

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. MOOY EN Dr H. STREEFKERK,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - Prof. Dr. E. W. BETH, AMSTERDAM
Dr. R. BALLIEU, LEUVEN - Dr. G. BOSTEELS, HASSELT
Prof. Dr. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - Dr. L. N. H. BUNT, UTRECHT
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
Dr. H. A. GRIBNAU, ROSENDAAL - Dr. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
Dr. R. MINNE, LUIK - Prof. Dr. J. POPKEN, UTRECHT
Dr. O. VAN DE PUTTE, RONSE - Prof. Dr. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
Dr. H. STEFFENS, MECHELEN - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

26e JAARGANG 1950/51

Nr 1

WIJDENES-NUMMER

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8,00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8,00) zijn ingetekend, betalen f 6,75.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van de Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1950 t/m 31 Augustus 1951 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van f 5,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593, van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan Dr H. Mooy, Churchilllaan 107^{III}, Amsterdam, aan wie tevens alle correspondentie gericht moet worden.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, van Lennepaan 16. Latere correspondentie hierover aan Dr H. Mooy.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

I N H O U D.

	Blz.
Na 25 jaren	1
Uit de levensloop van P. Wijdenes	2
Dr H. STREEFKERK, De betekenis van P. Wijdenes voor de didactiek van de wiskunde	3
Artikelen van P. WIJDENES uit de eerste 15 jaargangen:	
Over het onderwijs in rekenen in de eerste klas van de H.B.S.	9
Voor het laatst twee vraagstukken?	24
De vergelijking $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$	35
Korrels I en II	39
De klinografische projectie	40

NA 25 JAREN.

Bij het beëindigen van de 25e jaargang heeft Wijdenes zich uit de redactie van Euclides teruggetrokken.

Het was een staaltje van durf, toen onder leiding van Wijdenes en Schogt in 1924 aan de abonneés van het N(ieuw) T(ijd)schrift) V(oor) W(iskunde) het eerste nummer van het „Bijvoegsel van het N. T. V. W., gewijd aan onderwijsbelangen” toegezonden werd. Zou het gaan, bestond er voldoende belangstelling voor didactiek onder de wiskundeleraren? De namen der medewerkers hadden een bekende klank: Dr H. J. E. Beth, Dr E. J. Dijksterhuis, Dr B. P. Haalmeijer, Dr D. J. E. Schrek, Dr P. de Vaere. Het eerste nummer opende direct al met een discussie in grote stijl: Dr Dijksterhuis onderwierp in het artikel „Moet het Meetkunde-onderwijs gewijzigd worden?” een verhandeling van Mevr. T. Ehrenfest—Afanassjeewa („Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven?”) aan een nader onderzoek (blz. 1—26); Mevr. Ehrenfest zette de discussie voort (blz. 47—59) en Dr Dijksterhuis besloot haar (blz. 60—68). De gehele discussie is nog steeds zeer lezenswaard.

Bij het begin van de 4e jg. werd het tijdschrift herdoopt in Euclides, tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken.

Eerst bij het begin van de 17e jg. werd Euclides officiëel orgaan van de verenigingen L.I.W.E.N.A.G.E.L. en W.I.M.E.C.O.S. Doordat de jg. 1944/45 overgeslagen moest worden, is de 25e jg. pas 26 jaren na de oprichting beëindigd.

Al die jaren was Wijdenes de ziel van het tijdschrift. Een gevoel van verlatenheid bekruipt ons: wat zal er van Euclides worden zonder zijn leiding?

Toen Wijdenes 75 jaar werd, heeft het N.T.V.W. een uitgebreid jubileumnummer aan hem opgedragen (35e jg. nr. III/IV, verschenen 22 Dec. 1947). Dit bevatte 22 artikelen met wetenschappelijke inhoud, geschreven door evenzovele wiskundigen, benevens persoonlijk getinte artikelen van H. Herreilers, F. C. Noordhoff en Prof. Hk. de Vries. De redactie van

Euclides meende daarom haar waardering voor de arbeid van Wijdenes op andere wijze te moeten uiten, en wel, door in een artikel de betekenis van W. voor het onderwijs in de wiskunde te schetsen, en dit te doen volgen door enkele markante artikelen, die W. zelf in de eerste 15 jaargangen gepubliceerd heeft en die voor een groot deel van de huidige lezers onbekend zijn. Zij hoopt, dat W. nog vele jaren het tijdschrift zal mogen lezen en ons van zijn daadwerkelijke belangstelling zal doen genieten.

DE REDACTIE.

UIT DE LEVENSLLOOP VAN P. WIJDENES.

P. Wijdenes werd geboren op 22 December 1872 te Opperdoes (bij Medemblik), werd onderwijzer, behaalde de lagere akten voor tekenen en wiskunde en de middelbare akten voor wiskunde en boekhouden (K_1 , K_5 en K_{12}). Hij was achtereenvolgens leraar te Almelo, Rotterdam en Amsterdam; gaf jarenlang een mondelinge cursus voor de akte K_1 , schreef vele leerboeken, richtte verschillende tijdschriften op (Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, Euclides) of gaf de stoot tot die oprichting (Christiaan Huygens, Simon Stevin, Compositio Mathematica); ook wekte hij hoogleraren op Nederlandse leerboeken voor de wiskunde te schrijven. Vanaf 1925 beweegt hij zich uitsluitend op het terrein der publicatie.

door de last van de overlevering van tientallen eeuwen; wat slechts een of twee eeuwen oud is, wordt als „nieuwigheid” in de ban gedaan.”

Zo iemand, dan heeft inderdaad Wijdenes in de afgelopen 35 jaar alles gedaan om hierin verandering te brengen en met veel succes. Hij legde o.a. de nadruk op de nieuwe en veel betere behandeling van de gelijkvormigheid met behulp van de vermenigvuldiging van figuren, op het gebruik van de affiniteit in de Beschrijvende Meetkunde, waarvan ook zijn vriend Prof. Dr Hk. de Vries (leerling van Wilhelm Fiedler) zo'n voorstander was.

Door hem deden de rekenwijze van Horner en de reststelling hun intrede in de Lagere Algebra en verdwenen veel overbodige bewerkingen met wortelvormen. Hij wees in zijn boeken en in tal van artikels op het grote nut van de grafische voorstellingen in de Algebra en de Goniometrie. Hij moderniseerde de oplossing van de onbepaalde vergelijkingen en gaf een handige methode voor de oplossing van de vierdemachtsvergelijkingen. In zijn meetkundeboeken maakten de leerlingen kennis met de stellingen van Menelaos en Ceva, met macht en machtijs, met de stelling van Desargues, met harmonische puntviertallen en vierstralen, met de volledige vierhoek en vierzijde, met pool en poollijn enz., in plaats van hun tijd te verbeuzelen met het construeren van driehoeken en vierhoeken uit de meest onmogelijke gegevens. Hij maakte duidelijke en handige logarithmentafels en rentetafels en was (en is nog) een groot voorstander van het decimale stelsel, waarbij een rechte hoek in 100 graden verdeeld wordt en dat door de landmeters reeds algemeen gebruikt wordt. Hij legde al in de Lagere Algebra de nadruk op de sigma- en pi-notatie, hij voerde handige afkortingen in, zoals bijv. $\cos \alpha + i \sin \alpha$. Door hem zijn ook de ongelijkheden hoe langer hoe meer in de lagere wiskunde doorgedrongen, waardoor ze ons in de hogere wiskunde veel minder dwars zitten.

Door de prachtige figuren in al zijn boeken, waarvan hij er duizenden zelf getekend heeft, wekte hij vele jeugdige beoefenaars van de wiskunde op het óók eens zo te proberen en verduidelijkte hij heel wat lastige gedeelten van de Stereometrie en de Beschrijvende Meetkunde. Hij was de man, die alles door voorbeelden duidelijk maakte en het geleerde door het laten maken van vele goed gekozen vraagstukken liet vastleggen en toepassen. Zodoende ontdekte hij ook een vereenvoudigde toepassing van de axonometrie, die hij de methode van het hellende tafereel (klinografische projectie) noemde.

Ik stip hier enkele dingen uit aan:

1°. *De affiniteit in Stereometrie en Beschrijvende Meetkunde.* Men leze hierover na: E. 7, 113; E. 8, 113; E. 13, 75.

2°. *Het moderniseren van de oplossing van de onbepaalde vergelijkingen van de 1e graad;* men zie E. 5, 122.

3°. *De tafels.* In E. 6, 244 begon Wijdenes een pleidooi voor het gebruik van de rechtstreekse tafels der goniometrische verhoudingen (1930). Het zou 1937 worden, eer het gebruik dier tafels op de M.S. officieel goedgekeurd werd; daar het eindexamen-reglement echter niet gewijzigd is, zijn er nog verschillende collega's, die menen, dat deze tafels op het eindexamen nog steeds verboden zijn; ze zijn echter ook daar toegestaan.

DE BETEKENIS VAN P. WIJDENES VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE.

Bijna had ik geschreven: de didactiek *der* wiskunde, waarmee ik bewezen zou hebben, W. in 't geheel niet te kennen. Ik hoor hem al vragen: zou je niet „*van de*” zetten? Dat is Nederlands. Ook dat behoorde bij W. tot de didactiek: het zuivere gebruik van de Nederlandse taal.

Reeds in E. 1, 79—80 (= Euclides — of Bijvoegsel —, jg. 1, blz. 79—80) besprak hij met instemming een boekje van den Z. Afrikaansen hoogleraar Arndt, die een lijst opgesteld had van woorden, die Z. Afrikaners zouden kunnen gebruiken ter vervanging van de Engelse woorden in de wiskundige vaktaal. Zelf propageerde W. reeds langer verschillende Nederlandse woorden, zoals *voorbereiding*, *uitvoering* en *bespreking* (voor analyse, constructie en discussie), *blok* (voor parallelepipedum), *opvolgend* (voor respectievelijk). Meermalen stuurde hij een schrijver een artikel terug met het verzoek, de vreemde woorden door Nederlandse te vervangen. Hij heeft een zuiver gevoel voor onze taalschat. Eens vroeg ik hem: is het evenwijdig *met* of *aan*? Wel, antwoordde hij, *met*, dat is *mede*; je loopt met iemand *mede*, dus: evenwijdig *lopen met* en evenwijdig *zijn aan*! Een andere keer vroeg hij mij, of ik een Nederlandse vervanging wist voor „actie en reactie”. Op mijn ontkenning klonk het zegevierend: „weer en tegenweer”. Het was echter geen conservatisme, dat hem dreef; hij vond het bijvoorbeeld dwaas, als iemand hardnekkig weigerde, met de nieuwe spelling mee te gaan. Dat conservatisme hem vreemd is, blijkt overigens uit zijn gehele arbeid, die toch niet anders geweest is, dan een voortdurende opstand tegen de overgeleverde opvattingen omtrent leerstof en methode. Ik neem hier een stukje over uit het artikel van Herreilers in het jubileumnummer van het N.T.V.W.

Op de omslag van de „Oplossingen van de vraagstukken uit de Meetkunde voor M.U.L.O.”, waarvan de 1e druk in Dec. 1914 verscheen, liet Wijdenes zeer terecht het volgende veelzeggende verwijt drukken: „De leerstof wordt gedrukt

In E. 13, 193 voerde W. het pleit voor de decimale verdeling van hoeken; tot nog toe tevergeefs.

Intussen kwam het nieuwe leerplan van 27 Mei 1937 af, waarin de tafels met 4 decimalen genoemd worden. Hiervoor had Dr D. P. A. Verrijp reeds in E. 2 („Bijvoegsel”) een lans gebroken, maar dan niet in de huidige uitvoering, waarbij men de logarithmen van getallen van vier cijfers zonder interpolatie kan aflezen; hij wilde de interpolatie handhaven, waardoor de gehele tafel (sinus-tafel — logarithmentafel — log. sinustafel) slechts vier bladzijden behoeft te beslaan, men zie zijn uitgave „Vierdecimalige tafels”, verschenen bij Noordhoff, 1926. Maar Wijdenes voelde niet veel voor deze tafels, die volgens hem slechts onnauwkeurig en onverantwoord cijferen in de hand werken en schreef in E. 14, 86 een groot pleidooi voor het behoud van de 5 decimalen. Dit bracht de pennen in beweging; men zie E. 14, 229 (Mej. Dr Bleeker en Dr. A. J. Staring) en E. 15, 14 (M. Eilander). W. heeft het pleit hier verloren, maar zijn bedoeling blijft waardevol: vereenvoudiging, goed, graag en veel; maar géén broddelwerk in de school!

4°. *De klinografische projectie.* Het was W. steeds een doorn in het oog, dat niet alleen leerlingen, maar ook leraren (getuige de figuren in de gebruikelijke leerboeken der Stereometrie) niet in staat waren om wiskundig verantwoorde figuren te maken van veelvlakken, kegels en cylindfers. Om daarin verandering te brengen propageerde hij eerst de scheve parallelprojectie; in het N.T.V.W. (jg. 22) beschreef hij echter een door hemzelf gevonden methode, die hij later in E. 15, 231 opnieuw publiceerde (het stereometrisch tekenen werd immers in het nieuwe program genoemd!). We hebben niet de indruk, dat het verantwoord vervaardigen van figuren sedertdien druk beoefend wordt; in ieder geval meende de redactie dit artikel in dit herdenkingsnummer te moeten opnemen.

5°. *De reststelling.* Hierover schreef W. in E. 12, 82, o.a. ter bestrijding van het telkens optredende misverstand, als zou het bewijs van de reststelling met behulp van de identiteit

$$f(x) = (x - a) Q(x) + R$$

niet geldig zijn, wegens „delen door nul”. In E. 12, 177 wijdde hij ook nog een korrel aan de reststelling; het was tevens korrel No. 1; de lezer vindt hem in dit nr. herdrukt.

Tot zover de toelichting bij het citaat uit Herreilers' artikel. Meermalen vatte W. de pen op, om de lezers tot een weerwoord

te prikkelen, en het proces van vernieuwing gaande te houden. In E. 4, 97 stelde hij de vraag „Eenwaardig of meerwaardig?” aan de orde. Het was nl. in die dagen nog niet algemeen gebruikelijk om 9 als wortel van $x + \sqrt{x} = 6$ te verwerpen. W. bepleitte, dat door beginnelingen de wortel verworpen moet worden, maar door gevorderden niet. Hij stuurde echter zijn artikel eerst naar de hoogleraren Wolff en Schuh, die er een naschrift bij schreven: beide hoogleraren wilden bij het rekenen met reële getallen aan het wortelteken alleen positieve waarde toekennen. Werkt men met complexe getallen, dan kan de zaak anders komen te liggen. In E. 4, 179 vond Dr D. P. A. Verrijp, dat men consequent moet zijn en ook bij complexe α aan $\sqrt{\alpha}$ slechts één waarde moet toekennen, en wel die met het kleinste positieve argument. Daarna deed Dr P. de Vaere in E. 4, 216 het voorstel, om, ook voor complexe α , onder $\sqrt{\alpha}$ steeds die waarde te verstaan, waarvoor $-\frac{1}{2}\pi < \arg. \sqrt{\alpha} \leq \frac{1}{2}\pi$ geldt. Dit laatste is inderdaad in overeenstemming met allerlei publicaties, o.a. van E. Hecke; E. Landau, H. D. Kloosterman, enz. Intussen is de zaak voor de school wel beslist: tegenwoordig is 9 geen wortel van $x + \sqrt{x} = 6$ en $\sqrt{(-3)^2}$ is niet -3 .

