is de tweede de heersende, haar te verdiepen is zaak van de wetenschap; de didactiek heeft zich, desnoods in afwachting, aan haar te houden.

Zeggen we dus dat de rij (1) de limiet 2 heeft, dan is daarmee niet het *gedrag van een veranderend getal*, maar de *verdeling van een gegeven rij* gekarakteriseerd; dat wordt volkomen adaequaat uitgedrukt door de moderne uitspraak; dat „bijna alle” getallen van

de rij in een willekeurige „omgeving” van 2 liggen. Simpel gezegd voorwaar! te simpel blijkbaar, want deze zegwijze is in ons onderwijs allerm minst ingeburgerd. De oorzaak kan niets anders zijn dan het feit, dat alle naderingsfranje, waarmee onze intuïtie het functiebeeld nog steeds omhult, er uit verdwenen is; geven we de leerling die niet, dan hebben we het gevoel hem het essentiële te onthouden; hier werkt dus niets dan de zwartste reactie! Inderdaad, nogmaals, de zaak is niet gezond, voordat onze intuïtieve limietvoorstelling samenvalt met de exacte. De rest moet slijten!

Men merke vooral op, dat in (1) slechts één rij is voorgesteld en dat daarvan niet de „algemene term” is neergeschreven met behulp van de index n . Daaraan juist dankt de gegeven omschrijving haar doorzichtigheid. Zodra men echter iets wil *bewijzen*, zal men moeten schrijven $2 - \frac{1}{n}$, met het gevaar dat nu toch, omdat maar

één getal lijkt neergeschreven te zijn, het „veranderlijke getal” weer optreedt. Van (1) zou men gerust kunnen zeggen, dat de getallen van de rij van een bepaald *getal* af groter zijn dan $2 - \epsilon$; aan een *rangnummer* behoeft men in het geheel niet te denken. Bij $2 - \frac{1}{n}$ zal

men al spoedig spreken van „van een bepaalde n af”; een stap verder laat men n al de rij der natuurlijke getallen „doorlopen” en tenslotte heeft n zich opgewerkt tot een zelfstandige „onafhankelijk variabele”, die op eigen houtje naar oneindig nadert. Nu weer tot de strenge opvatting terug te gaan is aanzienlijk lastiger dan bij de rij (1), het is moeilijk deze opgeroepen geest weer kwijt te raken. Integendeel, hij wordt voortdurend opstandiger; men kan hem zelfs wel „onbepaald” naar oneindig zien naderen, wat natuurlijk volslagen onzinnig is.

Hier ligt nu juist een punt, waarvoor ik me veel voorstel van de voorbereiding, die een helder groothedsbegrip zou geven. Bezit de leerling dat, dan weet hij van te voren, wat een „algemene term” betekent; het kan hem dan niet moeilijk vallen in $2 - \frac{1}{n}$ een gehele rij gerepresenteerd te zien. Maar daarmee zou hij toegankelijk zijn voor de gegeven moderne omschrijving, zonder overdreven belangstelling voor n als onafhankelijk variabele.

Nog sprekender is het nut van het groothedsbegrip bij de volgende stap, die naar de *algemene rij* a_n . Dit is een enorme generalisatie, waarmee de leerling grote moeite heeft; ik ben trouwens niet tevreden, voordat hij om zo te zeggen in a_n alle mogelijke rijen van

alle mogelijke getallen ziet. Mijns inziens heeft de algemene behandeling van een onderwerp geen nut, wanneer de leerling niet onmiddellijk in staat is te specialiseren; daartoe is het het beste van het speciale op te klimmen. Vóór a_n te stoppen gaat niet best, wel mag er op gewezen worden, dat men niet die twee kenmerkende trekken der wiskunde: haar strengheidsbehoefte en haar zucht tot generaliseren, moet vereenzelvigen. Bij het limietbegrip denkt men meestal in zeer algemene termen; misschien is het goed er hier op te wijzen, dat de leerling die de variant $2 - \frac{1}{n}$ behandelen kan en

andere varianten naar dit voorbeeld, het strenge limietbegrip voor varianten beheerst, ook al zou men a_n geheel laten rusten. Het laatste behoeft echter niet, bovendien heeft men a_n nodig. De variant treedt namelijk vrijwel in elke limiettoepassing op; meestal wordt ze daartoe geconstrueerd en dat dikwijls in de algemeenste vorm.

Bij zulk een toepassing heeft men meestal wel al een getal a als de vermoedelijke limiet op het oog, de strenge behandeling bestaat dan enkel uit het bewijs, dat a werkelijk de limiet is. Het totale procédé behoort nu in een reeks routinehandelingen te verlopen: de constructie van de rij komt neer op de berekening van één term a_n , waarbij aan n als aan een zeker natuurlijk getal gedacht mag worden; iets overeenkomstigs geldt voor ε in de nu op te stellen ongelijkheid $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$. Al naar de gestelde vraag kan men zich vergenoegen met het bewijs dat deze ongelijkheid voor voldoende grote n vervuld is, of wel kan het nodig zijn ze op te lossen; van belang is dan nog dat de gebruikelijke eis van een volledige oplossing hier vervalt: men kan immers het linkerlid door een groter, het rechter door een kleiner getal vervangen, als dat geschikter uitkomt.

In alle wiskundig werk is routine noodzakelijk, het kenmerk van gezonde routine is echter, dat ze uit *inzicht* is gekweekt en dat de geest zich op elk punt onmiddellijk de volle betekenis van zijn handelingen kan realiseren. Dat betekent hier enerzijds, dat van het naakte exacte limietbegrip moet worden uitgegaan, anderzijds dat een helder groothedsbegrip onmisbaar is. Op elk ogenblik moet immers beseft kunnen worden, dat men in ε met alle positieve getallen opereert; evenzo moet men in staat zijn in te zien, dat men in a_n alle termen van de rij voor zich heeft. Aandacht verdient ook de beperking van de verzameling der waarden van n tengevolge van het oplossen der ongelijkheid, deze oplossing betekent immers

een keuze uit de waarden van n ; om de zaak nog ingewikkelder te maken, hangt die keuze van de waarde van ε af.

Bij de gebruikelijke behandeling zijn de twee genoemde voorwaarden als regel niet vervuld, dat er dan moeilijkheden komen, ligt voor de hand. Meestal tracht men die te ondervangen door de variant van het begin af op te schrijven, die „werkelijk” te laten „worden”; de „algemene term” a_n betekent dan een geheimzinnig iets, dat de rij „doorloopt”, dat wil zeggen, zich „achtereenvolgens” even met de opeenvolgende termen van de reeks identificeert en deze eventueel alzo construeert. Zijn vermoedelijk gedrag wordt afgelezen uit de begintermen, door daarin monotonie op te merken of daardoor simpelweg convergentie te laten suggereren, zodat in te zien is dat a_n op de duur in het ε -interval verzeilt. Daar zit men er wel eens wat mee verlegen, nu plotseling exact te worden betekent zo’n grote sprong, dat de vraag volkomen verklaarbaar is, „wat die ongelijkheden nu met limieten te maken hebben.”

Ik zou deze handelwijze willen noemen het *werken naar de limiet toe*. Het heeft nog een ander bezwaar: de klem, die de begintermen van de rij krijgen; een andere moeite gevende merkwaardigheid is immers, dat die begintermen er in het geheel niets toe doen. Formeel heeft men ter definitie van de limiet de gehele rij nodig, toch kan men de begintermen tot een willekeurig aantal verwaarlozen.

Het komt me voor, dat de op exact inzicht gebaseerde behandeling kan worden gekarakteriseerd als een *denken van de limiet uit*; daarmee is dan een geesteshouding bedoeld en niet een precies te omschrijven werkmethode, het is een quaestie van gericht zijn van de aandacht; die valt dan in het geheel niet op de begintermen. Voor de rij (1) bijvoorbeeld betekent het: 2 in gedachten hebben en daar meteen $2 - \frac{1}{n}$ mee te confronteren, dus op te merken, dat hun verschil $\frac{1}{n}$ willekeurig klein te maken is.

Ik geloof dat onze intuïtieve limietvoorstelling ten diepste een denken naar de limiet toe is; als we toch exacte behandeling wensen, moet dat wel krampen geven. Dat we daar in wetenschappelijk werk geen last van hebben kan daaraan liggen, dat de didactische bezinning dieper is dan de wetenschappelijke; geheel exacte limietbehandeling laat trouwens voor een denken naar de limiet toe geen ruimte. In ons onderwijs neemt het echter een grote plaats in.

Tenslotte in dit verband een opmerking over limieten bij functies. Het lijkt me niet verstandig hier op varianten terug te gaan. Streng

doet toch geen mens dat; voor het begrip is het voor een geval als $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ onnodig, het beduidt weer een ongewenste naderingsnadruk. Alle in aanmerking komende x -waarden in een rij te rangschikken is onmogelijk, waarom er een rij uit te pikken? Het grootheidsbegrip bereidt evenzeer voor op de interpretatie: bij elke omgeving van b is een omgeving van a te vinden, zodanig dat $f(x)$ in die omgeving van b ligt als x in die omgeving van a ligt. Natuurlijk is $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ wat moeilijker, ook iets moeilijker dan de convergente variant, omdat x , in tegenstelling met n een echte onafhankelijk variabele is.

Omgekeerd kan men uit een oogpunt van systematiek prefereren de variant als een bijzonder geval van het laatste op te vatten, daarmee offert men echter de grotere eenvoud van een aparte behandeling op.

Er zit aan het limietbegrip een kant, die hier ook wel even in het licht gesteld mag worden: ik bedoel de betekenis van de limiet voor het approximatieve rekenen. Dat $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ is, wil immers zeggen, dat men a voor a_n mag zetten of a_n in plaats van a mag nemen, waarbij dan de mogelijkheid van een willekeurig goede benadering gegarandeerd is.

Een eeuwigdurende rente is een formeel begrip; van de verlegenheid, waarin men komen zou, wanneer men bij de berekening van de contante waarde werkelijk alle mogelijkheden van een ongewisse toekomst in de verplichting vercalculeren wou, maakt men zich af door a in plaats van a_n te nemen, alle speculatie omtrent n is dan overbodig. Omgekeerd: geeft men π in een zeker aantal decimalen, dan heeft men de cirkel vervangen door een ingeschreven regelmatige veelhoek met een voldoende groot aantal zijden, hier is a_n voor a genomen. Inderdaad zit in deze benaderingsgarantie de hele betekenis van het limietbegrip voor de praktische toepassing er van en iets anders zegt de definitie ook niet, men heeft dus zelfs het recht, hierin het volle wezen van het begrip te zien. De theoretische natuurkunde loopt van voorbeelden hiervan over, alle werken met differentiaal en variaties valt er onder. Bij mijn studie heb ik daarmee nog al eens moeite gehad; ik schrijf dat nu toe aan een te vaag limietbegrip, een te sterke „naderings”-voorstelling, wat dat dan ook zijn moge. Inderdaad is het lastig van het „naderen” uit tot deze toepassingen te komen, telkenmale moet dan de hele weg

naar het exacte begrip worden afgelegd. Een aardig schoolvoorbeeld is het vervangen van $\sin x$ door x voor kleine x , dat bij de juiste limietvoorstelling onmiddellijk moet worden begrepen; men kan er licht de proef mee nemen.

Het begint er op te lijken dat de naderingssuggestie werkelijk tot niets nut is. Dat is mijn mening wel, ik wil ze echter niet te sterk poneren, het is zeer moeilijk na te gaan van welke voorstellingen men zich bij het hanteren van limieten bedient. Dat is grotendeels routinewerk; men kent een groot aantal bijzondere gevallen, voor ingewikkelde beschikt men weer over zoveel stellingen en hogere op de limiet gebaseerde begrippen, dat de naakte limiet er geheel onder schuil gaat. Dat men bij het schatten van de limiet van een variant a_n bijvoorbeeld n werkelijk laat *lopen*, geloof ik niet; men neemt een grote n , mogelijk nog een grotere, maar zodra een zekere convergerende tendens is opgemerkt is het intuïtieve proces afgelopen en begint het technisch ongelijkhedenwerk. Overigens heeft het weinig zin te trachten zichzelf bij dit werk gade te slaan, de opzettelijkheid stoort. Men zou beter in zijn herinnering naar merkwaardige gevallen kunnen zoeken om die achteraf te analyseren. Zo'n geval herinner ik me maar één, namelijk het grapje dat een jaar of twaalf geleden onder physici de ronde deed. Er werd gevraagd: „Je weet toch, dat in de formule voor de tangentenboussole het moment van de magneet niet optreedt?” Op het bevestigende antwoord kwam de vraag: „Waarom zet men er dan geen lucifershoutje in?”

Aan een H.B.S.-er is dit mopje niet besteed, men moet direct kunnen overzien, dat bij de afleiding van de formule het magnetisch moment m wel gebruikt is, dat de uitslag van de naald dus te beschouwen is als een functie van m , ook al is die constant, en dat ook in het grensgeval $m = 0$ die functie geldig is. Dat moet men een vijfdeklasser allemaal uitleggen, de vraag is voor hem niet verrassend.

Ik zag indertijd de boussole onmiddellijk voor me, zag de naald uitwijken, dacht me een kleiner moment, zag de naald langzamer uitwijken en kon toen antwoorden: „De formule beschrijft het verschijnsel niet volledig, men zou er een tweede bij af kunnen leiden, die aangaf hoe lang het duurt, voordat de volle uitslag bereikt is; daarin zou m wel optreden. Voor $m = 0$ zou men dan kunnen zeggen, dat de volle uitslag inderdaad bereikt wordt, echter pas na een oneindig lange tijd.”

Scherpe conclusies zijn hieruit natuurlijk niet te trekken; „ge-

lopen" heeft *m* stellig niet, er zijn hoogstens twee waarden van *m* vergeleken en wel is eerst de grootste, daarna de kleinste beschouwd. Als het zin heeft bij zo'n bliksemsnel proces van denken in voorstellingen van voor en na te spreken, is er dus gedacht *naar de limiet toe*. Nu ben ik bij naderingsvoorstellingen opgegroeid, was ik gewend geweest *van de limiet uit* te denken, dan zou dat geen nadeel betekend hebben.

Er liggen hier twee punten, die men gemakkelijk geneigd is over het hoofd te zien. Het eerste is, dat de voorstellingen, die een bepaald routine-denkproces leiden, niet noodzakelijk onmisbaar zijn, wanneer dat proces geleerd moet worden. Bij elk proces, hoe gebrekkig ook, vormt zich routine; men moet niet de fout begaan, routine, die *ondanks* gebreken verkregen is, aan die gebreken als oorzaak toe te schrijven.

Het tweede is, dat het weinig zin heeft te twisten over de reacties van de geest bij geheel andere geestesinhoud; de intuïtieve, de gedachten richtende, voorstellingen passen zich vanzelf bij die inhoud aan. De grote moeilijkheid van de didactiek is, dat men die geestesinhoud bij een ander zelf moet vormen en dan bezwaarlijk vermijden kan de eigene als model te zien. Er blijft zo bezien maar één criterium voor een goede didactiek over, dat waarlijk enigszins objectief zou mogen heten: het moet die zijn, *waarbij de stof op het helderst geordend is*.

We komen zo terug op het in de aanhef genoemde ons-zelf-in-de-weg-staan bij de waardering van toekomstmogelijkheden. Men kan veilig aannemen, dat de geest der Egyptenaren tal van intuïtieve reacties kende bij het hiëroglyfisch rekenen, die sinds volkomen verdwenen zijn. Zou iemand hun ons rekensysteem hebben gepredikt, dan hadden ze dat stellig interessant gevonden, maar ze zouden geaarzeld hebben het onmiddellijk in hun scholen in te voeren, als ze zich niet duidelijk realiseerden, dat het waardeeloos worden van hun reacties geen werkelijk verlies betekende, omdat zich uit het betere systeem doeltreffender reacties zouden ontwikkelen.

Men kan dit proces, wat de limieten betreft, gemakkelijk bij zichzelf waarnemen, men behoeft er nauwelijks abrupt in te grijpen; met het bovenstaande bewust instemmen betekent, dat het al begonnen is. Forceren moet men niets, men kan (en dat is een tweede moeilijkheid) toch niet in eens anders geest planten, wat in de eigene niet rijp aanwezig is; het is het beste niet verder te gaan, dan men zelf gevorderd is.

Noodzakelijk is het natuurlijk wel de terminologie pas te gaan

gebruiken, nadat het begrip is aangebracht, dat althans in geen geval op de terminologie te laten steunen; gewenst is het ook nu en dan weer het formele karakter van de gebruikte termen in het licht te stellen. Kunstmatig een woord als naderen vermijden is echter in het geheel niet nodig, het zal vanzelf in essentiële inhoud verliezen en de er mee verbonden voorstellingen zullen vanzelf door andere worden vervangen, die hetzelfde werk doen en dat beter. Met de voorstellingen past ook de taal zich bij de gewijzigde geestesinhoud aan en het is de vraag, of daarmee iets anders gezegd is.

Aan dit verschijnsel is een belangrijk deel van de taalstudie gewijd; het openbaart zich op verschillende wijzen, die ook in ons onderwerp duidelijk uitkomen. Zo verdwijnen termen, die eens voor essentieel gehouden werden, men hoort bijvoorbeeld tegenwoordig niet meer spreken van „oneindig kleine grootheden”, hoewel die door hun suggestieve kracht voor de ontwikkeling van de infinitesimaalrekening van groot belang geweest zijn. Dan komen er nieuwe termen: uitdrukkingen als „bijna alle” en een begrip als „omgeving” vertolken al geheel de statische opvatting en vroeg of laat zullen ze ook in de school hun intrede moeten doen. Misschien zullen ze eens dienen tot populaire omschrijving van een limietbewering en zal men eens in plaats van: „als x tot a nadert, nadert $f(x)$ tot b ” zeggen: „als x in de buurt van a ligt, ligt $f(x)$ in de buurt van b ”, of iets van die strekking. Tenslotte slijten de oorspronkelijke suggesties af in woorden, die in zwang blijven; in dit verband is het interessant een ogenblik te peinzen over het woord „benadering”, dat vaak gebruikt wordt in een zin, waarbij elke veranderingssuggestie er uit verdwenen is.

Soortgelijke opmerkingen kunnen worden gemaakt over de symboliek, waarin het pijltje een sterke suggestie uitoefent. Er zijn steeds verschillen geweest in de notatie en het is niet uitgesloten dat op de duur die schrijfwijzen het winnen die het pijltje niet gebruiken. In $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ is het onderschrift $n \rightarrow \infty$ overbodig, het

komt ook niet steeds voor (ook in definities wordt soms kortweg van de „limiet van een variant” gesproken); het is gevolg van n 's emancipatie tot onafhankelijk variabele. Verder treft men zowel $\lim_{x \rightarrow a}$ als $\lim_{\tilde{x} \rightarrow a}$ aan; persoonlijk heb ik altijd het pijltje geprefereerd, maar ik denk er nu anders over. De voorkeur geeft men toch aan die notatie, waarin men de essentie van het begrip het best vindt uitgedrukt; het is dus geen vraag, waar mijn voorkeur voor het pijltje

vandaan kwam: voor mijn gevoel moet x wel genaderd hebben. Aan de andere kant kan men x steeds de waarde a geven, onverschillig wat er dan met $f(x)$ gebeurt; het is dus heel wel mogelijk te spreken van de limiet van $f(x)$ voor x gelijk a .

Ik kan me voorstellen, dat niet ieder lezer direct van de reële betekenis overtuigd is, die ik meen dat deze beschouwingen voor ons onderwijs hebben; men kan immers maar niet een massa-psychologische ontwikkeling als de geschetste decreteren. Mijn hoop is dan ook, dat ze vanzelf zal komen, zodra men geneigd is er een begin mee te maken; mijn bedoeling is nu te laten zien, dat de schoolwiskunde overloopt van gelegenheden daartoe.

Over het limietbegrip is wel vaker geschreven, men beperkt zich daarbij echter gewoonlijk tot de vragen, die samenhangen met het onderwijzen van de exacte limietdefinitie als onderdeel van de algebra. Ik meende dit onderzoek breder te moeten opzetten en heb daartoe een aantal onderwerpen buiten de algebra nagegaan, waarin limieten gebruikt worden. Dat leek me van belang; inderdaad is een strenge algemene behandeling in een paar algebralessen me weinig waard, wanneer de toepassing van slordigheden wemelt; ik zou een nauwkeurige toepassing zonder die algemene behandeling verre verkiezen. Het begrip voor de laatste wordt trouwens door nauwkeurig gebruik zeer gebaat; ze behoeft dan eigenlijk niet meer te zijn dan een algemene samenvatting er van en kan er zelfs doeltreffend door worden voorbereid, wanneer men ook in de lagere klassen aan deze dingen aandacht schenkt.

Zodoende heb ik eens geneusd in een stuk of twintig leerboeken over vlakke meetkunde, stereometrie en mechanica bij onderwerpen als snijlijn en raaklijn, benadering van de cirkel door veelhoeken of van gebogen oppervlakken door veelvlakken, snelheids- en arbeidsdefinitie, bepaling van zwaartepunten. Hoewel ik daarbij natuurlijk wel dingen tegenkwam, die ik ook vroeger afgekeurd zou hebben, zou het meeste toch toen mijn aandacht niet getrokken hebben. Mijn critiek er op moet dan ook gezien worden als een opzettelijke analyse van uitdrukkingswijzen, die onder ons gangbaar zijn, met het doel na te gaan of er inderdaad schade voor het onderwijs in gelegen kan zijn en in hoeverre correctie te verwezenlijken is.

Natuurlijk behoud ik me het recht voor daarbij ook extremiteiten te signaleren, ik kan tenminste al direct niet de verleiding weerstaan ter inleiding even de humorist onder de mechanicaschrijvers aan het woord te laten. Zo verstaat men volgens hem onder de snelheid op zeker tijdstip „de limiet van de gemiddelde snelheid over

een heel klein tijdsdeeltje", volgend op dat tijdstip. Een ander grapje is, dat „men in het limietgeval de omtrek van de cirkel mag beschouwen als bestaande uit een zeer groot aantal zeer kleine koorden"; hoe het in andere gevallen met die omtrek zit, worden we niet gewaar. Nog intrigerender is de uitspraak: „deze lijn is te beschouwen als bestaande uit een zeer groot aantal kleine rechte stukjes, die in het limietgeval de gebogen lijn vormen"; deze „beschouwing" schijnt in te houden, dat de kleine rechte stukjes permanent in het limietgeval verkeren, wat dat dan ook zijn moge. Misschien ware het wijs in zulke „gevallen" het „limietgeval" maar uit te sluiten. Overigens bezigt hij deze uitdrukkingswijze tevens in de correcter vorm, waarin men ook ze in andere boeken aantreft: deeltjes van een kromme worden „zo klein genomen, dat ze als recht beschouwd mogen worden", of tijdsdeeltjes als „zo klein, dat we gedurende zo'n klein tijdsdeeltje de beweging als eenparig mogen beschouwen"; een boloppervlak wordt ergens in „zo kleine" stukjes verdeeld, „dat we ze als vlak mogen beschouwen".

De gedachte, die aan deze uitspraken ten grondslag ligt, is stellig gezond, ze hebben zelfs grote heuristische waarde. Tot op zekere hoogte kan men ze zien als een verzwakking van exacte limietbeweringen; om als zodanig aanvaardbaar te zijn, behoeven ze echter correctie. Om dat in te zien, is het goed even na te gaan, wat er precies aan mankeert; houden wij ons daartoe aan de gebogen lijn, die we in zo kleine stukjes verdelen, dat we ze als recht mogen beschouwen.

Strikt genomen staat hier onzin, een gebogen lijntje *is* niet recht en mag dus *nooit* als recht beschouwd worden, het woordje „zo" schijnt echter te verwijzen naar een bekend absoluut criterium, een absolute kleine lengte dus, waaronder tussen recht en gebogen geen onderscheid meer is. Dit is voor de beginnening stellig een grote moeilijkheid, uiteraard heeft hij met die absolute lengte nooit kennis gemaakt en ook de betreffende passage licht hem niet in omtrent het relatieve karakter van het criterium, dat hier beslist. Deze uitdrukkingswijze bedoelt immers slechts een limietovergang plausibel te maken en meestal wordt die overgang dan ook meteen voltrokken geacht. Het relatieve van het criterium ligt daarin, dat het „als recht beschouwen" geoorloofd is *in betrekking tot ons doel*: men wil zeggen, dat het er voor ons doel, bijvoorbeeld onze berekening, niet op aan komt, of de stukjes recht of gebogen zijn; het woordje „zo" duidt er op, dat er een verdeling aan te geven is, zo fijn, dat dat het geval is. Naar mijn gevoelen behoorde deze betrekkelijkheid goed uit te komen, daartoe moet ook dat doel

nader worden omschreven. Ik kan niet inzien, dat er ook maar enige verbetering bereikt is, wanneer men (zoals ook gebeurt) de deeltjes „zo klein kiest, dat ze *bij benadering* als recht beschouwd mogen worden”, of de kracht als „bij benadering constant”. Formeel kan tegenover het „nooit” van zoëven hier worden gesteld, dat het *altijd* mogelijk is een gebogen lijn bij benadering als recht te beschouwen, het hangt er maar van af met welke benadering men genoeg neemt. Daarvan wordt echter niet gerept, de toevoeging is dus volmaakt zinledig.

De opheffing van al deze moeilijkheden is eenvoudig; men heeft slechts uitdrukkelijk de ingeschreven gebroken lijn te beschouwen *in plaats van* de gebogene; de gebogen lijn door de gebrokene te *vervangen*, het punt de gebroken lijn te laten doorlopen met over de delen constante snelheid, en zo de gewenste berekening uit te voeren of uitgevoerd te denken; men kan het boloppervlak door een veelvlak *vervangen* denken en van het laatste het zwaartepunt bepalen. *Men maakt daarbij een fout*, welnu, dat bekend men ruiterlijk en daarmee is nu juist *die aansluiting op het exacte limietbegrip bereikt*, waarvan boven sprake was; men kan nu immers bewijzen, althans aannemelijk maken of slechts opmerken, dat de fout beneden een willekeurig bedrag blijft, als men de verdeling maar fijn genoeg maakt. Met het laatste is de mogelijkheid gegeven om, zonder dat de redenering aan helderheid hoeft in te boeten, de strengheid der behandeling naar eigen smaak te regelen op een wijze, die men in letterlijke zin verantwoorden kan: men kan immers precies aangeven, waar, in welk opzicht en in welke mate men met de strengheid heeft getransigeerd.

Het is interessant na te gaan, hoe met de mate van strengheid correspondeert de mate, waarin men zich bewust is van de formeel immers noodzakelijke en hier dan ook aanwezige variant. Met de vervanging door de gebroken lijn of na de daarop gebaseerde berekening is de algemene term van die variant geconstrueerd. Bij een eenvoudig aannemelijk maken zal men zich daarvan niet bewust zijn en slechts die ene term zien, naarmate de strengheid hoger is, komt het representatieve karakter van die term meer naar voren. Opmerkelijk is, dat deze term geconstrueerd wordt *van de limiet uit*; dat is de grote verdienste van de methode; daardoor is ze zo gemakkelijk exact te maken.

Met enige klem mag nog wel even worden opgemerkt, dat *de limietbeschouwing afgelopen is*, zodra is aangetoond, dat de gemaakte fout willekeurig klein te houden is; hier en daar vind ik namelijk nog een staartje, waarin de verkregen uitkomst tot de gewenste

„nadert”. In uitspraken als de boven geciteerde doet dat al heel eigenaardig aan: immers, wanneer men achteraf de gebroken lijn tot de gebogene laat naderen, heeft men toch eigenlijk de gebogen stukjes *niet* als recht beschouwd; als de verkregen uitkomst nog ergens toe moet naderen, was ze dus *niet* de juiste en maakte het voor ons doel wel degelijk onderscheid, of die stukjes recht of gebogen waren. Na een in boven aangegeven zin gecorrigeerde redenering past dit slot echter evenmin, de toepasselijkheid van de exacte limietdefinitie was er immers volledig mee geconstateerd; alleen, wanneer het staartje een samenvatting van het bereikte wilde geven in de geijkte bewoordingen, zou men er geen bezwaar tegen mogen maken. Voor mijn gevoel is het echter als door de schrijvers noodzakelijk geacht sluitstuk van het betoog bedoeld; daarmee verraadt zich dan de divergentie, die er bestaat tussen formeel limietbegrip en intuïtieve limietvoorstelling.

Een veel meer verbreide manier om grénsquaesties te behandelen is intussen die van de „veranderlijke figuur”. De pas genoemde gevallen van „naderen achteraf” vertonen dit karakter al enigszins; een aardige overgang er naar toe vormt ook de fraaie zin: „We verdelen de bolsector in een onbepaald aantal kegeltjes met top M en met tot nul naderend en daardoor als vlak te beschouwen grondvlak o ”; de helderheid moet hier voortkomen uit de opeenstapeling van drie paradoxale vaagheden. Een gemengd karakter vertoont ook het „beschouwen” van een cylinder „als limiet van een regelmatig prisma, waarvan het aantal zijvlakken oneindig groot is geworden”; als het woord limiet er niet in stond, zou dit kunnen gelden als een (hoewel niet fraai) voorbeeld van de eerste manier; was in de bijzin de onvoltooide tijd gebruikt in plaats van de voltooide, dan vertegenwoordigde het de tweede; zoals het er staat, is het in elk geval een goede waarschuwing ons eens op onze terminologie te bezinnen. Geen mens zal zich waarschijnlijk stoten aan het „beschouwen” van een kegel „als limiet van een regelmatige pyramide, waarvan het aantal zijvlakken onbegrensd toeneemt”; toch is dit wélbeschouwd voor een zo solide lichaam als een pyramide een mysterieus en zelfs enigszins spookachtig gedrag. Wij komen tegen veelhoeken, prisma’s, pyramiden, waarvan het aantal zijden of zijvlakken „onbeperkt” of „onbepaald”, „steeds”, „voortdurend” of zelfs „onophoudelijk” toeneemt (men stelle zich de opgejaagde en tenslotte stellig amechtige pyramide voor!); soms „laten wij” dat doen.

Of deze uitdrukkingswijze de beginneling moeilijkheden geeft, is

mij niet bekend; de psychologie van de huiswerk makende leerling, die zijn leerboek woord voor woord tracht te begrijpen, is bij mijn weten ook nog niet geschreven. Vermoedelijk slikt hij ze wel en dat is ook maar het gemakkelijkste; zou hij trouwens navragen, dan zal men wel min of meer duidelijk de bedoeling van een *rij* pyramiden doen zien; hoewel die rij dan wel „doorlopen” zal worden, is er zelfs wel kans, dat haar statisch karakter hier duidelijker in 't oog springt dan bij de toenemende n . Hoe het zij, de terminologie is nergens te vermijden, waar men het resultaat van een beschouwing in een stelling of definitie wil samenvatten; wij hebben immers geen andere! Ik wil slechts waarschuwen tegen onbezonnen gebruik in die beschouwingen zelve; de „veranderlijke pyramide” vind ik daarbij trouwens niet van zo groot gewicht, meestal toch neemt duidelijk het aantal zijvlakken, dus een *getal* toe en komt dus de voorstelling van de veranderlijke figuur nauwelijks boven die van het veranderlijke getal uit. Wordt bijvoorbeeld de inhoud van een „algemene” pyramide i_n gesteld en laat men nu n „onbeperkt toenemen” (wat vaak gebeurt), dan blijft het bezwaar zelfs geheel tot het algebraïsche beperkt. Dat het algebraïsche symbool een meetkundige betekenis heeft, doet hier niet ter zake; te eisen, dat die betekenis bij algebraïsche manipulatie bewust blijft, of dat algebraïsche terminologie bij substitutie van die betekenis zinvol blijft, gaat geheel tegen de abstraherende tendens van de algebra in. Tenslotte zijn er schrijvers, die de woorden vermijden en simpel poneren: $\lim_{n \rightarrow \infty} i_n = i$; daarmee is natuurlijk elke

objectie ondervangen, men kan het alleen betreuren, dat zo de plicht, het limietbegrip bij te brengen, geheel op de algebra komt te rusten en al deze gelegenheden het te verklaren onbenut blijven.

Waar het intussen op aan komt, is, dat deze hele beschouwingswijze er één is *naar de limiet toe*; het is daarbij onvermijdelijk, dat aan de naderingssuggestie zekere bewijskracht wordt ontleend. Het is merkwaardig, dat men beide denkwijzen in het zelfde mechanaboek kan aantreffen; men zou verwachten daar een kegel „beschouwd” te vinden als een „regelmatige pyramide met een zeer groot aantal zijvlakken”. Corrigeerde men dit tot een „vervangen door” zo'n pyramide, dan zou daarmee een methode verkregen zijn, die in alle gevallen de pas beschouwde kan vervangen en die in willekeurige graad van exactheid toe te passen is. Natuurlijk vallen beide methoden samen bij volkomen exactheid; nu die echter onbereikbaar is, vond ik het opmerkelijk, in de meetkundeboeken uitsluitend de tweede gebezigd te zien. Meestal loopt het

mechanicaboek iets lichter over deze quaesties heen; het lijkt me niet te gewaagd te veronderstellen, dat *de klem meer op het naderen valt, naarmate men deze dingen uitvoeriger en duidelijker behandelen wil*. Excessen vallen daarbij niet of nauwelijks aan te wijzen; de formuleringen blijven geheel in de trant, die men bij de toepassing van het limietbegrip gewend is. Ik zal nu globaal enkele trekken aanduiden, die hier en daar wat bijzonder naar voren komen en die in de inleiding al aangekondigd werden.

Het opvallendste is, dat dikwijls duidelijk een rij, van het begin af, wordt geconstrueerd. Nu is er natuurlijk een rij nodig om van een limiet te kunnen spreken; ik heb echter de rij al een *formele* behoefte daartoe genoemd en betwist, dat bij het werken met limieten deze rij in haar geheel duidelijk voor ogen zou moeten staan. Werkt iemand met onmeetbare getallen, dan eist men toch ook niet, dat hij daarbij bewust aan, bijvoorbeeld, verzamelingen van gelijke onmeetbare fundamentealrijen denkt. Hij weet, dat hij met onmeetbare getallen mag werken als met meetbare en *dat doet hij*. Wel verwacht men van de geschoolde mathematische geest, dat hij in staat is zich rekenschap te geven van het wezen van het onmeetbare getal, zodra hij daartoe behoefte gevoelt; zijn aandacht is dan echter anders gericht.

Mutatis mutandis geldt het zelfde in ons geval. Bij het hanteren van limieten kan de rij voor het bewustzijn opgaan in de algemene term; zodra de aandacht zich richt op het wezen van het begrip zelf, representeert die weer de gehele rij; dan echter zal die aandacht zich nooit richten op het *begin*, maar altijd op het „slot” van de rij, als men daarvan spreken kan. Natuurlijk komt het op een heldere grootheidsvoorstelling aan; beheersing van het grootheidsbegrip betekent: werken met één term en alle bedoelen, één voor alle te nemen en alle in één te zien; het betekent het vermogen al naar behoefte het één of het ander te kunnen prononceren. Denkt men het limietbegrip opzettelijk funderend door, dan staat de gehele rij er in de algemene term; werkt men er mee, dan staat alleen die term er.

Intussen kan de rijconstructie in de bedoelde gevallen nauwelijks met een beroep op de noodzakelijkheid worden verdedigd; daarmee strijdt direct al het feit, dat ze in die boeken het duidelijkst voorkomt, die de stof het eenvoudigst trachten te behandelen. De bedoeling is dan ook om direct al in het begin een *convergerende tendens* op te merken, de rij dus naar de limiet toe te laten lopen; het slot wordt gewoonlijk aan de suggestie overgelaten. Het accent

valt dus net verkeerdt: het zinloze begin staat er in die volle belichting soms maar wat zielig bij; het slot, waar het op aan komt, wordt verdoezeld.

Die tendens openbaart zich meestal in de *monotonie* van de rij: lengten, oppervlakken worden „voortdurend groter”, „steeds kleiner” voor onbeperkt toenemende n en hier doet zich het zelfde verschijnsel voor van accentueren terwille van de suggestie. Natuurlijk is monotonie een belangrijk convergentiekenmerk; ze garandeert, dat de variant in het ε -interval blijft, zodra één term er in beland is; dat is bij strenge behandeling niet minder waar dan in de suggererende. Toch behoeft bij strenge behandeling de monotonie niet uitdrukkelijk bewust te zijn; vraagt men de ongelijkheid

$2 - \frac{1}{n} > 2 - \varepsilon$ op te lossen, dan is daarbij de monotonie even

essentiëel, zonder dat men er bij het neerschrijven van de oplossing

$\bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$ ook maar een ogenblik aan gedacht heeft.

Zoals gezegd is de behandeling van de betreffende problemen in de meeste leerboeken in het geheel niet zo, dat ze critiek uitlokt; men moet ze al speciaal vanuit het getekende gezichtspunt nagaan. Met het bovenstaande is dan ook meer de gedachtengang getypeerd, waaruit ik ze gesproken acht; vooral bij strenge of minder uitvoerige behandeling gaat die echter al gauw achter de algebra schuil. Ik kan de genoemde punten dan ook wel met citaten toelichten, ik heb die echter moeten zoeken en ze zijn in hun *openbaren* van een verwerpelijke intuïtieve limietvoorstelling geenszins algemeen typerend, zelfs niet steeds voor de passages, waaruit ze gelicht zijn.

Zo, wat de begintermen betreft: „We nemen het aantal deelpunten groter en voeren opnieuw de berekening uit”; we zijn geneigd, op te merken, dat de vorige dan achterwege had kunnen blijven. Bij de benadering van de cirkel door regelmatige veelhoeken: „Het is duidelijk, dat we van deze verhouding iets te weten kunnen komen door uit te gaan van één of andere ingeschreven regelmatige veelhoek, het aantal zijden steeds groter te nemen en van al deze veelhoeken de omtrek te berekenen”; men kan vinden, dat één genoeg is, als het aantal zijden voldoende groot is. Inderdaad, waarom eerst een vierhoek uit te rekenen, als men een tweehonderdhoek nodig heeft? „We zullen bewijzen, dat men de oppervlakte van de cirkel tot een willekeurige graad van nauwkeurigheid kan benaderen, mits men de bovenstaande tabel ver genoeg voortzet.” Bij het laatste voorbeeld is natuurlijk de monotonie van de rijen

oppervlakken o_n der ingeschreven veelhoeken en O_n der omgeschreven veelhoeken voorafgegaan; het bedoelde bewijs leidt tot de ongelijkheid:

$$\frac{o_n}{O_n} < \frac{o_n}{C} < 1,$$

waarin C de oppervlakte van de cirkel is. Deze ongelijkheid leent zich tot de constructie van een ε -interval en daarmee had het bewijs kunnen zijn afgelopen; hier wordt n nu echter nog eens onbegrensd groter, zodat het linkerlid en dus het tweede tot 1 „naderen”; eerst nu wordt het bewijs voltooid geacht. Dit passeren van het ε -stadium is onnodig; in het licht van het exacte begrip zelfs zinloos en daarom gevaarlijk: het suggereert een werkelijke „limietovergang”; men zij voorzichtig met dat woord. Ik vond zelfs een gebroken lijn, die werkelijk in een cirkelboog overging; al is zo’n uitspraak niet aanwezig, de suggestie is er toch wel.

Pogingen, toch bij het exacte begrip te blijven staan, zijn niet steeds even gelukkig: „Nu wordt a_n voortdurend kleiner, als men n laat toenemen en tenslotte wordt a_n kleiner dan enig denkbare lijn”. „Tenslotte” is heel mooi, overigens wordt hier de klok enige eeuwen teruggezet: omdat niet gezegd wordt, dat men die lijn *vooraf* moet denken en daarbij „tenslotte” afhankelijk is van „enig”, komen we hier bij de oneindig kleine grootheden uit, die groter waren dan nul, maar toch kleiner dan elk positief getal. Een compromis als: „Laat men het aantal zijden onbepaald toenemen, dan nadert de omtrek van het grondvlak willekeurig dicht tot de omtrek van de richtcirkel”, vind ik toch weinig beter dan een slechte contaminatie; het „willekeurig dicht” is goed, maar het maakt het „naderen” letterlijk.

Deze citaten zijn gelicht uit bewijzen, die als vrij streng bedoeld zijn; men vindt echter ook redeneringen, waarbij de overtuigingskracht geheel van de suggestie moet komen. Zo is er de vanzelfsprekendheid; waarmee de permanentie van eigenschappen van de variant bij limietovergang wordt gesteld en gebruikt. Hier ligt een onbenutte gelegenheid limietredeneringen te leren hanteren. Is bijvoorbeeld $a_n = b_n$, dan is van naderingsstandpunt vanzelfsprekend $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$; van exact standpunt is het dat evenzeer; het onderscheid zit daarin, dat de suggestie met het doen van de laatste uitspraak uitgepraat is, terwijl de exacte behandeling uitgediept kan worden. Noemt men $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, en $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$,

dan kan men bijvoorbeeld zeggen: is $a \neq b$, dan is er, door n groot genoeg te kiezen, voor te zorgen, dat a_n minder dan $\frac{1}{2} |b - a|$ van a , b_n minder dan $\frac{1}{2} |b - a|$ van b verschilt, wat onverenigbaar is met $a_n = b_n$. Ik acht deze stelling, die uitspreekt, dat een variant hoogstens één limiet heeft, zeer belangrijk; niet om ze in de algebra ergens uit te spreken en er zich dan in de meetkunde op te beroepen, maar om ze als oefening, waar ze zich in de toepassing voordoet, zonder ze algemeen uit te spreken, voor het betreffende geval volledig te bewijzen.

Een aardig voorbeeld vindt men in de gebruikelijke inhoudsbepaling van de pyramide, waaraan ik meteen nog enkele der vorige opmerkingen illustreren wil. De hoogte der pyramide wordt in n gelijke delen verdeeld, vervolgens worden een in- en een omgeschreven reeks prisma's geconstrueerd. Noemen we de inhoud van de pyramide P , de totale inhoud van de ingeschreven reeks I_n , die van de omgeschreven reeks O_n , dan volgt meteen:

$$(2) \quad I_n < P < O_n.$$

Het is nu leerzaam, na te gaan, hoe verschillende boeken op deze ongelijkheid verder bouwen. Bij alle volgt een schatting naar boven voor $P - I_n$ of $O_n - P$ of beide, bijvoorbeeld:

$$P - I_n < \frac{1}{n} \times \text{hoogte} \times \text{grondvlak}.$$

Daarna zal men nog al eens (in woorden) n naar oneindig zien naderen of onbepékt zien toenemen, dus I_n tot P zien naderen. Ook komt het zelfde voor in algebraïsche notatie: uit $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{recht-}$
lid $= 0$ volgt $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = P$, wat volkomen correct is en de leerling net zo veel zegt, als hij van limieten weet.

Er is de uitvoerige behandeling, die eerst maar eens I_6 construeert en dan I_{12} , daarna laat zien, dat $I_6 < P$, $I_{12} < P$, maar $I_{12} > I_6$! Zou men soms, „zo doorgaande”, het verschil $P - I_n$ ook kleiner kunnen maken dan elk positief getal, hoe klein ook gekozen? Men zou het wel zeggen, I_n loopt mooi naar boven! We halen O_n er bij, vinden (2) en kunnen nu het gestelde gemakkelijk bewijzen. Klaar! zou men zeggen, maar neen, daarvoor moet uit (2) eerst volgen, dat we het verschil van P en I_n of O_n tot nul kunnen laten naderen, wanneer we nog steeds „zo doorgaan”.

In dit voorbeeld vinden we alle punten geïllustreerd: het ε -interval wordt correct geconstrueerd en I_n ligt er in voor voldoende grote n . Dat was genoeg, toch beginnen we bij de begintermen,

constateren monotonie, suggereren terechtkomen in het ε -interval, bewijzen het en . . . zetten de variant nog niet stil; ze moet nog verder tot . . . , ja wat? kortom, ze moet nog „naderen”!

Ook in een ander opzicht is het voorbeeld illustratief: strikt genomen wordt niet zo zeer de feitelijke tekst gecritiseerd als wel de daarachter bij de schrijvers *veronderstelde* voorstellingen. Zouden echter de auteurs, die ik tot de goede didactici reken, antwoorden: „Wij zijn om de moeilijkheid van het onderwerp uitvoerig geweest; de berekening van I_6 en I_{12} heeft echter alleen gediend als illustratie voor de algemene berekening van I_n ; wij vinden het overigens van groot belang, dat de monotonie duidelijk uitkomt en verder was het slot van de beschouwing slechts bedoeld als samenvatting van het bewezene in de gebruikelijke terminologie”; dan zou ik daarop niets terug hebben.

Eén behandeling moet ik met waardering noemen, er wordt uit (2) bewezen

$$„\delta > P - I_n > 0 \text{ voor voldoende grote } n,$$

wat betekent, dat P de limiet is van I_n ”.

Dat is precies, wat ik voorsta; echter blijkt uit de inleidende opmerking: „Door n steeds groter te nemen, neemt de hoogte van de onderste laag voortdurend af; het is duidelijk, dat men zijn inhoud willekeurig klein kan maken”; dat men ook hier meent het niet buiten de suggestie van het monotoon veranderen te kunnen stellen.

Een andere verdient nog even de aandacht, omdat de opzet het nodig maakt de inhoud van de pyramide als $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ te definiëren.

Dit is een teer punt: het werken naar de limiet toe kan gemakkelijk de existentie van een limiet suggereren, om van de limiet uit te kunnen denken, moet die limiet er *zijn*; in dit geval moet de pyramide dus al een inhoud hebben. Moet de existentie van een limiet worden aangetoond en wil men niet van een convergentiesuggestie gebruik maken, dan staat men voor alle moeilijkheden, die zulke bewijzen nu eenmaal aankleven. Er is natuurlijk wel een mouw aan te passen, in elk geval zal men echter min of meer expliciet één of meer rijen moeten beschouwen. In dit geval is aannemelijk te maken, dat er een getal P bestaat, zodanig dat elke I_n hoogstens P , elke O_n minstens P is; wil men de gelijkheid uitsluiten, dan zal er wel op de monotonie gewezen moeten worden.

Intussen is het niet om $P = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ begonnen, maar om $P = \frac{1}{3}Gh$.

Om dat aan te tonen moet worden bewezen, dat twee pyramiden met gelijk grondvlak en gelijke hoogte gelijke inhoud hebben.

Daartoe wordt een tweede pyramide beschouwd, het zelfde procédé als bij de eerste leidt tot de ongelijkheid $I_n' < P' < O_n'$, wat weer geeft $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n' = P'$, waarbij $I_n' = I_n$.

Sommige boeken doen dat uitvoerig, andere kunnen het heel kort, maar wat merkwaardig is: *alle* concluderen zonder enig commentaar uit $I_n' = I_n$ tot $P = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n' = P'$. Het zwaartepunt van de behandeling ligt dus geheel in $P = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, wat toch eigenlijk een bijkomstig resultaat is; het punt, waar het op aan komt, wordt vanzelfsprekend geacht.

Mij lijkt die hele eerste stelling overbodig; ik had liever direct twee pyramiden genomen, dan aangetoond, dat I_n willekeurig dicht bij P , I_n' willekeurig dicht bij P' te brengen was en daaruit op de geschetste wijze tot $P = P'$ besloten, zonder het woord limiet ook maar te noemen of de limietsymboliek te gebruiken, tenzij samenvattend achteraf.

Het laatste moge wat overdreven lijken, het essentiële van het limietbegrip ligt echter in de epsilon-tiek en die zit er volledig in; die zal altijd goed moeten uitkomen, hoe gematigd men er ook mee om wil gaan. Maar van terminologie en notatie gaat zo'n sterke suggestie uit, dat het begrip er wel door moet verzwakken. Wanneer men de strenge behandeling geheel aan de algebra overlaat en de resultaten als vanzelfsprekend gebruikt of suggererenderwijze aannemelijk tracht te maken, komt er van een helder inzicht niets terecht.

Van groot belang zijn in dit verband die onderwerpen, waarbij limieten worden gebruikt, voordat ze in de algebra speciaal aan de orde geweest zijn; ik neem eens oppervlakte en omtrek van de cirkel, eind derde klas.

Wat weet de leerling dan van limieten? Op zijn best kan hij de meetkundige reeks gesommeerd hebben, zoals we zagen, allerminst een geschikte inleiding tot het algemene limietbegrip. Toch zien we in het genoemde meetkunde-hoofdstuk een overdadig gebruik van limieten, soms met behulp van diepliggende algebraïsche stellingen, die de leerlingen wel voor onoverkomelijke moeilijkheden moeten plaatsen. Ik zou zeggen: men moet er of licht overheen lopen zonder limietterminologie en -notatie te gebruiken, of de zaak van de grond af opbouwen en het hoofdstuk gebruiken als inleiding tot de limieten met terminologie en notatie samenvattend aan het slot.

Ik zal eens proberen een globaal overzicht te geven, van wat ik in een tiental leerboeken vond. Een groot verschil is direct al, dat soms omtrek en oppervlak van de cirkel aanschouwelijk bekend worden verondersteld, maar ook wel als limieten worden gedefinieerd. Het laatste is strenger en bij werken van de limiet uit ook moeilijker, bovendien maakt het het gebruik van terminologie en symboliek noodzakelijk. Men zou kunnen vinden, dat bij zoveel onstrengheid in de limietbehandeling de strengheid van deze opvatting kwalijk past en er dus wel van die definitie afgezien zou kunnen worden; toch is dat wat te gemakkelijk geredeneerd: deze strengheid behoort tot een geheel andere categorie. De leerling weet wel, dat een oppervlak moet worden gedefinieerd; als men hem er op wijst, dat dit alleen voor rechtehoeken gebeurd is en dat we dus eigenlijk nog niet van het oppervlak van een cirkel kunnen spreken, is hij daarvoor heel wel toegankelijk. Ik wil daarom straks even nader op dit punt in gaan.

We nemen een cirkel met straal R , daarin en daarom een regelmatige n -hoek (zijden resp. z_n en Z_n); noemen de oppervlakken dezer figuren resp. o , o_n , O_n , de omtrekken c , c_n , C_n ; tenslotte zij a_n het apothema van de ingeschreven n -hoek. In de meeste leerboeken wordt eerst de oppervlakte aan de orde gesteld, dat begint vrijwel steeds met het bewijs van de ongelijkheid

$$(3) \quad o_n < o_{2n} (< o) < O_{2n} < O_n;$$

het middelste lid staat tussen haakjes, omdat het alleen voorkomt, als o uit aanschouwing bekend geacht wordt. Vervolgens wordt bewezen

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o_n}{O_n} = 1,$$

waaruit volgt

$$(5) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} o_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = o;$$

het laatste is stelling of definitie. Formule (4) wordt bewezen via

$$(6) \quad \frac{o_n}{O_n} = 1 - \frac{z_n^2}{4R^2} \text{ of } = \cos^2 \frac{180^\circ}{n};$$

dat deze uitdrukkingen tot 1 naderen, vereist niet veel toelichting; door n onbeperkt toe te laten nemen of voortdurend, steeds of onophoudelijk te verdubbelen, laat men z_n tot nul naderen en de cosinus tot 1; één zeer streng auteur neemt het laatste zonder bewijs aan.

Ongelijkheid (3) is kennelijk opgesteld om monotonie te kunnen constateren; voor een eenvoudig monotoniebewijs is *verdubbelen* nodig; een verwerpelijk procédé, omdat voor de constructie van een term van de rij de voorgaande vereist is. Letten we nu echter op het bewijs van (4) via (6), dan zien we, dat die monotonie daarbij *niet eens benut wordt*; waar in dat bewijs verdubbeld wordt, gebeurt het puur pro forma, omdat (3) het nu eenmaal schijnt te eisen. Deze formule dient echter alleen om een limiet te suggereren; in sommige boeken wordt ze in 't geheel niet gebruikt; we zijn daar al in het stadium, dat de strenge behandeling suggesties overbodig maakt, terwijl toch het traditionele materiaal daartoe nog wordt meegesleept.

Van (4) naar (5) komt men zeer eenvoudig wegens $o_n (< o) < O_n$ via

$$\frac{o_n}{O_n} < \frac{o_n}{o} < 1$$

of

$$1 - \frac{o_n}{O_n} = \frac{O_n - o_n}{O_n} \rightarrow 0, \text{ dus } O_n - o_n \rightarrow 0, \text{ voor } n \rightarrow \infty.$$

Op te merken valt daarbij, dat men òf niet op ε -ongelijkheden aanstuurt, òf er niet bij blijft staan; overal is de conclusie een „naderen tot” of een formule in limietnotatie. Dat het gelden van een ε -ongelijkheid op het zelfde neerkomt weet de derdeklasser niet en hij leert het ook zo niet; hij moet wel denken, dat het „naderen tot” inhoudt een soort mysterieus samenvallen aan gene zijde van het oneindige. Dat is hier bijzonder te betreuren in verband met het karakter van de limiet als „approximatiemogelijkheid”. Het doel is de formule $o = \pi R^2$ en wie heeft ooit π gezien? Wat is een irrationaal getal ook anders dan een opdracht en een mogelijkheid tot benadering met willekeurige nauwkeurigheid?

Moet de oppervlakte nog gedefinieerd worden, dan heeft men de keuze tussen enerzijds de suggestie op grond van (3) (monotonie) en (4) (naderen; in één boek zag ik zelfs monotonie uit (4) gepuurd) of aan de andere kant het formele beroep op een algebraïsche stelling omtrent monotone rijen, waaruit hier volgt, dat de rijen

$$o_n, o_{2n}, o_{4n}, \dots$$

en

$$O_n, O_{2n}, O_{4n}, \dots$$

bij geldigheid van (3) en (4) een gemeenschappelijke limiet o hebben bij toenemend rangnummer. De derde klas gelooft het

natuurlijk onmiddellijk; men merke op, dat de betekenis van n in (3) en (4) een nuance verschilt en dat toepassing van (3) op deze rijen achtereenvolgens (verzwegen) vervanging van n door $2n$, $4n$, enz. nodig maakt; voor derdeklassers wel zeer doorzichtig. De formule (3) krijgt zo wel een sterk formeel karakter; ze moet worden bewezen om een stelling toepasselijk te maken, die ver buiten het bereik der leerlingen ligt. De er aan bestede moeite is dus practisch weggegooid; er zijn trouwens ook wel stellingen, die geen monotonie eisen, het komt me dus voor, dat men (3) best missen kan.

Het slot van de behandeling is meestal het door middel van verdubbeling berekenen van twee rijen o_n en O_n , beginnend met een lage waarde van n ; hier wordt soms (natuurlijk gefingeerd) de verdubbelingsformule toegepast, maar ook wel goniometrisch te werk gegaan; dat er dan toch verdubbeld wordt, moet wel om (3). Er is daarbij allerlei variatie; op alle heb ik natuurlijk tegen, dat alleen het zinloze begin van de varianten opgeschreven wordt en van daaruit op de limiet toe wordt gesuggereerd.

Het is al met al een heel verhaal geworden en eigenlijk kan ik me nog het best verenigen met die auteur, die simpel zegt:

„ $o_n = \frac{1}{2}R^2 n \sin \frac{360^\circ}{n}$; in de hogere wiskunde wordt bewezen, dat $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{360^\circ}{n}$ bestaat; we noemen die limiet 2π ; ergo $o = \pi R^2$ ”.

Natuurlijk geeft die limiet de docent een harde noot te kraken, maar er is inderdaad veel voor te zeggen, dat het aannemelijk maken door hem en niet door het leerboek geschiedt.

Tot de omtrek van de cirkel komt men uitgaande van $c_n = \frac{2o_n}{a_n}$, waaruit voor $n \rightarrow \infty$ volgt $c = \frac{2o}{R} = 2\pi R$, waarbij eventueel nog c als $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ wordt gedefinieerd.

Rest te vermelden, dat in enkele boeken de volgorde andersom is, de omtrek van de cirkel wordt gedefinieerd als $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ en de oppervlakte wordt er uit afgeleid. Dat is iets moeilijker, de ongelijkheden zijn voor lengten zo doorzichtig niet. Overigens zouden bij deze behandeling opmerkingen van gelijke strekking kunnen worden gemaakt.

Een bevredigende behandeling „van de limiet uit” behoefde in-tussen van de geschetste niet zo veel te verschillen, ze zijn alle vrij

exact en indien men de overbodige suggesties er uit weglief, zou het nauwelijks zin hebben, nog van twee methoden te spreken.

De cirkel te vervangen door een regelmatige ingeschreven veelhoek en aannemelijk te maken, dat daarbij een fout gemaakt wordt, die een willekeurig klein bedrag niet behoeft te overschrijden, is uiteraard niet streng genoeg: de fout moet worden geschat. Daartoe is natuurlijk een omgeschreven veelhoek nodig; verder maakt het verschil, of men de oppervlakte van de cirkel als uit aanschouwing bekend veronderstelt of die nog wil definiëren.

Nemen we het eerste aan, dan kan men uitgaan van

$$(7) \quad o_n < o < O_n.$$

De fout bij vervanging van o door o_n is dus kleiner dan $O_n - o_n$, voor dit verschil staat echter niet een eenvoudig af te leiden formule ter beschikking; dat zal de reden zijn, dat men in de gebruikelijke behandeling zijn toevlucht neemt tot het quotiënt $\frac{o_n}{O_n}$ en (4) bewijst. Nodig is dat niet, men kan uit (6) laten volgen

$$(8) \quad O_n - o_n = O_n \frac{z_n^2}{4R^2} = O_n \sin^2 \frac{180^\circ}{n} \leq O_3 \frac{z_n^2}{4R_2} = O_3 \sin^2 \frac{180^\circ}{n},$$

waarbij nog gekozen kan worden tussen een zuiver meetkundige en een goniometrische behandeling. Uit (8) kan worden afgelezen, dat $O_n - o_n$ willekeurig klein gemaakt kan worden door keuze van de n . Hoewel de monotonie daarbij de doorslag geeft, behoeft die niet genoemd te worden; het betreft hier een gewone ongelijkheid, speciaal als men de goniometrische vorm kiest, die bovendien bij de definitie van $\sin 0^\circ$ al voorbereid kan worden. Ik koos O_3 als bovengrens van O_n ; het is natuurlijk ook mogelijk de hele figuur door een willekeurige veelhoek, bijvoorbeeld een vierkant, te omsluiten en het oppervlak daarvan als bovengrens te gebruiken.

Het resultaat kan als stelling worden meegedeeld in de vorm van de uitspraak: „Men kan zorgen, dat het oppervlak van een regelmatige ingeschreven veelhoek minder van dat van de cirkel verschilt dan een vooraf gegeven willekeurig getal, door het aantal zijden voldoende groot te nemen.”

Men kan de omgeschreven veelhoeken in deze stelling betrekken, ook kan de formulering worden verscherpt. De stelling is in wezen een limietuitspraak, het woord is echter niet genoemd. Dat behoeft ook niet, de slotstelling is toch $o = \pi R^2$ en deze is slechts een etappe. Overigens kan men desgewenst de terminologie nu invoeren door te

zeggen, hoe de stelling gewoonlijk wordt geformuleerd; daarmee staat de terminologie op haar juiste plaats en is van haar suggestie geen gebruik gemaakt.

Ik zou er voor voelen, nu te bewijzen, dat het oppervlak van de cirkel evenredig is met het quadraat van de straal. Zijn gegeven twee cirkels met stralen R en R' , oppervlakken o en o' en gelijk-

vormigheidsfactor $\frac{R'}{R} = k$, dan denken we in beide een regelmatige n -hoek beschreven met oppervlakken o_n en o'_n , zodat $o'_n = k^2 o_n$. Door een redenering als bij de „eenduidigheidsstelling” kunnen we daaruit (zo streng als we wensen) laten volgen $o' = k^2 o$, dus $\frac{o'}{o} = k^2 = \frac{R'^2}{R^2}$.

Hieruit volgt $\frac{o'}{R'^2} = \frac{o}{R^2}$, welke verhouding we door π voorstellen, met als resultaat $o = \pi R^2$. Blijkbaar kan men $\frac{o_n}{R^2}$ willekeurig dicht bij π krijgen door n groot genoeg te kiezen. Nu zou ik niet het bekende rijtje willen opstellen, maar meteen zeggen: wil men π bijvoorbeeld in 10 decimalen nauwkeurig hebben, dan kan men n zo groot kiezen, dat $\frac{o_n}{R^2}$ in minstens de eerste 10 decimalen met π overeenstemt; men behoeft maar te zorgen voor $O_n - o_n < 10^{-10} R^2$.

Iets moeilijker is de behandeling, als men de oppervlakte van de cirkel eerst definiëren wil. Men heeft de beschikking over $o_n < O_n$ en (8), maar het zal onvermijdelijk zijn oneindig veel in- resp. omgeschreven regelmatige veelhoeken te beschouwen; ik zou ze echter, om alle naderingssuggestie af te snijden, niet in rijen rangschikken, maar liever van hun „verzamelingen” spreken. Zelfs zou het mogelijk zijn het woord „regelmatig” weg te laten, dan is er in het geheel geen volgorde meer mogelijk. De oppervlakken van deze veelhoeken vormen twee getalverzamelingen; de getallen van de ene zijn alle kleiner dan elk getal van de andere, maar volgens (8) is het mogelijk uit elk der verzamelingen een getal te nemen, zodanig dat het verschil van die twee een willekeurig gekozen positief getal niet overtreft. Men kan zich nu op de rekenkunde beroepen, die de existentie van een tussen beide verzamelingen liggend getal o garandeert, dat zal ook daarzonder voor de leerlingen aannemelijk zijn; dat er geen twee zulke getallen zijn, kan worden bewezen. Een beetje monotonie zal nodig zijn, als men wil

bewijzen, dat $o_n \neq 0$ en $O_n \neq 0$; daarna staat (7) ter beschikking met de rest van het vroegere betoog.

De goede orde eist, dat de definitie van o in een enkele zin wordt samengevat. Het bovenstaande zonder gebruik van nieuwe termen zo te comprimeren zal wel bezwaarlijk zijn; men moet dus nu wel van rijen gaan spreken en het begrip „limiet van een rij” invoeren. De juiste terminologie zou natuurlijk die van de „bovenste en onderste grens” zijn; voor gebruik ad hoc voel ik echter niet veel; ik wil ze daarom voor dit onderwerp niet propageren, zolang het program er verder geen emplooi voor heeft. Ik hoop evenwel, met het bovenstaande te hebben aangetoond, dat deze begrippen voor de leerling, bij de juiste voorbereiding, minstens zo toegankelijk zijn als het limietbegrip in zijn huidige behandeling.

Wat de omtrek betreft: uit $c_n = 2 \frac{o_n}{a_n}$ volgt, dat c_n willekeurig dicht bij het getal $2 \frac{o}{R}$ te brengen is, waarna de definitie $c = 2 \frac{o}{R}$ volgen kan.

Natuurlijk is het op soortgelijke wijze mogelijk de omgekeerde behandeling met de omtrek voorop te geven. Daarvoor is veel te zeggen; de idee der rectificatie gaat hier wel heel erg achter de berekeningen schuil en is op zich zelf al lang niet zo doorzichtig als de oppervlaktebepaling. Daarom zou een zelfstandige behandeling aanbevolen kunnen worden, bovendien is het het natuurlijkst de bepaling van de lengte aan die van de oppervlakte vooraf te laten gaan.

Tenslotte kan worden gewezen op de mogelijkheid in de stereometrie bij oppervlak en inhoud van kegel en cylinder de hele behandeling nog eens dunnetjes over te doen. De limietbehandeling in de algebra, die inmiddels plaats zal hebben gehad, zal daardoor steun krijgen; ze wordt dan weer toegepast in dezelfde gedachten-gangen, die ook ter voorbereiding gediend hebben.

De leerstof van de lagere klassen biedt wel meer gelegenheid het limietbegrip voor te bereiden door het houden van limietredeneringen. In de tweede klas ben ik gewend de goniometrische verhoudingen met behulp van coördinaten te definiëren voor andere dan scherpe hoeken. Er blijkt dan, dat een hoek van 90° geen tangens heeft; men zou moeten delen door nul. Maar voor een hoek, iets kleiner dan 90° , bestaat de tangens wel; we merken zelfs op, dat hij heel groot is. Kan hij wel groter zijn dan 1000? Ja zeker, maar dan moet de hoek toch ook al bijna 90° zijn. We kunnen de

tangens blijkbaar zo groot maken als we willen, als we de hoek maar weinig genoeg van 90° laten verschillen. Welnu, we spreken af, te zullen zeggen: „als de hoek tot 90° nadert, nadert de tangens naar oneindig”; zelfs zullen we voortaan zo slordig zijn te zeggen: „tg 90° is oneindig.”

De belangrijkste mogelijkheid tot zulke voorbereiding ligt mijns inziens in de behandeling van de raaklijn aan de cirkel. Niet alle leerboeken gebruiken de voorstelling van de raaklijn als grensstand van een om een snijpunt draaiende snijlijn; zo zag ik, meen ik, slechts één, dat de raaklijn op deze wijze *definieert*; de andere definiëren ze als een lijn, die één punt met de cirkel gemeen heeft. De existentie volgt dan uit het onderzoek van de mogelijke onderlinge liggingen van cirkel en rechte; meestal volgt meteen de rechte hoek tussen raaklijn en straal. Wel wordt dan soms het grenskarakter door zo'n draaiing „bewezen”, terwijl deze voorstelling ook wel wordt gebruikt om later enige stellingen (hoeken en bogen, macht) te bewijzen.

Nu is er op de voorstelling van zo'n draaiende lijn niets tegen, zolang men ze binnen het raam der meetkunde houden kan; ik heb echter de indruk, dat de auteurs wel degelijk mee geleid zijn door hun intuïtieve algemene limietvoorstelling en in elk geval zal de leerling ze zich later bij limietproblemen herinneren en zal hem dat de weg naar het exacte begrip blokkeren. Ik moet dus wel beginnen met critiek vanuit dit gezichtspunt.

Allereerst is er dus toch het letterlijke draaien, dus letterlijke naderen. In een volledige limietuitspraak van de vorm: „als dit nadert dan nadert dat” zijn er twee dingen, die in onderlinge verbondenheid elk tot iets naderen; de voorstelling hier suggereert veelal een zekere zelfstandigheid van een enkel ding. Eén boek gaat zelfs zo ver de derde-klas-problemen in te leiden met de definitie: „Als een rechte lijn OP” (ditmaal eens) „gestadig om punt O draait, zodat de hoek tussen OP en een vaste lijn OA kleiner wordt dan elke willekeurig kleine hoek, dan zegt men, dat de richting van OP onbepaald tot de richting van OA nadert”; hier is de emancipatie van OP dus volkomen. In het algemeen is er echter wel verband tussen twee dingen te constateren: de snijlijn nadert tot de raaklijn, de laatste heeft met de cirkel *twee samenvallende punten* gemeen. Naast de draaiende snijlijn hebben we dus ook het de cirkel doorlopende punt; wie van beide de onafhankelijk variabele is, is niet zo gemakkelijk uit te maken, ze treden allebei wel als zodanig op. In de primitieve voorstelling is het de snijlijn, hoe strenger echter de behandeling, des te meer valt die rol het punt

toe. Voorzover over „kleiner worden”, „dichter bij komen” gesproken wordt, dus te meten grootheden beschouwd worden, zijn dat, wat de snijlijn betreft, haar hoek met de raaklijn, wat het lopende punt aangaat, zijn afstand tot het raakpunt. Algebraïsch bekeken hebben we dus te maken met twee functioneel verbonden grootheden, een hoek en een afstand; elk van de twee kan als onafhankelijk variabele worden gekozen.

De denkwijze is natuurlijk typisch één naar de limiet toe; daarmee in verband staat, dat de beginstanden van de snijlijn volle klem krijgen omdat de naderingstendens er door moet worden aangegeven. In sommige figuren is de aanvangshoek wel zo'n 60° ; natuurlijk is een hoek van 1° principieel even dwaas. Tenslotte is er ook hier de vanzelfsprekendheid, waarmee de eigenschappen van de raaklijn door limietovergang volgen; in één boek valt „eindelijk” de snijlijn met de raaklijn samen, maar ook al wordt dat niet gezegd, het komt voor de leerling toch op het zelfde neer.

Natuurlijk zou ik een behandeling voor willen stellen, waarbij van de *raaklijn* wordt uitgegaan; het maakt daarbij verschil, wat men als onafhankelijk variabele kiest.

Kiest men het punt, dan komt de zaak hier op neer, *dat de lijn door het raakpunt en een daar dicht bij gelegen tweede punt een kleine hoek met de raaklijn maakt*; de uitspraak kan worden verscherpt.

Kiest men de snijlijn, dan is de opvatting van de raaklijn als grensstand al heel simpel te omschrijven; ze houdt niet meer in, dan *dat elke andere lijn door het raakpunt nog een tweede punt met de cirkel gemeen heeft*. We hebben natuurlijk wel nodig te weten, dat dat tweede punt willekeurig dicht bij het raakpunt liggen kan; dat kan uit deze uitspraak worden afgeleid, of tegelijk er mee uit de aanschouwing worden geponeerd.

Bij geen van beide opvattingen behoeft de aanschouwing een geringere rol te spelen dan in de gebruikelijke behandeling; wil men ze door figuren illustreren, dan is een hoek van 30° tussen beide lijnen *nu* helemaal niet gek; niets verhindert bovendien de *raaklijn uit* haar stand te draaien; men kan dus de volle dynamiek behouden.

Het wegvallen van de naderingssuggestie maakt het existentiebewijs en dus de definitie van de raaklijn langs deze weg wel zeer bezwaarlijk, vooral voor de eerste klas; ik zou er dus van willen afzien; zoals gezegd gebeurt dat ook maar zelden. Volgt men de gebruikelijke weg tot en met de rechte hoek tussen raaklijn en straal, dan is bovendien terugdringen van de aanschouwing in aanzienlijke

mate mogelijk; in hoeverre dat gewenst zou zijn, laat ik in het midden.

Opgemerkt kan nog worden, dat in veel gevallen een *rij* punten of rechten beschouwd, dus een variant geconstrueerd wordt. Dat is niet altijd zo zeer de bedoeling, in een figuur kan het natuurlijk niet anders. Bij strenge behandeling gebeurt het echter opzettelijk, de punten zijn dan genummerd. Dat is begrijpelijk: ook een „naderend punt” dient ergens een functie van te zijn; het rangnummer dient als argument. Intussen vormen de punten van een cirkel, zowel als de rechten door het raakpunt, een continuüm; dat maakt het construeren van een variant overbodig, men kan direct aansluiten bij het limietbegrip voor continue functies.

Het gebruik van de woorden limiet en naderen lijkt me in de eerste klasse ongewenst, zelfs in een samenvatting-in-geijkte-terminologie. Misschien blijft er zo van deze stof niet veel aantrekkelijks over; voor de derde klas is de grensvoorstelling evenwel gewenst in verband met de boven genoemde stellingen, die een mooie gelegenheid geven het bewijs van de „eenduidigheidsstelling” te oefenen. Een volledige behandeling is dan nog niet eens nodig, men kan zich tot die stellingen beperken.

Nemen we bijvoorbeeld het geval van de omtrekshoek. Maakt de raaklijn met een snijlijn door het raakpunt de hoek α , dan kan men α een omtrekshoek noemen en meteen laten „staan” op de ingesloten boog b . Trekt men binnen α een tweede snijlijn door het raakpunt (of draait men de raaklijn een eindje naar binnen) en noemt men de door de twee snijlijnen gevormde hoek α' , de bijbehorende boog b' , dan geldt enerzijds $\alpha' = \frac{1}{2}b'$, terwijl men anderzijds de verschillen $\alpha - \alpha'$ en $\frac{1}{2}b - \frac{1}{2}b'$ willekeurig klein kan rekenen, hetgeen onvereenigbaar is met $\alpha \neq \frac{1}{2}b$.

Met het bovenstaande is wel ongeveer een beeld gegeven van het buiten-algebraïsch limietgebruik in ons onderwijs, alsmede van de mogelijkheden, die daarin liggen om bij de leerling een behoorlijk limietinzicht aan te kweken.

Voorzover het uit critiek bestond, is de aard daarvan al enige malen in het licht gesteld; het is geenszins zo, als zouden hier dan eindelijk eens reeds jaren ten hemel schreiende ongerechtigheden aan de kaak worden gesteld. Al vind ik nu de gecritiseerde passages geen van alle acceptabel, tot voor kort zou ik aan de meeste niets ernstigs af te keuren en sommige zelfs uitstekend gevonden hebben. Het is veeleer zo, dat het onderzoek, waarvan dit artikel het verslag is, opzettelijk is ingesteld naar aanleiding van de in-

zichten, die gedeeltelijk door het schrijven van de vorige artikelen verkregen, althans daardoor verscherpt en gerijpt zijn en met die inzichten tot toetssteen; met andere woorden, er is naar de zwakke punten *gezocht*.

Met deze vaststelling is anderzijds in geen geval bedoeld de geldigheid dezer critiek te relativieren; integendeel geloof ik, dat zich in dit onderwijs meermalen de paradoxale situatie voordoet, dat we wanbegrip trachten weg te nemen door de oorzaken er van te versterken; het is immers wel gebleken: hoe duidelijker we willen zijn, zoveel te meer dringen we de „veranderlijkheid” op en zoveel te verder komen we van het exacte begrip af te staan. Verbetering in deze toestand zal echter, vooral aanvankelijk, niet zo gemakkelijk zijn; een ietwat diepgaande wijziging van opvattingen heeft eerst een periode tengevolge van een zeker „ontworteld zijn”; in dit geval, doordat de critische zin ten aanzien van de gebruikelijke formuleringen snel groeit, echter beter passende niet meteen vlot ter beschikking staan. Een lezer, die de inhoud van dit artikel ook in andere zin „gezocht” mocht vinden, zou het eerste gemakkelijk bij zich zelf kunnen waarnemen, als hij de moeite wilde nemen eens de limieten in een paar leerboeken vanuit dit gezichtspunt te bekijken. Het tweede zou hij daarna dan ook wel moeten ervaren, maar daarmee staat het zo eenvoudig niet, het is niet zo gemakkelijk zich een nieuwe habitus aan te meten.

Intussen ligt terecht het zwaartepunt van de limietbehandeling bij het middelbaar onderwijs in het speciaal daaraan gewijde hoofdstuk van de algebra, waarin dan weer de algemene limietdefinitie centraal staat. Ik stel me voor in het vervolg van dit artikel daaraan hoofdzakelijk aandacht te wijden.

Haren (Gron.), October 1950.

OVER EEN MISLEIDEND ALGEBRA VRAAGSTUK

door

Dr L. LIPS (Bandung.)

Het is een goede gewoonte, om bij de ontbinding van de kwadratische vorm in het geval $D = 0$ te concluderen tot:

$ax^2 + bx + c$ is, *afgezien van de factor a* , het kwadraat van een lineaire vorm in x , of tot: de vorm is het kwadraat, *of het tegengestelde van het kwadraat* van een lineaire vorm in x , nl.:

$$ax^2 + bx + c = \pm \{\sqrt{|a|} \cdot (x - x_1)\}^2.$$

Vroeger, toen de imaginaire getallen nog op het H.B.S. programma stonden, behoefde men zich niet zo voorzichtig uit te drukken, immers was b.v. $-3x^2 + 6x - 3$ het kwadraat van $i \cdot \sqrt{3} \cdot (x - 1)$. Daar zal het dan ook wel aan te wijten zijn, dat men nog al eens slordig met die coëfficiënt a van x^2 omspringt. Men omzeilt deze kwestie vaak, door in de vraagstukken hierover voor $a = 1$ of een ander positief vast getal te kiezen. Men houdt echter zijn hart vast, als men de volgende opgave aantreft.

Voor welke waarden van p is

$$-px^2 - (p+1)x + (p+1)$$

het kwadraat van een lineaire functie in x ?

Lost men dit vraagstuk echter op ($p = -1$, $p = -\frac{1}{5}$), dan blijkt dat minteken voorop juist het slimmigheidje te zijn, waarmee de schrijvers van het leerboek zich de moeite van het zorgvuldiger formuleren van de opgave besparen.

Nu is er echter één geval, waarbij men deze coëfficiënt niet meer zelf in de hand heeft. En daarop slaat de titel van dit stukje. Ik citeer nu even een veelgebruikt leerboek.

Bepaal m zo, dat

$$x^2 - 2xy - my^2 - 2x - 4y$$

te ontbinden is in twee meetbare factoren.

Oplossing. $x^2 - 2(y+1)x - (my^2 + 4y)$.

$$x_{12} = y + 1 \pm \sqrt{\{(m+1)y^2 + 6y + 1\}}.$$

De nodige en voldoende voorwaarde voor meetbare factoren is nu, dat

$$(m+1)y^2 + 6y + 1$$

het kwadraat is van een lineaire vorm in y . Hiervoor is nodig *en voldoende*, dat de discriminant nul is, dus dat $36 - 4(m + 1) = 0$
 $m = 8$.

Opgave. Controleer het antwoord.

De cursivering is van mij. De schrijver van het leerboek zal ook wel weten, dat de bedoelde voorwaarde alleen nodig, maar zeker niet voldoende is. Men heeft eenvoudig af te wachten, of $(m + 1)$ voor de gevonden waarde van m een zuiver vierkant is. Vandaar dan vermoedelijk ook die vraag over de controle van het antwoord.

Nog een bijkomstige opmerking hierover. Vat men de vorm als een kwadratische vorm in y op, dan zal men behalve $m = 8$ nog $m = 0$ vinden, welke waarde niet blijkt te voldoen. Waarom dit zo is, zal uit de algemene opzet hierachter direct duidelijk zijn.

In een ander leerboek wordt de moeilijkheid aldus omzeild.

Ontbind in twee rationale factoren

$$2x^2 + xy - 3y^2 + 10x + ky + 12.$$

Van deze tweedegraadsvorm in x is de discriminant

$$D = 25y^2 + (20 - 8k)y + 4$$

en daar de coëfficiënt van y^2 hier dus een zuiver vierkant, nl. 25, blijkt te zijn, gaat alles verder gesmeerd. Ik nodig de schrijver van dat leerboek uit, deze opgave eens te maken met -2 , i.p.v. met -3 als coëfficiënt van y^2 in de opgave. De bedoelde eerste coëfficiënt in D wordt dan nl. $+17$.

Er zit m.i. iets misleids in dergelijke opgaven. Ik vrees, dat de schooljeugd de indruk krijgt, dat zo'n vraagstuk altijd goed op te lossen is. De vraagstukken van dat type, die ze in de boekjes tegenkomen, lopen alle even glad. Ze merken niet, dat ze beetgenomen worden met een tevoren geprepareerde goocheltruc. Elke leraar, die zelf eens een dergelijk vraagstukje voor een proefwerk in elkaar gedraaid heeft, zal wel gemerkt hebben, dat men het eenvoudigst maar twee rationale en in x en y lineaire vormen met elkaar kan vermenigvuldigen en dan een geschikte coëfficiënt onbekend nemen en dan daarnaar vragen.

En dat niet alleen de schooljeugd zich laat beetnemen moge blijken uit het volgende, wel heel sterke voorbeeld uit mijn leraarsloopbaan.

Eind 1946 moesten de wiskundeleraren van de 5e klassen van de 3 H.B.S.'en, die Batavia toen rijk was, in onderling overleg de opgaven voor het komende eindexamen opstellen. Daartoe stelde elk een concept eindexamen op, volledig opgelost en deze lieten

we eerst circuleren, waarna dan in een eindvergadering een definitieve keuze uit de opgaven gedaan zou worden. Een der leraren had zo'n type vraagstuk opgegeven, had echter de „truc" niet door gehad en had zodoende twee „oplossingen" gevonden. Verder had hij niets gecontroleerd, zijn collega had ook niets gemerkt. Deze oplossingen bleken toen beide de coëfficiënt van y^2 in de discriminant negatief te maken, zodat voor de gevonden waarden de vorm niet eens in reële factoren te ontbinden was. Als verzachtende omstandigheid moet ik hieraan toevoegen, dat beide leraren niet volledig bevoegd waren, maar aan de andere kant hadden ze een jaren lange leraarspraktijk in de drie laagste klassen van de H.B.S. achter de rug. Waar zo'n vraagstuk in staat bleek, dergelijke oude rotten op een dwaalspoor te brengen, zou dan onze schooljeugd de zaak wel door hebben?

Tot slot willen we de vorm eens met lettercoëfficiënten neerschrijven

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f$$

en nagaan, wat de in de bedoelde leerboeken gevolgde methode eigenlijk oplevert, dus

$$ax^2 + 2(by + d)x + cy^2 + 2ey + f$$

$$D \equiv (by + d)^2 - a(cy^2 + 2ey + f) \equiv (b^2 - ac)y^2 + 2(bd - ae)y + (d^2 - af).$$

Daarna wordt de discriminant D' hiervan gelijk 0 gesteld, dus

$$(bd - ae)^2 - (b^2 - ac)(d^2 - af) = 0, \\ -2bdae + a^2e^2 + b^2af + acd^2 - a^2cf = 0.$$

Hier staat

$$-a \cdot \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0,$$

dus $a \cdot H = 0$, waarin H de bekende projectieve invariant van de gegeven tweedegraadsvorm is. Vat men de vorm op als een tweedegraadsvorm in y , dan vindt men $c \cdot H = 0$.

We hebben dus

1). Zij de coëfficiënt a van x^2 in de gegeven vorm nul; vat deze dan als een tweedegraadsvorm in y op, de methode leidt tot $c \cdot H = 0$ (iets dergelijks voor $c = 0$).

2). Is $a = c = 0$, dan faalt de aangegeven methode.

Vat men de vorm als een kwadratische vorm in x op, dan heeft men

3). Is a een constante $\neq 0$, dan leidt de methode tot $H = 0$ (men mag door a delen).

- 4). Bevat a de onbekende, dan leidt de methode tot $a \cdot H = 0$, dus tot $a = 0$ of $H = 0$.
 $a = 0$ leidt echter tot (een) valse oplossing(en), tenzij de daaruit gevonden waarde(n) ook aan $H = 0$ voldoet (voldoen).
- 5). Iets dergelijks geldt, als men de vorm als een kwadratische vorm in y opvat, en daaruit volgt de bovengemaakte opmerking over de valse oplossing $m = 0$.

We resumeren nog eens

- 1). De aangegeven methode faalt geheel in het geval $a = c = 0$.
- 2). Als de onbekende in a of (en) c voorkomt, is het mogelijk, dat „oplossingen” insluipen, die niet blijken te voldoen.
- 3). *De „goede” oplossingen, die men met deze methode vindt, komen alleen uit $H = 0$, d.w.z. men vindt met de aangegeven methode alleen de voorwaarde, waaraan de coëfficiënten moeten voldoen, opdat de kwadratische vorm in lineaire factoren te ontbinden is. Men heeft slechts af te wachten, of deze factoren reëel of niet reëel en in het eerste geval of ze rationaal dan wel irrationaal zullen zijn. Dat men met deze methode zou zoeken naar een oplossing, die tot een rationale ontbinding leidt, is dus slechts schijn.*

Op de keper beschouwt blijft van dit type vraagstuk nog slechts de volgende parodie over.

Gegeven is een kwadratische vorm in x en y met één onbepaalde coëfficiënt. De overige coëfficiënten zijn zo gekozen, dat, als deze vorm in lineaire factoren te ontbinden is, deze automatisch rationaal worden. Vraag: Bepaal deze onbepaalde coëfficiënt nu zo, dat deze vorm in rationale lineaire factoren te ontbinden is.

Oplossing: We bepalen de onbepaalde coëfficiënt uit $H = 0$, zodat dan de vorm in lineaire factoren te ontbinden is, die volgens het gegeven vanzelf rationaal zullen worden.

De schooljeugd, die van H geen weet heeft, mag dan de discriminant van de discriminant gelijk nul stellen en loopt daarbij alleen kans, valse wortels in te voeren of dat de methode faalt. Verder doet hij hetzelfde.

Ik geloof, dat hiermee het misleidende in dit vraagstuktype wel voldoende is toegelicht.

Naschrift. Het is niet mijn bedoeling geweest, onaangenaam te zijn tegen bepaalde schrijvers van leerboeken. Persoonlijk reken ik de boeken, waaruit bovengenoemde voorbeelden ontleend zijn, tot de beste Algebra boeken voor het M.O.

BOEKBESPREKING.

Zeven voordrachten over topologie onder redactie van
Prof. Dr. H. Freudenthal en Dr. W. Peremans.
Centrumreeks I. J. Noorduyt en Zn. Gorinchem 1950.
133 pag.

Het is niet weinig wat de deelnemers aan een driedaagse vacantiem cursus van het Mathematisch Centrum in 7 voordrachten over topologie te verwerken gekregen hebben. Zij zullen het daarom wellicht op prijs stellen in deze bundel nog eens het gebodene te kunnen nalezen.

De voordrachten zijn gehouden door Prof. Freudenthal, Prof. de Groot, Dr. van Hemert, Prof. van Dantzig, Prof. van der Waerden, Prof. Hirsch en Prof. Gerretsen.

Aan de hand van eenvoudige voorbeelden wordt in de eerste lezing duidelijk gemaakt wat onder topologie wordt verstaan en komt zowel de combinatorische topologie als de verzamelingstheoretische topologie ter sprake.

De overige voordrachten zijn elk meer gewijd aan een bepaald topologisch probleem. Ter sprake komen het dimensiebegrip, het topologische begrip kromme, waaronder figuren vallen, die naar de schijn weinig gemeen hebben met het aanschouwelijk begrip kromme, de stelling van Jordan—Brouwer, topologische problemen in de algebra, topologische problemen samenhangende met de projectieve meetkunde en driedimensionale overdekkingsruimten.

In verschillende voordrachten zijn diepliggende en vrij lastige kwesties aangesneden, die echter zoveel mogelijk aan voorbeelden worden verduidelijkt. Dit ligt aan de aard van de stof. De eigenschappen van figuren, die de topoloog zoekt, liggen „verder weg” dan die welke men in verschillende meetkunden bestudeert.

Het is allerm minst de bedoeling van de schrijvers geweest een inleiding in de topologie te schrijven, doch men heeft de lezers een indruk willen geven van de ideëenrijkdom van dit gebied, waarvan de aantrekkelijkheid wordt verhoogd door de vele onopgeloste doch eenvoudig te formuleren problemen.

Het genoemde doel zal het beste tot zijn recht komen bij die lezers, die reeds enigszins met topologische begrippen en eigenschappen vertrouwd zijn.

J. HAANTJES.

Dr. H. J. E. Beth, *Inleiding tot de differentiaal- en integraalrekening*. P. Noordhoff N.V. Groningen, 1950 (vijfde druk). 430 blz. f 13.50, geb. f 16.—

Van deze bekende inleiding is reeds zoveel goeds gezegd, dat het onnodig is, haar bij haar vijfde verschijnen nogmaals aan te prijzen. Sinds

1945 prijkt ze op het boekenlijstje der Groningse Nat. phil. Faculteit. De verschijning van de Bruyn's Beknopt Leerboek der differentiaal- en integraalrekening nodigt tot een vergelijking van deze beide uitstekende werken, die een soortgelijk doel nastreven, uit. Terwijl laatstgenoemd werk zich beperkt tot een behandeling der analyse zonder in te gaan op meetkundige of natuurwetenschappelijke of economische toepassingen, wordt een belangrijk deel van Beth's boek aan die toepassingen gewijd. Het zal duidelijk zijn, dat in dat gedeelte de begripsvormingen en de afleidingen niet die scherpste kunnen hebben als in het analytisch deel gewenst zijn. Dit heeft de taak van de Schrijver verzwaaard. Daardoor is het te verklaren, dat ook in het analytisch deel hier en daar bij bepaalde beweringen zekere onderstellingen stilzwijgend worden aangenomen, en dat in bewijzen een beroep wordt gedaan op de intuïtie, waar een ter plaatse nodige stelling wordt verzwegen.

Ik wil dit met enkele voorbeelden staven. De Schrijver moge deze opmerkingen beschouwen als een bewijs van mijn grote belangstelling voor zijn werk.

In § 25 wordt er niet op gewezen, dat het bewijs onvolledig is, doordat steeds $\Delta u \neq 0$ wordt ondersteld. In § 26 geldt voor $y = x^n$ (n nat. getal), dat $y' = n \cdot x^{n-1}$ „behalve voor $x = 0$ met $n = 1$ ”; in § 27 worden de uitzonderingswaarden niet genoemd voor de formules der afgeleiden van $\operatorname{tg} x$, etc.; in § 29 ontbreken de voorwaarden: $x > 0$ (twee maal) en $F(x) > 0$. In § 93 zijn de voorwaarden, onder welke de methode van substitutie geldt, niet geheel duidelijk.

In § 107, 2e en 3e al. en op p. 220 wordt stilzwijgend aangenomen, dat bij toename van het aantal deelpunten de oude behouden blijven. De redeneringen na de definitie van bepaalde integraal sluiten bij deze definitie niet aan. Wel bij de volgende: „De begrensde functie $f(x)$ heeft op $[a, b]$ een bepaalde integraal, als voor iedere rij $\{\Delta_j^{(n)}x\}$ van verdelingen van $[a, b]$ in eindig veel segmenten, voor welke bij toenemend rangnummer n der verdeling haar grootste segmentlengte naar nul nadert, terwijl eenmaal optredende deelpunten bij alle volgende verdelingen der rij behouden blijven, de sommen $\sum_{(j)} f(\xi_j^{(n)}) \cdot |\Delta_j^{(n)}x|$, met $\xi_j^{(n)}$ op $\Delta_j^{(n)}x$, een limiet hebben. Deze limiet zal dan steeds dezelfde zijn, en haar waarde is die van $\int_a^b f(x)dx$.”

Op p. 221, 1e regel wordt stilzwijgend aangenomen, dat continuïteit op $[a, b]$ uniforme continuïteit tot gevolg heeft. Het gebruik van deze eigenschap kan men vermijden, zo men, onder gebruikmaking van boven gegeven definitie, zich beperkt tot uit eindig veel monotone stukken opgebouwde, begrensde functies; het bestaan der bepaalde integraal is voor dergelijke functies exact te bewijzen. (Voor functies als $y = x \sin \frac{1}{x}$ voor $x \neq 0$, en $y = 0$ voor $x = 0$ kan men dan de integraal over $[0, 1]$ als oneigenlijke integraal invoeren).

Soortgelijke opmerkingen als in de beide vorige al. zijn te maken over § 130 (dubbele integralen).

In § 112 (p. 228) is de bewering, dat bij $f(x) \geq 0$ voor het bestaan

van $\int_a^\infty f(x)dx$ nodig zou zijn, dat $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ is, onjuist. In § 113 worden geen voorwaarden gegeven bij de formule voor de differentiatie onder het integraalteken. In §§ 132, 139 blijven moeilijkheden verzwegen. In § 158 is de afleiding der formules van Cauchy-Riemann weinig bevredigend; continuïteit der partiele afgeleiden van u en v wordt hier zeker wel ondersteld. In § 168 (p. 340) zijn de beschouwingen betreffende de constante C vaag en, naar het mij schijnt, overbodig; men kan toch in de onderstelling, dat de reeksontwikkeling van p. 340 als oplossing der differentiaalvergelijking kan worden beschouwd, haar eerste term y_0 als constante C opvatten. In § 192, 5e al. staat: „... dat $f(x, y, y')$ in een bepaald gebied van x, y en y' een continue functie is van de veranderlijken, die de partiele afgeleiden bezit, ...”; dit zinsdeel is zeker mislukt.

J. RIDDER.

F. Harkink. *Inleiding tot het praktisch rekenen.*
(P. Noordhoff N.V. Groningen—Batavia.) / 5.25,
geb. / 6.00.

Dat reeds zo spoedig na het verschijnen van dit boek een tweede druk het licht ziet, bewijst wel dat het — zoals ik reeds in mijn bespreking van de eerste druk voorspelde — in een „bestaande behoefte voorziet”. Een ieder, dié in zijn beroep te maken krijgt met reken- en cijferwerk, vindt in dit boekje handige en nuttige aanwijzingen en voorschriften niet alleen om dit cijferwerk systematisch en efficiënt op te zetten, maar vooral ook methoden om zich een oordeel te vormen omtrent de nauwkeurigheid van zijn uitkomsten in verband met de nauwkeurigheid van de gegevens. Ook omgekeerd wordt aangegeven hoe men bij voorgeschreven nauwkeurigheid der resultaten, de vereiste nauwkeurigheid der waarnemingen, die daartoe leiden, kon bepalen. Het boekje is daarom wel in de eerste plaats van belang voor onze ingenieurs en a.s. ingenieurs, die in hun dagelijkse arbeid nog al eens met langdradige én ingewikkelde becijferingen te doen krijgen en die zich nog maar al te vaak te weinig rekenschap geven van de daarbij bereikte of bereikbare nauwkeurigheid. Voor a.s. ingenieurs in de richting civiel, geodesie, landmeten o.a. is het „praktisch rekenen” dan ook al een examenvak, terwijl ook in andere richtingen der ingenieursstudie het belang van het „numerieke” rekenen steeds meer wordt ingezien. De vele opgaven in het boek van Harkink — met de antwoorden — maken dit boek voor de studenten tot een geschikt en nuttig studieboek.

Voor al belangrijk in deze tweede druk is de grote uitbreiding, die het hoofdstuk „Interpolatie” heeft ondergaan. Men vindt daarin behalve de interpolatieformules van Newton en Lagrange ook die van Gregory-Newton, van Gauss, Stirling, Bessel en Everett. Ook de teruginterpolatie wordt besproken.

Ook de leraren bij het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs vinden in dit boek — vooral in de begin-hoofdstukken — verschillende dingen, die ze bij hun onderwijs kunnen gebruiken; voor de leerlingen zelf is het niet bedoeld.

Een enkele opmerking: het afbreken van de vorm $f(x_i, x_{i+1}) - a$, zò dat aan het eind van een regel staat $f(x_i$, en aan het begin van de volgende regel $x_{i+1}) - a$ zoals op bladzijde 118 lijkt me niet fraai. Ik zou de schrijver in overweging willen geven dit in een volgende druk, die zeker weer spoedig nodig zal zijn, te veranderen.

W. J. VOLLEWENS.

KAN HET WISKUNDE ONDERWIJS TOT DE OPVOEDING VAN HET DENKVERMOGEN BIJDAGEN? ¹⁾

Onder deze titel is een discussie gepubliceerd tussen Mevr. Ehrenfest—Afanassjewa en Prof. Freudenthal.

We stellen ons voor later op deze brochure terug te komen, maar willen nu reeds de aandacht er op vestigen, wegens de helderheid van argumentatie en het hoge peil waarop de discussie staat.

MATHEMATISCH CENTRUM.

Zoals gewoonlijk zal dit jaar weder een vacatiecursus voor wiskundeleraren en andere belangstellenden in de wiskunde gehouden worden. Deze vindt plaats op 27, 28 en 29 Augustus a.s. te Amsterdam en gaat dit jaar vooral over de wiskunde als toegepaste wetenschap.

Er zal getracht worden de voordrachten ook belangwekkend te maken voor een zo ruim mogelijke kring van geïnteresseerden.

Nadere inlichtingen over sprekers, onderwerpen, plaats, tijd enz. kunnen bij het Mathematisch centrum verkregen worden.

Aanmeldingen bij „Het Mathematisch Centrum” 2de Boerhaavestraat 49. Amsterdam (O.). Onkosten f 2.50 op postgiro No. 462890.

VERZOEK VAN WIMECOS.

Alle leraren, die opmerkingen (zowel in goede als in slechte zin) hebben, over de eindexamenopgaven voor wiskunde en mechanica van de H.B.S. van dit jaar worden verzocht deze te sturen aan de secretaris van Wimecos.

Ir. J. J. TEKELENBURG.
Bergsche laan 13a.
Rotterdam (N.).

¹⁾ Publicatie uit de wiskunde-werkgroep van Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs I (prijs f 1,25).

Dr H. STREEFKERK.

NIEUW MEETKUNDEBOEK

VOOR

M.O. EN V.H.O.

Deel I f 3,75

Deel II f 3,25

Deel III in bewerking

Uit notities van de schrijver:

In de eerste klas kan men geen begrippen aanbrengen, door er een definitie van te geven. De begrippen moeten gevormd worden, door met de figuren „om te gaan”. Definities dienen alleen om wetenschappelijk spraakgebruik mogelijk te maken. Daarom wordt in de eerste vier hoofdstukken slechts getekend, gemeten en gerekend, hoofdzakelijk aan drie- en vierhoeken. Ook wordt er veel geconstrueerd; het bewijs van de constructies wordt uitgesteld tot later, wanneer de leerlingen dit zelf kunnen leveren. Het zwaartepunt valt op de opgaven, die zodanig geformuleerd zijn, dat de leerlingen onmiddellijk de juiste figuur tekenen met de voorgeschreven letters.

Er wordt niet uitgegaan van het deel (punt), maar van het geheel (driehoek, rechthoek).

In hoofdstuk 5 wordt het meetkundig begrippenstelsel in de normale schoolomvang aan de orde gesteld. Al het reeds ontdekte wordt geordend en op de rij af bewezen. Door de uitgebreide oefening in de eerste vier hoofdstukken wordt de aandacht niet meer opgeëist door de inhoud van de stellingen en kan deze gewijd worden aan een systematische oefening in het bewijzen.

De gebezigde taal is veel kinderlijker, dan in meetkundeboeken gewoonte is. Ook is gebroken met de gedachte, dat dunne boekjes te verkiezen zouden zijn boven dikkere. In de eerste plaats hebben, naar mijn ervaring, de meeste leerlingen (men schrijft een meetkundeboekje voor de eerste klas, nu eenmaal niet voor begaafde, maar voor gewone leerlingen) liever een wat uitvoeriger bewijs, dan één, dat erg beknopt is, *als de uitvoerigheid maar van dezelfde aard is als hun eigen gedachtenspel.*

Het boekje is zó ingericht, dat het de leraar zoveel mogelijk uitschakelt, of liever de leerling zoveel mogelijk inschakelt (Daltonscholen).

Gebroken is met de gewoonte, om eerst een flink stuk theorie te geven, om daarna het hoofdstuk te besluiten met een reeks opgaven. Het is integendeel een zeldzaamheid, als meer dan twee stellingen tegelijk behandeld worden. Elk voor de leerlingen nieuw begrip, elke nieuwe stelling, worden onmiddellijk toegepast in opgaven, waarbij de leerling ook zelf nieuwe stellingen te bewijzen krijgt. Zelfs de vijf congruentie-gevallen worden in drie gedeeltes behandeld; na elk groepje komt een aantal opgaven ter oefening; aan het eind komt dan een overzicht met een aantal gemengde opgaven. Zeer sterk is dit beginsel ook doorgevoerd in de hoofdstukken van de evenredigheid van lijnstukken, de vermenigvuldiging van figuren en de gelijkvormigheid. M.a.w. de compositie van het boek is met de grootste zorgvuldigheid behandeld.

Gebroken is ook met de traditionele volgorde van de leerstof. De evenredigheid van lijnen is als afzonderlijk hoofdstuk onttroond; eerst wordt een gedeelte behandeld, tussen de andere stellingen door; de rest wordt uitgesteld tot bij de behandeling van het parallelogram. Ook is, in verband met de experimentele inleiding, het AXIOMA van EUCLIDES in zijn oorspronkelijke vorm hersteld. De ongelijkheden zijn geheel uit de eerste klas verbannen; ze komen nog na de gelijkvormigheid, evenals de meetkundige plaatsen en de analyse en discussie van ingewikkelde constructie-opgaven. Daarvoor in de plaats komen vóór de evenredigheid van lijnstukken de oppervlakten met de stelling van PYTHAGORAS en eenvoudige eigenschappen over de cirkel.

De algebraïsche voorkennis (worteltrekking, evenredigheden) wordt hier en daar in het boekje zelf aangebracht. De evenredigheden zijn opgezet naar het voorbeeld van P. WIJDENES.

De behandeling van de evenredigheid van lijnstukken is geheel nieuw opgezet. Ik had steeds grote bezwaren tegen de invoering van de vermenigvuldiging van lijnstukken „ad hoc”: ze diende slechts om aan de theorie van de gelijkvormigheid een wetenschappelijk tintje te geven, en werd daarna bijgezet. Ook verdroot mij steeds de „afgesneden-driehoek-stelling” (dubbele stelling van THALES), een m.i. onnatuurlijke stelling vóór de gelijkvormigheid. Deze stelling komt dan ook in dit boekje niet meer voor. In de plaats daarvan treedt de naar voren geschoven vermenigvuldiging van figuren als intrinsiek bestanddeel van de meetkunde; twee ongelijke, evenwijdige lijnstukken zijn steeds elkaars productiefiguur, ook in de desbetreffende opgaven. Hier is — juist ook vanwege het nieuwe — iedere bepaling en iedere stelling onmiddellijk gevolgd door opgaven ter vastlegging.

Nog een nieuwigheid waagde ik. Er is veel gesproken over de vraag, of men lijnstukken een afzonderlijke notatie zou geven: AB of $\overline{AB}$? Naar mijn mening is bij de leerlingen het meest hinderlijke niet de verwarring van lijn en lijnstuk, maar die van *lijnstuk* en *lengte van een lijnstuk*. Dit komt vooral tot uiting bij de vermenigvuldiging van lijnstukken. Ik heb daarom de streepjesnotatie ingevoerd voor de *lengte* van een lijnstuk; dus $\overline{AB}$ = een lijnstuk = een meetkundig figuur; $\overline{AB}$ = de lengte van een lijnstuk = een getal.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - DJAKARTA

NIEUWE SCHOOL - ALGEBRA

DOOR

Dr H. J. E. BETH

AMERSFOORT

EN

P. WIJDENES

AMSTERDAM

I. Negentiende druk	156 blz. 21 fig. f 3,—
II. Zeventiende druk	204 blz. 50 fig. f 3,—
III. Elfde druk	185 blz. 55 fig. f 3,—

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Zesde druk 144 blz. 11 fig. f 2,90

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

V α en VI α Nieuwe Schoolalgebra III α

V β en VI β Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III

Voor de logaritmen:

Noordhoff's Schooltafel (5 dec.) 10e druk f 2,25

Noordhoff's Tafel in 4 dec. 16e druk f 1,40

Dr H. J. E. BETH.

Tafels in 4 decimalen, benevens gegevens op verschillend gebied, voor schoolgebruik, vooral ten gebruike bij natuurkunde, scheikunde en cosmografie. 3e druk f 0,60.

Voor leraren die deze boeken gebruiken, antwoorden gratis en franco; de uitgewerkte log. vraagstukken in vier en vijf dec. gratis alleen bij P. Wijdenes, Amsterdam-Z.; deze uitwerkingen zijn niet in de handel.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA