

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - Prof. Dr. E. W. BETH, AMSTERDAM
Dr. R. BALLIEU, LEUVEN - Dr. G. BOSTEELS, HASSELT
Prof. Dr. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - Dr. L. N. H. BUNT, UTRECHT
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
Dr. R. MINNE, LUIK - Prof. Dr. J. POPKEN, UTRECHT
Dr. O. VAN DE PUTTE, RONSE - Prof. Dr. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
Dr. H. STEFFENS, MECHELEN - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

26e JAARGANG 1950/51

Nr 2

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8.00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van de **Wimecos** storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1950 t/m 31 Augustus 1951 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) ten bedrage van f 5,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskunde-leraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107^{III}, Amsterdam, aan wie tevens **alle correspondentie** gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, van Lennepaan 16. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

I N H O U D

	Blz.
Rapport van de commissie ter bestudering van een reorganisatie van het wiskundeonderwijs in de A-afdelingen van de Gymnasia en de Gymnasiale afdelingen der Lycea	49
Rapport van de commissie ter bestudering van het onderwijs in infinitesimaalrekening in de B-afdelingen der Gymnasia en der Gymnasiale afdelingen der Lycea	55
S. J. GEURSEN, Evenredigheden en de schoolvakken, waarin ze toepassing vinden.	61
Dr. J. KOKSMA, Het samenstellen van een vlak krachtenstelsel	69
Korrels CI, CII, CIII.	77
Examens in de Wiskunde	81
Dr. G. WIELENGA, Enige aspecten van het onderwijs in de wiskunde en de natuurwetenschappelijke vakken op de Amerikaanse High School	82
Boekbespreking.	96
	+ pag. 3 omslag

Bericht van de Redactie.

Het verslag van de Zomerconferentie te Baarn van het Departement van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen zal in de volgende aflevering verschijnen.

RAPPORT VAN DE COMMISSIE TER BESTUDERING VAN EEN REORGANISATIE VAN HET WISKUNDEONDERWIJS IN DE A-AFDELINGEN VAN DE GYMNASIA EN DE GYMNASIALE AFDELINGEN DER LYCEA.

INLEIDING

Aan het Bestuur van de Groep L.I.W.E.N.A.G.E.L. van het Genootschap van Leraren aan Nederlandse Gymnasia en Lycea is — bij monde van de Voorzitter van dit Genootschap, de Heer Dr. H. D. Veenstra — het verzoek gericht om een onderzoek in te stellen naar de wenselijkheid en de mogelijkheid van een herziening van het Wiskundeonderwijs in de A-afdelingen der Gymnasia en Lycea en — indien mogelijk — richtlijnen op te stellen voor een verbeterd Wiskundeprogramma van die afdeling.

Het Bestuur van L.I.W.E.N.A.G.E.L. heeft daartoe een Commissie ingesteld, die tot opdracht had de volgende vragen te beantwoorden:

De Opdracht.

1. Aan welke *principiële eisen* moet het *wiskundeonderwijs* in de A-afdeling voldoen?

2. Moet het huidige wiskundeonderwijs in de A-afdeling geacht worden aan de bij het antwoord op vraag 1. geformuleerde eisen te voldoen?

Indien de tweede vraag ontkennend wordt beantwoord:

3. Aan welke oorzaken schrijft de commissie het falen van het huidige wiskundeonderwijs in de A-afdeling toe?

4. Is het in beginsel mogelijk om — rekening houdend met de voor het wiskundeonderwijs beschikbare tijd — een *wiskundeprogramma* voor de A-afdeling op te stellen, dat wel aan bovengenoemde eisen voldoet? Zo ja, aan welke *practische eisen* moet dan dit wiskundeprogramma voldoen?

5. Welk wiskundeprogramma voor de A-afdeling zal — naar het oordeel der Commissie — het beste aan de bij de beantwoording van vraag 4 geformuleerde praktische eisen voldoen?

De Commissie.

Het Bestuur van de L.I.W.E.N.A.G.E.L. heeft gemeend juist te handelen door ook aan de Vereniging W.I.M.E.C.O.S. en aan de werkgroep W.V.O. te verzoeken elk een lid in deze Commissie te benoemen. Beide organisaties hebben aan dit verzoek voldaan: als vertegenwoordiger van W.I.M.C.O.S. treedt op de Heer Ir. J. J. Tekelenburg, als vertegenwoordiger van W.V.O. de Heer Dr. L. N. H. Bunt.

Het Bestuur achtte het tevens gewenst, dat een classicus deel uitmaakte van de Commissie: als zodanig vond het Dr. M. J. Pattist bereid aan het werk der Commissie deel te nemen.

Leden der Commissie zijn:

Dr. L. N. H. Bunt	Conservator van het Paedagogisch Instituut a/d R.U. te Utrecht; docent in de didactiek der wiskunde aan de R.U. te Utrecht en aan de R.U. te Groningen.
Dr. A. T. M. Kramer	Leraar a/h R.K. Lyceum v. Meisjes te Den Haag.
Dr. R. L. Krans	Leraar a/h Chr. Lyceum te Arnhem, docent in de didactiek der Natuurkunde aan de R.U. te Utrecht.
Dr. M. J. Pattist	Rector v/h Gymnasium Erasmianum te Rotterdam.
Dr. M. van Rees	Leraar a/h Gymnasium Erasmianum te Rotterdam.
Ir. J. J. Tekelenburg	Rector v/h Charloise Lyceum te Rotterdam.
Dr. P. G. J. Vredenduin	Conrector v/h Sted. Gymnasium te Arnhem.
Dr. G. Wielenga	Leraar a/h Geref. Gymnasium te Amsterdam; Conservator bij de Paedagogiek a/d V.U. te Amsterdam.
J. Willemse	Leraar a/h Gymnasium Erasmianum te Rotterdam, Voorzitter.

HET RAPPORT DER COMMISSIE

Beantwoording van de eerste vraag.

Volgens het oordeel van de Commissie moet het wiskundeonderwijs in de A-afdeling voldoen aan de volgende *principiële eisen*:

1. Het wiskundeonderwijs moet de leerlingen inleiden in het wezen der wiskundige denkwijze.
2. Het wiskundeonderwijs moet de leerlingen zo ver brengen, dat zij in staat zijn een eenvoudig wiskundig betoog te volgen, opdat zij in hun latere leven niet geheel vreemd zullen staan tegenover cultuuruitingen, die door de wiskunde beheerst worden.
3. Met het oog op verdere studie moet het wiskundeonderwijs trachten te bereiken, dat de leerlingen bekend zijn met zekere wiskundige methoden en enige vaardigheid bezitten in de toepassing daarvan.

Beantwoording van de tweede vraag.

De Commissie is van oordeel, dat het huidige wiskundeonderwijs in de A-afdeling niet voldoet aan de bovengenoemde eisen.

Beantwoording van de derde vraag.

De commissie meent de volgende oorzaken voor het falen van het wiskundeonderwijs in de A-afdeling te moeten aanwijzen:

1. De geestelijke instelling van de A-leerlingen, die hen afkerig doet zijn van een incidenteel wiskundeonderwijs, dat geheel buiten de sfeer van hun eigenlijke zuiver literaire opleiding valt.
2. Het thans geldende wiskundeprogramma bevat verscheidene onderwerpen, waarvan noch de geestelijke waarde, noch het voor de

leerlingen praktische belang duidelijk is; terwijl andere onderwerpen, die wel voor de leerlingen van betekenis zouden zijn aan dit programma ontbreken.

3. Het gebrek aan belangstelling bij de leerlingen, dat samenhangt met beide eerstgenoemde oorzaken.

Beantwoording van de vierde vraag.

De Commissie meent, dat het inderdaad mogelijk moet zijn een wiskundeprogramma te ontwerpen, dat meer voldoet aan de bij het antwoord op de eerste vraag geformuleerde eisen.

Volgens de Commissie zou reeds veel gewonnen zijn, indien meer belangstelling bij de leerlingen zou kunnen worden gewekt. Zij denkt dit te kunnen bereiken door het *wiskundeprogramma* te wijzigen.

Het nieuwe wiskundeprogramma zou dan moeten voldoen aan de volgende *practische eisen*.

1. De keuze der onderwerpen uit de wiskunde moet zodanig zijn, dat het wiskundeprogramma als geheel voldoet aan de bij de beantwoording van de eerste vraag gestelde principiële eisen.

Indien de leerlingen wiskundeonderwijs krijgen, dat werkelijk geestelijke en praktische waarde heeft mag — naar de Commissie meent — een stijging van de belangstelling der leerlingen verwacht worden.

2. De docent moet meer vrijheid krijgen in de keuze der te behandelen onderwerpen. De docent zal daardoor zijn onderwijs meer kunnen aanpassen aan de geestelijke en materiële behoeften van zijn leerlingen. Ook dit zal — naar het oordeel der Commissie — de belangstelling der leerlingen stimuleren.

Aan deze tweede eis moet de Commissie echter als noodzakelijke voorwaarde een derde verbinden:

3. Het wiskundeprogramma zal aan bepaalde minimeisen moeten voldoen, die dan tevens zullen gelden als exameneisen.

De Commissie stelt deze eis:

- a) om een ongewenste daling van het niveau van het wiskundeonderwijs te voorkomen
- b) om bij het eindexamen een basis van samenwerking tussen docent en geëngageerde te waarborgen.

Beantwoording van de vijfde vraag.

I. Structuur van het Wiskundeprogramma voor de A-afdeling.

Een aantal onderwerpen uit de wiskunde wordt gerangschikt in drie groepen A, B en C.

Groep A. bevat een beperkt aantal onderwerpen uit de Algebra. Deze onderwerpen behoren alle tot de leer- en examenstof.

Groep B bevat twee onderwerpen van meetkundige aard. Van deze twee onderwerpen wordt door de docent één gekozen, dat dan tot de leer- en examenstof behoort.

Groep C bevat een groot aantal onderwerpen. Uit deze onderwerpen wordt door de docent een keuze gemaakt. De gekozen onderwerpen behoren dan tot de leer- en examenstof. Het aantal onderwerpen, dat uit groep C moet worden gekozen is afhankelijk van de keuze uit de onderwerpen van groep B.

De docent stelt de Rector in kennis van de door hem gemaakte keuze der onderwerpen uit groep B en groep C.

2 De Groepen.

Groep A.

1. *Vergelijkingen* van de tweede graad met een onbekende.
2. *Het functiebegrip*, ontwikkeld aan de hand van de functies $y = mx + q$ en $y = ax^2 + bx + c$.
Grafische toelichting van deze functies.
3. *Logarithmen* en de eenvoudige eigenschappen daarvan en de daarvoor noodzakelijke kennis der oneigenlijke machten.
Elementaire berekeningen met de logarithmentafel.
4. *Reeksen*: de rekenkundige reeks en de meetkundige reeks met eindig aantal termen.

Groep B.

1. *Planimetrie*: de in de vier laagste klassen behandelde stof herhaald en verdiept;
benevens:
Stereometrie: enkele hoofdstukken naar keuze van de docent.
2. *Stereometrie*.

Groep C.

1. *Beginselen der Differentiaalrekening*.
Limietbegrip. Begrip Differentiaalquotient. Het differentieren van eenvoudige Algebraïsche functies.
Toepassingen o.a. op het bepalen van extreme waarden.
2. *Beginselen der Integraalrekening*. (mits ook C_1 gekozen is)
De bepaalde integraal als limiet van een som.
Het integreren van:

$$\int ax^m dx \quad (m \neq -1)$$

en de sommen en verschillen van dergelijke functies.

Enkele toepassingen.

3. Het *getalbegrip*; inclusief imaginair en complexen met afbeelding in het complexe vlak.
4. De beginselen der *statistiek*.
5. Hoofdstukken uit de *geschiedenis* der wiskunde.
6. Beginselen der *Analytische Meetkunde*.
7. Samengestelde Interestrekening.
8. Irrationale vergelijkingen — Hogeregraadsvergelijkingen die met behulp van vierkantsvergelijkingen kunnen worden opgelost — Ongelijkheden — Reststelling.

3 Het Eindexamen.

- a. De examenstof van afdeling VI A van het eindexamen wordt gevormd door de onderwerpen van groep A.
- b. De examenstof van afdeling VI B van het eindexamen wordt gevormd door:
 1. Een der onderwerpen B_1 of B_2 benevens:
 2. Indien B_1 gekozen is, twee der onderwerpen uit groep C.
Indien B_2 gekozen is, een der onderwerpen uit groep C.

4 Enige opmerkingen der Commissie.

- a. Ofschoon het de Commissie reeds spoedig duidelijk was, hoe de structuur van het wiskunde programma van de A afdeling ongeveer moest zijn, kostte het haar veel arbeid om een gedetailleerd leer- en examenplan op te stellen, dat voldoet aan de in de vierde vraag gestelde eisen.

De Commissie heeft getracht de voor- en nadelen, die nu eenmaal aan elke regeling inhaerent zijn, zorgvuldig tegen elkaar af te wegen en is na veel vergaderingen en ampele discussie ten slotte gekomen tot het bovenstaande leer- en examenprogramma.

- b. Bij een aantal onderwerpen, waarvan reeds een bepaalde didactiek bestaat, heeft de Commissie enige korte aanwijzingen gegeven. Zij is er zich van bewust, dat de bestaande didactiek in bepaalde gevallen zal moeten worden gewijzigd en aangepast aan de speciale eisen, die het onderwijs in de A-afdeling stelt.

Bij andere onderwerpen heeft de Commissie zich onthouden van enige omschrijving. Voor deze onderwerpen zal een nieuwe didactiek moeten worden ontwikkeld. De Commissie meende daarom in deze gevallen geen richtlijnen te moeten aangeven, maar te kunnen vertrouwen op de toewijding van de docenten.

- c. Ten aanzien van de onderwerpen uit groep A wil de Commissie het volgende opmerken:

ad A₁. Onder een behandeling van de vergelijking van de tweede graad met een onbekende verstaat de Commissie een *korte* behandeling van oplosmethode en van worteileigenschappen van de vierkantsvergelijking. De Commissie wenst hierbij uit te sluiten de irrationale vergelijkingen en de hogeregraadsvergelijkingen die met behulp van een vierkantsvergelijking kunnen worden opgelost.

De Commissie beveelt aan het behandelen van enkele eenvoudige ingeklede vraagstukken.

ad A₂. De grafische toelichting mag niet uitgroeien tot een behandeling van onderwerpen, die in de Analytische Meetkunde thuis horen (zoals: translaties, raaklijnproblemen, enz.).

- d. Ten aanzien van de onderwerpen uit groep B heeft de Commissie overwogen, dat de stereometrie aan vele leerlingen grote moeilijkheden biedt. Anderzijds is de Commissie van oordeel, dat het mogelijk is om een keuze te doen uit hoofdstukken der stereometrie, waardoor een beperkt Stereometrieonderwijs kan worden gegeven, dat de leerlingen boeit en hen tevens profijt kan doen trekken van de grote vormende waarde, die dit vak bezit.

De Commissie wil het daarom aan het oordeel van de docent overlaten of hij voor zijn leerlingen een uitgebreid Stereometrieonderwijs (B_2) gewenst acht, of dat hij de voorkeur geeft aan een meer planimetrisch gericht meetkundeonderwijs, aangevuld met enkele hoofdstukken uit de Stereometrie (B_1).

Tegen het oorspronkelijke plan der Commissie om een regeling te treffen waarbij het mogelijk was, dat A-leerlingen in het geheel geen Stereometrieonderwijs kregen, bleken — ook bij vele classici — overwegende bezwaren te bestaan.

De Commissie merkt nog op:

ad B₁. Met verdieping der Planimetrie bedoelt de Commissie een nadere beschouwing van het logische element in de planimetrie (Grondslagen der Planimetrie. Bewijsmethoden).

ad B₂. Het Stereometrieonderwijs worde beperkt, zoals aangegeven in het Rapport van de Commissie ter bestudering van het onderwijs in Infinitesimaal-

rekening in de B-afdelingen der Gymnasia en der
Gymnasiale Afdelingen der Lycea.

- e. In verband met groep C wenst de Commissie één opmerking te maken.

Er kunnen zich omstandigheden voordoen, waarbij het experimenteren met nieuwe onderwerpen onoverkomelijke moeilijkheden oplevert. In verband hiermede heeft de Commissie C₈ samengesteld uit een beperkt aantal kleine onderwerpen, die zij overigens liever geheel van het schoolprogramma zag verdwijnen.

RAPPORT VAN DE COMMISSIE TER BESTUDERING VAN HET ONDERWIJS IN INFINITESIMAALREKENING IN DE B-AFDELINGEN DER GYMNASIA EN DER GYMNASIALE AFDELINGEN DER LYCEA.

INLEIDING

Hoewel sinds lang Infinitesimaalrekening tot het voorgeschreven leerprogramma van het Gymnasium B behoort, hebben verschillende oorzaken er toe medegewerkt dat thans nog slechts op weinig Gymnasia en Lycea dit onderwerp gedoceerd wordt.

In de vergadering van L.I.W.E.N.A.G.E.L. — gehouden op 2 September 1949 op Drakenburg — was men van oordeel, dat de daadwerkelijke invoering van het onderwijs in Infinitesimaalrekening in de genoemde B-Afdelingen dringend gewenst is. Voor de motivering van deze wenselijkheid moge verwezen worden naar de notulen van genoemde vergadering, gepubliceerd in het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs van 5 October 1949 en in Euclides 25-ste jaargang No. 2.

De vergadering heeft aan het Bestuur opdracht gegeven:

- 1e: een Commissie in te stellen, die verschillende kwesties, verband houdende met het onderwijs in Infinitesimaalrekening, nader zou onderzoeken en van de resultaten van dat onderzoek verslag zou uitbrengen aan het Bestuur.
- 2e: Dit verslag te publiceren in het Weekblad en in Euclides.

Op de eerstvolgende L.I.W.E.N.A.G.E.L. vergadering zal dan het door de Commissie uitgebrachte rapport in bespreking worden genomen.

De Commissie.

In verband met de zozeer gewenste samenwerking tussen de verschillende organisaties, die zich met de didactiek der exacte vakken bezig houden, heeft het Bestuur van L.I.W.E.N.A.G.E.L. gemeend juist te handelen door ook aan de Verenigingen V.E.L.I.N.E.S. en W.I.M.E.C.O.S. alsmede aan de werkgroep W.V.O. te verzoeken elk een lid in deze Commissie te willen benoemen. Deze organisaties hebben aan dit verzoek voldaan: als vertegenwoordiger van V.E.L.I.N.E.S. treedt op de Heer Dr. R. L. Krans, als vertegenwoordiger van W.I.M.E.C.O.S. de Heer Ir. J. J. Tekelenburg, terwijl de Heer Dr. L. N. H. Bunt de Werkgroep W.V.O. vertegenwoordigt.

Leden der Commissie zijn:

Dr. L. N. H. Bunt,	Docent in de didactiek der Wiskunde a/d R.U. te Utrecht en aan de R.U. te Groningen, Conservator v/h Paedagogisch Instituut aan de R.U. te Utrecht.
Dr. A. T. M. Krämer,	lerares aan het R.K. Lyceum voor Meisjes te den Haag.
Dr. R. L. Krans,	leraar aan het Chr. Lyceum te Arnhem; docent in de didactiek der Natuurkunde aan de R.U. te Utrecht.
N. J. Medemblik,	leraar aan het Maerlant Luceum te den Haag.
Dr. M. van Rees,	leraar aan het Gymnasium Erasmianum te Rotterdam.
Ir. J. J. Tekelenburg,	Rector v/h Charloise Lyceum te Rotterdam.
Dr. P. G. J. Vredenduin,	Conrector van het Stedelijk Gymnasium te Arnhem.
Dr. G. Wielenga,	leraar a/h Gereformeerd Gymnasium te Amsterdam. Conservator bij de Paedagogiek der V.U. te Amsterdam.
J. Willemse,	leraar aan het Gymnasium Erasmianum te Rotterdam, Voorzitter.

DE OPDRACHT AAN DE COMMISSIE

Het Bestuur van L.I.W.E.N.A.G.E.L. heeft aan de Commissie opdracht gegeven de volgende vragen te beantwoorden:

1. Is toevoeging van Infinitesimaalrekening aan de verplichte examenstof mogelijk?
2. Welke onderdelen van de Infinitesimaalrekening moeten tot de verplichte leerstof behoren?
3. Acht de Commissie het in principe mogelijk om thans gedoceerde en geëxamineerde onderwerpen der wiskunde uit leer- en examenstof te schrappen?
Indien vraag 3 bevestigend wordt beantwoord:
4. Welke der thans geldende examenonderwerpen der wiskunde kunnen naar het oordeel der Commissie geschrapt worden uit het eindexamen en vervangen worden door Infinitesimaalrekening?
5. Bij welk vak moet het onderwijs in Infinitesimaalrekening worden ingelast?
6. Op welke wijze moet Infinitesimaalrekening geëxamineerd worden?
7. Wanneer moet Infinitesimaalrekening voor het eerst op het eindexamen gevraagd worden?

HET RAPPORT DER COMMISSIE.

Beantwoording van de eerste vraag.

In verband met het — naar het oordeel der Commissie geringe —

aantal wiskunde uren in de B-Afdeling enerzijds en de tijd die men aan het onderwijs in Infinitesimaalrekening zal moeten besteden om dat onderwijs vruchtdragend te doen zijn anderzijds, meent de Commissie, dat noodzakelijke voorwaarde voor invoering van Infinitesimaalrekening is een beperking van de thans vigerende examenstof.

Indien een dergelijke beperking mogelijk zou zijn, acht de Commissie invoering van Infinitesimaalrekening zeker mogelijk, daar een elementair onderwijs in Infinitesimaalrekening niet boven het bevattingsvermogen van leerlingen van de hoogste klassen van onze Middelbare scholen ligt.

Beantwoording van de tweede vraag.

Volgens het oordeel der Commissie behoren de volgende onderdelen der Infinitesimaalrekening gedoceerd en geëxamineerd te worden:

A. *Differentiaalrekening.*

- 1e Limietbegrip
- 2e Begrip Differentiaalquotient.
- 3e Het differentieren van *eenvoudige* functies.
Ook van samengestelde functies met maximaal één substitutie (twee differentiaties).
- 4e Gebruik van de tweede afgeleide functie in verband met extreme waarden.

B. *Integraalrekening.*

- 1e De integraal als limiet van een som:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

- 2e Het integreren van eenvoudige functies zoals:

$$\int ax^m dx [m \neq -1]$$

$$\int p \sin(ax + b) dx$$

$$\int p \cos(ax + b) dx$$

en de sommen en verschillen van dergelijke functies.

Beantwoording van de derde vraag.

De commissie acht het inderdaad mogelijk om thans gedoceerde en geëxamineerde onderwerpen der wiskunde uit leer- en examenstof te schrappen en wel op de volgende gronden:

- 1e Tot de thans behandelde en geëxamineerde onderwerpen behoren er verschillende, die in vormende waarde en practisch nut achterstaan bij de Infinitesimaalrekening. Het vervangen van deze onderwerpen door de sub 2 geschetste beginselen der Infinitesimaalrekening zou naar het oordeel der Commissie een grote verbetering van het wiskundeonderwijs in de B-afdeling betekenen.
- 2e Vele nieuwe stellingen en benamingen — ontsproten aan het brein van schrijvers van nieuwe leerboeken deden hun intrede bij het onderwijs; veel spitsvondige nieuwigheden werden toegevoegd door met elkaar in originaliteit en scherpzinnigheid wedijverende auteurs van examenopgaven.
De Commissie meent goed te doen met voor te stellen deze in de loop van dertig jaren ontstane toevoegingen — die een onnodige verzwaring der examenstof en belasting van de leerlingen betekenen — te schrappen.

Beantwoording van de vierde vraag.

Volgens het oordeel der Commissie verdient het aanbeveling de volgende — tot de thans gebruikelijke examenstof behorende — onderwerpen te schrappen en te vervangen door Infinitesimaalrekening.

A. *Van de Algebra:*

- 1e De uitvoerige behandeling der *grafieken* in haar thans gebruikelijke omvang.
Hiervan dient nog slechts datgene behandeld te worden, wat kan dienen als toelichting van de bij het algebra-onderwijs voorkomende functies.
Veel van wat thans over dit onderwerp behandeld wordt komt toch weer ter sprake bij de Analytische Meetkunde.
- 2e *De gebroken functies.*

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}; \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}; \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}.$$
- 3e *De reststelling.*
- 4e Het *Interpoleren* bij reeksen.
- 5e De samengestelde Interestrekening.

B. *Van de Meetkunde.*

- 1e *Planimetrie* als apart onderwerp van het eindexamen.
- 2e *Drievlakshoek.* Van dit onderwerp dient slechts datgene behandeld te worden, wat van belang is voor de elementaire meetkunde van de bol. Geen constructies.

- 3e *Netwerk van het Prisma.*
- 4e *De Veelvlakshoek.*
- 5e *De gevallen van gelijkvormigheid en congruentie bij drievlakshoeken en viervlakken.*
- 6e *Inhoudsformules voor afgeknotten pyramide, afgeknott prisma en afgeknott kegel.*
- 7e *Ontwikkeling van cylinder- en kegelvlakken.*
- 8e *Algemeen cylinder- en kegelvlak.*
- 9e *De gebruikelijke afleidingen voor oppervlak en inhoud van de boldelen.*
- 10e *De stelling van Euler; het regelmatige twaalfvlak; het regelmatige twintigvlak.*

C. *Van de Gonio- en Trigonometrie.*

I. *De Goniometrie* worde in zijn huidige vorm grotendeels gehandhaafd, met inachtneming van het volgende:

1. *Goniometrische vergelijkingen.*

Hiervan dienen alleen behandeld te worden de eenvoudige met een onbekende van het type:

$$a \cos x + b \sin x = c$$

en vergelijkingen, die door een eenvoudige substitutie tot dit type zijn te herleiden.

2. *Functionies.*

Hiervan dienen alleen behandeld te worden:

$$y = A \sin (ax + b)$$

$$y = A \cos (ax + b)$$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$y = A \sin x + B \cos x$$

Extreme waarden van deze functies behoren met behulp van differentiaalrekening bepaald te worden.

3. *De secans en de cosecans.*

Deze goniometrische functies behoren alleen genoemd te worden, doch niet in vraagstukken voor te komen.

II. *De Trigonometrie.*

Na ampele bespreking en overweging is de Commissie tot de conclusie gekomen, dat dit vak grotendeels behoort te vervallen.

Alleen de berekening van de elementen van een driehoek (dus van zijden en/of hoeken) wanneer drie elementen gegeven zijn blijve behouden (bedoeld worden dus de klassieke vier gevallen).

Beantwoording van de vijfde vraag.

De Commissie is van oordeel, dat de Infinitesimaalrekening als onderdeel van de Algebra moet worden gedoceerd en geëxamineerd. Ook bij de andere wiskunde vakken zal de Infinitesimaalrekening zoveel mogelijk moeten worden toegepast.

In verband met de toepassing zou de Commissie willen aandringen op een vroegtijdige behandeling der Infinitesimaalrekening: liefst in het begin der vijfde klasse.

De Commissie meent tevens, dat het aanbeveling verdient, dat het onderwijs in Infinitesimaalrekening wordt ondersteund door de Natuurkundedocent.

Deze kan bijvoorbeeld aan de hand van het snelheidsprobleem een inleiding geven in de differentiaalrekening. Voorts kunnen tal van problemen der Natuurkunde aanleiding geven tot toepassing der Infinitesimaalrekening.

Beantwoording van de zesde vraag.

De Commissie is van oordeel, dat de Infinitesimaalrekening als onderdeel van de Algebra tot de verplichte examenstof moet behoren.

De Commissie meent, dat de Infinitesimaalrekening (dus de differentiaalrekening en de integraalrekening) op het mondelinge gedeelte moet worden geëxamineerd.

De meerderheid der Commissie acht het bovendien gewenst, dat de differentiaalrekening op het schriftelijk eindexamen wordt gevraagd.

De Heer Wielenga is het met het laatste niet eens.

Beantwoording van de zevende vraag.

De Commissie meent, dat de Infinitesimaalrekening voor het eerst twee jaar na definitieve invoering op het leerprogramma op het eindexamen zal moeten worden gevraagd.

Vlaarding, 8 Mei 1950.

J. WILLEMSE,
Voorzitter.

EVENREDIGHEDEN EN DE SCHOOLVAKKEN, WAARIN ZE TOEPASSING VINDEN

door

S. J. GEURSEN.

De evenredigheden vormen in de gebruikelijke rekenkunde- en algebra-boeken, waarin ze behandeld worden, voor onze leerlingen voor V.H.M.O. een schijnbaar niet al te moeilijk onderwerp.

Eigenlijk zijn het alleen de stellingen over sommen en verschillen, welke nogal moeizaam moeten worden ingeheid. U weet wel, het zijn die tweelingzusjes, die de leerlingen gaarne met elkaar verwarren: „de som enz. staat tot het verschil enz. als de eerste staat tot de derde (opv. de tweede)”.

In die gedaante hebben deze stellingen bij mij, zij het onbewust, altijd een ietwat gekunstelde indruk gemaakt.

Men pleegt ze te verankeren met behulp van een vrij groot aantal vraagstukken, die overigens geen enkel practisch nut hebben, als bijv.:

„Leid uit $a : b = c : d$ af

1. $(2a - b + 2c - d) : (b + d) = (2a - b) : b$;
2. $(a^2 + b^2) : (ac + bd) = (a^2 - b^2) : (ac - bd)$.” : I

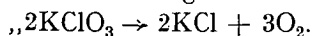
Nu spelen de evenredigheden een grote rol in alle vakken, waarin wel eens gerekend moet worden, met name in de planimetrie, de trigonometrie, de stereometrie, de natuurkunde, de scheikunde en het handelsrekenen, en hier begint pas goed de ellende.

Deze vakken zijn immers toevertrouwd aan verschillende leraren en leerboeken, waardoor dergelijke vraagstukken uit de aard der zaak op verschillende wijze worden aangepakt.

Een enkel voorbeeld uit de scheikunde moge dit toelichten:

„Hoeveel liter zuurstof van 0° en 76 cm wordt ontwikkeld bij verhitting van a g kaliumchloraat?”

Het leerboek geeft de volgende uitwerking:



2 grammol., d.i. 245 g kaliumchloraat geven 3 grammoleculen, d.i.

$3 \times \frac{200}{9}$ l zuurstof van 0° en 76 cm.

Uit a g kaliumchloraat ontstaat dus:

$$\frac{a}{245} \times 3 \times \frac{200}{9} \text{ l O}_2 \text{ van } 0^\circ \text{ en } 76 \text{ cm.}'' \dots \text{ II}$$

In deze uitwerking wordt van een evenredigheid niet gerept. Van toepassing van een of andere eigenschap daarvan is dus al in het geheel geen sprake. De oplossing berust geheel op een redenering, zoals die althans in principe op de lagere school wordt geleerd (verdeling van knikkers, geldsommen en dergelijke in een bepaalde verhouding).

In zoverre zou dus de wiskunde-leraar, in zijn kwaliteit van docent van een hulpwetenschap, het onderwerp „evenredigheden” wel kunnen laten vervallen.

In de leerboeken-handelsrekenen treft men dergelijke voorbeelden aan.

Het mag dan ook geen wonder heten, dat eenzelfde (middelmatige) leerling, die eenzelfde zaak op zo verschillende wijzen krijgt opgediend, met de stof in kwestie niet zo gemakkelijk vertrouwd raakt, als mogelijk moet zijn.

Als hierin eens wat meer eenheid (en eenvoud) kon komen, zou ieder der betrokken leraren daar allicht enig voordeel van hebben en ... de som van die voordelen zou de leerling tengoede komen.

In verband hiermede mogen hieronder enkele denkbelden in overweging worden gegeven.

In de eerste plaats verdient m.i. om visuele en andere redenen de schrijfwijze in „breukvorm”

$$\frac{\ddot{a}}{\ddot{b}} = \frac{\ddot{a}}{\ddot{b}} = \frac{\ddot{a}}{\ddot{b}}$$

verre de voorkeur boven die in, wat ik dan maar zal noemen, de „deelvorm”:

$$\dots\dots = \dots\dots$$

De „breukvorm” ziet men dan ook in aanverwante wetenschappen zeer veel toegepast en daarom moet het des te meer verwondering wekken, dat de algebra- en rekenkunde-boeken vrij algemeen aan de „deelvorm” trouw blijven. Dientengevolge wordt de leerling een gewoonte bijgebracht, die hij later weer moet veranderen. Dit kost hem meer moeite, dan men oppervlakkig wel zou denken.

Voorts schijnt een letterkeuze als bijvoorbeeld

$$\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b}$$

doelmatiger dan het vrij algemeen gebruikelijke

$$a : b = c : d.$$

Over die laatste letterkeuze moet men zich eigenlijk een beetje verbazen. De termen van een reeks (waartussen eveneens een relatie bestaat) stelt men toch ook gewoonlijk niet voor door de letters a, b, c, d enz.

Bovendien heeft de gedaante $a : b = c : d$ het nadeel, dat een leerling met ongeveer één jaar algebra-ervaring, dikwijls nog niet rijp genoeg is om in te zien, dat de relatie $a-b$ of $a-c$ van andere aard is dan de relatie $a-d$.

Tenslotte is mij gebleken, dat men (al zou men dit misschien niet verwachten) met voordeel direct met de aaneengeschakelde evenredigheid kan beginnen. Het is voor de leerlingen eerder gemakkelijker dan moeilijker, omdat het „evenredig” zijn beter tot uiting komt. Bovendien is er dan een betere aansluiting bij toepassingen in aanverwante vakken, zoals spoedig zal blijken.

(In de reeks schrijft men immers ook wel eens wat meer termen op om de regelmaat te demonstreren).

De behandeling van de evenredigheden zou dan ongeveer op de volgende wijze kunnen plaatsvinden (e.e.a. in beknopte vorm weergegeven).

Een evenredigheid (evh.) is een gelijkheid van twee *of meer* verhoudingen.

Schrijfwijzen:

$$\text{I. } \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k.$$

$$\begin{aligned} \text{II. } a' &= ka \\ b' &= kb \\ c' &= kc \end{aligned}$$

$$\text{III. } \frac{ka}{a} = \frac{kb}{b} = \frac{kc}{c}.$$

Bij de schrijfwijze III spreken we van rijen en kolommen, van bovenrij, onderrij, 1e kolom, 2e kolom, enz., van boventermen, ondertermen, diagonaaltermen (bijv. ka en c) en diagonaalproducten (bijv. $ka \times c$).

Twee termen van een evh. noemen we „evenredig” (of „overeenkomstig”, zie de planimetrie) als ze in dezelfde rij of in dezelfde kolom staan. Twee termen, waarbij dat niet het geval is, zijn dan „diagonaaltermen”, hun product heet „diagonaalproduct”.

STELLINGEN.

TEKST.

- I. Een evh. blijft juist, als men:
- twee rijen of twee kolommen verwisselt;
 - een rij of een kolom „van een factor voorziet”;
 - een rij „met een andere rij vermeerderd of verminderd”, evenzo een kolom met een andere kolom;
 - een kolom weglaat;
 - een kolom toevoegt, die bestaat uit de „som” of het „verschil” van twee bestaande kolommen.
- II. Een enkelvoudige evh. blijft juist als men:
- twee diagonaaltermen verwisselt;
 - op het geheel van vier termen een „cyclische verwisseling” toepast. (Zie toepassing 1).
- III. De diagonaalproducten van twee kolommen zijn gelijk (hoofd- of diagonaalstelling).

FORMULEVORM.

- I. Uit $\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b} = \frac{kc}{c}$ volgt:
- $\frac{a}{ka} = \frac{b}{kb} = \frac{c}{kc}$ en $\frac{ka}{a} = \frac{kc}{c} = \frac{kb}{b}$;
 - $\frac{pka}{a} = \frac{pkb}{b} = \frac{pkc}{c}$ en $\frac{ka}{a} = \frac{pkb}{pb} = \frac{1/q \times kc}{1/q \times c}$;
 - $\frac{ka + a}{a} = \frac{kb + b}{b} = \frac{kc + c}{c}$ en $\frac{ka - kc}{a - c} = \frac{kb}{b} = \frac{kc}{c}$;
 - $\frac{ka}{a} = \frac{kc}{c}$;
 - $\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b} = \frac{kc}{c} = \frac{ka + kc}{a + c}$.
- II. a. Uit $\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b}$ volgt $\frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$;
- b. Uit $\begin{array}{c} \overrightarrow{\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b}} \\ \overleftarrow{\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b}} \end{array}$ volgt $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$.
- III. Uit $\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b} = \frac{kc}{c}$ volgt:
- $ka \times b = a \times kb$;
 - $ka \times c = a \times kc$;
 - $kb \times c = b \times kc$.

Bij fig. 3 doet het er niet toe, hoe de leerling de figuur wentelt, als hij maar in de figuur het „vierkant” van letters weet te herkennen, dat de evh. oplevert (Stelling IIb).

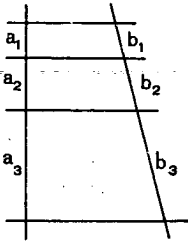


Fig. 1.

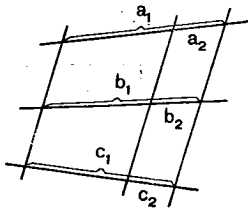


Fig. 2.

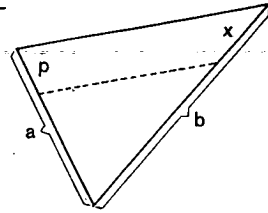


Fig. 3.

Het woord „overeenkomstig” (welk begrip in de meeste leerboeken ten behoeve van de leerling helaas niet scherp vastgelegd wordt) betekent dus in de evenredigheid „in dezelfde rij of in dezelfde kolom” en in bovenstaande figuren „tussen dezelfde evenwijdige lijnen of op dezelfde snijlijn”.

II. Planimetrie. Fig. 4.

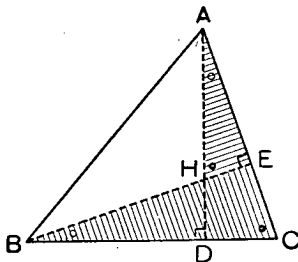


Fig. 4.

Gegeven: $AD \perp BC$, $BE \perp AC$.

Gevraagd: a. Bewijs, dat

$$\triangle AHE \sim \triangle BEC.$$

b. Welke evh. volgt hieruit?

b. *Aanwijzing voor de leerling:*

- I. Geef gelijke hoeken een gelijk merkteken.
- II. Schrijf het schema van de evh. op.
- III. Merk elke rij met een driehoek en elke kolom met het merkteken van een paar gelijke hoeken
- IV. Vul eerst de bovenrij in en dan de onderrij.

Uitvoering:

I. Zie figuur.

$$\text{II.} \quad \begin{array}{ccc} \ddot{} & = & \ddot{} = \ddot{} \\ \vdots & & \vdots \quad \vdots \\ \perp & & \cdot \quad \circ \end{array}$$

$$\text{III.} \quad \begin{array}{l} \triangle AHE \\ \triangle BEC \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \ddot{} & = & \ddot{} = \ddot{} \\ \ddot{} & & \ddot{} \quad \ddot{} \end{array}$$

$$\text{IV.} \quad \begin{array}{l} \triangle AHE \\ \triangle BEC \end{array} \quad \begin{array}{l} \perp \\ \frac{AH}{BC} = \frac{AE}{BE} = \frac{HE}{CE} \end{array}$$

IV. Als twee producten aan elkaar gelijk zijn, is elke evh. gevormd uit de vier factoren juist, mits de factoren van een der producten diagonaaltermen in de evh. worden. Er kunnen 8 juiste evhⁿ. worden gevormd.

IV. Uit $ax = lp$ volgt:

$$1e. \frac{a}{l} = \frac{p}{x};$$

2e. enz. (8 stuks).

V. Uit $\frac{ka}{a} = \frac{kb}{b}$ kan men met behulp van vorige stellingen twee evenredigheden afleiden, waarin sommen en verschillen voorkomen, nl.:

$$1e. \frac{ka}{a} = \frac{kb}{b} = \frac{ka + kb}{a + b} = \frac{ka - kb}{a - b} \quad \text{en}$$

$$2e. \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b} = \frac{ka + a}{kb + b} = \frac{ka - a}{kb - b}.$$

In deze vorm zijn de stellingen kort en voor de leerlingen in hoge mate doorzichtig. De bewijzen liggen voor het grijpen. Meer stellingen zijn niet nodig. Dientengevolge kan men ook met minder vraagstukken volstaan om deze stellingen vast te leggen. Met name kunnen vraagstukken als in het begin van dit artikel onder I aangeduid vrijwel geheel vervallen.

Over de redactie kan men natuurlijk van mening verschillen, maar daar gaat het hier niet om. Men kan desgewenst de tussen aanhalingstekens geplaatste uitdrukkingen toelichten of precies definiëren. Een redactie als onder V gegeven is misschien wat ongewoon, maar is er een bezwaar tegen? Het is zo voor de leerling wel zeer eenvoudig.

Er volgen nu enige toepassingen van het bovenstaande op de planimetrie, de trigonometrie, de scheikunde en het (handels)-rekenen, waarbij de uniformiteit duidelijk in het oog springt.

TOEPASSINGEN.

I. *Planimetrie.*

De leerling moet zich fig. 1 en evenzo fig. 2 ongeveer 90° gewenteld denken. Daarna moet hij zich voorstellen, dat de lijnen van de figuur verdwijnen, doch dat de letters precies op hun plaats blijven staan. Voegt hij hieraan de nodige breukstrepen en gelijktokens toe, dan heeft hij precies de evh. voor zich, die hij moet bewijzen of gebruiken.

Op de gevonden evenredigheid (waarin op deze wijze de anders zoveel voorkomende fouten tegen de volgorde der termen vrijwel uitgesloten zijn) kan nu driemaal de diagonaalstelling worden toegepast, er kan een kolom worden weggelaten, enz. enz. al naar de aard van het vraagstuk.

(Natuurlijk kan dit vraagstukje ook worden opgelost door van de gelijkvormigheidsfactor of van de goniometrie gebruik te maken, doch terwille van het verband met het overige blijve dit hier buiten beschouwing).

III. *Trigonometrie*. Elke leerling, die de sinusregel kent, kan met toepassing van bovenstaande stellingen gemakkelijk opschrijven:

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin \alpha} &= \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{a+b}{\sin \alpha + \sin \beta} = \text{enz.} = \\ &= \frac{a-b}{\sin \alpha - \sin \beta} = \frac{2s}{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma} = \text{enz.} = 2R. \end{aligned}$$

Als hij van de ondertermen producten kan maken, heeft hij hier op ongezochte wijze bijeen: de sinusregel, de tangensregel, de formules van Mollweide (willens of onwillens tot nieuw leven gebracht), een betrekking tussen s en R , enz. enz.. Ook $s - a$ e.d. kan hij er gemakkelijk in aanbrengen, door aan deze in letterlijke zin „aaneengeschakelde evh.” nog wat „schakels” toe te voegen.

IV. *Scheikunde*. Het in de aanhef onder II vermelde scheikundevraagstukje, kan nu als volgt worden uitgewerkt:

„Formulegewichten en werkgewichten zijn evenredig. Stel dus, dat er x gram zuurstof ontstaat. Dus

$$\begin{array}{l} \text{O} \quad \text{K} \quad \text{Cl} \quad 2\text{KClO}_3 \rightarrow 2\text{KCl} + 3\text{O}_2 \\ \text{Formulegew.:} \quad \frac{16}{..} = \frac{39}{..} = \frac{35,5}{..} = \frac{245}{a} = \frac{149}{..} = \frac{96}{x} \\ \text{Werkgew.:} \quad \frac{16}{..} = \frac{39}{..} = \frac{35,5}{..} = \frac{245}{a} = \frac{149}{..} = \frac{96}{x} \end{array}$$

$$245 \times x = a \times 96.$$

$$x = \frac{a \times 96}{245} \text{ g} = \dots \text{ gr.mol.} = \dots \text{ l O}_2''.$$

V. *(Handels)rekenen*.

Inkoopsprijs f 204,—, winst 15 % van de verkoop.

Gevraagd: a. de winst (x gulden);

b. hoeveel % is de verkoop van de inkoop? (y %).

Oplossing: a. Inkoop, winst en verkoop uitgedrukt in guldens zijn evenredig met inkoop, winst en verkoop uitgedrukt in procenten van de verkoop. Dus:

$$\text{Ink.} + \text{winst} = \text{verk.}$$

$$\begin{array}{l} \text{Guldens:} \quad \frac{204,-}{\dots} = \frac{x}{15} = \frac{\dots}{100} \\ \% \text{ v.d. verk:} \end{array}$$

Blijkens de aanduiding boven de kolommen moet voor de eerste onderterm „85” worden ingevuld.

$$85 \times x = 204 \times 15, \text{ enz.}$$

b. Inkoop, winst en verkoop in procenten van de verkoop zijn evenredig met inkoop, winst en verkoop in procenten van de inkoop. Dus:

$$\text{Ink.} + \text{winst} = \text{verk.}$$

$$\begin{array}{l} \% \text{ v.d. verk:} \quad \frac{\dots}{100} = \frac{15}{\dots} = \frac{100}{y} \\ \% \text{ v.d. ink:} \end{array}$$

Blijkens de aanduiding moet voor de eerste boventerm „85” worden ingevuld.

$$85 \times y = 100 \times 100, \text{ enz.}$$

Zoals men ziet is eenvoud en uniformiteit voor verschillende vakken inderdaad mogelijk.

Het laatste schooljaar voor het eerst heb ik in de tweede klasse de evenredigheden op bovenstaande wijze behandeld. Daarvoor was veel minder tijd nodig dan anders. Na enkele voorbeelden te hebben gegeven, liet ik de leerlingen op de meetkundeles twee proefvraagstukjes maken in de trant van toepassing 2. Het resultaat was als volgt: van 22 leerlingen hadden 20 alles goed, 1 leerling de helft goed en 1 leerling niets goed. In veel meer tijd en met veel meer inspanning (van mij en van de leerlingen!) bereikte ik tot nu toe veel minder resultaat.

Toen een en ander toevallig ter sprake kwam in klasse B V verzochten de leerlingen mij de theorie te dicteren. Ik deed dit, gaf bovenstaande toepassingen er bij en had voor e.e.a. twee lessen nodig. Hoewel ik ze volkomen vrij liet, verklaarden bijna allen, dat ze er ernstig over dachten de methode in voorkomende gevallen te gaan toepassen. Sommigen voelden het als een (begrijpelijk) bezwaar, dat ze nu eenmaal aan de „deelvorm” gewend waren.

HET SAMENSTELLEN VAN EEN VLAK KRACHTENSTELSEL

door

Dr. J. KOKSMA

Bij het schriftelijk eindexamen der H.B.S. in 1939 werd gevraagd de eigenschappen van de resultante van twee evenwijdige, gelijk gerichte krachten af te leiden. Een candidaat (die zijn zaakjes blijkbaar niet goed geleerd had) gaf de gevraagde afleiding in enkele regels, door één der krachten naar het aangrijpingspunt van de andere te verplaatsen, dus eigenlijk uitgaande van het *eindresultaat* van de gehele theorie van het vlakke krachtenstelsel. Nadat ik gecontroleerd had, dat dit eindresultaat in het gebruikte leerboek inderdaad bereikt werd onafhankelijk van de behandeling der evenwijdige krachten, heb ik hem zijn tien voor het onderdeel gegeven. Intussen was me gebleken, dat er wel verdere vereenvoudigingen mogelijk zouden zijn. Nu Prof. Bottema dit onderwerp aansnijdt in zijn aan de momentenstelling gewijd „Verscheidenheidje” ²⁾, zou ik hierover graag enkele opmerkingen willen maken.

Ter oriëntatie heb ik eerst de betreffende passages in verschillende leerboeken nog eens nagelezen en het lijkt me dienstig vooraf op een enkel punt twee er van nader te vergelijken, die terecht een goede naam en naar het schijnt een flink debiet hebben, doch nog al van „ligging” verschillen, dus samen waarschijnlijk wel representatief voor ons onderwijs geacht mogen worden. Ik bedoel het boek van Doornenbal en Nijhoff en dat van Beth en van Loo.

Beide beginnen ze met het „verschuiven” van een kracht in zijn werklijn, stellen dan twee krachten met snijdende werklijnen samen en behandelen volledig het samenstellen van twee evenwijdige krachten. Evenzo geven ze beide een volledige koppeltheorie, die besloten wordt met het samenstellen van een willekeurig aantal koppels door ze alle te vervangen door koppels met gemeenschappelijke arm.

Wat de verschillen betreft blijft Doornenbal—Nijhoff het

¹⁾ Eucl. 25, blz. 142.

dichtst bij wat ik de traditionele behandeling meen te zijn. Nadat het samenstellen van twee krachten is afgehandeld, wordt het begrip „moment van een kracht ten opzichte van een punt” ingevoerd, de momentenstelling wordt voor twee krachten, zowel met snijdende als met evenwijdige werklijnen, volledig bewezen, daarna wordt het „moment van een koppel” verkregen door analoog de momenten van de koppelkrachten ten opzichte van een willekeurig punt op te tellen. Tenslotte wordt de momentenstelling voor n krachten geformuleerd en bewezen op een wijze, waarop de critiek van Prof. Bottema me wel vat lijkt te hebben.

De nu volgende koppeltheorie geeft achtereenvolgens: het elkaar opheffen van koppels met tegengesteld moment (waarbij het geval van evenwijdige werklijnen in het bewijs vergeten wordt), het vervangen van een koppel door een willekeurig ander met gelijk moment, het samenstellen van een willekeurig aantal koppels, het overbrengen van een kracht, het samenstellen van een kracht en een koppel.

Beth en van Loo werkt ook eerst de samenstelling van twee krachten af, maar gaat dan meteen over op de koppels, het koppelmoment is het eerste moment dat ter sprake komt. Eerst wanneer met behulp van koppels de samenstelling van een willekeurig vlak stelsel voltooid is, wordt het moment van een kracht ten opzichte van een punt ingevoerd als *het moment van het koppel dat optreedt, wanneer men de kracht naar dat punt overbrengt*. Na al het voorgaande vergt het nu nog slechts een korte (maar vrij abstracte) redenering om tot de volledige momentenstelling te komen, die dan ook direct volgt. De bijzondere gevallen van twee krachten met al of niet evenwijdige werklijnen komen daarbij niet meer ter sprake ¹⁾.

Het ligt niet in mijn bedoeling aandacht te vragen voor de vele verschilpunten, die in details tussen beide boeken zijn aan te wijzen, deze momentenquaestie lijkt me echter nadere beschouwing waard. Het gaat dus om de vraag, welke volgorde van invoering der beide momenten de voorkeur verdient; is het beter, het koppelmoment aan te laten sluiten bij het moment van een kracht of andersom? Bij deze vraag kies ik zonder aarzelen de opzet volgens Doornenbal en Nijhoff. Mijns inziens behoort de invoering van een nieuw begrip te voldoen aan de eis: *ten eerste*, dat de leerling nut of noodzaak daarvan liefst van te voren inziet, of anders zo spoedig mogelijk er na, en *ten tweede*, dat het begrip zo elementair mogelijk wordt

¹⁾ Ik raadpleegde de zesde druk (1948) waar de behandeling juist op dit punt iets uitgebreider gegeven is dan in vorige drukken.

gedefinieerd, dat wil zeggen zonder meer dan strikt noodzakelijke samenhang met of fundering op andere begrippen.

Bij Doornenbal—Nijhoff wordt het krachtmoment onmiddellijk gemotiveerd door de momentenstelling, tot het koppelmoment komt men op natuurlijke wijze door de voor de hand liggende vraag, wat er te voorschijn komt, als men nu eens de momenten van de koppelkrachten ten opzichte van een willekeurig punt optelt. De constantheid van de uitkomst is motivering genoeg om deze als het moment van het koppel te definiëren en op zich zelf al dadelijk een belangrijke eigenschap daarvan.

Bij Beth en van Loo wordt het koppelmoment voldoende gemotiveerd door de koppelstellingen, het krachtmoment is eveneens deugdelijk (zelfs van te voren!) gemotiveerd; met de tweede eis is het echter in conflict: voor goed begrip van de portée der definitie is *de kennis van de gehele koppeltheorie* nodig, plus de toepassing daarvan op de samenstelling van een vlak stelsel.

Naar indertijd verluidde, hebben Beth en van Loo-candidaten enige moeite gehad met de eindexamenopgave 1948, Ib, waarin het bewijs van de momentenstelling voor enkele eenvoudige gevallen gevraagd werd. Nu ik dat eens nagegaan heb, kan ik me dat wel voorstellen: de candidaat zal niet licht vinden, dat hij een „bewijs” geleverd heeft, wanneer hij de momentenstelling voor n krachten opschrijft en daaraan toevoegt, dat hieruit het gestelde volgt door de substitutie $n = 2$. Maar dan zit er niets anders op dan het bijzondere geval in het algemene *bewijs* te „substitueren”. Dat zou voor twee in één punt A aangrijpende krachten P en Q met resultante R op het volgende neerkomen. De momenten M_P en M_Q van P en Q ten opzichte van een willekeurig punt O zijn per definitie de momenten van de koppels, die optreden als men P en Q naar O overbrengt. Noemen we de overgebrachte krachten P' en Q' en hun resultante R' dan is (het teken $\sim$ te lezen als „gelijkwaardig met”; met de symbolen M_P en M_Q worden tevens de koppels aangeduid):

$R \sim \text{stelsel } (P, Q) \sim \text{stelsel } (P', Q', M_P, M_Q) \sim \text{stelsel } (R', M_P + M_Q)$, waaruit volgt dat $M_P + M_Q$ *het moment is van het koppel dat optreedt als R naar O verplaatst wordt*, dus het moment van R ten opzichte van O .

Bevredigen doet dit bewijs me trouwens niet, er zit een omkering in: in het gecursiveerde deel van de conclusie wordt stilzwijgend aangenomen, dat alle koppels, die kunnen dienen om R naar O over te brengen, hetzelfde moment hebben. Dit bezwaar wordt in het boek niet ondervangen; in de aanloop tot de definitie van het moment van een kracht ten opzichte van een punt wordt slechts

gesproken van één bepaald koppel, de definitie zelf spreekt van *het* koppel, en bedoelt blijkbaar dat ene; over andere koppels wordt niet gesproken; met andere woorden, er is verzuimd aan te tonen dat het bewuste moment op deze wijze ondubbelzinnig is gedefiniëerd. De quaestie is nog al subtiel, maar mijn gevoel van onbevredigdheid was psychologisch echt, bovendien is een dergelijk aan een definitie voorafgaand onderzoek in het geheel niet ongewoon, men denke slechts aan de definitie van de hoek van twee vlakken of de hoek van twee kruisende rechten in de stereometrie.

Ik heb dit punt nog al uitgesponnen om te laten zien tot welke moeilijkheden deze opzet leidt, inderdaad kon men van een candidaat niet verwachten, dat hij het gevraagde bewijs zelf vond; hij zou er moeite mee hebben, ook al had hij het boek er bij.

Vermoedelijk hebben de schrijvers met deze (toch zeker bewust gekozen) afwijking van de gebruikelijke behandeling de verkregen bezuiniging op de momentenstelling voor twee krachten beoogd, ik zie althans geen verdere voordelen. Die bekorting is dan mijns inziens te duur gekocht; met minder schade had de behandeling der evenwijdige krachten kunnen worden weggelaten, zoals mijn candidaat in 1939 aantoonde; alleen zou men de aanloop tot het koppel missen.

Aan de andere kant is de mogelijkheid van deze bekortingen allerminst een argument tegen de opzet van Doornenbal en Nijhoff, ook die bevat tal van overbodige elementen. In feite kan men kiezen tussen de samenstelling van twee evenwijdige krachten (gedeeltelijk!) en de theorie der koppels. Om dat te laten zien, wil ik nu de kortste gang naar de volledige momentenstelling schetsen, die mij mogelijk lijkt met vermindering van de tegen Beth en van Loo ontwikkelde bezwaren.

Verondersteld wordt dat de samenstelling afgehandeld is van krachten, die in één punt aangrijpen; evenzo dat de mogelijkheid van verschuiven in de werklijn bekend is. Dan kan de behandeling in de volgende stappen verlopen.

a. Invoering van het begrip „moment van een kracht ten opzichte van een punt”. Bewijs van de momentenstelling voor twee krachten, die in één punt aangrijpen.

b. Samenstelling van twee niet in één punt aangrijpende krachten met snijdende werklijnen. De krachten worden naar het snijpunt verschoven en daar samengesteld. De momenten van de krachten ten opzichte van een willekeurig punt veranderen bij de verschuiving niet; de momentenstelling blijft gelden.

c. Samenstelling van twee evenwijdige krachten. Men vervangt dit stelsel door een stelsel van twee krachten met snijdende werklijnen door toevoeging van twee krachten, die elkaar opheffen en samenstelling van elk dezer krachten met één der evenwijdige krachten. De vectorsom van het stelsel krachten is bij deze handelingen niet veranderd, de resultante is dus gelijk aan de vectorsom der oorspronkelijke krachten. Evenmin heeft de som van momenten ten opzichte van een willekeurig punt wijziging ondergaan, de momentenstelling geldt dus ook in dit geval.

d. De samenstelling onder c mislukt, als de twee evenwijdige krachten tegengesteld gericht en gelijk zijn; een dergelijk stelsel wordt „koppel” genoemd.

Het bewijs, dat de krachten van een koppel geen resultante hebben, zou als volgt kunnen verlopen: stel dat de koppelkrachten P en Q een resultante R hebben, laat dan R' een kracht zijn die R opheft; het stelsel (P, Q, R') is dus in evenwicht.

Is R' evenwijdig met P of Q, dan zeker gelijk gericht met één van de twee, dus daarmede samen te stellen. De resultante is dan groter dan de overblijvende kracht, zodat verdere samenstelling volgen kan.

Snijdt de werklijn van R' die van P en Q, dan blijkt de mogelijkheid van achtereenvolgende samenstelling volgens de parallelogramconstructie.

In beide gevallen komt er een resultante ongelijk nul, in tegenpraak met de onderstelling.

e. Naar analogie van de momentenstelling worden de momenten van de koppelkrachten ten opzichte van een willekeurig punt opgeteld. Het resultaat blijkt gelijk aan het product van kracht en koppelarm, dus onafhankelijk van het gekozen punt. Het „moment van een koppel” wordt nu gedefiniëerd als het product van kracht en arm en de gevonden eigenschap: „het moment van een koppel is gelijk aan de som van de momenten der koppelkrachten ten opzichte van een willekeurig punt” wordt uitdrukkelijk vastgelegd.

f. *Hulpstelling.* Is $n \geq 3$, dan is een vlak stelsel van n krachten te reduceren tot een gelijkwaardig stelsel van $n - 1$ krachten met dezelfde vectorsom en dezelfde momentensom ten opzichte van een willekeurig punt.

Bewijs: Bevat het stelsel twee krachten met snijdende werklijnen, dan kan men die door hun resultante vervangen.

Zijn alle krachten evenwijdig, dan zijn er zeker twee gelijk gericht, ze hebben dus een resultante, waardoor men ze kan vervangen.

In beide gevallen zijn vectorsom en momentensom gelijk gebleven.

g. Door herhaalde toepassing van deze hulpstelling is een stelsel van n krachten te herleiden tot een van twee. Uit het onder $a - e$ gezegde volgt nu de

Stelling: Een vlak krachtenstelsel is

òf 1e. in evenwicht;

òf 2e. gelijkwaardig met een koppel;

òf 3e. gelijkwaardig met een kracht, die gelijk is aan de vectorsom der krachten.

De som van de momenten der krachten ten opzichte van een willekeurig punt is in die gevallen respectievelijk:

1e. gelijk aan nul;

2e. gelijk aan het moment van het resulterend koppel;

3e. gelijk aan het moment van de resulterende kracht ten opzichte van dat punt.

h. Men kan het resultaat ook in deze vorm gieten:

Stelling: Is de vectorsom van de krachten van een vlak stelsel niet gelijk aan nul, dan heeft dat stelsel een resultante, die gelijk is aan die vectorsom.

Is deze vectorsom gelijk aan nul, dan is de som van de momenten der krachten ten opzichte van een willekeurig punt constant. Men kan die som „het moment van het stelsel” noemen.

Is dit moment nul, dan is het stelsel in evenwicht.

Is dit moment niet nul, dan is het stelsel gelijkwaardig met een koppel, waarvan het moment gelijk is aan dat van het stelsel.

i. Is nu een vlak stelsel krachten gegeven, dan bepaalt men hun vectorsom. Is die ongelijk nul, dan is er een resultante, gelijk aan de vectorsom. De werklijn wordt gevonden, door een willekeurig punt te kiezen, de som van de momenten der krachten ten opzichte van dat punt te bepalen en daarna te zorgen, dat de resultante ten opzichte van dat punt een moment krijgt, gelijk aan die momentensom.

Is de vectorsom gelijk nul, het moment van het stelsel daarentegen ongelijk nul, dan zal door toevoeging van een willekeurig koppel met een moment van tegengestelde waarde een stelsel ontstaan, dat in evenwicht is. Het oorspronkelijk stelsel is dus gelijkwaardig met het koppel, dat uit het toegevoegde ontstaat, door de krachten daarvan om te keren. Bijgevolg is het oorspronkelijke stelsel gelijkwaardig met een willekeurig koppel van gelijk moment en in het algemeen met een willekeurig stelsel met vectorsom nul en hetzelfde moment.

Het is mij verre deze behandeling als verkieslijk voor school-

gebruik aan te willen prijzen, ik heb ze trouwens ook nooit volledig gegeven. Vooral het slot is te abstract en zou zeker niet begrepen worden, wanneer men niet ook eenvoudige concrete gevallen behandelde. Overigens is het samenvatten van vele bijzondere gevallen in één algemene behandeling, hoewel voor de vakman steeds aantrekkelijk, didactisch daarom nog niet steeds wenselijk; dat hangt helemaal van de bijzondere gevallen af, en wat men er mee wil. Voor de overgang tot het samenstellen in de practijk zal men bijzondere gevallen moeten behandelen, men heeft er een paar nodig voor de uitbreiding van de theorie tot de ruimte, en misschien zijn er dan nog enkele die men om de een of andere reden naar voren wil schuiven.

Mijn bedoeling was slechts te laten zien, dat enkele bezwaren, die men toch tegen de gewone gang van zaken aanvoeren kan; niet onvermijdelijk zijn; het bovenstaande bevat daartoe suggesties genoeg.

In de eerste plaats is het de leerling gewoonlijk onmogelijk de ontwikkeling *in haar geheel te overzien*, de behandeling is daartoe *te lang*, ook *te heterogeen*, en *suggereert* bovendien, *dat de verschillende onderdelen als schakels onmisbaar zijn*.

Men kan nu op verschillende wijzen bekorten, bijvoorbeeld door de schets *alleen voor de samenstelling* te volgen, zonder daarin direct de momenten te betrekken (wat in Beth en van Loo trouwens gebeurt), of door een tussenstadium als de samenstelling van een willekeurig aantal koppels weg te laten.

Wat de *heterogeniteit* betreft, die afwisseling van verschillende meetkundige, dan weer meer abstracte en soms zelfs algebraïsche redeneringen is toch wel in hoge mate storend en komt zeker het overzicht van het geheel niet ten goede. Natuurlijk zou het afleiden van alle gewenste bijzondere resultaten uit het op bovenstaande wijze verkregen eindresultaat een ideaal van homogeniteit betekenen, intussen kan men in die richting al een hele stap doen, ook al wil men zoveel mogelijk van algemene behandeling afzien. De substitutie van het bijzondere geval in het bewijs van het algemene lukt hier namelijk gemakkelijk. Nemen we als voorbeeld de stelling, dat twee koppels met tegengesteld moment elkaar opheffen. Twee koppels wil zeggen vier krachten, zodat men er twee en dan nog eens twee kan samenstellen. De vectorsom en de som van momenten ten opzichte van een willekeurig punt zijn beide nul en veranderen bij die samenstelling niet. Men kan het bewijs nu op verschillende manieren afmaken, o.a. door aan te sluiten bij het gebruikelijke bewijs, dat eigenlijk volgens deze gedachtengang

gegeven wordt. Het bewijs is gemakkelijk tot meer koppels uit te breiden, waaruit het samenstellen van koppels tot één koppel weer volgen kan, volgens de redenering van stap *i*.

Een ander voorbeeld is de afleiding van de bekende evenredigheid bij de samenstelling van twee evenwijdige krachten, die uit het eindresultaat volgt, maar die in punt *b* ook onmiddellijk uit de reeds bewezen geldigheid van de momentenstelling te halen is, zodat het gekunstelde gelijkvormigheidsbewijs gerust vervallen kan.

Verder zou het *overzicht over het geheel* bevorderd kunnen worden door aan de schets een *schema* van de samenhang in de opbouw te ontleen, waaruit duidelijk blijkt, wat daarin onontbeerlijk is en wat niet.

Tenslotte noem ik nog twee bezwaren, die tevens te vermijden zouden zijn. Het eerste is, dat men in de verschillende stadia nu noodgedwongen ter oefening vraagstukken moet laten maken met een *voorlopige methode*, die later toch niet weer gebruikt wordt. Ten tweede heb ik de indruk dat het begrip „koppel” zich bij de leerling gemakkelijk vastzet als aanduiding voor een soort *ondeelbaar iets*, hij komt er niet licht toe, een koppel weer in zijn twee krachten te scheiden. Een wat minder zwaar accent op de theorie der koppels zou daarom heilzaam kunnen zijn.

Haren (Gron.) Maart 1950.

KORRELS.

CI. DE DECIMALE ONTWIKKELING VAN HET GETAL π

door

HERMEN J. JACOBS JR.

De heer Shanks heeft veel op zijn geweten. Hij heeft π in 707 decimalen berekend, doch kon niet vermoeden, dat hij daardoor de oorzaak werd van gekibbel tussen enkele Belgische en Franse geleerden. R. de Montessus Ballore had nl. de eerste 700 decimalen van Shanks aan een telling onderworpen en opgemerkt, dat de cijfers 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 resp. 73, 77, 74, 72, 71, 63 en 70 maal, de cijfers 8 en 9 resp. 71 en 78 maal, doch het cijfer 7 slechts 51 maal voorkomen. Hij meende, dat dit tekort aan zevens te duidelijk was, om alleen aan toeval te denken. Als de Montessus Ballore goed had geteld, dan zou hij hebben opgemerkt, dat het tekort aan zevens nog groter was. Bovenstaande getallen blijken nl. niet geheel juist te zijn. Bij het narekenen bleek me, dat in werkelijk deze 700 decimalen de cijfers 0, 1, 5 en 7 resp. 74, 76, 64 en 50 maal bevatten. Dat dit tekort aan zevens verrassend is, werd echter door Paul Levy en Pierre Salet op grond van andere statistische beschouwingen verworpen.

Viggo Brun, die zich ook met deze kwestie heeft bezig gehouden, is één der weinigen geweest, die een richting aangegeven heeft, om onderzoekingen over de mogelijkheid tot het ontdekken van een regel in de verdeling van de cijfers bij de decimale ontwikkeling van het getal π , voort te zetten.

Maar, zult U zeggen, dat heeft niet Shanks, maar het getal π op zijn geweten. Toch niet; D. F. Ferguson en Dr. J. W. Wrench Jr. hebben nl. de berekeningen van Shanks aan een revisie onderworpen, waarbij bleek, dat hierin vanaf de 528ste plaats een fout was geslopen. Ik heb me afgevraagd, hoe het nu met het tekort aan zevens in de door hen berekende 808 decimalen staat. Na 450 decimalen is dit tekort nog 16, maar in de volgende 350 wordt het nagenoeg geheel ingehaald, zodat in de eerste 800 in plaats van de te verwachten 80 in totaal 75 zevens voorkomen. Dit is dus wel een zeer zwakke afwijking.

De hier genoemde 808 decimalen zijn onder meer gepubliceerd in Euclides 25, 1950, p. 159. Deze zijn echter niet allen juist. Uit de later te noemen publicatie in de MTAC blijkt, dat de 733ste—736ste decimaal niet 7160 maar 8136 moeten zijn, terwijl de 799 en 800ste decimaal niet 67, maar 59 moeten zijn.

Dank zij de modernste rekenmachine beschikken we nu echter over het getal π in 2035 decimalen. De Electronic Numerical Integrator and Computer heeft deze nl. in 96 uren berekend. Ook deze decimalen heb ik in mijn onderzoek betrokken en nagegaan, hoe het nu bij dit aantal met de frequenties der verschillende cijfers is gesteld. De absolute getallen met de relatieve frequenties volgen hierbij:

0	184	(0,0904)	5	211	(0,1037)
1	213	(0,1048)	6	204	(0,1002)
2	210	(0,1032)	7	200	(0,0983)
3	191	(0,0939)	8	207	(0,1017)
4	198	(0,0973)	9	217	(0,1066)

De negen komt dus relatief „het meest”, de nul „het minst” voor, maar de anomalieën zijn te zwak om een aanduiding te zijn, dat hier een andere wet dan het toeval een rol speelt. Zeer onlangs is in de V.S. een kort statistisch artikel over deze kwestie verschenen.

LITERATUURLIJST

- W. Shanks, Proc. of the Royal Soc. of London, 21, (1873) p. 319; 22, (1873), p. 45.
 R. de Montessus Ballore, P. Levy en P. Salet, Sphinx, Revue mensuelle des questions récréatives, 3, (1933) p. 51, 95—96; 4 (1934) p. 15—16, 32.
 Viggo Brun, Sphinx 3 (1933) p. 175.
 Viggo Brun, Über die Möglichkeit, für π eine Gesetzmässigkeit in den Dezimalen zu entdecken, Norsk Matematisk Tidsskrift, 18, (1936) p. 105—111.
 D. F. Ferguson en Dr. J. W. Wrench Jr., Math. Tables and other Aids to Computation, 2, (1946), p. 143—145; 2, (1947), p. 245—248; 3, (1948), p. 18—19; Nature 157, (1946) p. 342.
 George W. Reitwiesner, An ENIAC-determination of π and e to more than 2000 decimalplaces, Math. Tables and other Aids of Computation, 4, (1950) p. 11—15.
 N. C. Metropolis, G. Reitwiesner, J. von Neumann, Statistical Treatment of values of first 2000 decimal digits of e and of π calculated on the ENIAC, M.T.A.C. 4, (1950) p. 109—110.

CII. EEN PROBLEEM VAN EULER

door

Dr L. CRIJNS.

Het hier volgende heeft betrekking op 't eigenlijke vraagstuk van Euler, niet op de variant door Prof. Bottema behandeld (zie Euclides, 25, 4 blz. 200); korthedshalve wordt 't bedoelde minimumpunt genoemd: punt van Euler.

1. Voor de *constructie* van 't punt E van Euler dienen de volgende eigenschappen van $l \equiv C'M$: zoals blijkt uit de driehoeken met de hoekpunten C', M en resp. 't midden van AC en van BC, geldt voor de hoeken α en β , die l met AC en BC vormt

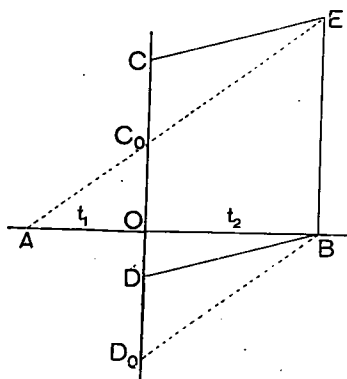
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{BC}{AC} \quad (1)$$

Hieruit volgt in verband met de gelijkheid van de inhouden van $AMC'C$ en $BMC'C$, dat de kortste afstanden tussen l en AC en tussen l en BC gelijke lengte k hebben. Ook blijkt nog, dat de rechte die de voetpunten van die k.a. op AC en BC verbindt, evenwijdig staat met AB. De voetpunten I_1 en I_2 op l (evenals die op AC en BC) bepaalt men b.v. door 'n netwerk-constructie in viervlak $ABC'C$. Dan wordt E gevonden door verdeling van I_1I_2 in reden van

$$AC : BC \quad (2)$$

Want geven we de afstanden van 'n punt P op I_1I_2 aan door r_1 en r_2 tot resp. I_1 en I_2 , dan moet bepaald worden 't minimum van

$$\frac{1}{2} AC \sqrt{k^2 + r_1^2 \sin^2 \alpha} + \frac{1}{2} BC \sqrt{k^2 + r_2^2 \sin^2 \beta}; \quad (3)$$



met 't oog op (1) is deze functie op een constante factor na van de vorm

$$\sqrt{t_1^2 + r_1^2} + \sqrt{t_2^2 + r_2^2},$$

$$r_1 + r_2 \text{ constant.}$$

Uit bijgaande figuur (of op andere wijze), waar $CD = C_0D_0 = BE = r_1 + r_2$, $OC = r_1$, $OD = r_2$, blijkt, dat $AC + CE > AC_0 + C_0E$ en dat dus bij 't minimum AC_0 en BD_0 evenwijdig staan, zodat

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{AC}{BC}.$$

Overigens is l voor dit vraagstuk niet wezenlijk, want voor 'n willekeurige rechte in V valt 't minimum *langs* die rechte niet noodzakelijk samen met 't snijpunt met l ; reeds 'n lijn bijna evenwijdig met l door b.v. A doet dat uitkomen.

2. We beschouwen nu 't geval

$$\angle AC'B = 90^\circ$$

en stellen: $AC' = a$; $BC' = b$; $CC' = c$; H hoogtepunt van $\triangle ABC$; $C'H = h$ waar $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$; S de projectie van H op V .

Hier hebben we

$$\alpha = \angle BAC, \beta = \angle ABC,$$

omdat de in de aanhef genoemde driehoeken hier gelijkvormig zijn (zijdenverhouding 1 : 2); anders gezegd: $C'M$ en AM vormen met AC' gelijke hoeken, dus met elke lijn van 't vlak door AC' loodrecht op V .

Dit laatste betekent ook, dat ACC' een van de bissectriceloodvlakken is van $C'M$ en AM . Daaruit volgt, dat h de lengte van de kortste afstand tussen $C'M$ en AC bepaalt. Als dus K de projectie is van C' op AC , hebben we — zie (3) —

$$KH = C'I_1 \sin \alpha,$$

m.a.w. I_1 wordt op $C'M$ ingesneden door de lijn uit S evenwijdig met AC' ; zo I_2 door de lijn uit S evenwijdig met BC' .

Hier ligt 't punt E van Euler in elk geval *binnen* $\triangle ABC'$. Aangezien de afstanden van I_1 en I_2 tot AC' bedragen

$$\frac{h^2}{b} \text{ en } \frac{bh^2}{a},$$

is b.v. voor $b > a$ nodig en voldoende te bewijzen — zie (2) —

$$\frac{BCh^2}{b} + \frac{ACbh^2}{a^2} < \frac{1}{2}b(AC + BC).$$

Door de opmerking, dat

$$h^2 < \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

is, wordt deze ongelijkheid teruggebracht op de bekende

$$a^2\sqrt{b^2 + c^2} + b^2\sqrt{a^2 + c^2} < a^2\sqrt{a^2 + c^2} + b^2\sqrt{b^2 + c^2}.$$

Ingeval $a = b$, vallen S , I_1 , I_2 en E samen, altijd binnen $\triangle ABC'$.

CIII. OP DE RIBBEN VAN EEN GELIJKZIJDIGE DRIEVLAKSHOEK enz.

(Euclides 25, No. 6, blz. 343—345)

door

L CRIJNS.

Wellicht kan 't volgend bewijs, dat ik indertijd gewoon was te geven, verhelderend werken.

De snijlijn van de bissectricevlakken van de drievlakshoek S heet de *as* van S; daarnaast bestaan 3 *nevenassen*, corresponderend elk aan een nevendrievlakshoek. De eis, dat $\triangle PQR$ gelijkzijdig is, is gelijkwaardig met deze, dat de $\triangle \triangle SQR$, SRP en SPQ gelijke omgeschreven cirkels hebben, m.a.w. dat 't middelpunt M van 't omgeschreven bolvlak van 't viervlak op gelijke afstanden van de 3 *zijvlakken* ligt. Dus 1e mogelijkheid: M ligt op de *as*, d.i. 't geval van de 3 gelijke lijnstukken;

2e mogelijkheid: M ligt op een van de *nevenassen*, d.i. 't geval van 2 gelijke stukken (want de projectie van de *nevenas* op de bijbehorende zijde is bissectrice van die zijde).

EXAMENS IN DE WISKUNDE.

De Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, brengt ter kennis van belanghebbenden, dat, behoudens onvoorziene omstandigheden, het mondelinge gedeelte van de examens ter verkrijging van de akten wiskunde I.o., K I en K V voor zover die in het openbaar worden gehouden, dit jaar zal worden afgenomen te 's-Gravenhage, in het gebouw Fluwelen Burgwal 22 in het tijdvak van 18 October tot 31 December.

Ter verkrijging van de juiste data waarop deze examens zullen worden gehouden kunnen belanghebbenden zich wenden tot de secretaris van de examencommissie, de heer A. Smits, Thorbeckelaan 79 's-Gravenhage.

's-Gravenhage, 30 September 1950.

Voor de Minister,

Het wnd. Hoofd van de Afdeling

Voorbereidend Hoger en Middelbaar Onderwijs,

(get.) A. F. Monna.

Voor eensluidend afschrift,

De Chef van het Kabinet,

(get.) Schölvinck.

ENIGE ASPECTEN VAN HET ONDERWIJS IN DE WISKUNDE EN DE NATUURWETENSCHAPPELIJKE VAKKEN OP DE AMERIKAANSE HIGH SCHOOL¹⁾.

door

Dr. G. WIELENGA.

Moge ik beginnen met een waarschuwing: ik vrees nl. sommigen uwer te zullen teleurstellen en op vele vragen straks geen antwoord te kunnen geven, omdat ik van dit gebied eigenlijk niet genoeg weet, niet genoeg om een zeker minimum van verwachting te kunnen bevredigen. De zaak is nl. deze, dat ik naar Amerika gegaan ben om er wat te leren, er nieuwe ideeën op te doen. En nu merkte ik al spoedig, dat op het gebied van het wiskundeonderwijs niet de beste kansen lagen. Daarom heb ik mij toen op andere aspecten van het Amerikaanse middelbare onderwijs geconcentreerd. Ik moest selecteren, want als je teveel wilt zien, zie je niets!

Toch heb ik nog vrij veel wiskundelessen bijgewoond (heel weinig Natuur- en Scheikunde) en toch heb ik ook op dit terrein nog heel wat geleerd — maar daarover straks.

Vanwaar dit min of meer teleurstellend resultaat wat betreft het wiskundeonderwijs?

Het verschil tussen Holland en Amerika is op dit gebied te groot! Hetgeen een gevolg is van het zeer grote verschil in systeem van middelbaar onderwijs, hetgeen weer een gevolg is van het zeer grote verschil in uitgangspunt en doelstelling van de opvoeding in haar geheel.

Ik moet dan ook wel beginnen met hierop iets dieper in te gaan, want niets, maar zeker geen onderwijskwestie, is juist te beoordelen zonder begrip te hebben van doelstelling en achtergrond.

Deze band tussen de structuur en de doelstelling van onderwijs en opvoeding in hun totaliteit met ons werk als vakleraar is mij *hier* nooit zo klaar bewust geweest. Ik heb het bestaan ervan wel theoretisch beaamd, maar nimmer *beleefd*.

Hier heb ik altijd het gevoel (het is dus iets subjectiefs!) gehad,

¹⁾ Voordracht voor het Didactisch Centrum v. h. Paed. Inst. aan de R.U. te Utrecht, de Midlandgroep en de Wiskunde-werkgroep van het W.V.O., gehouden te Utrecht op 10 Dec. 1949.

dat, zoeral een band tussen de wiskunde- en de andere lessen bestond, deze toch een zeer losse was. Eigenlijk bestond deze alleen maar in een ruimtelijke en tijdelijke binding — gegeven in éénzelfde gebouw, opgenomen in éénzelfde rooster. Zelfs met zo'n aanverwant artikel als Natuurkunde was dit het geval. Ik had wel eens het idee: als ik er nu eens de brui aangaf en in mijn uren iets totaal anders ging behandelen, dan zou geen haan er naar kraaien vóór het eindexamen kwam. Maar dat er een dieper liggende band bestaat tussen het werk van mijn Latijnse collega en het mijne — ik beleef het niet. Jagen wij hetzelfde hoge doel na, niet naast elkaar maar tesamen en in vereniging? Hebben wij in de grond der zaak met dezelfde problemen en moeilijkheden te worstelen? Ik ervaar het niet!

In Amerika heb ik wel duidelijk gezien en gevoeld, dat zulk een band van „deel van een geheel te zijn” bestaat, bestaan moet.

Misschien — waarschijnlijk — is dat een gevolg van de grotere distantie. Want hier sta je er te dicht bij, kun je vanwege de bomen het bos niet zien. Eigenlijk is het maar één boom, je eigen privé boom, die je het uitzicht belemmert. Je bent zo druk bezig met hem op te kweken, dat je zelfs de buurman-boom niet meer ziet. Laat staan plan en aanleg van het bos. De bomen zullen wel langs lanen gereid staan en die zullen wel weer naar een waardig doel leiden — maar wat is dat? Een prachtige centrale lusthof met als bekroning een tempel? Een tempel van wie of voor wie? Of is het een Mausoleum? Of is het centrale punt van ons bos slechts een ouderwetse doolhof met lachspiegels?

En dan heb je zo het idee, dat je nooit buiten de paden mag lopen. Niet alleen dat je er geen tijd voor hebt, omdat je zo hard moet rennen, maar er staan ook overal bordjes „Streng verboden zich op het gras te bevinden”. Stel je voor, dat ik eens tegen een α zei: Je hebt er wat last mee, vrind, en dat is best te begrijpen, want zo'n discriminant van een discriminant is maar een raar ding. Ga nu maar eens de Geschiedenis van de Wiskunde en Natuurwetenschap bestuderen. Dijksterhuis heeft er over geschreven en onder de Penguin-books zijn een paar deeltjes over Greek Science van Farrington, die erg aardig zijn. Maak daar nu eens een scriptie over en dat is dan tevens de stof, waar over ik je op het eindexamen zal vragen. Stel je voor!!

Ik heb bovendien zo'n gevoel (het is dus iets subjectiefs!), dat wij hier in Holland ons niet senang gevoelen met vrijheid — en de daaruit voortvloeiende verantwoordelijkheid, dat wij het liefst alles maar voorgeschreven zien. Ik denk b.v. aan de kwestie van de Differentiaalrekening op het eindexamen van het Gymnasium.

Voor degenen, die zich zitten te ergeren, zeg ik uitdrukkelijk: Ik weet, dat ik overdrijf. Dat doe ik bewust! Maar het is toch niet alleen maar een boutade!

Voorts: Ik weet, dat ik afzwerf. Dat doe ik ook bewust en niet onoverwogen! Want ik zal op het eind op deze kwestie terugkomen.

Het ging dan om de noodzaak het onderwijs in een bepaald vak te zien in het groter verband van de totaliteit van onderwijs en opvoeding. Het ging erom, dat het voor de juiste appreciatie van een vak noodzakelijk is uitgangspunt en doelstelling van het onderwijs-systeem te zien. Daarom is het nodig hier eerst een korte, algemene karakteristiek te geven van de Amerikaanse Secondary Education.

Om maar met de deur in huis te vallen: het eerste en meest opvallende verschil met ons systeem is, dat het voortgezette onderwijs daar niet selectief is. Niet-selectief in deze zin, dat men geen selectie naar de portemonnaie van Papa, noch naar sociaal milieu, noch ook naar intellectuele begaafdheid wenst. Het ideaal is, dat alle kinderen boven de 12 jaar naar één schooltype gaan en wel de (kosteloze) Public High School. (Het spreekt natuurlijk vanzelf, dat in een land zo uitgestrekt als de Verenigde Staten een grote variatie bestaat, ook wat geestelijke stromingen betreft; het voorgaande moet dus niet zo opgevat worden als zouden er geen Private H. S. bestaan. Er zijn standen-scholen als ook kerkelijke scholen, maar hun aantal is relatief zeer gering.)

Aan de enorme individuele variatie in begaafdheid en toekomst-plannen, die er nu eenmaal is, tracht men tegemoet te komen door binnen het raam van deze éne High School een zeer grote variatie in vakken (courses) aan te brengen. Als daar zijn: Talen, Wiskunde, Science, Commerciele-, Huishoudelijke-, Technische-, Kunst-vakken, enz. enz. En de scholieren kunnen nu uit dit gevarieerde menu kiezen. Dit is het zg. Elective System. Men zou het verschil als volgt kunnen typeren.

In Holland kiest de leerling na de Lagere School een speciaal restaurant voor zijn verdere (op)voeding. Nadat hij getoond heeft, dat hij waardig is deze exclusieve gelegenheid te betreden, mag hij zich aan de specialités de la maison te goed doen. Hij eet steeds met dezelfde groep aan eenzelfde tafel en na een week herhaalt zich het menu. Na een jaar wordt hij gewogen om te zien of hij goed is aangekomen. Zo ja, dan mag hij naar een hogere étage, waar een zwaarder menu wordt geserveerd. Wordt hij echter te licht bevonden, dan moet hij alles nog eens doorworstelen, hetzelfde onvermijdelijk taaie lapje van dezelfde oude os. Het is stevige kost, wat je noemt voedzaam! Maar of het smakelijk is, is een andere

kwestie. Ja, het is zelfs de vraag of al het voedsel wel verteerbaar is. Men denkt in dit verband als van zelf aan de suikerbiet!

In Amerika daarentegen gaan allen na de Lagere School naar één, vrij toegankelijke cafeteria. Men kiest daar zijn gangen naar persoonlijke voorkeur en behoefte en herhaalt dit elke dag in dezelfde volgorde. Heb je je schoteltje Engels van de dag genuttigd, dan ga je het volgend uur aan een andere tafel met een andere groep, je hapje Wiskunde genieten en daarna weer aan een volgende tafel een portie Zang consumeren, enz. Het eten is niet zo voedzaam, maar wel zo licht verteerbaar en smakelijk — het is wat je noemt „sweet”. Als na verloop van een jaar (of een semester) een volledige gang, een „unit”, met goed gevolg is verorberd, wordt dit op je credit geboekt. Heb je aan het eind van de school het bestemde aantal „credits” veroverd, dan krijg je zonder meer een diploma (dat echter slechts dan tot een College toegang verleent, als de „credits” naar aard en aantal aan zekere eisen voldoen). Heb je ze niet dan blijf je nog een semester op school om het ontbrekende aan te vullen, maar nooit moet een voldoende gemaakte course in vak A worden overgedaan, omdat een vak B onvoldoende was. Er zijn dus geen zittenblijvers, want een jaarklas gaat in zijn geheel over, of liever: de n^{de} -jaars worden in de volgende cursus allen $(n + 1)$ e-jaars.

Is dit geen vreemd systeem? Is het bv. niet oneconomisch wat gebouwen en outillage betreft, in verband met het technisch en kunstonderwijs aan kleinere scholen? Schept het geen onoverkomelijke moeilijkheden door de grote spreiding in begaafdheid en intellectueel peil in elke klas (vele leerlingen zijn inderdaad vele jaren achter in „reken en/of leesleeftijd”)? En is het ook niet verwerpelijk vanwege de onvermijdelijke daling in intellectueel peil van het onderwijs (zeer vele leerlingen kiezen natuurlijk de weg van de minste weerstand)?

Het laatste is inderdaad het geval. Maar wat doet dat er toe? De waardering van de intellectueel is daar zo heel anders. Het gaat in Amerika niet in de eerste plaats om wat men *weet*, maar om wat men *kan*! En wat het eerstgenoemde bezwaar betreft: is ons systeem van V.H.M.O. met de 75 % zittenblijvers en de 50 %, die het eind-examen nooit haalt economischer?

Maar in elk geval: vreemd systeem of niet — het is voor de Amerikanen een kwestie van *geloof*! *Alle* Amerikanen geloven in „*Democratie*” — en dat niet als politiek systeem, maar als levenswijze en levensbeschouwing. Deze levensbeschouwing is dan ook de basis van elke paedagogische filosofie: alle mensen zijn in *wèzen*

gelijkwaardig en hebben dus recht op gelijke kansen en ontwikkelings mogelijkheden!

Dus mag bij het onderwijs geen selectie naar begaafdheid, Pa's rijkdom, enz. toegepast worden. Maar vooral moet men democratie als levenswijze „leren door doen”, *dus* moet de jeugd samen leren leven in één school!

Bovendien is de Amerikaanse levensbeschouwing sterk *pragmatisch*. Iedereen heeft een min of meer krachtige klap van de Pragmatische molen beet. „Wat heb je er aan?” is steeds de grote vraag — en dat is zeer concreet, d.w.z. „in dollars”, bedoeld. Zij zijn in dit opzicht erfelijk belast en verraden hierin, dat zij in hoofdzaak van Angel-Saksische afkomst zijn. Maar deze tendenz is vooral ook door de historische ontwikkeling van land en maatschappij in zeer grote mate versterkt. De pionier van het Verre Westen en de pionier in de industrie werd gemeten naar wat hij presteerde (vooral in dollars) en niet naar een intellectuele of culturele maatstaf.

Men vindt deze instelling bij oud en jong, zoals die vader onderzond, die zijn lieftallige dochter van 16 vermaande, dat ze eens wat meer tijd aan de algebra moest wijden en wat minder aan de jongens en prompt tot antwoord kreeg: „But tell me, Dad, which will I use more — algebra or the boys?” De mop van deze mop is, dat de Amerikaan het eigenlijk geen mop vindt, maar een volkomen redelijk standpunt en antwoord. Wij zouden het juffertje misschien een week huisarrest opleggen — zij zouden het meisje trachten uit te leggen, dat ze om succes bij de jongens te hebben beslist algebra nodig heeft.

Het onderwijs moet dus praktisch zijn, d.w.z. duidelijk verband houden met de levenspraktijk.

En tenslotte gelooft de Amerikaan in de *Wetenschap* of liever in de „Scientific method”, waarmee dan speciaal de inductive, natuurwetenschappelijke methode bedoeld wordt. Deze methode, die in Natuurwetenschap en Techniek tot zulke eclatante successen geeft gevoerd, heeft men verabsoluteerd tot een bijkans onfeilbaar middel om alle problemen op te lossen, van technische tot morele, van economische tot psychologische! Zo is de belangrijke rol te begrijpen, die bv. de Psychologie en in het maatschappelijk leven en in opvoeding en onderwijs speelt. Wat de Wetenschap leert is waar! Waarbij men niet steeds aan het gevaar is ontkomen om dit om te vormen tot: wat een of andere professor zegt is waar! Vandaar bv. dat in onderwijskringen het geloof in de vormende waarde van zekere vakken, in de transfer, een schok gekregen heeft.

Het gevolg van dit alles is, dat de Wiskunde op de Amerikaanse

Middelbare School lang zulk een belangrijke, veilig beschutte positie niet inneemt als bij ons.

Als hier in Holland een rebellerende leerling vraagt: „Wat heb je er nu eigenlijk aan?“, kunnen wij hem antwoorden: „Je kunt er een fijn diploma mee halen! Het is nu eenmaal een eindexamen-vak. Je moet het kunnen volgen, anders hoor je niet op deze school thuis.” Een m.i. onverdedigbaar standpunt, maar in elk geval maakt dit *moeten* ons sterk tegenover de vragende leerlingen. Bovendien is het percentage, dat beslist niet kan niet zo groot, dat het een „major problem” wordt. En op de vraag: „Waarom wordt aan de wiskunde zulk een belangrijke plaats toegekend?“, kunnen wij ons prachtig op Plato beroepen en over de vormende waarde en dergelijke imponderabilia lange bomen gaan opzetten.

Niet alzo in Amerika. Daar is het percentage der leerlingen, die de wiskunde zoals deze gewoonlijk gegeven wordt niet aankunnen, zo groot, dat men er rekening mee *moet* houden. Vooral ook daar zij een ander vak kunnen kiezen en men dus al zijn klanten kan kwijt raken. Deze keuzemogelijkheid versterkt ook de klem van de vraag: „Wat heb je er aan?” Welke vraag, zoals we zagen, een zeer concreet antwoord verlangt. En zet nu imponderabilia maar eens in dollars om! Terwijl de opinie van een zekere mijnheer Plato hen natuurlijk volkomen koud laat!

Daarom is de positie van de Wiskunde als „vak” op de High School veel zwakker dan op het Gymnasium (laat staan de H.B.S.) en sinds 1900 sterk achteruit gaande. Misschien zijn de wiskundeleraars te weinig paraat geweest in hun verdediging, te zelfverzekerd zijnde omtrent de waarde van hun vak.

Want verdediging was zeker nodig. Ten eerste wegens het groeiend ongelooft t.a.v. een *automatische transfer*. Eén enkel citaat, uit een allesbehalve progressief artikel, spreekt door zijn toon reeds duidelijk genoeg: „There was a time when the position of mathematics on the curriculum could be justified mainly because of the great disciplinary values which it was believed to possess . . . To day, of course, nobody believes that any subject possesses such remarkable powers”. En vervolgens wordt, wegens het feit dat de High School voor meer dan de helft der leerlingen eindonderwijs geeft, de vraag steeds klemmender naar het nut dat men ervan heeft in zijn toekomstig beroep of in het gewone huishoudelijke en maatschappelijke leven. De opinie is: „You can get along very nicely without math.” En de concurrentie met andere vakken wordt steeds groter!

Zo heb ik U gebracht midden in de strijd, die Uw Amerikaanse collega heeft te voeren en U geconfronteerd met één der belang-

rijkste problemen, waarmee hij te worstelen heeft. *Hij* staat aan een wijkend front, *wij* in een beschutte positie. Onze collega daar zal dus veel enthousiaster, veel inspirerender *moeten* zijn in zijn onderwijs — en ook veel praktischer, veel meer gericht op de toepassingsmogelijkheden in het dagelijkse leven.

In verband hiermede wil ik een tweetal kwesties nader toelichten.

Het is allereerst beslist nodig voor de vele leerlingen (zeker 40%), die een „general curriculum” volgen en voor degenen ($\pm 10\%$) die een beroepsopleiding volgen, een cursus te vormen in „Practical” of „General Mathematics”.

Daar zijn reeds vele leerboeken voor verschenen. Het *doel* is steeds hetzelfde: „to develop those qualities and ideals which will better fit them for the life they have to live”, maar de *inhoud* vertoont nogal wat variatie. In elk geval vindt men er in de essentiële rekenkundige bewerkingen (Mathematics omvat ook het Rekenen). Voorts meestal: grafieken, tekenen op schaal, intuïtieve meetkunde, interestrekening, statistiek.

Om een voorbeeld te noemen: deel I bevat een „Review of Arithmetic” en „Everyday uses of Percent”; deel II heeft als opschrift: „Solving practical and essential problems”. Dat zijn dan: huishoudelijke problemen, afbetalingssysteem, verzekering, wiskunde en luchtvaart, wiskunde en automobielen, enz. In het laatstgenoemde hoofdstuk wordt o.a. de positie van de autoindustrie (de grootste!) behandeld; de kwestie van de waardevermindering; de kosten van het houden van een wagen (rente van het kapitaal, benzineverbruik, enz.); verkeersveiligheid, in verband waarmee onderwerpen voor discussies worden aangegeven.

Dit laatste is typisch. In de eerste plaats, omdat dit demonstreert de voorliefde, die men bezit voor de *klassediscussie* als onderwijsmethode. Men is er steeds op uit onderwerpen voor dergelijke discussies te vinden, dat zijn dus onderwerpen die de leerling interesseren en waarvan hij het belang duidelijk inziet. Ten tweede omdat men steeds tracht banden met het *sociale leven* te leggen. Niet alleen door berekeningen over rente, belasting, verzekering, enz. enz. te geven (dikwijls ingebed in een heel verhaal over Mr. en Mrs. Jones en hun perikelen), maar vooral door de sociale betekenis en functie van deze en dergelijke instellingen en kwesties te accentueren. Uitdrukkelijk worden bv. de gevaren van het kopen op afbetaling (een veel voorkomend euvel) aangetoond en wees er dan zeker van, dat de behandeling van dit onderwerp uitloopt op een discussie pro en contra + eindstemming! De cursus beperkt zich

dus niet tot de wiskundige zijde der problemen, maar wil zeer uitdrukkelijk ook de *sociale opvoeding* dienen!

Dit „practisch” maken is ook één der functies, van de film in het onderwijs. Men gelooft allereerst, dat wat de mens ziet beter tot hem doordringt en beklift dan wat hij hoort. Een dikwijls gehoord argument is: men kent wel de uitdrukking het gaat het ene oor in en het andere weer uit, maar zegt dit nooit over het oog. Maar bovendien kan men met een film gemakkelijk en duidelijk de praktische toepassingen in het volle leven laten zien.

Een tweede kwestie, die mij speciaal interesseerde — en U vermoedelijk ook wel interesseren zal — is de positie, van de Wis- en Natuurkunde in het zg. „Core Curriculum”.

Een typische trek in alle progressieve onderwijs is de leus: opvoeden voor het leven door het leven; de tendenz om zo dicht mogelijk aan te sluiten bij en uit te gaan van de levenservaring van het kind. Een zeer begrijpelijke, zij het dan ook soms tot een ander uiterste dóórslaande reactie tegen het opstapelen van niet-functionerende kennis op het arme kinderhoofd, waar wij ons dikwijls aan bezondigen. Om in de Amerikaanse terminologie te blijven: het gaat hier om de strijd van een experience-centred curriculum tegen het subject-centred curriculum. Deze stroming, gepaard met de om nog andere redenen veldwinnende neiging de muren tussen de „vakken” te doorbreken, heeft daar geleid tot een experimenteren met een zg.: „kern program”. Deze „core” van het leerplan omvat „that aspect of the total curriculum which is *basic for all students* and which consists of *learning activities* that are organized *without reference to conventional subject lines*”. „Basic for all students” betekent, dat het ten doel moet hebben de opvoeding tot een democratisch leven (citizenship), de ontwikkeling van die competentie en dat verantwoordelijkheidsbesef, welke nodig zijn voor een burger van een democratisch volk.

Dit alles bevindt zich nog in het experimenteer stadium, zodat ik U geen bepaalde leerstof kan aangeven. Trouwens het is juist niet de bedoeling er een nieuw „vak” met een bepaalde leerstof van te maken. De te behandelen stof in de „core-class” zal bovendien sterk afhangen van de persoonlijkheid van de docent en de interesse-sfeer van hem en van de klas. Meestal beslaat deze „core” in de rooster een blok van 2 à 3 uren (per dag!), welke aan een begaafde leraar, onafhankelijk van zijn „vak”, wordt toegewezen, die bovendien dezelfde klas gedurende hun gehele High School loopbaan onder zich houdt. Toch is het opvallend, en in verband met het volgende betekenisvol, dat de „core-teachers” meestal Engels- of Geschiede-

nis-docenten zijn; ik heb tot mijn spijt geen enkele wiskundige onder hen ontmoet. Het „core-program” bestaat meestal uit een samenhangende reeks van sociale en persoonlijke „problemen”, welke door onderlinge samenwerking van alle leraren is opgesteld. Maar aan de „core-teacher” wordt een zeer grote vrijheid gelaten om aan de hand daarvan en in overleg met de leerlingen hun „learning activities” te organiseren. Ik kan daarop nu niet verder ingaan. De vraag, die ik hier wil behandelen is: „welke rol spelen de Wiskunde en Natuurwetenschappen daarin?”. Zo is de vraag echter niet goed gesteld. Want natuurlijk spelen deze (speciaal het Rekenen) een rol bij de discussie over en de oplossing van zulke „levens-problemen.

De vraag is eigenlijk: „Kan men de Wiskunde en de Natuurwetenschappen door dergelijke procedures effectief onderwijzen?” M.a.w. kan de jeugd in deze kennisgebieden een voldoende inzicht verkrijgen door „geassocieerd leren”? En dan is m.i. gebleken, dat het antwoord op deze vraag ontkennend moet luiden. *Als men werkelijk Wiskunde en Natuurkunde wil onderwijzen en leren, moet het uitgangspunt gekozen worden in de stof en niet in de levenservaring(en) van het kind.* Deze laatste is daarvoor niet voldoende!

Dit is m.i. ook wel begrijpelijk. Immers wel wordt door de aanpak „vom Kinde aus” de belangstelling bevorderd, maar om werkelijk *inzicht* te verkrijgen in de Wiskundige methodes en de Fysische verschijnselen, die men op deze wijze ontmoet, is het nodig deze in hun logisch verband te plaatsen. Anders blijven het trucs. Dit voert echter tot een beschouwen van verder verwijderde stof, dus tot tijdrovende omwegen, die de belangstelling en in de Wis- en Natuurkunde en in het op te lossen „probleem” juist zullen vermoorden. Daar komt nog bij, dat de Wiskundige en Natuurwetenschappelijke materie, die men langs deze weg ontmoet, te gering in omvang en te incidenteel, te veel aan toevallige omstandigheden (bv. kennis en interesse van de docent) onderhevig is.

Anders gezegd: het essentiële van deze „vakken” is hun systematische structuur en de „levenservaring” dient de stof juist verbrokkeld op, zonder het (essentiële) logische verband. Gaat men daar dan niet diep op in, en dit kan haast niet, dan wordt juist een verkeerd idee gegeven van de ware zin van wiskunde en natuurwetenschap.

Ik geloof, dat het wel mogelijk is voor het onderwijs in de lagere klassen van de Lagere School de kinderlijke ervaring als uitgangspunt te nemen. Maar de rijpere jeugd, speciaal de meer begaafde, die V.H.M.O. volgt, heeft behoefte aan, is rijp voor een andere aanpak. Ik ben het wel eens met dit citaat uit de „Harvard Report

on General Education": „But as one leaves direct experience and the immediate and familiar, an increasing need arises for an intellectual structure. The facts, and experiences, can no longer stand by themselves . . . As they become further removed from experience, more subtle, more abstract, the facts must be learned in another context, cultural, historical, philosophical. Only such broader perspectives can give point and lasting value."

Dit slaat niet alleen op de Natuurwetenschap, waarvoor het bedoeld is, maar ook; en nog sterker op de Wiskunde. Ongeorganiseerde ervaring, zoals Dewey steeds weer zegt, werkt niet opvoedend.

Bovendien is transfer zeker niet mogelijk vanuit het incidentele, de toevallige ontmoeting. Daarvoor is inzicht in de logische structuur van het kennisgebied noodzakelijk.

Daarentegen kunnen de „core-activities" wel de interesse in de Wiskunde en de Natuurwetenschap sterk stimuleren. Maar deze vakken dienen in afzonderlijke uren meer systematisch onderwezen.

Ook kunnen wij, docenten aan traditionele scholen, hieruit leren — en dit is belangrijk — dat het in contact brengen met het leven ons onderwijs zeer kan bevruchten. Dit „in contact brengen met" kan bestaan in het duidelijk belichten der „practische toepassingen" achter af of — beter nog, indien mogelijk — in een probleemstelling vanuit de dagelijkse ervaring aan het begin. Maar de „practijk" blijve illustratie!

Ik wil hier nog enige losse opmerkingen aan toevoegen en dan beginnen met er op te wijzen, dat uit mijn opmerking over de noodzakelijkheid om bij het wiskundeonderwijs het *uitgangspunt* te kiezen in de stof, gecombineerd met een volgende opmerking, dat het essentiële van de wiskunde in haar logische structuur gelegen is, niet geconcludeerd mag worden, dat het *beginnend* (meetkunde) onderwijs reeds direct dit essentiële moet accentueren. Allereerste heb ik in Amerika kunnen constateren, dat men 1° het eerste onderwijs in de meetkunde niet vóór de 3e of 4e klas der High School geeft en 2° dan nog steeds begint niet intuïtieve meetkunde, constructies, e.d., de formele bewijsvoering uitstellend tot de leerling met de grondbegrippen enigszins vertrouwd is geraakt. Dit heeft mij versterkt in mijn opinie, dat wij met het wiskunde onderwijs, speciaal het meetkunde onderwijs, later en in elk geval geheel anders dan nu hier de gewoonte is moeten beginnen.

Een andere opvallende zaak was, dat men daar bij het geven van proefwerken een uitgesproken voorkeur heeft voor „objective tests", waarmee bedoeld wordt een serie vragen, waarop de antwoorden of goed of fout zijn. Bv. invuloefeningen van het type: „The

bisectors of two consecutive angles of a parallelogram will always be . . . to each other because half of one angle of a parallelogram will always be . . . to half of either successive angle and any triangle containing two angles having this relationship will always be a . . . triangle" en „If each interior angle of a regular polygon contains 162° , the polygon has . . . sides". Men legt (daarnaast) soms ook een reeks van uitspraken aan de leerling voor, waarvan hij moet aangeven of zij steeds of soms of nooit waar zijn — bv. „If the diagonals of a quadrilateral are equal, the figure is a rectangle"; „Tangents drawn to a circle at the extremities of a diameter form with the diameter as base an isosceles triangle"; „The midpoint of the hypotenuse of a right triangle is the centroid of the triangle". Het 3de deel van het proefwerk bestaat dan uit een klein aantal „originals" (vraagstukken).

Men is nl. erg bang voor subjectiviteit in de beoordeling en schermt gaarne met geconstateerde grote verschillen bij de beoordeling van hetzelfde werk door verschillende deskundigen en zelfs door eenzelfde persoon op verschillende tijdstippen. Daarom voelt men daar niets voor gecompliceerde vraagstukken en vooral: mondelinge examens. Ik ben het daar niet mee eens. Mijn ervaring bij de Eindexamens en Staatsexamens wijst eerder op een verrassende overeenstemming in de beoordeling van schriftelijk werk, mits men van te voren het vraagstuk en de fouten analyseert. Een mondeling examen geeft bovendien gelegenheid gissen en vergissen te onderscheiden, mits men een zekere tact heeft en met sympathie de patient tegemoet komt.

Merkwaardig is tenslotte, dat men op de High School ook voor het wiskunde onderwijs de „unit"-idee heeft overgenomen. De leerling, die wiskunde koos, consumeert daar eerst een „unit" Algebra (d.i. 1 uur Algebra per dag gedurende 1 jaar), daarna in het volgende jaar een volledige cursus Planimetrie, dan weer een „unit" Algebra-voor-meer-gevorderden en een „unit" Trigonometrie en Stereometrie. Parallel-onderwijs in Algebra en Meetkunde, als bij ons, verdient m.i. beslist de voorkeur.

Het zal U intussen wel duidelijk geworden zijn waarom ik al spoedig geen speciale aandacht meer schonk aan het Wiskunde onderwijs op de High School en me richtte op Guidance, Student participation, de klas-discussie als onderwijsmethode, e.d. Het verschil in situatie en de aard der problemen was te groot om mij veel profijt van nadere studie te doen verwachten.

Het meeste overeenkomst vindt men nog in de „College-preparatory-courses", maar deze zijn wat leerstof betreft ouderwets en

geringer in omvang. Dit is echter slechts in het algemeen waar, want er bestaat ook op dit gebied een zeer grote variatie. Ik ben op scholen geweest waar men (bij wijze van typering) de limiet behandelt als een eindstation, waar men na een zeer lange reis eindelijk aanlandt, zij het dan dat men het grootste deel van de reis rustig kan slapen omdat er dan toch niets bijzonders meer gebeurt. Maar ik heb ook een school bezocht, waar door de inspirerende persoonlijkheid van een docent een vrij groot aantal leerlingen (allen jongens) de voor College-entrance niet verplichte Analytische meetkunde en Differentiaalrekening volgde. Tenslotte woonde ik een les bij (niet op een Junior College!), die ik nauwelijks volgen kon, omdat mijn kennis van de verschillende Integratiemethoden een beetje stoffig bleek te zijn geworden!

En toch heb ik er veel geleerd! Maar dan in deze zin, dat mij de mogelijkheid, ja de noodzakelijkheid meer bewust geworden is om zekere algemene paedagogische en didactische principes ook op het wiskunde-onderwijs toe te passen.

Ik ben meer gaan beseffen: 1° *De waarde van de innerlijke belangstelling* der leerlingen. Iedereen, die wel eens wat van De wey gelezen heeft en weet welk een enorme invloed hij in Amerika heeft, zal begrijpen, dat het wekken en richten der belangstelling een voorname rol speelt op de High School. Enerzijds, zoals we zagen, door uit te gaan van en aan te sluiten bij de levenservaring der leerlingen en anderzijds door met praktische toepassingen het onderwijs te verrijken. Wat zou ik dat ook graag doen — en wat weet ik er toch weinig van, „dank” zij opleiding en eigen, meer theoretisch gerichte interesse. Wat zou ik gaarne ook eens zulk een vacantiecursus mee maken, geheel gericht op de mogelijkheden de praktische toepassingen *in de klas* te brengen, met onderwerpen als „From Hypothesis to Conclusion in Science and Engineering”, „Mathematics and the Scientific method”, „Mathematics of Radar”, „Mathematics in Industry”, „Geometry of Crystals”, enz. enz. en met studiegroepen als „Enrichment of Mathematics”, „Consumer mathematics”, „Applications of Mathematics to Science and Engineering”, enz.

Een geheel jaarboek van de „National Council of Teachers of Mathematics” is ook aan deze kwestie gewijd.

2° *De waarde van de expliciete doelstelling*. Daar wordt in Amerika steeds grote aandacht aan besteed, omdat men overtuigd is, dat er slechts ware belangstelling kan bestaan, als men zich bewust is een waardevol doel na te streven en ten tweede dat er slechts van transfer sprake kan zijn, als docent en leerling beide zich bewust zijn wat overgedragen moet worden. Als men een of ander leer-

program bekijkt, dan bemerkt men, dat elk onderdeel met het stellen der „major objectives” begint. En dat niet alleen — er wordt ook aangegeven op welke wijze is te constateren, dat men voortgang maakt op de weg naar het doel (meestal met behulp van standaard-tests) — en dat is ook van het grootste belang.

Inderdaad, men zou eigenlijk elke les, in elk geval ieder nieuw onderdeel, moeten beginnen met een uiteenzetting omtrent het nagestreefde doel, zowel het specifiek wiskundig doel, als het algemeen opvoedkundig (leren denken, enz.). Dit „leren denken” bv. — wij hebben er de mond vol van, maar laten wij nu eens laten zien aan een algemeen sociaal probleem of schoolkwestie, hoe en waarom de wetenschappelijke systematische wijze van aanpak en behandeling zo belangrijk is!

Dit alles is van uitermate groot belang voor docent en leerling beide!

3°. *De waarde van de zelfwerkzaamheid.* Ook deze staat daar in het centrum, en wordt er niet alleen wat de mond beleden, maar metterdaad beleefd. Ik heb weinig Natuur- en Scheikunde lessen bijgewoond, maar in alle waren de leerlingen bezig met zelf te experimenteren. De instrumentenkast is bij ons veel rijker voorzien van allerlei demonstratie toestellen, maar daar zag men rijen van uniforme weegschalen, weerstandsbanken, e.d. voor de leerlingen proeven. In de kasten der Wiskundelokalen ziet men een groot aantal modellen en aan de wanden diagrammen en schilderstukken, door de leerlingen uit liefhebberij gemaakt — een duidelijke demonstratie, dat het mogelijk is met ons onderwijs in de Wiskunde dieper door te dringen dan tot het hoofd alleen, dat wij de jeugd zo kunnen raken, dat hij iets „beleven” gaat en tot expressie daarvan gebracht wordt. Ik denk dan ook aan alleraardigste gedichten(!) en opstellen (met als motto bv.: „God ever geometrizes” of „Numbers rule the universe” e.d.).

Ook de sfeer in de klas is veel actiever, het is een sfeer van samenwerken en samen discussieren. Wij, althans ik, praten veel te veel in onze lessen, dáár praten en denken de leerlingen veel meer mee. Ik denk aan die les in Chicago, waar de lerares met de overige leerlingen in een grote kring om de leerling-leider (bij toerbeurt) geschaard zaten. Om de beurt kwam een leerling voor het bord om een (huiswerk)som uit te leggen en vragen (niet van de lerares, maar van de medeleerlingen) te beantwoorden. De grote moeilijkheid is hier natuurlijk een juist evenwicht tussen vrijheid laten en leiding geven te bereiken!

4°. *De waarde van een anders georiënteerde opleiding.* Wiskundig

zijn de High School docenten veel minder, misschien wel te weinig, geschoold, maar psychologisch, didactisch, paedagogisch veel en veel beter! Bij de opleiding wordt ook veel aandacht besteed aan de Geschiedenis, de praktische toepassingen, de sociale en culturele rol der Wiskunde. Immers „they have to *sell* their stuff”!

5° *De waarde van goed georganiseerde docenten-experimenten*, experimenten op het gebied van didactiek en leerstof. Ik zal daar niet veel meer van zeggen na hetgeen ik daarover op de Algemene Vergadering van het Genootschap heb beweerd. In denk hierbij aan de „Workshops” onder leiding van een Teacher’s College of de Superintendent van het district en aan regelmatige conferenties der vakdocenten van één school onder leiding van hun „Head of the Department” (die uit hoofde van die functie minder uren geeft!)

6° *De waarde van de vrijheid*. Wil men experimenteermogelijkheden dan is er vrijheid nodig, met toestemming en *medewerking* van hoger hand (ik bedoel hier universiteit, gecommitteerden en Inspectie). Het is moófndend voor een leraar van een experimenterende school, als hij een gecommitteerde op het eindexamen krijgt, die niets voor dat systeem voelt, er niets van begrijpt en het werk dus volgens een niet-passende maatstaf beoordeelt!

Meer vrijheid is echter ook nodig voor de normale scholen. Geef ons gelegenheid in zekere mate ons eigen inzicht, eigen voorliefde, eigen interessen (en die der klas) te volgen door de verplichte stof te beperken en daarnaast keuzeonderwerpen te stellen.

Mijnheer de Voorzitter, ik behoef deze kwesties echter *hier* niet nader te bepleiten en er op in te gaan. Het is overbodig *mijn* uilen naar *Uw* Athene te dragen!

P. Wijdenes, *Boldriehoeksmeting*, 298 blz. 24×16 cm,
203 fig., P. Noordhoff N.V., Groningen—Djakarta 1950,
Prijs / 9,50; gebonden / 11,50.

Gedurende een lange reeks van jaren zijn *Boldriehoeksmeting* van J. Versluys en *Leerboek der Boldriehoeksmeting* door J. J. C. Westendorp in Nederland de werken geweest, waaruit belangstellenden in boldriehoeksmeting hun kennis hebben geput. In 1940 publiceerde Prof. Dr F. Schuh zijn *Leerboek der Boldriehoeksmeting* en thans is van de heer P. Wijdenes, de auteur van zovele bekende werken op wiskundig gebied, bovengenoemd boek verschenen met als ondertitel „tiende druk van J. Versluys: Boldriehoeksmeting”.

Het eenvoudige schoolboekje van Versluys is hiermede uitgegroeid tot een lijvig leerboek, volgens het voorbericht bestemd voor hen, die aan universiteit of hogeschool astronomie of geodesie studeren en voor diegenen, die zich bekwamen voor zeevaartkundige examens of voor de akte middelbaar wiskunde K 1.

Het boek is verdeeld in de volgende tien hoofdstukken:

- I. Inleiding; de bol en bolfiguren.
- II. Rechthoekige boldriehoeken.
- III. Scheefhoekige boldriehoeken.
- IV. De stellingen van Stewart, Menelaos en Ceva: de merkwaardige lijnen.
- V. De oppervlakte van een boldriehoek.
- VI. Om- en ingeschreven cirkels van boldriehoeken.
- VII. Herleiding van formules voor boldriehoeken tot formules voor vlakke driehoeken.
- VIII. Toepassing van de boldriehoeksmeting op de stereometrie.
- IX. Toepassingen van de boldriehoeksmeting op de wiskundige aardrijkskunde en op de sterrenkunde.
- X. De stereografische projectie.

Bij alle hoofdstukken is een aantal uitgewerkte voorbeelden (in totaal 100) en een groot aantal vraagstukken opgenomen. Onder de vraagstukken behorende bij hoofdstuk VI vindt men op blz. 158 (nos. 38 en 39) nieuwe formules voor de stralen van de in- en omgeschreven cirkels van een boldriehoek, door Prof. R. Roelofs gepubliceerd in *Mathematica A*, 13de jaargang 1944—1946, nos. 2 en 3. Het zou m.i. aanbeveling hebben verdiend als Schr. de eenvoudige en fraaie afleiding van deze formules in de tekst had opgenomen.

Zoals Schr. reeds in zijn voorbericht opmerkt, zijn niet alle hoofdstukken voor alle categorieën van gebruikers even belangrijk. Mogen de stellingen van Stewart en die van Menelaos of Ceva voor de wiskundige interessant zijn of de macht van een punt ten opzichte van een kleine cirkel (blz. 146), voor de lezers, die de boldriehoeksmeting als een hulpwetenschap beschouwen zijn zij van weinig belang, omdat ze in de astronomie, de geodesie, of de zeevaartkunde geen toepassingsmogelijkheden bieden.

Daarentegen is weer het gehele hoofdstuk IX aan de toepassing van de boldriehoeksmeting op de wiskundige aardrijkskunde en de sterrenkunde gewijd en met tal van goede voorbeelden en vraagstukken ter oefening maakt schrijver zijn

lezers met de hier besproken materie vertrouwd. Bij voorbeeld 97 (blz. 208) zou ik willen opmerken, dat de daar gekozen oplossing mij minder elegant voorkomt, omdat de mediaan TA in boldriehoek T (Zenith)-Ster 1-Ster 2 geen essentiële betekenis heeft. Beter ware het geweest de onbekende declinatie van het hemellichaam te bepalen uit boldriehoek P(ool)-Ster 1-Ster 2 waarna men uit driehoek TPS_1 of TPS_2 de gevraagde breedte kan berekenen.

De belangstellende in kaartprojecties vindt in hoofdstuk X enige eigenschappen van de o.a. in Nederland gebruikte stereografische projectie afgeleid.

In een vroegere beoordeling van een werk van de heer Wijdenes heb ik eens gezegd, dat Schr. zich zo gaarne richt naar de praktijk. Ook in dit boek komt dit weer sterk tot uiting, want in een tweetal uitstekende „aantekeningen”, de additamentenmethode en de methode van Legendre, handelende over de berekening van boldriehoeken op aarde en „transformatieformules” heeft Schr. zich de medewerking weten te verschaffen van de heer A. J. H. Meertens, hoofd van het Bureau van de Bijhoudingsdienst van de Rijksdriehoeksmeting. In „transformatieformules” geeft de heer Meertens met behulp van een figuur de afleiding van de hoofdformules uit de boldriehoeksmeting, de sinusregel, de cosinusregel en de sinus-cosinusregel (of zo men wil de cotangensregel). Ook voor mij is deze afleiding steeds de meest aantrekkelijke geweest; immers de formules, die voor rechthoekige boldriehoeken gelden zijn als bijzonder geval uit de hierboven genoemde te vinden.

Enkele bladzijden met formules, een register en de antwoorden van de vraagstukken zijn tevens in het boek opgenomen.

Resumerende: een boek, waarin zowel de studerende voor middelbaar wiskunde als de practicus genoeg zal vinden dat van zijn gading is en dat toch — om met de schrijver te spreken — eenvoudig is gehouden. Ik beveel het gaarne van harte aan.

N. D. HAASBROEK.

Verschenen:

Logarithmen-, Intrest- en Discontotafels

Uitgave E van

NOORDHOFF's LOG- EN RENTETAFEL
door

P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET

Zevende druk

Prijs met Hulpboekje f 4,50, geb. f 5,75

Uitgave: P. NOORDHOFF N.V. — Groningen - Djakarta

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Ter perse om spoedig te verschijnen:

Introduction of Linear Algebra

and

The Theory of Matrices

by H. SCHWERDTFEGER

f 15.—

In kunstleren band f 17.50

Zo juist verscheen:

Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie

door P. WIJDENES

7e druk

geb. f 13.—

Verschenen:

P. WIJDENES

BOLDRIEHOEKSMETING

298 blz., 203 fig., 29 voorbeelden f 9,50, geb. f 11,50

Inhoud:

I.	Inleiding; de bol en bolfiguren	1— 13
II.	Rechthoekige driehoeken	14— 44
III.	Scheefhoekige driehoeken	45— 97
IV.	De stellingen van Stewart, Menelaos en Ceva; de merkwaardige lijnen	98—119
V.	De oppervlakte van een boldriehoek	120—128
VI.	Om- en ingeschreven cirkel	135—158
VII.	Herleiding van formules voor boldriehoeken tot formules voor vlakke driehoeken	159—168
VIII.	Toepassingen van de boldriehoeksmeting op de stereo- metrie	169—176
IX.	Toepassingen van de boldriehoeksmeting op de wis- kundige aardrijkskunde en op de sterrenkunde	177—215
X.	De stereografische projectie	216—226
	Aantekeningen van A. J. H. Meertens De additamentenmethode en de methode van Le- gendre	227—236
	Transformatieformules	237—244
	Vraagstukken, formules, register enz. Antwoorden	265—292

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel