

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK, P. WIJDENES,
Dr H. A. GRIBNAU VOOR WIMECOS EN J. WILLEMSE VOOR
LIWENAGEL

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - Prof. Dr. E. W. BETH, AMSTERDAM
Dr. R. BALLIEU, LEUVEN - Dr. G. BOSTEELS, HASSELT
Prof. Dr. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - Dr. L. N. H. BUNT, UTRECHT
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
Dr. H. A. GRIBNAU, ROOSENDAAL - Dr. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
Dr. R. MINNE, LUIK - Prof. Dr. J. POPKEN, UTRECHT
Dr. O. VAN DE PUTTE, RONSE - Prof. Dr. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
Dr. H. STEFFENS, MECHELEN - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

25e JAARGANG 1949/50

Nr 4

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8.00. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8.00) zijn ingetekend, betalen f 6.75.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van Leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1949 t/m 31 Augustus 1950 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van f 4,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Voor 1 September 1950—1 September 1951 is de contributie vastgesteld op f 5,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per port.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Van Lennepaan 16, Tel. K 2950; 5558.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstr. 88; Tel. K 2900; 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Dr P. MULLENDER, Eenvoud in de Wiskunde.	173
Korrels XCVII, XCVIII en XCIX	187
Van de personen	189
Boekbesprekingen	191
Prof. Dr O. BOTTEMA, Verscheidenheden:	
XXVII De maanbaan	196
XXVIII Een probleem van Euler	200
Prof. Dr D. VAN DANTZIG, Blaise Pascal	203
Prof. Dr A. HEYTING, Spanningen in de Wiskunde	233

Wie heeft voor mij Antwoorden van deel I van de
Algebraïsche Vraagstukken? P. Wijdenes

EENVOUD IN DE WISKUNDE ¹⁾.

door

Dr P. MULLENDER.

Inleiding.

Bij vele mensen bestaat de gedachte, dat de wiskunde alleen maar voor een klein aantal uitverkorenen bestemd is. Dat betekent niet, dat zij geen waardering voor de wiskunde hebben, maar het betekent wel, dat zij vaak al van te voren de hoop opgeven er iets van te zullen begrijpen.

En zo valt het niet te verwonderen, dat de meeste wiskundigen zich bij een gelegenheid als deze beperken tot algemene beschouwingen en in plaats van een wiskundige verhandeling een verhandeling over de wiskunde geven.

Ook ik zal U vanmiddag niet vermoeien met te veel specifiek wiskundige uiteenzettingen.

Is de wiskunde moeilijk?

Men kan echter de vraag stellen: is de wiskunde inderdaad zo moeilijk, als de meeste niet-wiskundigen zich voorstellen?

Ik zal niet pogen een antwoord op deze vraag te geven. Ik wil vanmiddag alleen maar laten zien, dat de wiskunde niet uitsluitend moeilijk en ingewikkeld is. Er is ook nog sprake van eenvoud in de wiskunde. Ik heb daarom als mijn onderwerp gekozen de

„Eenvoud in de Wiskunde”

Bij een dergelijk onderwerp zullen wij natuurlijk niet kunnen vermijden, dat een subjectief element onze beschouwingen binnendringt. Begrippen als eenvoud en eenvoudig zijn niet zo te definiëren, dat in de toepassing er van meningsverschil buitengesloten is. Een scherpe definitie zal ik dan ook niet geven.

Met eenvoudig bedoel ik het tegenovergestelde van ingewikkeld. Een stelling is eenvoudig, als men onmiddellijk inziет, wat die stelling inhoudt. Een bewijs is eenvoudig, als men het essentiële er van, als het ware, in een gedachte kan vatten.

¹⁾ Openbare les, uitgesproken op 30 Sept. 1949 bij de aanvaarding van het lectoraat in de wiskunde en de mechanica aan de Vrije Universiteit te Amsterdam.

Wel is waar is dit een ietwat vage omschrijving; maar zij zal, naar ik hoop, in de loop van het betoog wel duidelijker worden.

Indien wij nu spreken over de eenvoud in de wiskunde, dan is het duidelijk, dat wij zo'n onderwerp nooit volledig kunnen behandelen. Wij zullen ons tot voorbeelden moeten beperken en de keuze van de voorbeelden brengt uiteraard een zekere eenzijdigheid mee.

Wij keren eerst terug tot ons uitgangspunt. Als zo velen de wiskunde niet erg gemakkelijk vinden, dan is het van belang te vragen:

Wat is gemakkelijk?

Verleden jaar sprak Professor Mordell van Cambridge in St John's College in een rede voor een aantal studenten over, wat hij noemde, „Some easy Algebra”.

Hij begon met vast te stellen, wat hij bedoelde met het woord „easy”. Hij zei:

„Ik noem een bewijs of een betoog gemakkelijk, als het aan twee voorwaarden voldoet:

1. je begrijpt het meteen,
2. je vergeet het nooit weer.”

Natuurlijk is het gevaarlijk een dergelijke definitie te geven en daarna bij wijze van voorbeeld, een betoog af te steken. Dat onderzocht Mordell tenminste. Want toen hij klaar was vroeg een van zijn studenten of Mordell dat zelfde bewijs niet ook in een van zijn colleges gegeven had. En toen het antwoord bevestigend luidde, zei de student, dat hij dan moest bekennen, dat hij het gehele bewijs vergeten was, want het was pas aan het einde van Mordell's rede tot hem doorgedrongen, dat hij het bewijs al eerder gehoord had. Met andere woorden, het bewijs voldeed zeker niet aan de tweede voorwaarde: je vergeet het nooit weer.

Door de openhartigheid van deze ene student aangemoedigd verklaarden daarna verschillende anderen, dat ze het bewijs ook niet helemaal begrepen hadden. De meesten vonden het bewijs van Mordell dan ook niet zo gemakkelijk.

Wat blijkt hieruit?

Dat Mordell's definitie onjuist was?

Ik geloof het niet. Mordell had zijn definitie alleen maar verkeerd toegepast. Hij had misschien wel mogen zeggen, dat zijn bewijs gemakkelijk was, als hij er maar bij gezegd had voor wie. Ongetwijfeld was het bewijs wel gemakkelijk voor Mordell zelf. Hij had geen moeite met het begrijpen noch met het onthouden. Maar

wat gemakkelijk is voor de één is nog niet gemakkelijk voor de ander. Ik denk niet, dat de linnenjuffrouw van St John's College veel aan Mordell's rede gehad zou hebben, als ze er bij gezeten had.

Wij aanvaardden daarom Mordell's definitie van gemakkelijk en stellen nu de vraag:

Hoe maakt men een wiskundig betoog gemakkelijk?

Ik voel mij thans gedrongen tot de opmerking, dat wij ons met het spreken over deze kwesties wel wat buiten het terrein van de wiskunde begeven. Problemen als die betreffende het al of niet gemakkelijk zijn van een betoog, al is het dan een wiskundig betoog, behoren immers niet in de eerste plaats tot het terrein van de wiskunde, maar tot dat van de psychologie.

Het is echter niet mijn bedoeling de psychologen het gras voor de voeten weg te maaien, gesteld dat ik dat zou kunnen. Wij zullen ons dan ook niet met alle factoren bezig houden, die voor iemand een betoog al of niet gemakkelijk maken. Het is duidelijk, dat allereerst factoren als aanleg, interesse, vermoeidheid, enz. een belangrijke rol spelen. Wij nemen echter aan, dat de hoorder of lezer voldoende aanleg en interesse bezit, geen slapeloze nachten achter de rug heeft en vragen dan, wat een wiskundige er nog aan kan doen om zijn uiteenzetting zo gemakkelijk mogelijk te doen zijn. Wij zouden ook kunnen zeggen, in aansluiting aan Mordell's definitie: hoe maakt men een wiskundig betoog

1. begrijpelijk,
2. onvergetelijk.

Daarbij moeten we natuurlijk de term onvergetelijk niet al te absoluut opvatten.

Een wiskundig betoog is als een ketting. Het verbindt twee punten, die soms ver uit elkaar liggen. Al zijn er veel schakels, samen vormen ze één verbindingslijn van het ene punt naar het andere. Echter als men één schakel wegneemt, dan is de verbinding verbroken en de ketting waardeloos.

Het begrijpen van een betoog houdt allereerst in, dat men de grote lijn ziet, dat men de grondgedachte te pakken heeft. Maar verder betekent het ook, dat men elk schakeltje begrijpt, want als men één schakel mist, dan is het hele betoog waardeloos.

In een wiskundige uiteenzetting is het dus noodzakelijk zowel aandacht te besteden aan de details als aan het geheel. Het is ongetwijfeld waar, dat, vooral in een *wiskundige* uiteenzetting, het geheel belangrijker is dan de details: de grondgedachte van een betoog is belangrijker dan de afzonderlijke schakels. Immers de

grondgedachte is het essentiële van de redenering en een betoog slaat in, als die grondgedachte meteen duidelijk is. Maar toch mogen de afzonderlijke schakels van de redenering niet verwaarloosd worden en daarom wil ik daar een enkel woord aan besteden.

In een goed betoog sluiten de schakels bij elkaar aan. Voortdurend wordt een beroep gedaan op het voorgaande. Maar zulk een beroep kan door de hoorders alleen maar begrepen en gewaardeerd worden, als zij het voorgaande nog weten. Met andere woorden, zij moeten alle bekend veronderstelde definities en stellingen ook inderdaad kennen en niet te veel moeite hebben met hetgeen de spreker er zelf nog aan toevoegt.

Er zijn wiskundigen en vermoedelijk ook nog wel andere mensen, maar daar spreken we niet over, die soms de neiging hebben de kennis en het geheugen van hun hoorders te overschatten.

Wat de kennis van het auditorium betreft; ik herinner mij dat Mordell tegenover zijn studenten wel eens opmerkte: „als je er aan twijfelt of je gehoor bekend is met een bepaalde stelling of theorie, neem dan maar aan, dat ze er niets van af weten.” Verder heeft Landau eens gezegd: „Ich schreibe für Idioten”. Ieder die de boeken van Landau kent, weet dat dit wel wat sterk gesproken is. Ik wil dan ook niet zeggen, dat wiskundigen in het algemeen niets van de wiskunde afweten, maar wel, dat het beleefder kan zijn te weinig kennis bij het auditorium te veronderstellen dan te veel.

Verder, wat het geheugen van de hoorders aangaat; ik geloof toch niet, dat het geheugen van alle wiskundigen en wiskunde-studenten zo sterk is, dat zij allerlei definities en notatie-afspraken maar eenmaal behoeven te horen, om ze daarna meteen te onthouden. Hoe minder dus het geheugen van de hoorders in dit opzicht belast wordt, des te gemakkelijker zal de uiteenzetting zijn.

Gesteld nu, dat het publiek alle stapjes van de redenering goed begrepen heeft, hoe kan men maken, dat het die ook onthoudt? En ten slotte, hoe bereikt men, dat het publiek bovendien de grondgedachte van de redenering begrijpt en onthoudt?

Mijn antwoord op deze vragen zal kort zijn, al is het dan niet geheel volledig. Het is aldus:

Men kan dit alles alleen maar bereiken, als de grondgedachte van de redenering eenvoudig is en men die grondgedachte duidelijk naar voren brengt.

Immers, als iemand een redenering moet onthouden, dan is het niet nodig, dat hij alle afzonderlijke schakels onthoudt; als hij de

grondgedachte goed weet, dan kan hij de rest wel weer reconstrueren. Het gaat dus om de grondgedachte.

Welnu, wat betreft het begrijpen en onthouden van die grondgedachte; een eerste voorwaarde daarvoor is, dat die grondgedachte eenvoudig is. Als het goed is, dan moet die grondgedachte als het ware in één gedachtenflits te vatten zijn.

Natuurlijk zijn er ook andere factoren. Men kan door een bepaalde redenering verrast worden, men kan getroffen worden door de elegante bewijsvoering en daardoor het betoog goed onthouden. Maar toch geloof ik, dat de eenvoud het belangrijkste is, want in die andere factoren speelt die eenvoud vaak weer een rol. Immers, het is dikwijls juist de eenvoud van de grondgedachte van een bewijs, waardoor men verrast wordt en die ook de oorzaak is van de schoonheidsgewaarwording. Wij komen hier nog op terug.

Het spreekt vanzelf, dat ook de afzonderlijke schakels van een redenering eenvoudig moeten zijn, willen zij goed te begrijpen zijn. Elke schakel wordt als het goed is, gevormd door één enkele logische gevolgtrekking. Soms wil men echter vier of vijf conclusies tegelijk trekken om papier of tijd te besparen en dan krijgt men een schakel van de redenering, die niet eenvoudig meer is en meestal ook niet erg goed te begrijpen.

De grondgedachte van een wiskundig betoog is echter meer dan een logische conclusie. Zij is geen logica maar wiskunde. Het is een wiskundige overweging. Maar ook een wiskundige overweging kan eenvoudig zijn. Het is een bekend feit, dat oplossingen van belangrijke problemen in de wiskunde vaak gevonden worden in een enkel ogenblik, bijvoorbeeld plotseling, vlak na het ontwaken, of, zoals Poincaré eens overkwam, bij het instappen van de bus. Dat betekent natuurlijk niet, dat die oplossing dan ook in een paar regels volledig is op te schrijven. Maar men heeft de weg gezien. Men heeft de grondgedachte te pakken.

Soms is in een uitgewerkte redenering de grondgedachte niet expliciet geformuleerd. En dan is het vaak uiterst moeilijk deze weer te vinden en naar voren te brengen. In elk geval vereist zo iets wiskundige denk arbeid. Toch is het noodzakelijk duidelijk de grondgedachte van een redenering te laten zien, wil men de hoorders of lezers in staat stellen die redenering te begrijpen en vooral te onthouden.

Dat niet alle mathematici het hiermede eens zijn, moge blijken uit de volgende anecdote, die men mij verteld heeft van Landau.

Landau bracht een bezoek aan Engeland en had een voordracht gehouden op de hem eigen wijze: een lange keten van strikt

logische conclusies waar geen speld tussen te krijgen was. Na afloop van de uiteenzetting vroeg één van de Engelse toehoorders echter of Landau niet een algemeen principe kon aangeven, dat aan het betoog ten grondslag lag, want volgens de vrager moest er toch een grondgedachte zijn. Met trots zei toen Landau: „Yes, there was an underlying idea, but I succeeded in killing it”.

Nu was Landau niet de eerste de beste, maar toch geloof ik, dat niet veel mathematici het in dit geval met hem eens zullen zijn, namelijk dat het nuttig zou zijn de grondgedachte van een redenering weg te werken.

Men vindt een stelling immers ook niet door allerlei schakeltjes aan elkaar te passen en te kijken of men misschien onverwacht op een interessante conclusie stuit. Meestal wordt men toch bij het onderzoek geleid door een zeker vermoeden of een wens, in elk geval door een leiding gevende gedachte. Daarom mag men ook niet, als men het bewijs aan anderen tracht duidelijk te maken, volstaan met een lange reeks van logische conclusies, al is dat voor de spreker of schrijver verreweg het gemakkelijkste. Men leert de weg door een doolhof niet kennen, door een keer onder geleide langs één van de kronkelwegen te lopen. Het gaat om de grote lijn, het gaat om de grondgedachte. Die moet duidelijk naar voren gebracht worden.

Wij willen ons echter niet tot abstracte beschouwingen beperken, doch behandelen thans

Een voorbeeld.

Het voorbeeld is ontleend aan de getallentheorie. Het is een stelling van Blichfeldt, door hem gepubliceerd in 1914. Het bewijs dat ik geef is afkomstig van Birkhoff.

Ik veronderstel, dat U de vlakke meetkunde van de middelbare school nog kent. Niet dat ik een ernstig beroep op Uw kennis zal doen, maar nu behoeven wij niet alle begrippen, die we nodig hebben apart te definiëren.

We beginnen met het materiaal voor de redenering te verzamelen, d.w.z. de begrippen, die we nodig hebben om te begrijpen, waar het over gaat.

Stel U voor, dat het platte vlak in allemaal gelijke vierkanten verdeeld wordt door oneindig veel horizontale en verticale lijnen. Wij nemen aan, dat de afstand tussen elke twee opeenvolgende horizontale lijnen gelijk is aan de eenheid van lengte en dat hetzelfde geldt voor de verticale lijnen. Dat betekent, dat de oppervlakte van elk vierkant gelijk is aan 1. De hoekpunten van de

vierkanten, dat zijn dus de snijpunten van de horizontale en de verticale lijnen, noemen we „roosterpunten”.

Laat een punt P in een van de vierkanten liggen, bijvoorbeeld in een vierkant V en een punt Q in een ander vierkant W, dan zeggen we, dat P en Q overeenkomstige ligging hebben, indien P even ver van de onderkant en ook even ver van de linkerzijkant van V ligt als dat met Q in W het geval is. Dat betekent dus: als P en Q overeenkomstige ligging hebben en P ligt linksboven in een vierkant V, dan ligt Q linksboven in een vierkant W.

Wij willen nu een stelling bewijzen, die geldt voor elk gebied in het vlak met oppervlak groter dan 1. Eigenlijk moeten we de begrippen gebied en oppervlakte dan nauwkeurig definiëren. Dat zou echter te veel tijd kosten. U moet daarom maar geloven, dat zulk een definitie mogelijk is. Als ik gebied zeg, dan denkt U maar aan de afbeelding van een eiland op een landkaart en als U weet, wat men verstaat onder de oppervlakte van een stuk land, dan weet U ook wat ik bedoel met de oppervlakte van een gebied.

Hiermede hebben wij ons materiaal bij elkaar, in het bijzonder de begrippen roosterpunt, overeenkomstige ligging van twee punten, gebied en oppervlakte.

De stelling die wij zullen bewijzen, luidt aldus:

Elk gebied G met oppervlakte groter dan 1, kan men door een evenwijdige verschuiving, d.w.z. een verschuiving, waarbij G niet gedraaid wordt, in een zodanige stand brengen, dat het minstens twee roosterpunten bevat.

Bewijs. Wij kunnen de bewering ook aldus formuleren: in het oorspronkelijke gebied G zijn twee punten P en Q te vinden, die in verschillende vierkantjes liggen, maar daarin een overeenkomstige ligging hebben.

Immers, als er twee van zulke punten P en Q zijn in het gebied G en ik verschuif G zo met medeneming van P en Q, dat P op een roosterpunt valt, dan komt Q, vanzelf ook op een roosterpunt terecht.

P ligt bijvoorbeeld in een vierkant V en Q in een vierkant W. Indien P nu verschoven wordt naar een hoekpunt van V (dat is immers een roosterpunt), dan ondergaat Q een zelfde verschuiving en komt dus terecht op het overeenkomstige hoekpunt van W.

Wij moeten nu dus nog aantonen, dat we inderdaad twee van die punten met overeenkomstige ligging in G kunnen vinden.

Denk U nu voor het gemak in, dat het vlak van celluloid is, of van doorschijnend papier en het gebied G een zwarte vlek. G zal

zich uitstrekken over verschillende vierkantjes. Die vierkantjes knippen we uit en leggen we op elkaar. We zien nu de stukken van de zwarte vlek, dat zijn de stukken van G , alle binnen de omgrenzing van één vierkantje. De gezamenlijke oppervlakte van die stukken is groter dan 1, dat wil zeggen groter dan de oppervlakte van het vierkantje, waar ze nu in liggen. Er moeten dus wel een paar van die stukken geheel of gedeeltelijk over elkaar heen vallen. Dat betekent: er zijn punten van G , die in verschillende vierkantjes thuis horen, maar die nu op elkaar vallen, d.w.z. voor de knipperij overeenkomstige ligging hadden.

En hiermede is de stelling bewezen.

Twee heel eenvoudige overwegingen liggen aan dit bewijs ten grondslag:

De eerste is, dat een gebied G met oppervlakte groter dan 1, dat men in stukken geknipt heeft, niet geheel binnen een vierkantje met oppervlak gelijk aan 1 kan liggen, tenzij sommige stukken van G over elkaar heen vallen.

De tweede is, dat als men twee van de vierkantjes op elkaar legt, alleen de punten met overeenkomstige ligging op elkaar vallen.

Hoe eenvoudig deze overwegingen ook zijn, zij zijn van grote betekenis. Men zou ze kunnen opvatten als de „continue” formulering van twee belangrijke ideeën in de getallentheorie, namelijk:

1. Het ladenprincipe van Dirichlet: Als men $n + 1$ voorwerpen in n laden stopt, dan moet minstens 1 lade minstens 2 voorwerpen bevatten.

2. Het idee van de getallencongruentie met het bijbehorende begrip van restklasse (deze congruentie is wat anders dan de congruentie in de vlakke meetkunde).

We zullen hier niet verder op ingaan. Ik wil alleen maar opmerken, dat Blichfeldt zelf van het ladenprincipe en van congruenties gebruik maakt om zijn stelling te bewijzen.

Niet alleen de beide overwegingen, waarop ons bewijs berust, zijn van betekenis, ook de stelling zelf is van groot belang in de getallentheorie. Uit deze stelling kan men namelijk afleiden de beroemde stelling van Minkowski, welke de grondslag is van de door Minkowski gefundeerde Geometrie der Zahlen.

We kiezen een willekeurig roosterpunt uit en noemen dat de oorsprong. De stelling van Minkowski luidt nu aldus:

Elk gebied G , dat convex is en symmetrisch om de oorsprong en dat een oppervlakte heeft groter dan 4, bevat behalve de oorsprong minstens één roosterpunt.

Convex betekent: er zitten geen deuken in de rand. Precies geformuleerd: door elk punt van de rand van het gebied kan men een rechte lijn trekken zodanig, dat alle punten van het gebied aan één kant van die lijn liggen.

Symmetrisch om de oorsprong betekent: als een zeker punt in het gebied G ligt, dan ligt het punt, dat even ver aan de andere kant van de oorsprong ligt (op het verlengde van de lijn door P en de oorsprong) ook in G .

Het is niet moeilijk deze stelling uit die van Blichfeldt af te leiden. We zullen dat echter niet doen, omdat ik dan misschien toch te veel van Uw voorstellingsvermogen zou eisen. Ik heb de stelling van Minkowski alleen maar genoemd om U het belang van de stelling van Blichfeldt te laten zien.

Wij stellen nu de vraag:

Waarop berust de eenvoud?

In zeker opzicht is ons voorbeeld misleidend. Want hoe komt het eigenlijk, dat het bewijs, dat we geleverd hebben zo kort en zo eenvoudig was? Voor een deel, doordat we enige moeilijke definities omzeild, of liever geheel weggelaten hebben, namelijk die van gebied en oppervlakte.

Hoe duidelijk en vanzelfsprekend het mag schijnen, dat een gebied met oppervlakte groter dan 1, dat in stukjes geknipt is, niet geheel binnen een vierkant met oppervlak gelijk aan 1 kan liggen, tenzij sommige stukjes geheel of gedeeltelijk op elkaar vallen, een dergelijke uitspraak behoeft toch een bewijs, en wel een bewijs, dat berust op de weggelaten definities van gebied en oppervlakte.

Natuurlijk zal niemand zo dwaas zijn die definitie zo te kiezen, dat deze uitspraak niet geldt. Echter, zonder die definities is de uitspraak zonder inhoud en eveneens de stelling.

Wij hebben ons bij ons bewijs maar op de intuïtie beroepen, of op de aanschouwing, hoe U het noemen wilt. Maar dat zulk een beroep op de aanschouwing op een dwaalspoor kan leiden, kan men met veel voorbeelden illustreren. Ik noem een voorbeeld dat door Brouwer bedacht is:

Als men een vierkant in drie gebieden verdeelt, dan ontstaan er natuurlijk grenslijnen. En in 't algemeen zullen aan zo'n grenslijn twee van de drie gebieden bij elkaar komen. Een uitzondering vormen de eventuele „drie-landenpunten”. Men zou nu verwachten, dat er maar één of twee, in elk geval een beperkt aantal van die drie-landenpunten kunnen optreden. Brouwer ziet echter kans

zulk een verdeling, of liever, zulk een procédé van verdeling aan te geven, dat het resultaat is, dat alle grenspunten drie-landenpunten zijn. U moet natuurlijk niet vragen of iemand zich dat resultaat kan voorstellen. In elk geval, zo'n voorbeeld leert ons wat voorzichtigheid.

Zo beschouwd zou het er dus op neerkomen, dat we de stelling nog helemaal niet bewezen hadden. Trouwens, we hebben ook nog gebruik gemaakt van begrippen als evenwijdigheid en congruentie van figuren en hun eigenschappen, eveneens zonder die te bewijzen.

Is het voorbeeld daarom waardeloos?

Neen, integendeel. Het illustreert nu tevens, hoe men die eenvoud van het bewijs verkrijgt.

Als men een bewijs levert, dan staan dat bewijs en de bewezen stelling niet op zich zelf, maar ze passen in het kader van een theorie. Elke spreker of schrijver veronderstelt een bepaalde kennis bij zijn publiek, waar hij op voortbouwt. Hij mag dat ook doen. Men kan alleen van hem eisen, dat hij duidelijk aangeeft op welke stellingen of axioma's hij zich beroept, wat het uitgangspunt van zijn redenering is.

In het kiezen van het uitgangspunt van de redenering ligt nu een zekere willekeur. In plaats van ons te beroepen op de twee door ons genoemde overwegingen, namelijk dat een gebied met een oppervlakte groter dan 1 niet kan in een vierkantje met een oppervlak gelijk aan 1 en dat bij het op elkaar leggen van de vierkantjes alleen de punten met overeenkomstige ligging op elkaar vallen, ik zeg, in plaats van ons op die overwegingen te beroepen, hadden we ook verder terug kunnen gaan en ons kunnen beroepen op de axiomata der vlakke meetkunde, of, als men een analytische opbouw prefereert, op de eigenschappen van de natuurlijke getallen. Wij hadden dan het bewijs moeilijk nog eenvoudig kunnen noemen. Maar wij hadden er dan ook hele theorieën in moeten opnemen. Wij willen echter geen theorie opstellen, maar slechts een enkele stelling bewijzen. Daarom kozen wij als fundament voor onze redenering twee overwegingen, die niet alleen duidelijk en eenvoudig waren, maar ook algemeen van karakter, zodat de juistheid er van voldoende bekend mocht worden verondersteld.

Wij zien dus, dat de eenvoud van een bewijs voor een deel bepaald wordt door de keuze van het uitgangspunt van de redenering.

Er is nog iets anders, waardoor men een bewijs kan vereenvoudigen. Dat is de invoering van een nieuw begrip met behulp van een geschikt gekozen definitie. Een goede definitie dient niet

alleen tot vereenvoudiging van de formulering, maar kan bovendien het essentiële van het betoog naar voren brengen. Een dergelijke functie had in ons bewijs bij voorbeeld de definitie van overeenkomstige ligging.

Er zijn echter begrippen, die niet slechts betekenis hebben voor één enkel bewijs, maar die een rol spelen in uitgebreide gebieden van de wiskunde. De invoering van die begrippen heeft niet alleen de vereenvoudiging van enkele bewijzen tengevolge gehad, maar van hele theorieën.

Poincaré merkt op in zijn *Science et Méthode*: een geschikt gekozen definitie is vaak voldoende om de uitzonderingen te doen verdwijnen, die het gevolg van de oude terminologie waren; het is daarom dat men de negatieve getallen uitgedacht heeft, de imaginaire getallen, de punten in het oneindige en wat niet al meer. En even verder zegt hij: een goede definitie doet ons het essentiële opmerken in de wiskundige redeneringen. Poincaré noemt als voorbeelden de begrippen groep en invariant. Maar deze voorbeelden kunnen met talloze vermeerderd worden. Ik noem slechts de begrippen vector, ideaal, determinant, isomorphie, afgeleide. Al die begrippen hebben medegewerkt tot de vereenvoudiging van de wiskunde en daardoor haar vooruitgang bevorderd.

Men hoort sommige studenten in de chemie of de physica wel eens klagen over de wiskundige ballast, die zij met zich mede moeten voeren, alsof de wiskunde er toe diende om het werk moeilijker te maken. De wiskunde en de wiskundige begrippen dienen altijd tot vereenvoudiging. Ongetwijfeld kost het tijd, voordat men zich een nieuw begrip heeft eigen gemaakt en sommige experts vergeten wel eens de nodige consideratie te betrachten met hen, die minder goed op de hoogte zijn, hetgeen de studie niet gemakkelijker maakt. Maar als men zich de inspanning getroost, die nodig is om zo'n nieuw begrip te leren kennen, dan heeft men daarmee een nieuw wapen, een nieuw stuk gereedschap in de hand gekregen.

Dit brengt ons er toe een ogenblik stil te staan bij

De betekenis van de eenvoud.

Wij denken dan in het bijzonder aan de betekenis van het naar voren brengen van een eenvoudige gedachtengang in de wiskunde. Als men een bewijs analyseert en de eenvoud van de grondgedachte laat zien, bereikt men dan alleen, dat men het bewijs beter kan uitleggen, zodat anderen het gemakkelijker gaan vinden, of bereikt men nog wat meer?

Het antwoord kan niet twijfelachtig zijn. In vele gevallen toch gaat de betekenis van de bewijsmethode veel verder dan die van de stelling zelf. Vaak ontdekt men dat dezelfde eenvoudige gedachtengang, die geleid heeft tot het bewijs van een bepaalde stelling, ook van toepassing is op een veel algemenere stelling, of op een reeks van analoge stellingen.

Ik kies een eenvoudig voorbeeld. Het is ontleend aan een overbekend verhaal omtrent de grote wiskundige Gauss. Toen deze nog klein was gebeurde het eens, dat de meester van zijn klas een optelsom opgaf. Het schijnt niet bekend te zijn welke getallen precies bij die optelsom te pas kwamen, maar het was zo iets als $1 + 2 + 3 + \dots + 60$. Gauss was de jongste van de klas en er nog maar pas bijgekomen, maar de meester had de som nog niet opgegeven, of daar stond Gauss al voor zijn neus met zijn lei, waarop maar één getal; de uitkomst

1830.

Hoe kwam Gauss daaraan?

Aldus: in gedachten had hij opgeschreven

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \dots + 60 = S \\ 60 + 59 + 58 + \dots + 1 = S \\ \hline 61 + 61 + 61 + \dots + 61 = 2S \end{array}$$

dus

$$60 \cdot 61 = 2S \quad \text{en} \quad 30 \cdot 61 = S.$$

Wat is de grondgedachte van deze oplossing?

Het is dit, dat in de rij termen 1, 2, ..., 60 de som van de eerste en de laatste term gelijk is aan de som van de tweede en de op een na laatste term en die weer aan de som van de derde en de op twee na laatste term, enz.

En hoe komt dat?

Doordat de termen alle evenveel van elkaar verschillen. Vervangen we de eerste term door de tweede, dat komt er wat bij, maar vervangen we de laatste term door de op een na laatste, dan gaat er net zo veel weer af.

Hieruit volgt echter, dat we ook andere getallenrijen op deze manier bij elkaar kunnen tellen. De enige voorwaarde is, dat elke twee opeenvolgende termen hetzelfde bedrag van elkaar verschillen, d.w.z. dat de termen een rekenkundige reeks vormen.

Met andere woorden, als we de oplossing van Gauss wat nader bekijken, dan zien wij, dat zij niet alleen op snelle en eenvoudige wijze de uitkomst van dat ene sommetje oplevert, maar dat zij ook nog in vele andere gevallen toegepast kan worden.

Andere voorbeelden zouden we hieraan toe kunnen voegen. Zo is de stelling van Blichfeldt eigenlijk een poging om het essentiële uit de stelling van Minkowski af te zonderen en op die manier tot verdere resultaten te komen en een zeer geslaagde poging, zoals wel blijkt uit de toepassingen, die Blichfeldt zelf van zijn stelling gegeven heeft.

Zo kunnen wij dus zeggen, dat de eenvoud niet alleen van belang is voor het overbrengen van wiskundige kennis aan anderen, maar ook voor het bereiken van nieuwe resultaten. We kunnen echter nog verder gaan:

In de wiskunde is eenvoud niet alleen middel maar ook doel.

Immers waar gaat het om in de wiskunde? Is het alleen maar de bedoeling om kennis te verzamelen? Hetzij, omdat die kennis nuttig is in zich zelf, of omdat ze nuttig is voor andere gebieden van wetenschap. Werkt een wiskundige in de eerste plaats, omdat hij zijn werk zo nuttig vindt, of zijn er nog andere motieven?

Poincaré schreef: de man van wetenschap bestudeert de natuur niet, omdat dat nuttig is, hij bestudeert haar, omdat hij daar plezier in heeft en hij heeft er plezier in, omdat zij schoon is. En hij paste deze woorden ook toe op de wiskunde.

Ik geloof niet, dat ik te veel beweer, als ik zeg, dat de meeste wiskundigen het hiermede eens zijn. Ook bij een wiskundige is het niet in de eerste plaats het nut van de oplossing, die hem drijft tot het onderzoek van het probleem. Hij bestudeert het probleem, omdat het hem interesseert, omdat het hem pakt en hem tot onderzoek prikkelt. En hij geniet van de oplossing, omdat die hem bevredigt, omdat hij die mooi vindt.

Hardy schreef in zijn „A Mathematician's Apology” omtrent de eisen die een wiskundige stelt aan zijn werk: „Beauty is the first test” en hij besteedde minstens tien bladzijden om over de schoonheid van zijn werk uit te wijden.

Het zou niet moeilijk zijn nog vele andere citaten aan te halen, waarin de schoonheid van de wiskunde naar voren gebracht en geprezen wordt.

Beth gaat zelfs zo ver in het aesthetisch element in de wiskunde de oplossing te zoeken van het probleem van de wiskundige begaafdheid. Gebrek aan wiskundige begaafdheid zou volgens hem kunnen voortkomen uit een niet in staat zijn tot de, aan elke beoefening van de wiskunde inhaerente, schoonheidsbeleving.

Een Christen, die de wiskunde beoefent, zal niet achterblijven in het prijzen van haar schoonheid. Zijn bewondering is niet slechts

de bewondering van de mens voor het vermogen van het menselijk verstand of voor de harmonie in de natuur, maar hij herkent in dit alles de hand van zijn Schepper. Zijn bewondering is uiteindelijk die van een kind voor de grootheid van zijn hemelse Vader.

Voor hem spreekt dan ook, bij de beoefening van de wiskunde, niet zo sterk het onderscheid tussen nut en genieting. Want wat is bij hem nuttig? Alleen het dienen van God, Die hij liefheeft. Maar dat is ook het enige, wat ware bevrediging schenkt.

In dit licht bezien krijgen de woorden van hen, die de wiskunde om haar schoonheid prijzen een diepere zin.

Een van de eerste eisen van wiskundige schoonheid is nu eenvoud.

Een wiskundige verkiest een eenvoudige formulering van een stelling, omdat hij die mooier vindt. Hij vereenvoudigt een bewijs, omdat het daardoor eleganter wordt. De behoefte aan schoonheid is voor hem nog een sterker motief dan de gedachte dat uit vereenvoudiging wetenschappelijk voordeel kan voortvloeien.

Zo kan men niet zeggen, dat de wiskunde in haar geheel eenvoudig is, maar wel dat er in de wiskunde een streven naar eenvoud bestaat. Wiskunde is niet hetzelfde als eenvoud, maar toch behoren die twee bij elkaar.

KORRELS.

XCVII. *De regel van Simpson; zie blz. 132.*

In het artikel „de Regel van Simpson in het Stereometrie-onderwijs” (Euclides 24, 132 e.v.) is uiteengezet, hoe op verantwoorde wijze de formule van Simpson ten grondslag gelegd kan worden aan vrijwel alle inhoudsberekeningen van ons schoolprogram. Elementaire kennis van integraalrekening is voor deze methode van behandelen noodzakelijk. Ontbreekt deze kennis, dan behoort de regel in een verantwoord wiskunde-onderwijs niet thuis. Toepassing van de regel wordt dan tot „een oefje”.

Als een voorbeeld van een afkeurenswaardige methode citeer ik onverkort een bladzijde uit de „New Syllabus Algebra” van Tuckey & Armistead, Cambridge 1949, blz. 183—184. Dit boekje, aanbevolen als: „an excellent little book, in harmony with present trends in the teaching of Elementary Mathematics for School Certificate”, onderscheidt zich van Nederlandse uitgaven door een wel zeer ver doorgedreven besnoeiing. Apodictische mededeling van wiskundige kennis in deze Engelse geest moge naar we hopen zelfs bij onze ijverigste vereenvoudigers geen genade vinden.

Simpson's Rule.

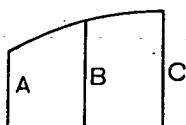
Simpson's rule is used to form an **average**, especially for

- (1) the average ordinate (height) of a curve;
- (2) the average cross-section of a solid.

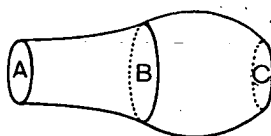
The rule is

$$\text{Average} = (A + 4B + C) \div 6,$$

where A, C are the end ordinates and B the ordinate midway between them (fig. 72 (1)).



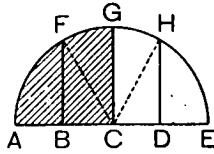
(1)



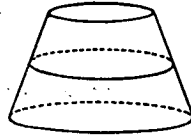
(2)

Fig. 72.

The **same rule** works for fig. 72 (2) where A, C are the areas of the end cross-sections and B that of the cross-section midway between them.



(1)



(2)

Fig. 73.

The rule is exact in a good many cases and gives a very good approximation in many others. When it does not work well is when there is a very steep gradient at one end as in fig. 73 (1) for the shaded quadrant. It can be proved by the Calculus to be exact if the curve is straight or a part of a quadratic or cubic curve.

Joh. H. Wansink.

XCVIII.

Een opmerking over een eigenschap van de functie $\cos x$.

In: Bulletin of the American Mathematical Society, Volume 50, Number 10, October, 1944, bewijst H. E. Robbins de volgende stelling:

Geldt van een functie $f(x)$:

(I) $f(x)$ is reëel voor elke reële x en periodiek met periode 2π ,

(II) $f(x)$ is differentiëerbaar, en bestaan er constante getallen a en b zodanig, dat voor elke x

$$f'(x) = a f(x + b),$$

dan bestaan er constante getallen A , B en n (n geheel) zodanig, dat

$$f(x) = A \cos n(x + B).$$

Het is wellicht van enige interesse op te merken, dat de stelling op de volgende wijze kan worden uitgebreid:

Geldt van een functie $f(x)$ eigenschap (I) en geldt

(II*) $f(x)$ is p -maal differentiëerbaar, en bestaan er constante getallen a en b zodanig, dat voor elke x

$$f^{(p)}(x) = a f(x + b),$$



Opname Maart 1950

Prof. Dr J. RIDDER

geb. 3 Januari 1894 te Harderwijk.

1921. Promotie te Utrecht; 1920—1931 leraar;

1931—1950. Lector aan de Rijksuniversiteit te Groningen;

1 Jan. 1950. Buitengewoon hoogleraar te Groningen.

dan bestaan er constante getallen A , B en n (n geheel), zodanig, dat

$$f(x) = A \cos n(x + B).$$

Bewijs (analoog aan dat van Robbins):

Uit (II*) volgt, dat $f(x)$ ∞ -maal gedifferentieerd kan worden, zodat mede wegens de periodiciteit van $f(x)$ de Fourierontwikkeling geldt

$$f(x) = \sum k_n e^{inx},$$

waaruit volgt

$$a f(x + b) = \sum a e^{in(x+b)}$$

en

$$f^{(p)}(x) = i^p \sum n^p k_n e^{inx}.$$

Verder volgt dan uit (II*), dat voor elke n

$$k_n (i^p n^p - a e^{inb}) = 0.$$

Is voor elke n voldaan aan $k_n = 0$, dan is $f(x) \equiv 0$. Ook in dit geval is de bewering van onze stelling juist.

Is voor zekere n $k_n \neq 0$, dan moet voor deze n voldaan zijn aan

$$n^p i^p = a e^{inb},$$

waaruit volgt, dat

$$n = \pm \sqrt[p]{|a|},$$

zodat er hoogstens 2 waarden van n kunnen zijn, waarvoor $k_n \neq 0$. Voor zekere gehele n is dan

$$f(x) = k_{-n} e^{-inx} + k_n e^{inx},$$

waarbij k_{-n} en k_n toegevoegd complex zijn wegens het reëel zijn van $f(x)$, zodat $f(x) = A \cos n(x + B)$ is, waarmee het bewijs is geleverd.

Bandoeng

Dr L. Kuipers.

VAN DE PERSONEN.

Prof. Dr J. Ridder, geb. 3 Jan. 1894 te Harderwijk. R.H.B.S. Bergen op Zoom, verschillende ex. voorl.o., staatsex. 1915; studeerde van 1915—1919 te Leiden; 1920—22 in Utrecht coll. van Prof. Denjoy; promotie Utrecht: „Enkele algemene limietstellingen met toepassing op reële functies”; prom. Prof. Dr A. Denjoy.

Van 1920—30 leraar; van 1931/50 lector in Groningen; met ingang van 1 Jan. 1950 hoogleraar in Groningen.

Publicaties voor een belangrijk deel op het gebied van de theorie der functies van reële veranderlijken; daarnaast over complexe functietheorie, harmonische functies en potentiaaltheorie, logica; enz.

XCIX.

Sin 2α en cos 2α .

In korrel XCV (blz. 106) geeft' de heer M. G. Beumer een aardig meetkundig bewijs voor

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$,
dat ik mij niet herinner ergens eerder te hebben aangetroffen.

Maar dan moet cos 2α ook met een dergelijke figuur in α zijn uit te drukken. Als men n.l. wil proberen sin 2α en cos 2α langs meetkundige weg in α uit te drukken ligt het (achteraf!) voor de hand in de ge-

bruikelijke goniometrische cirkel α aan weerszijden van OX uit te zetten, zoals de heer B. dan ook feitelijk gedaan heeft.

Men vindt dan ($MA = MB = MC = 1$):

$$1. \quad \sin 2\alpha = \frac{BE}{MB} = BE \times MC = 2 \times \triangle MBC = 4 \times \triangle MDB = 4 \times \frac{1}{2} BD \times MD = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

of $\sin 2\alpha = BE = 2DF = 2 \frac{DF}{MD} \times MD = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$

$$2. \quad \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \text{ (cosinusregel op } \triangle BCM \text{ toegepast),}$$

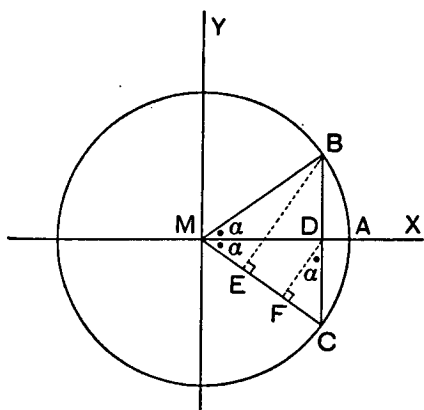
of $\cos 2\alpha = ME = MC - 2FC = 1 - 2 \frac{FC}{DC} \times DC = 1 - 2 \sin^2 \alpha,$

$$3. \quad \cos 2\alpha = ME = 2MF - MC = 2 \frac{MF}{MD} \times MD - 1 = 2 \cos^2 \alpha - 1,$$

$$4. \quad \cos 2\alpha = MF - FC = \frac{MF}{MD} \times MD - \frac{FC}{DC} \times DC = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha,$$

waarmee dus alle vier formules onafhankelijk van elkaar zijn afgeleid.

S. J. Geursen.



BOEKBESPREKING.

Prof. Dr M. G. Minnaert, *Dichters over sterren*. Uitgave van Van Lochem Slaterus, Arnhem MCMXLIX, 216 blz. f 4,50, geb. f 5,90.

Deze bundel verzen werd volgens het meegezonden blaadje van de uitgever „ter recensie” gezonden. Natuurlijk is er geen sprake van „recensie”: een verzameling van gedichten over sterrenpracht, over het eeuwige, goddelijke van de schepping in haar volmaakte schoonheid! Aankondigen wil ik volgaarne, al raakt de inhoud slechts zijdelings de zakelijke van dit tijdschrift. Toen ik ging lezen, werd ik geboeid, geheel, door de schone verzen van de grootsten der groten over de Wonderen van het heelal. Men vergeet dan een wijle zijn dagelijks werk en voelt zich gedragen door ruimte en tijd door ware dichters uit alle tijden in vele landen.

Wat de inhoud is, vraagt een lezer. Wel, die bestaat uit een 20-tal gedichten in het Nederlands, 16 in het Engels, 14 in het Duits, 20 in het Frans (een paar Engelse en enige Franse in Nederlandse vertaling, in dichtvorm). Dat vult het boek tot blz. 144, daarna begint: „De schone verscheidenheid”; verzen uit het oude Egypte uit Griekenland, Italië, Spanje, Portugal, Denemarken, Zweden, Hongarije, Polen, Rusland, India, Japan, China, bijna alle in Nederlandse vertaling in versmaat, een paar in een van de moderne talen.

Met hoeveel liefde en zorg Prof. Minnaert deze bloemlezing heeft samengesteld, kan men zich indenken; hij de natuurliefhebber als weinigen, heeft innig genoten, toen hij de dichtstukken verzamelde, verzen, die de lof verkonden van de schone schepping van de Opperbouwmeeester des heelals.

Wij, die dagelijks gebukt gaan onder het aardse, vuile gewriemel en daaraan ook moeten meedoen, wij hebben behoefte aan wat groot en goed en rein is. Aan die behoefte voldoet de lezing, de rustige lezing in overgave van deze dichtbundel. Schaf U deze aan, voor U zelf en voor de leerlingen. Het boek brengt niet alleen, wat ik aanpreef, het geeft ook „de menselijke kant” van de kennis der sterren, een enkele maal zelfs de humoristische van ons astronomisch bedrijf. Zo helpt deze bundel mee de wisselwerking bevorderen tussen de schoolvakken letterkunde en cosmografie. Het boek mag in geen enkele schoolbibliotheek ontbreken. Ook een waardevol geschenk aan hen, van wie men weet, dat ze ontvankelijk zijn voor schoonheid.

P. W.

—Prof. Dr N. G. de Bruyn, *Beknopt leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening*. N.V. Noord-Hollandsche Uitgeversmaatschappij, 1949, XII + 270 p.p. Prijs gebonden f 13.50.

Er zijn sommige hoogleraren in meer toegepaste vakken, die ons, wiskundigen, verwijten, dat we de jeugd bederven. En wel, doordat wij slechts strenge methoden onderwijzen en geen oog hebben voor de betekenis van globale redeneringen.

Speciaal verlangen ze, dat wij de hand zullen lichten met betrekking tot de „epsilon-lontiek” in de analyse. Het hier besproken boek van de hand van een hoogleraar te Delft geeft daarop in zekere zin een antwoord. In zijn voorwoord zegt de schrijver o.a.: „Eerst enkele woorden over de door zovelen verfoeide wiskundige strengheid. Deze afschuw komt eenvoudig voort uit het feit dat men die strengheid in het begin heeft laten varen; later kan men er dan niet meer mee aankomen. De „ε-stijl” in de analyse vraagt zorgvuldige aandacht van het begin af aan. Wie het niet volledig begrijpt heeft niets begrepen; wie het begrijpt in het begin heeft later geen enkele moeilijkheid meer.

Van degenen die de wiskunde als hulpwetenschap gebruiken denken velen dat strengheid overbodig is. Dit is een illusie: de tijd dat men in de meeste wetenschappen en in de techniek de wiskunde slechts als routine-apparaat nodig had, ligt achter ons. Overal is zelfstandig wiskundig denken noodzakelijk geworden. Wie de strengheid overboord heeft gezet heeft zijn voornaamste werktuig verloren: de wiskundige zekerheid die hem in staat stelde zelfstandig alles aan te pakken heeft hij vervangen door een vaag gevoel van wat „mag” en wat „niet mag”.

Met dit alles ben ik het volkomen eens. De consequentie van dit standpunt is echter, dat de auteur van dit voor beginners bedoelde boek ook aandacht schenkt aan de grondslagen van de analyse. Dit nu is een moeilijk onderwerp en toch mag de behandeling daarvan niet al te veel ruimte en tijd vragen. De schrijver heeft getracht om door middel van een compromis uit deze moeilijkheid te geraken. Ik sta zeer sympathiek tegenover deze poging, maar toch ben ik er niet van overtuigd, dat deze geheel geslaagd mag heten. Ik vrees, dat menige beginneling, vers van Gymnasium of H.B.S., afgeschrikt zal worden juist door het eerste hoofdstuk met zijn gecomprimeerde en moeilijk te verwerken stof (snede van *Dedekind*, bovenste grens, enz.). Ik vraag me af of de schrijver, juist in dit begin, het de lezer niet iets gemakkelijker had kunnen maken. Om iets te noemen; de schrijver toont aan, hoe het principe van volledige inductie afgeleid kan worden uit een andere grondeigenschap, n.l. uit de bewering, dat iedere niet lege verzameling van natuurlijke getallen een kleinste getal bevat (pag. 3—5). Had dit de lezer niet kunnen worden bespaard?

Afgezien van dit bezwaar heb ik veel lof voor dit werk. Het betoog is overal sluitend en toch duidelijk en eenvoudig. Prettig zijn ook de talrijke tekeningen tussen de tekst. Er zijn vele goede voorbeelden en vraagstukken. Van deze laatste zijn de antwoorden aan het slot van het boek bijgevoegd. Naast de gebruikelijke onderwerpen vindt men tevens een korte behandeling van meervoudige integralen, van de multiplicatoren methode van Lagrange en tenslotte twee hoofdstukken respectievelijk over differentiaalvergelijkingen en complexe getallen.

Natuurlijk zijn er hier en daar kleinigheden, die men graag iets anders zou willen zien. Zo is op pag. 61 en 63 de notatie m.i. onnodig gecompliceerd en in § 4 (pag. 39) wordt verwezen naar genummerde voorbeelden van de daaraan voorafgaande paragraaf; dit kan echter verwarring geven, omdat de nummers 1, 2, 3 hier tweemaal voorkomen.

De uitvoering van dit werk is uitstekend; alleen zijn sommige formules aan het eind van een regel op een merkwaardige manier afgebroken (zie pag. 30 onderaan en ook pag. 34).

Mijn slotconclusie is, dat dit boek één der belangrijkste leerboeken op wiskundig gebied is, die in het Nederlands zijn verschenen. Ik beveel het dan ook gaarne aan.

P o p k e n.

E. J. Dijksterhuis, *Enquête sur la place de l'Histoire des Sciences dans l'Instruction supérieure.*

De „Commission pour l'Enseignement et la Diffusion de l'Histoire des Sciences", ingesteld door de „Académie internationale d'Histoire des Sciences" heeft in Dec. 1948 een enquête gehouden onder de medische en de natuurwetenschappelijke faculteiten van alle universiteiten en hogescholen naar de plaats, die de geschiedenis der betreffende wetenschappen inneemt onder de colleges. Het resultaat dezer enquête; verzorgd door Dr Dijksterhuis, vindt men in bovenvermelde brochure, uitgegeven, dank zij de subsidie van de UNESCO, als brochure No. 3 van de „Union Internationale d'Histoire des Sciences".

Str.

P. Bockstaele, *Het intuïtionisme bij de Franse Wiskundigen.* (Verhandelingen van de Koninklijke Vlaamse Academie voor wetenschappen, letteren en schone kunsten in België), Brussel 1949; 123 blz. Niet in de handel.

Verschillende Franse mathematici, waaronder vooral Poincaré, Borel en Lebesgue, hebben door hun kritiek op de klassieke wiskunde bijgedragen tot de ontwikkeling van de intuïtionistische richting in het wiskundig grondslagenonderzoek. Geen van die schrijvers gaf echter een systematische uiteenzetting van zijn opvatting; ze beperkten zich tot kritische opmerkingen aangaande een of ander punt uit de analyse of de leer der verzamelingen. In het voorliggend werk werden die verspreide aanduidingen samengebracht, om daarmee, voor zover dit mogelijk is, een beeld te verkrijgen van de opvattingen dezer schrijvers. De eerste drie hoofdstukken behandelen achtereenvolgens:

1. de rol van de logica en van de intuïtie in de wiskunde;
2. het daarmee samenhangend probleem der mathematische existentie;
3. de natuurlijke getallen.

In het vierde en vijfde hoofdstuk wordt onderzocht, welke delen van de leer der verzamelingen en van de hogere analyse door Poincaré en de semi-intuïtionisten Borel, Lebesgue, enz. als voldoende gefundeerd kunnen aanvaard worden.

Dit werk bevindt zich in de boekery van het Wiskundig Genootschap (adres Universiteitsbibliotheek) te Amsterdam.

Ir W. J. Vollewens c.i., *Repertorium der Wiskunde voor ingenieurs*; deel I, Lagere Wiskunde, 95 fig., 213 blz., geb. f 7,50.

In het „Woord vooraf" lezen we het volgende:

De bedoeling van dit „Repertorium voor Ingenieurs" is om in een paar handige deeltjes een kort overzicht te geven van die onderwerpen uit de wiskunde, die de ingenieur in de praktijk geregeld te pas komen of die nodig zijn om de literatuur over zijn vak te kunnen bijhouden. De afgestudeerde ingenieur van de T.H. te Delft zal hierin de stof vinden, die hij in de eerste jaren van zijn studie moet doorwerken voor zijn examen; andere technici, die bij hun opleiding niet veel aan

wiskunde hebben gedaan, vinden hierin een handleiding als in de practijk blijkt, dat zij in wiskundige kennis te kort schieten.

Inhoud. A. Rekenkunde, 17—32. B. Goniometrie, 33—75. C. Vlakke driehoeksmeting, 76—95. D. Boldriehoeksmeting, 95—121. E. Planimetrie en Stereometrie, 122—175. F. Algebra, 176—202.

Mij dunkt, dat dit een boek is, dat elke H.B.S.-scholier, die in Juni zijn eind-diploma haalt, moet doorwerken voor hij naar Delft gaat. Een maand of drie is daarvoor nodig, ook voldoende; er is genoeg in, dat geheel nieuw voor hem is; b.v. de boldriehoeksmeting. Het boek is voor hem een goede krachtmeter; kan hij de inhoud niet zelf onder de knie krijgen, dan moet hij maar liever niet naar Delft gaan.

P. W.

Dr J. H. J. Almering, *Rationaliteitseigenschap in de vlakke meetkunde*, 's-Gravenhage (1950), 103 blz.

Het is om verschillende redenen een genoegen in dit tijdschrift de dissertatie te mogen aankondigen, waarop J. H. J. Almering aan de Universiteit van Amsterdam de doctorstitel verwierf. Om te beginnen vormt het een uitzondering op de in deze tijd van wetenschappelijk specialisme geldende regel, dat een proefschrift slechts begrepen kan worden door een kleine kring van vakmensen. Voorts behandelt het een onderwerp, dat grenst aan de gewone schoolmeetkunde en oplossingen nastreeft van vragen waarvoor elke leraar gesteld wordt, die het goed meent met zijn leerlingen. En vooral: het is een zeer helder gesteld geschrift, uitmuntend door de zorgvuldigheid, waarmee de begrippen worden vastgelegd en de problemen geformuleerd en opgelost.

Het geeft een zekere aesthetische bevrediging, wanneer een vraagstuk met numerieke gegevens, „mooi” uitkomt en wij hebben allen een zwak voor de driehoek met zijden 13, 14, 15, omdat zijn oppervlakte door een rationaal getal wordt voorgesteld. Welnu, het is in deze sfeer dat de door Almering gestelde problemen moeten worden geplaatst. Zijn er vierhoeken, waarvan de zijden en de diagonalen rationaal zijn? Kan men rationale driehoeken ontwerpen met één, met twee, met drie bissectrices of zwaartelijnen? De schrijver streeft er naar zo veel mogelijk algemiene methode te vinden om antwoorden op deze vragen te kunnen geven. Alle gekunsteld proberen is hem daarbij vreemd en hoewel zijn geschrift vrijwel steeds een betrekkelijk elementair karakter draagt, heeft het door zijn wijze van behandelen alle eigenschappen van een bij uitstek wetenschappelijk werk. Overigens acht het zich niet te hoog om met voorbeelden het betoog te illustreren en wij ontmoeten concrete uitspraken als deze: onder de driehoeken met onderling verschillende, gehele, zijden, elk ≤ 11 , is 8, 9, 11 de enige met twee rationale zwaartelijnen, terwijl het geval van drie rationale zwaartelijnen in deze verzameling niet voorkomt.

De schrijver baseert zijn werk op een beschouwing van die reële getallen, door hem *toelaatbare* genoemd, waarvan het kwadraat rationaal is. Zo'n getal is te schrijven als $r\sqrt{\alpha}$, r rationaal, α geheel en kwadraat-vrij; α heet de index van het getal en speelt in de theorie een belangrijke rol. Een driehoek met toelaatbare zijden heeft een toelaatbaar oppervlak en de index daarvan heet de index van de driehoek. Er wordt ook een (iets gecompliceerde) definitie gegeven van toelaatbare hoeken en met behulp van een eenvoudige theorie weet de schrijver in zijn eerste hoofdstuk al heel wat resultaten te bereiken. Wij noemen: algemene formules voor Heronische driehoeken (rationale driehoeken met rationaal oppervlak, dus met index 1), rationale driehoeken met twee rationale bissectrices (die ook steeds een rationale buitenbissectrice hebben), idem met drie rationale bissectrices (en buitenbissectrices), die alleen mogelijk blijken als de index 1 is (voorbeeld 169, 125, 154), rationale driehoeken met rationale trissectrices (zijn alle trissectrices rationaal, dan moet de index 3 zijn, voorbeeld 74, 133, 2.3.11.19).

Hoofdstuk 2 voert het begrip in: systemen van toegelaten punten. Er wordt uitgegaan van een driehoek ABC (de *basis*) met toelaatbare zijden en een punt P behoort tot het systeem als PA, PB en PC toelaatbare lengten hebben. De eigen-

schappen van dit systeem worden uitvoerig en zorgvuldig onderzocht. Zo blijkt elk drietal niet-collineaire punten van het systeem als basis te kunnen dienen; alle uit systeem punten gevormde driehoeken hebben dezelfde index, enz. De bewijzen zijn kort en duidelijk geformuleerd; zij zijn van meetkundige aard. Misschien had de schrijver dit hoofdstuk kunnen afsluiten met een analytische beschouwing. Neemt men langs AB en AC resp. de X- en de Y-as van een scheefhoekig assenstelsel en zijn B en C de eenheidspunten op die assen, dan zijn de toegelaten punten geen andere dan die met rationale coördinaten. Immers, is $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ en zijn $P_1 (p_1, q_1)$ en $P_2 (p_2, q_2)$ twee rationale punten, dan geldt voor het kwadraat van hun afstand: $(p_1 - p_2)^2 c^2 + (q_1 - q_2)^2 b^2 + (b^2 + c^2 - a^2)(p_1 - p_2)(q_1 - q_2)$; de afstand van twee rationale punten is dus toelaatbaar en in het bijzonder zijn de afstanden van een rationaal punt tot A, B en C toelaatbaar. Ook omgekeerd ziet men gemakkelijk in (b.v. met de stellingen 10, 8 en 5 uit het proefschrift) dat een toegelaten punt rationale coördinaten heeft.

Voor de volgende onderzoeken zijn de resultaten van hoofdstuk 2 niet voldoende. Als ABCD een vierhoek zal zijn met rationale zijden en diagonalen, dan moeten de driehoeken ABC en ABD dezelfde index hebben, maar plaatst men twee rationale driehoeken ABC en ABD (met dezelfde index) tegen elkaar, dan wordt CD wel toelaatbaar, maar in het algemeen niet rationaal. Uit een nader onderzoek van de schrijver blijkt nu dat een bepaalde vlakke cubische kromme, met rationale vergelijking, voor het probleem van belang is en dat men rationale punten op deze kromme moet trachten te bepalen. Nu kan men dergelijke punten vinden als men over één of meer rationale punten reeds beschikt: de koorde door twee rationale punten snijdt een derde rationale punt uit, het tangentiaalpunt van een rationaal punt is rationaal, enz. Aan dergelijke constructies is hoofdstuk 3 gewijd; hoofdstuk 4 behandelt daarna rationale vierhoeken. In hoofdstuk 5 zijn rationale driehoeken met een rationale Stewartlijn aan de orde; is $c = u_1 a + u_2 b$; dan is de afstand van C tot het op AB gelegen rationale punt P ($AP : PB = n : m$; $n + m = 1$) rationaal, als $nu_1^2 + mu_2^2 = 1$, van welke vergelijking de algemene oplossing wordt gegeven. Hoofdstuk 6, de berekening van rationale driehoeken met drie rationale Stewartlijnen doet ons opnieuw een rationale cubische kromme ontmoeten; het volgende hoofdstuk behandelt het bijzondere geval van drie rationale zwaartelijnen. Ten slotte wordt in hoofdstuk 8 de Stewartkromme aan een birationale transformatie onderworpen, waarna op grond van door Poincaré en Hurwitz bewezen stellingen de existentie van oneindig vele rationale punten op deze kromme volgt; dit geeft o.m. de conclusie: er zijn oneindig vele niet gelijkvormige driehoeken met rationale zijden en rationale zwaartelijnen.

Wij mogen deze bespreking beëindigen met de opwekking aan de lezer om van het interessante onderzoek van Almering kennis te nemen.

O. BOTTEMA.

Twintig Mondelinge Examens Wiskunde H.B.S.-B, door B. W. Vriezen. — N.V. W. J. Thieme Cie, Zutphen. Prijs f 0.95.

Wat moet een recensent van zo'n boekje zeggen? Dat er aardige examens bij zijn? Dat alle stof zo'n beetje aan de beurt komt? Dat een kandidaat, die dit alles kan beantwoorden (!) goed beslagen ten ijs komt? Laat mij liever mijn afschuw uitspreken over het bestaan van zulke boekjes. Het U.L.O. is er rijk mee „gezegd”; laat de H.B.S. er van verschoond blijven. Ze wekken altijd weer de gedachte, dat een kandidaat op *elke* vraag maar moeten kunnen antwoorden, en *elk* probleem maar moeten kunnen oplossen. De cand., die ze gebruikt, krijgt angstaanvallen; de leraar, die ze invoert, verwisselt zich zelf voor een papieren docent. De dwingelandij van het *schriftelijk* examen is al groot genoeg!

H. STR.

VERSCHEIDENHEDEN.

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA.

XXVII.

De maanbaan.

Aannemende dat de aarde eenparig een cirkel (straal R) doorloopt met de zon als middelpunt en de maan zich op haar beurt eenparig in een cirkel (straal r) om de aarde beweegt, kan men vragen naar de baan van de maan ten opzichte van de zon. Omtrent

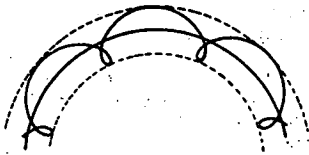


Fig. 1.

de gedaante van deze baan hoort men en leest men meermalen geheel onjuiste opvattingen. Op het eerste gezicht is men inderdaad geneigd aan een kromme te denken, die betrekkelijk snel op elkaar volgende lussen vertoont en die dus dubbelpunten bezit met de eigenschap dat de beide tijdstippen waarop de maan zich in zo'n dubbelpunt bevindt een geringe afstand hebben, althans een afstand die kleiner is dan de omlooptijd van de maan om de aarde (fig. 1). Deze opvatting is die van de gemiddelde cosmographieleerling. Wijst men er op dat de straal van de aardbaan groot is ten opzichte van die van de relatieve maanbaan,

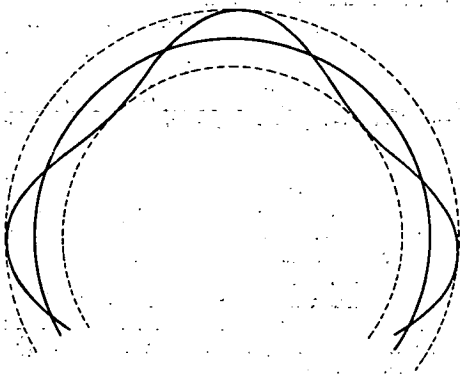


Fig. 2.

dan wordt de veronderstelde kromme soms vervangen door een kromme zonder dubbelpunten, die zich als een slang om de aardbaan kronkelt en de gedaante heeft van fig. 2. Deze kromme bestaat uit stukken die van de zon af gezien afwisselend convex en concaaf gekromd zijn, waarbij de buigpunten dan liggen op of in de buurt van de aardbaan

Merkwaardigerwijze vindt men deze opvatting zelfs in de bekende en veel verspreide *Cours élémentaire d'Astronomie* van Delaunay, een omstandigheid die te meer verbaast daar de geleerde schrijver een groot deel van zijn leven aan de studie van de maanbeweging

heeft gewijd en de resultaten neergelegd in de klassieke *Théorie de la Lune*. In de zevende editie van de *Cours* (Paris 1885) vindt men onze fig. 2 op pg. 419; de tekst laat verder geen enkele onzekerheid over de bedoeling, want wij lezen: „Le mouvement réel de la lune dans l'espace résulte de la combinaison des deux mouvements dont il s'agit. En étudiant attentivement les diverses circonstances que doit présenter ce mouvement absolu de la lune, on reconnaît qu'elle décrit dans l'espace une ligne sinueuse, pendant que la terre parcourt son orbite elliptique autour du soleil”. „... et comme la durée d'une lunaison est contenue un peu plus de douze fois dans une année, il s'ensuit que la courbe sinueuse décrite par la lune dans l'espace présente, le long de l'orbite de la terre, un peu plus de douze sinuosités complètes”.

In werkelijkheid vertoont de maanbaan noch de gedaante van fig. 1, noch die van fig. 2, omdat zij, in tegenstelling met deze beide, voortdurend op dezelfde wijze gekromd, dus van de zon uit gezien concaaf is. Een juiste schets van de baan staat b.v. bij Newcomb—Engelmann, *Populäre Astronomie* (6 Auflage, Leipzig, 1921, pg. 367).

Deze uitspraak wordt naar mijn ervaring door de leerling met

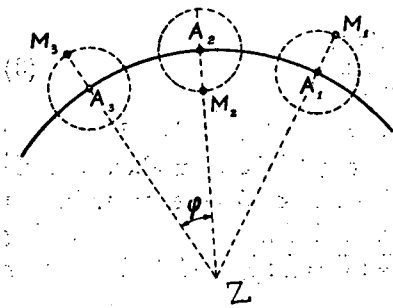


Fig. 3.

ongeloof bejegend. Men kan haar het paradoxale karakter ontnemen door te wijzen op de numerieke omstandigheden. Beschouw daarvoor fig. 3, waar de situatie voor twee opvolgende volle manen en de tussen liggende nieuwe maan geschetst is. Is l de verhouding van de omlooptijd van de aarde om de zon tot de synodische omlooptijd van de maan, dan is

$$\angle A_1ZA_2 = \varphi = \frac{\pi}{l}.$$

Opdat de baan van Z uit hol zij is nodig dat de afstand van Z tot M_2 groter is dan van Z tot de koorde M_1M_3 . Dus moet

$$R - r > (R + r) \cos \frac{\pi}{l} \quad (1)$$

of

$$\frac{R}{r} \geq \frac{1 + \cos \frac{\pi}{l}}{1 - \cos \frac{\pi}{l}}$$

Nu is l ongeveer 12, dus $\cos \frac{\pi}{l} = \cos 15^\circ = 0,97$

zodat
$$\frac{R}{r} > \frac{1,97}{0,03} = 66.$$

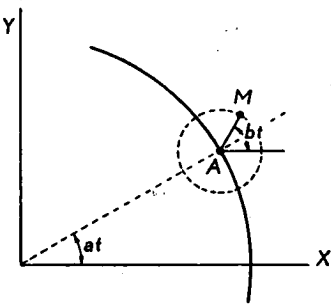


Fig. 4.

Daar $R = 400 r$ is aan de ongelijkheid (1) dus gemakkelijk voldaan.

Met een weinig elementaire infinitesimaalrekening kan men aantonen dat de maanbaan inderdaad geen buigpunten bezit.

Nemen wij daarvoor de X-as van een rechthoekig assenkruis langs Zon — Aarde — Volle maan (fig. 4) en zij voor $t = 0$ de maan in het punt $(R + r, 0)$, dan geldt voor de coördinaten van de maan

$$x = R \cos at + r \cos bt, \quad y = R \sin at + r \sin bt \quad (2)$$

Hierin is a de hoeksnelheid van de aarde om de zon en b siderische hoeksnelheid van de maan om de aarde. Voor de kromtestraal van de maanbaan geldt

$$\rho = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y}} \quad (3)$$

Zodat de stelling bewezen is als wij aantonen dat de noemer steeds hetzelfde teken houdt. Zonder gebruik te maken van de formule van de kromtestraal kan men ook zó redeneren: in een buigpunt is de centripetale versnelling nul, dus de totale versnelling langs de raaklijn gericht of wel $\ddot{x} : \ddot{y} = \dot{x} : \dot{y}$, zodat de noemer van (3) inderdaad nul is.

Wij hebben:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -aR \sin at - br \sin bt, & \dot{y} &= aR \cos at + br \cos bt \\ \ddot{x} &= -a^2R \cos at - b^2r \cos bt, & \ddot{y} &= -a^2R \sin at - b^2r \sin bt \end{aligned} \quad (4)$$

Zodat

$$\ddot{x}\dot{y} - \dot{x}\ddot{y} = a^3R^2 + b^3r^2 + ab(a + b)Rr \cos(a - b)t.$$

Er kunnen dus geen buigpunten voorkomen als deze uitdrukking voor elke waarde van t hetzelfde teken houdt en dus positief is. Daarvoor is nodig en voldoende

$$\frac{a^3R^2 + b^3r^2}{ab(a + b)Rr} > 1 \quad (5)$$

of als $\frac{R}{r} = k_1$ en $\frac{b}{a} = k_2$ wordt gesteld:

$$k_1^2 + k_2^3 - k_1 k_2 (k_2 + 1) > 0 \quad (6)$$

Voor $k_1 = 400$ en $k_2 = 12$ is deze voorwaarde vervuld. De baan heeft dus inderdaad de gedaante van fig. 5.

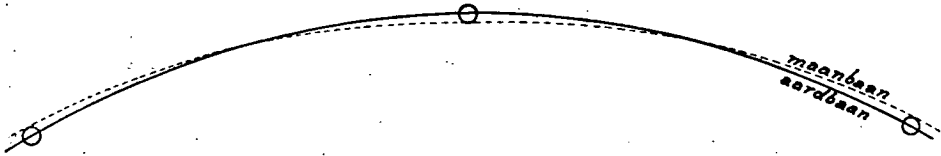


Fig. 5.

Voor de vollemaanstanden is $\cos(a-b)t = 1$, voor nieuwe maan -1 , voor de kwartierstanden 0 . Daar

$$x^2 + y^2 = R^2 + r^2 + 2Rr \cos(a-b)t$$

wordt de aardbaan gesneden voor

$$\cos(a-b)t = -\frac{r}{R}.$$

Hieruit volgt dat de kwartierstanden dicht bij de snijpunten liggen en wel binnen de aardbaan. Zo is ook de situatie bij Newcomb—Engelmann t.a.p. geschetst.

Uit (3) en (4) vindt men voor de kromtestraal

$$\varrho = \frac{\{a^2 R^2 + b^2 r^2 + 2ab Rr \cos(a-b)t\}^{3/2}}{a^3 R^2 + b^3 r^2 + ab(a+b)Rr \cos(a-b)t}$$

dus voor volle maan en voor nieuwe maan respectievelijk

$$\varrho_1 = \frac{(aR + br)^2}{a^2 R + b^2 r} = R \frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1(k_1 + k_2^2)} \quad \text{en} \quad \varrho_2 = \frac{(aR - br)^2}{a^2 R - b^2 r} = R \frac{(k_1 - k_2)^2}{k_1(k_1 - k_2^2)}.$$

Als $k_1 = 400$ en $k_2 = 12$ vindt men $\varrho_1 = 0,78 R$ en $\varrho_2 = 1,47 R$.

Wij merken nog op dat de besproken baankromme een epicycloïde is, niet krachtens haar definitie overigens, maar volgens een gemakkelijk aan te tonen stelling¹⁾. Als een cirkel C_2 met straal q rolt over een cirkel C_1 met straal p welke hij uitwendig raakt dan

¹⁾ Zie b.v. Loria, Spezielle algebraische und transzendente Ebene Kurven II (2. Aufl., Leipzig 1911, pg. 100—101). De in dit werk op pg. 97 voorkomende uitspraken over de buigpunten der epicycloïde zijn niet juist.

beschrijft elk punt P van het vlak van C_2 volgens de bepaling een epicycloïde. Is d de afstand van P tot het middelpunt van C_2 dan zijn bij geschikt gekozen assenstelsel de vergelijkingen van de door P beschreven kromme

$$\begin{aligned} x &= (p+q) \cos \varphi + d \cos \frac{p+q}{q} \varphi, \\ y &= (p+q) \sin \varphi + d \sin \frac{p+q}{q} \varphi. \end{aligned} \quad (7)$$

Deze komen overeen met (2) als men kiest

$$\begin{aligned} p+q &= R, \quad d=r, \quad \frac{p+q}{q} = \frac{b}{a} \\ \text{dus} \quad p &= \frac{k_2-1}{k_2} R, \quad q = \frac{1}{k_2} R, \quad d = \frac{1}{k_1} R \end{aligned} \quad (8)$$

zodat voor $k_1 = 400$, $k_2 = 12$ de maanbaan ook verkregen wordt als een cirkel met een straal $\frac{1}{12} R$ rolt langs de buitenkant van een cirkel met een straal $\frac{11}{12} R$ en het punt P de afstand $\frac{1}{400} R$ heeft tot het middelpunt van de rollende cirkel. De epicycloïde (7) heeft geen buigpunten als ¹⁾

$$\left| \frac{q^3 + d^2(p+q)}{qd(p+2q)} \right| > 1. \quad (9)$$

Deze voorwaarde komt na substitutie van (8) overeen met (6).

¹⁾ Schuh, *Leerboek der Theoretische Mechanica*, I, 2 (Leiden 1935), pg. 116.

XXVIII.

Een probleem van Euler.

In het geweldige oeuvre van Euler, dat alle gebieden der zuivere en toegepaste wiskunde van zijn tijd omvat, komen ook herhaaldelijk vraagstukken uit de elementaire mathesis aan de orde en aan menige stelling der schoolwiskunde is zijn naam verbonden. Het lijkt een aantrekkelijke opgave om de desbetreffende verhandelingen van Euler samen te vatten en kritisch toe te lichten en degene, die de belangstelling, de werkkraft en de historische zin zou bezitten om een dergelijke taak op zich te nemen, zou verzekerd zijn van de dankbaarheid van allen, wie de elementaire wiskunde na aan het hart ligt. Hij zou daarbij kunnen

aansluiten aan het werk dat in dit opzicht verricht is door Stäckel¹⁾ en door Müller²⁾).

Een naar het schijnt minder bekende, door Euler behandelde opgave is de volgende, die men onder de titel „Problematis ex theoria maximorum et minorum solutio” aantreft in Leonhardi Euleri *Opera postuma*, het eerste deel, uitgegeven door P. H. en N. Fuss en verschenen te Sint-Petersburg in 1862, pg. 403—407.

In een vlak V zijn de punten A en B, buiten V het punt C gegeven.

Gevraagd wordt in V het punt P zodanig te bepalen, dat de som van de oppervlakken van de driehoeken PAC en PBC minimaal is.

Euler lost het vraagstuk op door een elegante berekening, die te lang is om hier gereproduceerd te worden en waarmee hij eerst aantoonst dat het gevraagde punt P gelegen moet zijn op de rechte C'M; daarbij is C' de projectie van C op V en M het midden van AB. Hij berekent daarna de afstand C'P, die uitgedrukt wordt in lengten en hoeken van de gegeven figuur. Het zou wel interessant zijn om kennis te kunnen nemen van een meetkundig bewijs voor het eerste gedeelte van de stelling.

Wij beschouwen hier een variant op de door Euler gestelde opgave, nl. die waarbij gevraagd wordt naar het punt P *waarvoor de som van de kwadraten van de oppervlakken der driehoeken PAC en PBC minimaal is*. Analytisch is deze opgave eenvoudiger dan die van Euler; het resultaat is echter in zover minder eenvoudig, dat P thans niet op C'M blijkt te liggen.

We kiezen in V het rechthoekig coördinatenstelsel, waarvan de oorsprong in M en de X-as langs AB valt; de punten A, B en C' en P hebben de coördinaten $(a, 0)$, $(-a, 0)$, (p, q) en (x, y) , de afstand van C tot V zij h . Zijn O_1 en O_2 de oppervlakken van de driehoeken PAC en PBC, dan is

$$\begin{aligned} 4O_1^2 &= (q^2 + h^2)x^2 - 2q(p - a)xy + (a^2 + p^2 + h^2)y^2 - \\ &\quad - 2a(q^2 + h^2)x + 2aq(p - a)y + a^2(q^2 + h^2) \\ 4O_2^2 &= (q^2 + h^2)x^2 - 2q(p + a)xy + (a^2 + p^2 + h^2)y^2 + \\ &\quad + 2a(q^2 + h^2)x - 2aq(p + a)y + a^2(q^2 + h^2) \end{aligned}$$

zodat

$$\begin{aligned} 2(O_1^2 + O_2^2) &= (q^2 + h^2)x^2 - 2pqxy + (a^2 + p^2 + h^2)y^2 - \\ &\quad - 2a^2qy + a^2(q^2 + h^2). \end{aligned}$$

¹⁾ Stäckel, Eulers Verdienste um die elementare Mathematik (Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterricht, 28, 300—307, 1907).

²⁾ F. Müller, Über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Eulers aus der reinen Mathematik (Abh. Gesch. der Math. Wiss. 25, 1907, 102—107).

Deze uitdrukking is minimaal als x en y voldoen aan

$$\begin{aligned}(q^2 + h^2)x - pqy &= 0 \\ -pqx + (a^2 + p^2 + h^2)y - a^2q &= 0\end{aligned}$$

zodat de coördinaten van het gevraagde punt P zijn

$$\begin{aligned}x &= \frac{a^2pq^2}{a^2q^2 + h^2(a^2 + p^2 + q^2) + h^4}, \\ y &= \frac{a^2q(q^2 + h^2)}{a^2q^2 + h^2(a^2 + p^2 + q^2) + h^4}.\end{aligned}$$

Bij vaste ligging van C' en veranderlijke h voldoen de coördinaten van P aan de vergelijking

$$pq(x^2 - y^2) - (a^2 + p^2 - q^2)xy + a^2qx = 0,$$

die een orthogonale hyperbool voorstelt. Daar $h^2 \geq 0$ is de meetkundige plaats van P niet de gehele hyperbool, maar een van de takken, nl. die welke door C' en M gaat en in M aan de Y-as raakt.

BLAISE PASCAL

en de betekenis der wiskundige denkwijze voor de studie
van de menselijke samenleving *)

DOOR

Prof. Dr D. VAN DANTZIG.

In de zomer van het jaar 1654 wisselde de toen 31-jarige Blaise Pascal enige brieven met de 22 jaar oudere Pierre Fermat. Zij hadden betrekking op een tweetal problemen over kansspelen, hem opgegeven door de chevalier de Méré.

Pierre Fermat was raadsheer in het hof van Toulouse. Bovendien echter was hij, de „koning der amateurs”, een der grootste wiskundigen van zijn tijd. Dus valt er over zijn leven niet veel te verhalen.

Blaise Pascal was eveneens een der grootsten onder de wiskundigen van het aan geniale figuren zo rijke Frankrijk van de zeventiende eeuw. Toch bestaat er over hem een literatuur van vele honderden boeken en artikelen. Hoe is dat te verklaren?

Deze vele boeken zijn niet volgeschreven over, de beroemde stelling van Pascal, die betrekking heeft op een zeshoek, waarvan de hoekpunten op een kegelsnede liggen, de figuur die Blaise in begrijpelijk jeugdig enthousiasme — hij was eerst 16 jaar, toen hij deze stelling vond — het „hexagrammum mysticum”, de geheimzinnige zeshoek, noemde, terecht, daar zij de belangrijkste vooruitgang op het gebied der kegelsneden inhield sinds Apollonios, een kleine 2000 jaren eerder. Ook hebben zij geen betrekking op Pascal's Triangle Arithmétique, de ons van de middelbare school bekende driehoek van Pascal, waarin hij de eigenschappen van de getallen ontwikkelde, die in het zogenaamde binomium van Newton optreden, dat dan ook meer terecht het „Binomium van Pascal” zou mogen heten, en waarin hij de methode der volledige inductie invoerde, die een halve eeuw later door Jacob Bernoulli opnieuw ontdekt werd, zodat een zogenaamd Bernoulliaans bewijs juist met de naam „Pascaliaans bewijs” aangeduid zou worden. Zelfs handelen zij niet over Pascal's natuurkundige ontdekkingen: de ons eveneens van de middelbare school bekende Wet van Pascal

*) Rede, uitgesproken op 4 Oct. 1948 ter gelegenheid van de aanvaarding van het ambt van buitengewoon hoogleraar in de leer der collectieve verschijnselen aan de Universiteit van Amsterdam.

over de voortplanting van de druk in een vloeistof, de hydraulische pers, en zijn barometrische onderzoeken; noch ook over de rekenmachine, die Pascal als eerste geconstrueerd heeft, waardoor hij de stamvader werd van de rekenafdeling van het Mathematisch Centrum. Wel echter hebben de meeste dézer publicaties betrekking op meer spectaculaire aspecten van zijn persoonlijkheid, zoals zijn „eerste” en zijn „tweede” bekering tot het Jansenisme, en de daartussen gelegen zogenaamde „mondaine” periode.

De Jansenisten ¹⁾, deze merkwaardige groep van 17de eeuwse theologen, kloosterlingen van Port-Royal, hadden voor de Rooms-Katholieke kerk een soortgelijke betekenis als de contra-remonstranten, de „preciesen” hier te lande voor de Calvinistische. Hun strijd tegen hun „rekkelijker” tegenstanders, de Jezuïeten, was niet minder fel, maar wel minder succesvol. Te hunner verdediging schreef Pascal zijn beroemde „Lettres provinciales”, waarmee hij zich een blijvende plaats in de geschiedenis der Franse letterkunde verwierf, een felle, spitsvondige, geestige, soms zelfs brillante aanval op de leerstellingen der Jezuïeten. Ook zijn „Pensées”, fragmenten van een onvoltooide apologie van het Christendom, zijn van deze geest doortrokken, maar zijn, algemener, voor de wijsbegeerte van grote betekenis.

Wiskunde, natuurkunde, logika; letterkunde, wijsbegeerte en theologie.

Een zó grote veelzijdigheid was zeldzaam, zelfs in de zeventiende eeuw, toen de wetenschap nog één en ongedeeld was, en de onderscheiding van „zuivere” en „toegepaste” wiskunde nog niet uitgevonden. Zij is ten dele te verklaren uit zijn zeldzame begaafdheid, waardoor hij op ieder gebied van werkzaamheid meesterlijke producten voortbracht, en zijn veelzijdige belangstelling, die geheel in de lijn van zijn karakter lag: „... il est bien plus beau de savoir quelque chose de tout que de savoir tout d'une chose...” ²⁾. Ten dele ook moet deze veelzijdigheid gezien worden als een gevolg van de verschillende invloeden, waaraan Pascal achtereenvolgens onderworpen was: zijn vader, ridder de Méré en zijn jongere zuster Jacqueline.

Blaise Pascal ³⁾ was geboren in 1623 te Clermond-Ferrand, een provinciestedje, waar zijn vader, Etienne Pascal ⁴⁾, een hoge ambtelijke positie — président du cour des aides — bezat. De familie was niet onbemiddeld en van oude ambtelijke adel, „nobilité de robe”, welke, het zal ons niet verwonderen, in aanzien niet kon wedijveren met de militaire klasse, de „nobilité d'épée”. Een „nobilité d'esprit” als maatschappelijke klasse van enige invloed

bestond toen evenmin als thans. Blaise's moeder ⁵⁾ stierf, toen hij 3 jaar oud was. Zijn opvoeding werd daarna volledig door zijn vader verzorgd, die dit als zijn voornaamste levenstaak ging beschouwen. Daar Etienne Pascal een man van eruditie was, zelf ook een wiskundige van enige verdienste ⁶⁾, heeft deze opvoeding ongetwijfeld veel voor Blaise's vroegtijdige ontwikkeling betekend. Anderzijds heeft zij stellig ook wel bijgedragen tot de geringe levenservaring, die hij steeds gehad heeft. Hij heeft weinig gereisd, weinig gelezen, werd zelfs door een tijdgenoot „bien ignorant" genoemd, en kende weinig mensen; hij bleef steeds min of meer „provinciaal", beïnvloed slechts door zijn naaste omgeving. De belangrijkste politieke gebeurtenissen van zijn tijd, zoals de „Fronde" (1648—1653), de laatste poging van een deel van de adel en de burgerij, zich tegen het absolute koningschap te verzetten, zijn voor zover bekend niet door Pascal opgemerkt.

Wel sterk krijgt men de indruk, dat, als de twee artsen, die in 1646 om zijn vader te genezen enige maanden in diens huis verbleven, toevallig geen Jansenisten, maar Jezuïeten of atheïsten geweest waren, Blaise later met dezelfde geest en felheid en met bijna dezelfde argumenten de leer der Jezuïten of die der atheïsten verdedigd zou hebben, als hij ze nu bestreed.

In 1631 vestigde Etienne Pascal zich met zijn kinderen ⁷⁾ te Parijs, na zijn ambt verkocht te hebben. Hij bleef daar van Blaise's achtste tot zijn zeventiende jaar, negen jaren dus. Maar welke jaren!

Jaren, waarin de vóór dien vrij gestadige stroom van vermeerdering onzer wiskundige kennis plotseling een stroomversnelling van de grootste turbulentie ging vormen. In 1637 verscheen Descartes' „La Géométrie" en Fermat's reeds eerder geschreven „Ad locos planos et solidos", de beide werken, die de analytische meetkunde schiepen, en daardoor twee belemmerende overblijfselen van de Griekse wiskunde opruimden: de beperking tot krommen van de vierde en lagere graad, en de axiomatische methode in haar oorspronkelijke vorm, die vereiste dat men alvorens met redeneren te beginnen, vooraf reeds enige meetkundige uitspraken als onbetwifelbaar waar aanvaardde — de analytische methode daarentegen leidde later tot vrije variabiliteit der axiomasystemen en daarmee tot een relativering van het waarheidsbegrip.

Een jaar later vermoedelijk formuleerde Fermat zijn tangentenmethode voor het bepalen van maxima en minima, een der bronnen, waaruit 35 jaar later de infinitesimaalrekening zou voortkomen. Het volgende jaar, 1639, verscheen het „Brouillon projet" ⁸⁾ van

de Lyonse architect Girard Desargues, een meetkundig werk, door velen als onleesbaar beschouwd, maar niet door de 16-jarige Pascal, die er de methode aan ontleende, die hem tot zijn hexagrammum mysticum voerde, dat nog in hetzelfde jaar 1639 gepubliceerd werd.

In deze zelfde dertiger jaren der zeventiende eeuw vallen overigens Fermat's grote getallentheoretische ontdekkingen, Cavalieri's theorie der indivisibilia (1635), (eveneens een der bronnen van de latere infinitesimaalrekening), en tenslotte Galilei's Discorsi (1638), en Descartes' Discours de la Méthode (1637), twee der werken, die aan de onbeperkte heerschappij der scholastisch-Aristotelische wijsbegeerte een einde maakten.

Wie onzer benijdt niet een Pascal, die reeds als knaap van 14 jaren de wekelijkse wiskundige discussies mocht bijwonen, die zijn vader met Desargues, met Père Mersenne, Pierre Gassendi, Gilles de Roberval en andere vooraanstaande geleerden hield, bijeenkomsten, welker traditie later (in 1665) in de Académie des Sciences zou worden voortgezet. Onbegrijpelijk en onvoorstelbaar is deze plotselinge vloed van ontdekkingen van de eerste orde, in 5, ten hoogste 10 jaren, vergelijkbaar wellicht met de opbloei van de Griekse kunst tijdens Perikles, of met het plotselinge rijpen van de quantummechanica in de jaren 1925—1927. Neen, te verwonderen was het niet, dat de wiskunde Pascal's eerste liefde, en zijn eerste glorie werd, tijdens een zelfs in Frankrijk zo voor als na dien ongekende intensiviteit van cultureel leven.

Niet alleen voor de wiskunde was Parijs toen meer dan ooit de gunstigst denkbare voedingsbodem. Dit waren de jaren, waarin zich door het medium der Franse taal, nauwelijks een eeuw te voren uit de bodem der plaatselijke dialecten tot literair ontluiken gekomen, en die aan rijpe vruchten nog niet veel meer dan Rabelais' Gargantua en Pantagruel (1533) en Montaigne's Essays (1580, 1588) had voortgebracht, de Franse beschaving en de Franse esprit ontwikkelde. In 1636 verscheen Corneille's Le Cid op de planken; een jaar te voren was de uit een dichterskring voortgekomen Académie Française door Richelieu, naar M. Cantor ⁹⁾ zegt, veeleer bekrachtigd dan gesticht. Descartes en Pascal behoorden tot de eersten, die hun wetenschappelijke werken in het Frans in plaats van het Latijn schreven. Ook in de kring van geleerden werd aan zuiverheid en schoonheid van taalkundige expressie veel aandacht gewijd. Molière, de la Fontaine en Bossuet waren de kinderschoenen, Racine en Boileau de wieg nog niet ontwassen. Het befaamde Hôtel de Rambouillet werd centrum van een groep van dichters

en kunstlievende vrouwen, de befaamde „*précieuses*”, op zich zelf van weinig betekenis weliswaar, maar die toch door haar zelfs tot in het groteske overdreven verfijning van spreek- en schrijftaal, van gedrags- en levensvormen een intensief cultuurvormende betekenis had. De navolging van hun uiterlijke manieren door jonge vrouwen zonder beschaving is door Molière's geesteloze persiflage ¹⁰⁾ algemeen bekend, terwijl wij uit Edmond Rostand's ¹¹⁾ romantische drama ¹²⁾ „*Cyrano de Bergerac*”, welks handeling zich grotendeels in 1640 afspeelt, een meer geïdealiseerd beeld van de positieve cultuurwaarde krijgen.

In deze kringen was het, dat Blaise's 2 jaar jongere zuster Jacqueline haar eerste triomfen vierde; waar zij als kind ¹³⁾ reeds gloedvolle minnedichten schreef ten behoeve van haar oudere vriendinnen, en waar zij, toen haar vader bij Richelieu in ongenade gevallen was, als 13-jarige door haar voordracht van een romantisch toneelstuk ¹⁴⁾ het hart van de machtige kardinaal wist te roeren, en te bereiken, dat haar vader weer in genade werd aangenomen ¹⁵⁾ ¹⁶⁾.

In deze kringen ook was het, dat de ridder de Méré, de geheimzinnige M. de M. ¹⁷⁾ uit Pascal's brief, verkeerde of althans poogde te verkeren. Deze Antoine Gombaud, chevalier de Méré ¹⁸⁾, was 13 jaar ouder dan Pascal, opgevoed in een Jezuïetenklooster, in zijn jeugd soldaat — zonder veel roem —, en speler — zonder veel geluk in de liefde — in zijn late jaren schrijver en moralist — zonder veel menselijkheid —; *homme de lettres*, *homme d'esprit* ongetwijfeld, maar uit het hôtel de Rambouillet verdrongen door de modedichter Voiture; précepteur voorts (al wordt niet vermeld in welke kunst) van Françoise d'Aubigny, de latere Madame de Maintenon; veelbereisd, *homme du monde accompli*; maar vóór alles „*honnête homme*”. Dat wil niet zeggen, zoals men wellicht zou verwachten, een volmaakt eerlijk mens, maar een man van goede manieren, met gevoel voor wat wél staat (*la bienséance*) en voor de juiste maat (*la justesse*), met fijngevoeligheid en sensitiviteit (*la finesse*).

Een groot deel van zijn werk als schrijver en moralist bestaat in — natuurlijk vergeefse — pogingen, dit begrip „*honnêteté*” te definiëren. Oppervlakkig, verwaand, lijdende aan schromelijke zelfoverschatting, verstond hij het toch, met Pascal op scherpzinnige wijze te disputeren ¹⁹⁾ over de vraag, of een lijn tot in het oneindige deelbaar is. Op geestiger en scherpzinniger wijze dan 200 jaren later G. J. P. J. Bolland ²⁰⁾ ontkende hij dit, evenmin als deze en evenmin als Pascal bemerkende, dat zij verschillende talen spraken: die van de wiskunde en die van de natuurkunde.

„Il est très bon esprit” schrijft Pascal over hem aan Fermat (1654), „mais il n'est pas géomètre ²¹⁾”; c'est comme vous savez un grand défaut, et même il ne comprend pas qu'une ligne soit divisible à l'infini et croit fort bien entendre qu'elle est composée de points en nombre fini et jamais je n'ai pu l'en tirer; si vous pouviez le faire, on le rendroit parfait”.

Deze man, die zonder Pascal volledig vergeten zou zijn, heeft toch op deze een grote invloed gehad, en niet alleen gedurende diens zogenaamde „mondaine” periode. Hij trachtte Pascal van de onwaarde van „l'esprit de géométrie” ²¹⁾ te overtuigen en hem in plaats daarvan „l'esprit de finesse” bij te brengen. Ook in Pascal's laatste jaren, in de *Pensées*, is het niet alleen de stem der kloosterlingen van Port-Royal, maar ook die van de Méré, die men soms hoort doorklinken, b.v. wanneer Pascal tracht l'esprit de géométrie tegenover l'esprit de finesse af te wegen ²²⁾, wanneer hij de waarde van l'honnête homme tracht te bepalen, of wanneer hij zich beklaagt, na jarenlange studie der abstracte wetenschappen zo weinigen gevonden te hebben met wie hij zich daarover onderhouden kon, — weshalve hij zich tot de studie van de mens gewend heeft, in de verwachting, daarin althans meer metgezellen te vinden. „J'ai été trompé”, zegt hij ²³⁾ „il y en a encore moins qui l'étudient que la géométrie. Ce n'est que manque de savoir étudier cela qu'on cherche le reste”.

„L'étude de l'homme” culmineerde voor hem in het begrip van „la grandeur et la misère de l'homme”, termen die sinds dien veelvuldig als karakteristicum voor Pascal gebruikt worden ²⁴⁾. Maar „misère” is bij Pascal veeleer wat wij „kleinheid”, „nietigheid”, dan wat wij „ellende” zouden noemen, (al ontbreekt ook dit laatste element in de betekenis niet geheel). En „la grandeur de l'homme” is voor hem diens besef van zijn eigen „misère”. En „l'homme” in het algemeen is in dit verband — zoals in het kader van zijn tijd ook nauwelijks anders mogelijk was — het menselijk individu, niet gezien in het kader der menselijke samenleving, en, enger nog het individu uit Pascal's eigen levenskring. Het bestaán zelfs van de ongetelden, die buiten deze kring van adel, geestelijkheid en geletterden moesten leven, drong evenmin tot hem door als tot zijn tijdgenoten, en de oorzaak van hun ellende en de rem voor hun grootheid heeft hij niet doorzien. Hoeveel beter dan later een Voltaire, in intellect en karakter verre zijn mindere, had hij zijn kritiek op het Jezuïetische formalisme tot een kritiek op het Rooms-Katholieke formalisme, op het Christelijk formalisme, het godsdienstig formalisme in het algemeen kunnen uitbreiden, om

daarmede, in stede van de gevestigde machten van zijn tijd: kerkelijke hiërarchie en absoluut koningschap, volledig ²⁵⁾ (zij het niet kritiekloos) te aanvaarden, de geestesbevrijdende werking uit te oefenen, waarvoor zo vele kiemen in zijn geschriften aanwezig zijn. De meedogenloze scherpte, waarmede hij de woordenspinsels zijner tegenstanders uiteenrafelde en er de innerlijke tegenstrijdigheid en onwaarachtigheid van aantoonde, komt de tegenstelling „Wij — Zij” niet te boven. Dat de woordenspinsels, die hij zelf aanvaardde, voor een dergelijke analyse vatbaar waren, en juist zulke tegenstrijdigheden bevatten, moest hij onderbewust wel gevoeld hebben, zoals uit vele van zijn Pensées blijkt ²⁶⁾ en tengevolge heeft gehad, dat men hem — ten onrechte — soms een scepticus genoemd heeft. Hij meende dit echter te kunnen weerleggen, en door logische redenering de waarheid van het Christendom te kunnen *bewijzen*. Hier faalde hij als logicus, doordat hij op kritieke plaatsen in zijn betoog als ongenoemde axioma's uitspraken toeliet, die deze waarheid vooronderstellen, b.v. in Pensée 642, waar hij meende de waarheid van het Oude en van het Nieuwe Testament gelijktijdig te kunnen bewijzen, door aan te tonen, dat de voorspellingen uit het eerste in het tweede als vervuld te boek staan. Of in het bekende „argument *du pari*” in Pensée 233, waarin hij zonder betoog aanneemt, dat de door hem als elkaar uitsluitend gestelde mogelijkheden: „Dieu existe ou il n'existe pas”, „de mens heeft slechts één leven of oneindig vele levens” gelijke waarschijnlijkheden bezitten.

Hij maakte hier elementair-logische fouten, die hij vermoedelijk in een andere context doorzien zou hebben ²⁷⁾, en toonde daarmede, als zovelen na hem, dat de logische scholing, die de wiskunde biedt, op zich zelf nog geen waarborg geeft voor strengheid van redenering over andere dan wiskundige onderwerpen, in het bijzonder over dezulke, waarbij sterke emoties betrokken zijn.

Het is niet wel mogelijk, de menselijke grootheid van een man te peilen, vooral voor wie verre zijn mindere is, en ongetwijfeld doet men iemand onrecht door hem te toetsen aan een ideaal beeld van potentiële mogelijkheden in plaats van aan zijn werkelijke medemens. In Pascal's tijd mag men nog niet veel inzicht in de betekenis der gebruikte woorden verwachten. Aan *significa*, dat is betekenisonderzoek, los van de grammatikale en syntaktische vorm der taal, of anders gezegd, systematisch onderzoek van de vraag in hoeverre de door een spreker gebruikte woorden diens bedoelingen in de oren der hoorders inderdaad weergeven, was men nog niet toe, al zijn in het juwelenkastje der Pensées wel enkele waardevolle, zij het ongeslepen stenen van signifiisch materiaal te vinden. Dat

de taalkundige vorm der bevestiging een tegenspraak kan uitdrukken, en dat achter de vorm ener ontkenning een gedeeltelijke instemming kan schuilgaan was nog ten enenmale onbekend. Het moest Pascal daarom wel als iets vanzelfsprekends voorkomen, dat elkaar formeel tegensprekende beweringen als „Dieu existe” en „Dieu n'existe pas” ook altijd elkaar uitsluitende feitelijke toestanden beschrijven²⁸⁾, in stede van elkaar verdringende gevoelsinhouden. En, wanneer iemand zich een bewustzijntoestand tracht voor te stellen, en met een term als „hemelse zaligheid” bestempelt, waarin alle aardse ellende en alle aardse tegenstelling opgeheven is, dan mag men in zijn tijd nog geen beperking van zijn intellectuele grootheid daarin zien, dat hij daarop toch de tegenstellende terminologie van „dood” en „levend”, „goed” en „kwaad”, „hel” en „hemel”, „uitverkoren” en „verdoemd” tracht toe te passen. Naar de emotionele zijde mag men Pascal's aanvaarding van de leer der uitverkorenheid in het individualistische kader van zijn tijd wel evenmin als een beperking van zijn karaktergrootheid voorstellen. De vraag slechts zij echter gesteld of wie voor zich hemelse — of aardse — zaligheid nastreeft in de vaste overtuiging, dat zijn medemensen, enige uitverkorenen uitgezonderd, tot eeuwige verdoemenis veroordeeld zijn, door ons uiteindelijk als een groot mens gezien kan worden.

II.

Te fascinerend is de persoonlijkheid van Pascal en de tijd, waarin hij leefde, dan dat ik aan de verleiding weerstand had kunnen bieden, ver af te dwalen van het uitgangspunt: zijn briefwisseling met Fermat omtrent twee problemen over kansspelen, hem opgegeven door de Méré. Het zij mij thans toegestaan, tot deze correspondentie, waaruit de waarschijnlijkheidsrekening is voortgekomen, terug te keren.

De Méré had bemerkt, dat het bij het spelen met één dobbelsteen, voordelig was, te wedden, dat een 6 in hoogstens 4 worpen zou vallen. Nu kan een dobbelsteen op 6 manieren vallen, terwijl bij het werpen van 2 dobbelstenen 36, d.i. 6 maal zoveel worpresultaten mogelijk zijn. Hij dacht dus, dat hij ook met voordeel zou kunnen wedden op het vallen van een dubbelzes in hoogstens $6 \times 4 = 24$ worpen met 2 dobbelstenen. De uitkomst echter stelde hem teleur. Hij was daarover heel boos, en zeide dat de rekenkunde zich logenstrafte. Pascal echter slaagde er zonder veel moeite in, hem door een zorgvuldige berekening van het aantal mogelijkheden te doen

inzien, dat de wiskunde wèl, maar zijn berekeningswijze niet in orde was. Het blijkt namelijk door berekening, dat met de Méré's speelsysteem bij 1000 worpseries met één dobbelsteen theoretisch te verwachten is, dat het aantal winstseries het aantal verliesseries met ongeveer 36 overtreft, maar bij worpen met twee dobbelstenen daarbij ongeveer 18 ten achter blijft ²⁹). Overigens moet de Méré om zo kleine verschillen bij zo grote aantallen worpseries te kunnen constateren wel een bijzonder grote „esprit de finesse” — of een bijzondere nauwkeurige speelboekhouding — bezeten hebben, zo althans zijn „constatering” werkelijk die naam mag dragen.

De Méré's tweede vraagstuk was aanzienlijk moeilijker, en niemand onder de Franse wiskundigen, behalve Fermat en Pascal zelf, slaagde er in, het op te lossen. Het luidt als volgt. Twee spelers A en B doen een serie spelen; degene, die het eerst b.v. 6 spelen gewonnen of, zoals men gewoonlijk zegt, „6 punten gemaakt” heeft, wint de partij en krijgt de inzet. Indien nu de spelers de partij willen beëindigen vóór dat zij beslist is, nadat b.v. A 4 en B 3 punten gemaakt heeft, hoe moet dan de inzet verdeeld worden? Ondersteld is daarbij, dat de spelers bij elk afzonderlijke spel gelijke winstkansen hebben. Een voor de hand liggende methode (reeds 200 jaar vóór Pascal door Luca Paciolo ³⁰ voorgesteld) zou zijn: verdeel de inzet naar evenredigheid van het aantal reeds gemaakte punten, zodat A $\frac{4}{7}$ en B $\frac{3}{7}$ krijgt. Men kan echter gemakkelijk andere voorbeelden aangeven, waarbij deze verdelingsmethode als onbillijk ondervonden zou worden. Indien b.v. een partij van 60 punten gespeeld wordt en A heeft reeds 59, B echter 30 gemaakt, dan zal A, die de partij reeds zo goed als gewonnen heeft stellig bezwaar maken tegen een verdeling, waarbij B bijna $\frac{1}{3}$ (n.l. $\frac{30}{89}$) van de inzet krijgt. Dit leidt ertoe, dat men niet moet letten op het aantal reeds gemaakte, maar op het aantal nog te maken punten, en dat men een verdeling als „billijk” kenmerkt, wanneer zij geschiedt naar evenredigheid van de *kansen*, die de spelers hebben, de partij te winnen. Men zou nu kunnen gissen (zoals Cardano, die dit begreep, een 100-tal jaren voor Pascal deed ³¹) dat deze kansen omgekeerd evenredig zijn met de aantallen nog te winnen spelen. Daar A nog 2, B nog 3 punten moet maken zou dit leiden tot een verdeling in de verhouding 3 : 2, d.w.z. A zou $\frac{3}{5}$, B $\frac{2}{5}$ van de inzet krijgen. Dit is echter een pure gissing, die bij nadere beschouwing te gunstig blijkt te zijn voor de speler, die de grootste achterstand heeft. Nauwkeuriger berekening van alle winstmogelijkheden leerde Pascal en Fermat, dat deze zich als 11 : 5 verhouden, zodat A $\frac{11}{16}$ en B $\frac{5}{16}$ van de inzet behoorde te krijgen ³²).

Dit tweede vraagstuk van de Méré heeft een geheel ander karakter dan het eerste. Het eerste is van ongeveer dezelfde aard als andere toepassingen der wiskunde op ervaringswetenschappen: het leidt tot een verklaring van waargenomen verschijnselen, en een voorspelling omtrent wat verder bij dergelijke verschijnselen zal gebeuren. Het tweede vraagstuk echter is niet van dit type: het heeft betrekking op een geval van arbitrage, en leidt tot een voorstel aan 2 strijdende partijen, hun geschil op een bepaalde wijze te beslechten. Het hangt daarom met vragen der signification te samen, in het bijzonder met de vraag, wat de beide partijen precies met de term „billijke” verdeling bedoelen en staat daardoor in rechtstreeks verband met „l'étude de l'homme”; al zag Pascal dit verband nog niet.

Overigens zijn ook de voorspellingen, waartoe de waarschijnlijkheidsrekening leidt, van enigszins ongewone aard. Wat houdt de uitspraak precies in, dat bij het opwerpen van een volkomen zuivere munt — ik laat de vraag wat de term „volkomen zuiver” betekent nu maar buiten beschouwing — gelijke kansen $\frac{1}{2}$ bestaan, dat „kruis” of „munt” zal vallen? *Niet*, dat van ieder tweetal worpen éénmaal kruis en éénmaal munt zal vallen. Immers er is een waarschijnlijkheid $\frac{1}{4}$ dat bij twee worpen beide keren b.v. „kruis” zal vallen. Gewoonlijk zegt men, dat bij een groot aantal, b.v. 100 worpen, 50 keer kruis en 50 keer munt zal vallen. Ook dit is echter niet geheel juist. De kans, dat grotere of kleinere afwijkingen zullen voorkomen, is nog altijd ongeveer 8 %. Men zegt daarom, dat bij een groot aantal worpen *ongeveer* even vaak kruis als munt zal vallen. Ook dit is echter niet geheel juist. Grote afwijkingen van het gemiddelde hebben weliswaar kleine waarschijnlijkheden, maar kunnen toch voorkomen, en zullen bij veelvuldige herhaling van het experiment ook voorkomen, zeer waarschijnlijk althans. Moeilijkheden ontstaan voorts, wanneer men zich afvraagt, een hoe groot aantal een „groot” aantal is, en welke betekenis precies de term „ongeveer” heeft. Dit hangt samen met het feit, dat de infinitesimale processen, die in de waarschijnlijkheidsrekening voorkomen, niet voldoen aan de eisen, die L. E. J. Brouwer voor de intuitionistische wiskunde heeft opgesteld³³). Dat Brouwer's hoogst abstracte zuiver wiskundige criteria van rechtstreeks belang zijn voor de concrete toepasbaarheid der waarschijnlijkheidsrekening pleit wel voor de „esprit de finesse”, zowel als de „esprit de géométrie” van hun ontwerper. Het blijkt dus, dat de vraag, welke voorspelling precies uitgesproken wordt in een waarschijnlijkheidsoordeel tot grote moeilijkheden leidt, die deels van signifi-

deels van logische aard en nog niet volledig opgelost zijn. Zij hangen ten nauwste samen met de signifische vraag, wat onder termen als „orde” en „wanorde”, of „toevallig” e.d. moet worden verstaan. Men ³⁴⁾ heeft getracht, deze moeilijkheid op te lossen door oneindige worpseries te beschouwen. Dit leidt echter niet tot het doel, daar een voorspelling omtrent een oneindige serie worpen geen voorspelling meer is. Een andere, waarschijnlijk vruchtbaarder oplossingspoging maakt gebruik van de symbolische logika. Daar elke poging, een waarschijnlijkheidsuitspraak om te zetten in een uitspraak omtrent waarneembare gebeurtenissen toch weer van te waarschijnlijkheidsbegrip gebruik moet maken, heeft men ³⁵⁾ namelijk een „waarschijnlijkheidslogika” ontworpen, waarin *alle* uitspraken slechts met een voor elk hunner bepaalde waarschijnlijkheid gelden. De uitspraak, dat deze waarschijnlijkheid een bepaalde waarde heeft, wordt evenwel nog aan de gewone logika onderworpen. Hierin ligt een inconsequentie en een onzuiverheid, welke nader te onderzoeken aan toekomstig onderzoek voorbehouden moet blijven.

Zoveel is wel gebleken, dat b.v. de term „wanorde” het karakter heeft van wat Mannoury een „uitsluitingsnegatie” ³⁶⁾ noemt, d.w.z. dat zij het ontbreken inhoudt van *bepaalde* regelmatigheden, die de spreker in gedachten heeft, zonder iets uit te spreken over eventuele andere regelmatigheden. Haar betekenis is daardoor afhankelijk van de voorstellingsinhoud van de spreker (of van een afspraak omtrent de regelmatigheden, die in aanmerking genomen zullen worden). Ook een term als „onmogelijk” verliest daarmee het absolute karakter, dat men er vroeger aan toekende. Men moet integendeel verschillende graden van onmogelijkheid toelaten.

Dit moge aan de hand van enkele voorbeelden kort toegelicht worden, die om ze duidelijk te doen spreken, zo extreem gekozen zijn, dat ze geen praktische betekenis meer hebben.

Een ieder zal het nog voor „mogelijk” houden, dat bij het bridge-spel de gever 13 kaarten van een bepaalde kleur krijgt. De kans dat dit zal gebeuren is ongeveer 1 op 636 milliard ³⁷⁾, anders gezegd, men kan daarop een paar rijksbegrotingen tegen een cent verwedden. Duidelijker spreekt wellicht: als 10 000 bridgeteams dag en nacht ononderbroken zaten te spelen in een tempo van één spel per minuut, dan zou dit waarschijnlijk eenmaal in de 120 jaar voorkomen. Opdat men zou kunnen verwachten, dat éénmaal *elk* van de spelers 13 kaarten van een zelfde kleur zou krijgen, zou het nodig zijn, dat alle (b.v. 2,4 milliard) bewoners der aarde in hetzelfde tempo ononderbroken zaten te bridgen en dat evenveel

mensen dit sinds het ontstaan van de aarde gedaan hadden en dat hetzelfde nog op een 600 andere planeten gebeurde ³⁸). Toch zal niemand het „onmogelijk” noemen, dat elk van de spelers 13 kaarten van één kleur krijgt.

Wel zal een ieder de volgende gebeurtenis „onmogelijk” noemen, al is zij in overeenstemming met de wetten der moderne fysika, en bezit zij een waarschijnlijkheid, uitgedrukt door een getal, dat met een, ruw geschat, 8 quintillioen ($8 \cdot 10^{30}$) nullen achter de komma begint, in plaats van „slechts” 28 zoals in het laatste voorbeeld. In deze zin dan is het „mogelijk”, dat alle straling van de zon, voor zover zij anders buiten de aarde zou vallen, zich plotseling gedurende enige tijd op een bepaald punt concentreert, zonder dat de straling op de omgeving daarvan verandert. Daardoor zou het b.v. „kunnen” gebeuren, dat men plotseling een boog van de Moerdijkbrug zag verdampen ³⁹). Met nog weer kleinere waarschijnlijkheid ware het toch altijd nog „mogelijk”, dat de dan in de atmosfeer aanwezige ijzerdamp daarna weer ging condenseren, en wel in precies de oorspronkelijke vorm van de boogbrug, zodat de reizigers in de trein, die even later over de brug rijdt in het geheel niet zouden bemerken, dat er iets bijzonders aan de hand was geweest, en eerst 's avonds in de krant zouden lezen, aan welk gevaar ze op wonderbaarlijke wijze ontsnapt waren.

Natuurlijk is deze redenering niet geheel correct, daar immers de natuurkundige begrippen niet met zo grote nauwkeurigheid gedefinieerd zijn, dat het verschil tussen zó kleine getallen en 0 betekenis zou hebben. Het voorbeeld dient dan ook slechts om aan te tonen, dat tussen „mogelijk” en „onmogelijk”, of tussen „nul” en „iets” een strook niemandsland ligt, waar men naar believen één dezer termen kan toepassen.

De beschikbare tijd staat mij niet toe, langs de weg der geschiedenis het voetspoor der waarschijnlijkheidsrekening te blijven volgen. Het zij mij daarom toegestaan, U een vluchtige indruk te geven van datgene, waartoe de studie van kansspelen, die bij eerste beschouwing de indruk van beuzelarij of ten gunstigste van overbodige hersengymnastiek wekt, geleid heeft. De talrijke zeer fraaie zuiver-wiskundige onderzoekingen op dit gebied moet ik thans met stilzwijgen voorbijgaan.

Vermelden slechts kan ik het feit, dat zeer vaak methoden, ontwikkeld ter oplossing van op zich zelf weinig belangrijke problemen over geluksspelen, ten gevolge van de innige verbondenheid van de verschillende delen der wiskunde, op wijde terreinen, ver buiten hun ontstaansgebied gelegen, vrucht konden zetten. De op

elk terrein der wiskunde onontbeerlijke eigenschappen der binomiaalcoëfficiënten, door Pascal in zijn *Triangle Arithmétique* ten behoeve van de Méré's tweede probleem afgeleid, bieden daarvoor al onmiddellijk een voorbeeld⁴⁰⁾. Ten duidelijkste blijkt hieruit, als zo vaak tevoren, dat het van weinig belang is, van waar uit wat zeer onlangs door één Uwer⁴¹⁾ genoemd werd „het reservoir van zuivere ongerichte wetenschap” gevuld wordt; hoofdzaak is, dat dit reservoir in zijn volle capaciteit in gebruik blijft, al zal wellicht op de duur de „wetenschaps-wetenschap” zelf tot een bewuster en doordachter gebruik van alle mogelijke toevoerkanalen leiden, temeer daar het aftappen door de toegepaste wetenschappen veelal in verbijsterend snel tempo geschiedt.

Juist op het gebied der waarschijnlijkheidsrekening is dit sinds een halve eeuw het geval, sinds namelijk de abstract mathematische theorie tezamen met zorgvuldig onderzoek van omvangrijk waarnemingsmateriaal in de mathematische statistiek tot een nieuwe eenheid gegroeid is. Waar zulk waarnemingsmateriaal ontbreekt, behoudt de toepassing der waarschijnlijkheidsrekening een (in wetenschappelijke zin) speculatief karakter, zoals bij de markies de Condorcet, die in 1782 trachtte de beste vorm van parlement, jury of beroepsinstantie te vinden door aan te nemen, dat elke rechter, elk jury- of parlamentslid een bepaalde waarschijnlijkheid heeft, een „juist” oordeel uit te spreken of een „juiste” beslissing te nemen. Doordat hij stilzwijgend aannam, dat deze waarschijnlijkheid een bepaald getal was, onafhankelijk van de aard van het geval, en dat de uitspraken van de afzonderlijke leden van het parlement of jury onafhankelijk van elkaar en van de gegevens als opeenvolgende worpen met een dobbelsteen beschouwd konden worden, hadden zijn beschouwingen, hoe goed ook bedoeld, geen enkele betekenis.

Het oudste toepassingsgebied der waarschijnlijkheidsrekening is de levensverzekeringsleer, reeds in 1671 door Raadpensionaris Johan de Witt aangevangen en al spoedig tot bloei gekomen, toen men over uitgebreide sterftestatistieken de beschikking kreeg, die er als ervaringsmateriaal aan ten grondslag gelegd konden worden. De waarschijnlijkheidstheoretische basis werd belangrijk versterkt, toen men er toe overging naast de gemiddelde sterfte, waarop de premieberekening berust, ook de spreidingsverschijnselen te bestuderen, t.w. de mate waarin de werkelijke sterfte in een jaar van de gemiddelde sterfte afwijkt. Met behulp daarvan berekent men de zogenaamde „risicoreserve”, benodigd om in jaren van abnormaal grote sterfte de uitkeringen te kunnen waarborgen. Minder onder-

zoekt, grotendeels ten gevolge van ontoereikend statistisch materiaal, is de leer der schadeverzekering, b.v. verzekering tegen schade door brand, hagel, ongevallen, scheepsrampen e.d. Een belangrijke bijdrage daartoe in ons land is onlangs door de heren C. Campagne, B. H. de Jongh en J. N. Smit ⁴²⁾ gegeven. Nu in Nederland door samenwerking van het verzekeringswezen met de Economische Faculteit, de Wis- en Natuurkundige Faculteit en het Mathematisch Centrum een universitaire opleiding van actuarissen tot stand is gekomen, mag ten onzent een grote opleving van de verzekeringswetenschap worden verwacht. Het is te hopen, dat het verzekeringsbedrijf door systematische verzameling op grote schaal van statistisch materiaal daartoe een verdere bijdrage zal geven. Als voorbeeld van vulling van het zuiver-wetenschappelijk reservoir uit een onverwachte bron moge een bijzonder eenvoudige bewijsmethode voor een zuiver wiskundige stelling ⁴³⁾ der waarschijnlijkheidsrekening genoemd worden, door een amateur wiskundige Dr. B. H. de Jongh, in verband met een probleem over herverzekering gevonden.

Vervolgens ontstonden als toepassingsgebieden der waarschijnlijkheidsrekening: de theorie der waarnemingsfouten, vooral in de sterrekunde en de landmeetkunde veelvuldig gebruikt, en de balistiek. Deze onderwerpen zal ik heden verder onbesproken laten.

De tweede tak van wetenschap, die op grote schaal gebruik ging maken van waarschijnlijkheidstheoretische methoden, was de natuurkunde. Ongeveer $\frac{3}{4}$ eeuw geleden was het vooral L. Boltzmann, later J. W. Gibbs, die deze methoden in de warmteleer invoerde, en met behulp daarvan er in slaagde de waargenomen verschijnselen uit de moleculaire theorie der materie af te leiden. Zoals reeds uit het voorbeeld van de spoorbrug is gebleken, wordt door de enorme aantallen moleculen, waaruit een gewoonlijk waargenomen hoeveelheid materie bestaat, iedere bepaalde grove afwijking van de waarschijnlijkste toestand tot zo onzegbaar kleine waarschijnlijkheden teruggedrongen, dat haar denkbare „mogelijkheid” volkomen het karakter van „onmogelijkheid” heeft, terwijl ze toch alle tot spreidingsverschijnselen leiden, die op vele wijzen met waarneembare verschijnselen corresponderen. De in de warmteleer optredende eigenschappen als „temperatuur” en „druk” kregen daardoor het karakter van „collectieve verschijnselen”, die eerst door de onderlinge beïnvloeding van een groot aantal moleculen tot stand komen. Dien overeenkomstig werd op deze verschijnselen de waarschijnlijkheidstheoretische terminologie toegepast, volgens welke uit een bepaalde begintoestand van een gas b.v. *elke* denkbare latere toe-

stand, die aan bepaalde eisen voldoet, met een bepaalde, zij het een grote, zij het een kleine waarschijnlijkheid gezegd wordt voort te vloeien.

Aanyankelijk werd op de natuurkundige verschijnselen, die buiten de warmteleer liggen, nog in overeenstemming met het zogenaamde „causaliteitsbeginsel” de klassieklogische terminologie toegepast, volgens welke uit een bepaalde begintoestand een bepaalde latere toestand met zekerheid wel of met zekerheid niet voortvloeit. Op de duur evenwel bleek deze strikte indeling in slechts twee mogelijkheden („wel” of „niet”) onhoudbaar. In het bijzonder de quantummechanika leidde er 23 jaar geleden toe, dat de waarschijnlijkheidstheoretische terminologie de gehele natuurkunde ging doordringen. De vraag doet zich voor, of het evenals in de warmteleer, ook in de quantummechanika mogelijk is, de waargenomen gebeurtenissen als collectieve verschijnselen te interpreteren. Een poging van Von Neumann ⁴⁴⁾, deze mogelijkheid uit te sluiten, is, zoals ook Reichenbach ⁴⁵⁾ heeft opgemaakt, niet bewijskrachtig. Terwijl in de moleculaire theorieën een ogenschijnlijk homogeen brok materie beschouwd wordt als te zijn opgebouwd uit een zeer groot aantal afzonderlijke deeltjes, die elk voor zich een duurzaam bestaan voeren, ware het hier nodig, dit „ogenschijnlijk” duurzame bestaan van zulk een deeltje als verschijningsvorm te denken van een zeer groot aantal elementaire gebeurtenissen, „flitsen” genoemd. Pogingen, tot zulk een interpretatie der waarschijnlijkheidstheoretische terminologie met behulp van collectieve „flitsen”-verschijnselen, een tiental jaren geleden ondernomen, mochten nog niet tot succes voeren, en werden dan ook alleen in de vorm van een programmatische schets gepubliceerd ⁴⁶⁾. Een realisering van dit programma door competentere handen schijnt echter nog steeds mogelijk. Of zulk een realisering, zo zij mogelijk is, op dit ogenblik wenselijk ware, is op zijn minst genomen twijfelachtig.

In één opzicht heeft de doordringing der natuurkunde met waarschijnlijkheidstheoretische methoden enige begripsverwarring ten gevolge gehad. Door talloze auteurs is de mening uitgesproken en hartstochtelijk verdedigd, dat (zoals het vaak wordt uitgedrukt) „door het prijsgeven van het deterministische causaliteitsbeginsel de mogelijkheid geopend wordt, het beginsel van de vrije wil in het natuurbeeld op te nemen”. Deze mening is echter niet geheel juist, zoals reeds op eenvoudige wijze is in te zien ⁴⁷⁾. Immers het is slechts dan zinvol, de term „wil” in overeenstemming met het spraakgebruik toe te passen, indien de „wil”, een bepaalde situatie tot stand brengen, door bepaalde handelingen te verrichten gere-

aliseerd kan worden. De gebruikelijke toepassing van de term „wilsvrijheid” vooronderstelt daarom een causaal voortvloeien van de gewenste situatie uit de verrichte handelingen, en laat zich dus met de quantummechanische theorieën niet beter verenigen dan met de causale. Anders gezegd: de vraag, een terminologie op te bouwen, waarin zich zowel de introspectief-psychologische (b.v. de door de term „wil” uitgedrukte) als de natuurkundige verschijnselen laten uitdrukken, is door de invoering van de waarschijnlijkheidstheoretische terminologie in de natuurkunde nog niet volledig opgelost. Wel echter is de opheffing van de strikte scheiding tussen object en subject, die in de quantummechanika plaats vindt, een symptoom voor de opheffing van de scheiding tussen natuurwetenschap en „l'étude de l'homme”.

In de derde plaats was er de biologie, die omstreeks de eeuwwisseling een grootscheeps gebruik ging maken van wiskundige, met name waarschijnlijkheidstheoretische methoden, aanvankelijk voornamelijk ter toetsing der erfelijkheidswetten van Mendel. Tegelijkertijd was het de Engelse bioloog Karl Pearson ⁴⁸⁾, die in een groot aantal publicaties leerde, hoe men deze methoden kon toepassen op grote massa's waarnemingsmateriaal, dat nog niet door theoretische hypothesen geordend was. Daarmede werd hij de grondlegger van de biometrie, de op wiskundige grondslag gefundeerde delen der biologie, en in algemene zin van de wiskundige statistiek in haar moderne gedaante. Aan hem voornamelijk en aan de in Engeland inheemse empiristische instelling danken wij, dat de waarschijnlijkheidsrekening haar (vooral in Frankrijk gekweekte) speculatieve fase kon verlaten en zich in nauwe aansluiting aan de ervaring verder kon ontwikkelen. Tot hoe schone bloei de biologie gekomen is door de „kruisbestuiving” tussen waarneming en wiskundige bewerking, t.w. tussen steeds verfijnder selectiemethoden en de toetsing hunner resultaten met wiskundige hulpmiddelen, is te algemeen bekend dan dat ik er lang bij behoef stil te staan.

Ook hier is de onvergelykelijke verbetering van waarnemings-, kwekings- en toetsingsmethoden gepaard gegaan met een bezinning op de grondslagen der wetenschap, die meer en meer een signifisch karakter gaat aannemen. Langzamerhand ziet men termen als „entelechie”, „leven”, „aanpassingsvermogen”, „doelmatigheid” e.d., die wel eens de indruk wekten een meer magisch bezwerend dan nauwkeurig begrenzend karakter te hebben, uit de discussies verdwijnen en voor exactere formuleringen plaats maken. Men heeft dan ook wel eens betoogd, dat de onderscheiding van levende

en levenloze materie onherroepelijk tot schijnproblemen moet leiden. Het komt mij echter voor, dat dit niet noodzakelijk het geval behoeft te zijn. Om van de meetkunde tot de bewegingsleer over te gaan moet men termen invoeren, die op de tijdmeting betrekking hebben, waarna men begrippen als „snelheid” en „versnelling” kan definiëren. Om vervolgens tot de dynamika te komen, moet men de termen „kracht” en „massa” invoeren, waarna men begrippen als „energie” en „impulsie” kan definiëren. Om daarna tot de leer van electriciteit en magnetisme over te gaan, moet men niet noodzakelijk de termen „electriciteit” en „magnetisme” zelf, maar wel b.v. de term „lading” invoeren, waarna b.v. termen als „electrische stroom”, „electrische veldsterkte” en „magnetische inductie” definiëerbaar zijn. Zo is het ook geenszins uitgesloten, wellicht zelfs alleszins aannemelijk, dat de biologische terminologie niet volledig tot de fysisch-chemische reduceerbaar is, maar dat het mogelijk maar ook onvermijdelijk zou blijken, de typisch-biologische termen — indien en voor zover ze in deze wetenschap strikt onontbeerlijk zijn — met behulp van één of enkele hunner, die meetbare grootheden aanduiden, exact te definiëren.

Een aantal verdere toepassingen van statistische methoden, b.v. in de medische statistiek, in de ekonometrie, in het bijzonder de conjunctuuranalyse, in de psychologie, met name de psychometrie, in de maatschappijleer b.v. met betrekking tot het bevolkingsvraagstuk, en thans ook tot het opinie-onderzoek (een gebied dat dringende behoefte heeft zich onder nauwkeurige statistische zowel als signifiſche controle te stellen, wil het niet grote maatschappelijke gevaren oproepen), en wellicht eerlang ook de massapsychologie moet ik hier onbesproken laten. Een tweetal recente toepassingen echter, die wijde perspectieven openen, mag ik U niet onthouden. Beide liggen op maatschappelijk terrein; de eerste is van praktisch-industriële, de tweede van theoretisch-ekonomische aard.

De moderne massa-productie en de steeds toenemende behoefte aan coördinatie en normalisatie verlangt, dat de massaproducten slechts binnen nauwe grenzen variabel zijn. Schroeven b.v. mogen om in de moeren te passen niet te dik en niet te dun zijn, garens niet te dun, lucifersdoosjes niet te leeg en niet te vol, enz. De enorme hoeveelheden, die verwerkt worden, maken het onmogelijk, de producten stuk voor stuk nauwkeurig te toetsen, zodat men zich tot steekproeven moet bepalen. De beoordeeling van de betrouwbaarheid dezer steekproefmethoden, alsmede de opstelling van voldoende betrouwbare en toch niet te kostbare methoden vereist

de hulp van de wiskundige statisticus. Dit heeft ten gevolge, dat in Amerika, naar een Amerikaans statisticus⁴⁹⁾ dezer dagen mededeelde, voor iedere mathematische statisticus, die de universiteiten afleveren, onmiddellijk drie plaatsen beschikbaar zijn; de vraag, hoevél wiskunde deze statistici moesten kennen, beantwoordde hij (hoewel zelf geen wiskundige maar practicus) met de woorden „never enough”. Deze ontwikkeling is in Nederland ook reeds ingetreden en zal zich ongetwijfeld in een nabije toekomst in versneld tempo voortzetten.

De laatste toepassing der waarschijnlijkheidsrekening, die ik wil noemen, is afkomstig van de reeds genoemde Hongaar Johann — thans John — von Neumann, één der belangrijkste wiskundigen van onze generatie. Deze schreef in 1928 een artikel „Zur Theorie der Gesellschaftsspiele”⁵⁰⁾, waarvan het belang destijds slechts door enkelen werd ingezien. Hij beschouwde daarin spelen, waarvan de uitslag niet uitsluitend van het „toeval” — als ik deze vage term even mag gebruiken — maar ook van beslissingen der spelers afhangt, spelen dus als bridge, poker e.d. Op een ongemeen vernuftige wijze wist hij al dergelijke spelen onder een algemeen schema te brengen, dat voor exact wiskundige behandeling toegankelijk is. Daarbij bleek, dat het bij spelen tussen drie of meer spelers van het grootste belang is, of zij zich al dan niet met elkaar verbinden. Bij voorbeeld bleek, dat bij bijna alle spelen tussen drie personen twee der spelers door af te spreken, winst of verlies te delen, in staat zijn de derde uit te plunderen, ook al is het spel volkomen symmetrisch. Doel van dit onderzoek was natuurlijk niet zozeer, deze spelen op zich zelf te bestuderen, als veeleer ze als vereenvoudigd model van de economische aktiviteit te beschouwen. Dit artikel van 24 bladzijden is thans door von Neumann tezamen met de ekonoom Morgenstern uitgewerkt tot een „Theory of games and economic behavior” van 641 pagina's⁵¹⁾. De daarin behandelde theorie gaat uiteraard de mogelijkheid van bespreking te dezer plaatse verre te buiten, temeer daar vele aldaar behandelde vragen tengevolge van de zelfs voor von Neumann te zware wiskundige moeilijkheden onbeantwoord moesten blijven. De waarde van dit boek voor de ekonomie te beoordelen valt natuurlijk verre buiten mijn competentie. Maar ik meen er wel op te mogen wijzen, dat zelfs als de daarin aangenomen economische principes wellicht niet aanvaard mochten worden, de hierin gebruikte wiskundige *methoden* van zo algemene aard zijn, dat zij zich ook aan gewijzigde economische beginselen zullen laten aanpassen. Men heeft hier, afgezien van de vooralsnog veelal exorbitante wiskundige moeilij-

heden, de mogelijkheid, de economische hypothesen in wijde omvang te variëren, bij elk gekozen hypothesenstelsel de daaruit voortvloeiende economische ontwikkeling wiskundig door te rekenen, en door toetsing der resultaten aan de ervaring het hypothesenstelsel te aanvaarden, te verwerpen, dan wel te wijzigen. In ieder geval is er alleszins reden, aan te nemen, dat met dit werk, hoe voorlopig en onvolkomen het ook moge zijn, voor de economie een stap gezet is, vergelijkbaar met de introductie van de infinitesimaalrekening in de natuurkunde door Newton, een stap, die, hoe ook de theorie gewijzigd moge worden, wel eens als op zovele andere gebieden onherroepelijk zou kunnen blijken te zijn, de stap namelijk op de weg der mathematisering.

III.

In het derde en laatste gedeelte dezer rede wil ik trachten, na te gaan, in hoeverre een bijdrage tot „l'étude de l'homme" mede in verband met de kritieke situatie, waarin de mensheid verkeert, gegeven kan worden door de leer der collectieve verschijnselen, waaronder ik de studie van grote complexen min of meer gelijksoortige, veelal samenhangende objecten, gebeurtenissen of mensen, enz. wil verstaan, met gebruikmaken van de graduërende terminologie der waarschijnlijkheidsrekening en van signifische methoden. Ik zal daartoe, meer nog dan tot dusverre, moeten afwijken van de traditie, in een openbare rede als deze geen vragen van politieke of godsdienstige aard aan te roeren. Ik hoop er tot dusverre in geslaagd te zijn, en zal er ook verder naar blijven streven, dit te doen in termen, die andersdenkenden (of wie menen dit te zijn) in niet hogere mate zullen storen dan strikt onvermijdelijk is.

De moderne ontwikkeling overziende moet men vaststellen, dat de waarschijnlijkheidstheoreticus heden niet meer naar toepassingsgebieden behoeft te zoeken. Integendeel, uit alle hoeken en centra van het wetenschappelijk en het maatschappelijk leven wordt hij onophoudelijk bestormd met verzoeken om statistische adviezen. Dit verleent aan de waarschijnlijkheidsrekening en de mathematische statistiek een merkwaardig min of meer interfacultair karakter, dat hun beoefenaren dwingt „de savoir quelque chose de tout". Het zal vooral ook de taak van de statistische afdeling van het Mathematisch Centrum zijn, om dergelijke adviezen te geven, voor zoverre zij de normale routinetechniek van andere statistische bureaux te boven gaan. Vanwaar deze vele verzoeken? „On aime la sûreté. On aime que le pape soit infaillible en la foi,

et que les docteurs graves le soient dans les mœurs, afin d'avoir son assurance" zeide Pascal reeds ⁵²). En het merkwaardige feit doet zich voor, dat de man van wetenschap of techniek, die alvorens zijn product van onderzoek of industrie in het openbaar te brengen, de grootst mogelijk zekerheid wenst, dat het „goed" zal zijn, daarbij slechts geringe steun kan verkrijgen van de klassiek-axiomatische wiskunde, die alleen de dichotomie „zekerheid $\longleftrightarrow$ onmogelijkheid" of „goed $\longleftrightarrow$ fout" kent. De waarschijnlijkheidsrekening daarentegen, die tussen deze extremen een geheel spectrum van onzekerheden legt, kan daardoor geen „zekerheid" in absolute zin, maar wel „grote zekerheid", dat is een bepaalde hoge graad van waarschijnlijkheid verschaffen.

Zullen in een verre of nabije toekomst ook eenmaal op een dergelijke wijze de significante adviesbureaux uit de grond schieten? Zullen de wetenschappelijke onderzoekers en de filosofen zich dan tot de signfici wenden met vragen als: „wil je even dit manuscript doorlezen en nagaan of de bedoelingen, die ik daarin tot uitdrukking heb willen brengen, door de lezers ook inderdaad in dezelfde zin verstaan zullen worden?" of met een vraag als: „controleer eens even voor me, of de begrippen, die ik gebruik, op significant verantwoordelijke wijze zijn ingevoerd, en of ik niet onbemerkt onverantwoordelijk grote betekenisverglijdingen heb begaan?" Zal de significans ons dan geleerd hebben, dat tussen de uitspraak „God bestaat. Ik doe, wat ik mijn plicht acht, opdat ik na uit het aardse lijden verlost te zijn de eeuwige gelukzaligheid deelachtig zal worden" enerzijds, en de woorden „God bestaat niet. Ik doe, wat ik mijn plicht acht, opdat mijn (en anderer) nakomelingen tot in de verste geslachten niet weer de ellende van zulk een mensonwaardig leven zullen behoeven te beleven" vrijwel geen ander dan een *terminologisch* verschil bestaat? En zal dan de dominé of de priester, die een toespraak tot een arbeidersvergadering moet houden, zijn manuscript naar de significus brengen met de woorden: „Ik weet wel, ik ben een ouderwets man, en nogal aan de Christelijke (resp. de katholieke) terminologie vastgeroest. Maar wees zo goed, deze toespraak, met behoud van de aanwijsbare inhoud en zoveel mogelijk ook de wils- en gevoelswaarde, even voor me in het Marxistisch te vertalen".

Maar laat ik mij niet in toekomstdromen verliezen, die wellicht illusies zullen blijken, en mij beperken tot de voor ieder verifieerbare constatering, dat de behoefte aan significante kritiek en significante bezinning in wetenschap en in politiek allerwege toeneemt, zoals men dat enige jaren geleden met de behoefte aan statistische

contrôle zag geschieden. En tot de opmerking, dat de „nobilité d'esprit” niet onbeperkt kan voortgaan, met haar wetenschappelijke en andere culturele werkzaamheid, indien zij dit moet doen in het bewustzijn, dat haar geestesproducten, zodra zij deze aan de maatschappij aflevert, door winstbejag, machtsbegeerte en wijsheidswaan gedenatureerd worden tot een karikatuur van hoe zij gedácht en bedoeld waren.

Allerwegen zien wij de tegenstellende terminologie van „schurk — held”, „goed — kwaad”, maar ook „waarheid — leugen”, „goed — fout”, „leven — levenloos”, „lichaam — geest”, „demokratie — dictatuur”, „oorlog — vrede”, „vrijhandel — ordening”, enz. enz. geleidelijk aan plaats maken voor een gradualiteitsterminologie, waarbij vele tussenvormen en -stadia onderscheiden worden. De oorspronkelijke termen verliezen daarbij niet volledig hun betekenis, maar blijven een globale onscherpe onderscheiding weergeven, door verfijnde structuren van tussenvormen en interpenetraties verenigd, zoals de termen „rood” en „blauw” onscherp omlijnde spectraalgebieden aanduiden, door een continu kleurenspectrum met elkaar verbonden. Dit weerspiegelt zich in het geleidelijk althans gedeeltelijk overgaan van de klassiek-axiomatische wiskunde der „zekerheid” in een wiskunde van de twijfel, zij het in haar waarschijnlijkheidstheoretische vorm, zij het in de vorm van de verschillende systemen van symbolische logika, die uit de intuïtionistische wiskunde van Brouwer zijn voortgekomen, en in een zich gedeeltelijk terugtrekken op wat wij in de logika noemen „meta-systemen” ⁵³). En het merkwaardige feit doet zich voor, dat de „esprit de géométrie” niet het starre, van het menselijk leven afgewende principe, vertegenwoordigt, maar dat juist zij in de verfijning der structuren is voorgegaan. Zij staat niet meer, zoals de Méré meende, de „esprit de finesse” in de weg, maar esprit de géométrie *is* esprit de finesse.

Toch blijft er steeds een residu van ongegradueerde terminologie over. Wordt een bepaalde uitspraak niet meer met zekerheid, maar slechts met een bepaalde graad van waarschijnlijkheid geponeerd, zo wordt toch de uitspraak, dat deze waarschijnlijkheid b.v. de waarde $\frac{3}{4}$ heeft, klassiek-logisch, dus met zekerheid geponeerd, of hetzelfde geschiedt op een volgende trap. Zo wordt ook in de intuïtionistische wiskunde geen twijfel toegelaten omtrent de vraag of een finiete constructie al dan niet uitgevoerd is ⁵⁴), en in de symbolische logika vindt men soortgelijke verschijnselen ⁵⁵). En dat kan ook niet anders, want elk woord, dat uitgesproken wordt, algemener elke daad, die gedaan wordt, heeft als zodanig

een — min of meer — absoluut karakter. Consequent relativisme is een contradictie in zich zelve. Het verschil tegenover de oude, absolutistische opvatting ligt daarin, dat dit gebruik maken van absolutistische, dat is ongegradueerde „ja — nee” terminologie in plaats van gegradueerde „meer — minder” terminologie gezien moet worden als een vereenvoudiging, bruikbaar voor bepaalde voorlopige doeleinden, die zodra nodig weer opgeheven zal worden, door invoering van fijnere gradueringen. Die dan zelf weer absoluut, ongegradueerd gesteld zullen worden, maar wederom naar de wijze der voorlopiegheid.

Voor zoverre in de menselijke samenleving nog min of meer duidelijke scheidingslijnen te onderscheiden zijn, meen ik daarvan tweeërlei te kunnen bespeuren.

De eerste loopt tussen hen, die in het stoffelijk of geestelijk welzijn, in het onmiddellijk genieten van een „carpe diem” en „après nous le déluge”, dan wel in een voorgestelde individuele „hemelse zaligheid” als loon of genade hun hoogste bevrediging vinden, kort gezegd de „Ik-mensen”, en hen, wier gevoel van stoffelijk of geestelijk welbehagen zijn begrenzing vindt in het bewustzijn, dat anderen daaraan niet kunnen deelnemen, kort gezegd de „Wij-mensen”. Wij zijn allen in zekere opzichten en in zekere mate „ik-mensen” en in andere „wij-mensen”, maar op de mate komt het juist aan. Behoeft het gezegd te worden, dat hier van exacte meting dezer mate geen sprake is, doch slechts van zeer subjectieve schatting? De scheidingslijn voor zoverre zij te volgen is, loopt dwars door alle groepen heen, maar de woordsystemen van kapitalisten komen mij voor op de eerste, die van communisten en socialisten op de tweede levenshouding bevorderlijk te werken. In de historische ontwikkeling der laatste eeuwen valt, naar het mij voorkomt, ondubbelzinnig, tengevolge van de toenemende wisselwerking tussen maatschappelijke organismen, een geleidelijke maar thans versnelde toeneming van het „Wij-type” ten koste van het „Ik-type” waar te nemen.

De tweede scheidingslijn loopt tussen wat ik kort de „ideologisch absolutistische” en de „wetenschappelijk-relativistische” levenshouding zou willen noemen. De eerste, die ten onzent in het Katholicisme en het Communisme (beide in hun huidige actueel-politieke gedaante beschouwd) ⁵⁶⁾ haar duidelijkste uitdrukking vindt, maar zich in vrijwel iedere rituele godsdienst en in vrijwel iedere politieke partij in slechts weinig mindere mate uit, is gekenmerkt door een onbegrensde preferentie van de tegenstellende terminologie en het met alle beschikbare middelen forceren van de aanvaarding van

een onwrikbaar vastgelegd systeem van terminologisch zeer bepaalde uitspraken. In de wetenschappen vindt deze levenshouding haar uitdrukking vooral in oudere vormen, die weliswaar nog geenszins volledig prijsgegeven, maar wel sterk in invloed achteruitgegaan zijn, met name in de klassiek-axiomatische wiskunde, waarbij bepaalde axiomata als „denknoodzakelijkheden” werden beschouwd, en in de hiermede overeenkomende wijsbegeerte van Kant, maar slechts weinig minder in de meeste andere wetenschappen, welker uitspraken met onbegrensde stelligheid geponeerd en als eens en vooral „wetenschappelijk vaststaand” beschouwd werden. De tweede daarentegen vindt in geen enkel politiek of godsdienstig leerstelsel een organisatievorm, maar wordt vooral door de mannen van de wetenschap aangenomen, voor zoverre zij met wetenschappelijk werk bezig zijn; zodra zij daarbuiten treden, krijgen nog vaak de residuen van ideologische gebondenheid de overhand. Kenmerkend voor deze levenshouding is de bereidheid, iedere ongegradueerde (dus in „ja of neen” vorm geformuleerde) uitspraak als vereenvoudigde voorlopigheid op te vatten, en deze te allen tijde door een verfijnde structuur van gradaties of zelfs onder bepaalde voorwaarden door haar ontkenning te vervangen. Onder de hedendaagse wetenschappen zijn het de waarschijnlijkheidsrekening en de significa, waarin deze levenshouding het duidelijkste tot uitdrukking komt. Ook hier is, naar het mij voorkomt, een vrij duidelijke, zij het minder ondubbelzinnige ontwikkeling te zien, die in de huidige cultuurfase van de meer ideologisch-absolutistische naar de meer wetenschappelijk-relativistische levenshouding voert.

De belangrijkste oorzaak van de kritieke situatie, waarin de mensheid zich thans bevindt, die zo ernstig is, dat vrijwel geen enkel maatschappelijk of politiek probleem op internationale of zelfs maar op nationale schaal kan worden opgelost, meen ik vóór alles te zien in een *te* langzaam afsterven van de ik-houding en van de ideologisch-absolutistische houding. Te langzaam, gemeten aan de snelheid waarmede de wisselwerking en interpenetratie tussen nationale en internationale maatschappelijke organismen in intensiteit toeneemt, die zelf weer samenhangt met de snelheid van toeneming der menselijke bevolking op aarde.

Twee middelen meen ik te zien, die tot een uitweg uit deze kritieke situatie kunnen leiden: 1.: het in zeer sterk versneld tempo prijsgeven van de residuerende kapitalistische ik-houding, zowel als van het Katholiek-Communistische ideologische absolutisme — als ik deze schematiserende trefwoorden even mag gebruiken —

en 2°. het vervangen van de ongegradueerd tegenstellende relatie tussen de vele ideologisch gebonden groepen, waarbij elk voor zich en voor zich alléén volledig op „waarheid”, „recht”, „menselijkheid”, „vrijheid” enz. aanspraak maakt, door een gegradueerd verbindende, waarbij in *elk* dezer ideologieën zoveel en zo onbevangingen mogelijk waarheidselementen opgespoord en in *elk* dezer groepen zoveel en zo onbevooroordeeld mogelijk naar eventueel aanwezige maatschappelijk waardevolle functies wordt gezocht; twee middelen, waarin ik nog een mogelijkheid tot behoud der menselijke samenleving op ons cultuurniveau meen te zien ⁵⁷).

De wiskunde der zekerheid, die in de infinitesimaalrekening haar glansrijkste zijde toont, heeft door een reeks van toepassingen op de natuurwetenschappen, elke volgende grandioser, brillanter, fonkelender, schitterender dan de voorafgaande, la grandeur de l'homme tot ongekende afmetingen opgevoerd en de mensheid tot één welhaast onbegrensde heerschappij over de natuurkrachten gebracht, die in de verzengende straling van de atoombom haar explosieve culminatiepunt — zo niet haar verschroeide einde vindt.

Op de kennis van de mens en de mensheid zelve heeft zij zich evenwel niet laten toepassen.

De wiskunde der gegradueerde onzekerheid daarentegen is van de aanvang af en in toenemende mate bruikbaar gebleken om die wetenschappen, die naar l'étude de l'homme convergeren bij hun onderzoek, zij het in nog onvoldoende mate, hulp te bieden. Waarin zal zij culmineren? Zal zij, door bemiddeling van de quantummechanica en de kernfysika reeds medeplichtig geworden, zich aan winzucht, machtsstrijd en zekerheidswaan onderwerpen en daarmee la misère de l'homme tot ongekende diepte voeren, waaruit zelfs geen „de profundis” meer opklinken kan?

Of zal zij zich van deze drie onafhankelijk maken, en, zich naar de wijze der voorlopigheid betrekkelijk absoluut stellend, de wijshouding boven de ik-houding en het wetenschappelijk-relativistisch beginsel boven het ideologisch-absolutistische plaatsen, en la grandeur de l'homme in de kennis, de beheersing en de bestrijding van de werkelijke misère de l'homme, de lichamelijke en de geestelijke, zoeken, en zodoende de menselijke samenleving tot een waarlijk collectief verschijnsel constituëren?

Het staat niet aan mij, het antwoord op deze vraag te geven, want wij allen dragen daarvoor gemeenschappelijk de verantwoording.

AANTEKENINGEN *).

1) In 1588 had de Spaanse Jezuïet Molina in een theologisch geschrift getracht, de leerstukken van de genade en van de vrije wil met elkaar in overeenstemming te brengen. Ondanks heftige bestrijding werd zijn leer door Rome aanvaard. In 1640 verscheen posthuum „Augustinus” van de Nederlandse theoloog Cornelius Jansen (Jansenius) te Leuven (1585—1638) waarin het Molinisme als ketters (met name Pelagiaans) werd verworpen. In 1649 trok de Jezuïet Cornet hieruit 5 stellingen, die hij door Rome veroordeeld wist te krijgen. In Frankrijk werden de Jezuïeten o.a. bestreden door Antoine Arnauld (1560—1619), die het klooster te Port-Royal stichtte en o.a. met zijn 20 kinderen bevolkte. Het „Jansenisme” werd daar vooral verdedigd door zijn jongste zoon Antoine Arnauld (1612—1694), die deswege in 1656 van zijn waardigheid als doctor der Sorbonne vervallen verklaard werd. In hetzelfde jaar eiste Paus Alexander VII dat iedere bisschop, geestelijke, of non een formulier zou ondertekenen, waarin niet slechts de 5 stellingen van Cornet als ketters veroordeeld werden, maar waarin ook verklaard werd, dat zij letterlijk in het boek van Jansenius te vinden waren.

Pascal schreef ter verdediging van Arnauld de „Lettres écrites à un Provincial par un de ses amis”, welke volgens Pensée 52 vermoedelijk van de eerste uitgever afkomstige benaming gewoonlijk door de eveneens nietszeggende titel „Lettres Provinciales” vervangen wordt (1656—1657).

In deze brieven, die om hun voortreffelijke stijl door de letterkundigen ten eerste geroemd werden, viel Pascal eerst het dubieuze woordgebruik van zijn tegenstanders aan b.v. met betrekking tot de „grâce suffisante”, die toch niet „suffisante” was, voorts de leer van het „probabilisme”, volgens welke een uitspraak reeds als „waar” aanvaard mag worden, wanneer men kan aantonen, dat zij „waarschijnlijk” is. De logicus Pascal kon uiteraard deze leer niet aanvaarden, daar zij er toe leidt, dat men twee tegenstrijdige uitspraken beide als waar moet aanvaarden. Merkwaardig is, dat in zijn geschriften over waarschijnlijkheidsrekening, — in het Frans „Calcul des probabilités” —, de term „probable” niet voorkomt; deze blijft voor genoemde theologische leer gereserveerd). Ten slotte viel hij ten scherpste de „casuïsten” aan, die o.a. met behulp van „probabilistische” argumenten aan de hand van afzonderlijke voorbeelden een levenshouding trachtten goed te praten, die ook thans door de meesten als moreel ontoelaatbaar, althans als met zin en bedoeling ook der toenmalige Christelijke zedeleer in strijd zou worden beschouwd.

Ten aanzien van de geëiste verklaring nam Pascal in zijn laatste brieven het standpunt in, dat de 5 stellingen wel te veroordelen („question de foi”), maar niet in het boek van Jansenius te vinden zijn („question de fait”). Men krijgt als buitenstaander echter wel de indruk, dat, hoe dit ook moge zijn, de er in uitgesproken opvattingen in hoofdtrekken wel met die van de Jansenisten overeenstemmen,

*) De Pensées worden geciteerd naar de bekende uitgave van Léon Brunschvicg (Oeuvres complètes de Blaise Pascal, tome 12—14; ook Blaise Pascal, Pensées et Opuscules), waarin een register met de nummeringen van andere uitgaven is opgenomen. Vgl. ook de iets oudere kritische uitgave van G. Michaut (Fribourg, 1896). Voor biografische gegevens omtrent Pascal vgl. de in deze uitgaven (in het bijzonder in de Oeuvres complètes) opgenomen biografieën, ook die van Fortunat Strowski, Pascal et son temps (3 tomes, Paris, 1920—1922, speciaal t. 2), Joseph Bertrand, Blaise-Pascal (Paris, 1891), de in noten 13 en 16 geciteerde werken en vele andere.

maar ook dat de Jansenisten, niet slechts in moreel, maar ook in intellectueel opzicht verre boven de Jezuïeten, hun tegenstanders, verheven waren.

Massapsychologisch gezien is de strijd tussen Jansenisten en Jezuïeten, evenals die tussen Arminianen en Gomaristen of die tussen Stalinisten en Trotskisten, interessant als voorbeeld van een uiterst heftige wederzijdse bestrijding van twee geestverwante groepen, tussen welker thesen de er buiten staande nauwelijks enig verschil kan waarnemen.

²⁾ Pensée 37.

³⁾ Blaise Pascal, 1623—1662.

⁴⁾ Etienne Pascal, 1588—1651.

⁵⁾ Antoinette Begon, † 1626.

⁶⁾ De bekende „slakkenhuislijn” (limaçon) van Pascal is van hem afkomstig.

⁷⁾ Gilberte, later gehuwd met Florin Périer, 1620—1687; Blaise, 1623—1662; Jacqueline, als kind Jacquette genoemd, later Soeur Sainte-Euphémie, 1625—1661.

⁸⁾ Vgl. Hendrik de Vries, Historische Studiën II (1934), pag. 37.

⁹⁾ M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 2 (1892), p. 618.

¹⁰⁾ „Les Précieuses Ridicules” (1659).

¹¹⁾ Edmond Rostand, 1864—1918.

¹²⁾ Geschreven 1897.

¹³⁾ Van 13 jaar. De geadresseerde, Benserade, dacht dat Jacquette met haar „Amàrante” zich zelf bedoelde, en antwoordde in klevrige verzen, dat hij haar te jong vond! Vgl. François Mauriac, Blaise Pascal et sa soeur Jacqueline (1931) pag. 27—29.

¹⁴⁾ Van Georges Scudéry (1601—1668), broeder van de bekende précieuse Madeleine de Scudéry, schrijfster van de roman „Clélie”, waarin de „Carte du Tendre” voorkomt (Vgl. de derde acte van „Cyrano de Bergerac”). Of zij de geografie van het mannenhart tot het einde van haar leven bestudeerd heeft? Zij werd 94 jaar oud (1607—1701).

¹⁵⁾ Hij werd toen door Richelieu tot intendant der belastingen te Nantes benoemd (1640). Het was vermoedelijk om hem bij zijn rekenwerk te helpen, dat Blaise in 1645 zijn rekenmachine construeerde.

¹⁶⁾ De invloed van Blaise en Jacqueline Pascal op elkaar is een schoolvoorbeeld voor een psycho-analyticus. Beide waren in hun jeugd „wonderkinderen”, elk op eigen-terrein gevierd, en zeker niet ongevoelig voor roem; beide zijn tot hun dood ongehuwd gebleven. Na Blaise's bekering (1646) tot het Jansenisme werd hij daarin door zijn gehele familie gevolgd. Jacqueline overtrof hem echter al spoedig in geloofsijver en wilde enige tijd later in het klooster gaan; zij ondervond echter verzet, eerst van haar vader, en na diens dood (1651) van haar broeder, mede in verband met de „bruidschat”, die zij in het klooster mee moest brengen. In 1652 wist zij haar wil echter door te zetten. Dit valt in Pascal's „mondaine” periode, nadat hem zijn vader door de dood en zijn zuster door Port-Royal ontnomen was, een tijd, waarin hij volgens E. T. Bell (Men of Mathematics, pag. 101) „almost human” werd. Zelfs zijn gezondheid was in die tijd beter. Deze periode eindigde eerst met zijn „tweede bekering” (1654), onder sterke invloed van Jacqueline en van een sterk emotionerende gebeurtenis. Midden in een periode van intensieve wetenschappelijke productie (zijn correspondentie met Fermat, een tiental verhandelingen in één jaar, waaronder de „Traité du Triangle Arithmétique”) gaf hij de „wereldse” wetenschap prijs om zich enige tijd in het klooster van Port-Royal terug te trekken en vervolgens de „Lettres Provinciales” te schrijven (1656—1657).

Ook in de „tekenquaestie” (vgl. noot 1) heeft Blaise ten slotte Jacqueline's invloed aanvaard. Pascal (o.a. in zijn 18e brief) trachtte zich eerst te redden door de „question de foi” (vgl. noot 1) te bevestigen, maar de „question de fait” te verwerpen. Toen de eis ten slotte gehandhaafd werd, was Pascal met de leiders van het klooster (Arnould, Nicole e.a.) aanvankelijk geneigd hieraan toe te geven. Jacqueline (Soeur Ste Euphémie) echter verzette zich fel en welsprekend. „Je ne puis plus dissimuler la douleur qui me perce jusqu'au fond du coeur de voir que *les seules personnes à qui Dieu a confié sa vérité*” — „quel abîme de présomption dans ces quelques mots”, zegt F. Mauriac (l.c. p. 215), aan wie we het citaat ontleenen, en die de bedoelde woorden cursiveerde — „lui soient si infidèles, si je l'ose dire, que de n'avoir pas le courage de s'exposer à souffrir quand ce devrait être la mort même, pour la confesser hautement Que craignons nous? Le bannissement et la dispersion pour les religieuses, la saisie du temporel, la prison et la mort si vous voulez. Mais n'est ce pas notre gloire et ne doit-ce pas être notre joie?”

„Je sais bien que ce n'est pas à des filles à défendre la vérité, quoique l'on peut dire, par une triste rencontre, que puisque les évêques ont des courages de filles, les filles doivent avoir des courages d'évêques; mais si ce n'est pas à nous à défendre la vérité, c'est à nous à mourir pour la vérité et à souffrir plutôt toutes choses que de l'abandonner”. (Brief van 22 juni 1661). Ze onderwierp zich echter aan het oordeel van Blaise en de anderen. Na de dood van de moeder-overste — die haar de moeder verving — op 6 Augustus, legde ze op 22 Augustus de gewenste verklaring af; ze stierf 6 weken later (4 October). Na haar dood evenwel nam Blaise haar standpunt over. Hij verzette zich tegen de preciesere verklaring, waarin de door hem verlangde onderscheiding tussen „la question de foi” en „la question de fait” niet was toegelaten. Hij stierf 19 Augustus 1662 zonder de verklaring getekend te hebben.

De fijne in de kantlijn van het ontwerp voor de 19e lettre Provinciale gemaakte onderscheiding is ongetwijfeld een concept voor een antwoord op een door hem verwachte ondervraging: „Mais vous pouvez vous être trompé?” — Je jure que je crois que je puis m'être trompé; mais je ne jure pas que je crois que je me suis trompé.

¹⁷⁾ J. Todhunter (History of the theory of probability, 1865) is niet zeker of M. de M. werkelijk de Méré is. Dit wordt echter door Pascal's opmerking over de M.'s wanbegrip ten aanzien van de onbeperkte deelbaarheid van een lijn en door de Méré's brief aan Pascal over dit zelfde onderwerp afdoende bewezen. Vgl. ook noot 19.

¹⁸⁾ Antoine Gombaud, 1607—1684. Enkele gegevens over de Méré werden mij welwillend door Dr. J. van Rijckevorsel S. J. medegedeeld. Vgl. ook: E. Chamillard, Le chevalier de Méré. Niort 1931 en Chevalier de Méré, Oeuvres Complètes (Ed. par Charles-H. Boudhors, 3 tomes Paris 1930).

¹⁹⁾ De (ongedateerde) brief is opgenomen in: E. Chamillard, l.c. 2de partie (Lettres et fragments choisis), p. 7—15. De brief is vermoedelijk omstreeks 1658 geschreven, in ieder geval na 1657, toen Christiaan Huygens zijn werk „De ratiociniis in ludo aleae” („Van Rekeningh in spelen van Geluck”) over waarschijnlijkheidsrekening, publiceerde. De Méré beroemt zich namelijk op zijn wiskundige „ontdekkingen” (veeleer probleemstelling), waaraan Pascal, Fermat, Robberval en Huygens aandacht besteed hebben (l.c. p. 9).

²⁰⁾ O.a. in „Het verstand en zijn verlegenheden” (Leiden 1903).

²¹⁾ De termen „géométrie”, „géomètre” werden gebruikt voor wat wij „wiskunde” „wiskundige” zouden noemen.

²²⁾ Vgl. Pensée 1 en 4 met de fijne opmerking: „Se moquer de la philosophie, c'est vraiment philosopher" en zijn studies „De l'esprit géométrique" (1658) en „De l'art de persuader" (Het tweede deel van „De l'esprit géométrique"). Ook het befaamde „Argument du Pari", Pensée 233 is ongetwijfeld tot de Méré gericht.

²³⁾ Pensée 144.

²⁴⁾ O.a. door George Boole, *Laws of thought* (1854), E. T. Bell, e.a.

²⁵⁾ Vgl. b.v. de brief (1645) aan koningin Christina van Zweden, die de rekenmachine begeleidde, welke hij haar toezond.

²⁶⁾ B.v. Pensée 230. „Incompréhensible que Dieu soit, et incompréhensible qu'il ne soit pas; que l'âme soit avec le corps, que nous n'ayons pas d'âme; que le monde soit créé, qu'il ne le soit pas etc.".

²⁷⁾ Pascal was een uiterst scherpzinnig logicus; zoals b.v. blijkt uit zijn formulering van de eisen, waaraan een logisch betoog moet voldoen, waarmede hij een der grondleggers van de grondslagen der wiskunde (de zgn. „filosofie der wiskunde") werd: „à définir les termes dont on doit se servir par des définitions claires; à proposer des principes ou axiomes évidents pour prouver la chose dont il s'agit; et à substituer toujours mentalement dans la démonstration les définitions à la place des définis" (Uit het fragment „De l'esprit géométrique" — vgl. noot 22 en Pensées et Opusculum pag. 164—196). Op de laatstgenoemde eis wijst hij ook in zijn eerste lettre Provinciale.

²⁸⁾ Toch had Pascal zeer veel gevoel voor het zinvolle in naar de vorm contradictoire uitspraken („dialektiek"). Vgl. b.v. Pensée 365: „Toute la dignité de l'homme consiste en la pensée, [. . .]. Mais qu'est-ce que cette pensée? Qu'elle est sotte"; Pensée 4: „*Géométrie, finesse* [. . .]. Se moquer de la philosophie, c'est vraiment philosopher".

Pensée 72: „ . . . Qu'est-ce qu'un homme dans l'infini? [. . .]. Car enfin qu'est-ce que l'homme dans la nature? Un néant à l'égard de l'infini, un tout à l'égard du néant, un milieu entre rien et tout".

Vgl. ook Pensée 517: „Consolerez-vous: ce n'est pas de vous que vous devez l'attendre, mais au contraire, en n'attendant rien de vous, que vous devez l'attendre".

Zeer bekend is Pensée 277: „Le coeur a ses raisons, que la raison ne connaît point [. . .]".

²⁹⁾ Bij 4 worpen met één dobbelsteen is de kans op minstens één zes $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,518$; bij 24 worpen met twee dobbelstenen is de kans op minstens één dubbel-zes $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0,491$.

³⁰⁾ Luca Paciolo (1445—circa 1514).

³¹⁾ Zijn geschrift „De ludo aleae", dat overigens niet veel anders dan fouten schijnt te bevatten, werd eerst na Pascal's dood in 1663 gepubliceerd. Cardano stierf in 1576.

³²⁾ Als A nog a , B nog b punten te maken heeft, en de winstkansen bij ieder spel zijn p resp. q ($p + q = 1$), zijn de winstkansen van A resp. B:

$$\sum_{k=0}^{b-1} \binom{a+b-1}{k} p^{a+k} q^{b-1-k} \quad \text{en} \quad \sum_{l=0}^{a-1} \binom{a+b-1}{l} p^{a-1-l} q^{b+l}$$

dus voor $p = q = \frac{1}{2}$, $a = 2$ en $b = 3$:

$$\frac{\binom{4}{0} + \binom{4}{1} + \binom{4}{2}}{2^4} = \frac{11}{16} \quad \text{en} \quad \frac{\binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^4} = \frac{5}{16}.$$

³³⁾ Vgl. D. van Dantzig, *Mathematische en empiristische grondslagen der waarschijnlijkheidsrekening*, Ned. Tdschr. v. Natk. 8 (1941) pag. 70—93 en id.

Caput 1 (Grondslagen der Whr) van het college Whr (1946) en de aldaar geciteerde literatuur.

³⁴⁾ B.v. R. von Mises (1931). Vgl. noot 33.

³⁵⁾ O.a. J. M. Keynes, H. Reichenbach en B. O. Koopman.

³⁶⁾ G. Mannoury, Die Signifischen Grundlagen der Mathematik, Erkenntnis 4 (1934); Franse vertaling: Les fondements psycho-linguistiques de la mathématique (Neuchâtel, 1947); id. Woord en Gedachte, een inleiding tot de signifika inzonderheid met het oog op het onderwijs in de wiskunde, Groningen 1931.

$$^{37)} \cdot N! \cdot \frac{52!}{13! 39!} \approx 6,36 \times 10^{11}$$

$$10.000 \times 60 \times 24 \times 365\frac{1}{4} \times 120 \approx 6,35 \times 10^{11}$$

$$^{38)} \frac{52!}{4! (13!)^4} \approx 2 \times 10^{27}$$

$$(2,4 \times 10^9) \times (60 \times 24 \times 365\frac{1}{4}) \times 3 \times 10^9 \times 600 \approx 2 \times 10^{27}$$

³⁹⁾ Om enige indruk te krijgen van de grootte-orde van een dergelijke waarschijnlijkheid geven we de volgende zeer globale berekening:

Wat de orde van grootte betreft is de afstand van de aarde tot de zon 150 miljoen km, dus $1,5 \times 10^{11}$ m. Een bol met deze straal R heeft dus een oppervlakte van $4\pi R^2$, d.i. ongeveer $2,8 \times 10^{23}$ m². Dit is van de orde van grootte van 10^{20} maal de oppervlakte van een bruggeboog. De door de zon naar de aarde uitgestraalde energie bedraagt ongeveer 2 cal/cm²minuut, dus in het geheel wordt ongeveer $5,6 \times 10^{27}$ cal/minuut uitgestraald. Om een bruggeboog van b.v. 1000 ton ijzer te doen verdampen is, als men voor de warmte, benodigd om 1 g. ijzer van normale temperatuur te doen verdampen 1500 cal aanneemt, $1,5 \times 10^{12}$ cal nodig, d.i. ongeveer $f = 2,7 \times 10^{-16}$ maal de warmte, die de zon in een minuut uitzendt.

Indien men voor de gemiddelde golflengte λ van de door de zon uitgestraalde energie 6000 Å = 6×10^{-8} cm aanneemt, is de frequentie

$$\nu = c/\lambda = 0,5 \times 10^{15} \text{ sec}^{-1},$$

dus de energie per foton

$$h\nu = 3 \times 10^{-12} \text{ erg} = 7 \times 10^{-19} \text{ cal.}$$

De per minuut door de zon uitgestraalde energie omvat dus $N = 8 \times 10^{45}$ fotonen,

die zich over $\frac{1}{p} = 10^{20}$ oppervlakte-eenheden kunnen verdelen, zodat er gemiddeld

8×10^{25} per oppervlakte-eenheid komen. De waarschijnlijkheid, dat van N fotonen, waarvan elk een waarschijnlijkheid p heeft, in een oppervlakte-eenheid te komen, daarin f komen is

$$\frac{N!}{(N-f)! f!} p^f (1-p)^{N-f}$$

of, daar $p = 10^{-20} \ll f = 2,7 \times 10^{-16} \ll 1$ en $N = 8 \times 10^{45} \gg f$, $N = 2 \cdot 10^{30} \gg 1$

is, ongeveer $\left(\frac{pe}{f}\right)^f \approx 10^{-8 \cdot 10^{30}}$. Dit is dus de gezochte (zeer ruwe) schatting van

de waarschijnlijkheid van het bedoelde verschijnsel. Bij deze berekening is aangenomen, dat de impulsies van de fotonen onafhankelijk van elkaar zijn. Daar hierdoor de berekende waarschijnlijkheid slechts te groot kan uitvallen, is dit geen bezwaar. De gehele berekening heeft trouwens geen enkele pretentie van onaanvechtbaarheid, maar uitsluitend illustratieve bedoeling.

⁴⁰⁾ Een ander voorbeeld wordt gegeven door het probleem van de ruïnering der spelers, het eerst door Christiaan Huygens in 1657 gesteld. Indien twee spelers

A en B een partij spelen, bestaande uit een aantal opeenvolgende „worpen”, waarbij de verliezer telkens één geldeenheid aan de winnaar betaalt, welke is dan de kans dat b.v. A na verloop van tijd geruïneerd zal worden, indien de bedragen, die A en B bij het begin der partij bezitten gegeven zijn? Dat dit probleem in verband staat met de berekening der door een verzekeringsmaatschappij benodigde risicoreserve, zal niemand verbazen. Immers zulk een maatschappij is een speler, die tegen de gezamenlijke verzekerden speelt, en de risicoreserve dient om te voorkomen dat de maatschappij geruïneerd wordt. Merkwaardiger is, dat de oplossing van het probleem ook gebruikt kan worden bij de zgn. „sequential analysis”, een methode voor qualiteitscontrole, in de oorlogsjaren door G. A. Barnard en A. Wald ontworpen. Het hierbij gebruikte geval van de ruïnering der spelers is minder eenvoudig dan het oorspronkelijke, daar het overeenkomt met een spel, waarbij A telkens als hij verliest en *ander* bedrag aan B moet betalen dan deze telkens als hij verliest aan A. Ook andere klassieke, aan hazardspelen ontleende problemen (b.v. het probleem der iteraties („run of events”) en het „rencontre”-spel vinden tegenwoordig in de theorie der qualiteitscontrole een onverwachte praktische toepassing.

⁴¹⁾ Prof. Dr. M. G. Rutten in de „Groene” van 2 October 1948, pag. 7.

⁴²⁾ C. Campagne, B. H. de Jongh, J. N. Smit, Bijdrage tot de wiskundige theorie van de bedrijfsreserve en het eigenbehoud in de brandverzekering. Den Haag 1947.

⁴³⁾ T.w. de ongelijkheid van B. H. Camp en B. Meidell.

⁴⁴⁾ J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (1932) N.Y. 1943.

⁴⁵⁾ H. Reichenbach, Philosophic foundations of quantummechanics, 2e druk Berkeley 1940.

⁴⁶⁾ D. van Dantzig, Some possibilities of the future development of the notions of space and time, *Erkenntnis* 7 (1938). Id. Vragen en schijnvragen over ruimte en tijd. Een toepassing van de wiskundige denkvorm. Oratie Delft 1938 (Uitg. J. B. Wolters 1938). Vgl. ook een aantal publicaties in de *Proc. der Kon. Ned. Akad. v. Wetensch.* 37 (1934), 39 (1935) 42 (1939) 43 (1940) e.a.

⁴⁷⁾ Vgl. ook Ph. Frank, Das Ende der mechanistischen Physik, *Sammlung Einheitswissenschaft* 5 (van Stockum 1935).

⁴⁸⁾ Karl Pearson 1857—1936.

⁴⁹⁾ Richard W. Deming.

⁵⁰⁾ *Math. Ann.* 100, 295—320, 1928.

⁵¹⁾ Princeton 1947.

⁵²⁾ *Pensée* 458. „Docteurs” waren in die tijd de theologen.

⁵³⁾ Vgl. b.v. mijn college *Significa* (gestencild) pag. 22 en de op pag. 31 vermelde literatuur.

⁵⁴⁾ Ten aanzien van de vraag, of een elementaire psychische gebeurtenis, door herhaling waarvan volgens L. E. J. Brouwer elk wiskundig systeem tot stand komt, in een bepaald geval wel of niet is geschied, wordt in de intuïtionistische wiskunde tot dusverre noch de mogelijkheid van twijfel, noch die van gradualiteit in aanmerking genomen.

⁵⁵⁾ B.v. ten aanzien van de vraag, of twee logische symbolen al dan niet in vorm overeenstemmen.

⁵⁶⁾ Ideologisch slechts weinig minder, maar door het afwijzen van een hiërarchisch systeem politiek-organisatorisch minder typerend in het Calvinisme.

⁵⁷⁾ Vgl. ook: D. van Dantzig. Over de mogelijkheid ener wetenschappelijke houding ten aanzien van politieke en ideologische vragen. *Maatschappij en Wetenschap* 1 (1948).

SPANNINGEN IN DE WISKUNDE ¹⁾

door

Dr A. HEYTING.

Drie van onze faculteiten dragen een dubbele naam; ieder van de twee oudste combinaties drukt een tegenstelling uit. Moeten wij in het midden laten, hoe de verhouding tussen de politieke en de sociale wetenschappen zich zal ontwikkelen, wij hebben gegevens genoeg om te constateren, dat de wijsbegeerte zich evenmin thuis voelt in het gezelschap van de wetenschappen, die men onder „Letteren” samenvat, als de wiskunde zich een voelt met de natuurwetenschap. De taalkundige, litteraire, historische en natuurwetenschappen hebben alle betrekking op een in de ervaringswereld gelegen object, dat zij trachten in algemeen verband te overzien. Hoe ver zij zich in hun theoretische beschouwingen ook mogen verwijderen van het concrete object, zij wenden er zich nooit van af; het blijft hun richtsnoer zowel als toetssteen. Men kan zelfs met recht beweren, dat de physica, hoe abstracter zij wordt, zich des te meer aan het concreet gegeven onderwerpt. Een physicus, die zich verdiept in de meest abstracte gevolgtrekkingen uit de quantenmechanica, zodat hij zelfs tot de noodzaak van een herziening van de gebruikelijke logica besluit, onderwerpt juist daardoor ook de logica aan de heerschappij van het experiment ²⁾. Die logica is voor hem de juiste, die als onderdeel van een natuurkundige theorie mede bijdraagt tot een adequate weergave van de fysische realiteit. De natuurkunde gaat uit van het concrete verschijnsel, haar theoretische beschouwingen zijn op het concrete object gericht en het concrete experiment beslist over de juistheid van de theorie.

Heel anders is het met de wiskunde. Toen wiskundigen zich met de logica gingen bemoeien, begonnen zij met de oude, vertrouwde logica in een wiskundig gewaad te steken. Zij bewezen haar daarmee een dienst, want dit kleed liet haar zoveel meer vrijheid dan het

¹⁾ Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam op 16 Mei 1949.

²⁾ J. L. Destouches. *Principes fondamentaux de physique theorique* I. Paris 1942.

oude dogmatische harnas, dat zij ook voor de toepassingen veel meer kon presteren dan vroeger. Maar dit laat de wiskundigen betrekkelijk koud. Zij interesseren zich meer voor allerlei variaties, die men aan de klassieke logica kan aanbrengen, en wenden zich daarmee van het concreet gegevene, waarop de logica eventueel kan worden toegepast, af. De wiskunde gaat wel steeds in zekere zin van het concreet gegevene uit, maar zij laat er zich niet door leiden; zij wordt gericht door andere krachten en de criteria van haar juistheid liggen niet in een verificatie door het experiment.

Over de tegenstelling tussen de wijsbegeerte enerzijds en de taal- en geschiedeniswetenschap anderzijds moet ik korter zijn wegens gebrek aan kennis en ervaring op dit gebied. Toch meen ik wel enige analogie te kunnen constateren met de tegenstelling tussen wiskunde en natuurkunde. Evenzeer als de laatste zijn taalkunde en geschiedenis op het concrete gericht, misschien zelfs sterker, daar zij het emotionele element, waarvan de natuurwetenschap zoveel mogelijk abstraheert, niet loslaten. Daartegenover is de wijsbegeerte althans in haar traditionele vorm van het concrete object af op een zo algemeen en abstract mogelijke theorie gericht.

Men zou misschien aan deze overeenkomst tussen wijsbegeerte en wiskunde een argument kunnen ontleenen voor de stichting van een achtste faculteit, die der abstracte wetenschappen. Voor de wijsbegeerte is de instelling van een afzonderlijke faculteit wel eens bepleit ¹⁾; voor de wiskunde zou de afscheiding van de natuurkunde een ramp betekenen, omdat zij daardoor de weg van de zuivere abstractie op gedreven zou worden. Evenmin als een technisch vak in engere zin, dat zich met empirische regels tevreden stelt zonder naar samenvatting daarvan in een abstract systeem te streven, hoort een speculatie, die zich van elke band met de ervaring losmaakt, thuis in de Universiteit. Maar ook de wiskunde zelf zou zich door het verbreken van die band aan gevaren blootstellen. Dit heeft men reeds ervaren aan het voorbeeld van de duizelingwekkende toren van transfiniete getallen, die Cantor uit het niets meende op te bouwen, maar die wij tegenwoordig moeilijk als veel meer dan een hersenschim kunnen beschouwen. Naast het gevaar voor het vervallen in holle, onvruchtbare speculatie dreigt dat van een opdrogen der inspiratie. Vele problemen, die tot het ontstaan van belangrijke wiskundige theorieën hebben geleid, zijn uit de toepassingen voortgekomen; dit geldt zowel voor vragen van meer beperkte aard als voor zo fundamentele ontdekkingen als die van de differentiaalrekening. Een indrukwekkend beeld van de wissel-

¹⁾ Zie bijv. H. J. Pos. *Filosofie der wetenschappen*, Arnhem 1940. Hoofdstuk 5.

werking tussen natuurkunde en wiskunde op het gebied van de differentiaalmeetkunde gaf Schouten onlangs in zijn oratie. Hij ging zelfs zover, te onderstellen, dat de wiskundigen bij de keuze van hun onderwerpen van onderzoek onbewust beïnvloed worden door hetgeen de physica in haar volgende ontwikkelingsfase nodig zal hebben. Hoe dit zij, de spanning tussen wiskunde en natuurwetenschap, veroorzaakt door de verschillend gerichte aandacht, wordt door geen wiskundige als hinderlijk gevoeld. Trouwens, ook voor de toepassingen is de zelfstandige ontwikkeling van de wiskunde nuttig gebleken. De opvoering van de mate van strengheid is niet van de toepassingen uitgegaan, maar van de wiskunde zelf; zij is een van de meest typische uitingen van het streven, zich van het concrete af te keren. Toch zou een groot deel van de moderne natuurwetenschap, dat op de nieuwere delen der analyse berust, op het strengheidspel van Euler onbestaanbaar geweest zijn. Wiskunde en natuurkunde zijn elkander in deze eeuw steeds beter gaan waarderen; zij staan niet meer tegenover, doch naast elkaar. Zij beschouwen elkander als gelijkwaardige partners, erkennen elkanders recht op zelfstandige ontwikkeling naar eigen aard en zijn juist daardoor in staat, elkander op de meest doeltreffende wijze te ondersteunen. Moge hun Unie, verre van verbroken te worden, op vele andere gebieden des levens navolging vinden.

Wij keren tot de zuivere wiskunde terug. Al is van strijd tussen haar en de ervaringswetenschappen geen sprake meer, daarom is het in de wiskunde zelf nog niet overal pais en vree. Voor de arge-loze buitenstaander, zo die nog bestaat, is de wiskunde een rijk, waarin ieder met vreugde aan de wetten gehoorzaamt, overtuigd van hun eeuwige rechtvaardigheid. Hij kan nauwelijks geloven, dat in de wiskunde en onder wiskundigen spanningen zijn, zelfs strijd bestaat, die juist zijn oorzaak vindt in het bijzonder karakter, dat de wiskunde van de natuurkunde onderscheidt. Hoewel het betrekkelijk eenvoudig was, het onderscheid tussen natuurkunde en wiskunde tot een verschil in aandachtsrichting terug te brengen, blijkt het zeer moeilijk, dat nauwkeuriger vast te leggen en te omschrijven. Het eerst zijn de Grieken zich van de eigenaardigheden van de wiskundige denkwijze bewust geworden. Natuurlijk is de zuivere wiskunde niet ineens uit de lucht gevallen. Als ieder levensverschijnsel dankte zij haar ontstaan aan de ongedacht sterke en veelzijdige ontwikkeling van iets, dat als kiem reeds eerder aanwezig was. Maar wij mogen toch een mijlpaal plaatsen bij het punt, waar men zich de vreugde aan het abstracte als drijfveer tot geestelijke

activiteit bewust werd. Dit is ongetwijfeld bij de Grieken het geval geweest. Zoals bekend is, symboliseert Plato de verschillende gerichtheid van de geest in wijsbegeerte en wiskunde enerzijds, natuurkunde anderzijds, in verschillende objecten, waarop die geesteswerkzaamheden gericht zouden zijn. Staat U mij toe, enkele passages uit de „Staat” te vertalen.

„Wij zijn het er blijkbaar over eens, dat het menen iets anders is dan het weten. — Het is iets anders. — Elk van beide is dus van nature op iets anders betrokken en heeft een andere functie. — Dat moet wel. — Heeft het weten dan betrekking op het zijnde en stelt het ons in staat het zijnde te kennen zoals het is? — Ja. — En, zeggen wij, het menen voert tot meningen? — Ja. — En wel over hetzelfde dat het weten doet kennen? Zal het kenbare en datgene waarover men een mening heeft hetzelfde zijn? Of kan dat niet? — Dat kan niet, zei hij, volgens hetgeen wij besproken hebben, want als een ander vermogen van nature op iets anders betrokken is en beide, het menen en het weten, vermogens zijn, van elkander verschillend, zoals wij gezegd hebben, dan volgt daaruit, dat onmogelijk het kenbare en datgene waarover een mening mogelijk is hetzelfde kunnen zijn. — Dus als het zijnde kenbaar is, moet datgene waarover men een mening heeft iets anders zijn dan het zijnde? — Ja.”¹⁾

„Dan zullen zij, die ook maar een beetje meetkunde kennen, ons hierin niet tegenspreken, dat die wetenschap geheel tegengesteld is aan hetgeen door haar beoefenaren gezegd wordt. — Hoezo? zei hij. — Zij spreken wel heel belachelijk, en toch kunnen zij niet anders, want alsof zij het werkelijk doen en alles zeggen met het oog op een handeling, spreken zij van „in een vierkant veranderen,” „aanpassen” en „samenvoegen”²⁾, en zo drukken zij zich over alles uit; toch wordt die gehele wetenschap, ter wille van de kennis beoefend. — Dat is volkomen juist, zei hij. — Dus moeten wij het over nog iets eens worden. — Waarover? — Dat die kennis betrekking heeft op het eeuwig zijnde en niet op hetgeen ontstaat en weer vergaat. — Dat is gemakkelijk toe te geven, zei hij, want de meetkundige kennis gaat over het eeuwig zijnde. — Dan, mijn waarde, kan zij de ziel in de richting van de waarheid leiden en tot wijsgerig denken voeren, doordat zij naar boven richt hetgeen wij ten onrechte naar beneden gericht houden.

¹⁾ Plato, Staat 478 A—B.

²⁾ „τετραγωνίζειν τε καὶ παρατείνειν καὶ προσθίβειν” vertaling naar E. J. Dijksterhuis. De Elementen van Euclides I, 96.

P. WIJDENES
NIEUWE SCHOOLMEETKUNDE

- I. 132 blz., 162 fig., f 2.50; gec. f 3.—
II. 132 blz., 153 fig., f 2.50; gec. f 3.—

TOELICHTING
bij de **NIEUWE SCHOOLMEETKUNDE**
en **ANTWOORDEN** op de vraagstukken

96 blz., 115 fig.

Uitsluitend voor leraren.
Niet in de handel.

Maart 1949 verscheen de 5de druk van de

OEFENBLADEN
voor de
BESCHRIJVENDE MEETKUNDE
door

P. WIJDENES en Dr H. STREEFKERK

bestaande uit

Schrift I 48 blz. met 160 werkstukken	f 1,25
Schrift II 64 blz. met 180 werkstukken	f 1,60
Handleiding 63 blz. met 124 fig.	f 1,25

6e druk van Schrift I gaat in Mei 1950 ter perse

Leraren, die de Oefenbladen niet kennen, wordt verzocht
een pres.ex. aan te vragen aan de uitgever of aan een van
de schrijvers.

Verschenen:

STEREOMETRIE voor M. en V.H.O.

door Dr P. Molenbroek en P. Wijdenes

9e druk f 2,75, geb. f 3,40

Richtsnoer: *bepierking tot redelijke eisen*: de gehele leerstof
beslaat 124 blz. met 142 zorgvuldig getekende figuren.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

M. EILANDER

VLAKKE MEETKUNDE VOOR HET V.H. EN M.O.

I Theorie	203 fig., 128 blz.	f 3,50
IIa Vraagstukken	58 fig., 64 blz.	f 1,75
IIb Vraagstukken	153 fig., 112 blz.	f 2,90

Zie de bespreking in afl. III van deze jaargang door G. A. Janssen, rector van het Chr. Lyceum te Delft.

Leraren, die het werk niet kennen, wordt verzocht een pres.ex. aan te vragen.

De grote studieboeken en de antwoorden (uitwerkingen) daarbij zijn thans alle weer verschenen nl.

MOLENBROEK Vlakke Meetkunde en Stereometrie

Lagere Algebra I, II

Middel Algebra I, II

Gonio- en Trigonometrie

Getallenleer

Verschenen

PROF. Dr B. L. VAN DER WAERDEN

Ontwakende Wetenschap

Egyptische, Babylonische en Griekse Wiskunde

120 fig., 40 platen, 332 blz., geb. f 13,50

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-DJAKARTA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel