

# EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN  
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,  
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR  
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - Prof. Dr. E. W. BETH, AMSTERDAM

Dr. R. BALLIEU, LEUVEN - Dr. G. BOSTEELS, HASSELT

Prof. Dr. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - Dr. L. N. H. BUNT, UTRECHT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

Dr. R. MINNE, LUIK - Prof. Dr. J. POPKEN, UTRECHT

Dr. O. VAN DE PUTTE, RONSE - Prof. Dr. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

Dr. H. STEFFENS, MECHELEN - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

26e JAARGANG 1950/51

Nr 4

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

**Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken** verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van de **Wimecos** storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1950 t/m 31 Augustus 1951 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) ten bedrage van f 5,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

**Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107<sup>III</sup>, Amsterdam, aan wie tevens alle correspondentie gericht moet worden.**

**Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, van Lenneplaan 16. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.**

**Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.**

In een bijna volledige serie van **Euclides** ontbreekt jaargang 11.  
Wie kan mij daaraan helpen?

A. H. F. Engering, Haviklaan 31, Den Haag

## I N H O U D.

|                                                                                                                         | Blz. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Notulen van de vergadering van de Groep Li.w.e.n.a.g.e.l. in het Eykmanhuis te Driebergen op 1 September 1950 . . . . . | 177  |
| Beknopt verslag van de Algemene Vergadering van Wimecos op 3 Januari 1951                                               | 178  |
| Herdenking van het 25-jarig bestaan van Wimecos op de Jaarvergadering van 3 Januari 1951 door de Voorzitter . . . . .   | 181  |
| Dr ERWIN VOELLMY † . . . . .                                                                                            | 185  |
| Prof. Dr G. HOLST, Wiskunde en techniek. . . . .                                                                        | 186  |
| Dr H. J. E. BETH, Over momenten. . . . .                                                                                | 202  |
| Dr. B. L. VAN WAERDEN, Over de ruimte. . . . .                                                                          | 207  |
| H. G. BRINKMAN, De algemene momentenstelling . . . . .                                                                  | 220  |
| Verzoek . . . . .                                                                                                       | 224  |

**Notulen van de vergadering van de Groep L.i.w.e.n.a.g.e.l in  
het Eykmanhuis te Driebergen op 1 September 1950.**

De presentielijst was getekend door de dames: C. Faber-Gouwentak, J. G. Modderman en A. Kramer en de heren: J. J. Tekelenburg (namens Wimecos), J. W. Blom (namens Velines), H. J. Jacobs (namens de Werkgroep van de W.V.O.), H. Ph. Baudet, J. C. v. d. Steen, H. W. Lenstra, H. Mooy, S. Roodenburg, A. Fokkens, W. J. A. Schouten, J. W. Koning, N. J. Medemblik, J. v. Kuýk, R. L. Krans, D. J. E. Schrek, J. W. Schuyt, H. J. van Alphen, N. Slotboom, H. Streefkerk, J. Nagel, L. N. H. Bunt, P. J. Nieuwkamp, D. Leijes, P. G. J. Vredenduin en J. Willemse.

De Voorzitter opent de vergadering met een hartelijk woord van welkom speciaal tot de vertegenwoordigers van Wimecos, Velines en de werkgroep van de W.V.O. en deelt mee, dat inspecteur Van Dam bericht van verhindering gezonden had. De notulen van de vorige vergadering werden goedgekeurd en daarna deed de Voorzitter het voorstel om het aantal bestuursleden met één lid uit te breiden, als zodanig stelde de Voorzitter voor Dr R. L. Krans. Het voorstel werd met algemene stemmen aangenomen, Dr Krans verklaarde de benoeming te willen aanvaarden.

Hierna werd het Rapport, uitgebracht door de Commissie ter bestudering van het onderwijs in de infinitesimaalrekening in de  $\beta$ -afdelingen der Gymnasia en der Gymnasiale afdelingen der Lycea in bespreking gebracht.

Het rapport is, na een zeer geanimeerde discussie, vrijwel onveranderd met algemene stemmen door de vergadering aangenomen, behoudens enkele veranderingen van ondergeschikt belang, diè als errata aan het rapport zullen worden toegevoegd.

Vervolgens komt het Rapport in bespreking van de Commissie ter bestudering van een reorganisatie van het Wiskunde-onderwijs in de  $\alpha$ -afdelingen van de Gymnasia en de Gymnasiale afdelingen der Lycea

Velen spraken hun waardering uit over de geest, die uit dit Rapport spreekt en het werd onveranderd aangenomen

Dr Schrek vraagt, wat er nu verder met de rapporten gebeuren zal.

De Voorzitter antwoordt, dat de rapporten:

1. reeds gepubliceerd zijn in het Weekblad (No. 47 van 26 Juli 1950) en ook nog zullen worden gepubliceerd in Euclides;
2. zoveel mogelijk onder de aandacht zullen worden gebracht van de bevoegde autoriteiten;
3. zullen worden toegevoegd aan het rapport van de Commissie Van der Wal.

Verder zal het bestuur van L.i.w.e.n.a.g.e.l haar uiterste best doen om de voorgestelde wijzigingen te doen verwezelijken.

De Voorzitter deelt nog mee, dat binnenkort een Commissie zal worden ingesteld ter bestudering van het onderwijs in Natuurwetenschappen aan Gymnasia en de Gymnasiale afdelingen der Lycea.

Niets meer aan de orde zijnde sluit de Voorzitter hierna de vergadering.

Kruisbessenstraat 12  
's-Gravenhage.

A. T. M. KRAMER,  
*Secretaresse.*

### **Beknopt verslag van de Algemene Vergadering van Wimecos op 3 Januari 1951.**

De Voorzitter herdacht in zijn openingsrede, welke ook in dit nummer van Euclides wordt gepubliceerd, het feit, dat de Vereniging op 13 December 1950 vijftig jaar bestond. In verband hiermede werd de Heer P. Wijdenes wegens zijn grote verdiensten voor het Nederlandse Wiskundeonderwijs tot erelid benoemd.

Op deze vergadering werden achtereenvolgens de notulen van de vorige vergadering, het jaarverslag, het financiële verslag en het verslag van de Portefeuillecommissie goedgekeurd. Naar aanleiding van een opmerking in het jaarverslag over het uitblijven van het verslag van de lezing van Prof. Dr. D. J. van Lennep over: „Kan een psychotechnisch onderzoek het toelatingsexamen vervangen?” kan thans worden meegedeeld, dat één der medewerkers van Prof. van Lennep, n.l. Dr. van Peype, het verslag van deze lezing in nauw contact met de spreker voor Euclides zal bewerken. Het aantal leden van Wimecos bedroeg op 1 Sept. 1950 326. De contributie voor het komende verenigingsjaar, aanvangende 1 September 1951, werd op f 5,50 vastgesteld. De kascommissie stelde voor de Penningmeester te dechargeren, waartoe besloten werd. Tot leden van deze Commissie werden de H.H. G. Boost en J. A. G. Rooth benoemd. De Voorzitter werd na voorlezing van een schrijven van Dr. D. N. van der Neut, No. 2 der aanbeveling, bij acclamatie herkozen.

Opgemerkt werd, dat in Engeland en Amerika, de I.I. taken krijgen, die ze aankunnen, terwijl ze hier menigmaal voor te zwaar werk worden gezet, hetgeen zeker ook ten nadele van het meer begaafde deel der I.I. werkt. Daardoor ontstaat steriel onderwijs. Een typische opmerking van Prof. Holst mag hier niet achterwege blijven: „Men kijkt hier vaak te veel naar de input zonder zich rekenschap te geven van de output.” Dit in verband met de mededeling, dat in Amerika 10 % meer leraren nodig zouden zijn dan in Engeland. Naar aanleiding van een vraag over de onbevoegde leerkrachten werd door de Voorzitter meegedeeld, dat men ook in andere landen met een tekort aan leerkrachten voor Wis- en Natuurkunde zit. De oorzaken zijn dezelfde als bij ons; het bedrijfsleven betaalt beter! Aan de andere kant werd gezegd, dat men zich in Engeland b.v. niet zo druk om de bevoegdheden maakt als in Holland.

Het nieuwe Mechanicaonderwijsprogramma werd met algemene stemmen aangenomen. T.a.v. het eindexamenprogramma werd echter met op één na algemene stemmen vastgesteld, dat het advies van Wimecos een schriftelijk examen van  $2\frac{1}{2}$  uur en eventueel een mondeling examen zal voorstellen. De vrijstellingen wilde men gehandhaafd zien. Uitdrukkelijk zij hier opgemerkt, dat de enige tegenstemmer meer een soort van tussenweg bepleitte voor de examenkwestie dan dat hij het advies van de Commissie wenste te volgen. De vereniging Velines heeft zich met 11 tegen 9 stemmen voor een uitsluitend mondeling examen uitgesproken. In samenwerking moet nu een eindrapport aan de Inspectie worden uitgebracht. Daar dit natuurlijk in Euclides wordt gepubliceerd, zal ik op het ogenblik hier verder commentaar achterwege laten, omdat alle leden indertijd het Rapport der Commissie hebben ontvangen.

Ir J. J. TEKELENBURG. Secretaris:

#### WIMECOS.

De penningmeester van Wimecos verzoekt de leden dringend de contributie (f 5,50) over het boekjaar Sept. 1950—Sept. 1951 te willen voldoen. Bij voorkeur door overschrijving op giro-rekening 143917, ten name van Wimecos.

#### VERBETERING.

Dr Crijns vestigt er de aandacht op, dat in Afl. 2 van Euclides, 26e jg., op blz. 80, regel 13, achter (zijdenverhouding 1 : 2) is uitgevallen: met  $\triangle ABC$ .

Vervolgens hield Prof. Dr. G. Holst zijn aangekondigde lezing over „Techniek en Wiskunde”. Het verslag hiervan komt in Euclides. Hierin besprak de spreker ook het Amerikaanse onderwijs. In aansluiting hieraan werd door de Voorzitter een inleiding over de Zomerconferentie voor Wiskunde te Baarn gehouden aan de hand van de volgende punten:

1. „Baarn” was een verrassing, moet worden een begrip.
2. De mening, als zou het wiskundeonderwijs hier te lande achterstaan bij het buitenland, is niet gefundeerd; juist is, dat men in enkele landen een geselecteerde groep leerlingen bij een sterk besnoeid leervakkenaanbod met behulp van een aanmerkelijk hoger aantal lesuren dan hier te lande gebruikelijk is, tot een hoger niveau brengt.
3. De wijze, waarop het buitenland de problemen aansluiting L.O.-V.H.M.O. niet-bevordering aansluiting V.H.M.O.-H.O. en Maatschappij op tracht te lossen, verdient onze aandacht.
4. Het is gewenst, dat ons V.H.M.O. zonder de exameneisen te verzwaren in zijn geheel zesjarig wordt.
5. Het is opmerkelijk, dat ons land, in tegenstelling tot tal van andere landen, geen school met Latijn (zonder Grieks) kent.
6. De infinitesimaalrekening ontbreekt op geen enkel programma voor V.H.M.O.
7. In het algemeen wordt in het buitenland meer zorg besteed aan de didactische vorming van de leraar.
8. De tijd, dat de wiskundeleraar genoeg had aan bord, krijt, passer en liniaal, schijnt voorbij; de vertoonde wiskundefilms werkten fascinerend!

Op elk van de bovenstaande punten, die door de spreker gestencilcild werden rondgedeeld, werd uitvoerig ingegaan.

Bij de discussies kwam de wenselijkheid naar voren, de B-afdelingen te splitsen in een afdeling speciaal geschikt voor de studie van medicijnen, scheikunde der levensmiddelen, veearts, enz. en een meer mathematische afdeling, welke splitsing het buitenland meermalen wel kent (Zwitserland, Engeland, enz.).

Ook werd de bevordering in “streams” (Engeland) vergeleken met de z.g. promotion by subjects (Amerika). Ontkend werd, dat de eerste bij de I.I. een minderwaardigheidscomplex teweeg zou brengen, als deze in de mindere C-stream kwamen.

Fel werd door één der sprekers van leer getrokken tegen de grote aantallen zittenblijvers.

## Herdenking van het 25-jarig bestaan van Wimecos op de Jaarvergadering van 3 Januari 1951 door de Voorzitter.

### *Oprichting.*

Op een vergadering der Vereniging van leraren aan Openbare H.B.S. met 5-jarige cursus te Amsterdam, stelde de toenmalige secretaris de heer G. Leffertstra voor dat de Wiskunde-leraren dier vereniging bijeenkomsten zouden houden ter bespreking van specifieke Wiskunde-onderwijs kwesties.

Op een vergadering dier vereniging op 9 October 1925 gaf Dr P. Brandsen als zijn mening te kennen dat de besprekingen van die Wiskunde-commissie van meer betekenis zouden zijn als zij gehouden werden in een algemene vereniging van Wiskunde-leraren.

Naar aanleiding hiervan werd mede door de bemoeienis van de heer Heinsma uit Groningen, op 13 December 1925 onze vereniging opgericht, die later, in 1938 op initiatief van de heer Wijdenes, de naam Wimecos ontving.

### *Bestuur.*

|                 |                       |            |
|-----------------|-----------------------|------------|
| Voorzitter:     | Dr P. G. Tiddens      | 1925—1937  |
|                 | Dr J. Spijkerboer     | 1937—1946  |
|                 | Dr H. H. Buzeman      | 1946—1948  |
|                 | G. A. Janssen         | 1948—heden |
| Secretaris:     | J. H. Schogt          | 1925—1929  |
|                 | Dr W. C. Post         | 1929—1938  |
|                 | Ir J. J. Tekelenburg  | 1938—heden |
| Penningmeester: | Dr N. G. B. H. Beeger | 1925—1937  |
|                 | Dr O. Bottema         | 1937—1941  |
|                 | Dr H. H. Buzeman      | 1941—1946  |
|                 | G. A. Janssen         | 1946—1948  |
|                 | Dr H. A. Gribnau      | 1948—heden |

In 1948 werd het aantal bestuursleden uitgebreid en gebracht op 5; gekozen werden de heren Wansink en Gribnau.

### *Leden.*

Begonnen met 18 leden, was het ledental aan het eind van het eerste jaar reeds 100. Per 1 September van de opeenvolgende jaren bedroegen die aantallen: 100, 108, 110, 106, 106, 103, 101, 92, 90, 88, 90, 81, 128, 197, 224, 241, 243, 251, 250, 251, 258, 274, 267, 332, 326 en nu 330.

### *Vergaderingen.*

Omstreeks de jaarwisseling werd elk jaar de algemene vergadering gehouden, met uitzondering van 1944.

Op 23 October 1937 werd een vergadering voor *alle* Wiskundeleraren gehouden ter bespreking van het nieuwe programma; de heer J. van Andel beantwoordde allerlei vragen en Wansink gaf een uitvoerig verslag in Euclides 14e jaargang.

### *Werkzaamheden.*

Reeds dadelijk kreeg de vereniging het verzoek het rapport van de commissie Beth te behandelen en aan de toenmalige Inspecteur Dr Jensema advies uit te brengen, hetgeen in September 1926 gebeurde. Kort daarna drong de Vereniging er bij de Minister van Onderwijs op aan in het vervolg twee cijfers voor Wiskunde toe te kennen, hetgeen dan ook geschiedde.

Doordat omstreeks 1925 de heer Wijdenes er in slaagde de uitgave van een zuiver didactisch tijdschrift op het gebied der Wiskunde tot stand te brengen, eerst als z.g. Bijvoegsel van het N.T. voor Wiskunde, later als Euclides had de vereniging de mogelijkheid haar inzichten en die van haar leden afzonderlijk uitvoerig naar voren te brengen.

Op de betekenis van een tijdschrift als Euclides voor onze vereniging behoef ik hier niet uitvoerig in te gaan. Ieder lid zal het belang hiervan inzien.

Toch duurde het tot 1939 voor het tijdschrift Euclides Officieel Orgaan werd, al was het dit reeds tal van jaren officieus.

Een ander punt, waarvoor de vereniging zich met succes inspande, was dat betreffende de Mechanica.

De ervaring leerde, dat er een schromelijke verwaarlozing optrad t.a.v. dit vak toen het niet langer op het eindexamen werd gevraagd.

Men kent het resultaat.

Herhaaldelijk werd de vereniging om advies gevraagd.

In 1935 verzocht de Heer van Andel de Vereniging na te gaan, wat van het ontwerp van de Commissie-Beth, geschikt was op het Wiskunde programma te worden gebracht.

Dit is geschied, maar de uitvoering van dit programma is door de wereldoorlog verijdeld.

Tijdens deze tweede oorlog heeft de Vereniging haar taak zo goed mogelijk voortgezet, hoewel dit vaak moeilijkheden met zich meebracht.

Zonder echter haar zelfstandigheid prijs te geven, is het de



Vereniging toch vrij goed gelukt deze moeilijke tijden door te komen, mede door het krachtige en principiële beleid van de toenmalige voorzitter de heer Spijkerboer.

Een paar maal werd het Bestuur door de Inspecteur om advies gevraagd, welk advies dan praktisch gevolgd is.

Door deze samenwerking met de Inspectie in de persoon van de Heer van Andel is getracht de schade aan het Wiskunde-onderwijs zoveel mogelijk te beperken.

Na de oorlog is het Verenigingswerk weer met volle kracht opgenomen.

Dat het nodig is voor de belangen van het Wiskunde-onderwijs elk ogenblik op de bres te staan, weet ieder van ons; denken we slechts aan het ontwerp-Middelbaar onderwijs wet. Toch kunnen wij vol vertrouwen verder gaan, immers, over de samenwerking met de Inspectie hebben we niet te klagen. Zodra er iets bijzonders aan de hand was, werd Wimecos naar haar mening gevraagd.

Wij weten dat ook in de toekomst deze goede verstandhouding gehandhaafd zal blijven.

Het Middelbaar Onderwijs kan er slechts door gediend zijn! Ook met het Hoger Onderwijs is de samenwerking uitstekend. Vele keren hebben wij op de hoogleraren een beroep gedaan en steeds vonden wij gehoor.

Dat de samenwerking met onze zusterverenigingen niets te wensen laat behoeft eigenlijk niet uitvoerig vermeld te worden.

Hoeveel keren b.v. hebben we al niet samen een Congres georganiseerd?

't Contact met het Departement in verband met internationale samenwerking is de laatste tijd van belang.

Men denke o.a. aan de Unesco.

Willen ook de Nederlandse leraren hieraan deelnemen, dan is de medewerking van het Departement hiervoor een eerste vereiste.

Tot slot dient hier nog de steun en de hulp naar voren gebracht, die wij van de heer Wijdenes en via hem van de firma Noordhoff genieten.

Hoe vaak is niet het bekende adres in de Obrechtstraat bezocht om de belangen der vereniging te bepleiten en altijd met succes.

Weinigen uwer zullen weten, hoeveel werk er voor nodig geweest is, om Euclides bijna steeds te laten verschijnen. Ook zal er nooit aan gedacht zijn, dat de Firma Noordhoff jaar in jaar uit grote bedragen op de uitgave van Euclides toelegt.

Dat dit tijdschrift voor ons onontbeerlijk is, zal ieder toestemmen.

Voor de oorlog had de vereniging het plan te trachten een didactiek van het Wiskunde-Onderwijs te doen verschijnen.

Wij beschikten toen over mensen, wier kennis en ervaring hen zeker geschikt maakten voor dit werk.

Een moeilijkheid was, ik zou haast zeggen natuurlijk, de financiële kant van de zaak.

Eén reis naar Groningen was echter voldoende om deze moeilijkheid uit de weg te ruimen.

Het uitbreken van de oorlog heeft echter het tot stand komen van dit plan als zoveel andere verijdeld.

Laten we echter hopen niet voor goed.

Dankbaar kan de vereniging terug zien op de voorbijgegane jaren; kennis, ervaring en werkkraft van velen stonden de vereniging steeds ter beschikking.

Reeds kwam die dank tot uiting door het benoemen van de heren Tiddens (in 1938) en van Andel (in 1949) tot erelieden.

Hoewel velen zeer bijzondere verdiensten t.o.v. de vereniging hebben gehad, meende het Bestuur steeds, en terecht, zuinig te moeten zijn met het aanbieden van het erelidmaatschap.

Op dat standpunt staat het Bestuur ook thans nog zeer nadrukkelijk.

Desalniettemin komt ook nu tot U het voorstel een nieuw erelid te benoemen en wel de heer P. Wijdenes.

Ten opzichte van het Wiskunde-onderwijs in ons land heeft hij grote verdiensten, hij was steeds één stuwende kracht, met nimmer verflauwende energie altijd vooraan in de vernieuwing en verfrissing van ons Wiskunde-onderwijs.

Alleen daarom al zou een erelidmaatschap niet vreemd zijn. Echter zijn verdiensten t.o.v. onze vereniging in het bijzonder zijn bovendien zeer groot.

Dat wij een verenigingsorgaan hebben, danken we hem.

Dat de samenwerking met en de krachtdadige steun van de Firma Noordhoff zo uitstekend is, danken we hem.

Nu hij de leeftijd der zeer sterken bereikt heeft en teruggetreden is uit de redactie van Euclides, is het ons een plicht en een genoegen de heer Wijdenes te benoemen tot erelid onzer vereniging.

Het Bestuur doet U bij deze dit voorstel en verzoekt U dit bij acclamatie te aanvaarden <sup>1)</sup>.

---

<sup>1)</sup> Aldus is geschied.

*Toekomst.*

Ook in de naaste toekomst zal de vereniging niet over arbeidsmogelijkheden te klagen hebben.

Ik noem U slechts de betere aanpassing van de Mechanica bij het Natuurkunde-onderwijs; versteviging van het internationale contact en bovenal het opnieuw pogen te komen tot een eigen Nederlandse didactiek van het Wiskunde-onderwijs.

Moge de vereniging ook in de toekomst de krachtdadige steun genieten van mannen van het formaat van Beth, Dijksterhuis, Schogt, Bottema e.a., dan zal zij nog een goede toekomst tegemoet gaan.

---

Dr ERWIN VOELLMY †.

Op 15 Januari 1951 overleed te Basel Dr Erwin Voellmy, Mathematiklehrer am Mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasium aldaar, redacteur van de „Elemente der Mathematik” (in het bijzonder voor de schoolwiskunde) en bestuurslid van de „Verein schweizerischer Mathematiklehrer”.

Dr Voellmy is voor vele Nederlandse wiskundeleraren een goede bekende. In de zomer van 1950 sprak hij op de Conferentie te Bâarn, waar hij door zijn bezielde, heldere, bondige betoog, gedragen door een grote liefde voor zijn school, voor zijn vak en voor de Zwitserse democratie ons over het wiskunde-onderwijs in zijn vaderland, en in het bijzonder over dat in Basel, heeft ingelicht.

Dr Voellmy werd in 1886 geboren, was aanvankelijk onderwijzer, promoveerde in 1916 op een proefschrift over „Die allgemeine Bewegung des Bornschen Elektrons”, werd in 1925 leraar aan de Realschule (later Gymnasium) te Basel. Bovendien was hij lange jaren docent in de Methodiek der Wiskunde bij de leraarsopleiding.

Onvermoeid heeft Dr Voellmy zich gewijd aan de belangen van Opvoeding en Onderwijs. Mede door zijn stuw- en werkkraft is de Zwitserse Vereniging van Wiskunde-leraren ertoe overgegaan een eigen serie leerboeken uit te geven, een „Unterrichtswerk”, dat de in Zwitserland voorheen in gebruik zijnde buitenlandse schoolboeken vrijwel van de markt heeft verdreven. Met Dr Mautz gaf hij hierin een „Leitfaden der Algebra” uit en later alleen een logarithmentafel in vijf decimalen met formules, die het in elf jaren tot acht drukken bracht.

Dr Voellmy was een liefhebber van alpentoerisme en van schaakspel; een boek van Dr Euwe vertaalde hij uit het Nederlands.

WANSINK

## WISKUNDE EN TECHNIEK

door

Prof. Dr G. HOLST.

De techniek stelt zich ten doel het *uitvoeren van werken* of het *vervaardigen van producten*, die door de mensheid nodig of nuttig worden geacht.

*Oorspronkelijk* steunende op de *ervaring* van eeuwen heeft zij zich door gebruik te maken van de *inzichten* door de *wetenschap* verkregen gedurende een laatste eeuw snel ontwikkeld. Het is gelukt een groot deel van de empirische *ervaringen* een *wetenschappelijke basis* te geven, waardoor men met veel groter *zekerheid* allerlei constructies kon ontwerpen dan vroeger het geval was. *Nieuwe* wetenschappelijke *ontdekkingen* werden vaak op de voet gevolgd door belangrijke *technische toepassingen* er van, waarvan sommigen een grote rol in het leven van de mensheid zouden spelen. Denkt U bijv. maar eens aan de chemie of de *electrotechniek*. In een nog later stadium heeft de *techniek zelf* het *wetenschappelijk onderzoek* ter hand genomen, waardoor de ontwikkelingssnelheid nog belangrijk toegenomen is. Wij bevinden ons nu in dit laatste stadium en wanneer ik dan ook over de techniek spreek, bedoel ik daarmee de *techniek*, zoals die *nu* in de belangrijkste cultuurlanden  *bezig is zich te ontwikkelen*. Dat is dus geen constante doch een variabele grootheid, met een niet te verwaarlozen veranderingssnelheid.

Dat deze *ontwikkeling* inderdaad *geweldig* is geweest volgt bijv. uit de volgende cijfers:

In 1880 had men in de U.S. 1 ing. op ong. 6000 inwoners

„ 1910 1000 „

„ 1940 500 „

en dat nog *grote verschuivingen* plaats vinden, blijkt uit een *enquête* gehouden bij 125 *vooraanstaande Amerikaanse firma's*, die in 1937—'39 voor fabricage, verkoop en fabrieksleiding 9300 ing. in dienst hadden en daarnaast voor onderzoek en ontwikkeling ongeveer 7000, welke getallen in 1946 waren opgelopen tot ong. 12500 en 13000.

Een voorbeeld van dichter bij huis toont hetzelfde. Bij Philips waren in 1914 7 ingenieurs werkzaam, op het ogenblik ruim 400 ingenieurs, physica en chemici.

Over het algemeen hebben de *nieuwe takken* van de techniek zich *het snelst* ontwikkeld. Daar is men direct begonnen, zoveel mogelijk gebruik te maken van de resultaten van de wetenschap. In *lang bestaande* industrieën waar een hele boel *ervaring* aanwezig is, en waar de zaak goed loopt, komt men er veel *minder toe* naar betere methoden of nieuwe producten uit te zien. Daar komt bij dat vaak de *leiding* in handen is van personen die zelf *niet* over een *voldoend brede basis* beschikken om het nieuwe naar waarde te kunnen schatten. Het is daarom van groot belang, dat de opleiding van de *volgende generatie*, zodanig is, dat niet alleen aan hen het oude en bekende wordt overgedragen, doch dat hen een *voldoend brede basis* wordt bijgebracht om gedurende hun leven de vooruitgang van de techniek te kunnen volgen of beter nog, daartoe bij te kunnen dragen.

Trouwens er zijn nog *andere redenen* waarom oude ervaringen niet dezelfde rol zullen blijven spelen als in het verleden. Door internationale *handelsbelemmeringen*, *oorlogen* en ontwikkeling van *nieuwe industriële producten* zijn de materialen die men moet verwerken veel meer aan *variaties* onderhevig dan vroeger. Men zal veel vaker voor *verrassingen* komen te staan en dan snel *maatregelen* moeten kunnen treffen om de moeilijkheden te overwinnen. *Ervaring* die vroeger *in de loop van eeuwen* door op een volgende geslachten werd bijeengebracht, moet nu *in enkele maanden* of jaren worden verkregen. Dat geldt in de hoogste mate in geval van *oorlog*. Dan is het een levenskwestie in de *kortst mogelijke tijd* een stel geheel *andere producten* te kunnen vervaardigen *zonder* dat men over een grote *ervaring* beschikt.

Dat vereist niet alleen een groot aantal goed onderlegde mensen, maar ook een *bundeling* van hun *kennen en kunnen*. *Samenwerking* „*teamwork*” is dan ook een van de *noodzakelijkheden* van onze tijd.

Maar *samenwerking* vraagt een *brede basis*. Men moet voldoende van elkaars vak afweten om er enigszins verstandig over te kunnen spreken, men moet *elkaars taal verstaan* en elkanders gedachtengangen kunnen volgen. Samenwerking tussen éénzijdig gespecialiseerden is haast onmogelijk.

Tot die *brede basis* behoort een *behoorlijke kennis* van de *wiskunde*. Of men nu als ingenieur of als scheikundige of natuurkundige in de industrie werkzaam is, steeds zal men een zekere dosis wiskunde nodig hebben, om met succes werkzaam te zijn. Er bestaat echter een *groot verschil* tussen de verschillende functie's in de techniek en daarmee tussen de *eisen*, die men aan iemands wiskundekennis moet stellen.

Een groot deel van alle ingenieurs zal *zelf nooit* moeilijk *rekenwerk* uit te voeren krijgen. Toch moeten zij vrij wat wiskunde kennen om de *grondslagen* van het vak behoorlijk te kunnen beheersen en de *vakliteratuur* te kunnen volgen. Anderen daarentegen zullen belangrijke en vaak *moeilijke berekeningen*, zelf moeten kunnen uitvoeren, sterkte berekeningen, rekeningen over trillingen, over verschijnselen in electrische netwerken of over stromingen van vloeistoffen of gassen.

Een derde groep, diegenen die zich met *onderzoek* bezighouden, zal heel wat wiskunde moeten kennen om de *ontwikkeling* van de *wetenschap* te kunnen volgen. Maar ook hier is weer een groot verschil tussen de *experimentatoren* en de *theoretici*, die de wiskunde zodanig moeten beheersen dat zij met behulp daarvan nieuwe betrekkingen tussen de beschouwde grootheden kunnen afleiden. Steeds gaat het echter over toepassen van de wiskunde. Echte mathematici zal men maar weinig nodig hebben. De *richting* waarin men zijn bezigheid zoekt wordt voor een groot deel door iemands *aanleg en karakter* bepaald. Maar zelden zal een echte bedrijfsman of een commercieel ingenieur het werk van een onderzoeker kunnen of willen overnemen en omgekeerd. Wel zal het nodig zijn dat zij zo veel van elkanders werk afweten, dat zij elkaar kunnen begrijpen en appreciëren. Voor een goede samenwerking is dat nodig.

Hieruit volgt dat de noodzakelijke of gewenste wiskundekennis voor de verschillende groepen vrij ver uiteen loopt. *Niet allen behoeven evenveel te weten.*

Stelt men de eisen te hoog, dan zal een aantal jonge mensen afvallen, die voortreffelijke ingenieurs hadden kunnen worden.

Stelt men ze laag, dan zal een aantal minimumleiders er zo weinig aan doen, dat ze de quintessence nooit te pakken krijgen, het geleerde spoedig vergeten en er in hun hele leven niets mee kunnen doen.

De *minimumeisen* zullen dan ook niet te laag mogen zijn. Zij behoren echter *geen stof te bevatten* die voor de aanstaande ingenieur *van geen belang* is.

Waar het totaal aantal uren, dat bij de opleiding aan wiskunde kan worden besteed niet opgevoerd zal kunnen worden, is het van groot belang zich op gezette tijden af te vragen of de *stof die behandeld wordt* nog wel die is *waaraan men het meest heeft*. Mocht dat niet het geval zijn, dan ligt het voor de hand het *programma te veranderen*.

Naast dit minimum programma, moet echter voor degenen, die

daartoe de lust en bekwaamheid bezitten; *gelegenheid* bestaan om met een *aantal gebieden* van de wiskunde *kennis te maken* die niet voor allen zin hebben. Dit betekent een groot voordeel, omdat zij daardoor later, wanneer zij in de praktijk weer met een van deze gebieden in aanraking komen, er veel *minder tegenop zien* om zich daarin weer *in te werken* dan wanneer dat gebied geheel nieuw voor hen is.

Het voorafgaande zou ik als volgt willen samenvatten:

Het ziet er naar uit of de *industrie* in de komende jaren een grote *behoefte* zal hebben aan jonge mensen, wier *kennis* op een *brede basis* rust.

Nu is het voldoende bekend, dat voor vele jongelieden die een werkkring in de techniek hoopten te vinden, de *wiskunde* een *struikelblok* bij de opleiding is gebleken. Men kan zich dus met enig recht afvragen of het *wel mogelijk* zal zijn aan deze *behoefte te voldoen*.

Ik heb de indruk, dat men deze vraag *bevestigend* moet *beantwoorden* althans wanneer het gelukt *rekening te houden* met een aantal *moeilijkheden* waarover ik nu iets wil zeggen.

Voor de in de techniek werkzame academici of zij nu ingenieurs, physici of chemici zijn geldt dat de *wiskunde* een *hulpwetenschap* is, maar gelijktijdig voor degenen die er gebruik van weten te maken een zo machtig hulpmiddel, dat hun hele denkwijze er mede door bepaald wordt.

Zij *denken* echter *niet* over „*wiskunde op zich zelf*” doch over technische, natuurkundige of scheikundige problemen. Die willen zij met behulp van de wiskunde oplossen. Daar willen zij hun tijd aan besteden.

Zij zijn dus vaak in *andere facetten* van de wiskunde *geïnteresseerd* dan de mathematicus. In de voorrede van zijn Leerboek der differentiaal en integraal rekening zegt H. A. Lorentz:

„Sedert enige tijd belast met lessen over de differentiaal en integraalrekening voor toehoorders, die deze vakken hoofdzakelijk als hulpmiddel voor de studie der natuurwetenschap hebben te beoefenen, miste ik een leerboek, naar hun behoeften ingericht. De bestaande werken, althans de Nederlandse, schenen mij voor deze lezers aan de ene kant te uitgebreid, aan de andere kant te zuiver wiskundig van inhoud. Wie het vooral om de toepassingen te doen is, zullen vele beschouwingen over de eigenschappen van kromme lijnen en oppervlakken, over aanrakingen van verschillende orde, over buig- en keerpunten en dergelijke weinig

belang inboezemen. Maar wel zal hij wensen in te zien, hoe vele vraagstukken uit de physica en mechanica tot de grondbegrippen der differentiaalrekening leiden en slechts met behulp daarvan kunnen worden opgelost. Hij zal in de regel de tijd niet vinden, om zich op de hoogte te stellen van de vele vernuftige methoden, waardoor de waarden van integralen bepaald kunnen worden, maar vertrouwdheid met de beginselen der integraalrekening en genoegzame bedrevenheid, om vraagstukken, waarbij eenvoudige integralen optreden, te kunnen behandelen, zal hij niet kunnen ontberen. Eveneens zal hij enkele belangrijke differentiaalvergelijkingen moeten kunnen oplossen, ofschoon men niet mag verwachten, dat hij aan vergelijkingen, die slechts door de mathematische schoonheid hunner oplossing uitmunten, zijn aandacht zal schenken."

Hier vindt men in het kort de *quintessence* van het *wiskunde probleem*, voor diegene die van wiskunde gebruik willen maken, doch wier vak geen wiskunde is. Zij hebben *niet de tijd* zich op de hoogte te stellen van de vele vernuftige constructies der mathematici, zij moeten voort. Het *aantal denkbare* dat zij aan de wiskunde kunnen besteden is *maar gering*, en vele voelen *niet de behoefte aan de uiterste gestrengheid*, die steeds meer de gedachtegangen der wiskundigen gaat beheersen. Om het nut en de schoonheid daarvan in te zien is veel tijd nodig en die heeft de arme technicus niet.

Hun denken richt zich in de eerste plaats op hun eigen vak.

Dit probleem is door de physici ten alle tijde duidelijk gevoeld. In de voorrede van zijn *Electricity and Magnetism* zegt J. H. Jeans:

Maxwell's Treatise was written for the fully equipped mathematician; the present book is written more especially for the student, and for the physicist of limited mathematical attainments.

The questions of mathematical analysis which are treated in the text have been inserted in the places where they are first needed for the development of the physical theory, in the belief that, in many cases, the mathematical and physical theories illuminate one another by being studied simultaneously. For example, brief sketches of the theories of spherical, zonal and ellipsoidal harmonics are given in the chapter on Special Problems in Electrostatics, interwoven with the study of harmonic potentials and electrical applications: Stoke's Theorem is similarly given in connection with the magnetic Vector potential, and so on.

Ik zelf heb ook vele *gedachtegangen* van de *wiskunde pas dóór* gekregen, toen ik er *in mijn vak* mee te doen kreeg. Ik zou dan ook



de door Jeans' aangeduide wisselwerking tussen wiskundig en natuurkundig begrip, ten volle willen onderschrijven. Die wiskunde, die ik telkens weer bij mijn werk nodig had, ken ik nog tamelijk goed, terwijl ik andere gebieden, die mij indertijd toch sterk geïnteresseerd hebben, zoals bijv. de synthetische meetkunde, vrijwel geheel heb vergeten.

Over het algemeen hebben *Angelsaksische schrijvers* meer gevoel voor dit vastknopen aan aanwezige kennis en belangstelling. Een boek als W. E. Byerly: *An elementary treatise on Fourier's Series and spherical cylindrical and ellipsoidal Harmonics*, begint met een aantal voorbeelden, die duidelijk maken, waarvoor de kennis van deze functies nuttig is, om daarna tot de behandeling ervan over te gaan. Het zelfde geldt bijv. voor A. Gray and G. B. Mathews *Treatise on Bessel Functions* en vele andere dergelijke werken. Vele physici en ingenieurs zullen dit een voordeel vinden. De pursang mathematicus beschouwt het misschien wel als een misdaad.

Evenals Lorentz in zijn boek over diff. en integr.rekening een deel zijner voorbeelden aan de physica ontleent, heeft men geprobeerd wiskundeboeken voor a.s. *ingenieurs* te schrijven met *voorbeelden aan de techniek ontleend*. Dit is echter geen succes geworden. Een van diegenen die dat met volle overtuiging geprobeerd heeft is de Amerikaan Doherty geweest. Hij heeft een boek geschreven dat op deze wijze bewerkt is en dat een zekere bekendheid heeft verworven. Toen wij het vorige jaar het voorrecht hadden met hem kennis te maken en hem hiernaar vroegen vertelde hij dat er *vrijwel geen leraren* gevonden werden, die òn van de techniek òn van de wiskunde voldoende afwisten om dit boek met succes te kunnen hanteren.

Terwijl er voldoende *theoretische physici* zijn om aan de studenten in de physica heel wat wiskunde bij te brengen *ontbreekt in de techniek de overeenkomstige figuur* en dat is ongetwijfeld een gemis.

Men mag daaruit afleiden dat er een groter verschil bestaat *tussen de wijze* van denken van de ingenieur en de wiskundige, dan tussen de physicus en de wiskundige. Vooral echter ook een groter verschil in belangstelling. Daaruit volgt dat men zich nog *meer moeite* moet geven *met het wiskunde onderwijs* voor a.s. technici dan voor a.s. physici.

Van tijd tot tijd hoort men dan ook de bewering dat daarom *ingenieurs beter in staat* zouden zijn om *toekomstige ingenieurs* de *wiskunde bij te brengen*. Dit geloof ik zonder meer niet.

Wel zal de wiskundedocent in de algemene cursus tot zijn toe-

hoorders af moeten dalen. Dat geldt natuurlijk niet of in veel geringere mate voor speciale colleges, die alleen gevolgd worden door degenen, die daar belangstelling voor hebben.

Dat *zelfs de allerknapsten moeite* hebben met *voorstellingen*, die in hun gedachtegang niet passen is mij duidelijk geworden bij het bestuderen van de theorie van Maxwell.

In de voorrede van zijn Treatise of electricity and magnetism zegt Maxwell:

Having thus obtained the data for a mathematical theory of electromagnetism and having shewn how this theory may be applied to the calculation of phenomena, I shall endeavour to place *in as clear a light as I can* the relations between the mathematical form of this theory and that of the fundamental science of Dynamics, in order that we may be in some degree prepared to determine the kind of dynamical phenomena among which we are to look for illustrations or explanations of the electromagnetic phenomena.

In describing the phenomena I shall select those which *most clearly* illustrate the fundamental ideas of the theory omitting others, or reserving them till the reader is more advanced.

Maxwell probeert dus zo duidelijk mogelijk te zijn. Maar L. Boltzmann begint zijn boek Vorlesungen über Maxwells Theorie der Electricität and des Lichtes met het motto: „So soll ich denn mit saurem Schweiss, Euch lehren was ich selbst nicht weiss” en zegt: „Dass es mir trotz meiner Bemühungen nicht gelungen ist, überall ganz den Sinn Maxwell’s zu treffen und alle Dunkelheiten auf zuhellen, weiss ich selbst am besten. Maar het 2e deel, dat 2 jaar later verschijnt begint hij met: War es ein Gott der diese Zeichen schrieb, Die mit geheimniss voll verborgnem Trieb die Kräfte der Natur um mich enthüllen und mir das Herz mit stiller Freude füllen” en even verder: In der Tat, obiges Motto spricht meine Ansicht über Maxwell’s Theorie der Electricität und des Magnetismus aus.

Ook H. Poincaré had er moeite mee.

La première fois qu’un lecteur ouvre le livre de Maxwell, un sentiment de malaise et souvent même de défiance se mêle d’abord à son admiration. Ce n’est qu’après un commerce prolongé et au prix de beaucoup d’efforts que ce sentiment se dissipe. Quelques esprits éminents le conservent même toujours. En verder:

Un des savants français qui ont le plus approfondi l’oeuvre de Maxwell me disait un jour: Je comprends tout dans son livre, excepté ce que c’est qu’une boule électrisée.

En Heinrich Hertz schrijft in zijn Untersuchungen über der Ausbreitung der electricischen Kraft.

Was ist nun aber, genau gesprochen, die Faraday, Maxwellsche Theorie? Maxwell hat als Arbeit seiner reiferen Jahre uns ein grösseres Werk über die Electricität und den Magnetismus hinterlassen; man darf also wohl sagen, die Maxwellsche Theorie ist diejenige Theorie, welke in diesem Werke niedergelegt ist. Aber denjenigen Fachgenossen, welke diesen Fragen näher getreten sind, wird nicht allen mit dieser Antwort Genügen geschehen sein. Mancher hat sich mit Eifer an das studium des Maxwellschen Werkes gemacht und ohne auf ungewöhnliche mathematische Schwierigkeiten gestossen zu sein, dennoch darauf verzichten gemust sich eine völlig widerspruchsfreie Vorstellung von Maxwell's Ansichten zu bilden. Mir selbst ist es nicht besser gegangen.

En een bladzijde verder zegt hij dan:

Auf die Frage „Was ist die Maxwell'sche Theorie?“ wüsste ich also keine kürzere und bestimmtere Antwort als diese: „Die Maxwell'sche Theorie ist das System der Maxwellschen Gleichungen.“

Ik weet geen enkel ander voorbeeld waar zo duidelijk naar voren komt, dat ook de allerknappsten vaak moeite hebben met voorstellingen, die hen niet liggen en dat het bij hen ook een hele tijd kan duren eer zij met een zekere verademing kunnen zeggen: „O bedoelde je dat“.

Tegenwoordig leren duizenden de theorie van Maxwell zonder er enige moeite mee te hebben.

Ik ben er van overtuigd, dat bij velen, die moeite met wiskunde hebben, dit uitsluitend een gevolg is van de vorm waarin deze aan hen wordt opgediend en die niet aansluit bij hun normale gedachten-gangen.

Ook voor degenen die zich in hun latere leven met toegepaste wiskunde bezig houden is deze kwestie van aansluiting aan wat men weet van het grootste belang. Men heeft vaak van een bepaalde tak van wiskunde maar een heel klein stukje nodig en het zou alles waard zijn wanneer men dit in een vorm kon vinden die aansluit aan de kennis die men heeft.

Daar heeft men meer aan dan aan uitvoerigheid, volledigheid of uiterste gestrengheid.

In de inleiding van zijn boekje over operatoren rekening schrijft E. Labin:

Dans l'étude d'un problème pratique ou théorique, un travailleur — physicien, chimiste, ingénieur, naturaliste, économiste, mathé-

maticien même — tombe sur une technique mathématique dont il aperçoit la possible fertilité mais dont il n'a pas le maniement présent à l'esprit. Il ne peut pas et ne veut pas consacrer à maîtriser cette technique, le temps et les efforts mentaux qu'il a consacrés, lorsqu'il était étudiant, à apprendre l'ensemble de l'analyse. Ce qu'il désirerait ce serait seulement pouvoir réviser les résultats utiles, les résultats opératoires de cette technique, assez rapidement mais assez efficacement pour se mettre à même de l'appliquer à son problème.

Dans l'état actuel de la littérature il ne pourra pas satisfaire cette aspiration. Hij vindt wel boeken, die deze tak van wiskunde behandelen op verschillend niveau, maar hij moet een hele boel studeren voor hij daar iets mee doen kan.

C'est à cette situation que le présent ouvrage essaye de remédier en abandonnant délibérément tout propos pédagogique et en s'efforçant de présenter l'analyse mathématique comme un outil prêt à être empoigné.

Hij legt dan de opzet van zijn boekje uiteen waaraan ik nog het volgende ontleen:

S'il est en effet une leçon que tous les chercheurs de n'importe quelle branche de la science ou des techniques ont dû tirer — et chèrement — de leurs tentatives d'employer les mathématiques, c'est bien que la rigueur y est une condition nécessaire du succès. Une grosse part des mécomptes rencontrés sur cette voie provient de ce qu'on y lance un algorithme mathématique sans scruter avec le scrupule qu'il faudrait si toutes les hypothèses qui en régissent l'emploi sont satisfaites dans le cas étudié. Il faut donc bien qu'un ouvrage comme celui-ci rende hommage à la rigueur, mais c'est à une autre rigueur qu'un ouvrage didactique ou plutôt, c'est à la rigueur d'autre chose: celle des règles et non celle des démonstrations.

Dat geeft geloof ik aardig weer wat men inderdaad zou willen hebben. Krijgt men dan later de tijd, dan kan men altijd nog de zaak grondiger bestuderen. Maar het maken van een grondige studie vooraf, is meestal niet mogelijk. Wat men gehad zou willen hebben van een vak, is vaak niet veel meer dan wat nodig is om een tabellen werk als Jahnke-Emde te kunnen gebruiken.

Lukt het de juiste aansluiting aan zijn denkwijze te vinden, dan geloof ik, dat men veel meer mensen de wiskunde, die zij nodig hebben kan bijbrengen, dan wanneer die aansluiting niet tot stand komt.

Ik kom nu tot het 2e *gedeelte* van mijn voordracht. Hoe heeft men in *Amerika* de grote aantallen behoorlijk onderlegden opgeleid, die men *nu* daar in de techniek aantreft. Door mijn werkkkring in Eindhoven heb ik het voorrecht gehad gedurende een 30-tal jaren regelmatig iedere 3 of 4 jaar de V.S. te bezoeken, en heb ik de ontwikkeling van de industrie daar enigszins kunnen volgen.

Toen ik er de eerste keer kwam in 1920 heb ik er een aantal universiteiten en fabrieken bezocht en ben ik thuis gekomen met de *indruk* dat men in vele opzichten *bij Europa ten achter* stond. Wel had ik er een aantal uitstekende krachten ontmoet, doch vele van deze hadden hun *opleiding* althans gedeeltelijk in *Europa* genoten. Op enkele na konden de *laboratoria* niet halen bij de Europeesche en ook het werk dat daar verricht werd, leek *niet bijzonder belangrijk*. Maar 5 jaar later was mijn indruk al een heel andere en in 1930 kon men in het geheel *niet meer* van een *achterstand spreken*. Reeds voor de laatste oorlog begonnen de Verenigde Staten *uit te lopen* en daarna heeft het in vele opzichten de *leiding* van Europa *overgenomen*.

Terwijl men er in 1920 in hoofdzaak *handige* mensen ontmoette, treft men *nu* op vele plaatsen echt *knappe kerels* aan. Dit is voor een groot deel een *gevolg* van de *uitbreiding* van het *onderwijs over de gehele lijn* en daar zal ik nu iets over vertellen.

Ik moet dan beginnen met er de aandacht op te vestigen dat het *onderwijs in de U.S. geregeld* wordt door de *afzonderlijke staten* en *niet door de Unie*. Wel bestaat de U.S. Office of Education in Washington, die overzichten en statistieken heeft van het onderwijs in de Verenigde Staten, doch dit lichaam heeft geen bevoegdheden en kan alleen adviserend optreden. Het gevolg is een groot verschil tussen het onderwijs in de verschillende staten; zo wisselt bijv. de *leerplichtige leeftijd* van 16 tot 18 jaar. Het *lager onderwijs* duurt 6 of 8 jaar, waaraan de z.g. *High School* aansluit, die 6 of 4 jaar duurt, zodat een normale High School graduate 18 jaar oud is. De *doelstelling van het onderwijs* hangt samen met de democratische grondslagen van de Verenigde Staten. Het *democratische ideaal* heeft in de loop der tijden verschillende vormen aangenomen. Het berust op het geloof in de *waardigheid* en de *waarde van elk individu* en de *vrijheid* zijn eigen weg te kunnen gaan zolang dit niet in conflict komt met het algemeen belang. In de latere jaren neemt het, althans in de noordelijke staten, ook wel de vorm aan van *gelijke rechten en vrijheden* voor allen onafhankelijk van ras, geloof en sexe of maatschappelijke situatie. Dit zijn ideeën, want de werkelijkheid wijkt natuurlijk hier en daar wel enigszins af. Zo moest b.v. in

1948 een *joods student*  $10 \times$  zoveel verzoeken om toelating tot een bepaalde universiteit indienen als een blanke protestant, een katholiek  $2 \times$  zoveel en een van Italiaanse afstamming  $5 \times$  zoveel. Ook voor de *negerbevolking* bestaan alleen in theorie gelijke rechten. Toch ziet men nu op vele kantoren en regeringsbureau's een groot aantal niet-blanken, wat vroeger veel minder het geval was.

Men beschouwt de *opvoeding* als een *essentieel element* voor het behoud van de *democratie*. Daarom wordt ook telkens de nadruk gelegd op *gelijke kansen* voor allen en bij het onderwijs speciaal op gelijke kansen om zich zover te ontwikkelen als de individuele persoonlijke gaven en het verstandelijk vermogen toelaten.

Dit leidt tot een geheel *andere opzet van het onderwijs* als bij ons. Lagere School en High School zijn *kosteloos*; boeken worden gratis ter beschikking gesteld. Het gevolg is, dat van de jeugd tussen 14 en 18 jaar in 1940 73 % op de High School was tegen slechts 11 % in 1900. De helft van degenen die de High School bezoeken halen het *einddiploma*.

De H.S. is niet zonder meer te vergelijken met onze H.B.S. Op de betere H.S.'s geeft men een *groot aantal vakken* waar de leerling een *keuze* uit kan doen, gewoonlijk niet meer dan 4, 5 of 6 vakken per semester. Wanneer een vak met goed resultaat gevolgd is krijgt men hiervoor een „*Credit*”. Is dat niet het geval dan kan men dit vak in een *volgend semester herhalen* of wanneer dit niet tot de groep van vakken behoort nodig voor toelating tot een instituut voor hoger onderwijs, kan men in de plaats daarvan een ander vak lopen. Het *zitten blijven* zoals wij dat in Holland kennen, is daar onbekend. Naast een aantal vakken waarvoor „*credits*” vereist wordt voor een voortgezette studie, heeft men een groot aantal keuzevakken, zodat men het onderwijs aan de eigenschappen van de leerling aan kan passen. Men leert er „à la carte”.

Een groot deel der H.S.'s behoort aan de *staten* maar er zijn ook vele particuliere H.S.'s. Er zijn *goede*, maar er zijn ook *slechte*, grote en kleine, zelf heel kleine, waar b.v. maar 1 enkele leraar alle vakken geeft. Het *eindexamen H.S. zegt dan ook niets*. Van een bepaalde H.S. echter wel. Alle hoge scholen en universiteiten hebben een lijst van de H.S.'s en nemen van een bepaald aantal daarvan leerlingen *zonder verder toelatingsexamen* aan, vaak echter alleen wanneer deze behoren tot de *beste helft of het beste derde* of beste *vijfde deel* van hun klasse. In 1940 ging ongeveer *één vijfde* van de jongens en meisjes, die de H.S. doorlopen hadden naar een universiteit of college. Het aantal studenten bedroeg in dat jaar

1.500.000, dat is bijna 16 % van de 18 tot 21-jarigen. In 1900 was dit 250.000 en in 1947 ruim 2.300.000.

Toch waren er in 1947 17.000.000 mannen en vrouwen boven de 19 jaar, die *niet meer dan de 6e klasse* Lagere School hadden doorlopen, waarvan 9.000.000 die *nooit naar school* waren geweest of deze verlaten hadden voor zij de 6e klasse bereikten. (We cannot allow so many of our people to remain so ill-equipped, either as human beings or as citizens of a democracy). Men wil dan ook de kant uit, dat *iedereen een H.S. education* krijgt doch niet voor allen uniform maar aangepast aan het vermogen van het individu.

De H. S. *graduates* vormen het materiaal waaruit de hogescholen en de universiteiten hun studenten betrekken. In de meeste staten zijn de aan de *staat* toebehorende *universiteiten verplicht graduates* van alle in die staat liggende *geaccrediteerde* H.S.'s aan te nemen. Voor de particuliere H.S.'s en universiteiten geldt dit niet. Deze passen een streng *selectiesysteem* toe waarbij soms 5 tot 10 % van de *aanvragen* tot toelating leiden. Bij de selectie heeft de a.s. student zich aan een serie „*tests*” te onderwerpen, terwijl men door *gesprekken* probeert een idee van zijn *kunnen* en zijn *persoonlijkheid* te krijgen. In de meeste gevallen zijn de *H.S. resultaten doorslaggevend* voor de toelating, maar men wil daarnaast zich een beeld kunnen vormen van de eigenschappen der aanstaande studenten, mede om dezen nog tijdig *raad* te kunnen geven eventueel een *andere studierichting* te kiezen of wel in het geheel *niet te gaan studeren* doch een andere weg door het leven te zoeken. Dit *adviseren* speelt overal een grote rol en bijna alle *scholen* hebben dan ook een *aparte afdeling* om hun studenten de voor hun meest geschikt geachte weg te helpen kiezen.

Er bestaan in de V.S. ongeveer 150 *technische* hogescholen waarvan enige faculteiten van *universiteiten* zijn; andere weer zijn *zelfstandige instituten*. Ook hier treft men *goede* en *slechte* aan, maar er is een duidelijk *streven* naar verbetering bij allen aanwezig. Zoals iemand opmerkte was de *beste school van 30 jaar* geleden nog niet zo goed als de slechtste van nu. De studie in de technische richting duurt 4 jaar. Aan het einde hiervan krijgt men het diploma van *Bachelor of Science* (B.S.). Een aantal, ca *één vijfde*, van de besten van deze B.S. kan daarna doorstuderen en na 1 of 2 jaar de *Master titel* veroveren. Een nog gering aantal ongeveer 1/25 gaat door voor *Doctor*. Bij de R.C.A. bleek dat een groot deel van de mensen in het laboratorium B.S. waren in *electrical engineering*, die daarna de *Master of Doctor's graad* in de *natuurkunde* behaald hadden.

Het schooljaar is verdeeld in 2 *semesters*. Vaak wordt er nog een

zomercursus gegeven. In vele scholen wordt in deze zomercursus een *herhaling* gegeven van het onderwijs in de rest van het jaar, zodat degenen die achter gekomen zijn zich daar kunnen bijwerken. Ook wordt die zomercursus vaak gebruikt om leerlingen van verschillende H.S.'s, die dus gedeeltelijk een verschillende opleiding hadden op een bepaald punt te brengen te „homogeniseren”. Aan vele scholen wordt een deel van het eerste jaar daarvoor gebruikt, zodat men daar nog vakken geeft die eigenlijk op de H.S. thuis behoren.

Het aantal *uren* nodig voor het volgen van colleges, het bezoeken van tekenzalen en laboratoria en het zelf bestuderen van de stof is ongeveer 50 *per week*. Gewoonlijk geeft men per semester maar een *klein aantal vakken*. Men is geheel *afgestapt van grote klassen*. Het onderwijs wordt in het algemeen gegeven aan groepen van 20 tot 25 *studenten*. Deze zijn verplicht de colleges te volgen. Zij krijgen *huiswerk* op en taken, terwijl hun werk in de klas overhoord wordt zoals hier op de H.B.S.-en. Slechts een *enkel college wordt voor 150 tot 200 man* gegeven. Het gevolg daarvan is dat de docent de *studenten kent*, weet wat zij waard zijn en wat er in hun zit. Daardoor kunnen de *examens* zeer eenvoudig zijn. Wie 1 of 2 vakken onvoldoende heeft, kan *voorwaardelijk* bevorderd worden. Men kan aan de meeste scholen niet meer dan 1 *jaar langer studeren* dan de officieel vastgestelde termijn. Degenen, die niet slagen krijgen een *uitvoerig advies* over wat men hun aanraadt om wel te doen. Dit *adviseren* speelt een grote rol ook voor de afgestudeerden. De meest hoge scholen staan in uitvoerige *relatie met de industrie* en de overheid en hebben terwille van de afgestudeerden goede *plaatsingsbureaux*.

Dit systeem van kleine klassen leidt tot een geheel andere *verhouding van aantallen docenten tot studenten*. In Harvard bedraagt dit 1 op 4, in M.I.T. en Cornell 1 op 5, in Rensselaer en Columbia University 1 op 12, maar er komen ook hogere aantallen voor. De meeste colleges worden dan ook niet door „*full professors*” doch door *associate* of *assistant professors* gegeven, die bij onze professoren in kennis en standing belangrijk ten achter staan. Deze laatsten worden dan ook voor een betrekkelijk kort aantal jaren aangesteld. Ongeveer 40 % *van de studenten studeert in normale tijd* af. Bij de scholen waar bij de toelating een *goede selectie* werd toegepast, is dit soms *wel 90 %*.

Naast deze normale opleiding kent men ook de *coöperatieve*, waarbij de student een deel van zijn tijd op de school en een deel van zijn tijd in een fabriek of bedrijf doorbrengt. Gewoonlijk is



het eerste jaar gelijk aan dat van de normale studenten. Daarna brengt hij afwisselend 3 maanden in een fabriek en 3 maanden op de school door. De totale studietijd is dan 5 jaar, waarvan  $1\frac{1}{2}$  in de praktijk. De meeste scholen hebben *verlegenwoordigers bij de industrieën*, waar de student te werk gesteld wordt zodat geregeld gecontroleerd kan worden of zij daar werk krijgen waar zij inderdaad iets aan hebben. Gedurende de laatste 4 jaar heeft de student dus practisch *geen vacantie*. Het is een *zware studie* doch het stelt de student in staat om een deel van de kosten van de studie *zelf te verdienen*. Van de studenten, die de normale cursus volgen doet ook een groot deel dit in de vacantie. Bij de General Electric vertelde men ons dat ongeveer 9 % van hun ingenieurs voor 100 % zelf de kosten van hun studie verdiend hadden, 30 % 75, 50 % 50 slechts 11 % hadden niet een deel van hun studiekosten zelf verdiend. Over de resultaten van de coöperatieve opleiding is men in het algemeen wel tevreden, doch men wil deze op vele plaatsen niet invoeren, omdat men niet zeker is dat ook in de malaise perioden de studenten in de fabrieken voldoende belangrijk werk kan worden gegeven.

Naast deze twee vormen van opleiding bestaat nog de mogelijkheid langs de *avondscholen* zich in veel langere tijd tot ingenieur te bekwamen (9 tot 10 jaar). Deze avondscholen spelen een zeer belangrijke rol. Er zijn er die ook de gelegenheid geven de Master of Doctor titel te verwerven.

Dit wat de inrichting van het onderwijs betreft. Nu het onderwijs zelf.

Terwijl men in het begin van deze eeuw hoofdzakelijk *specialisten* opleidde, wordt nu overal de nadruk gelegd op het geven van een *brede basis*. Wiskunde, natuurkunde, scheikunde en later wat men noemt de „engineering fundamentals”, toegepaste mechanica, hydrodynamica, aerodynamica, thermodynamica, kennis van materialen, grondmechanica, electriciteitsleer, electronica, de basisvakken, waarop de speciale ingenieursvakken berusten. Men wil mensen hebben, die zich *gemakkelijk aan kunnen passen*. De industrieën veranderen snel. Werkmethoden en inzichten van enkele jaren geleden zijn verouderd. De opleiding van de mensen moet zo zijn, dat zij *met het nieuwe mee kunnen gaan*, en niet een rem gaan worden. De oorlog heeft de waarde van deze snelle omstelbaarheid weer eens bewezen. Het onderwijs heeft daardoor een *heel ander karakter* verkregen dan 30 jaar geleden en het ziet er naar uit, of het verder in deze richting zal verschuiven. De felle concurrentie, de ontwikkeling van de vakverenigingen, de atoom-

bom, het communisme en andere sociale verschijnselen hebben ertoe bijgedragen, dat men van een groot aantal ingenieurs moet verlangen, dat zij meer dan vroeger een *kijk* hebben op de *economische en sociale zijde* van hun werkkring, maar daarnaast moeten zij ook goede *staatsburgers* zijn. Zij moeten de *Amerikaanse wijze van leven begrijpen*, hoe deze zich ontwikkeld heeft, welke vrijheden en andere voordelen deze biedt tegenover de totalitaire levensopvatting. Daarom neemt men in steeds hogere mate een serie studievakken in de programma's op, die men samenvat onder het begrip „*humanities*”. Zij omvatten Engels in woord en geschrift, de geschiedenis, in de eerste plaats de Amerikaanse, economie, psychologie en „*human relations*”.

Dit alles wil men doen ten *koste van de speciale ingenieurskennis*. Men wil veelzijdiger mensen hebben die grote verantwoordelijkheden kunnen dragen. In Columbia University bijv. was de verdeling van de tijd over de verschillende vakken zo: fundamentals (wisk. nat. scheik.) 30 %, engineering fundamentals (thermodynamica, hydrodynamica, electriciteitsleer) 30 %, humanities 20 %, special engineering 20 %.

Toch wil men niet tot een verlenging van de studieduur overgaan. Voor de normale ingenieur vindt men *4 jaar voldoende* mits er *hard gewerkt* wordt en *deugdelijk onderwijs* wordt gegeven. Voor de meer begaafden bestaat dan de gelegenheid door te gaan voor *M of Dr.* Deze verdere studie moet *niet als specialisatie* opgevat worden. Zij omvat meest nog de studie van een *aantal basisvakken*. Aan een aantal scholen wordt daarnaast de gelegenheid geboden voor een aantal Bachelors of Science zich in een bepaalde richting te specialiseren. Dit geschiedt dan echter niet volgens een bepaald studieprogramma. De praktijk der *ingenieurswetenschappen leert men in de fabrieken*, die veelal voor de B.S. nog een *opleiding van 2—3 jaar geven*.

De wiskundeopleiding is niet aan alle scholen dezelfde. Aan een aantal wordt in het undergraduate programma geen aparte cursus in differentiaal vergelijkingen gegeven; aan de beteren echter wel.

Ook de wiskunde wordt in kleine groepjes van 20—30 man behandeld, waarbij huiswerk wordt opgegeven en gecontroleerd wordt of men bij is.

Voor degenen die het bachelors examen hebben afgelegd en door gaan, wordt een groot aantal wiskunde colleges gegeven, waaruit zij zelf kiezen kunnen. (Soms ook reeds in het 3e en 4e jaar).

Er zijn dan ook meestal een groot aantal wiskundigen aan de scholen verbonden in M.I.T. bijv. 21 full en assistentprofessors

en 40 lagere hulpkrachten als, instructors, lecturers, enz. Behalve de voor gewone colleges voor de a.s. bachelors werden daar 46 cursussen voor meer gevorderden gegeven.

Uit een en ander blijkt wel, dat men veel over heeft voor een grondige wiskundeopleiding en dat men de wiskunde als een van de belangrijkste fundamenteën van de ingenieursopleiding beschouwt.

Hiermee ben ik aan het eind van mijn voordracht gekomen. Ik heb geprobeerd te analyseren, welke moeilijkheden overwonnen moeten worden, om een groter aantal mensen die wiskunde bij te brengen, die zij voor het vervullen van hogere functies in de techniek nodig hebben, en vervolgens gewezen op de weg, die men in de U.S. heeft ingeslagen om dat doel te bereiken. Ik heb de indruk dat wij in een aantal opzichten van de daar opgedane ervaringen, een nuttig gebruik kunnen maken.

### **Aanmelding van kandidaten voor de akte-examens in de wis- en natuurkundige wetenschappen (K I t/m K VI)**

DE MINISTER VAN  
ONDERWIJS, KUNSTEN EN WETENSCHAPPEN,

brenkt ter kennis van belanghebbenden, dat zij, die dit jaar het examen ter verkrijging van een akte van bekwaamheid tot het geven van middelbaar onderwijs in de wis- en natuurkundige wetenschappen (akten K I tot en met K VI) of het examen ter verkrijging van de akte van bekwaamheid tot het geven van lager onderwijs in de beginselen van de wiskunde wensen af te leggen, vóór 1 April 1951 uitsluitend per briefkaart en zonder toezending van enig ander stuk, een aanmeldingsformulier moeten aanvragen bij de voorzitter van de commissie, belast met het afnemen van bovengenoemde examens, de heer A. J. S. van Dam, Fuutlaan 10, 's-Gravenhage.

's-Gravenhage, 3 Februari 1951.

Voor de Minister,  
Het wnd. Hoofd van de Afdeling  
Vorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs,  
(get.) A. F. MONNA.  
Voor eensluidend afschrift,  
De Chef van het Kabinet,  
SCHOLVINCK.

## OVER MOMENTEN

door

Dr H. J. E. BETH.

In zijn artikel „Het samenstellen van een vlak krachtenstelsel” in No. 2 stelt Dr J. Koksma o.a. de wel niet nieuwe, maar m.i. toch nog wel steeds belangwekkende, vraag aan de orde; welk van twee begrippen als primair moet worden beschouwd: dat van het moment van één kracht ten opzichte van een gegeven punt of dat van het moment van een koppel.

Een oningewijde, die toch mee wil praten, zal wellicht dadelijk geneigd zijn op het tweede te stemmen, omdat blijkens de redactie van de vraag een koppel reeds een moment heeft op grond van zijn eigen kwaliteiten, een kracht echter pas een moment krijgt, als men er een punt bij aanwijst; omdat voorts, blijkens die redactie, een koppel één bepaald moment heeft, terwijl een kracht op grond van vrijheid t.o.v. de keuze van het punt zoveel momenten heeft als men wil.

Zo goedkoop willen we ons echter van de vraag niet afmaken. Laat ons de historie om opheldering vragen. Het momentbegrip was aan de Ouden welbekend. In de vergelijking „kracht  $\times$  kracht-arm = last  $\times$  lastarm” staat in beide leden een product, dat „moment” genoemd wordt. Schijnbaar het moment van een kracht, maar in werkelijkheid het moment van een koppel, hoewel we bij de Ouden vergeefs naar koppels zullen zoeken. Het product was voor hen de grootte van de evenwichtsverstoring van een kracht, *die op een hefboom werkt*. Maar ze dachten daarbij dus uitsluitend aan het geval van de hefboom, en hadden dan ook niet te doen met de werking van een kracht, zonder meer. Ik zal hierop nog moeten terug komen.

Ik bepaal me, zoals ook Koksma doet, tot het vlakke krachtenstelsel, hetgeen de zaak sterk vereenvoudigt; dit geval is toch ook voor ons onderwijs vooral van belang.

Het begrip van moment van een kracht ten opzichte van een *willekeurig* punt is van de nieuwe tijd (Varignon „Projet d’une nouvelle mécanique”, 1687) en bleek een hoogst nuttig hulpmiddel te zijn voor de herleiding van stelsels van krachten. Ik ben het met Koksma eens, dat het ook zeer bruikbaar is voor het onderwijs.

Zelfs geloof ik, dat men de *invoering* van dit nieuwe begrip bij de leerlingen wel veel beter kan motiveren dan dóór de momentenstelling, die toch pas ná die invoering komt! Men kan, nadat de verschuiving van krachten langs haar dragers, de parallelogramconstructie e.d. behandeld zijn, op een punt aansturen, waar we reeds in staat zijn vast te stellen, dat een bepaald stelsel een resultante heeft, én van deze grootte, richting en zin te vinden. Dan is nog onbekend de juiste plaats van de drager van de resultante. En om deze op een handige wijze te bepalen dient de invoering van een nieuw begrip. We gaan daarbij uit van de overweging, dat de plaats van de drager bekend zal zijn, als we slechts de *afstand* kennen, die de drager heeft van een willekeurig in het vlak aangenomen punt O. In het nieuwe begrip, dat we gaan invoeren, zullen we dus laten optreden de afstand van de drager van de resultante (en van die van de gegeven krachten) van O. En dan is m.i. een verwijzing naar de hefboomregel voldoende om de invoering van het gehele begrip te motiveren.

Maar met de kennis van de momentstelling is men dan ook met alles klaar, en er is op het punt van de herleiding van een vlak stelsel geen vraag meer of we kunnen die beantwoorden. En nu is juist een bezwaar, dat men toch weer opnieuw moet beginnen. Want men heeft de koppels nog niet gehad! Die koppels zijn eigenlijk op een verdrietige wijze in ons leven gekomen: het samenstellen van krachten ging vlot totdat men dit zonderlinge geval ontmoette, waarmee niets viel te beginnen, als men geen „krachten van grootte nul en in het oneindige gelegen” wilde beschouwen. Men heeft toen de verstandigste weg gekozen, die om die narijheid heen leidde, heeft aan het ding misschien nog wel een naam gegeven, maar het verder laten liggen voor wat het waard was.

En nu is het niet duidelijk, hoe men, nadat de herleiding van een vlak stelsel tot ieders tevredenheid is beëindigd, opnieuw belangstelling kan gaan eisen voor dat, misschien allang weer vergeten, pijnlijke geval.

De theorie van de koppels danken we aan Poincaré („Eléments de statique” 1804). Hij gaf een nieuwe theorie voor de herleiding van een krachtenstelsel, waarbij hij het koppel op de voorgrond bracht. Hij begon met de afleiding van die reeks stellingen omtrent koppels, die we allen goed kennen. Dat liep uit op het, door hem zeker niet verwachte, resultaat, dat men met koppels kan doen, wat men met getallen doet (we blijven steeds in één vlak), dat een koppel niet meer en niet minder is dan een getal.

Nu zag hij meteen, dat de momenten van de Ouden niets anders

zijn dan zulke getallen. Laat men op een hefboom een kracht werken, dan zorgt het draaipunt er voor, dat een „force cachée” optreedt, die de aangebrachte kracht tot een koppel aanvult.

Maar die getallen zijn het ook, die voor de dag komen, als Varignon het punt O te hulp roept. Zulk een punt, dat wij het momentcentrum noemen, is voor Poinsoot een denkbeeldig „obstacle”, waardoor het vrije lichaam gemaakt wordt tot hefboom. En het „getal” is hier de evenwichtsversturende invloed, die een aangebrachte kracht zou hebben op die denkbeeldige hefboom. De „force cachée”, die voor elk van de aangebrachte krachten optreedt, completeert deze kracht tot het koppel, dat zich, om onze terminologie te gebruiken, afsplitst, als we het aangrijpingspunt van een kracht plaatsen in een punt, dat buiten haar drager ligt. Hoe de herleiding met behulp van deze „overbrenging” verloopt is ieder bekend. De koppels krijgen bij deze manier van werken wel het volle pond.

Poinsoot beveelt zelf zijn methode o.a. als volgt aan: „... les plus lumineuses et les plus fécondes (bedoeld zijn: idées) sont pour nous celles qui font le mieux image, et quel' esprit combine avec le plus de facilité dans le discours et dans le calcul: or les couples ont éminemment cet avantage sur les moments...”.

Zijn tijdgenoten en het nageslacht waren het blijkbaar met hem eens: zijn „Statique” heeft een ongeëvenaard succes gehad. Als „Ouvrage adopté pour l'Instruction publique” heeft het vele uitgaven beleefd. Het is gedurende een lange reeks van jaren in Frankrijk het leerboek voor statica geweest (waarschijnlijk even zeer buiten Frankrijk) en zou het nog altijd kunnen zijn.

Het zou heden ten dage ook op onze boekenlijst geen slecht figuur maken. Als ik door deze opmerking (wat ik hoop) de nieuwsgierigheid van sommigen heb opgewekt, die het boek nu wel eens willen inzien, dan zou het jammer zijn, als ze niet ook kennis namen van P.'s „Mémoire sur la composition des moments et des aires dans la mécanique”, om te zwijgen over enkele andere Mémoires van zijn hand, alle in hetzelfde boekdeel.

Voor Poinsoot is het begrip koppelmoment primair, terwijl voor Varignon het begrip krachtmoment dat is. De mechanica-boeken, thans bij ons in gebruik, geven, voorzover ik ze ken, een meer of minder geslaagde combinatie Varignon-Poinsoot. Het leerboek van Schogt staat buiten en boven alle vergelijking.

Terwijl tegen Varignon het bezwaar kon worden gemaakt, dat de koppels niet aan de orde komen anders dan met geweld, kan men tegen Poinsoot opmerken, dat het begrip van kracht-

moment vergeten wordt. Deze opmerking is echter onjuist. Voor hem is het moment van een kracht ten opzichte van een punt O niets anders dan het moment van het koppel, dat zich afsplitst, indien men het aangrijpingspunt van de kracht in O plaatst. Of, om het korter en eenvoudiger te zeggen: het is het moment van het koppel, gevormd door de gegevens kracht en de „force cachée”, die zou optreden in O, als O vast was.

Als Poinsoot dus spreekt over het moment van een kracht ten opzichte van een punt O, dan ziet hij daarbij onwillekeurig die „force cachée”. Ik vermoed, dat het ook anderen zo gaat.

Bij een vergelijking van de beide methoden geeft men dan ook aan als in het voordeel van Poinsoot, dat men, na de koppelstellingen te hebben bewezen, de momentstellingen op de koop toe krijgt. Voorts houden velen de methode van Poinsoot voor meer elegant.

Wat de bruikbaarheid voor het onderwijs betreft kan ik tussen beide methoden geen groot verschil zien. Wat men aan tijd op-offert door tweemaal hetzelfde te doen, is geen verloren tijd, als hij twee maal voor een goede zaak gebruikt wordt; ik denk hierbij vanzelf aan de tijd, die verknoeid wordt met geheel nutteloze zaken <sup>1)</sup>.

En wat de meerdere elegantie betreft, met deze overweging bevinden we ons op het gebied van de persoonlijke smaak. Daarom is het argument nog niet van minder belang. We mogen ons gelukkig prijzen, dat ons zoveel vrijheid gelaten wordt (we hebben nog geen „ouvrage adopté pour l'Instruction publique”), dat we inzake de methodiek zelfs met onze smaak rekening kunnen houden, en dat de samenstellers van de examen-opgaven zo ruim van blik zijn, dat ze weten te voorkomen, dat de kandidaten de dupe zouden worden van een onvoordelige boekenlijst.

Ten slotte heb ik een opmerking te maken over wat Koksmas zegt in de tweede helft van de laatste alinea van zijn artikel. Hij beklaagt zich erover, dat het begrip koppel zich bij de leerling gemakkelijk vastzet als aanduiding voor een soort ondeelbaar iets, en dat hij er niet licht toe komt, een koppel weer in zijn twee krachten te scheiden. Ik geloof, dat hij meer reden heeft, zich hierover te verheugen en het als een gunstig resultaat van zijn onderwijs te beschouwen, dan om zich te beklagen. We hebben hier zeker weer een geval, waarin de leerling gelijk heeft.

---

<sup>1)</sup> B.v. de statische stelsels met hun massalen en massaaltjes!

Wanneer de leraar zijn leerlingen meegevoerd heeft langs de door Poincaré aangewezen weg van die lange reeks stellingen en hen gebracht heeft tot het eindpunt, waar het koppel zich als vrije vector vertoont in zijn ware gedaante, dan mag de leerling het koppel niet langer zien als het samenstel van die twee pijlen, die in tegengestelde richting wijzen. En bovendien, als Koksma wenst, dat de leerling „een koppel weer in *zijn* twee krachten zal scheiden”, dan is dat een eis, waaraan niemand kan voldoen.

Als men met de bespreking van het koppel begint, dan is, en blijft voorlopig, de enig mogelijke *voorstelling* die door middel van een krachtenpaar. Maar bij de bestudering van de eigenschappen komt men gaandeweg tot het inzicht, dat men hier te doen heeft met een begrip, dat een bestaan in zichzelf heeft, dat alleen door zijn, blijkbaar te vroeg ontvangen, naam van „paar”, maar volstrekt niet door zijn eigenschappen, herinnert aan de kracht. Dan ziet men, dat het krachtenpaar niet de enig mogelijke, en lang niet altijd de meest bruikbare manier is om (in een vlak) een koppel voor te stellen. Het begrip zou het best gedekt worden door de benaming „moment”, maar dan niet moment van iets, of moment van iets ten opzichte van iets, maar moment, zonder meer.

Van welke betekenis het begrip moment in de mechanica is, ziet men het duidelijkst in de dynamische fundamentele stellingen, twee in getal, waarvan de ene over de krachten, de andere over de momenten spreekt. De leerlingen komen hieraan niet toe, maar wel aan de twee evenwichtsvoorwaarden voor een vast lichaam, voor welke hetzelfde geldt. In de moderne mechanica gaat men uit van die van het stoffelijk punt. Daar is de kracht alleenheerscheres; voor het moment is nog geen plaats. Beschouwt men de hefboom, dan is het moment oppermachtig en de kracht verdwijnt in het duister. Gaat men van het stoffelijke punt over tot het vrije lichaam, dan plaatst zich het moment naast de kracht, als partner, met gelijke rechten. Het zou dan ook principieel onjuist zijn, om, zoals Koksma wenst, een „minder zwaar accent op de koppels te leggen”.

---



## OVER DE RUIMTE <sup>1)</sup>

door

Dr B. L. VAN DER WAERDEN.

Een jaar of twintig, dertig geleden werden heel vaak intreederen over het ruimtebegrip gehouden. In die aardige gewoonte is in de laatste tijd de klad gekomen: men zocht en vond origineler onderwerpen. Voor de afwisseling zal ik het nu weer eens over de ruimte hebben.

Maar het is niet alleen de begeerte, U door afwisseling te behagen: ik meen ook dat ik U iets te zeggen heb, dat in al deze redevoeringen en populaire verhandelingen over ruimte, tijd en relativiteitstheorie niet te vinden is. Ik wil namelijk het standpunt van Kant verdedigen.

Niet dat ik Kant door dik en dun wil volgen. Dit gaat tegenwoordig niet goed meer. In de opzienbarende dissertatie van Magdalena Aebi is aangetoond, dat de transzendentale Logik, het kernstuk van Kant's Kritik der reinen Vernunft, in zijn geheel onhoudbaar is: dat Kant op essentiële punten denkfouten maakt en begrippen door elkaar haalt.

Ik ga hier dus niet de transzendentale Logik verdedigen, maar alleen de transzendentale Aesthetik, voor zover die betrekking heeft op de ruimte.

Maar ook hier blijkt niet alles houdbaar. Een van Kant's beweringen kan ik niet onderschrijven, namelijk de apodiktische zekerheid der meetkundige oordelen. Kant zegt: „Die geometrischen Sätze sind insgesamt apodiktisch, d.i. mit dem Bewusstsein ihrer Notwendigkeit verbunden.”

Een afschuwelijk woord: apodiktisch. Bij Aristoteles heeft apodeiktikos nog de oorspronkelijke betekenis: bewijskrachtig. Maar bij Kant heeft het met bewijzen niets meer te maken. Voor zijn bewustzijn zijn de meetkundige oordelen volstrekt zeker, en die zekerheid wordt niet verder in twijfel getrokken.

Wel heeft Kant gelijk, dat „alle geometrischen Grundsätze aus der Anschauung abgeleitet werden”, en dat deze aanschouwing een grote overtuigingskracht heeft. Als een leraar aan de klas duidelijk wil maken, dat de basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn, dan zegt hij bv.: Stel je een gelijkbenige driehoek voor, trek

<sup>1)</sup> Rede, uitgesproken bij het aanvaarden van het ambt van gewoon hoogleraar in de Wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam op 4 Dec. 1950.

de bissectrice van de tophoek en denk de driehoek omgevouwen langs die bissectrice; dan zie je, dat de opstaande zijden langs elkaar vallen, enz. Een beroep op de aanschouwing overtuigt een ieder van de juistheid van de axioma's en de eerste stellingen.

Maar zijn deze stellingen nu onwrikbaar zeker? Hoe zou dat kunnen? Zelfs rekenkundige, zelfs zuiver logische stellingen zijn niet volkomen zeker. Uit niet niet niet A volgt niet niet niet niet A — als ik het aantal nieten goed geteld heb, waar ik niet helemaal zeker van ben. En  $165 + 377$  is  $542$ , als ik mij niet verrekend heb, wat lang en lang niet zeker is.

Zou de aanschouwelijke voorstelling, die ik mij van meetkundige figuren maak, nu wel onfeilbaar zijn, als het tellen het niet is? Kunt U zich een regelmatige duizendhoek werkelijk voorstellen en in Uw voorstelling van de omgeschreven cirkel onderscheiden?

Ik stel mij een vierkant voor. Zijn de vier hoeken, die ik mij voorstel, wel nauwkeurig recht, of mankeert er misschien een duizendste graad aan? Heeft het wel zin, deze vraag te stellen? Zijn onze voorstellingen wel ooit geheel duidelijk en bepaald, of gaan ze geleidelijk in andere, verwante voorstellingen over?

Wanneer echter alles wat aan de aanschouwing ontleend wordt, vaag en onzeker is, zal dan het sluitstuk van een lange reeks conclusies niet nog erger onzeker zijn?

Dit soort kritiek heb ik van mijn vereerde leermeester Mannoury geleerd. Ik zie geen mogelijkheid, er aan te ontkomen. De apodiktische zekerheid moeten we dus laten vallen en ons vergenoegen met een waarschijnlijke geldigheid bij benadering binnen de grenzen van ons voorstellingsvermogen.

U zult uit het voorafgaande wel gemerkt hebben, dat de ruimte, waar ik het met U over wil hebben, de aanschouwingsruimte is: de ruimte, waar onze fantasieën en dromen zich in afspelen. Wat deze fantasieën met de werkelijkheid te maken hebben, laten we voorlopig in 't midden.

Over deze ruimte heeft ook Kant het, want hij zegt: „Der Raum ist reine Anschauung”. En hij preciseert de verhouding van deze reine Anschauung tot de ervaring aldus:

„Damit gewisse Empfindungen auf etwas außer mir bezogen werden . . . insgleichen damit ich sie als außer und nebeneinander . . . vorstellen kann, dazu muß die Vorstellung des Raumes schon zugrunde liegen.”

Kant concludeert hieruit, volkomen terecht, dat onze voorstelling van de ruimte niet uit de ervaring geabstraheerd is. Door de ruimtevoorstelling wordt ervaring van ruimtelijke dingen pas moge-

lijk gemaakt. Of nauwkeuriger uitgedrukt: het vermogen, indrukken van de zintuigen tot ruimtelijke voorstellingen te verwerken, dit vermogen moet er eerst zijn, dan pas kunnen wij deze voorstellingen vormen en ervaring er mee opdoen. Natuurlijk wordt ons voorstellingsvermogen door oefening aan de hand van de ervaring hoger ontwikkeld, maar het vermogen moet eerst aanwezig zijn, en daarmee is de aanschouwingsruimte vanzelf gegeven.

De grote vraag is nu, hoe wij aan de stellingen van de meetkunde komen. Hoe is het mogelijk, over de punten, lijnen, cirkels enz. in onze aanschouwingsruimte met vrij grote zekerheid stellingen te poneren?

Kant's eerste bewering is nu, dat de oordelen der meetkunde geen analytische, maar synthetische oordelen zijn. Wat wil dit zeggen?

Analytische oordelen zijn die oordelen, waarin niets over een begrip wordt gezegd dan wat er verborgen al in zat, zodat het door analyse van het begrip te voorschijn gehaald kan worden. „Durch analytische Urteile”, zo zegt Kant, „wird unsere Erkenntnis gar nicht erweitert, sondern der Begriff, den ich schon habe, wird nur auseinandergesetzt und mir selbst verständlich gemacht”.

Een analytisch oordeel kan men niet ontkennen zonder met zich zelf in tegenspraak te geraken. Een voorbeeld ter toelichting. Als ik met Aristoteles het begrip „mens” definieer als zoön politikon, een levend wezen dat aan politiek doet, dan volgt hieruit dat er geen dode mensen bestaan. Immers een levend wezen, dat dood is, is een tegenspraak in zich zelf. Zeg ik daarentegen, dat iedere mens sterfelijk is, dan is dat een synthetisch oordeel, want er wordt een nieuw kenmerk aan het begrip toegevoegd, dat er niet door analyse uit te halen is.

De oordelen van de meetkunde zijn dus volgens Kant synthetisch. De stelling, dat in een driehoek twee zijden samen groter zijn dan de derde, kan nooit uit de begrippen driehoek en zijde gehaald worden, zegt hij.

Welnu, deze bewering van Kant, is door de ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde volkomen bevestigd. Het is nl. gebleken, dat men de axioma's van Euclides kan ontkennen, zonder ooit tot een tegenspraak te komen. Een oordeel echter, dat men ontkennen kan zonder tot een tegenspraak te komen, is geen analytisch oordeel. Kant heeft dus op dit punt gelijk.

Hoe nu? zoudt U uitroepen, als de traditie U niet bij een openbare les tot zwijgen zou nopen. Hoe nu? En ik heb altijd gehoord, dat

Kant juist door de ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde weerlegd is? Is het nu ineens andersom?

Inderdaad, dat hebt U altijd gehoord en gelezen. Sinds Gauss worden de geleerden niet moede te beweren, dat de niet-Euclidische meetkunde Kant weerlegd heeft.

Maar eenstemmigheid is nu eenmaal in de wetenschap geen criterium voor waarheid. De kunstkenners waren ook eenstemmig van mening, dat Van Meegeren's Emmaus een echte Vermeer was. En toch was het niet waar.

Zo is het ook hier. Er bestaan niet-Euclidische meetkunden, dat wil zeggen: er bestaan dingen, die men punten, lijnen enz. kan noemen, en die niet aan het vijfde postulaat van Euclides voldoen. Men kan dus van het vijfde postulaat het tegendeel aannemen, zonder ooit tot een contradictie te komen. Met andere woorden: het vijfde postulaat is geen analytisch oordeel in de zin van Kant. Meer valt er niet uit te halen, want meer zit er niet in. Kant heeft op dit punt gelijk.

Maar Kant heeft nog meer beweerd, zult U zeggen, en misschien richt de critiek van Gauss, die toch ook niet dom was, en van al die anderen, zich in de eerste plaats tegen die andere beweringen van Kant. Inderdaad. Kant heeft gezegd, dat de oordelen der meetkunde geen ervaringsoordelen zijn, maar oordelen a priori, die logisch aan de ervaring voorafgaan en de ervaring pas mogelijk maken. Heeft hij ook hierin gelijk?

Over de verhouding tussen meetkunde en ervaring heeft Riemann in zijn beroemde rede „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" uiterst belangrijke, ja profetische opmerkingen gemaakt.

Riemann meent, dat de oorzaak voor de maatverhoudingen in de ruimte gezocht moet worden in de krachten, die er werken.

Ik ben er van overtuigd, dat Riemann gelijk heeft. Maar de physische ruimte, waar Riemann en Einstein over spreken, is niet meer de aanschouwingsruimte, waar wij het over hadden.

De physische ruimte — dit is in de latere ontwikkeling van de physica wel duidelijk gebleken — is een onaanschouwelijke mathematische constructie: een vierdimensionale tijdruimte, of een trillioen-dimensionale fasenruimte, of een ruimte van Hilbert. Zulke ruimten zijn voor de moderne physica even onontbeerlijk als ons voorstellingsvermogen is voor ons dagelijks leven, maar ze treden niet in de plaats van onze aanschouwelijke ruimte. Deze hogere ruimten vullen de gewone ruimte aan, ze bieden plaats voor allerlei

dingen die niet te vatten zijn voor onze gewone voorstelling, maar ze maken onze aanschouwelijke voorstellingen niet overbodig.

Om de hypothesen van de physica te interpreteren en te toetsen hebben we toestellen nodig: tafels en lampen en wijzerplaten, die we moeten zien en grijpen, en voor dat zien en grijpen zijn ruimtelijke voorstellingen nodig, die behoren tot de gewone alledaagse aanschouwingsruimte. Daar veranderen al die ruimten van Riemann, Minkowski en Hilbert niets aan.

En zo vallen we dus vanzelf weer terug op onze huis-, tuin- en keukenruimte en op ons oorspronkelijk probleem: is de meetkunde van onze gewone aanschouwingsruimte aan de ervaring ontleend of niet?

Gauss en Helmholtz meenden van wel. „Die geometrischen Axiome” aldus Helmholtz „sprechen gar nicht über die Verhältnisse des Raumes allein, sondern gleichzeitig auch über das Verhalten unserer festen Körper bei Bewegungen”. En Gauss heeft de hoeken van een grote driehoek tussen drie bergtoppen gemeten, om te zien of hun som 180 graden bedraagt. In een sferische ruimte, zo meent Helmholtz, zouden de mensen er vanzelf toe komen, een niet-Euclidische meetkunde op te stellen.

Hiertegenover merkt Henri Poincaré op, dat er voor de inwoners van een sferische ruimte twee mogelijkheden zouden zijn: ze kunnen

1. de axioma's van Euclides laten vallen en de meetkunde aan het waargenomen gedrag van de vaste lichamen en lichtstralen aanpassen. Maar ze kunnen

2e. ook vasthouden aan de meetkunde van Euclides, en concluderen dat de harde lichamen bij verplaatsing hun vorm en grootte veranderen.

De keuze van de Euclidische of niet-Euclidische meetkunde is dus volgens Poincaré geheel willekeurig, een conventie, meer niet. Theoretisch zijn we vrij, onder „rechte lijnen” en „verplaatsingen” te verstaan wat we willen: we kunnen de „rechten” zo kiezen, dat ze aan de axioma's van Euclides voldoen of niet, al naar doelmatig blijkt. De axioma's zijn dus conventies, geen ervaringsfeiten.

Dit betoog van Poincaré heeft terecht grote indruk gemaakt, ook op mij. Ik vond Poincaré's stelling, dat de axioma's conventies zijn, een brillante precisering van Kants these, dat de axioma's a priori gelden. Want conventies of afspraken gelden altijd a priori, onafhankelijk van de ervaring, tot op het ogenblik waarop de afspraak weer wordt opgeheven. Als wij afspreken, lijnen alleen dan recht te noemen wanneer ze aan de axioma's van

Euclides voldoen, dan zijn wij volkomen zeker dat rechte lijnen inderdaad aan de axioma's voldoen, niet op grond van de ervaring maar op grond van de afspraak!

Maar bij nadere overweging vind ik het standpunt van Poincaré toch te rationalistisch, en vind ik Kant's formulering beter. Het woord „conventie” past nl. niet volkomen. Een conventie toch is een bewuste afspraak tussen twee of meer mensen, die iets met elkaar overeenkomen. Maar ik heb nooit van mijn leven bewust met iemand anders afgesproken, wat wij rechte lijnen willen noemen, en U waarschijnlijk ook niet. Wij weten ook zonder afspraak best (althans bij benadering) welke lijnen wij in onze eigen voorstelling krom noemen en welke recht.

Laten wij eens nagaan wat er gebeurt, als een leraar het begrip rechte lijn uit wil leggen. Hij zegt bv.: stel je een heel dunne streep voor, een streep met dikte nul, waar helemaal geen bocht of kromming in zit. Ieder kind begrijpt dit, omdat er een voorstelling door gewekt wordt, die in de geest van het kind allang aanwezig was. Ook een doofstomme, die nooit de woorden recht en krom heeft gehoord, kent het verschil tussen een rechte en een kromme stoelpoot.

Het conventionele ligt alleen in het *woord*: of men het ding recht of straight noemt, dat is conventie, maar niet welke lijnen recht of ongeveer recht zijn. Dat spreken we niet af, dat *zien* we gewoon. Zo is ons voorstellingsvermogen nu eenmaal ingericht, daar kunnen we met bewuste afspraken niets aan veranderen.

Waar berust het nu op, als we een stok recht of krom noemen? Niet op conventie, dat hebben we al gezien, maar ook niet op ervaring. De ervaring levert ons, laten we zeggen, een groot aantal stokken, boomstammen, touwen, grenslijnen en zo voort. Sommige zijn recht, andere krom. Door ze alleen met elkaar te vergelijken, kunnen we nooit uitmaken, welke recht zijn. Maar als we een stok met onze voorstelling van een rechte lijn vergelijken, dan zien we of hij er mee overeenkomt of niet.

De voorstelling van een rechte lijn wordt ons dus niet door de ervaring geleverd. De ervaring prikkelt ons wel, deze voorstellingen te ontwikkelen, maar we ontwikkelen ze uit ons zelf, uit ons voorstellingsvermogen.

Aan dezelfde aanschouwing zijn nu ook de axioma's van de meetkunde ontleend. We zien, dat er door twee punten steeds een rechte lijn gaat. Stel U maar twee punten voor: U kunt niet ontkennen, dat U in staat bent, er in gedachten een rechte lijn door te trekken.

Kunt U zich een rechthoek voorstellen, een vierhoek met vier

rechte hoeken? Natuurlijk! zult U zeggen. Maar daarmee hebt U al toegegeven, dat Uw aanschouwingsruimte Euclidisch is, altijd binnen de nauwkeurigheidsgrenzen, die we met de aanschouwing kunnen bereiken. Want in een niet-Euclidische (hyperbolische of elliptische) meetkunde is een vierhoek met vier rechte hoeken niet mogelijk.

Ieder van ons heeft dus een aanschouwingsruimte, waarin rechten getrokken kunnen worden, waarin één lijnstuk groter of kleiner of even groot is als een ander, en waarin de axioma's van Euclides gelden, althans de afwijkingen van die axioma's onmerkbaar klein zijn. Van de geldigheid van die axioma's kunnen wij ons aanschouwelijk overtuigen, door in gedachten zekere lijnen te trekken. De axioma's zijn dus niet aan de rede en niet aan de ervaring ontleend, ook niet aan conventies, maar aan de aanschouwing.

Dit alles lijkt mij eenvoudig en duidelijk, maar toch zijn de meeste wiskunde-filosofen het niet met mij eens. Welke tegenwerpingen maken zij?

U moet mij ten goede houden, wanneer mijn betoog bij de bespreking van die tegenwerpingen iets moeilijker te volgen is. Tot dusver had ik het over dingen, die iedereen kent en zich zonder moeite kan voorstellen: over stokken en stoelpoten, over vierkanten en rechthoeken. Maar de tegenargumenten, die ik nu ga bespreken, zijn geleerde argumenten, die moeilijker te begrijpen zijn.

Mijn geleerde tegenstander beweert dus, dat de niet-Euclidische meetkunde net even aanschouwelijk is als de Euclidische en net zo goed kan dienen om de ervaring te beschrijven.

Om dit te bewijzen, redeneert hij als volgt. Stel U een grote bol voor, laten we zeggen de omgeschreven bol van deze aula. Beschouw de cirkels, die deze bol loodrecht snijden. Onder die cirkels begrijpen we ook de rechte lijnen, die de bol loodrecht snijden, dat zijn de middellijnen van de bol. Van deze loodrechte cirkels en lijnen beschouwen we alleen het gedeelte dat binnen de bol ligt; punten op of buiten de bol laten we geheel buiten beschouwing. Deze cirkelbogen nu noemen we voor de aardigheid eens „rechte lijnen”. De gewone rechte lijnen kunnen we ter onderscheiding „Euclidische rechten” noemen, maar daar letten we verder niet op.

Analoog definiëren we „platte vlakken” als bollen, die de vaste bol loodrecht snijden.

Van onze gekke „rechte lijnen” gaat er nu door elk tweetal punten binnen de bol één en slechts één. Aan het eerste postulaat van Euclides is dus voldaan, maar aan het parallelenaxioma of vijfde postulaat niet, want men kan door een punt binnen een vlak”

meer dan één „lijn” in de nieuwe zin trekken, die een gegeven lijn in dat vlak niet snijdt. We hebben dus een aanschouwelijk model van een niet-Euclidische meetkunde.

Ook voor de beschrijving van de ervaring kan deze buitenmodel-meetkunde gebruikt worden. Men kan de hele natuurkunde in de taal van deze meetkunde vertalen; alleen worden de natuurwetten dan veel ingewikkelder. Zelfs punten buiten de bol kunnen, als het moet, beschreven worden: men vervangt ze gewoon door hun spiegelpunten binnen de bol.

De aardbol ziet er een beetje vreemd uit in deze lachspiegel: het wordt een bol van een paar meter middellijn, hier middenin de zaal, maar het gekke is, dat het grootste deel van het aardoppervlak door de stad Amsterdam wordt ingenomen: de rest van Europa en de andere werelddelen liggen microscopisch klein helemaal bovenaan. Maar dat hindert allemaal niet: men kan het zich met een beetje goede wil wel voorstellen.

Wat bewijst dit nu? Is dit een tegenwerping tegen mijn bewering, dat onze aanschouwingsruimte Euclidisch is en dat de axioma's van Euclides uit de aanschouwing zijn afgelezen? In genen dele. Want om dit model te kunnen begrijpen, om zich de niet-Euclidische „rechten” te kunnen voorstellen, moet men eerst de voorstelling van gewone rechten, cirkels en bollen al hebben. De conventionele niet-Euclidische rechten, die alleen maar volgens conventie recht genoemd worden, hebben eigenschappen, die uit de conventie worden afgeleid; maar de gewone rechten, die niet door een conventie maar door de aanschouwing worden aangewezen, hebben eigenschappen, waarover alleen de aanschouwing ons kan inlichten.

Een tweede tegenwerping: Kant noemt de ruimte „eine notwendige Vorstellung a priori”, hij leidt daaruit de „apodiktische Gewissheit aller geometrischen Grundsätze” af, en hieruit dan weer, dat deze grondstellingen niet aan de ervaring ontleend zijn. Bij Kant zijn dus de begrippen „a priori”, noodzakelijk geldig, en „apodiktisch zeker” ten nauwste met elkaar verbonden. Maar, zo redeneert men verder, de noodzakelijke geldigheid is al even onhoudbaar als de apodiktische zekerheid. Immers men kan zich zeer goed wezens voorstellen, die bv. in een gekromde ruimte leven en een daaraan aangepaste niet-Euclidische aanschouwing hebben. Dus vervalt Kants argumentatie en daarmee zijn conclusie.

Toegegeven: dit deel van Kants argumentatie is zwak. De apodiktische zekerheid moesten wij vroeger al opofferen. Maar Kants hoofdthese, dat de meetkundige stellingen synthetische Urteile a priori zijn, die op de aanschouwing berusten, wordt daar-



door niet aangetast. En wat de denkbeeldige wezens met niet-Euclidische aanschouwing betreft, deze wezens gaan ons hier niet aan. Wij onderzoeken hier, hoe *onze* voorstellingen en *onze* oordelen tot stand komen, niets anders. Kant zelf zegt: „Wir können von den Anschauungen anderer denkenden Wesen gar nicht urteilen, ob sie an die nämlichen Bedingungen gebunden sind, welche unsere Anschauungen einschränken und für uns allgemein gültig sind.”

U hoort het: wanneer Kant over noodzakelijke of algemene geldigheid spreekt, bedoelt hij alleen maar noodzakelijke geldigheid voor ons, met ons voorstellingsvermogen en ons bewustzijn. Het voorbeeld met die vreemde wezens raakt hem dus niet.

Ons aangeboren voorstellingsvermogen stelt ons in staat, uit indrukken ruimtelijke voorstellingen te vormen. Of de ervaring in het keurslijf der ruimtevoorstelling past of niet — en er zijn heel wat dingen, die er niet in passen, zoals regenbogen en melodieuze en radiogolven — het keurslijf zelf blijft hetzelfde, de vorm van zijn baleinen is onafhankelijk van wat er in geperst wordt.

En dit verklaart ook, hoe oordelen a priori over de ruimte mogelijk zijn: men oordeelt nl. niet over de dingen maar alleen over de ruimte zelf, over mogelijke constructies in die ruimte. Of om bij onze beeldspraak te blijven: men oordeelt alleen over het keurslijf. Over een keurslijf kan men oordelen uitspreken zonder van te voren te weten, welke jongedame het aan zal trekken.

Volgens Kant is ervaring van ruimtelijke dingen pas mogelijk, als we de voorstelling van de ruimte eerst hebben. „Die Vorstellung des Raumes (kann) nicht aus den Verhältnissen der äußeren Erscheinung erborgt sein, sondern die äußere Erfahrung ist selbst nur durch die gedachte Vorstellung allererst möglich.”

Ook deze these neem ik geheel voor mijn rekening. Laten wij eens nagaan, hoe voorstellingen van dingen in de ruimte ontstaan.

De indrukken, die wij van de zintuigen krijgen, zijn nog geen ruimtelijke voorstellingen. De gezichtszin bv. levert ons slechts vlakke beelden, de tast- en bewegingszin slechts druk- en bewegingsgewaarwordingen. Het komt wel voor, dat wij iets zien, maar nog niet weten, welke ruimtelijke voorstelling wij er mee moeten verbinden: is het een tent op de hei of een vlek op de ruit? Wij bewegen ons hoofd even en zien: het is maar een vlek. Wij kiezen dus uit alle mogelijke voorstellingen diegene, die onze gecombineerde gezichts- en bewegingsindrukken het best verklaart.

Ik zal nu trachten na te gaan, op welke veronderstellingen dit proces berust, welk weten a priori er aan ten grondslag ligt.

Het lastige is, dat onze ruimtelijke voorstellingen grotendeels

onbewust gevormd worden: ze treden pas kant en klaar in ons bewustzijn. We kunnen ons daarom van het vormingsproces moeilijk rekenschap geven.

Daarom zullen we nu eens een geval bekijken, waarin het gehele proces bewust gebeurt. Dit is het geval in de fotogrammetrie of kiekjesmeting, zoals ik het maar eens zal noemen.

Een kiekjesmeter gaat uit van twee foto's van een gebouw of landschap, van verschillende punten uit genomen. Hij plakt de twee kiekjes op een bepaalde wijze op een groot stuk papier, en hij begint lijnen te trekken en te meten, net zo lang totdat hij de maten van het voorwerp heeft.

Dit is geheel analoog aan wat er bij ons zelf onbewust gebeurt als we uit twee gezichtsbeelden — één met het linkeroog en één met het rechter — een ruimtelijke voorstelling afleiden. Maar bij onze kiekjesmeter gebeurt alles bewust en wel gemotiveerd: wij kunnen hem vragen, van welke onderstellingen hij is uitgegaan en welke stellingen hij heeft toegepast.

Wat zal hij antwoorden? Ten eerste heb ik ondersteld, zegt hij, dat de kiekjes centrale projecties van het ruimtelijke object zijn. Ten tweede, dat mijn tekenplank vlak is, mijn haak zuiver recht en zo voort. En verder heb ik de stellingen van de Euclidische meetkunde toegepast.

Heeft hij ook nagegaan of zijn haak wel zuiver recht was? O zeker, dat doet hij altijd vóór hij begint. Heeft hij ook getoetst of de Euclidische meetkunde wel geldt? Neen, dat heeft hij niet: die heeft hij zonder toetsing aangenomen. Zonder die meetkunde zou hij niet in staat zijn, zijn constructies uit te voeren. Ja, als hij wist dat de ruimte gekromd was en als hij de kromming kende, dan zou het ook nog wel gaan; maar hij had altijd maar aangenomen, dat de kromming nul was.

Mooi, deze man heeft ons eerlijk en volledig ingelicht. Maar wij, met onze twee ogen, wij zijn eigenlijk niet te vergelijken met deze meester-kiekjesmeter, die precies weet wat hij doet en waarom. Wij lijken meer op zijn gezel, die niet ontwikkeld genoeg is om de leer van de centrale projectie te begrijpen, maar die domweg een aantal handgrepen uitvoert, die hij van de meester geleerd heeft.

En toch blijft het waar dat al die handgrepen berusten op de Euclidische meetkunde. De meester heeft ze immers uit die meetkunde afgeleid. Bovendien kan de gezel, als hij intelligent genoeg is, zich afvragen, waarom die handgrepen juist zo moeten zijn; en als

het hem lukt, zich daarvan rekenschap te geven, dan heeft hij de leer van de centrale projectie opnieuw ontdekt.

Zo gaat het ons ook. De gezichtsbeelden, die onze ogen ons leveren, zijn te vergelijken met de twee kiekjes van de kiekjesmeter. Het principe van de reconstructie van de ware vorm van het object uit de gegeven beelden is hetzelfde: de ware vorm moet zo zijn, dat de gegeven beelden er centrale projecties van zijn. De reconstructie geschiedt onbewust: van nature is ons een recept ingeprent, hoe we uit onze indrukken ruimtelijke voorstellingen vormen. Na enige oefening leren we 't aldoor beter: we kraaien van plezier, dat we al die mooie dingen zien en sommige zelfs kunnen beetpakken. Van de onderstellingen, waarop dat alles berust: van de leer van de perspectief en de Euclidische meetkunde, geven we ons de eerste paar jaar nog geen rekenschap. De mensheid heeft er zich misschien wel een paar honderdduizend jaar nog geen rekenschap van gegeven. Maar eens op een dag begonnen wij perspectivische coulissen te schilderen, die de indruk van gebouwen met diepte moesten wekken, en wij begonnen er over na te denken, hoe de richtingen van het oog naar de punten van het object het gezichtsbeeld bepalen. Zo ontdekten de Grieken de leer van de perspectief. En toen zij deze zaken verder onderzochten en constructies en bewijzen vonden — ja, toen kwamen ze tot de Elementen van Euclides.

Ik vat samen.

Van de natuur hebben wij een vermogen meegekregen om uit gewaarwordingen ruimtelijke voorstellingen te vormen. Dit zelfde vermogen stelt ons in staat, in onze voorstellingsruimte lijnen te trekken, lengten te vergelijken en zo voort. Dit vermogen is niet aan de ervaring ontleend, integendeel, het maakt de ervaring van ruimtelijke dingen pas mogelijk.

In dit aanschouwingsvermogen zit potentieel de hele Euclidische meetkunde opgesloten. We kunnen deze meetkunde te voorschijn brengen door in gedachten lijnen te trekken en driehoeken te verplaatsen en door van de aldus aanschouwelijk verkregen grondstellingen uit, logisch verder te redeneren.

De Euclidische ruimte is een geïdealiseerde aanschouwingsruimte. De idealisering bestaat hierin, dat men aanneemt, dat de axioma's, die in de aanschouwingsruimte bij benadering vervuld zijn, exact gelden. Het moderne grondslagenonderzoek heeft uitgewezen, dat men dit doen kan, zonder ooit tot een contradictie te komen.

In deze geïdealiseerde ruimte en in een eveneens geïdealiseerde tijd, die tot in het oneindige gelijkmatig duurt, speelt de klassieke natuurkunde zich af. Daarnaast heeft men nog andere, hogere

ruimten uitgedacht: zuiver mathematische constructies, die niet aan de aanschouwing ontleend zijn. Deze hogere ruimten zijn in de moderne physica uiterst nuttig gebleken voor de beschrijving der natuurverschijnselen, maar ze treden niet in de plaats van de onontbeerlijke aanschouwingsruimte.

### ENKELE CITATEN.

Kant, Kritik der reinen Vernunft, Die transzendente Aesthetik, erster Abschnitt: Von dem Raume.

1) Der Raum ist kein empirischer Begriff, der von äußeren Erfahrungen abgezogen worden. Denn damit gewisse Empfindungen auf etwas außer mir bezogen werden (d.i. auf etwas in einem anderen Orte des Raumes, als darin ich mich befinde), insgleichen damit ich sie als außer einander, mithin nicht blos verschieden, sondern als in verschiedenen Orten vorstellen könne, dazu muß die Vorstellung des Raumes schon zugrunde liegen. Demnach kann die Vorstellung des Raumes nicht aus den Verhältnissen der äußeren Erscheinung durch Erfahrung erborgt sein, sondern diese äußere Erfahrung ist selbst nur durch gedachte Vorstellung allererst möglich.

2) Der Raum ist eine notwendige Vorstellung a priori, die allen äußeren Anschauungen zugrunde liegt. Man kann sich niemals eine Vorstellung davon machen, dass kein Raum sei, ob man sich gleich ganz wohl denken kann, dass keine Gegenstände darin angetroffen werden. Er wird also als die Bedingung der Möglichkeit der Erscheinungen und nicht als eine von ihnen abhängende Bestimmung angesehen, und ist eine Vorstellung a priori, die notwendiger Weise äußeren Erscheinungen zugrunde liegt.

3) Auf diese Notwendigkeit a priori gründet sich die apodiktische Gewissheit aller geometrischen Grundsätze . . .

4) Der Raum ist kein discursiver, oder, wie man sagt, allgemeiner Begriff von Verhältnissen der Dinge überhaupt, sondern reine Anschauung . . .

So werden auch alle geometrischen Grundsätze, z. E. dass in einem Triangel zwei Seiten zusammen grösser seien als die dritte, niemals aus allgemeinen Begriffen von Linie und Triangel, sondern aus der Anschauung und zwar a priori mit apodiktischer Gewissheit abgeleitet.

Der Raum ist nichts Anderes, als nur die Form aller Erscheinungen äußeren Sinne, d.i. die subjective Bedingung der Sinnlichkeit, unter der allein uns äußere Anschauung möglich ist.

Gauss (in een brief aan Bolyai):

Gerade in der Unmöglichkeit, zwischen  $\Sigma$  (zo noemde Bolyai de Euclidische meetkunde) und S (de hyperbolische meetkunde) a priori zu unterscheiden, liegt der klarste Beweis, daß Kant Unrecht hatte zu behaupten, der Raum sei nur Form unserer Anschauung.

Riemann, Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen. Rede, uitgesproken 1854, gepubliceerd 1867.

Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geometrie im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern Grunde der Massverhältnisse des Raumes. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom Raum gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, dass bei einer diskreten Mannigfaltigkeit das Prinzip der Massverhältnisse schon in dem Begriffen dieser Mannigfaltigkeit enthalten ist, bei einer stetigen aber anders woher hinzukommen muss. Es muss also entweder das dem Raume zugrunde liegende Wirkliche eine diskrete Mannigfaltigkeit bilden, oder der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in den darauf wirkenden bindenden Kräften gesucht werden.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erfahrung bewährten Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht und diese durch Tatsachen, die sich aus ihr nicht erklären lassen, getrieben, allmählich umarbeitet. Es führt dies hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, in das Gebiet der Physik.

Helmholtz, Wissenschaftliche Abhandlungen II, p. 640.

Kants Beweis für den Ursprung a priori der geometrischen Axiome, welcher darauf basiert ist, daß keine von denselben abweichenden Raumverhältnisse auch nur vorgestellt werden können, ist unzureichend, da die als Grund angeführte Behauptung tatsächlich unrichtig ist.

Vitruvius, De Architectura VII, voorwoord.

Agatharchus schilderde het eerst coulissen, toen de tragedies van Aeschylus opgevoerd werden, en hij liet er een verhandeling over na. Naar aanleiding hiervan schreven ook Democritus en Anaxagoras over hetzelfde onderwerp, namelijk hoe men lijnen in natuurlijke verhouding dient te laten beantwoorden aan de scherpe blik en de uitbreiding der stralen, na een bepaalde plaats als middelpunt te hebben vastgesteld, opdat over een onbepaalde zaak bepaalde beelden op de geschilderde coulissen de schijn zouden geven van gebouwen en opdat wat op de vlakke voorzijde afgebeeld was, deels terugwijkend, deels naar voren springend zou schijnen.

## DE ALGEMENE MOMENTENSTELLING

door

H. G. BRINKMAN.

Beth en van Loo bewijzen op bladz. 149 van hun *Mechanica*, 6e druk, (in het vervolg aan te duiden met BL) voor krachtenstelsels gelegen in een plat vlak, drie momentenstellingen. Hier zal aangetoond worden, dat deze stellingen bijzondere gevallen van een algemene momentenstelling zijn en dat de definitie in BL van het moment van een kracht ten opzichte van een punt als het moment van een koppel, in dit geval te verkiezen is boven andere definities.

*Definitie I.* Twee krachtenstelsels, die op een vast lichaam werken, heten gelijkwaardig, als ze, onafhankelijk van de bewegingstoestand van het lichaam, dezelfde uitwerking hebben, en dus onder alle omstandigheden voor elkaar in de plaats gesteld kunnen worden. (BL bladz. 132).

Volgens haar definitie is de gelijkwaardigheid een transitieve betrekking.

*Axioma A.* Twee krachten, die op eenzelfde punt van een stoffelijk lichaam werken zijn gelijkwaardig met hun vectorsom. (Dit sluit aan op BL axioma 5, bladz. 66).

*Definitie II.* Is een vast lichaam in rust ten opzichte van een vast assenstelsel en is de uitwerking van een stelsel krachten, dat op het lichaam werkt zo, dat de rusttoestand niet wordt verstoord, dan zegt men dat de krachten evenwicht vormen, of elkaar in evenwicht houden. (Ongeveer BL bladz. 132).

*Axioma B.* Twee krachten, op een vast lichaam werkend, houden elkaar in evenwicht dan en slechts dan als ze dezelfde drager hebben, tegengesteld gericht en even groot zijn.

Volgens dit axioma zullen de krachten van een koppel geen evenwicht vormen en zal een enkele kracht de rusttoestand verstoren, twee eigenschappen, die in de meeste leerboeken worden gebruikt zonder dat ze behoorlijk gefundeerd zijn.

Bekend verondersteld worden nu het samenstellen van twee krachten in een plat vlak en de volledige theorie van de koppels, in het vlak zowel als in de ruimte.

Bij het overbrengen van de krachten van een vlak of ruimtelijk

stelsel naar een punt maken we gebruik van de volgende middelen:

- m 1. het verschuiven van een kracht langs zijn drager,
- m 2. het vervangen van twee krachten, die in eenzelfde punt aangrijpen, door hun resultante,
- m 3. het vervangen van een kracht door twee krachten met hetzelfde aangrijpingspunt, die de eerste tot resultante hebben,
- m 4. het vervangen van twee evenwijdige krachten, die geen koppel vormen, door hun resultante,
- m 5. het vervangen van een kracht door twee daarmee evenwijdige krachten, die de eerste tot resultante hebben,
- m 6. het weglaten van twee krachten, die op eenzelfde punt werken, tegengesteld gericht en even groot zijn,
- m 7. het toevoegen van twee krachten als onder m 6.

Bij nadere beschouwing blijkt dat m 6 bevat is in m 2, m 7 in m 2, en m 4 en m 5 in m 1, m 2, m 3; m 6 en m 7. We kunnen dus volstaan met m 1, m 2 en m 3. Uit de axioma's A en B volgt:

*Stelling 1.* Door toepassing van m 1, m 2 en m 3 wordt een krachtenstelsel veranderd in een stelsel, dat gelijkwaardig is met het eerste.

Met  $R'_A$  wordt aangeduid de vectorsom, die optreedt bij overbrenging van de krachten van een stelsel  $S$  naar een punt  $A$  en met  $\mathfrak{M}_A$  de koppelvector van een resulterend koppel, dat daarbij hoort.

*Stelling 2.* Vormen de krachten van  $S$  evenwicht dan geldt:

$$R'_A = 0 \text{ en } \mathfrak{M}_A = 0.$$

*Bewijs.* Volgens stelling 1 is het stelsel  $S$  gelijkwaardig met het stelsel  $(R'_A, \mathfrak{M}_A)$ , dus de krachten van het laatste stelsel vormen evenwicht. Volgens axioma B kan niet gelden  $R'_A \neq 0$  en  $\mathfrak{M}_A = 0$ , evenmin  $R'_A = 0$  en  $\mathfrak{M}_A \neq 0$ . Stel  $R'_A \neq 0$  en  $\mathfrak{M}_A \neq 0$ . Een dergelijk stelsel is altijd terug te brengen tot een van twee krachten, waarvan de dragers niet samenvallen. De krachten van het laatste kunnen geen evenwicht vormen, wat in strijd is met het gegeven, dus ook dit geval is uitgesloten. De enige mogelijkheid, die overblijft is

$$R'_A = 0 \text{ en } \mathfrak{M}_A = 0.$$

Het omgekeerde van deze stelling is direct duidelijk. Dit geeft:

*Evenwichtsvoorwaarden.* De nodige en voldoende voorwaarden voor het evenwicht van een krachtenstelsel luiden:

$$R'_A = 0 \text{ en } \mathfrak{M}_A = 0.$$

*Stelling 3.* Zij  $(P'_A, \mathfrak{N}_A)$  een stelsel, dat gelijkwaardig is met

$(R'_A, \mathfrak{M}_A)$ , waarbij  $P'_A$  en  $R'_A$  vectorsommen voorstellen en  $\mathfrak{N}_A$  en  $\mathfrak{M}_A$  koppelvectoren van resulterende koppels, dan geldt:

$$P'_A = R'_A \text{ en } \mathfrak{N}_A = \mathfrak{M}_A.$$

*Bewijs.*  $R'_A$  en  $\mathfrak{M}_A$  vormen evenwicht met  $-R'_A$  en  $-\mathfrak{M}_A$ , dus vormen  $P'_A$  en  $\mathfrak{N}_A$  ook evenwicht met het laatste stelsel. Volgens stelling 2 en de eigenschappen van koppels geeft dit:

$$-R'_A + P'_A = 0 \text{ en } -\mathfrak{M}_A + \mathfrak{N}_A = 0$$

en hieruit volgt

$$P'_A = R'_A \text{ en } \mathfrak{N}_A = \mathfrak{M}_A.$$

*Gevolg van stelling 3.* Het resultaat bij overbrenging op verschillende manieren van de krachten van een stelsel S naar een punt A is hetzelfde. Hiermee is o.a. een bezwaar weggenomen, dat Dr J. Koksma aanvoert tegen BL in Euclides 1950/1951 Nr. 2.

*Stelling 4.* Een gegeven krachtenstelsel S kan uitsluitend door toepassing van m 1, m 2 en m 3 worden overgevoerd in een gegeven krachtenstelsel T, dat gelijkwaardig is met S.

*Bewijs.* Breng de krachten van S over naar een punt A. Hierdoor ontstaat het stelsel  $(R'_A, \mathfrak{M}_A)$ , dat gelijkwaardig is met S.

Breng de krachten van T over naar A. Hierdoor ontstaat een stelsel  $(P'_A, \mathfrak{N}_A)$ , dat gelijkwaardig is met T. Omdat S en T gelijkwaardig zijn, zullen de nieuwe stelsels het ook zijn. Volgens stelling 3 geldt dan:

$$P'_A = R'_A \text{ en } \mathfrak{N}_A = \mathfrak{M}_A.$$

We mogen nu veronderstellen dat de nieuwe stelsels bestaan uit dezelfde krachten. Uitsluitend door gebruik te maken van m 1, m 2 en m 3 kan S via  $(R'_A, \mathfrak{M}_A) = (P'_A, \mathfrak{N}_A)$  worden overgevoerd in T, immers de omkering van de vervanging, die door een m 1 ontstaat, is weer een m 1 en m 2 en m 3 zijn elkaars omgekeerden.

*Definitie III.* Men verstaat onder het moment van een kracht ten opzichte van een punt het moment van het koppel, dat optreedt, als men de kracht naar dat punt overbrengt. (BL bladz. 148).

*Stelling 5.* Door toepassing van m 1, m 2 en m 3 wordt de som van de momenten der krachten van een stelsel ten opzichte van een punt niet veranderd.

*Bewijs.* Voor m 1 is dit onmiddellijk duidelijk. Voor m 2 en m 3 betekent het, dat bewezen moet worden, dat de som der momenten van twee in eenzelfde punt aangrijpende krachten ten opzichte van een punt, gelijk is aan het moment van de resultante ten



opzichte van dat punt, zowel in het vlak als in de ruimte. Nu springt duidelijk in het oog het voordeel van definitie III. Immers het bewijs volgt direct uit de eigenschappen van koppels, waarbij het er niet toe doet of we 2 of 3 dimensionaal werken. Combinatie van de stellingen 4 en 5 geeft:

*Algemene momentenstelling.* Bij gelijkwaardige krachtenstelsels zijn de sommen van de momenten der krachten ten opzichte van een willekeurig punt gelijk.

De stellingen I, II en III uit BL bladz. 149 zijn bijzondere gevallen van deze..

De gehele of gedeeltelijke omkering van de algemene momentenstelling geeft interessant oefenmateriaal..

Groningen, 27 November 1950.

---

## VERZOEK.

De Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen verzoekt het onderwijzend personeel van alle dagscholen voor lager onderwijs, uitgebreid lager onderwijs, nijverheidsonderwijs en voorbereidend hoger- en middelbaar onderwijs, voor zover zij dit tot dusver niet hebben gedaan, alsnog hun medewerking te verlenen aan de U.N.E.S.C.O.-studie van leerboeken, bedoeld in de omzendbrief van 11 Juli 1950, nr. 4020-I, bureau Boekzaken.

Het werk in deze, reeds door honderden leden van het onderwijzend personeel verricht, zou waardeloos zijn, indien niet door alle scholen de gevraagde medewerking wordt verleend.

Scholen, die om bepaalde redenen niet aan de studie zelf wenschen deel te nemen, kunnen volstaan met het invullen van de titels van de op de school in gebruik zijnde boeken op de desbetreffende formulieren model UL, welke kunnen worden aangevraagd en ingezonden bij het bureau Boekzaken van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, Prinsessegracht 15, te 's-Gravenhage.

---

*Verschenen:*

**WIJDENES en VAN DE VLIET**

## **Algebra voor H.B.S. A**

Zesde druk

**INHOUD:**

- I. Herhaling van de algebra
- II. Financiële rekenkunde
- III. Diagrammen
- IV. Algemene Herhaling
- V. Vraagstukken van het Staatsexamen H.B.S. A

f 2.90

---

**P. Noordhoff Groningen-Djakarta**

*Verkrijgbaar door de boekhandel*

*Verschenen:*

**P. WIJDENES**

## **Logarithmen- en Sinustafel Tafel H**

Zesde druk

- I. Gewone Logarithmen
- II. Sinustafel
- III. Rentetafels
- IV. Machten, wortels en omgekeerden

f 0.95

---

**P. Noordhoff Groningen-Djakarta**

*Verkrijgbaar door de boekhandel*

★

Instelling voor Schriftelijk  
Onderwijs zoekt voor haar  
opleidingen voor de akten

## **KI en KV**

contact met ervaren opleiders.

★

Brieven met volledige  
inlichtingen onder nr. 5101  
Uitgever dezes.

★

*Deze maand verschijnt:*

**Dr. H. STREEFKERK**

## **Nieuw Meetkunde Boek**

deel I

Een methode, welke in menig  
opzicht zeer verschilt met  
bestaande methoden voor het  
M.O.

Prospectus wordt op aanvraag  
gaarne toegezonden.

deel I f 3.75

deel II ter perse

deel III in bewerking

---

**P. Noordhoff Groningen-Djakarta**

*Verkrijgbaar door de boekhandel*

# INTRODUCTION TO LINEAR ALGEBRA AND THE THEORY OF MATRICES

by

HANS SCHWERDTFEGER

## INHOUD

### I. GEOMETRICAL FOUNDATIONS — SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

The Number Space; Linear Dependence of Points in Number Space; The Replacement Procedure. The Theorem of GRASSMANN and STEINITZ; Linear Equations — Rank of a Matrix; A Matrix composed of Rows — Transposition; Geometrical Interpretation — Parallel Manifolds; Determinants; Determinants and the Solution of Linear Systems; Determinants and the Rank of Matrices.

### II. LINEAR HOMOGENEOUS TRANSFORMATIONS — RATIONAL OPERATIONS ON MATRICES

Substitutions and Transformations; Linear Homogeneous Transformations and their Matrices; The Formal Laws of Matrix Calculus; Regular and Singular Matrices; Fields of Matrices — Complex Numbers.

### III. EQUIVALENCE. CONGRUENCE — BILINEAR AND QUADRATIC FORMS

Elementary Transformations of a Matrix; Equivalence; Bilinear and Quadratic Forms — Congruence; Symmetric Matrices with Complex Elements; Real Symmetric Matrices. Law of Inertia; Hermitean Matrices and Hermitean Forms; Skew-symmetric Matrices.

### IV. GROUPS OF MATRICES. SIMILARITY

The Notion of Group in Linear Algebra; Similarity. The Characteristic Polynomial; Similarity of Groups. Congruence with respect to a Group. Group Representations; The Orthogonal Group. Reflections; The Unitary Group. — Normal Matrices; The Eigen Value Problem of a Normal Matrix; Orthogonal and Skew-symmetric Matrices; The Symplectic Groups.

### APPENDIX. PROJECTIVE THEORY OF NULL SYSTEMS

The  $(n - 1)$ -dimensional Projective Space and its Linear Subspaces; Collineations and Correlations; Null Systems; The Linear Complex.

*fl 15,—, gebonden in kunstleer fl 17,50  
280 pagina's*

---

P. NOORDHOFF — GRONINGEN — HOLLAND

Verkrijgbaar bij de boekhandel