In E. 10, 1 stelde W. de complexe getallen aan de orde; hij wilde ze geheel uit de school bannen. Als $b^2 - 4ac < 0$ is, heeft $ax^2 + bx + c = 0$ in 't vervolg dus géén wortels. Wat daarover in de gebruikelijke boekjes stond, onderwierp W. aan critiek; tevens wekte hij de lezers op, om aan de redactie mee te delen, hoe zij er over dachten. Daarop trad in E. 10, 125 Prof. Mannoury in het krijt en bepleitte in een artikel „Over de onbestaanbaarheid van i ” de leuze: „liever géén i dan een onbestaanbare”. Hij wilde op de school i alleen accepteren als het dubbelgetal $(0, 1)$, niet als $\sqrt{-1}$; en i^2 alleen als het dubbelgetal $(-1, 0)$, en niet als -1 . Een zin uit dit artikel wil ik de lezers niet onthouden: „daarbij spreekt het, hoop ik, wel vanzelf, dat het niet mijn bedoeling is, dit alles in abstracte bewoordingen aan de leerlingen te *doceren*, maar wel, het hen aan de hand van geschikt gekozen voorbeelden te doen *ervaren*”. Deze zin is voor ons schoolonderwijs m.i. nog steeds van veel waarde. Overigens is de belangstelling voor deze dubbelgetallen-theorie in wetenschappelijke kringen al weer aan het tanen, en beschouwt men thans i als het symbool, waarmee het gebied der reële getallen uit te breiden is, om te komen tot een gebied, waarbinnen alle gehele rationale vergelijkingen op te lossen

zijn, als men de coëfficiënten uit dit gebied kiest; en dan speciaal als wortel van $x^2 + 1 = 0$.

Intussen had J. H. Schogt de ingekomen brieven verwerkt tot een „Enquête over i ” in E. 10, 133. Het bleek, dat er, naast vele voorstanders, ook nog vele tegenstanders waren van de afschaffing van i ; allerlei vraagstukken over de wortels ener vierkantsvergelijking werden nu in eens veel moeilijker (doordat nu steeds de nevenvoorwaarde $D \geq 0$ optrad). De tegenstand heeft niet mogen baten: i is afgeschaft.

Ook de notatie van lijnstukken werd door W. aangesneden; in E. 13, 1 ($\overline{AB}$ of $\overline{AB}?$). Hij achtte het onderscheid in spraakgebruik tussen lijnen en lijnstukken zéér nodig, maar niet in notatie; hij dacht géén verwarring. Dr D. P. A. Verrijp verklaarde zich, aan het slot van zijn „Didactische causerieën” E. 13, 62 vóór de streepjes, evenals Dr B. P. Haalmeijer (blz. 63) en J. H. Schogt (blz. 65), welke laatste, zoals bekend, naast $\overline{AB}$ nog onderscheidt $l(\overline{AB})$ en $m(\overline{AB})$, opvolgend voor de „lengte” en de „goniometrische maat” van $\overline{AB}$.

Verschillende malen oefende W. critiek uit op het eindexamen; zo in E. 11, 247: „Over het 1e vraagstuk van de driehoeksmeting in 1935 (H.B.S.-B)” en in E. 16, 133: „De gegevens in de werkstukken van het eindexamen in Beschrijvende Meetkunde”. Een heftige aanval echter deed hij in 1930 (E. 6, 263): „Voor het laatst twee vraagstukken?” Hierin vroeg hij om afschaffing van het stelsel van 2 vraagstukken, vooral voor de Algebra, en vervanging er van door 6 à 8 vraagstukken. Hij analyseerde daartoe verscheidene eindexamenvraagstukken en distilleerde daar een beter stel vraagstukken uit. We hebben het artikel in dit nummer, enigszins bekort, opgenomen. Het is nog actueel. Wel is in 1949 het tweetal Algebra-vraagstukken door een vijftal vervangen en in 1950 het tweetal Goniometrie-vraagstukken door een viertal, maar de vraagstukken ademen nog niet de door W. bedoelde geest. Men oordele zelf.

Nog vele andere zaken stelde W. aan de orde. Naast een 15-tal korrels schreef hij over: „De Wiskunde aan Kweek- en Normaal-scholen” (E. 2, 99); „Over het rekenonderwijs in de eerste klas van de H.B.S.” en in de tweede klas (opv. E. 3, 121 en E. 3, 197; het eerste artikel moge misschien naar de inhoud wat verouderd zijn; het stelt de didactische kwaliteiten van W. zodanig in 't licht en bevat nog zoveel leerzame wenken, dat we het den lezer in dit nummer, hoewel bekort, nog eens ter overdenking aanbieden); „Naschrift op een artikel van Prof. Schuh over gelijkwaardige

stelsels (E. 4, 238; Prof. Schuh stelde voor bij 2 vergelijkingen met 2 onbekenden uitsluitend de substitutiemethode te onderwijzen); „Over de onderlinge ligging van twee cirkels” (E. 7, 151); „De cyclometrische vormen” (E. 9, 80); „De vergelijking $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ ” (E. 9, 129; ook dit artikel vindt de lezer in dit nummer terug); „De gebroken rationale vergelijkingen” (E. 11, 241); „Diagram of grafiek (E. 14, 180; hierin spreekt W. van diagram, als de eenheden op de assen niets met elkaar te maken hebben; van grafiek, als de eenheden dezelfde zijn; hij laat zien, hoe een grafiek van $\sin x$ er uit behoort te zien, en hoe de figuren in vele boeken geen grafiek, maar een diagram van $\sin x$ te zien geven); „De ongelijkheden in de schoolmeetkunde” (E. 24, 283); „Evenwijdige lijnen in de schoolmeetkunde” (E. 25, 22) en „Tennissen met baggerlaarzen aan” (E. 25, 70). In dit laatste artikel keert W. terug naar een oud stokpaardje: de leer der evenredigheden.

Vanaf zijn eerste schoolboekjes heeft hij er steeds op gehamerd: een evenredigheid schrijve men niet $a : b = c : d$, maar $a : b = pa : pb$. Daarmee vervallen vele (alle) moeilijkheden. Zelf maakte ik met Wijdenes' methode kennis, toen ik in 1923 als onderwijzer de evenredigheden aan U.L.O.-leerlingen moest onderwijzen. Ik verwierp W.'s methode, omdat daarmee zoveel interessante bewijzen overboord gingen. Het is echt waar, lezer, ik was toen 19 jaar. Als ik echter bemerk, hoe weinig navolging W.'s methode tot op heden gevonden heeft, moet ik wel vragen: zijn de meeste leraren niet wijzer dan de 19-jarige jongeling? Wanneer zal eindelijk de deellijn van $\angle C$ in $\triangle ABC$ de overstaande zijde in de stukken pa en pb verdelen? Moge W. dit nog beleven, het zal de kroon op zijn werk zijn!

Zo heeft W. jaar in, jaar uit gewerkt aan de verbetering van het schoolonderwijs in de wiskunde. Zijn didactische ideeën door-drongen via zijn leerboeken en via Euclides het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs. Vele leerboekschrijvers uit de laatste decennia zullen nauwelijks beseffen, hoeveel zij bij hun werk te danken hebben aan de onvermoeide arbeid van W.

H. STREEFKERK.



P. WIJDENES

OVER HET ONDERWIJS IN REKENEN IN DE EERSTE KLAS VAN DE H. B. S. ¹⁾

door

P. WIJDENES.

Het is voor den gewonen leeraar niet mogelijk over „het onderwijs” in welk vak ook te schrijven, zonder dat hij er een ernstige studie van gemaakt heeft en daarvoor is toch zeker de eerste eisch, dat hij niet enkel zich zelf heeft gehoord, maar ook eens een 20 of 30 anderen en in de jaren, dat ik bij het M. O. was, heb ik nooit, ook nog geen half uur, geen kwartier, een collega aan het werk gezien. Anderen, zeker 99 %, kunnen mij dat nazeggen; bij andere vakken is het niet anders; ieder vormt zich zelf (of niet), ieder moet zijn gang maar gaan zonder ooit een ander tot voorbeeld te hebben; hoogstens heeft hij vage herinneringen, hoe zijn leeraren het deden of „niet deden”; als vakleeraar heeft hij slechts een paar voorbeelden uit zijn eigen schooljaren. Het woord „het”, het tweede woord van het opschrift, moet eigenlijk zijn „mijn”, eenvoudig, omdat ik niet *weet*, hoe anderen lesgeven; omdat ik geen uiting kan geven aan vermoedens als: „dat hoofdstuk wordt stiefmoederlijk behandeld”; „men hecht nog te veel waarde aan”; „het hoofdstuk wordt nergens naar den eisch onderwezen”, om de eenvoudige reden, dat ik dat niet weet, U, lezer, weet het ook niet. Hoogstens kan men, gezien het gebruik van bepaalde leerboeken, zoo ongeveer nagaan, welke stof de leeraar onderwijst en over de keuze van die stof kan men praten. Maar daarmee weet men nog niet, hoe hij het doet.

Als U goedvindt, dat ik zal praten over *mijn* onderwijs in rekenen, dan mag ik U ook wel verzoeken het mij niet kwalijk te nemen, dat ik een enkelen keer het „Rekenboek voor de H. B. S.” noem.

Als ik in September een eerste klas krijg met zes lessen wiskunde, twee voor meetkunde, twee voor algebra, twee voor rekenen, dan is het eerste werk deze zes uren zóó te zetten, dat de meetkunde

¹⁾ Bijvoegsel van het N.T.v.W. (thans Euclides), 3e jg (1926/27), nr. 4, blz. 121 e.v.; hier en daar bekort.

op een 1e of 2e uur valt, daarna heeft de algebra de keuze uit de overige 4 uren en voor het rekenen neem ik bij voorkeur een 5e of 6e uur, op Woensdag en Zaterdag een 3e of 4e uur; de beste uren voor meetkunde, dan komt de algebra en op het laatst het rekenen.

In September, October en November worden de beide uren rekenen, voor $\frac{4}{5}$ zeker, besteed aan het behandelen van de theorie; vat dat woord theorie niet al te zwaar op, lezer; mijn bedoeling zal U na verdere lezing duidelijk zijn. — Eerst bespreken we de begrippen: eigenschap, bewijs, bepaling, termen van de schaal, de drie waarden van een cijfer in een getal, het voorstellen van een getal door letters en meer van die dingen. Zeer degelijk wordt hun ingeprent, wat een bepaling is en hoe die zijn moet; eenige voorbeelden worden gegeven; alle bepalingen, door de leerlingen zelf gegeven, worden „afgemaakt”; we komen er toe, dat men alleen in de wiskunde juiste bepalingen kan geven; allerlei figuren uit de meetkunde worden in de rekenles gedefinieerd. En over „eigenschappen” weiden we uit en brengen ze onder woorden: $a + b = b + a$; ook $a : b = b : a$? Een tiental wordt genoemd en behoorlijk geformuleerd en de nadruk wordt gelegd op dit: als een verbinding van getallen iets bijzonders vertoont (b.v. verwisselbaarheid), dat andere verbindingen niet hebben, dan is dat een eigenschap van die verbinding, die moet worden vastgelegd in een bewering omtrent die verbinding; zoo’n bewering noemt men „eigenschap” of „stelling”. Ook worden eenige meetkundige figuren besproken; verscheidene keeren heb ik in een van de eerste lessen reeds de stelling van Pascal voor den cirkel vertoond. „Wat gek!” hoor ik mompelen. En toch, met wat een glundere snuiten wijzen ze op hun teekening, als het bij hen ook „uitkomt”. „Dat is geen toeval; het komt altijd uit; het *moet* uitkomen; en kunnen jullie nu begrijpen, dat er menschen zijn, die willen weten, waarom dat moet? Menschen, die er niet af kunnen blijven; die dit en zooveel honderden dingen meer, willen doorzien, doorvorschen en steeds nieuwe willen vinden en elkaar willen voorleggen? En dat een vraagstuk een mensch zoozeer in zijn greep kan hebben, dat hij net zoo lang werkt en wroet, tot hij omgekeerd het vraagstuk in zijn macht heeft”. Ja, zeker, met nog een paar van dat slag oreer ik wel eens een kwartiertje door; kostelijke opwekking, geen verloren tijd, integendeel. — Er wordt zeer sterk gewezen op het bestaan van eigenschappen van figuren en van verbindingen van getallen en ingeprent, dat deze moeten worden bewezen. Dat er met het begin van hun Rekenkunde en

hun Meetkunde de hand een beetje gelicht wordt, dat alles niet zoo formeel bevestigd wordt als in Schuh's Rekenkunde voor volwassen studeerenden of zij het eenvoudiger, maar zuiver in mijn Theorie der Rekenkunde voor kweekelingen van 15—19 jaar, die later zelf moeten onderwijzen en dus scherp moeten leeren onderscheiden, nou, dat is zoo erg niet; de jeugd is, wat dat aangaat, nog zoo weinig critisch aangelegd; een volkomen deductieve behandeling (indien die al door den leeraar wetenschappelijk te geven is) is voor leerlingen volslagen onmogelijk. Niet, dat ik misbruik wil maken van hun gemis aan critiek; à propos, dat zelfde gemis hebben geslachten volwassenen voor ons ook getoond, wij allen tot na onze examens (de grondslagen zijn het eind, niet het begin van onze studie en velen komen er nooit aan toe); noem de groote wiskundigen van voor 1850, van voor 1900; hoevelen, die onvergankelijk werk hebben geleverd, hebben niet boven de aarde gewerkt aan den boom der wiskunde met zijn geweldige kroon en zich om de wortels niet bekommerd; de geleerden zijn thans bezig niet aan de groote wortels, die hebben al een beurt gehad, maar aan de wortelvezels, inderdaad de levensbron! Wie het goed meent met de wiskunde, juicht dat ten zeerste toe, maar ook, dat men daarover het diepste stilzwijgen voor kinderen van 12 à 13 jaar bewaart. Men late zich niet verleiden tot praten (meer kan het niet zijn) over vragen als: „wat is een getal, wat is een eenheid, wat is meten?” Als U wetenschap doceert, gaat het over de hoofden heen, als het dat niet is, onttaardt het in . . . ; vul maar in. Geen van beide maken het beter noch gemakkelijker; hoogstens wekt het een onbehaaglijk gevoel van onzekerheid bij de kinderen.

Tot zoover over de inleiding van het rekenonderwijs; 2 à 3 lessen zijn voldoende om de begrippen op blz. 10 genoemd te bespreken en om een paar vraagstukjes mondeling te behandelen. Daarna ga men over tot de eigenschappen van de optelling, vervat in deze formules: 1) $a + b + c = b + c + a$; 2) $a + b + c + d = (b + c) + (a + d)$; 3) $a + b = a_1 + a_2 + b_1 + b_2$; 4) $(a + b) + p = (a + p) + b = a + (b + p)$. Hoe ik die behandel? De leerlingen hebben er nooit van gehoord en voor hen is dus de opzettelijke vermelding wat nieuws; ook het schrijven van heele zinnen met wat letters. De waarheid wordt op alle mogelijke wijzen aan hun verstand gebracht en de nadruk wordt gelegd op het feit, dat men met eigenschappen van sommen te doen heeft, dat de vervanging van de $+$ -teekens door andere teekens niet mogelijk is, tenminste niet in alle genoemde eigenschappen. Dit wordt ook

gedaan bij de eigenschappen van verschillen, producten, machten en quotienten. Verder wordt er op gewezen, dat de bewerking van optelling, die de leerlingen van de lagere school kennen, een noodzakelijk uitvloeisel is van deze eigenschappen, dat men ook na het onder elkaar zetten der getallen de kolommen van links naar rechts kan optellen; dat de algebra het volkomen goed doet en de schrijfwijze der getallen ons dwingt averechts te werk te gaan. Waarom dat alles gedaan?

Na de behandeling der eigenschappen, het leeren lezen van de formules, het betoog, hoe ze den grondslag voor reeds lang bekende bewerkingen leveren, komt het voornaamste, bestaande in haar toepassing op de algebra:

$7a + 3b + 2c + 2a + c + 5b$, waarvoor nu gezet mag worden $7a + 2a + 3b + 5b + 2c + c = 9a + 8b + 3c$ (dat $7a + 2a = 9a$ is, wordt terloops duidelijk gemaakt, later stevig bewezen; men kan er niet mee wachten); $7a + 3b + 2c + 8b = 7a + (3b + 8b) + 2c$; moet men $8a + 2b + 4c$ met $2a$ vermeerderen, voeg dan $2a$ bij $8a$; moet er $5b$ bij, tel dan op bij den tweeden term en $3c$ voegt men bij $4c$; dit zijn toepassingen van $(a + b) + p = (a + p) + b = a + (b + p)$. „Doet U dat nu wezenlijk zoo?” „Zeker en heel stevig”, „maar ieder kind doet dat uit zich zelf”. „Zeker, hij kan inderdaad wel wat handigheden leeren, wat techniek, maar de techniek van de algebra moet toch steun hebben in de eigenschappen der verbindingsen van de getallen. En dan moet ook het begin op een voor hen geschikte wijze stevig behandeld worden.

Waar moet men anders beginnen met de puntjes op de *i* te zetten? Bij de aftrekking „weten” ze ook alles nog vanzelf d.w.z. ze kunnen gedachteloos nadoen, wat hun voorgedaan is; bij de vermenigvuldiging, de producten, de gedurige producten, de machten? Sla maar over!! Neen, neen, integendeel, doe het stevig; de algebra steunt toch immers heelemaal op die eigenschappen. Niemand mag ze overslaan, noch kan ze overslaan, zonder dat zijn eerste jaar algebra verlaagd wordt tot onbegrepen techniek. „Ja, maar *ik* behandel die eigenschappen in de algebra-les”. „Dus geeft U toch dezelfde leerstof? Maar waarom er dan niet een behoorlijk eenvoudig geheel van gemaakt en dat geheel besproken met toepassingen op de algebra?” Ik voor mij vind (het meerendeel zal het met mij eens zijn) dat de theorie der rekenkunde in eenvoudigen vorm moet worden gegeven en dat dit voor de algebra niet dan winst beteekent. En ernstig moet ik waarschuwen tegen het: „dat doen ze toch vanzelf wel goed”. Hoe lang gaat dat? Tot ze zetten $(a + b)^2 = a^2 + b^2$? Dat kan

men ze wel technisch leeren:

$$\begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 + \frac{\quad}{2a + 2b}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 a + b \\
 a + b \\
 \times \frac{\quad}{a^2 + b^2}
 \end{array}$$

Maar het tweede moet worden behandeld; het „vanzelf” eindigt dus voor U vóór de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging; goed, dus zullen ook de eigenschappen der gedurige producten, machten en quotienten moeten worden behandeld; het gaat toch niet aan, als de leerlingen eenmaal hebben ondervonden, dat een bewijs noodig is, de volgende eigenschappen weer „vanzelf” te laten spreken.

Ik keer terug en begin aan de eigenschappen der aftrekking; daar heb ik bij de vraagstukjes dit: „Met hoeveel eenheden kan men laten zien, dat het verschil van 10 en 7 gelijk is aan 3?” Vraag het maar eens, de antwoorden zijn 20, 17; geen of een enkele meent van 10. Dit vraagstukje heeft een geschiedenis: een juffrouw zou in een eerste klasje van de lagere school proefles geven: rekenen, getallen tot en met 10. De juffrouw brengt 10 ballen van het telraam op de bovenste pen, 7 op die daar onder en beduidt een dreumes, dat hij moet aftrekken; hij kan het niet; een ander beklimt het trapje en weer een ander, maar geen een kan het; toen moest de juffrouw het wel zelf doen ze begreep toen pas (ze kon het natuurlijk ook niet) dat die 7, genoemd in den aftrekker, een deel zijn van die 10, die het aftrektal uitmaken. (Historisch). Het eenvoudige begrip van verschil was de juffrouw vreemd, al zal ze menig vraagstukje van het volgende slag hebben opgelost: van een aftrekking is de som van aftrektal, aftrekker en verschil 378, terwijl het verschil tweemaal den aftrekker is; bereken de drie getallen. Wel kan men zonder begrip techniek aankweeken; klaagde niet voor een jaar een professor, dat een leerling van de 3e klás H.B.S. tientallen vierkantsvergelijkingen met heel groote coëfficiënten had opgelost, maar dat het begrip „wortel” hem slechts vaag voor den geest stond of misschien wel gansch en al ontbrak. Men kan ze „leeren werken” met $\log - 8,25 = \log 8,25 (n)$; dat ze er niets van begrijpen, wat nood; ze doen het toch maar!! Ik meen wel eens een schoolboek onder de oogen te hebben gehad, waarin zoo-waar hetzelfde domme misverstand van die juffrouw zelfs door een figuurtje, in den trant van de twee rijen balletjes, was „opgehelderd”; zoo iets blijft je bij. Is het begrip fout, zelfs maar vaag, dan komt er van de rest niets terecht.

De eigenschappen van de aftrekking moeten goed behandeld worden, want ze leveren de noodige theorie voor het „haakjes weg-maken” uit de algebra; de 3 à 4 lessen over de aftrekking moeten die leerstof uit de algebra volkomen vastleggen. Ook moet men de theorie niet onderbreken met: „Jan en Piet knikkeren”, „koffie à en thee à”, „vleesch, dat 12 % indroogt”, enz.; de algebra eischt, dat we opschieten met de hoofdbewerkingen met letters. De weinige vraagstukjes moeten zijn versterking der theorie en oefening in het lezen van formules. Wat dat een werk is! En hoe bitter noodig het is! Laat ze eens lezen: $(a + b) - c = (a - c) + b = a + (b - c)$; vraag heelemaal niet naar het bewijs. Wees echter niet tevreden met: een som wordt verminderd met een getal, door het getal van een der termen af te trekken”. Ik vraag: en dan? Let maar op: $(a + b) - c$; hier staan twee bewerkingen; nu komt volgens bovenstaanden zin daarvoor één bewerking, nl. de aftrekking $a - c$. „Zoo zie je het toch altijd; de rest begrijp je wel!” Gaarne weer iets „historisch”. Op mijn KI-cursus had ik het over de zuiverheid van uitdrukking en zei, dat $(abc)^p = a^p b^p c^p$ niet aldus mocht worden gelezen: „een product wordt tot een macht verheven door elk van de factoren tot die macht te verheffen”, maar dat daar noodwendig achter moest: „en het product te nemen van de komende machten”; (in mijn Rekenboek zet ik: een macht van een product is het product van de gelijknamige machten der factoren). Een der candidaten sputterde tegen: „zoo zie je het overal; b.v. in en en” (namen van auteurs, die nu niet precies om hun degelijkheid bekend zijn): „Zeg ik het niet beter?” „Ja, dat is wel waar, maar iedereen weet de rest immers wel; dan hoeft het er niet bij”. „Dan hoeft je ook de halve stelling niet op te nemen, de eerste helft weten ze dan ook wel”. Nu wil het toeval, dat we op denzelfden avond de vermenigvuldiging van determinanten behandelen; ik zeg hen, wat er bedoeld wordt met de uitdrukking: een rij wordt met een rij vermenigvuldigd en dan: men vindt het product van twee determinanten van denzelfden graad door ieder der rijen van den eenen met ieder der rijen van den anderen te vermenigvuldigen. Basta. En mijn opponent is de eerste, die vraagt: „en dan?” Ik had hem flink te pakken; hij is, ik hoop, voor goed genezen en zal als leeraar aan een kweek-school nu niet meer genoegen nemen met: een verschil wordt met een getal verminderd; als men dat aftrekt van het aftrek-tal.

Ja, ook de kinderen wennen aan zuiverheid van uitdrukking. Onbegonnen werk? Den Moriaan gewasschen? Wel neen, niet zoo

erg als de juffrouw in de eerste klas van de lagere school, die de kleutertjes leert lezen of Uw pogingen om Uw zoon van 7 te leeren schaatsenrijden, of van den muzikleeraar met zijn eindeloos geduld om Uw dochttertje te leeren pianospelen. Eerst vrijwel een hopeloos geval, maar al doende wordt het beter en . . . de kinderen willen en wenschen na eenige maanden niets liever dan nauwkeurigheid, waarvan de graad door ons in hun welbegrepen belang wordt bepaald; waar de leeraar en het leerboek niet voorgaan, komt er van de leerlingen niets terecht.

Over de aftrekking niet meer. De behandeling der vermenigvuldiging volgt er onmiddellijk op; deze beide worden niet gescheiden door „sometjes”; ook nu: eenvoudige bewijzen, nauwkeurige uitdrukking, toepassingen op de algebra bij elke eigenschap en verwerking van de theorie-sometjes, die alleen gemaakt zijn om de theorie er goed in te stampen en de begrippen te verhelderen. Nog voordat we in de algebra aan het product van twee veeltermen toe zijn, hebben we deze in de rekenles zeer soliede onder handen genomen, zoodat ze door en door weten, hoe ze zoo'n product moeten bepalen. Deze theorie overslaan? Maar men *mag* ze niet overslaan, men *kan* ze niet overslaan, dit ten tweeden male:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \downarrow & 12a + 6b & \downarrow & \uparrow & 12a + 6b & \uparrow & 12a + 6b \\
 & 3a = 2b & \downarrow & & 3a + 2b & \uparrow & \frac{12a + 6b}{3a + 2b} ? \\
 + & & - & & & & \times \frac{12a + 6b}{3a + 2b}
 \end{array}$$

We *moeten* toch begrijpelijk maken, dat de bepaling van de som en van het product van twee tweetermen niet op dezelfde manier gaat. Ze doen het nog zoo dikwijls fout na een goede behandeling; hoe moet het gaan, als deze bewerkingen aan de intuïtie worden overgelaten of althans niet opzettelijk worden behandeld?

En hoe moeten we hun duidelijk maken, dat $\frac{12a + 6b}{3a + 2b}$ heelemaal „niet gaat”? Dan moet de bewerking van de overige verbindingen op iets gegrondvest zijn, waardoor de gevolgde gang daarbij wel goed is. — De behandeling van de vermenigvuldiging duurt 4 à 5 lessen. Over de gedurige producten (2 à 3 lessen), over de machten (GGD en KGV van ontbonden getallen worden vooreerst overgeslagen), die te behandelen zijn in 2 à 3 lessen en de deeling, die er 3 à 4 vordert, zeg ik verder niets om niet in herhalingen te vervallen. De algebra eischt, dat de leerlingen de theorie vervat in het volgende overzicht door en door kennen.

Daarvoor zijn noodig, zooals is voorgerekend, 24 lessen.

Overzicht der eigenschappen.

S.	$\left\{ \begin{array}{l} 1. a + b + c = c + b + a. \\ 2. a + b + c = (a + c) + b. \\ 3. a + b = a_1 + a_2 + b. \end{array} \right.$	M.	$\left\{ \begin{array}{l} 1. a^p \cdot a^q = a^{p+q}. \\ 2. a^p : a^q = a^{p-q}. \\ 3. (abc)^p = a^p b^p c^p. \\ 4. \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}. \\ 5. (a^p)^q = a^{pq}. \end{array} \right.$
V.	$\left\{ \begin{array}{l} 1. (a + b + c) - (p + q) = \\ \quad (a - p) + b + (c - q). \\ 2. A - B = (A \pm p) - (B \pm p). \\ 3. (A - B) + p = \begin{cases} (A + p) - B \\ A - (B - p) \end{cases} \\ 4. (A - B) - p = \begin{cases} A - (B + p) \\ (A - p) - B \end{cases} \\ 5. a + b - c - d + e = \\ \quad (a + b + e) - (c + d). \end{array} \right.$	G.G.D. en K.G.V.	
P.	$\left\{ \begin{array}{l} 1. ab = ba. \\ 2. p(a + b - c) = pa + pb - pc. \\ 3. (a + b - c - d)p = \\ \quad ap + bp - cp - dp. \end{array} \right.$	Q.	$\left\{ \begin{array}{l} 1. D = qd + r. \\ 2. \frac{a-b+c}{p} = \frac{a}{p} - \frac{b}{p} + \frac{c}{p}. \\ 3. abc : p = a \cdot \frac{b}{p} \cdot c. \\ 4. p : abc = \{(p : a) : b\} : c. \\ 5. \frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{ax}{by}. \\ 6. \frac{a}{b} : \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \times \frac{y}{x}. \end{array} \right.$
G.P.	$\left\{ \begin{array}{l} 1. abcd = badc. \\ 2. abcd = a(bc)d. \\ 3. p(xyz) = x(py)z. \\ 4. xyz \times p = x\{y(zp)\} \end{array} \right.$		

Ruim gerekend dus 24 lessen, dus voor 12 weken, zoodat men voor de Kerstvacantie er mee klaar is; zooals meer gezegd, is dat ook noodig. „En laat U de leerlingen thuis die theorie leeren? En overhoort U mondeling of schriftelijk?” Noch het eerste, noch het tweede of derde. Die eisch zou te zwaar zijn en bovendien is hij onnoodig. Wel laat ik hen de eigenschappen lezen van het bovenstaande overzicht; eerst met de bladzijde voor zich, waarop dit overzicht afgedrukt is, daarna met het boek dicht, kris kras door elkaar, en geen les gaat er voorbij, waarbij we niet een kleine herhaling houden. Zoo worden de eigenschappen hun eigendom; bedenk ook, dat men zich in de 12×2 uur algebra bezighoudt met dezelfde stof, zoodat alles meewerkt om de eigenschappen er muurvast in te krijgen. Wordt er een fout gemaakt als deze $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = a + b$, dan wordt die zeer degelijk besproken; hoe? „Kijk, als je een bewerking uitvoert, jullie weet het, moet die steunen

op eigenschappen; ga het rijtje maar langs; waar moet je zoeken?" „Bij de eigenschappen der quotienten". „Nu zie ik $(a + b) + p$, $(a + b) - p$, $(a + b) \times p$, $(a + b) : p$; $p + (a + b)$, $p - (a + b)$, $p (a + b)$ en $p : (a + b)$ zie ik niet; zeker vergeten. Jan, Schrijf jij er het antwoord eens achter (ik schrijf op $\frac{p}{a + b}$)". De jongen schrijft op, dat is vast, $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$. „Keurig,

hoor, ga maar zitten; wie is het met hem eens?" Alle vingers omhoog, hoogstens een enkele zittenblijver (die niet op wiskunde is blijven zitten) niet. „Eens probeeren: Marie, jij naar het bord en getallen nemen voor de letters: $\frac{48}{4 + 12} = \dots$ ". Marie wijfelt,

maar als ik wijs op $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$, komt er toch wel $12 + 4$; nu komt er algemeen verzet, want het is toch heusch maar 3. Ten overvloede: „als 4 meisjes en 12 jongens 48 centen moeten verdeelen

(letterlijk opdeelen) en de dames beginnen $\frac{48}{4}$, dan is er voor de jongen niets meer te verdeelen. „Nee, dat is fout: $\frac{p}{a + b}$ is niet $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$. Wanneer is een deeling goed? Is $1048576 : 512 =$

2048 goed? Even op een kladjje probeeren, maar niet deelen, hoor!" Ik loop rond en zie, dat ze door vermenigvuldiging de proef maken.

Nu probeeren of $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$ wel goed is; ik laat uitrekenen $\left(\frac{p}{a} + \frac{p}{b}\right)(a + b)$; ze hebben direct te pakken, dat het niet p wordt. „Dus dan is het fout, wat Jan heeft opgeschreven. Wie is het nog met

hem eens?" „Waarom ontbreekt een eigenschap $Q \dots \frac{p}{a + b} = \dots$?" „Omdat er geen andere manier is dan eerst $a + b$ optellen en daarna de som deelen op p . Iedere eigenschap drukt uit, dat

er twee manieren zijn om een uitkomst te krijgen; alleen $\frac{p}{a + b}$ is maar op één manier te berekenen." Op het bord komt heel forsch te staan: $\frac{p}{a + b}$ is niet $\frac{p}{a} + \frac{p}{b}$; ik mag de termen van den deeler

niet stuk voor stuk deelen op het deeltal. — Dan komt de fout $\frac{a^2 + b^2}{a + b} = a + b$ nog eens grondig aan de beurt. — De lezer vraagt, of ik dat nu echt zoo doe? Zeker en als het nog eens

voorkomt, doe ik het nog eens dunnetjes, maar scherp, over, dat verzeker ik U.

Ik laat ze dus de theorie niet leeren, noch weergeven, zoodat ze thuis niets te doen zouden hebben voor rekenen tot Kerstmis, als daar niet de sommetjes en cijferoefeningen waren achter in het Rekenboek; voor iedere les laat ik 1 of 2 van die dingen maken, neem een enkelen keer van de les een kwartier af, om er nog een of twee bij te laten maken. Maar eerlijk gezegd wordt daaraan geen bijstere zorg besteed tot Kerstmis; ik kijk ze na, geef zoo nu en dan een cijfer voor het werk en heb in dit schriftelijk werk een goeden steun voor mijn oordeel opgedaan bij de mondelinge lessen. Tot Kerstmis is het zoo veel en veel belangrijker, zooals gezegd, dat de theorie niet wordt onderbroken, noch dat de gedachten worden afgeleid in de rekenles met z.g. practische vraagstukken.

Ik ben nu gevorderd tot na de Kerstvacantie; ons resten nog 6 maanden, wat vacanties er af, zeg 22 schoolweken, dus 44 lessen; wat moet daarin gedaan worden? Kenmerken van deelbaarheid, G.G.D. en K.G.V. op beide manieren; alles met groote beperking; in mijn Rekenboek 2 + 6 bladzijden theorie en een 30 eenvoudige vraagstukjes, niet onderbroken noch gevolgd door vraagstukken uit de „practijk”. Maak toch die eenvoudige zaken niet tot iets gewichtigs; van de lagere school brengen ze de kennis reeds mee; een korte behandeling is meer dan voldoende; in geen geval, o, summum van gebrek aan inzicht, kenmerken van deelbaarheid door 7, door 13, 17, 19; niet, omdat dit te moeilijk is; ik zie best kans mijn klas in een les of vier alle kenmerken van deelbaarheid door 7, 13, 17, 19, 23, enz., enz. te leeren, maar bedenk toch, dat we geen „Theorie der Rekenkunde” geven, dat dit heelemaal *niet* het doel van onze rekenlessen is.

Wat ik dan wel doe? — Zoals gezegd, na de Kerstvacantie hebben we nog 44 lessen. De deelbaarheid eischt bij mij niet meer dan 7 à 8 lessen, de verhoudingen nog een stuk of 3, 4, samen zeg 14 à 15 lessen, niet aaneengesloten, maar verdeeld over alle maanden, zonder regel; heeft de klas net een paar uur mondeling les gehad in andere vakken, dan geef ik ze wat schriftelijk werk; kinderen willen graag zelf bezig zijn. En de evenredigheden? Die heb ik in de eerste klas zelden of nooit behandeld; die bleven voor September in de tweede klas over; van de behandeling, ik moet het eerlijk zeggen, maak ik geen heilig werk; als men uitgaat van de eenig goede vormen, steunende op de bepaling $a : b = pa : pb$ of $ap : a = bp : b$,

dan loopt alles zoo zeldzaam eenvoudig; ook weer als gevolg van de hulp- en hoofdacte-examens van vroeger, zijn die evenredigheden tot in het onzinnige uitgezet en opgeblazen tot iets, dat belangrijk scheen; het is bitter noodig, dat ze tot haar uiterst geringe proporties worden teruggebracht, „evenredig” aan haar onbelangrijkheid; maar waar er zooveel sleur heerscht en over ons onderwijs in wiskunde nog zoo’n dichte nevel hangt van dufheid en overlevering en schoolmeesterij en gebrek aan inzicht, gepaard met onverschilligheid en onderhouden door gemakzucht..... daar vrees ik, dat we nog lang houden:

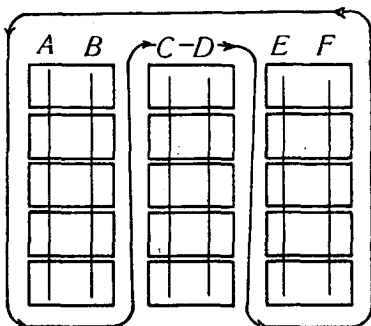
$$19\frac{3}{4} : x = 9.351m : \frac{1}{2,62486} a;$$

Van $a : b = c : d$ is gegeven $a + 3b = 5,857142$, $c + 3d = 11,714185$ en $a + c = 5,285714$; bepaal a , b , c en d .

Ik heb nu nog een kleine 30 lessen over in de eerste klas. Deze besteed ik vooral aan de vraagstukjes achterin mijn Rekenboek. Daarin komen heel wat cijferoefeningen voor, heel wat eenvoudige theorievragen, allerlei wetenswaardige zaken en dan wat sommetjes, die een vervolg zijn op het geleerde in de lagere school; geen raadsels, noch verkapte algebra, maar voor het overgrootste deel vraagstukjes met rechtstreeksche berekeningen, zoodat niet of nauwelijks voorkomt, dat ze een x kunnen stellen. „En welke waarde hecht U aan het maken van die sommetjes? U wilt schoonmaak houden en dan moeten die sommetjes toch zeker eerst opgeruimd worden?” Dat de leerlingen ontwassen zijn aan de gewone cijferoefeningen, aan eenvoudige vraagstukjes, dat zult U toch niet meenen, zeker? Hoe menigvuldig zijn niet de klachten, dat de leerlingen zelfs de meest gewone bewerkingen niet kunnen uitvoeren, dat ze opzien tegen getallen van 4 of 5 cijfers, dat ze later in algebra, natuurkunde, handelsrekenen, onvoldoende resultaten te wijten hebben aan slecht rekenen, aan slordigheid, aan onnauwkeurigheid? „Dus U denkt ze dat door die sommetjes af te leeren?” Afleeren is wat veel, dat weet U ook wel, maar wel kunnen we veel doen. Ik zal U zeggen, hoe ik die lessen geef.

Zonder iets te zeggen schrijf ik op (ik heb van te voren keuze gedaan) b.v. Serie XII, 1 en 5, XIII, 1, 5, 6; in een oogwenk zitten ze met hun boek en schrift en een stukje papier voor het uitcijferen voor zich en zitten te werken. Deze vraagstukken moeten alle zoo gekozen zijn, dat de leerlingen niet optornen tegen elk sommetje; het moet dus niet van het slag zijn, waarmee vroeger de leerlingen der

normaal- en kweekscholen geplaagd werden en die voor hulp- en hoofdacte werden opgegeven en dus zijn overgebracht op de H.B.S. Zelf neem ik het antwoordenboekje in de linkerhand (de meeste sommetjes zijn daarin voorzien van de volle becijfering) en gewapend met het roode of blauwe potlood loop ik regelmatig rond, waarbij ieder zijn beurt krijgt.



Loop ik langs rij A, dan kijk ik niets na van rij B of omgekeerd, noch geef ik antwoord aan een van rij E, die wat wil vragen; na een paar keer weten ze wel, dat ik bij allen eenige keeren kom; de rijen B en C, ook D en E worden gelijk nagezien; hoeveel keer ik rondloop? Geteld heb ik dat nooit, maar 10 keer zeker. Wat ik dan doe? De vraagstukken doen er niets toe, die schrijf ik hier niet op, ook niet de rekenfouten, wel de slordigheden, die men te zien krijgt. Het volgende is letterlijk overgeschreven van werk, door leerlingen gemaakt, een paar weken of een paar maanden na hun intrede in de 1e klas. De leeraren, die mij het werk van hun klasse leverden, zijn er in geen enkel opzicht voor verantwoordelijk.

1) ieder 13 15 over

$$6 \times 13 = 78 n$$

ieder 2. meer

dus toen waren er 39 k

$$\text{eerst waren er } 39 k + 6 k = 45 k$$

$$\text{er waren } 45 \times 13n = 585n + 14 = 600n$$

2) $\frac{1}{12}$ v/h werk; $\frac{9}{16}$ v/hw 3) A + B doen

4) Als meervoud van het woord kind tref ik aan: k, kind, kinde, kinder, kinden, kindere, kinderen; als meervoud van noot deze: n, noot, noote, nooten. 5) 12 dg. 6) In die 12 d dat A weg is heeft gedaan $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. Ze moet samen nog doen. C kan het werk dus doen

in $7\frac{11}{19}$ d. 7) B + C moeten nog doen $\frac{7}{16}$ v h werk B doet in die 3 dagen $\frac{3}{16}$. C doen $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ per dag doet C $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ hij kan het werk in 12 dagen doen. 8) Een oplossing van 13 regels (8 te veel!) zonder een enkele hoofdletter, zonder één leesteken; alleen achter w. die punt. 9) A doen; nodig; gewoone breuken. 10) 3 % van $f 4800 = 3 \times f 48$. 11) C heeft $\frac{7}{17}$ van B. de verh. van de aandelen van A B en C = 338 : 442 : 182. 12) 3 % v $f 4800 = f 147$. 13) De verhouden van A B en C = 13 : 17 : 7. 14) Verhouding 338 : 442 : 154 = 934. 15) A : B : C = 13 : 17 : 7 = 37. 16) In eenzelfde vraagstuk: per week, p week, per w, pw 17) De v loopt noch 12,5 KM voor ze elkaar ontmoeten = 2,5 uur (v = voetganger).

Ieder van U kan deze fraaie verzameling met bladzijden vermeerderen; geen leestekens, geen hoofdletters, puzzles van afkortingen, taalfouten bij dozijnen, alle mogelijke en onmogelijke rekenfouten, grenzenlooze slordigheid in alles en dan ook in alles, om nu maar te zwijgen van het schrift der leerlingen, dat over het geheel zelfs niet aan de allermatigste eischen voldoet. „En wilt U daarop wijzen? Maar dat is een onbegonnen werk!” In letterlijken zin niet onbegonnen; men moet er zoo spoedig mogelijk mee beginnen (zooals gezegd, is er voor Kerstmis wegens de dringende behoefte aan steun, die de algebra eischt, weinig of geen tijd voor); begin er aan, zooals de boer aan een akker vol onkruid; doe het met kracht en doe het aldus: loop rond; weiger vraagstukjes, die niet in zinnen met onderwerp en gezegde zijn opgeschreven; haal er een flinke streep door: „straks hoor, eerst netjes opschrijven”. Vuil schrift met veel doorhalingen, het heele blaadje uitgescheurd. Geen hoofdletters, geen punten? Eerst verbeteren. Afkortingen? v/h kap, int, perc, pw, p dag, vertr, versch, pr, enz. enz. Die maak ik bespottelijk voor allen door op het bord te schrijven: $7 m + 2 v$ verd $p w f 129$ (ook geen phantasie, lezer, maar droeve werkelijkheid); $kap = 200 + f 3000 = f 3200 = 5 \%$ dus andere kap $f 64000$. Algemeen voorkomende slordigheden worden op het bord behandeld: „de pennen neergelegd, let op”. Op het bord schrijf ik: „Jan + ik be—n + 1 goed + $\times$ tijd”. Dat gaat niet, dat vinden ze ook wel, maar „A + B doen” schrijven ze met plezier: „Als ik zoo iets weer zie, moet je toch de som overmaken”. Na eenige weken is het werk wel niet volmaakt, maar reeds dragelijk; van lieverlede wordt het beter, mits men zelf niet versaat in den strijd tegen knoeiwerk. — Meer

werk heeft men met andere fouten, opgenomen onder 11—15. Het is niet voldoende, dat het antwoord er staat, wat, als gevolg van het knoeiwerk, ook te dikwijls mist; ook op den vorm en den inhoud dient gelet. Zulke slordigheden als $45 \times 13n = 585n + 15 = 600n$ en die onder 11—15 worden klassikaal besproken en er wordt uitgelegd en er wordt opgeschreven, hoe het wel moet. Op kleinigheden wordt elk der leerlingen bij de rondgangen afzonderlijk gewezen; zoo'n rekenuur is voor de leerlingen tevens een netheidskuur in vele opzichten. Als ik dan weer rond kom en het aangewezen is verbeterd, dan wordt de som met een groote G goedgekeurd. Voor de kinderen een genot, als ze zien, dat ze opschieten en voor mij ook nog zoo kwaad niet (we mogen ook wel eens aan ons zelf denken; ik durf dat hier gerust zeggen, want niemand zal mij verdenken van „liever lui dan moe"); als het uur immers om is, dan heb ik $\frac{4}{5}$ van het werk al gezien en goedgekeurd en heb ik tevens een norm voor de toe te kennen cijfers; de schriften opgehaald, meegenomen; de rest van het nakijken en het cijfers geven duurt nauwelijks nog een kwartier; slordigheden, waarvoor geen tijd meer was ter verbetering, worden niet zoo zwaar geteld, ook niet aangestreept. We kennen allen de uiterst geringe belangstelling (voor de jongeren, onder ons, die zooveel uren besteedden aan het aangeven en verbeteren van foutjes zelfs sarrende onverschilligheid) voor al die roode en blauwe streepjes in het werk, dat ze na een paar dagen terugkrijgen; „Wat heb jij?" „Een 4"; ze zouden er liefst een prop van maken en die in den prullenmand keilen. „Fijn, jo, ik een 7". Dat is alles. Dwingen tot belangstelling veinzen? Laat het a.u.b.

Het groote voordeel van het voortdurend en nooit aflatend toezicht is, dat het geschiedt op het oogenblik, dat het werk wordt gemaakt; op elke slordigheid wordt onmiddellijk gewezen, elke fout wordt dadelijk aangestreept; de leerlingen worden om zoo te zeggen op heeterdaad betrapt bij het neerschrijven van domme dingen en van onvolkomenheden van den vorm met het niet geringe en door hen hoog geschatte voordeel, dat de som na verbetering nog wordt goedgekeurd; schrijft hij $\frac{265}{234} \times \frac{26}{53} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$, dan zet ik door de 3 van $\frac{3}{9}$ een streepje; bij den volgende rondgang, als $\frac{3}{9}$ in $\frac{5}{9}$ veranderd is, wordt de som goedgekeurd; zet hij: $3\% \text{ v. } f 4800 = f 147$, dan haal ik er een streep door, wijs even (zeg niets) op zijn foutjes; heeft hij bij den volgende rondgang verbeterd: $3\% \text{ van } f 4800 \text{ is } f 144$ of $3\% \text{ van } f 4800 \text{ is } 3 \times f 48 = f 144$, dan wordt de som, als dat de eenige fout was, goedgekeurd. — Nog een voorbeeld: als een goed

deel der leerlingen een zelfde fout maakt of toont, niet voort te kunnen of een zelfde onhandigheid begaat, dan heb ik dat direct in de gaten; even de pennen neer en een soortgelijk geval op het bord heel kort behandeld.

Een enkel vraagstukje, nauwelijks één op de twintig, behoeft opzettelijke behandeling; daarop zijn ze gemaakt.

Niet genoeg kan ik er op drukken, dat toch vooral gelet wordt op ordelijke en nette uitvoering van het werk; ik hoop U in het kort te hebben laten lezen, hoe ik dat trachtte te doen en met succes. Vitterig moet men niet zijn, men behoeft niet op alle slakken zout te leggen en als de oplossing er mee door kan, keur dan maar eens een sommetje goed, al is er nog wel wat op aan te merken. Het werk van de leerlingen moet in elk geval worden nagezien, waarom dan maar niet, terwijl het gemaakt wordt? Ook het huiswerk, wat niet beteekent, dat men er telkens een cijfer voor moet geven. Niets zoo ontmoedigend voor een leerling, dan dat er geen nota wordt genomen van de vruchten van zijn inspanning; de ijver, waarmee hij begint, verflauwt al heel spoedig en zijn lust voor het heele vak wordt gebluscht; collega's: „het oog ven den meester maakt het paard vet”; nu is een vet paard wel geen ideaal, maar het spreekwoord wil het nu eenmaal zoo. Voor U beteekent het: *terwijl het werk gemaakt wordt*, kijk dan, hoe het gaat, wijs terecht, verbeter, help den leerling over het doode punt heen, leid hem, moedig hem aan en als het werk af is, toon dan Uw belangstelling door het verder na te zien en te keuren; eisch weinig huiswerk (cijferoefeningen, metriek stelsel, zijn daarvoor zeer geschikt), maar neem daar ook nota van. Mishandeling van het kind noem ik het, als de klasse ervaart (geen phantasie, maar gemeene werkelijkheid): „je schrijft maar wat op, als het goede nummer er maar voor staat, dan is dat genoeg”; als je op je aandringen thuis om toch zijn best te doen van den leerling hoort: „waarvoor, hij kijkt er toch niet naar; ik kan mijn tijd beter besteden voor . . .”; noem maar een vak lezer. „Rapportcijfer? Eén repetitie; als je boft, heb-je een 8, als je wanboft een 3”.

Uiteraard werkt een kind graag, maar het moet werk zijn naar zijn krachten; men wake er tegen, dat hij tegen de helft of meer van de stof optornt.

De rekenlessen, zooals ik die geschetst heb, zijn zoo'n kostelijke oefening, een genot voor de leerlingen, voor den leeraar ook en een welkome afleiding van de „zit-stil” en „luister”-lessen.

VOOR HET LAATST TWEE VRAAGSTUKKEN? ¹⁾

door

P. WIJDENES.

Tot en met 1916 gaf men voor het vak Algebra voor het eindexamen H.B.S. met vijfjarigen cursus drie vraagstukken te maken in 3 uur; van 1917—1923 één in 1 uur, als we voor de beide vraagstukken over Driehoeksmeting ook elk 1 uur rekenen; sinds dien zijn de vakken weer gescheiden en sinds geeft men twee algebra-sommen, te maken in 2 à 2½ uur; we kunnen dus gerust zeggen, dat men per vraagstuk een vol uur rekent. Uiteraard vraagt men slechts naar zaken, waarvan men vrij zeker is, dat de stof behandeld is, hetgeen voor een schoolexamen natuurlijk niet anders kan. Het ligt dus in de reden, dat men naar meer dan twee zaken een onderzoek instelt; immers men kan slecht enkelvoudige vraagstukken geven, waaraan een uur werk zit, tenzij deze veel cijferwerk eischen. Onder deze laatste kunnen we alleen de vraagstukken over samengestelden in-trest rangschikken, zoolang men zich stelt op het verouderde standpunt, dat deze niet mogen worden opgelost op de eenvoudigste en de beste wijze, nl. met behulp van rentetafels.

Men zal dus ontwaren, dat de andere vraagstukken eigenlijk verbindingen zijn van meerdere vraagpunten. We nemen als voorbeeld het eerste vraagstuk van 1916.

1916 (nr. 1) Van de vierkantsvergelijking

$$A(\sqrt{3} - \sqrt{2})x^2 + \frac{B}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}x + C = 0$$

is gegeven:

$$A = \sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}},$$

B = de som der oneindig voortlopende meetkundige reeks

$$8\sqrt{3} + (8\sqrt{6}) \times 3^{-1/2} + 16 \times 3^{-1/2} + \dots \text{ enz.}$$

Het verschil der wortels is

$$(6\sqrt{6})^{\log 10 - 2 \log \sqrt{\log 5} + \log \sqrt{\log 18 + \log 72}},$$

¹⁾ Euclides, 6e jg. (1930), nr. 5—6, blz. 263 e.v.; hier en daar bekort.

waarbij als grondtal van het logaritmenstelsel 6 is aan te nemen.

Gevraagd de waarde van C te berekenen.

Men onderzoekt hierin:

1. wortelvormen, aan het begin, in het tweede punt en in het laatste punt; van het goede een beetje te veel;
2. bekendheid met de formule $s = \frac{a}{1-r}$ van een convergente meetkundige reeks;
3. eigenschappen van logaritmen;
4. eigenschappen van de wortels van een vierkantsvergelijking;
5. oplossing van een vierkantsvergelijking.

De vragen 1—4 moeten alle goed zijn opgelost, anders mislukt nr. 5.

Tegen zoo'n aaneenrijging van vraagpunten in één opgave bestaan m.i. ernstige bezwaren; het gevaar is lang niet denkbeeldig, dat een leerling niet op al te goeden voet staat met vormen als

$$(6\sqrt{6})^{\log 10 - 2\log \sqrt{5} + \log \sqrt{\log 18 + \log 72}},$$

(ik zou het hem bijna als een deugd aanrekenen), en alleen daarom zich niet waagt aan het vraagstuk, hoewel hij vier van de vijf onderdeelen wel aandurft; hij werpt zich op het andere vraagstuk. Stel, dat hij dat maakt en nog wat maakt van de vijf vragen in nr. 1 vervat, dan zal zijn werk (het bevat altijd wat tarra) met 5, hoogstens 6, worden betaald. Beteekent dat nu, dat hij maar amper aan voldoende is? Zeker niet; als het eerste vraagstuk gesplitst was in vijf enkelvoudige vragen, die elk op zich zelf beoordeeld werden, dan had hij er daarvan 4 goed gemaakt, zeker 3. Nu mist hij de helft, omdat hij in $\frac{1}{5}$ van één der opgaven niet thuis is. Gewoonlijk is het tweede vraagstuk ook een samenstelling van meerdere vragen; als het gaat over samengestelden intrest, een geliefd onderwerp, dan beteekent dit, dat men van hem eischt, dat hij weet:

$$1) \quad s_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1};$$

- 2) dat hij een lineaire vergelijking kan oplossen, bv.

$$x \times 1,05^6 \frac{1,05^{10} - 1}{0,05} = 1000 \times \frac{1,05^6 - 1}{0,05};$$

- 3) dat hij den eindvorm met logaritmen kan uitrekenen, bv.

$$x = \frac{1000 (1,05^6 - 1)}{1,05^6 (1,05^{10} - 1)}; \text{ alweer drie vragen dus.}$$

Geeft men dus een vraagstuk als op blz. 24 is afgedrukt en een over

samengestellten intrest, dan wordt onderzocht: 1) wortelvormen; 2) $s = \frac{a}{1-r}$; 3) eigenschappen van logarithmen; 4) eigenschappen van de wortels van een vierkantsvergelijking; 5) de oplossing daarvan; 6) $s_n = a \frac{r^n - 1}{r - 1}$; 7) oplossing van een lineaire vergelijking, 8) het cijferen met logarithmen.

Deze alle acht kunnen en mogen worden gevraagd, daarop zijn de leerlingen afgericht en ook op de keus en de zwaarte van elk afzonderlijk valt niet de minste aanmerking te maken. De leerlingen, die 6 van deze 8 vragen goed beantwoorden, hebben recht op een goed cijfer; volgens de tegenwoordige regeling is het echter mogelijk, dat hij ze alle 8 kent, zich echter in een onderdeel van elk der twee sommen vergist en geen van beide sommen goed maakt en een onvoldoende krijgt. Stel, dat hij zet $\sqrt[4]{49 + 20\sqrt{6}} = \sqrt[4]{49 + 2\sqrt{600}} = = \sqrt{\sqrt{25} + \sqrt{24}} = \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{5} + 1$, in plaats van $\sqrt{3} + \sqrt{2}$; een foutje, dat nogal voorkomt; $\sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$ en $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$ kennen ze beide zoo goed, dat ze de uitkomst er dadelijk achterschrijven; dat foutje mag niet voorkomen, zeker niet, maar het komt voor. Voor het maken van het vijfledige vraagstuk heeft deze fout tot gevolg, dat hij in elk geval $\frac{2}{5}$ van de som mist, want de uitkomst moet nog eens worden gebruikt. Gaat een leerling pas de som in het net schrijven, als hij deze op het klad goed uitgekregen heeft, dan komt er niets op het papier, dat hij inlevert; nog wat tarra in de tweede som en zijn leeraar moet hem een 4 geven en deze zegt: „daar begrijp ik niets van; hij had toch zeker werk voor een 7 of een 8 kunnen maken”, en de leeraar geeft den steller van de vraagstukken en den raadgevers van de inspecteurs de schuld; terecht.

Er is alles tegen, bij mijn weten niets voor, om samengestelde sommen te geven, elk te maken in een uur; ik zie geen enkel voordeel; het nadeel heb ik aangegeven en ik hoop, dat men voortaan breekt met de vraagstukken op te geven, als thans gebruikelijk is. Het euvel dateert al van jaren terug, maar neemt steeds scherpere vormen aan; in Gerrits Eindexamenopgaven ziet men al meerdere vraagpunten in de opgaven uit de vorige eeuw; over het geheel steken deze echter gunstig af bij die van de laatste 25 jaar; vooral na 1900 beginnen de leelijke sommen met veel cijferwerk en meerdere onderdeelen; het algebra-werk werd logger, lomper en tot op heden is er weinig verandering ten goede te bespeuren; heel veel vraagstukken zijn typische voorbeelden van „hoe het niet moet”; neem

bv. 1904 (nr. 3). Los x en y op uit:

$$\left(\frac{6x}{2x+y}\right)^{\log 5} + \left(\frac{6x}{2x+y}\right)^{-\log 5} = \log 625$$

en $\log \log (x^2 + xy + y^2) = \log 25^{2 \log 2} + \log (\log 4 - \log 2)$.

Het grondgetal van het logaritmenstelsel is 25.

1911 (nr. 2). Bepaal de waarden van x , die voldoen aan de vergelijking:

$$x^{\log(x)^2} + x^{\log x} - 84 = \log 60 - \log 24 + \log 4 - \frac{5 \log 5}{\log 0,01} \times \frac{10^{\log 4}}{\log 25}$$

1914 (nr. 1). Van een evenredigheid is de eerste term $4a$, waarin a de limiet is van de oneindig voortlopende reeks:

$$\frac{7}{5} + \frac{17}{200} + \frac{7}{500} + \frac{17}{20\,000} + \frac{7}{50\,000} + \frac{17}{2\,000\,000} + \dots$$

De tweede term is gelijk aan $125^{5 \log 2} + 3^{9 \log 16}$.

De derde term is de positieve wortel van de vergelijking:

$16x^2 - 56x + p = 0$, waarvan gegeven is, dat het verschil van de vierkanten der wortels = 14 is.

Welke is de vierde term?

1929 (nr. 1). Bereken p , q , en r als gegeven is, dat:

a. p is gelijk aan den zesden term van de rekenkundige reeks, waarvoor $S_n = \frac{1}{3}n(n+1)$; hierin stelt S_n voor de som van de eerste n termen dezer rekenkundige reeks:

b. $q = {}^5\log \frac{1}{25} - {}^7\log 81 \times {}^3\log 7 - {}^9\log 0,01$, waarin $g = \sqrt[3]{0,1}$ is;

c. r gevonden wordt uit de vierkantsvergelijking $16x^2 + 3x + r = 0$, als men weet, dat de wortels van deze vergelijking elkaars omgekeerden zijn.

Substitueer daarna de gevonden waarden voor p , q en r in de vergelijking $px^2 + qx + r = 0$. Als x_1 en x_2 de wortels zijn van de vergelijking, die door deze substitutie ontstaat, stel dan een nieuwe vierkantsvergelijking samen, waarvan de beide wortels respectievelijk gelijk zijn aan $x_1^3 + 2$ en aan $x_2^3 + 2$ zonder daartoe x_1 en x_2 te berekenen.

Ik heb er maar een stuk of wat uitgenomen; de rest is niet veel beter; vooral die laatste som van 1929 doet de deur dicht. Men vraagt naar:

- a. het begrip s_n van een rekenkundige reeks;
- b. het begrip logarithme;

c. de eigenschappen van de wortels van een vierkantsvergelijking;

d. de transformatie van een vierkantsvergelijking.

Een leerling, die enkel weet $l = a + (n - 1)v$ en $s = \frac{1}{2}n(a + l)$, waarom zich in verouderde boeken de heele behandeling beweegt, zit radeloos verlegen met de eerste vraag . . . het examen, een tocht met hindernissen, begint er al met een, waar hij niet overheen komt; natuurlijk heeft dit op den armen jongen een allerslechtsten invloed; „verder, ja, b, c, d zijn gemakkelijk”. Een ander, die niet is afgericht op ${}^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$ (dressuur alleen leidt hier tot het doel), omdat zijn leeraar dat volstrekt onnoodig acht gezien uit den ooghoek van het aanbrengen van wiskundige begrippen, wel, die ziet tegen b op. Een derde vergist zich bij het uitwerken van b , enz. enz. Om in de helft van het werk te falen, is het al voldoende, dat de leerling een kwart mist van de vereischte kennis of vaardigheid of handigheid voor die helft noodig, tot groote schade van den candidaat, maar tot . . . , ja, tot wiens voordeel eigenlijk? Dat wou ik wel eens hooren. Ik betwijfel of daar een voldoende antwoord op komt.

Wat is er nu tegen om deze eindexamensom aldus op te geven:

1. Van een rekenkundige reeks is gegeven, dat $s_n = \frac{1}{3}n(n+1)$ is; onder s_n wordt verstaan de som van de eerste n termen der reeks; bereken den zesden term.

2. Bereken ${}^5\log \frac{1}{25} - {}^7\log 81 \times {}^3\log 7 - \sqrt[3]{0.1} \log 0.01$.

3. Van de vierkantsvergelijking $16x^2 + 3x + r = 0$ zijn de wortels elkaars omgekeerde; bereken r .

4. Gegeven de vergelijking $3x^2 + 5x + 1 = 0$, gevraagd de vierkantsvergelijking, waarvan de wortels zijn $y_1 = x_1^3 + 2$ en $y_2 = x_2^3 + 2$, zoo mogelijk zonder de wortels uit te rekenen.

Men zou dan allicht vraag 3 door een andere vervangen; het vraagstuk 1916 nr. 1 blz. 24, zit vol met wortelvormen; zoo iets kon dan niet voorkomen.

In 1930 luidde het eerste algebra-vraagstuk:

1930. (nr. 1). Elimineer x, y en z uit de vergelijkingen:

$$3x + z = 10$$

$$2x - y - 2z = a$$

$$x + y + z - u = 6$$

$$x + y + z^2 = b;$$

stel daarna de betrekking op, die tusschen a en b moet bestaan, opdat het product van de wortels der vergelijking in u , die door eliminatie van x, y , en z ontstaan is, gelijk aan 1 zij.

Het blijkt, dat men wenscht te onderzoeken of de leerling weet,

hoe hij moet oplossen 3 lineaire vergelijkingen met 3 onbekenden, nl.:

$$\begin{cases} 3x & + & z = 10 \\ 2x - y - 2z & = & a \\ x + y + z & = & 6 + u; \end{cases}$$

verder (de substitutie van de uitkomsten in $x + y + z^2 = b$ is cijferwerk, meer niet), of hij weet, dat het product van de wortels van de viërkantsvergelijking $mx^2 + nx + l = 0$ gelijk aan l/m ; samen twee vragen met wat cijferwerk. Of ik tegen deze opgave ook bezwaar heb? Niet veel, maar toch dit, dat de tweede vraag enkel goed kan worden beantwoord, als de eerste goed is en . . . al heb ik geen stuk werk gezien, ik vermoed, dat vele leerlingen x , y en z hebben opgelost uit

$$\begin{cases} 3x & + & z = 10 \\ 2x - y - 2z & = & a \\ x + y + z^2 & = & b, \end{cases}$$

om daarna de uitkomsten in $x + y + z - u = 6$ te substitueeren. Maar ze zijn waarschijnlijk bijna allen vastgelopen bij deze pogingen; ze krijgen voor z twee wortelvormen; deze gezet in $x + y + x - u = 6$ eischt dan het rationaal maken van de betrekking. Hindert niet, dat vastloopen, neen, als men de resultaten maar niet voor een tweede vraag noodig had; ergo, de helft van de eerste som mis, gevolg: de helft van het heele werk mis.

Ik neem nu de tweede som:

1930 (nr. 2). „In een meetkundige reeks van n positieve termen, waarvan de laatste term 1 is, schrijft men tusschen elk tweetal opeenvolgende termen twee nieuwe getallen, die met deze twee termen een rekenkundige reeks vormen. De som van al de op deze wijze aan de oorspronkelijke reeks toegevoegde nieuwe getallen is 129 kleiner dan 2 maal de som van de oorspronkelijke reeks. Laat zien, dat uit de gegevens volgt, dat de oorspronkelijke reeks een afdalende is.

Als nog gegeven is, dat de grenswaarde der som van die reeks bij toenemende waarde van het aantal termen 256 is, vraagt men haar reden te bepalen. Hoeveel termen moet men van deze voortdurend voortlopende reeks minstens nemen om een som te verkrijgen, die minder dan 0,000001 van de gegeven grenswaarde verschilt?”

In deze lange, lange som (ook dat is verkeerd) wordt onderzoek gedaan naar:

a. s_n van de meetkundige reeks;

b. als p, q, r en s een rekenkundige reeks vormen, of ze dan weten, dat $p + s = q + r$ is;

c. bekendheid met $s = \frac{a}{1-r}$;

d. oplossing van een ongelijkheid.

Weer vraag ik: wat is er tegen om in plaats daarvan op te geven drie sommetjes als deze:

1. De eerste vraag onveranderd, dus tot het bewijs, dat de reeks afdalend is.

2. Van een convergente meetkundige reeks is $r = \dots$, $s = \dots$; bepaal die reeks.

3. Gegeven de reeks $128 + 64 + 32 + \dots$; als men de som der eerste k termen voorstelt door s_k , voor welke waarden van k is dan

$$s - s_k < \frac{1}{10^6}?$$

Elk der vragen kan wat meer werk eischen, dan in de opgave van het eindexamen gevraagd werd. En men zou, er is al meer op gewezen, geen drie vragen stellen over hetzelfde hoofdstuk; ook dat is voor hen, die daarin niet al te best thuis zijn, een bezwaar, hoewel niet zoo groot als het feit, dat de uitkomst van a gebruikt moet worden voor b en deze beide voor c . Door splitsing worden beide bezwaren geheel ondervangen. Indien men wil onderzoeken of een leerling van 6 onderwerpen op de hoogte is, geef hem dan 6 vragen. Laat niet het ontbreken of de foute beantwoording van één vraag oorzaak zijn, dat twee of meer andere niet bewerkt worden, zoodat het niet kennen van $1/6$ e deel gewroken wordt met het falen voor de helft; ik zeg niet: zich wreekt met het missen van de helft. Hier ligt de schuld in haar geheel bij den steller der vragen en niet bij den leerling. Ieder weet dit, al jaren, tientallen jaren, ouderen onder ons; de leeraren spreken er over met hun leerlingen, met elkaar, velen mopperen, weinigen hoorbaar. Ik maak mij nu de spreektrumpet van de velen en verzoek den inspecteurs van het M.O. het daaraan te leiden, dat 1930 het laatste jaar is geweest, waarin men 6 à 8 vraagstukjes kon opgeven in twee sommen, waarbij de antwoorden van de eerste als gegevens voor de volgende optreden. Laat men opgeven voor 2 uur 6 à 8 enkelvoudige vraagstukjes met behoorlijke afwisseling. Daarmee wordt tevens de weg geopend voor de hoognoodige ontwikkeling van het vak; geeft men een nieuw vraagstuk als nr 6, dan wordt de kans van slagen niet te zeer verkleind; er blijven er nog altijd 5 over; men doet dit wel, indien men handelt als

in 1929 met de eerste vraag van de eerste som, waarover ongetwijfeld velen gestruikeld zijn. In plaats van een examen als in 1930 zou men dan bv. het volgende stel kunnen opgeven, dat ik voor het gemak kies uit de algemeene herhaling van het derde deel der Nieuwe Schoolalgebra.

1. Van een reeks is $S_n = 3n^2 - 5n$; wat is dat voor een reeks? Hoeveel termen moet men tusschen elk tweetal inlasschen, opdat er in de nieuwe reeks een term nul voorkome?

2. Welke waarde moet men in de vergelijking $2x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$ aan m geven, opdat de eene wortel het dubbele zij van de andere? Voor de gevonden waarde de vergelijking op te lossen.

3. Verdeel $\sqrt{20 + 8\sqrt{5}}$ in de uiterste en middelste reden.

4. Bereken x uit: $x^{\sqrt{3}} = \frac{0,00245}{\sqrt[3]{0,00425}}$.

5. Iemand, die een schuld van f 6000, rentende 4 % 's jaars, samengestelde intrest, te betalen heeft, wil kapitaal en intrest afdoen in twaalf gelijke halfjaarlijksche termijnen; hoeveel moet hij telkens betalen?

6. Welke geheele positieve waarden kan men aan x geven, opdat $\frac{3x + 11}{5}$, $\frac{7x - 13}{6}$ en $\frac{9x + 10}{7}$ tegelijk geheele getallen worden?

Zie deze zes moet ieder kunnen maken; de leerstof is behandeld.

Voeg er nu als nr. 7 nog bij een van de volgende, ook uit de algemeene herhaling van de Nieuwe Schoolalgebra, deel III:

7a. Voor welke waarden van x is $f(x) = \frac{x^2 + a^2}{x - a}$ gelijk aan $f(b)$?

7b. Op een rechte liggen 5 punten A, B, C, D, en E; $AB = \log pq$; $BC = \log qr$; $CD = \log rt$; $DE = \log tp$; als F het midden is van AE, hoe lang is dan AF?

7b. Gegeven $2x + 3y = 5$; gevraagd de minimumwaarde van $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$; eveneens de maximumwaarde vzn $2x^2 - 7y^2$.

7c. $f(x, y, z)$ is een homogene symmetrische functie van den tweeden graad in x, y en z ; bereken deze, als $f(0, 1, 1) = 5$ en $f(0, 0, 1) = 6$ is.

7d. Aan welke betrekking moeten de coëfficiënten van $px + qy + r = 0$ en $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ voldoen, als deze vergelijkingen bij oplossing twee gelijke waarden voor x geven? Zijn de waarden voor y dan ook gelijk? Wat beteekent dit vraagstuk grafisch?

7e. Als $f(x) \equiv \frac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$ is, druk dan $f(2x)$ uit in $f(x)$.

7f. Onder welke voorwaarde zal $y = mx + c$ de parabool $y^2 = 4ax$ raken? ($a \neq 0$).

7g. Gegeven is, dat $(x + y + z)^3 = \Sigma x^3 + a\Sigma x^2y + bxyz$ is; be-reken a en b zonder op de gewone wijze $x + y + z$ tot de derdemacht te verheffen. Neem bijzondere getallenwaarden voor x , y en z .

7h. Op een halve rechte OP neem ik de punten $A_1, A_2, A_3, \dots$ met abscissen van O af gemeten opv. $a_1, a_2, a_3, \dots$; deze voldoen aan de voorwaarde $a_k = 4a_{k-1} - 3a_{k-2}$ te beginnen met $k = 3$. Vormen de lijnstukken $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ een reeks? Druk $A_{n-1}A_n$ uit in a_1 en a_2 .

7i. De rechten $ax - by = 3$ en $3x + 7y = 1$ loopen evenwijdig; welke betrekking bestaat er tusschen a en b ?

De rechten $(p + 1)x - (2 + q)y = 3$ en $(3 + 2p)x - (2q - 5)y = 7$ loopen evenwijdig; men vraagt p en q uit te drukken in een zelfde veranderlijke.

7j. Onder welke voorwaarde gaan de grafieken van $x = ay + c$, $y = ax + b$ en $cx + by = 1$ door één punt? Onderstel $a \neq 1$.

7k. ABC is een rechthoekige driehoek; $\angle C = 90^\circ$; $AC = 10$ cm, $BC = 8$ cm; gevraagd op de hypotenusa een punt X, zoodanig gelegen, dat $\frac{1}{3}AX^2 + \frac{1}{2}BX^2$ zoo klein mogelijk is.

7l. Maak een grafiek van deze gegevens, bij waarnemingen ver-kregen:

x	0	1	2	3	4	5
y	0,7	1,4	2,7	4,6	7,5	10

Welke daarvan zal wel op een foute waarneming berusten? Ik onderstel, dat y tennaastebij door de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$ met x is verbonden. Bereken a , b en c in tienden nauwkeurig.

7m. Voor welke waarde van k is $9x^2 - 3xy + ky^2 + 15x - 16y - 14$ het product van twee lineaire functies in x en y ?

7n. De grafiek van $y = a + bx + cx^2$ gaat door de punten $(0,2)$ en $(1,6)$ en de maximumwaarde treedt op voor $x = 2\frac{1}{2}$; bereken a , b en c .

7o. Kan men door geschikte keuze van x zorgen, dat de eerste term van $f(x) \equiv (x + b + c)(x + c + a)(x + a + b) + abc$ gelijk wordt aan $(-a)(-b)(-c)$? Los nu op de vergelijking $f(x) = 0$.

7p. Als $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$ is, bereken dan $f(x - 2) + f(x) - 2f(x + 2)$ en los verder nog op de vergelijking $f(x) = f(x - 1)$.

Als men vast blijft houden en dat zal wel, aan hetzelfde schriftelijke examen voor het heele land, dan is dat de eenige manier, die de hoognoodige ontwikkeling mogelijk maakt, zoodat langzaam maar

zeker afgestuurd wordt op het afsnijden van opgaven als die van 1914 nr. 1 en zooveel andere in latere jaren opgegeven. En dat men, liefst eenigszins voortvarend, de vernieuwing bevordert, door 6 oude en 1 nieuwe gaandeweg te vervangen door 5 en 2, door 4 en 3, door 3 en 4; niet verder; daar kan men gerust tien jaar over doen; dan is er in tien jaar al meer voortgang dan in de laatste vijftig jaar.

Het bezit van het bewijs, dat men met vrucht de H.B.S. met vijfjarigen cursus heeft doorloopen, opent de poorten van de instellingen voor Hooger Onderwijs; dat doen ook de einddiploma's van Gymnasium en Lyceum en een goed afgelegd Staatsexamen, alles in het algemeen gesproken. De algebra-opgaven van Gymnasium en Lyceum en vooral die van het Staatsexamen steken over het geheel gunstig af bij de eindexamens H.B.S. met 5-jarigen cursus. Hoewel ook daar drie à vier opgaven regel is, zoo beperken deze zich elk tot hoogstens twee vraagpunten; vele opgaven zijn enkelvoudig. De vrijheid door het niet gebonden zijn aan het centrale examen, heeft tot gevolg gehad, dat de wiskunde zich op het Gymnasium en Lyceum heeft kunnen ontwikkelen; op de H.B.S. is dat vrijwel uitgesloten; de opgaven van 1900, zelfs van 1870, zullen in 1931, in 1960 nog het peil van het onderwijs aangeven. Men is in 62 jaar nog maar heel weinig afgeweken; als er afwijking is, is die niet ten goede. Het onderwijs is op vele scholen versteend en de leeraren, die o zoo graag eens ontlast zouden worden van sommen als (voorbeeld van wansmaak)!: „Van de vergelijking $x^4 - 17x^3 + ax^2 + 52x + b = 0$ is

een der wortels $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 8x + 15}{4(\sqrt{2x - 6} - \sqrt{x - 1})}$ voor $x = 5$; een tweede wortel is

$$\lim \{ \sqrt[5]{5^4} \log 5 + (\sqrt[5]{5^4} \log 5)^2 + (\sqrt[5]{5^4} \log 5)^3 + \dots \},$$

als het aantal termen oneindig is.

Bepaal a en b en daarna de drie andere wortels van de vergelijking", wel die kunnen om te voldoen aan het centrale examen niet veel anders doen dan steeds hetzelfde weggetje gaan; zoo hier en daar een distel plukkend om daarmee hun leerlingen te lijf te gaan op het eindexamen.

Men kan een dubbel voordeel bereiken, als men volgende eindexamens in de algebra inricht aldus:

1. 6 à 8 enkelvoudige vraagstukken; geen van alle bewerkelijk; bij vraagstukken over samengestelden intrest is het gebruik van rentetafels toegestaan;

2. aan het slot 1 of 2, waarbij het enkel op een goed begrip aankomt; de onderwerpen vallen buiten de gewone schoolstof, zooals die nu nog wordt onderwezen; ze worden met een * in de opgaven gemerkt;

3. het goed oplossen van elk der vraagstukken met een sterretje verhoogt het cijfer met een punt of zoo iets; er moet vooreerst eenige aandrang worden gebezigd, opdat ze niet ongelezen blijven; de nieuwe moeten de minst bewerkelijke zijn; het idee moet er uit, dat algebra-cijferen algebra is.

Zooals het nu nog is, moet het gebeuren, dat een leerling allerlei fragmenten van een som goed heeft, geen van de twee goed en toch nog een voldoende cijfer haalt; het zonderlinge, dat daarin zit vooral voor buitenstaanders, wordt tevens opgeheven. Een enkelvoudige vraag is goed of fout opgelost; natuurlijk wordt elk geval afzonderlijk bekeken en zal een schrijffout, waarop voorgewerkt wordt, geen nul tot gevolg hebben; zulke overwegingen gelden thans in veel sterkere mate; daarover behoeven we niet te praten.

DE VERGELIJKING $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ ¹⁾

door

P. WIJDENES.

Wat of daarover nog te zeggen is? Is deze niet op verschillende manieren opgelost, algebraïsch, goniometrisch en meetkundig? Inderdaad en bij al deze oplossingen wordt ook nog een bespreking gegeven en worden eenige bijzondere gevallen behandeld, zoodat het onmogelijk lijkt er wat meer of wat anders van te zeggen. Toch is dat wel mogelijk. Nu het begrip van coördinaten al in de tweede klas van de middelbare school wordt aangebracht, terwijl er drie jaar lang op wordt voortgebouwd (zeer terecht blijft het bij laagbouw) daar zal men van het aanwezig zijn van dit begrip zeker in de hoogste klas van H.B.S. of Gymnasium gebruik mogen maken.

Als op fig. 1 $OP = 1$ genomen wordt, dan is de abscis, de x van P , $\cos \varphi$ en de ordinaat, de y , is $\sin \varphi$; dat is: de formule

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$$

beteekent voor veranderlijke φ niet anders dan de cirkel $x^2 + y^2 = 1$; en voor $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ kunnen we we zetten $ax + by = c$.

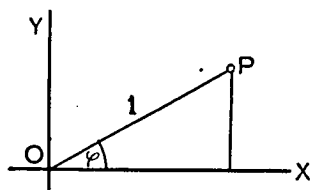


Fig. 1.

De oplossing van $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ is dus dezelfde als die van het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

Wil men het eerst anders doen, ook goed; zet dan $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ en vraag, door welke betrekking $\cos \varphi$ en $\sin \varphi$ gebonden zijn; „door $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ ”; men kan dus zetten:

$$\begin{cases} a \cos \varphi + b \sin \varphi = c \\ \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1 \end{cases} \quad \text{Stel dan „nieuwe onbekenden” nl.}$$

$\cos \varphi = x$ en $\sin \varphi = y$ en men heeft hetzelfde stelsel. Men behoeft er dan geen grafiek bij te halen, hoewel het begrip, dat met $\{f(x, y) = 0$ en $F(x, y) = 0\}$ het snijpuntenstelsel van beide krommen

¹⁾ Euclides, 9e jg. (1932/33), nr. 3, blz. 129 e.v.

wordt bedoeld, toch in de Algebra behoorlijk wordt aangebracht.

We gaan dus verder met het stelsel vergelijkingen $\begin{cases} ax + by = c \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

Eliminatie van y geeft het stelsel

$$\begin{cases} ax + by = c \\ (a^2 + b^2)x^2 - 2acx + c^2 - b^2 = 0. \end{cases}$$

Men vindt hier dezelfde vierkantsvergelijking als bij de algebraïsche oplossing van $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ na het wegwerken van de wortel uit $a \cos \varphi + b \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = c$. Daarover praten we hier natuurlijk niet verder.

Wel zal men volle aandacht kunnen schenken aan de bespreking; men *ziet* immers in de oplossing van $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ het volgende vraagstuk uit de Vlakke Meetkunde weer opduiken: de onderlinge ligging van rechte lijn en cirkel en dus geen snijpunten, raking of twee snijpunten. De afstand van O tot $ax + by = c$ is $\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; als dus $|c| > \sqrt{a^2 + b^2}$ is, dan geen snijpunten; is $|c| = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan raking en is $|c| < \sqrt{a^2 + b^2}$ dan twee snijpunten. Die afstand kan gewoon worden gevonden als hoogtelijn uit het hoekpunt van de rechte hoek in de rechthoekige driehoek gevormd door de assen en $ax + by = c$.

De bijzondere gevallen zijn ook direct duidelijk; de vergelijking van de rechte wordt dan: $x + y = c$, $x - y = c$, $x + by = 1$, $x - by = 1$, $ax + y = 1$ of $ax - y = 1$. Met de klasse lijkt het me wel aardig werk om de goniometrische oplossing af te lezen uit de grafische.

Zelfs kan men de snijding van rechte en cirkel dienstbaar maken voor een meetkundige oplossing met een zeer goede benadering,

$$3 \cos \varphi - 5 \sin \varphi = 4 \text{ wordt omgezet en } \begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Om de rechte lijn te teekenen, zoeken we een paar roosterpunten $(3, 1)$ en $(-2, -2)$; teneinde voldoende nauwkeurig te teekenen. Volgens fig. 2 is $\angle AOS_1 = \varphi_1$ ruim 12° en $\angle AOS_2 = \varphi_2$ bijna 106° .

De berekening loopt als volgt $3 \cos \varphi - 5 \sin \varphi = 4$
 $\cos \varphi - \frac{5}{3} \sin \varphi = \frac{4}{3};$

$\frac{5}{3} = \operatorname{tg} \alpha$, dus $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$; vermenigvuldigen met $\cos \alpha$ geeft

$$\cos(\varphi + \alpha) = \frac{4}{\sqrt{34}}$$

te maken, maar om de wiskundige bewerkingen en waarheden te verluchten en dingen te vertellen, die men zoo gewoon niet ziet en om waarheden door het oog vast te leggen.

De omzetting in $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ heeft nog een klein nevenvoordeel; als men deelt door a , $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \alpha$ stelt en daarna vermenigvuldigt met $\cos \alpha$, wordt het eerste lid $\cos (\varphi - \alpha)$, waarvan de oplossing gemakkelijker is neer te schrijven dan van $\sin (\varphi + \beta)$, waarvan men op school terecht de oplossing in tweeën schrijft, terwijl men bij de cosinus na het opzoeken slechts $\pm$ behoeft te zetten.

Ook andere goniometrische vergelijkingen kan men door toevoeging van $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$ tot twee vergelijkingen in twee onbekenden maken; mij dunkt echter, dat men daar heel spaarzaam mee moet zijn en dat men het best doet zich in dezen te beperken tot het bovenstaande. De grafische methoden moeten niet te ver gaan en in geen geval er bij de haren bijgesleept worden. Verleidelijk is het wel om nog wat door te gaan b.v. om het aantal wortels (beneden 360° , liever: tusschen -180° en 180°) aan te geven; neem b.v. maar:

$a \cos^2 \varphi + b \cos \varphi \sin \varphi + c \sin^2 \varphi = d$; we hebben direct de omzetting in

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = d \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Ik praat voor de lezers natuurlijk niet over dit stelsel en voor de school zou ik het vast en zeker nalaten. De grafische behandeling van $a \cos \varphi + b \sin \varphi = c$ is al mooi genoeg, maar die is dan ook mooi; tenminste, naar mijn gevoel.

KORRELS ¹⁾.

Onder dit opschrift is de redactie van plan om allerlei kleine mededelingen te plaatsen; b.v. bijzondere oplossingen, betere methoden, opmerkingen, ook wel domme fouten, die men gedrukt ziet. De lezers, die wat bij hun lessen tegenkomen, dat de moeite waard is, worden hierbij opgewekt tot inzending; omvang hoogstens een bladzijde. We kunnen niet beter doen, dan te beginnen met enige „korrels”.

I. Een aardige toepassing van de reststelling.

De oppervlakte O van $\triangle ABC$ in de zijden a , b en c uit te drukken; gegeven is, dat O^2 een veelterm is in a , b en c .

Opl. O^2 beschouwen we als een veelterm in a ; de veelterm moet nul worden, als a vervangen wordt door $c - b$; dan immers is de oppervlakte nul; een zijde is in dit geval nl. gelijk aan het verschil van de beide andere. De deelbaarheid door $a - (c - b) = a + b - c$ en dus door $b + c - a$ en $c + a - b$ staat hiermee al vast.

$O^2 = P(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b)$; omdat O^2 van de 4e graad in a , b en c is, moet P nog een symmetrische vorm van de eerste graad in a , b en c bevatten en mogelijk een getallenfactor; we stellen dus

$$O^2 = f \cdot (a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

Nu is de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde a gelijk aan $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; voor deze driehoek wordt onze formule $\frac{3}{16}a^4 = f \cdot 3a \cdot a \cdot a$; dus is $f = \frac{1}{16}$ en

$$O^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

W.

II. Kort en juist.

Gaat men na, hoe op de eerste of tweede bladzijde van een schoolboek voor analytische meetkunde (neem er gerust een paar studieboeken bij) geredeneerd wordt, om te komen tot de afstand van twee punten op de x -as, dan krijgt men een gevoel van vaagheid en onvoldaanheid. En het kan zo kort en goed als volgt.

Voor twee punten A en B geldt $AB + BA = 0$; nevenvorm: $AB = -BA$. Voor drie punten geldt $AB + BC + CA = 0$ (de betrekking van Möbius; voor leerlingen direct duidelijk; het totale effect van de drie termen is immers, dat men op het uitgangspunt A terugkomt). Vervang nu C door O . Uit $AB + BO + OA = 0$ (van BO de letters verwisseld) volgt

$$AB = OB - OA = x_A - x_B.$$

Klaar zijn we; in geen geval voor de afleiding een figuur tekenen; die geeft nl. maar één geval en hij verheldert niets; integendeel. Hoogstens, als men eenmaal heeft $P_1P_2 = x_2 - x_1$, op een figuur voor verschillende plaatsen van de punten t.o. van O en onderling, natellen en laten zien, dat ook het teken in orde is.

W.

¹⁾ Euclides, 12e jg. (1935/36), nr. 4, blz. 177 e.v.

DE KLINOGRAFISCHE PROJECTIE ¹⁾

door

P. WIJDENES.

In Jaargang XXII (1934/'35) van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde heb ik een artikel geschreven over „Stereometrisch tekenen”; daarna is het afzonderlijk uitgegeven ²⁾. Bij het schrijven van dat artikel, de beste manier om een zaak, die ons allen ietwat vaag voor de geest staat, eens grondig te bekijken, heb ik een nieuwe projectiemethode gevonden en die gedoopt: de methode van het hellende tafereel. Daarin ligt echter niet opgesloten, dat het een projectiemethode is; daarom heb ik mij gewend tot den steeds hulpvaardigen wiskundige en classicus Dr Dijksterhuis, die mij de naam aan de hand deed, die dit artikel tot opschrift voert ³⁾.

De theorie van de klinografische projectie is uiterst simpel; met één bladzijde druks en een drietal figuurtjes is men klaar. Ik laat die hier volgen.

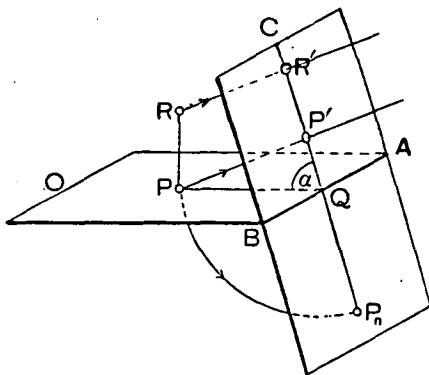


Fig. 1.

Op fig. 1 is OAB een horizontaal vlak; CAB is een vlak, dat met OAB een hoek α maakt; CAB is het tafereel. P is een punt van het

¹⁾ Euclides, 15e jg. (1939), nr. 5, blz. 231 e.v.

²⁾ Stereometrisch tekenen, 43 blz. met 76 figuren, f 0,50.

³⁾ Kline komt van klinein (Gr.) = laten hellen (verg. isoklinen); ook betekent het: zich uitstrekken, dit in kliniek.

horizontale vlak H; P' is zijn projectie op het tafereel T. Het tafereel helt, vandaar de naam: *de methode van het hellende tafereel*. Ook de projectoren, zie PP' en RR' hellen; dat wordt uitgedrukt door *klinografische* projectie.

De plaats van P' (fig. 1) is eenvoudig te vinden; trek $PQ \perp AB$; $QP' \perp AB$ en $QP' = PQ \cos \alpha$. De uitvoering is als volgt; eerst wordt het vlak OAB om AB als as in het verlengde van het vlak CAB gewenteld; QP' komt dan in het verlengde van P_nQ . Nu moet men

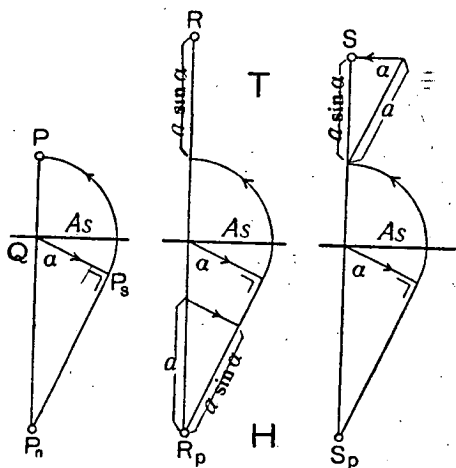


Fig. 2.

PQ met $\cos \alpha$ vermenigvuldigen. Het tafereel duiden we aan met T; het vlak OAB van fig. 1 noemen we het horizontale vlak en duiden het aan met H; de snijlijn van H en T is de as. — Trek (fig. 1 en 2) $P_nQ \perp as$; maak $QP_s = P_nQ \cos \alpha$; maak $QP' = QP_s$. — Het is direct duidelijk, hoe men te werk moet gaan met een ander punt R, zie weer fig. 1 en 2; daarop is $P'R' = PR \sin \alpha$; zie het tweede en derde figuurtje van fig. 2.

Verder nemen we een lijn in het horizontale vlak b.v. m op fig. 3;

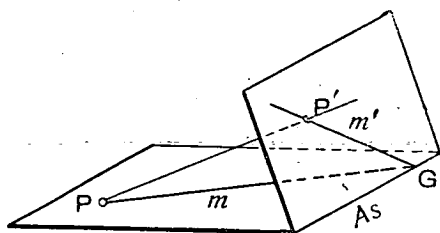


Fig. 3.

m snijdt de as in G ; de projectie van m is m' ; de lijn en zijn projectie snijden elkaar natuurlijk op de as; hiervan maakt men gebruik, als men de klinografische projectie wil tekenen van een vlakke figuur. Zie de zeshoek in H op fig 4; bepaal op de manier als in fig. 2 links de projectie A op T ; zie verder de projecties van drie evenwijdige lijnen in H en van een tweede drietal.

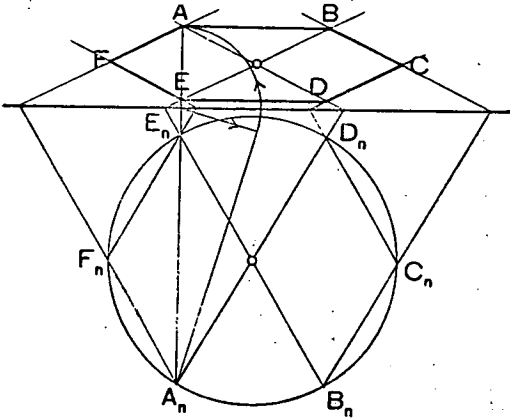


Fig. 4.

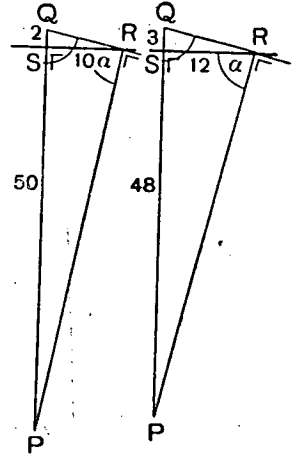


Fig. 5.

Hoe groot moet men α nemen op fig. 2? Van moeten is eigenlijk geen sprake; elke hoek is goed; maar niet bij elke hoek krijgt men een behoorlijke figuur. Men neme voor $\alpha = \text{bg tg } 5$; $\alpha = \text{bg tg } 4$ gaat ook nog wel; bij voorkeur nemen we de eerste; men construeert die hoek door te nemen (zie fig. 5 links) $PS : 25 = SR : 5 = SQ : 1$; b.v. opv. 100, 20 en 4 mm. Op fig. 5 links opv. 50, 10 en 2 mm; deze is echter ontstaan door verkleining op de helft. Omdat SQ altijd vrij klein is, doet men het best $RQ \perp PR$ te nemen; dan komt SQ vanzelf. Op fig. 5 rechts is $\alpha = \text{bg tg } 4$ genomen.

Hiermee is de *hele theorie* afgehandeld; meer behoeft men er op school niet aan te doen. Ook de theorie van de scheve projectie is zeer beknopt; beide vindt men uitgelegd in de genoemde overdruk ¹⁾. We zullen beide kunnen onderwijzen; in elk geval is dat nuttiger dan zich af te sloven op veel „ruimteconstructies” met een oplossing als: „trek uit P de loodlijn m op V ; breng door P de lijn $n \parallel l$; leg het vlak door n en m ”. Doen, wel neen, *dat* is niet nodig. Van te veel van die vraagstukken zeg ik ergens: „Een groot deel van de leerstof

¹⁾ Ook in Molenbroek—Wijdenes Stereometrie voor het M. en G. O. 3e druk, blz. 124—131, incl. 19 figuren. (Thans 9e druk; Red.).

over allerlei punten; lijnen en vlakken, zoals men die in de eerste hoofdstukken van de stereometrie aantreft behoort tot wat men noemt: „ruimteconstructies” en men verwacht er veel heil van voor het „inzicht”. Ik meen daar een vraagteken bij te moeten zetten; het nut wordt overdreven voorgesteld en voor de leerlingen zijn opgaven van de bedoelde soort, naar ik meen, een plaag en voor den leraar een bron van onvoldaanheid over zijn onderwijs, zowel in de stereometrie als in de beschrijvende meetkunde.”

Waartoe dienen ze eigenlijk? Liever, waartoe dient een overmatige hoeveelheid van dat slag? Zodra men aan de veelvlakken en gebogen oppervlakken komt, komen slechts heel enkele werkelijk van pas. Het uitvoeren van die ruimteconstructies is zo goed als niet te doen, ook voor ons niet; tenzij dan volgens de gewone methode van de beschrijvende meetkunde. Met de scheve en de klinografische projectie is vooral het „loodrecht” in de ruimte (in H is het gemakkelijk) lang niet eenvoudig. „Ruimteconstructies” kan men bijna alleen zo maar schetsen; knoeien, zo men wil. De denkwaaide is gering; de uitvoering geheel waardeloos.

Ik ben sterk voor de beperking van de „ruimteconstructies” en zou daarvoor gaarne enige aandacht opeisen voor de werkelijke uitvoering volgens een of ander projectiemethode. Welke zullen we daarvoor nemen, de scheve projectie of de klinografische? Er zullen wel heel wat lezers zijn waarschijnlijk, (tekenen is niet ieders werk), die figuren volgens deze methoden eens naast elkaar willen zien; opzettelijk zijn de constructielijnen weggelaten; daardoor krijgt men beter zicht op de figuren. Bij beide is het aantal hulplijnen vrijwel gelijk; bij de klinografische iets minder, maar dat speelt geen rol,

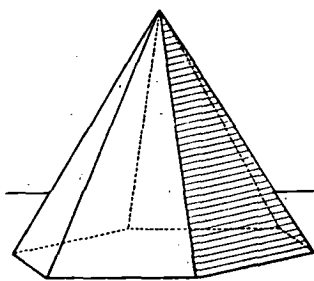


Fig. 6.

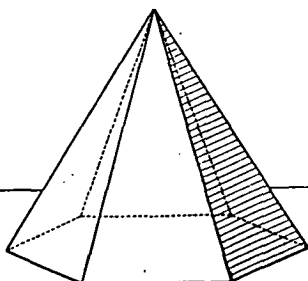


Fig. 7.

tenzij dan bij cirkels! Links ziet men figuren in scheve projectie (de nummers 6, 8, 10, 12, 14 en 16), rechts dezelfde in klinografische projectie (de nummers 7, 9, 11, 13, 15 en 17).

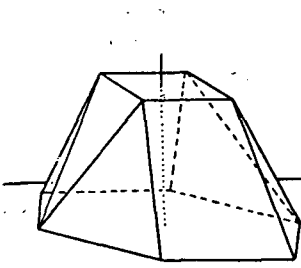


Fig. 8.

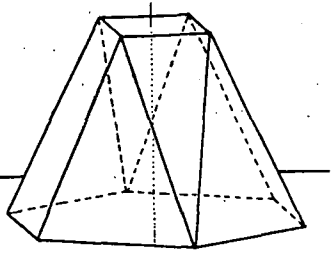


Fig. 9.

De grondfiguur van fig. 8 en 9, die niet in inkt is gezet, is een regelmatige zeshoek; de projectie van het bovenvlak op het grondvlak van de prismoïde is een vierkant met hetzelfde middelpunt als

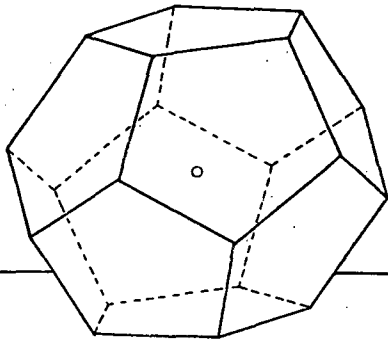


Fig. 10.

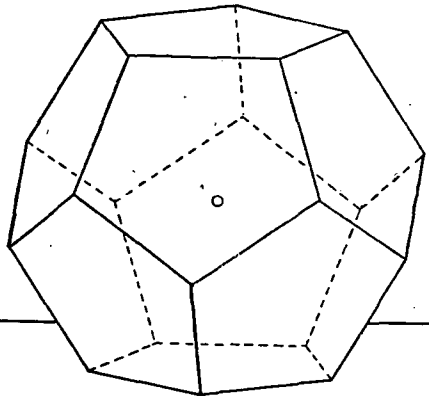


Fig. 11.

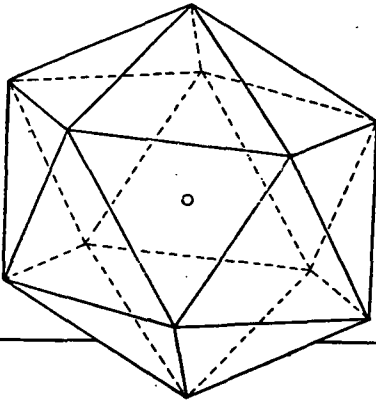


Fig. 12.

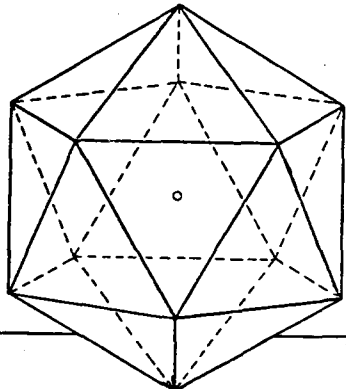


Fig. 13.

de zeshoek en waarvan de zijden evenwijdig lopen met de neven-diagonalen.

De figuren 10—13 zijn alle vier wiskundig zuiver geconstrueerd; wie geeft de voorkeur aan de scheve projectie? Zie ook de cylindrs van fig. 14 en 15.

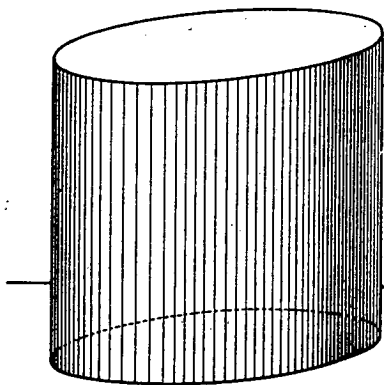


Fig. 14.

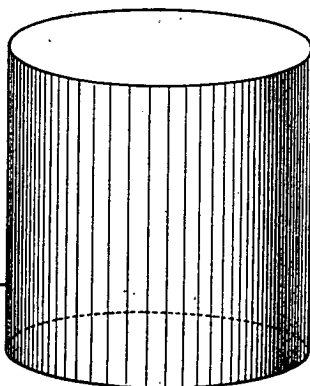


Fig. 15.

Fig. 16 geeft de constructie van de scheve projectie van een cirkel; ieder ziet, wat dat voor een werk is; de zaak is nl. dat de hoofdrichtingen van de grondfiguur in de scheve projectie toege-

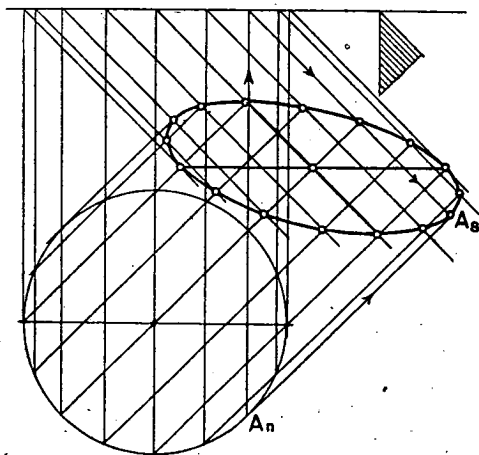


Fig. 16.

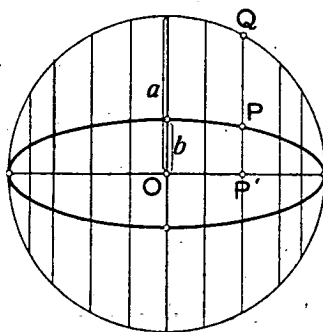


Fig. 17.

voegde middellijnen worden. Bij klinografische projectie gaan ze over in de assen; zie fig. 17; waarop alle ordinaten van de cirkel, op

TT' b.v. een stuk of zes; dan krijgt men twaalf punten van de doorsnede; een kromme lijn, zo goed mogelijk getekend door die twaalf

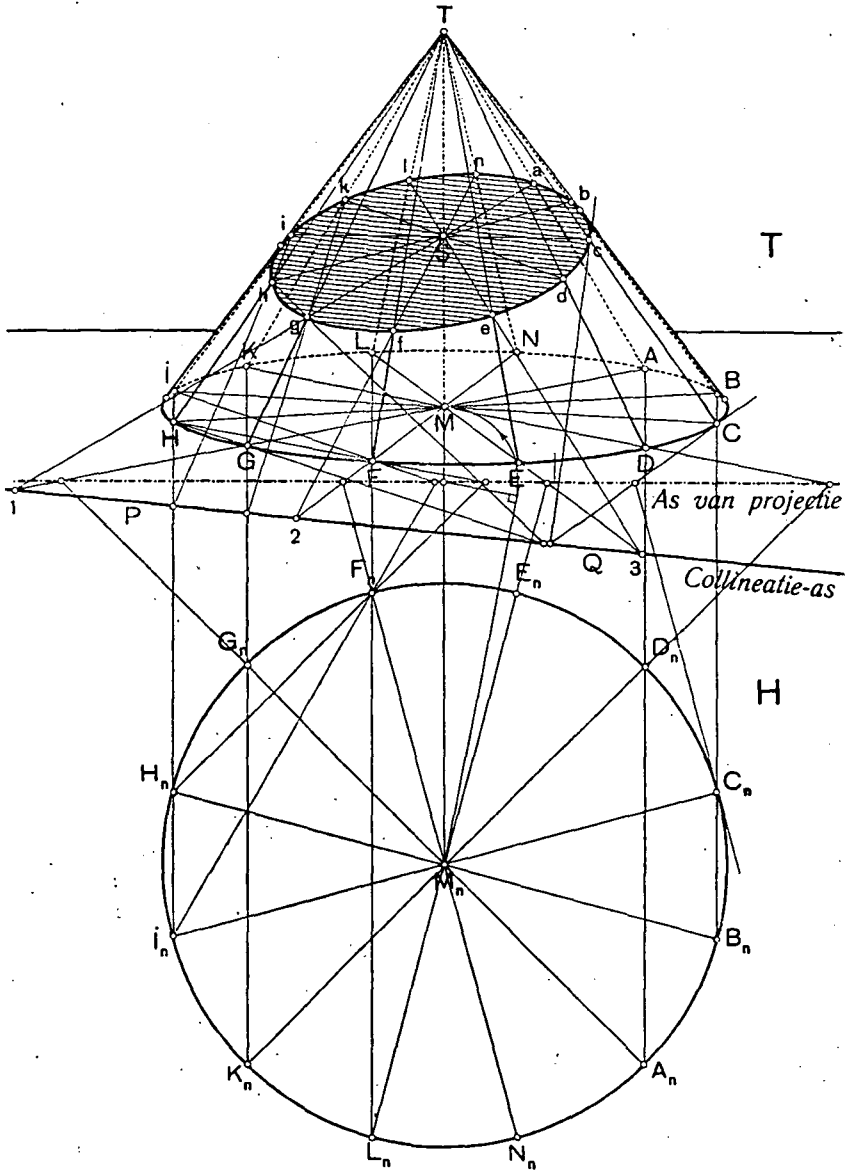


Fig. 19.

punten, geeft dan de ellips. Om dat een beetje behoorlijk te doen, nemen we zes middellijnen van het grondvlak van de kegel, die

onderling hoeken van 30° maken en tekenen dan eerst de ellips als klinografische projectie van de grondcirkel; het middelpunt M van de cirkel in het horizontale vlak onder de as wordt overgebracht op de manier, die fig. 2 aangeeft; alle andere punten worden door lijnen overgebracht als op fig. 4.

Daarna kan men de kegel tekenen en de lijn s van fig 18 (op fig. 19 PQ) aannemen; op deze collineatie-as snijden overeenkomstige lijnen als AB en A_1B_1 van fig. 17 elkaar. We hebben dit getekend in fig. 19.

Alles op één figuur, hetgeen natuurlijk moet, lijkt enigszins samengesteld, maar is dit niet; bij het werkelijk uitvoeren van het werkstuk heeft men als men tot fig. 18 overgaat, niets van node met de as van projectie. Fig. 19 tekenen we niet in scheve projectie; men krijgt dan zeker een lelijke verwrongen figuur; daartoe behoeft men slechts een blik te slaan op de fig. 14 en 16.

(Ter illustratie voegt de redactie hieraan toe 2 fig. uit Molenbroek—Wijdenes, Stereometrie voor M. en V. H. O.).

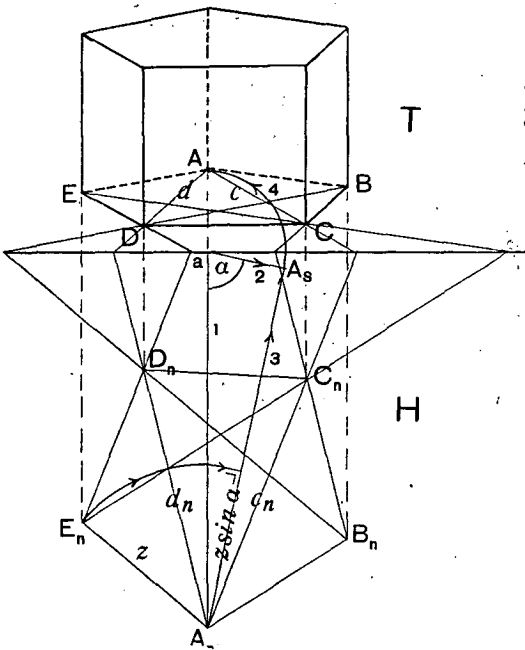


Fig. 20. Projectie van een regelmatig vijfzijdig prisma volgens de methode van het hellende tafereel.

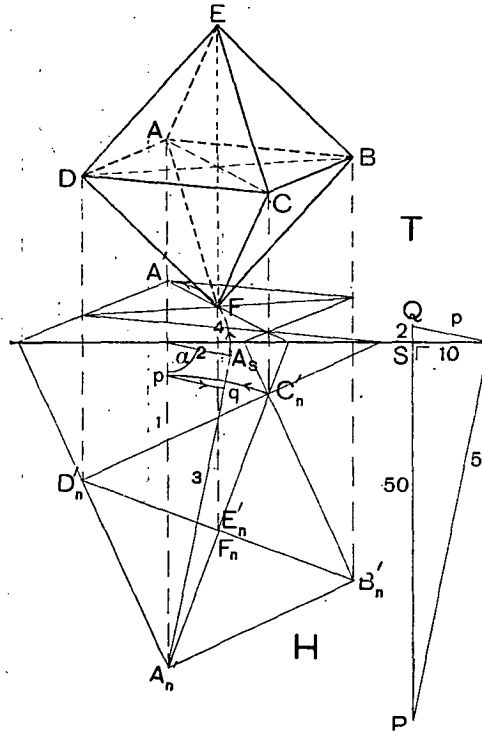


Fig. 21. Projectie van een regelmatig achtzijdig prisma volgens de methode van het hellende tafereel.

VIERDE AMSTERDAMSE UNIVERSITEITSDAG

De alumni der Universiteit van Amsterdam zullen voor de Vierde Universiteitsdag samenkomen op Zaterdag 14 October a.s. Zij zullen om half elf des morgens in de Aula worden welkom geheten door de Voorzitter van de Amsterdamse Universiteits-Vereniging, Dr. M. W. Holtrop, waarna de opening zal geschieden door de Rector Magnificus, Prof. Dr. N. A. Donkersloot. Dan zal Prof. Dr. H. C. Rümke een rede uitspreken voor „Psychiatrie en Maatschappij”.

Voor de middag-colleges is een veelzijdig programma samengesteld voor alle Faculteiten; in die der Wis- en Natuurkunde zullen zij gegeven worden door:

Prof. Dr. C. J. Bakker: *Het cyclotron.*

Prof. Dr. A. H. W. Aten: *Isotopen.*

Prof. Dr. N. H. Swellengrebel: nog nader aan te kondigen onderwerp.

Prof. Dr. D. van Dantzig: *Wiskundige consultatie ten behoeve van medisch-biologisch, industrieel en ander onderzoek.*

Prof. Dr. H. Zandstra: *Polarisatie van continu spectrum en emissielijnen bij de zonnecorona en protuberanten.*

Prof. Dr. C. G. van Arkel: *Radioactiviteit en pharmacie.*

Prof. Dr. J. Kok: *Biochemische en medische toepassingen van kunstmatige radioactieve stoffen.*

De koffiemaaltijd zal in de Universiteit worden verzorgd door de Mensa Academica; voor de avondmaaltijd zal men zich verenigen in Hotel Krasnapolsky.

Nadere inlichtingen zijn voor belanghebbenden te verkrijgen bij het secretariaat der Amsterdamse Universiteits-Vereniging, p.a. mevr. Mr. H. M. Scheltema-Blase, Vondelstraat 11c, Amsterdam-W.

Uitwerkingen van de logaritmenvraagstukken voor leraren,
die

- de Nieuwe Schoolalgebra (4 en 5 dec.)
- Algebraïsche vraagstukken (4 en 4 dec.)
- Beknopte Algebra

op hun school gebruiken, gratis en franco verkrijgbaar bij
P. WIJDENES

Verschenen:

P. WIJDENES

BOLDRIEHOEKSMETING

298 blz. 203 fig. 99 voorbeelden f 9,50, geb. f 11,50

Inhoud:

I. Inleiding; de bol en bolfiguren	1— 13
II. Rechthoekige driehoeken	14— 44
III. Scheefhoekige driehoeken	45— 97
IV. De stellingen van <i>Stewart</i> , <i>Menelaos</i> en <i>Ceva</i> ; de merkwaardige lijnen	98—119
V. De oppervlakte van een boldriehoek	120—128
VI. Om- en ingeschreven cirkel	135—158
VII. Herleiding van formules voor boldriehoeken tot formules voor vlakke driehoeken	159—168
VIII. Toepassingen van de boldriehoeksmeting op de stereometrie	169—176
IX. Toepassingen van de boldriehoeksmeting op de wiskundige aardrijkskunde en op de sterrenkunde	177—215
X. De stereografische projectie	216—226
Aantekeningen van <i>A. J. H. Meertens</i> De additamentenmethode en de methode van <i>Legendre</i>	227—236
Transformatieformules	237—244
Vraagstukken, formules, register enz.	
Antwoorden	265—292

Binnenkort verschijnt:

LEERBOEK DER GONIOMETRIE EN TRIGONOMETRIE

door

P. WIJDENES

7e druk

geb. f 13.00

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel