

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - Prof. Dr. E. W. BETH, AMSTERDAM

Dr. R. BALLIEU, LEUVEN - Dr. G. BOSTEELS, HASSELT

Prof. Dr. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - Dr. L. N. H. BUNT, UTRECHT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Prof. Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

Dr. H. A. GRIBNAU, ROOSENDAAL - Dr. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD

Dr. R. MINNE, LUIK - Prof. Dr. J. POPKEN, UTRECHT

Dr. O. VAN DE PUTTE, RONSE - Prof. Dr. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM

Dr. H. STEFFENS, MECHELEN - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

25e JAARGANG 1949/50

Nr 2

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8.00*. Zij die nevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8.00*) zijn ingetekend, betalen f 6.75*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1948 t/m 31 Augustus 1949 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van f 4,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Ook voor 1 September 1949—1 September 1950 is de contributie vastgesteld op f 4,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Van Lennepaan 16, Tel. K 2950; 5558.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstr. 88; Tel. K 2900; 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Dr. J. KOKSMA, Functies en grafieken; slot	65
P. WIJDENES, Tennissen met baggerlaarzen aan	70
Huldiging van Prof. Dr. F. Schuh.	95
Ingekomen boeken.	101
Sprokkels XCIV en XCV	104
Dr. H. BUZEMAN, Enige „Engelse” eindexamenopgaven voor wiskunde, mechanica en natuurkunde.	107
Verslag van de Vergadering van de groep L.I.W.E.N.A.G.E.L.	124

Oordeel over Eindexamenvraagstukken van 1949.

In verband met het op de laatste Algemene Vergadering aangenomen voorstel zal het Bestuur van Wimecos het op prijs stellen een goed gefundeerd oordeel over de eindexamenvraagstukken van het jaar 1949 te ontvangen. Indien de opmerkingen der leden hier aanleiding toe geven, kunnen dan aan de autoriteiten bepaalde wensen ter kennis gebracht worden.

De Secretaris: J. J. TEKELENBURG.

zien. Dat wil zeggen, dat de stand van zaken evenzeer nadelig werkt op het begrip voor die gedeelten, zij het in mindere mate, daar de meetkunde immers het leeuwendeel der stof voor zich opeist. Ik hoef dat overigens wel niet meer nader uit te werken, men lette op het vasthouden aan de functienaam en op het steelse binnensmokkelen der vergelijking. Had dit fundamentele begrip niet met klaroengeschal behoren te worden voorgesteld? Een vraagstukje, waar functie staat voor vergelijking, of grafiek voor kromme is zowel als oefening in de meetkunde als in de functieleer mislukt; het is geen vlees en 't is geen vis, het is een onding.

Rest ons de vraag op welke wijze men beide, kool en geit, zou kunnen sparen. Dan zal men toch wel meetkunde en algebra scherp moeten onderscheiden, waarom ze dan niet liever maar geheel gescheiden? Het Hitleriaanse motto van de „Konzentration auf eine Aufgabe" is op zich zelf zo gek nog niet, het behoort grondregel te zijn voor elke didactiek. We laten dus de beide onderwerpen na elkander aan de orde komen. Nu is het zeker wenselijk, daarbij het ene voo zover mogelijk tot het andere terug te brengen, de grote verwantschap tussen beide heb ik niet ontkend. Waar in de functieleer de grafiek hulpmiddel is, dat de functie moet verduidelijken, spreekt het vanzelf, dat dat het beste lukt, wanneer de leerling althais met krommen vertrouwd is. Daarom moet de analytische meetkunde wel voorop, ze sluit trouwens het natuurlijkst bij de vroegere leerstof aan en bovendien heb ik bij de bespreking van het tweede leerboek al laten zien, hoe gewrongen de behandeling bij omgekeerde volgorde wordt.

Ik heb niet nagegaan of er dan nog meerdere aantrekkelijke mogelijkheden zijn; iemand, die het, eenmaal attent geworden, tot dusver met me eens kan zijn, zal ongetwijfeld verder het liefst zijn eigen weg door deze stof zoeken. Persoonlijk had ik, zoals gezegd, het geluk mijn eerste onderwijs in dezen aan de hand van een zeer slecht boekje te moeten geven aan een zeer goede klas. Dat gaf aanleiding tot peinzen en dicteren en zo ontstond in de loop van de cursus een dictaatje, dat ik sinds gebruik en nauwelijks ooit aanleiding vond te wijzigen. Ik zal het hier kort resumeren.

Begonnen wordt met het coördinatenstelsel, waarover de gebruikelijke vraagstukjes. Met een voorbeeld wordt duidelijk gemaakt, dat tussen de coördinaten van een punt een betrekking kan bestaan, die men gemeenlijk „vergelijking" noemt. De coördinaten van een punt kunnen al of niet aan die vergelijking „voldoen".

Volgt de definitie van de kromme met die vergelijking. Verschillende krommen worden getekend.

Daarna komt de *algemene* lineaire vergelijking met de bekende stellingen en vraagstukken, alle meetkundig natuurlijk.

Vervolgens wordt de algemene vergelijking van de tweede graad (alleen maar even) voorgesteld en de quadratische kromme voor enkele eenvoudige bijzondere keuzen van de coëfficiënten getekend. Dan wordt de *uitvoerige* behandeling aangekondigd van de vergelijking die ontstaat bij een speciale keuze der coëfficiënten, natuurlijk die, waarbij de vergelijking van de parabool te voorschijn komt.

Eerst krijgen we dan de quaesties van snijden en raken, het eerste behoeft nauwelijks te worden toegelicht, (evenmin als het opsporen van de vergelijking der parabool door drie gegeven punten), het laatste lukt ook gauw, wanneer de discriminant er goed in zit. Dan nog de top- en asquaesties met vraagstukken en de meetkunde is behandeld.

Er kan nu aan de functies worden begonnen (nooit ofte nimmer met „ $y =$ ” er voor!) 't Begrip wordt met voorbeelden ingeleid, de grafiek er bij te pas gebracht op reeds geschetste wijze en enige grafieken worden getekend. De leerlingen zien natuurlijk direct de kromme, maar ook *het onderscheid*. Beginnen ze des ondanks te roepen om een y -as, waarbij men licht een handje helpen kan, dan laat men zich gemakkelijk verbidden en komt zo spoedig tot de *stelling*: „de grafiek van de functie $f(x)$ is de kromme met vergelijking $y = f(x)$.”

Mocht iemand hier onbehaaglijk herinnerd worden aan mijn critiek op de vrijwel gelijkkluidende *definitie* in het laatste voorbeeld, dan hoef ik slechts op het onderscheid tussen definitie en stelling te wijzen. De stelling voert slechts het nieuwe begrip op een vertrouwd begrip terug, *maar tast het wezen der grafiek niet aan*. Natuurlijk zal men goed doen nog nu en dan grafieken te blijven tekenen zonder een y -as te gebruiken.

Nu is men gauw klaar. Sommen over lineaire functies zijn er nauwelijks, en die over de quadratische kan men onmiddellijk aanpakken, *nadat er eerst een uurtje geoefend is in het vertalen uit de meetkundige in de functieterminologie*; zo wordt bijvoorbeeld de samenvatting van de eigenschappen der parabool, voor zover het zin heeft, overgezet in een dergelijke samenvatting voor de quadratische functie.

Het dictaat wordt besloten met alle gebruikelijke ongelijkheden. Deze werkwijze is me steeds goed bevallen, maar het lijkt me weinig zin te hebben nu lang bij de resultaten stil te staan. Ik heb niet twee

„methoden” vergeleken; voor mijn besef is de geschetste in hoofdlijn de enig mogelijke, zodat een oordeel op grond der resultaten enkel de waarde van de leerstof zou betreffen, en die is hier niet in geding.

Men zou kunnen twisten over de vraag of niet een behandeling in afwisselende étappes te verkiezen ware. Ik heb die bewust verworpen en in dit verband wil ik zeggen, dat het grote aantal onderwerpen in ons algebraonderwijs me toch al een doorn in het oog is, te stekeliger, waar de voorgeschreven voortzetting van dit, herhaling van dat en uitbreiding van weer wat anders toch al dwingt de behandeling van het ene onderwerp telkens voor dat van een geheel ander te onderbreken. Die ergernis nog zelf te vermeerderen door iets wat ik bij elkaar kan houden in stukjes te gaan knippen, komt niet in me op.

Wat anders is, dat de geschetste gang niet helemaal klopt met het leerplan, wat de verdeling der stof over II en III betreft. Door de chaotische oorlogsjaren en de achterstand daarna is het dictaat dan ook nooit in II gebruikt (of misschien aanvankelijk, maar dat herinner ik me niet), wél in III, maar ook in IV en misschien wel in V. Persoonlijk zou ik het het liefst in III houden, de stof is voor II rijkelijk moeilijk, men zou daar immers best de oplossing van de vierkantsvergelijking in de plaats kunnen nemen. Maar anders, ja, dan zal het stuk meetkunde tot en met de lineaire vergelijking wel naar het eind van II moeten, dan kan men in III meteen doorgaan na iets van de vierkantsvergelijking. „Mag ook niet”, hoor ik zeggen, „het leerplan schrijft voor II de lineaire *functie* $y = ax + b$ voor!”

Ja maar, ho eens even! dan moet me van het hart, dat als van officiële zijde de huidige toestand zoveel jaren stilzwijgend geduld is, daarin een erkenning de facto van het voorgestelde besloten ligt. Er zou immers niets veranderen dan het opruimen van een schijn. Het zou me trouwens niet verwonderen, als de opstellers van het leerplan indertijd juist het nu onderwezene bedoeld hebben. Deze stof werd al langer op de H.B.S. gegeven en ik zie niet in, waarom men hun meer doorzicht zou toeschrijven dan onze beste leerboekschrijvers. Maar in dat geval mag men stellig voor het woord „functie” het woord „vergelijking” substitueren.

Over de hogere klassen behoeft ik het hier niet te hebben, het heeft geen zin daar nog onderscheid te maken tussen meetkunde en functieleer, tenminste als men zich bij de leerplanonderwerpen houdt.

Het zou kunnen zijn dat in één geval te veel nadruk op het

meetkundige schade zou kunnen doen, namelijk waar als *geheel nieuw* onderwerp de differentiaalrekening wordt aangesneden. Ik heb hierover geen leerboeken nagegaan, ik mag er eigenlijk ook niet over meepraten, mijn ervaring op dit punt is gering en ver van recent. Maar ik heb het gevoel dat ik als leerling ener H.B.S. en misschien ook in mijn eerste studiejaar niet duidelijk de betekenis van de afgeleide heb gezien voor de mate van toenemen der functie bij toenemend argument, en dus de portée van de zaak miste, juist doordat het vraagstuk als *raaklijnprobleem* werd gepresenteerd.

Bij de veel beperkter doelstelling van de algemene snelheidsdefinitie in het begin der mechanica, waaraan ik meestal een les of vier besteed (en waarmee ik wel een behoorlijke ervaring heb) begin ik dan ook stellig niet met een grafiek, het functioneel verband van weg en tijd is immers duidelijk genoeg! Eerst ontdekt de klas dat de voor de eenparige beweging gegeven snelheidsdefinitie niet deugt voor de veranderlijke en put zich uit in voorstellen, die alle worden weerlegd. Dan wordt duidelijk gemaakt dat het inmiddels verkregen begrip van de gemiddelde snelheid toch wel iets zegt van wat ons als *de* snelheid voorzweeft. Alleen de momenten na het ogenblik spreken nog mee, dus zal ik dichter bij mijn ideaal komen als ik het tijdsverloop kleiner neem. Tot zover gaat alles goed, gebruikt worden de algemene symbolen Δs en Δt , dat gaat beter, dan wanneer ik een bepaalde functie neem, dit specialiseren schijnt een extra-moeilijkheid te geven, ze zien dan ineens „de weg” niet meer. Niet te verwonderen is nu, dat steeds (mijn ervaring strekt zich alleen uit over „oorlogsslachtoffers”) bij de limietovergang het begrijpen faalt. Daar zijn de symbolen te algemeen en daar komt eerst (en daar alleen) de grafiek te pas. Δt wordt aangewezen met Δs , de eerste nadert tot nul, de snijlijn nadert tot de raaklijn en men ziet *dat het beschouwde quotient ook bij het overschrijden van de grens zijn zin behoudt*. Daarmee is de limiet geslikt en kunnen er speciale functies genomen worden om het proces door te rekenen. Het is me nog steeds gelukt op deze wijze begrip te wekken voor de verkregen snelheidsdefinitie. Maar van richtingscoëfficiënten spreek ik niet.

Kom ik te zijner tijd weer eens met wiskunde voor de vierde, dan zal ik stellig trachten deze gang passend te modificeren. De grafiek te weren heeft geen zin, de leerlingen zijn er bij wiskundige functies mee vertrouwd. Al dadelijk bij de eerste kennismaking hebben ze direct gezien dat er verband bestaat tussen het toenemen van de functie en het meer of minder steil zijn der grafiek. Ter vergelijking komt men er als vanzelf toe gelijke stukken op de x -as

af te zetten, vandaar naar de gemiddelde toename is maar een stap en door limietovergang volgt natuurlijkerwijs de afgeleide zó, dat het volle licht valt op haar fundamentele betekenis als „maat van de toename” der functie voor een bepaalde waarde van het argument. Dat meteen de raaklijn gevonden is kan nu wel vermeld worden als waardevol bijproduct.

- Het is misschien een schaduwzijde van de wiskundige „vorming”, dat ze er toe kan leiden een probleemstelling te aanvaarden zonder naar diepe zin of geopende perspectieven te vragen, zodra het met het „als . . . , dan . . . ” formeel in orde is. En onze leerlingen zijn werkelijk niet verwend met vragen, wier diepe zin onmiddellijk openbaar is, of die doen duizelen door de lokkende verschietsen, die ze doen openbarsten. Hoe moeten zij weten, dat het niet gaat om de richtingsbepaling van de raaklijn als einddoel? Dat is een zinvol en voor de hand liggend probleem en het wordt opgelost, ze kunnen er licht in blijven hangen. Aan gebreken in hun differentiëertechniek zal men het niet bemerken. Het komt op kleinigheden aan.

Haren (Gron.) Febr. 1949.

TENNISSEN MET BAGGERLAARZEN AAN.

Eind Juni 1949 zond ik aan een twintigtal leraren in verschillende plaatsen van ons land de volgende brief. Tot heden Dec. 1949 kreeg ik van 16 collega's de volledige oplossingen; een paar verontschuldigde zich.

„Hierbij 12 vraagstukjes over de gewone leerstof voor de H.B.S. en het Gymnasium. U zoudt me een groot genoegen doen, deze allemaal voor me te maken, geheel; dus niet enkel met een aanwijzing, hoe ze gaan. Het is mij te doen om de tekst van de oplossing, *geheel, volledig*. De inzendingen geven mij stof voor een artikel in Euclides. Uiteraard weet U niet, ik ook niet; hoe collega's de oplossingen wensen, omdat we nooit iets van elkaar onder de ogen krijgen.

Deze vraag wordt gedaan aan een 20-tal leraren; de namen van de inzenders zullen alleen opgenomen worden, als ze dit wensen.

Wilt U a.u.b. aan mijn verzoek voldoen? Zo U geen tijd of lust hebt, dan gaarne terug.”

1. ABCD is een vierhoek; AC deelt $\angle A$ middendoor; het snijpunt van de diagonalen is S; door een punt E van AC tussen BD en A wordt een rechte getrokken evenwijdig met DB. Op deze lijn liggen vijf punten: K op het verlengde van CD, F op AD, E op AC, G op AB en H op het verlengde van CB. Bewijs de evenredigheid: $EH : EK = AG : AF$.
2. De deellijnen van de hoeken A en C van een vierhoek ABCD snijden elkaar op BD; bewijs, dat de deellijnen van de hoeken B en D elkaar op AC snijden.
3. ABCD is een trapezium; $AB = a$ is evenwijdig met $DC = b$; $a < b$. $EH \parallel AB$; E ligt op AD, H op BC; waar moet men EH trekken, opdat EH door de diagonalen in drie gelijke stukken wordt verdeeld?
4. Als men op de zijde AB van $\triangle ABC$ het punt D neemt, op de zijde AC het punt E zodanig, dat $AD : DB = AE : EC$, dan is $DE \parallel BC$. Bewijs.
5. Als drie lijnen op twee evenwijdige rechte opv. stukken AB, BC en A'B', B'C' insnijden ($A'B' \neq AB$), die in deze volgorde een evenredigheid vormen, dan gaan de drie lijnen door één punt. Bewijs dat.

6. Teken een lijnstuk AB van ongeveer 6 cm; PAB is een driehoek; neem de hoeken P, A en B opv. 100° , 25° en 55° . Aan dezelfde kant van AB worden de driehoeken ABQ en BRA gemaakt; van beide is de volgorde van de hoeken ook 100° , 25° en 55° . $AB = a$, $BP = b$ en $PA = c$. Bereken AQ, BQ, BR en RA. Bewijs verder: $\triangle APQ \sim \triangle BRQ$; vul in: $\triangle AQR \sim \triangle \dots$ en $\triangle ARP \sim \triangle \dots$.
7. ABCD is een vierhoek; de zijden zijn a , b , c en d . E op AB verdeelt AB in stukken, die zich verhouden als d en b ; F op DE doet hetzelfde met DC; bewijs, dat EF gelijke hoeken maakt met AD en BC.
8. Door een punt G van de zijde BC van $\triangle ABC$ trekt men $GH \parallel BA$ en $GK \parallel CA$. Bewijs, dat $GH \cdot AC + GK \cdot AB$ constant is.
9. AB is een koorde van een cirkel, C het midden van een der bogen AB, P een punt van dezelfde boog. Verleng AP met $PD = PB$; bewijs, dat $CB = CD$ is en $PA + PB < CA + CB$.
10. De grondlijn van een trapezium is AB, de bovenlijn is CD; E is het snijpunt van de verlengde benen, F dat der diagonalen. EF snijdt CD in G en AB in H. Bewijs, dat $FG \times EH = EG \times FH$ is.
11. Gegeven is een driehoek ABC; X is een punt van AC; trek $XY \parallel AB$ en $XZ \parallel BC$; waar moet men X plaatsen, opdat de oppervlakte van het parallelogram XYBZ zo groot mogelijk wordt?
12. AB is een gegeven lijnstuk; X verdeelt het in de uiterste en middelste reden; $AX > XB$; bewijs:
 - a. De som van de vierkanten op AB en XB is driemaal het vierkant op AX.
 - b. Verlengt men AB met $BY = BX$, dan is het vierkant op AY vijfmaal het vierkant op AX.
 - c. De rechthoek $AX \times XB$ (dat is: met AX en XB als zijden) is gelijk aan het verschil van de vierkanten op AX en XB.
 - d. Ook Z verdeelt AB in uiterste en middelste reden; maar $AZ < ZB$; bewijs, dat de oppervlakten van de rechthoeken $AB \times XZ$, $AX \times XB$ en $AZ \times ZB$ gelijk zijn.

Nu zou ik de lezers wel willen vragen, voor ze verder lezen, deze sommetjes ook even te maken, opdat ze weten, wat gevraagd werd.

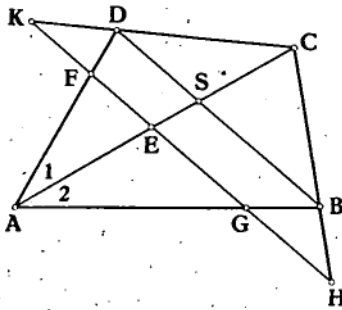


Fig. 1.

Geg.: $\angle A_1 = \angle A_2$

$KH \parallel DB$

Te bew.: $EH : EK = AG : AF$.

Bewijs. $\left. \begin{array}{l} EH : SB = EC : SC \\ EK : SD = EC : SC \end{array} \right\} \rightarrow EH : EK = SB : SD$

$\left. \begin{array}{l} \angle A_1 = \angle A_2 \rightarrow SB : SD = AB : AD \\ GF \parallel BD \rightarrow AG : AF = AB : AD \end{array} \right\} \rightarrow SB : SD = AG : AF$.

Dus $EH : EK = AG : AF$.

Dit is de oplossing van 15 van de 16 inzenders; een regel meer, een regel minder, met vermelding van de gebruikte stellingen of zoals deze zonder; met alle gegevens of verkort. Er zijn er bij, die enige regels woorden gebruiken; werkelijk verschil in de bewijzen is er niet; evenmin in de vorm; alle lijnstukken worden met twee hoofdletters aangegeven. Er is één inzender, die de grootheden, die er optreden, met een kleine letter aanduidt: nl. zo:

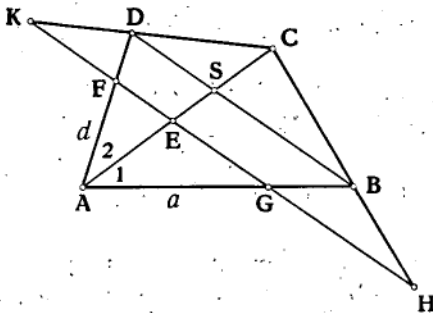


Fig. 2.

Gegeven: $\angle A_1 = \angle A_2$,

$KH \parallel DB$.

Te bew.: $EH : EK =$
 $AG : AF$.

Bewijs. Stel $AB = a$ en $AD = d$.

In $\triangle ABD$ is $FG \parallel DB$; daarom kunnen we stellen: $AG = ax$ en $AF = dx$.

AS is biss. van $\angle A$, daarom stellen we $BS = ay$ en $DS = dy$.

In $\triangle CHK$ is $DB \parallel KH$, daarom stellen we: $EH = ayz$ en $EK = dyz$.

$$\therefore AG : AF = EH : EK (= a : d).$$

De oplossing is als van andere andere; de vorm is echter veel beter; AB en AD , die er in voorkomen, worden nl. met kleine letters aangegeven in plaats van met hoofdletters. Maar bovenal dit: **grootheden, die zich verhouden als a en d worden voorgesteld door ax en dx .**

Elk kind van de 5e klas lagere school af geeft op de vraag: „noem twee getallen,” die zich verhouden als 5 en 8 als antwoord 10 en 16, 50 en 80 enz. „Hoe vind je die?” „Alle twee 2 keer, 5 keer, 10 keer, evenveel keer.” Elke leerling van de 1e klas M.O. af, antwoordt op de vraag naar twee getallen, die zich verhouden als a en b met $2a$ en $2b$, $7a$ en $7b$, algemeen ka en kb . Maar... als dat in de meetkunde voorkomt, dan worden de vier grootheden in de vorm van een evenredigheid geschreven, waarvan elke term een getal aanwijst met twee hoofdletters!

Ik geef ook de oplossing van het vraagstuk. De factoren worden links gezet; als twee lijnstukken p en q zijn, dan worden twee andere, die er evenredig mee zijn, kp en kq genoemd, andere lp en lq ; weer andere mp en mq ; het is niet nodig, zoals boven, producten van drie factoren te vormen. Dit heeft nog een ander, niet te onderschatten voordeel nl. dat men de getallen op de figuur bij de lijnstukken kan zetten, zodat met één oogopslag de oplossing duidelijk is. Nog veel groter voordeel heeft de leraar er van bij het nazien van schriftelijk werk. Vermoeiender werk is er al niet dan het nazien van een stapel meetkunde-werk en ook geen vervelender werk.

Hier volgt mijn oplossing; vrijwel gelijk aan de bovenstaande van nr. 16; het verschil bestaat alleen daarin, dat er een enkele letter als factor wordt genomen en dat de lengten er op de figuur bijgezet zijn.

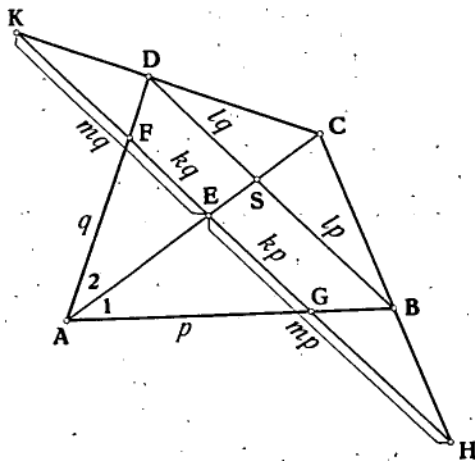


Fig. 3. (100) 301.

Geg.: $\angle A_1 = \angle A_2$;
 $KH \parallel DB$.

Te bew.: $EH : EK =$
 $AG : AF$.

Bewijs. $AG = p$ en
 $AF = q$; $EG = kp$
 en $EF = kq$ (deellijn).
 $SB = lp$ en $SD = lq$
 $(KH \parallel DB)$; om de-
 zelfde reden $EH = mp$
 en $EK = mq$; deze ver-
 houden zich dus als p
 en q .

Zo'n figuur als fig. 3 heeft wat van een „tekenfilm”; eerst de figuur volgens de gegevens van het vraagstuk; daarna wordt er onder de oplossing allerlei bijgeschreven.

2. De deellijnen van de hoeken A en C van een vierhoek $ABDC$ snijden elkaar op BD ; bewijs, dat de deellijnen van de hoeken B en D elkaar op AC snijden.

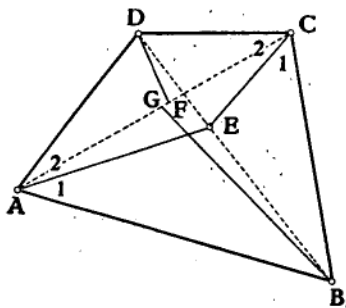


Fig. 4.

Geg.: $\angle A_1 = \angle A_2$;
 $\angle C_1 = \angle C_2$.

Het snijpunt E van de deellijnen ligt op BD .

Te bew.: de deellijnen van $\angle B$
 en $\angle D$ snijden elkaar op AC .

Bewijs.

$DE : BE = AD : AB$; in $\triangle ABD$ is AE deellijn
 $DE : BE = CD : CB$; in $\triangle CBD$ is CE deellijn $\left\{ \begin{array}{l} \therefore AD : AB = CD : CB \\ \text{of } BC : BA = \\ DC : DA \dots I \end{array} \right.$

In $\triangle ACD$ is DF deellijn, dus $DC : DA = CF : AF \dots II$

In $\triangle ACB$ is BG deellijn; dus $BC : BA = CG : AG \dots III$

Uit I, II en III volgt $CF : AF = CG : AG$.

∴ F en G vallen samen, dus snijden de deellijnen van $\angle B$ en $\angle D$ elkaar op AC.

Deze oplossing is goed; waar het aangeven van lijnstukken door twee hoofdletters is erg ongemakkelijk; lezers, volg de oplossing, wijs alles bij of vlieg met de ogen van de figuur naar de tekst en van de tekst naar de figuur zoveel keer als er een paar hoofdletters staat; verbind de 4 paren hoofdletters tot evenredigheden; vat alle drie evenredigheden in het oog en trek de conclusie. Het opschrijven gaat wel, maar het nalezen en vooral het nazien van schriftelijk werk als dit is naar redelijkheid niet te eisen.

Andere oplossers, het merendeel, hebben ter aanduiding kleine letters gebruikt. We nemen er een paar over.

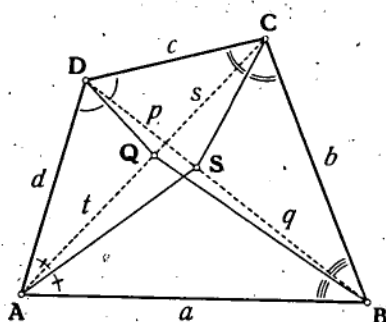


Fig. 5.

Gegeven. Vierhoek ABCD; de deellijnen van de hoeken A en C snijden elkaar in een punt S van BD.

Te bewijzen. De deellijnen van de hoeken B en D snijden elkaar in een punt van AC.

Bewijs. AS is bissectrix in $\triangle ABD \rightarrow a : d = q : p$
CS is bissectrix in $\triangle CBD \rightarrow b : c = q : p$

$$a : d = b : c$$

$$\text{dus } a : b = d : c \quad (1)$$

Trekken we nu de bissectrix van $\angle B$, die AC in Q snijdt, dan volgt hieruit

$$a : b = t : s \quad (2)$$

Uit (1) en (2) volgt $d : c = t : s$; d.w.z. DQ is de bissectrix van $\angle D$; waarmee het gestelde bewezen is.

De oplosser neemt in de laatste regel als bekend aan, dat DQ, die AC verdeelt in reden van AD en DC, de hoek D midden-door deelt. Andere inzenders hebben dat bewezen, waardoor de oplossing iets langer is.

„Wat heb je nu aan te merken op deze oplossing; die is toch leesbaar en kort,” zal menige lezer zeggen. Het antwoord is:

leesbaar en kort, maar het kan zonder evenredigheden nog beter. De reeds genoemde 16e. oplosser doet het zo:

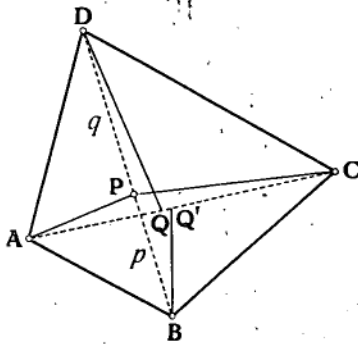


Fig. 6.

Geg.: (zie fig.)

AP is biss. van $\angle BAD$

CP is biss. van $\angle BCD$

BQ is biss. van $\angle ABC$

DQ' is biss. van $\angle ADC$,

Te bew.: Q en Q' vallen samen.

Bewijs. Stel $BP = p$ en $DP = q$.

In $\triangle ABD$ is AP biss., daarom stellen we $AB = px$ en $AD = qx$.

In $\triangle CBD$ is CP biss.; daarom stellen we $BC = py$ en $DC = qy$.

In $\triangle ABC$ is BQ biss., daarom stellen we $AQ = pxz$ en $QC = pyz$.

In $\triangle ADC$ is DQ' biss., daarom stellen we $AQ' = qxt$ en $Q'C = qyt$
 $AQ + QC = AQ' + Q'C$, dus

$pz(x + y) = qt(x + y)$ of $pz = qt$, dus $pxz = qxt$ of $AQ = AQ'$; dus vallen Q en Q' samen.

In deze oplossing worden grootheden, die zich verhouden als p en q voorgesteld als px en qx ; de vier grootheden worden niet in een evenredigheid verzameld. Wat deze oplosser doet, strookt volkomen met mijn opvatting. Het kan echter nog wat handiger; het is niet nodig gedurige producten te maken; één evenredigheidsfactor is voldoende voor elk paar lijnstukken, dat zich verhoudt als p en q nl. kp en kq , lp en lq , mp en mq . Als algemene opmerking nog dit: slechts twee van de inzenders hebben een figuur getekend, die voldoet aan de gegevens van het vraagstuk; gelijke halve hoeken zijn b.v. 40° en 65° ; 45° en 30° ; 70° en 30° ; 23° en 34° ; 55° en 43° ; 40° en 93° ; 27° en 48° ; een lijst, die niet volledig is; maar behoorlijke verschillen toont in „gelijke” hoeken. Wat is de reden? Wel deze: men begint met zo maar een vierhoek te tekenen en een paar lijnen door A en C, waarvan men dan zegt, dat het deellijnen zijn.

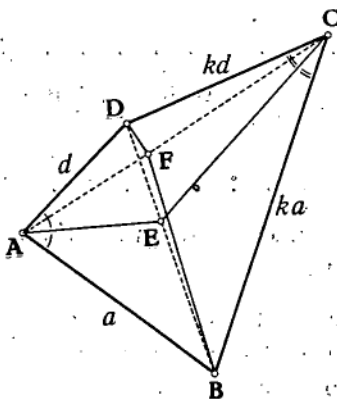


Fig. 7.

Begin dus eerst met een vierhoek ABCD, waarvan de deellijnen elkaar op BD snijden; op zich zelf voor de leerlingen een mooie opgave: $\triangle ABD$; de deellijn AE; maak BC b.v. $1\frac{1}{2} \times AB$ en $DC = 1\frac{1}{2} \times AD$; trek CE. Hierdoor komt men er van zelf toe, om $BC = ka$ en $DC = kd$ te noemen. Teken de deellijnen van de hoeken B en D. En nu is de oplossing al half af.

De oplossing, die ik voorstel, is dus zo; zie fig. 7.

Geg.: AE is de deellijn van $\angle A$, CE van $\angle C$; E ligt op BD. BF is de deellijn van $\angle B$, DF van $\angle D$.

Te bew.: F ligt op AC.

Bewijs. $AB = a$ en $AD = d$; omdat AE in $\triangle ABD$ en CE in $\triangle CBD$ deellijnen zijn, verhoudén BC en CD zich als a en d ; ze zijn dus ka en kd . Omdat BF $\angle B$ middendoor deelt, verhoudén AF en FC zich als $a : ka = 1 : k$; voor DF in $\triangle ADC$ geldt hetzelfde.

3. ABCD is een trapezium; $AB = a$ is evenwijdig met $DC = b$; $a < b$. EH $\parallel AB$; E ligt op AD, H op BC; waar moet men EH trekken, opdat EH door de diagonalen in drie gelijke stukken wordt verdeeld?

Een paar inzenders hebben het vraagstuk opgevat als een werkstuk met de bekende vierledige oplossing; dat is het niet; er wordt slechts een berekening gevraagd. Uiteraard doen de meesten het af in kleine letters. Hierbij een voorbeeld:

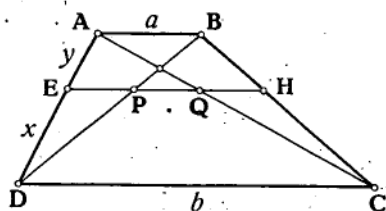


Fig. 8.

Geg.: zie fig. 8.

Gevr.: AE : ED.

Oplossing. Stel $DE = x$ en $AE = y$, dan is $EP : AB = x : (x + y)$, dus $EP = \frac{ax}{x + y}$.

Op dezelfde wijze blijkt

$$QH = \frac{ax}{x + y}.$$

Verder is $EQ : DC = y : (x + y)$, dus $EQ = \frac{by}{x + y}$. Uit het

gegeven volgt $\frac{by}{x + y} = 2 \cdot \frac{ax}{x + y}$, dus $by = 2ax$, dus $\frac{y}{x} = \frac{2a}{b}$, dus

$$AE : ED = 2a : b.$$

Opmerking. In de figuur ligt P tussen E en Q. Ligt Q tussen E en P, dan vindt men $AE : ED = a : 2b$.

Goed, zeker, maar het kan zoveel eenvoudiger zonder evenredigheden.

Gegeven: D ligt op de zijde AB; E op AC; $AD : DB = AE : EC$.

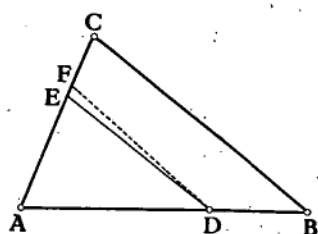


Fig. 11.

Te bewijzen. $DE \parallel BC$.

Bewijs. Is F het snijpunt van AC en de lijn door D evenwijdig met BC, dan is

$$AD : DB = AF : FC \quad (1)$$

Gegeven is:

$$AD : DB = AE : EC \quad (2)$$

Hieruit volgt: $(AF + FC) : (AE + EC) = AF : AE$, dus

$$AC : AC = AF : AE, \text{ dus}$$

is $AF = AE$; E valt samen met F; daar $DF \parallel BC$ is, is ook $DE \parallel BC$.

Dit is de gewone gang; trouwens in alle mij bekende schoolboeken, mijn eigene niet uitgezonderd.

De eenvoudige zaak wordt moeilijk gemaakt door de hoofdletters en de evenredigheden; deze zijn geheel overbodig; het kan zo eenvoudig; het bewijs, zoals hieronder volgt, is in wezen gelijk; de vorm maakt, dat het veel gemakkelijker in de helft van de tijd kan worden gelezen en begrepen.

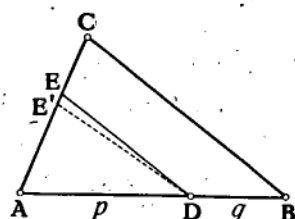


Fig. 12.

Geg.: zie fig. 12. $AD : DB = AE : EC$

Te bew.: $DE \parallel BC$.

Bewijs. Trek $DE' \parallel BC$; $AD = p$;
 $DB = q$.

$AE = kp$ en $EC = kq$ volgens het gegeven.

$AE' = lp$ en $E'C = lq$, omdat $DE' \parallel BC$ is; $AC = kp + kq = lp + lq$; uit $k(p + q) = l(p + q)$ volgt $k = l$; dat is E valt samen met E'.

Dit is ook de oplossing van inzender nr. 16.

5. Als drie lijnen op evenwijdige rechten opv. stukken AB, BC en A'B', B'C' insnijden ($A'B' \neq AB$), die in deze volgorde een evenredigheid vormen, dan gaan de drie lijnen door een punt. Bewijs dat.

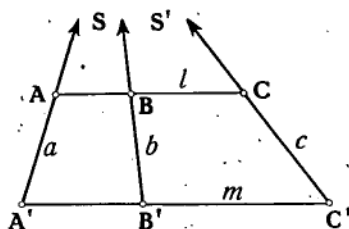


Fig. 13.

Geg.: $l \parallel m$.

$$AB : BC = A'B' : B'C'$$

$$AB \parallel A'B'$$

Te bew.: a, b en c gaan door één punt.

Bewijs. $A'B' \neq AB \rightarrow a$ snijdt b ; noem het snijpunt S

$$\left. \begin{array}{l} A'B' \neq AB \\ A'B' : AB = B'C' : BC \end{array} \right\} \rightarrow B'C' \neq BC \rightarrow c \text{ snijdt } b.$$

Noem het snijpunt S' .

$$l \parallel m \left\{ \begin{array}{l} A'B' : AB = SB' : SB \\ B'C' : BC = S'B' : S'B \\ A'B' : AB = B'C' : BC \end{array} \right\} \rightarrow SB' : SB = S'B' : S'B.$$

$$\begin{aligned} \text{Dus } (SB' - SB) : (S'B' - S'B) &= SB' : S'B' \\ BB' : B'B &= SB' : S'B', \end{aligned}$$

$$\text{dus } SB' = S'B' \rightarrow S \equiv S'$$

Dus a en c snijden b in hetzelfde punt.

Goed, in orde; andere oplossers nemen wat kleine letters op in hun bewijs; in wezen verschillen de oplossingen niet veel. Ik schrijf er nog een over.

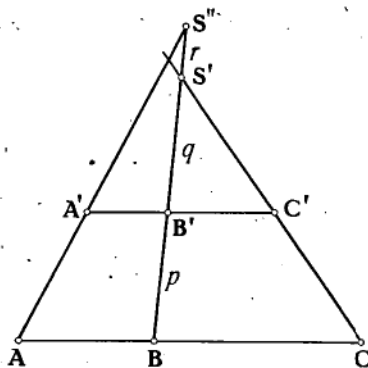


Fig. 14.

Geg. $A'C' \parallel AC$.

$$A'B' : B'C' = AB : BC.$$

Te bew.: AA', BB' en CC' gaan door één punt.

Bewijs.

$$\left. \begin{array}{l} A'B' : AB = B'S'' : BS'' \\ B'C' : BC = B'S' : BS' \\ A'B' : AB = B'C' : BC \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$B'S'' : BS'' = B'S' : BS'.$$

Noem $BB' = p$, $B'S'' = q$ en $S'S'' = r$; dan hebben we:

$$(p + q + r) : (q + r) = (p + q) : q.$$

Hoofdeigenschap geeft:

$$\begin{aligned} pq + q^2 + qr &= pq + pr + q^2 + qr \\ pq + q^2 + qr &= pq + q^2 + qr \end{aligned}$$

$$0 = pr; p \neq 0; \text{ dus } r = 0.$$

Dus gaan de verlengden van AA', BB' en CC' door één punt.

En als ik nu mijn oplossing geef, dan is ook die in wezen dezelfde; maar die is zonder evenredigheden met 4 paren hoofdletters; ook zonder evenredigheden in kleine letters. Wanneer zal men er toch eens toe overgaan een getal met één kleine letter aan te duiden, *ook in de meetkunde*? En als men daartoe overgaat en er treden twee grootheden op, die evenredig zijn met a en b , waarom die dan niet genoemd ka en kb ? Men vermijdt daarmee de evenredigheden en de eigenschappen over sommen en verschillen van termen van de 1e en 2e reden of van voorgaande en volgende... die enkel en alleen in de meetkunde optreden en een voortdurende bron van fouten zijn. Wat niet hoeft. De meetkunde kan het er in de 2e klas, zonder stellen.

Telkens val ik, zoals men ziet, over de paren hoofdletters, die de lengten van een lijnstuk aangeven. De lezer zal misschien zeggen: „Maar je doet het zelf toch ook; in 1, 4, 8, 9, 10 en 12.” Inderdaad; maar in vraagstukken zonder figuur kan men lijnstukken niet anders aangeven dan door begin- en snijpunt. Wordt er met die lijnstukken gerekend, dan zet men kleine letters op de figuur en in de tekst; evenredige met een factor er voor.

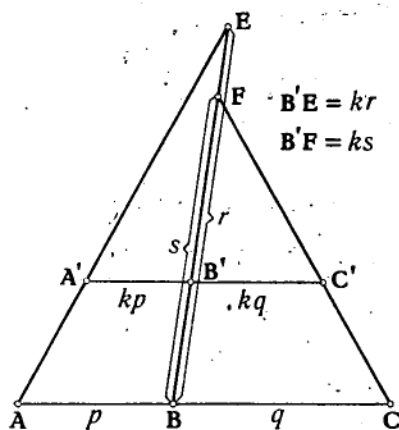


Fig. 15.

Geg.: $AB : BC = A'B' : B'C'$;
 $AB \neq A'B'$.
 $A'B'C' \parallel ABC$.

Te bew.: AA' , BB' en CC' snijden elkaar in één punt.

Bewijs. De gegeven evenredigheid geeft $AB = p$, $BC = q$, $A'B' = kp$, $B'C' = kq$; $k < 1$ op deze figuur.

Zie naar $\triangle ABE$ met $A'B' \parallel AB$; daarin is $BE = r$ en $B'E = kr$; in $\triangle BCF$ is $BF = s$ en $BF = ks$; BE en BF hebben het lijnstuk BB' gemeen; dat is $r - kr = s - ks$.

of $(1 - k)r = (1 - k)s$; gegeven is $AB \neq A'B'$, dus $(1 - k) \neq 0$; hieruit volgt $r = s$ of $BE = BF$.

De oplossing is dezelfde, dat ziet ieder; maar (althans volgens mij) is deze leesbaar en kort en dat zegt ook wat, vooral in de meetkunde! No. 16, meer genoemd, geeft vrijwel dezelfde vorm van oplossing.

6. Teken een lijnstuk AB van ongeveer 6 cm; PAB is een driehoek; neem de hoeken P , A en B opv. 100° , 25° en 55° . Aan dezelfde kant van AB worden de driehoeken ABQ en BRA gemaakt; van beide is de volgorde van de hoeken ook 100° , 25° en 55° . $AB = a$, $BP = b$ en $PA = c$. Bereken AQ , BQ , BR en RA . Bewijs verder:

$\triangle APQ \sim \triangle BRQ$; vul in $\triangle AQR \sim \triangle \dots$ en $\triangle ARP \sim \triangle \dots$

Geen van de inzenders heeft een behoorlijke duidelijke figuur getekend, zoals fig. 16. Na het aangeven van gegeven en gestelde geeft een van de inzenders de volgende oplossing.

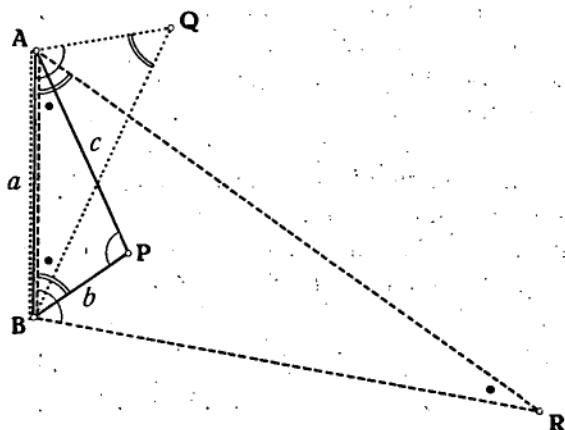


Fig. 16.

$$\triangle PAB \sim \triangle ABQ$$

$$PA : AB = PB : AQ$$

$$c : a = b : AQ$$

$$AQ = \frac{ab}{c}$$

$$PA : AB = AB : BQ$$

$$c : a = a : BQ$$

$$BQ = \frac{a^2}{c}$$

$$\text{Evenzo } \triangle PAB \sim \triangle BRA$$

$$PB : BA = PA : BR$$

$$b : a = c : BR$$

$$BR = \frac{ac}{b}$$

$$PB : PA = AB : RA$$

$$b : a = a : RA$$

$$AR = \frac{a^2}{b}$$

Nu is $AP : BR = AQ : BQ$, daar

$$c : \frac{ac}{b} = \frac{ab}{c} : \frac{a^2}{c}$$

Verder is $\angle PAQ = \angle RBQ$ (daar $\angle BAQ = \angle ABR$ en $\angle PAB = \angle QRA$ is).

$\therefore \triangle APQ \sim \triangle BRQ$ (zhz).

Evenzo blijkt: $\triangle AQR \sim \triangle BPR$ en $\triangle ARP \sim \triangle BQP$ (zhz).

Alle oplossingen zijn op kleine verschillen na, dezelfde; dit is rekenwerk, waarbij kleine letters gegeven zijn; dus vindt men uit de evenredigheden de grootheden als in deze oplossing. Alleen nr. 16 voert een gelijkvormigheidsfactor m in voor $\triangle ABP$ en $\triangle BQA$ en n voor $\triangle ABP$ en $\triangle RAB$; daardoor ontgaat hij de evenredigheden. Zijn oplossing kan nog iets vereenvoudigd worden; zie deze oplossing.

We tekenen een juiste figuur; de maten zijn gegeven om een

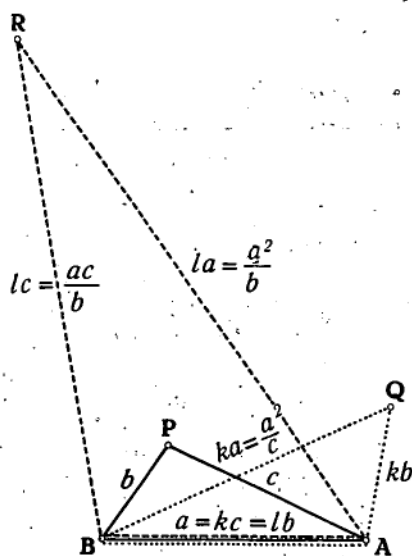


Fig. 17.

duidelijk figuur te krijgen; tekent men een driehoek met hoeken van 55° , 60° en 65° dan loopt men hopeloos vast.

De leerlingen doen goed $\triangle PAB$ met een gewoon potlood te tekenen, $\triangle ABQ$ met een rood en $\triangle BRA$ met een blauw; AB krijgt 3 kleuren onder elkaar; men kan ook nemen: potlood, getrokken inkt en gestippelde inkt. Hij schrijft dan onmiddellijk bij de zijden van $\triangle ABQ$ (voor mijn part zonder dit in de tekst te vermelden) ka , kb en kc en bij de zijden van $\triangle BRA$ la , lb en lc .

Men ziet direct

$k = \frac{a}{c}$ en $l = \frac{a}{b}$, zodat men heeft

$$AQ = \frac{ab}{c}, \quad BQ = \frac{a^2}{c}, \quad BR = \frac{ac}{b} \quad \text{en} \quad RA = \frac{a^2}{b}.$$

$\triangle APQ$ heeft tot zijden c en $\frac{ab}{c}$ en een ingesloten hoek van 85° ; $\triangle BRQ$ heeft $\frac{ac}{b}$ en $\frac{a^2}{c}$; de paren zijden zijn evenredig; de driehoeken zijn dus gelijkvormig.

$\triangle AQR$ heeft tot zijden $\frac{ab}{c}$ en $\frac{a^2}{b}$; deze verhouden zich als b^2 en ac en hun ingesloten hoek is 45° ; ook BP en BR verhouden zich als b^2 en ac , terwijl de ingesloten hoek ook 45° is; dus is $\triangle AQR \sim \triangle BPR$.

$\triangle ARP$ heeft $\angle A = 30^\circ$, terwijl $AR : AP = \frac{a^2}{b} : c = a^2 : bc$.

$\triangle BQP$ heeft $\angle B = 30^\circ$, terwijl $BQ : BP = \frac{a^2}{c} : b = a^2 : bc$.

Deze twee driehoeken zijn dus ook gelijkvormig.

Enige inzenders hebben het laatste deel over die gelijkvormige driehoeken weggelaten of slechts het eerste geval daarvan behandeld. Men ziet, hoe eenvoudig de oplossing is door gebruik te maken van de gelijkvormigheidsfactor.

7. $ABCD$ is een vierhoek; de zijden zijn a, b, c en d . E op AB verdeelt AB in stukken, die zich verhouden als d en b ; F op DC doet hetzelfde met DC ; bewijs, dat EF gelijke hoeken maakt met AD en BC .

Een van de oplossingen is de volgende.

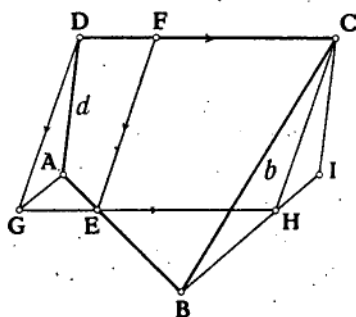


Fig. 18.

Geg.: $AE : BE = d : b$

$DF : FC = d : b$

Te bew.: EF maakt gelijke hoeken met AD en BC .

Bewijs. Trek door E de lijn $\parallel DC$, door D de lijn $\parallel FE$, door C de lijn $\parallel FE$. Zo ontstaat het parallelogram $CDHG$.

$GE = DF$ en $EH = FC$.

$\frac{AE}{BE} = \frac{d}{b}$; $\frac{DF}{CF} = \frac{d}{b}$, dus $\frac{AE}{BE} = \frac{DF}{CF}$, dus $\frac{AE}{BE} = \frac{GE}{HE}$, dus is

$\triangle AEG \sim \triangle BEH$ (zhz), dus $\angle AGE = \angle BHE$, dus $AG \parallel BH$. Trek $CI \parallel DA$. Nu is $\triangle ADG \cong \triangle ICH$, dus $GA = HI$.

In $\triangle BCI$ hebben we

$$\frac{BH}{HI} = \frac{BH}{GA} = \frac{EB}{EA} = \frac{b}{d} = \frac{BC}{CI}.$$

Dus is CH de bissectrix; dus maakt EF gelijke hoeken met AD en BC .

Een tweede oplossing is de volgende; met wat minder hulplijnen.

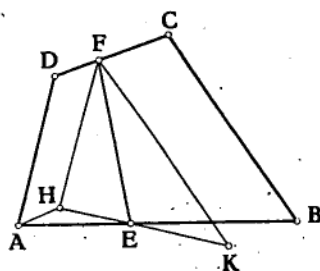


Fig. 19.

Gegeven: ABCD is een vierhoek;

$EA : EB = AD : BC$;

$FD : FC = AD : BC$.

Te bewijzen: EF maakt gelijke hoeken met AD en BC.

Bewijs. Construeer het parallelogram ADFH en het parallelogram BCFK. Dan is $AH = FD$ en $BK = FC$, dus $AH : BK = AD : BC$. In verband met $AE : BE = AD : BC$ volgt hieruit

$$AH : BK = AE : BE \dots \dots \dots (1)$$

Uit $AH \parallel DC$ en $BK \parallel DC$ volgt $AH \parallel BK$, dus

$$\angle HAE = \angle KBE \dots \dots \dots (2)$$

Uit (1) en (2) volgt: $\triangle HAE \sim \triangle KBE$. Uit deze gelijkvormigheid volgt $\angle AEH = \angle BEK$. Verder is $\angle AEB = 180^\circ$, dus ook $\angle HEK = 180^\circ$, dus liggen EH en EK in elkaars verlengde.

Uit genoemde gelijkvormigheid volgt ook $EH : EK = AE : BE$, dus $EH : EK = AD : BC$, dus $EH : EK = FH : FK$. FE is dus bissectrix aan $\angle HFK$.

FE maakt dus gelijke hoeken met FH en FK, dus ook met DA en CB, die resp. evenwijdig zijn met FH en FK.

Op de figuur staat niet meer; géén streepjes, geen tekens van gelijke hoeken; de letters *d* en *b*, die in het vraagstuk genoemd worden, worden vervangen door twee paren hoofdletters, wat niet bevorderlijk is voor het lezen en voor ons, laat staan voor de scholier, voor het lezen.

De anderen zetten wat kleine letters in hun evenredigheden; wezenlijk bekorting geeft dat niet; een enkele heeft nog een zwaardere weg. Een geheel afwijkende weg is deze derde oplossing, al even onvriendelijk er uitzien.

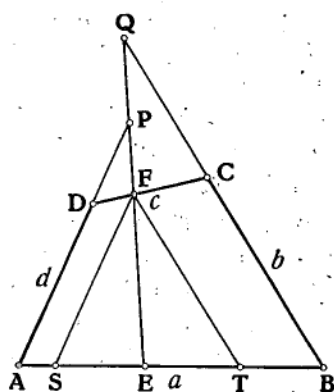


Fig. 20.

$AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ en $DA = d$.

$AE : EB = DF : FC = d : b$.

P is het snijpunt van AD met EF,
Q dat van BC met EF.

Met oppervlakten:

$$\begin{aligned} \frac{\triangle PFD}{\triangle QFC} &= \frac{PF \cdot DF}{QF \cdot FC} = \frac{PF}{QF} \times \frac{d}{b} \\ \frac{\triangle QEB}{\triangle PEA} &= \frac{QE \times BE}{PE \times AE} = \frac{QE}{PE} \times \frac{b}{d} \\ \frac{\triangle PEA}{\triangle PFD} &= \frac{PE \times PA}{PF \times PD} \\ \frac{\triangle QFC}{\triangle QEB} &= \frac{QF \times QC}{QE \times QB} \end{aligned}$$

Achter deze 4 regels staat een grote accolade en daarachter (zoek 't maar uit!)

$$\frac{PA}{PD} = \frac{QB}{QC} \quad \frac{PA - PD}{QB - QC} = \frac{PA}{QB} \text{ of}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{PA}{QB} &= \frac{d}{b} \\ \frac{AE}{BE} &= \frac{d}{b} \end{aligned} \right\} \frac{PA}{AE} = \frac{QB}{BE}$$

Trek door F een lijn $\parallel DA$ (de schrijver geeft geen figuur; we hebben er toch maar een getekend); deze lijn snijdt AB in S; trek door F een lijn $\parallel CB$; deze lijn snijdt AB in T.

$$\begin{aligned} \frac{FS}{SE} &= \frac{PA}{AE} \quad \frac{PA}{AE} = \frac{QB}{BE}, \text{ zodat } \frac{FS}{SE} = \frac{FT}{TE} \\ \frac{FT}{TE} &= \frac{QB}{QE} \end{aligned}$$

TE maakt dus gelijke hoeken met FS en FT (omgekeerde van de deellijnstelling), dus ook met AD en BC.

Wat zeggen de lezers van Euclides van deze oplossing? Naar de omhaal en de moeilijkheid te oordelen voor het middelbaar onderwijs een veel te zware opgave; de eerste en tweede oplossing zijn eenvoudig en goed, maar de vorm maakt, dat men daarvan kan zeggen: gemakkelikheden moeilijk pratend. Nr 16 heeft weer gebruik gemaakt van de evenredigheidsfactor; hierbij zijn oplossing.

van de tijd, die U nodig heeft om de 1e en de 2e na te zien, om maar niets te zeggen van de 3e.

De lezer heeft bemerkt, dat de 7 tot zo ver besproken vraagstukken alle gaan over evenredigheden; de nrs. 8, 9, 10 en 11 ook. Meer dan eens heb ik dit geluid laten horen:

Lijnstukken niet noemen met een paar hoofdletters; maar met één kleine letter; hoeken niet met drie hoofdletters; geen evenredigheden; maak gebruik van de evenredigheidsfactor; zet op de figuur de lengte van de berekende lijnstukken.

De vraagstukken 8, 9, 10 en 11 maken we nu volgens deze regels; de inzendingen van de collega's, die zo vriendelijk waren, de oplossingen te maken, laten we rusten.

8. Door een punt G van de zijde BC van $\triangle ABC$ trekt men $GH \parallel BA$ en $GK \parallel CA$. Bewijs, dat $GH \cdot AC + GK \cdot AB$ constant is.

Geg.: $GH \parallel BA$; $GK \parallel CA$.

Te bew.:

$$GH \cdot AC + GK \cdot AB = \text{constant}$$

Bewijs. $CG = ka$, dus $GB = a - ka = (1 - k)a$.

$\triangle CGH \sim \triangle CBA$, dus is $GH = kc$; evenzo $GK = (1 - k)b$.

Men vindt dus

$$kc \cdot b + (1 - k)b \cdot c = bc.$$

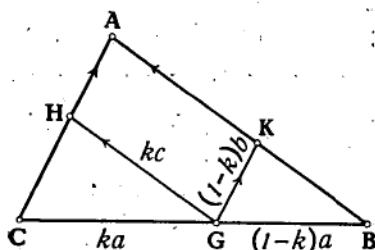


Fig. 23.

Hiermee is de oplossing afgelopen; men kan nog vragen of de constante vooraf te vinden was; ja, neem G in C of in B .

9. AB is een koorde van een cirkel; C het midden van een der bogen AB , P een punt van dezelfde boog. Verleng AP met $PD = PB$;

bewijs, dat $CB = CD$ is en

$$PA + PB < CA + CB.$$

Bij dit vraagstuk vooral geen lijnstukken met twee hoofdletters noemen; het gaat veel beter met kleine letters. $AP = p$

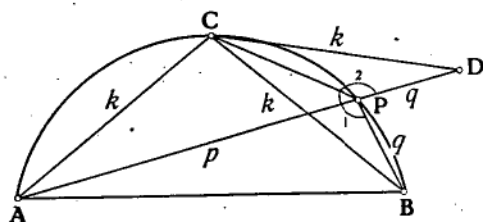


Fig. 23.

$PB = q$, $AC = CB = k$; we moeten nu bewijzen, dat ook $CD = k$ is.

Het wijst vanzelf: $\triangle PCD \cong \triangle PCB$.

De oplossing is dus zo:

Geg.: $AC = CB = k$; APD is een recht lijnstuk, waarvan $PD = PB = q$ is.

Te bew.: $CD = CB = k$ en $p + q < 2k$.

Bewijs. Let op $\triangle PCB$ en $\triangle PCD$; ze hebben PC gemeen en $p = q$. $\angle P_1 = \frac{1}{2}(360^\circ - \text{bg BPC})$, $\angle P_2 = 180^\circ - \frac{1}{2}\text{bg AC} = 180^\circ - \frac{1}{2}\text{bg BC} = \frac{1}{2}(360^\circ - \text{bg BPC})$. De driehoeken zijn congruent (zhz); dus is $CD = CB = k$.

Het tweede deel van het gestelde is $p + q < k + k$; zie $\triangle ACD$.

10. De grondlijn van een trapezium is AB , de bovenlijn is CD ; E is het snijpunt van de verlengde benen, F dat der diagonalen. EF snijdt CD in G en AB in H . Bewijs, dat $FG \times EH = EG \times FH$ is.

Het gegeven vindt men in het vraagstuk.

Te bew.: $FG \times EH = EG \times FH$.

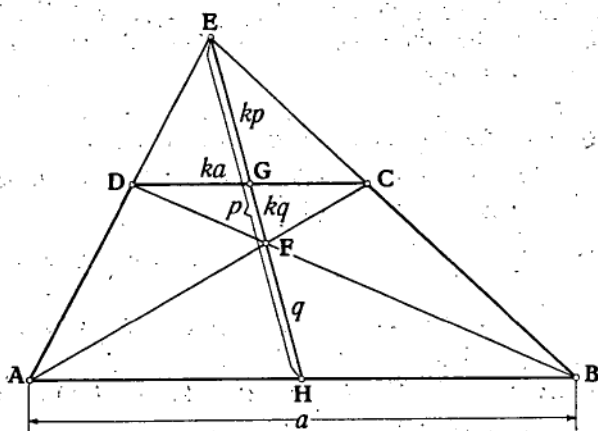


Fig. 25.

Bewijs. $EH = p$ en $FH = q$. $\triangle EDC = k \times \triangle EAB$; dus is $EG = kp$ en $DC = ka$; $\triangle FCD = k \times \triangle FAB$; dus $GF = kq$. Het gestelde is nu $kq \times p = kp \times q$; dus in orde.

De lezer maakt misschien de opmerking, dat deze oplossing wel zeer bijzonder is en dat je die niet gemakkelijk aan de leerlingen bijbrengt. Het antwoord kan kort zijn: alle inzenders (op één na, die het met „Ceva” doet) hebben bovenstaande oplossing gegeven. Het verschil bestaat in de vorm: geen paren hoofdletters, geen evenredigheden. Prent ze dat in, altijd en overal en ze doen het zonder twijfel op de eenvoudigste manier, gelijk hier is voorgedaan.

11. Gegeven is een driehoek ABC ; x is een punt van AC ; trek $XY \parallel AB$ en $XZ \parallel BC$; waar moet men X plaatsen, opdat de oppervlakte van het parallellogram $XYBZ$ zo groot mogelijk wordt?

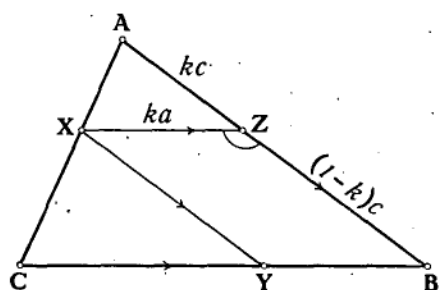


Fig. 26.

Geg.: $XZ \parallel CB$;

$XY \parallel AB$.

Gevr.: de plaats van X , opdat opp. $XYBZ$ max. zij.

Opl. $XZ = ka$; $AZ = kc$; $ZB = c - kc = (1-k)c$. Nu is $\angle Z$ constant; dus moet het product van de zijden om $\angle Z$ zo groot mogelijk zijn; dus zoeken we het max. van $k(1-k) \cdot ac$, dus van $k(1-k) = k - k^2$.

Het max. treedt op voor $k = \frac{1}{2}$; X is dan het midden van AC . (Een paar inzenders zeggen: van $k(1-k)$ zijn de factoren samen 1, dus krijgt men het max. als $k = 1 - k$ is; ook in orde, als dat bekend is uit de algebra).

Nu komen we tot nr. 12 over de „gouden snede”.

12. AB is een gegeven lijnstuk; X verdeelt het in de uiterste en middelste reden; $AX > XB$. Bewijs.

- De som van de vierkanten op AB en XB is driemaal het vierkant op AX .
- Verlengt men AB met $BY = BX$, dan is het vierkant op AY vijfmaal het vierkant op AX .
- De rechthoek $AX \times XB$ (dat is: met AX en XB als zijden) is gelijk aan het verschil van de vierkanten op AX en XB .
- Ook Z verdeelt AB in uiterste en middelste reden; maar $AZ < ZB$; bewijs, dat de oppervlakten van de rechthoeken $AB \times XZ$, $AX \times XB$ en $AZ \times ZB$ gelijk zijn.

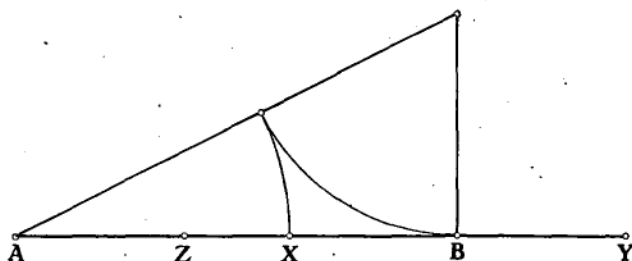


Fig. 27.

Ik schrijf de oplossing van een der inzenders over.

Geg.: $AX^2 = AB \cdot BX$; $BY = BX$; $AZ = BX$.

Te bew.: a. $AB^2 + BX^2 = 3AX^2$; b. $AY^2 = 5AX^2$; c. $AX \cdot XB = AX^2 - BX^2$; d. $AB \cdot XZ = AX \cdot XB = AZ \cdot ZB$.

Bewijs. a. $AB^2 + BX^2 = AB^2 + (AB - AX)^2 = 2AB^2 - 2AB \cdot AX + AX^2 = 2AB(AB - AX) + AX^2 = 2AB \cdot BX + AX^2 = 3AX^2$.

b. $AY^2 = AB^2 + 2AB \cdot BX + XB^2 = 3AX^2 + 2AX^2 = 5AX^2$.

c. $AX \cdot XB = (AB - BX)BX = AB \cdot BX - BX^2 = AX^2 - BX^2$.

d. $AB \cdot XZ = AB(AB - 2BX) = AB^2 - 2AX^2 = AX^2 + 2AX \cdot XB - 2AX^2 + XB^2 = -AX^2 + 2AX \cdot XB + XB^2 = 2AX \cdot XB - (AX^2 - XB^2) = 2AX \cdot XB - AX \cdot XB = AX \cdot XB = ZB \cdot AZ$.

Zie zo; wil de lezer eens nagaan of het in orde is! Ik zie er tegen op. Waarom niet het lijnstuk $AB = h$ gesteld, $AX = BZ =$ en $XB = BY = AZ = k$ (het hele lijnstuk, het grootste stuk en het kleinste stuk); dan is het te lezen; of zoals een inzender doet $AB = 1$, $AX = k$ en $XB = 1 - k$. De meesten doen het met kleine letters; hun oplossingen zijn te lezen. Men lette toch vooral op, dat onze schoolmeetkunde voor een groot deel algebra is met hoeken en lijnstukken als elementen; waarom dan deze grootheden ook niet algebraïsch geschreven?

Maar dit vraagstuk toch weer niet met wortelvormen; vier inzenders vermeiden zich daarin!

Ik schrijf een van die oplossingen over.

$AB = a$; $AX = \frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})$; $BX = \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5})$;

$AY = a + \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}a(5 - \sqrt{5})$; $AZ = \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5})$.

$XZ = \frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5}) - \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{2}a(-4 + 2\sqrt{5}) = a(-2 + \sqrt{5})$.

a. $AB^2 + BX^2 = a^2 + \frac{1}{4}a^2(14 - 6\sqrt{5}) = \frac{1}{4}a^2(18 - 6\sqrt{5}) = 3 \cdot \frac{1}{4}a^2(6 - 2\sqrt{5}) = 3\{\frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})\}^2 = 3AX^2$.

b. $AY^2 = \frac{1}{4}a^2(30 - 10\sqrt{5}) = 5 \cdot \frac{1}{4}a^2(6 - 2\sqrt{5}) = 5\{\frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5})\}^2 = 5AX^2$.

c. $AX \cdot BX = \frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5}) = \frac{1}{4}a^2(-8 + 4\sqrt{5})$;
 $AX^2 - BX^2 = \frac{1}{4}a^2(6 - 2\sqrt{5}) - \frac{1}{4}a^2(14 - 6\sqrt{5}) = \frac{1}{4}a^2(-8 + 4\sqrt{5})$;
 dus $AX \cdot BX = AX^2 - BX^2$.

d. $AB \cdot XZ = a \cdot a(-2 + \sqrt{5}) = a^2(-2 + \sqrt{5})$.

$AX \cdot BX = \frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5}) =$

$\frac{1}{4}a^2(-8 + 4\sqrt{5}) = a^2(-2 + \sqrt{5})$

$AZ \cdot BZ = \frac{1}{2}a(3 - \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{2}a(-1 + \sqrt{5}) =$

$\frac{1}{4}a^2(-8 + 4\sqrt{5}) = a^2(-2 + \sqrt{5})$.

Dus $AB \cdot XZ = AX \cdot BX = AZ \cdot BZ$.

Natuurlijk, het is goed; maar . . . een ontzettende omhaal en een groot tijdverlies en voor een lezer niet of nauwelijks in een behoorlijke tijd door te werken, gesteld, dat hij dat moest doen.

Nu komt nr. 16 aan de beurt; die zet: AX is middelevenredig tussen AB en XB ; hij stelt $XB = a$, $AX = pa$ en dus $AB = p^2a$; terwijl $p^2 = p + 1$ is.

De oplossing verloopt dan heel gewoon! Een heel klein beetje algebra; meer niet. Het is toch ook algebra van lijnstukken en niet anders!

Iets anders dan nr. 16 stel ik het gegeven lijnstuk 1, $AX = k$ en $XB = k^2$; immers AX is middelevenredig tussen 1 en XB . We kunnen AB ook a stellen; maar waarom zouden we die a door alle berekeningen meeslepen? Zie de inzending hierboven met wortelvormen; die a^2 kan men zonder bezwaar missen.

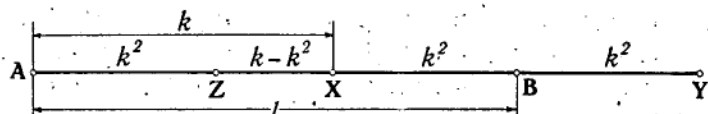


Fig. 28.

We zetten op de figuur de lengten; men lette op, dat $k + k^2 = 1$. . . (1)

En nu de oplossing.

- $AB^2 + XB^2 = 3AX^2$; wel, dat is $1 + k^4 = 3k^2$ of $1 - 2k^2 + k^4 = k^2$; deze ontstaat door $1 - k^2 = k$ (zie 1) te kwadrateren.
- $AY^2 = 5AX^2$, dat is $(1 + k^2)^2 = 5k^2$ of $1 - 2k^2 + k^4 = k^2$; zie a.
- $AX \cdot XB = AX^2 - XB^2$ of $k \cdot k^2 = k^2 - k^4$ of $k = 1 - k^2$ zie 1.
- $$\left. \begin{array}{l} d. \begin{array}{l} AB \times XZ = 1 \cdot (k - k^2) \\ AX \times XB = k \cdot k^2 \\ AZ \times ZB = k^2 \cdot (1 - k^2) \end{array} \right\} \text{gelijk, als } 1 - k = k^2 \text{ is (zie 1)} \\ \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{gelijk, als } k = 1 - k^2 \text{ is (zie 1).} \end{array}$$

In Euclides Jg. XXII blz. 33 heb ik als korrel LXX opgenomen

De uiterste en middelste reden.

„Als a verdeeld wordt in $a - x$ en x zo, dat $(a - x) : x = x : a$ dan zegt men, dat a in de uiterste en middelste reden wordt verdeeld. In orde, maar tot heden weet ik, eerlijk gezegd, nog niet, welke de uiterste reden is, welke de middelste en nog minder, welke dan de derde is; als er een middelste reden is, dan moeten er op zijn minst drie zijn, dacht ik zo. Wie helpt me?”

Voor dat deze korrel opgenomen werd; zond ik die naar Dr. Dijksterhuis, die met zijn bekende welwillendheid een bladzijde wijdde aan het antwoord en . . . er eigenlijk ook niet uitkwam; slaat U het antwoord maar op ter aangeduide plaatse.

Zouden we die woorden zonder-zin „uiterste en middelste reden” maar niet overboord gooien? Wat dan? Ik stel voor: *a verdelen in gedurige reden*. Drie getallen verkeren in gedurige reden, als het 1e staat tot het 2e, als dit tot het 3e, zoals 3, 6 en 12; drie opeenvolgende van een meetkundige reeks. Het lijnstuk *a* wordt verdeeld in tweeën; er zijn dus drie lijnstukken; het grootste stuk is middel-evenredig tusschen het hele en het kleinste lijnstuk. Zo iets heet gedurig evenredig; nu kunnen we slecht zeggen: „*a* zo verdelen, dat *a*, het grootste stuk van *a* en het kleinste gedurig evenredig zijn”; dat is te lang; wel: *a* verdelen in gedurige reden. Dit heeft zin; uiterste en middelste reden is zinloos.

Ook kunnen we de woorden „de gulden snede” gebruiken; „*a* verdelen volgens de gulden snede”, hetgeen dan staat voor: „in *a* de gulden snede aanbrenge”. De woorden „gulden snede” zijn niet gemakkelijk in een zin te wringen; bv. de diagonalen van een regelmatige vijfhoek verdelen elkaar volgens de gulden snede; dit is m.i. niet zuiver; ze snijden op elkaar de gulden snede in, klinkt evenmin. Ze verdelen elkaar in gedurige reden, dat gaat wel. Maar „in uiterste en middelste reden”, dat moet weg; deze woorden hebben geen redelijke betekenis.

Een opmerking over het gebruik van tekens in de ingezonden oplossingen.

→ betekent, als ik het wel heb, „hieruit volgt”; ∴ betekent hetzelfde; men kan beide ook lezen als „dus”.

Waarom die tekens? De meesten gebruiken ze gelukkig niet.

Een van de inzenders voorziet elk tweetal hoofdletters, dat een lijnstuk, een zijde of de lengte van een lijnstuk of zijde aangeeft van een streep er boven; zo: $\overline{AB}$, zelfs $\bar{c}$, al vergeet hij die streep boven de kleine letter ook wel eens; slechts één van de 16; de 15 anderen en schrijver dezes vinden die streep volkomen onnodig. (In Jg. XIII van Euclides heb ik een artikel geschreven onder de titel „ $\overline{AB}$ of $\overline{AB}^2$ ”). Ik haal hier aan, wat Prof. Dr R. Deaux er over zegt in zijn uitstekend boek: *Compléments de Géométrie plane*: „On remarquera que dans l'écriture $\overline{AB}^2$ l'exposant porte sur le nombre représenté par $\overline{AB}$ sans que doive intervenir un signe supplémentaire, tel que $\overline{AB}^2$; car d'après les conventions de l'écriture algébriques, $\overline{AB}^2$ ne pourrait signifier en outre que le produit de $\overline{A}$ par le carré de $\overline{B}$, interprétation dénuée de sens dans le cas actuel. On dira aussi en abrégé que $\overline{AB}^2$ est le *carré du segment*.”

Zoals reeds gezegd doet men beter gebruik te maken van kleine letters en kan het niet anders, dan zetten men toch geen streep. AB^2 kan in de meetkunde toch niet anders betekenen dan de lengte van AB in het kwadraat. Verwarring is volkomen uitgesloten; waarom dan drukte voor niets?

Aan het eind gekomen nog eens herhaald, wat^c bedoeld wordt met dit artikel.

Schrijf lengten van lijnstukken niet met twee hoofdletters, maar met één enkele kleine letter; geen hoeken met drie hoofdletters; werk zo weinig mogelijk met evenredigheden; gebruik de evenredigheidsfactor.

Alles wat ons hindert in de beweging moet zo enigszins mogelijk verwijderd worden en ... dat kan! Het opschrift van dit artikel kon ook luiden: *voetballen met een hoge zijen op; turnen in een geklede jas.*

Tot slot mijn beste dank, aan de inzenders van de oplossingen; die mij het materiaal leverden voor dit opstel. P. W.

HULDIGING VAN Prof. Dr. FRED. SCHUH

Rede, uitgesproken door de Heer Ir W. J. Vollewens c.i., Voorzitter van het comité van huldiging op Zaterdag 8 October 1949 in 's-Gravenhage.

Zoals U weet is deze huldiging, die oorspronkelijk bedoeld was als afscheid van Prof. Schuh bij zijn heengaan als hoogleraar aan de T. H. te Delft, telkens om verschillende redenen uitgesteld en ik meen U enige verklaring schuldig te zijn voor dit zo lange uitstellen.

De zeventigste verjaardag van Schuh viel in de laatste maanden van de oorlog, toen alle verkeer hier in Nederland zo goed als onmogelijk was, ook het postverkeer. Daardoor was het niet mogelijk om al degenen te bereiken, die wij zo gaarne bereikt zouden hebben. Ettelijke brieven bereikten hun adres niet of indien ze dat deden, dan ontvingen wij het antwoord niet. Dit heeft maanden na de bevrijding nog geduurd, slechts zeer weinigen waren te bereiken op de ons bekende adressen, velen waren verhuisd, verdreven, ondergedoken en in elk geval voor ons onvindbaar. Daarna kwam de geldsanering, die het geldverkeer lastig en vaak onmogelijk maakte. Toen we eindelijk zo ver waren, dat we meenden een datum te kunnen vaststellen, werd prof. Schuh, toen hij zich naar de studio begaf voor een radiovoordracht, door een auto aangereden en moest enige maanden in het ziekenhuis blijven om van zijn verwonding te herstellen. En opnieuw moesten we beginnen met het zoeken naar een geschikte tijd en gelegenheid om deze huldiging te doen plaats hebben. Daar reeds toen de copie van het 50e boek van Schuh gereed was, kwamen wij tot de slotsom, dat het verschijnen van dit 50e. boek een schitterende gelegenheid zou zijn om dit als datum voor de huldiging te nemen. We zouden dit zeker niet gedaan hebben, als we toen geweten hadden, dat er tussen het gereed zijn van de copie en het verschijnen van het boek een tussenruimte van een paar jaren zou liggen.

Gelukkig echter is van uitstel geen afstel gekomen, zoals sommigen van U hebben gedacht. Ieder, die wel eens te doen heeft gehad met het organiseren van een bijeenkomst als deze, zal weten, hoe moeilijk het is om daarvoor een geschikte datum vast te stellen. Zelfs nu in de laatste weken was het om allerlei redenen noodzakelijk om die datum te verschuiven, die oorspronkelijk was vastgesteld op 17 September.

En dit is eigenlijk heel jammer geweest, daar die datum van 17 September een zeer bijzondere en belangrijke datum is geweest in het leven van Prof. Schuh, lang geleden wel is waar, zo lang, dat velen van ons onmogelijk in hun geheugen zo lang zouden kunnen teruggaan. Ik bedoel 17 September 1895, toen aan de student Schuh de grote gouden medaille werd uitgereikt door de rector-magnificus der Amsterdamse universiteit als beloning voor zijn bekroond antwoord op een door die universiteit uitgeschreven prijsvraag, luidende: „de faculteit verlangt een onderzoek naar de getransformeerde krommen, die uit een algebraïsche kromme van de n e graad ontstaan door zodanige transformaties, waarbij t.o. van een gegeven poolcoördinatenstelsel de poolhoek onveranderd blijft, terwijl tussen de voerstralen r_1 en r_2 van de overeenkomstige punten een algebraïsche betrekking geldt, die t.o. van r_1 van de graad p_1 en t.o. van r_2 van de graad p_2 moge zijn.” Het zeer vleierende judicium van de faculteit der wis- en natuurkunde eindigt aldus: „Gaarne verklaart de faculteit, dat het bij haar ingekomen antwoord ten volle die bekroning waardig is.”

Dit was, zoals ik zeide in 1895, toen de student Schuh, die nog geen enkel akademisch examen had afgelegd, nauwelijks 20 jaar oud was. Op 17 September werd hem door de rector-magnificus de gouden medaille overhandigd en het slot van diens toespraak luidde aldus: „Gij hebt U met Uwen arbeid den toegang verworven tot den kring der akademieburgers in hooger zin, gij hebt daarmee als het ware Uw zelfstandige geleerde loopbaan begonnen. Moge deze loopbaan een gelukkige zijn, rijk aan voldoening voor U zelve, rijk aan vruchten voor de maatschappij.”

Het zal wel een zeer grote uitzondering zijn, dat aan een twintigjarig student, die nog aan het begin van zijn studie staat, dergelijke, ik zou haast zeggen profetische, woorden worden toegevoegd. Is het wonder dat die studie, die zo glansrijk begon, even glansrijk werd voltooid? Candidaatsexamen-cum laude, doctoraalexamen-cum laude, en ten slotte ook de promotie in 1905 -cum laude op een proefschrift: „Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen.” Had de faculteit het bij haar beoordeling van het antwoord op de prijsvraag van 1895 betreurd, dat de student Schuh nog niet op de hoogte was van alle litteratuur, in zijn proefschrift van 1905 toonde Dr. Schuh, dat hij zich nu zeer degelijk van die litteratuur op de hoogte had gesteld.

Men zou zich kunnen verwonderen, dat er bij een begaafd man als Schuh een tussenuitruimte van 10 jaar ligt tussen het beantwoorden van de prijsvraag en de promotie. Maar, die verwondering

zal verdwijnen, als men weet, dat Schuh in die 10 jaar niet alleen zijn studie voltooide maar ook nog geruime tijd doorbracht te Göttingen, waar hij werkte onder de leiding van mannen als Felix Klein en Hilbert en bovendien van 1902 af een betrekking vervulde bij het V.H. en M. Onderwijs aan de scholen te Apeldoorn en te Sneek, waardoor hij in de gelegenheid was om zich langdurig en volledig op de hoogte te stellen van het onderwijs aan de H.B.S., van de mogelijkheden, die dit onderwijs biedt en van de eisen, die men aan de eindexaminandi daarvan kan stellen. Na zijn promotie bleef Schuh nog leraar te Sneek en werd tevens toegelaten als privaatchoort docent te Groningen, waar hij colleges gaf in waarschijnlijkheidsrekening en de theorie van krommen en oppervlakken.

Reeds in 1907 — twee jaren na zijn promotie, op 32jarige leeftijd volgde de benoeming tot hoogleraar te Delft; dan van 1909 tot 1916 hoogleraar te Groningen en dan weer 1916 tot 1945 te Delft. Ziedaar, heel in het kort de officiële loopbaan van onze jubilaris van heden. U ziet de voorspelling van de Amsterdamse rector-magnificus van 1895, dat Schuh zich door zijn werk toegang had verschaft tot de kring van akademieburgers in hogere zin, is schitterend in vervulling gegaan.

Maar ook de hoop, die de rector magnificus in 1895 uitsprak: „Moge deze loopbaan rijk zijn aan vruchten voor de maatschappij” is geen ijdele hoop geweest. Het is natuurlijk niet mijn bedoeling om hier een analyse te geven van hetgeen Schuh in die langdurige loopbaan als een der goden op de wiskundige Olympus van ons vaderland, heeft gedaan. Dat zou mij niet passen en bovendien zou zelfs alleen maar een opsomming van zijn vele werken meer tijd vergen, dan ik nu hier van Uw aandacht mag verlangen. Ik zou U echter gaarne op slechts twee punten wijzen, waaruit duidelijk kan blijken, dat Schuh ten volle heeft voldaan aan de verwachting, die in de door de rector-magnificus uitgesproken hoop ligt opgesloten.

Schuh werd zoals gezegd in 1907 benoemd tot hoogleraar aan de Technische hogeschool te Delft. Een Hogeschool was deze instelling nog pas een paar jaar — sinds 1905 — voordien was de Polytechnische school te Delft een instelling, waar officieel slechts Middelbaar onderwijs werd gegeven ter opleiding van (hoofdzakelijk) civiel-ingenieurs, dus van weg- en waterbouwkundigen, die civiel heetten in tegenstelling met de officieren der genie, die in Breda tot militaire ingenieurs werden opgeleid aan de Militaire Academie. In deze vorm had de opleiding te Delft zich wel is waar een zeer goede naam verworven, ook in het buitenland, waar Hol-

landse ingenieurs vaak bij moeilijkheden geraadpleegd werden of met de leiding van grote werken belast, maar een volledig instituut voor de wetenschappelijke beoefening der techniek was het niet geweest. Dit zou het moeten worden door de reorganisatie van 1905, toen de omzetting in Technische Hoogeschool plaats vond, na lange voorbereiding. Een langdurig proces van ontwikkeling is toen begonnen, een ontwikkeling, waarbij de techniek meer wetenschappelijk moest worden beoefend en omgekeerd de zuivere wetenschap zich moest leren instellen op het dienen der techniek.

En aan deze reorganisatie heeft Schuh in al de jaren, die hij aan de T. H. in Delft verbonden was, meegewerkt en met resultaat. Onze technische hogeschool is geworden een instelling, die in binnen- en buitenland met ere wordt genoemd en die de vergelijking met overeenkomstige instellingen in het buitenland glansrijk kan doorstaan, in het bijzonder door de grote plaats, die in Delft aan de theoretische en wetenschappelijke opleiding wordt gegeven. Waren er vroeger leiders van grote fabrieken en industrieën in Nederland, die meenden, dat de meerderheid van hun ingenieurs niet zoveel theorie, niet zoveel wiskunde en zoveel mechanica nodig hadden, en drongen zij aan op meer practijk bij de ingenieursopleiding, deze captains of industry zijn daarvan reeds lang teruggekomen. De plaatsen, die vroeger werden ingenomen door die practische ingenieurs, hebben zij reeds lang doen bezetten door middelbaar technici, die goedkoper waren en waarvan de opleiding meer direct op de practijk is gericht, die dus in de fabriek kwamen met meer practische ervaring en die dus spoediger ingewerkt waren. Voor de leidende plaatsen in de techniek heeft men steeds meer theoretisch goed geschoolde krachten nodig, die de zich voordoende technische problemen, die buiten de dagelijkse routine liggen, wetenschappelijk weten aan te pakken en tot de oplossing daarvan weten door te dringen. Voor het werk in de laboratoria van onze grote fabrieken, voor het ontwerpen en uitwerken van nieuwe methoden, voor de organisatie van nieuwe afdelingen en voor proeven met nieuwe procedé's, zal men blijvend nodig hebben een staf van wetenschappelijk geschoolde ingenieurs, die technisch voldoende ontwikkeld zijn om de consequenties voor de practijk te overzien en die een wetenschappelijke opleiding hebben genoten, voldoende om de theorie dienstbaar te maken aan de practijk.

De T. H. te Delft heeft zich in deze richting in de laatste veertig jaar steeds verder ontwikkeld en ontwikkelt zich nog en hieraan heeft Schuh in de vele jaren, welke hij aan de T. H. verbonden was, met al zijn geestkracht en al zijn kennis meegewerkt. En zeker

is het niet voor een gering deel aan zijn inzicht en doorzettingsvermogen te danken, dat deze ontwikkeling zich op zo gunstige wijze heeft voltrokken tot nu toe. Hij heeft steeds geijverd voor uitbreiding, verdieping en verbetering der theoretische opleiding te Delft en hij heeft op zijn colleges er steeds naar gestreefd de theoretische vakken, die hij doceerde, de wiskunde en de mechanica zo te geven, dat zij zo vruchtbaar mogelijk zouden zijn voor de practijk van de a.s. ingenieur, namelijk zo, dat deze theoretische kennis niet alleen werd gebruikt om na het examen zo snel mogelijk te worden vergeten als overbodige ballast, maar toegepast kon worden als gereedschap bij het werk in de practijk. Dat zijn invloed in deze richting groot is geweest en vruchten heeft afgeworpen voor de maatschappij, daarvan heb ik vaak menig in de practijk werkzaam ingenieur horen getuigen.

En ofschoon Schuh zelf niet technisch was aangelegd in dien zin, dat hij zelf zijn grote kennis toepaste op technische problemen, hij heeft altijd respect gehad voor die technische toepassingen der wetenschap, het respect van de ware geleerde voor datgene, wat hij niet kent. Hij was het dan ook niet eens met een hoogleraar, die een collega van de afdeling der werktuigbouwkunde betitelde als „een smid met een hoed op”, maar toonde steeds de grootste belangstelling, wanneer men voor het zuiver wiskundige deel van een technisch probleem zijn hulp inriep, die steeds, en meestal zeer afdoende, werd gegeven.

Een tweede punt, waarvoor ik hier nog een ogenblik Uw aandacht wil vragen betreft de invloed, die Schuh heeft gehad en nog heeft op het onderwijs in de wiskunde en de mechanica in Nederland. Als hoogleraar te Delft en te Groningen heeft hij tal van studenten op zijn colleges gehad, die later als leraar het onderwijs aan H.B.S. of Gymnasium hebben gediend of die aan middelbare technische scholen hebben les gegeven. Ook door cursussen voor de middelbare acten K1 en K5 voor wiskunde en K2 en K6 voor mechanica heeft hij tal van leraren opgeleid, die het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs hebben gediend en nog dienen. En een nog veel groter aantal studerenden bereikte hij door zijn talrijke boeken op elk gebied der wiskunde en mechanica, speciaal geschreven voor hen die een of meer middelbare acten wilden behalen, maar alle veel meer gevend dan daarin alleen zou liggen opgesloten. Ook door zijn vele artikelen in onze wiskundige tijdschriften — Wiskundig Tijdschrift, Nieuw tijdschrift voor wiskunde, Mathematica, Nieuw archief voor wiskunde, Christiaan Hugen, waarvan hij jarenlang redacteur was, heeft hij zijn invloed doen gelden. En ten slotte ook

als deskundige bij de eindexamens der H.B.S. of als gecomiteerde bij de gymnasiale eindexamens wendde hij zijn invloed aan om het peil van het onderwijs in Nederland te doen stijgen.

Voor al door zijn boeken heeft Schuh meegewerkt aan de verhoging van het peil van het nederlandse onderwijs; immers het moge waar zijn, dat de exameneisen worden vastgesteld door het examen-program, dat uiteraard vaag is en door de commissies, die het examen afnemen, de vraag of en in hoeverre de kandidaten aan die eisen voldoen, wordt in hoge mate bepaald door de gelegenheid, die deze kandidaten hebben om zich boeken aan te schaffen, die aan deze eisen zijn aangepast. Dertig of veertig jaar geleden waren er in het nederlandse slechts enkele boeken, die hieraan voldeden en moesten kandidaten zich helpen met buitenlandse werken, iets wat natuurlijk hun blik wel kon verruimen, maar wat het nadeel had, dat die werken gewoonlijk voor een heel andere kring van lezers geschreven en bedoeld waren. Nu is dit al jaren lang niet meer nodig, er is geen student meer in Nederland in wis- en natuurkunde of in Delft en geen candidaat meer voor een der middelbare acten wiskunde of mechanica, die niet zijn kennis of in elk geval een deel daarvan haalt uit een of meer der vele werken van Schuh, die zeker de vergelijking met buitenlandse kunnen doorstaan, en zeer vaak zelfs in vele opzichten, zeker in het opzicht van geschiktheid voor een bepaald examendoel, deze overtreffen.

Ook in dit opzicht mogen we vaststellen, dat de loopbaan van Schuh, in overeenstemming met de door de Amsterdamse rector in 1895 uitgesproken verwachting, rijk geworden is aan vruchten voor onze nederlandse samenleving.

Na deze rede volgde een persoonlijk woord aan Prof. Schuh en familie; daarna werd hem zijn (door E. M a s s e u s) geschilderd portret aangeboden.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van J. B. Wolters, Groningen:

Dr. Joh. H. Wansink, *Reken- en stelkunde voor het M. en V.H.O.* II 4e druk f 3.—, geb. f 3.50.

G. W. van Brink en W. Schippers, *Beknopt leerboek der Stereometrie*. Ten dienste van Kweekscholen, van de A-afdeling van het Gymnasium en andere scholen met beperkt Wiskunde-program en van de opleiding voor de Hoofdakte, 4e druk f 2.50, gebonden f 2.90.

Ir. G. L. Ludolph en Ir. A. P. Potsma, *Theoretische mechanica voor het technisch onderwijs en voor zelfstudie*.

Deel I A 7e druk f 4.25, geb. f 4.90.

Dr. A. van Thijn, *Stereometrische vraagstukken*, 8e druk. f 1.70, geb. f 2.—.

Dr L. N. H. Bunt, *De leerstof van ons wiskundeonderwijs*. Een onderzoek naar opvattingen en gebruiken dienaangaande. Met een woord ten geleide van Prof. Dr M. J. Langeveld. Publicatie van het Paedagogisch Instituut der Rijksuniversiteit te Utrecht, f 1.90.

We vestigen alvast de aandacht op deze studie van Dr Bunt.

We hopen er op terug te komen in een bespreking.

Van P. Noordhoff, Groningen:

Tekenbladen voor Grafische voorstellingen. 30 kwarto blz. 2 mm. f 1.25.

Prof. Dr J. C. H. Gerretsen, *De betekenis van de wiskunde voor de hedendaagse natuurwetenschap*, 2e druk, f 1.25.

Dr. B. P. Haalmeyer, *Leerboek der vlakke meetkunde*. Met vraagstukken, II. 6e druk, f 2.75.

Dr B. Gonggrijp, *Log. en gon. tafels en bijtafels*. Uitgave II. 230 blz. 9e druk, geb. f 3.90.

Inhoud: Inrichtingen en gebruik van de tafels. Log. van rentefactoren. Enige constanten met hun logaritmen. I. Briggse log van 1—10809. II. Log. van de gon. functies. III. Bijtafels (7 stuks; op groen papier). IV. Gon. functies met opklimming van een minuut. De tafels I, II en IV in 5 dec.

P. Wijdenes. Noordhoff's tafel in vier decimalen. 14e druk, 87 blz., geb. f 1.40. De gon. functies om de minuut op groen papier.

P. Wijdenes, Log. en sinustafel in vier decimalen; tafel H. 5e druk, 55 blz. geb. f 0.95.

Inhoud: Gewone logarithmen; de tafel van de gon. verhoudingen (de sinustafel) rentetafels, en een paar bijt afels met wortels enz (Geen gon. logarithmen).

P. Wijdenes. Algebra voor M.U.L.O. I. 43e druk, 136 blz. f 1.80.

P. Wijdenes. *Beknopte Algebra*, II. 164 blz. 16 fig. 10e druk, f 2.60.

Ingelast zijn enige paragrafen over functies en grafieken.

P. Wijdenes. *Antwoorden Middel-Algebra* I. 4e druk, f 1.50.

P. Wijdenes en Dr H. J. E. Beth. *Nieuwe Schoolalgebra* II. 17e druk. 204 blz. 51 fig. f 3.—.

Dr H. J. E. Beth. *Tafels in vier decimalen*. 3e druk, f 0.60.

Voor al ten gebruike bij de natuurkunde en de scheikunde.

P. Wijdenes. *Rentetafels*. Tafel D, 4e druk f 0.70

Tafels voor $S_{\overline{n}|} = (1+i)^n$; $A_{\overline{n}|} = (1+i)^{-n}$; $s_{\overline{n}|} = \Sigma(1+i)^{-n}$; $a_{\overline{n}|} = \Sigma(1+i)^{-n}$; $\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \text{annuïteitentafel}$; $\sqrt[12]{(1+i)^k}$.

50 termijnen; percenten opklimmende met $\frac{1}{2}\%$ van 2%—6%.

P. Wijdenes en Dr D. de Lange. *Rekenboek voor de H.B.S.* I. 23e druk. 132 blz. f 2.30.

P. Wijdenes. *Getallenleer*. 2e druk. 260 blz. f 8.25, geb. f 10.50.

Inhoud: I Deelbaarheid 5—32. II Congruenties 33—87.

III Indices en kwadraatresten 88—153. IV Congruenties met deelbare modulus 154—203.

Algemene herhaling, stellingen, formules, primitieve wortels, kleinste priemfactoren van de getallen tot 20000, historische aantekeningen van Dr Dijksterhuis, *Antwoorden*.

P. Wijdenes. *Beknopte Meetkunde*. II. 8e druk, 128 blz. 122 fig. f 2.60.

P. Wijdenes. *Planimetrie* I. 5e druk. 104 blz. 141 fig. f 2.20.

Een eenvoudig schoolboek voor het onderwijs in vlakke meetkunde.

Van Waltman, Delft.

Ir. W. J. Vollewens. *Repertorium der Wiskunde voor Ingenieurs*. II. Analytische meetkunde en Beschrijvende Meetkunde. 212 blz. 133 fig. f 7.50.

Inhoud: I Analytische meetkunde. Coördinaten en vergelijkingen. II De rechte lijn. III De cirkel. IV Ellips, hyperbool en parabool. V De algemene verg. van de tweede graad. VI Homogene coördinaten; pool en poollijn. VII Bundels en netten

van tweede graads-krommen. VIII Enige algemene eigenschappen van kegelsneden. Verder de ruimte. IX Coördinaten en vergelijkingen. X Het platte vlak. XI De rechte lijn. XII De bol. XIII Meetkundige plaatsen; kegels, cylindfers, omwentelingsvlakken, regelvlakken. XIV Oppervlakken van de tweede graad. XV De algemene vergelijking van de 2e graad; homogene coördinaten.

Beschrijvende meetkunde. XVI Rechthoekige projectie. XVII Scheve projectie. XVIII Orthogonale axonometrie. XIX Centrale projectie; perspectief. XX Schaduwconstructies. XXI Bepalingen en eigenschappen van krommen en oppervlakken. XXII Omwentelingsopp.; de torus. XXIII De eenbladige omwentelingshyperboloïde. XXIV De eenbladige hyperboloïde. XXV De hyperbolische paraboloiden. XXVI Regelvlakken. XXVII Doorsnijding van oppervlakken.

Dit boek wordt sterk aangeraden; in een kort bestek vindt men veel, dat men niet kwijt wil zijn. Maar het is niet alleen voor ingenieurs; ook anderen kunnen er hun voordeel mee doen. Zij, die voor de acte M.O. studeren, hebben een goede steun aan dit repetitie-materiaal. In een kort bestek vindt men veel bijeen.

Ir W. J. Vollewens. *Vraagstukken over Hogere Algebra.* f 1.90, geb. f 2.50.

A 1—42 Determinanten; B 43—60 Toepassingen van determinanten. C 61—166 Reeksen; D 169—221 Complexe getallen; E Hogere machtsvergelijkingen 222—251. Antwoorden met aanwijzingen.

Een uitstekend boek; niet alleen voor Delft, maar ook voor de K₁-studie, voor Breda, voor Willemsoord, Nxvi (M.O. Zeevaartkunde), voor studerenden in de Landmeetkunde en voor Wageningen.

Ir W. J. Vollewens. *Oplossingen van de Wiskunde-Vraagstukken* opgegeven bij de propaedeutische examens aan de T.H.S. te Delft in Mei 1949.

Aanbevolen natuurlijk voor studenten in Delft, maar ook voor het begin van de studie voor Kv.

SPROKKELS.

XCIV.

Verweer.

Op bladzijde 15 van de Psychologisch-Didactische Inleiding bij het Werkschrift van de heren Turkstra en Geursen wordt een artikeltje van mij, gepubliceerd als Ingezonden stuk in het Weekblad voor Middelbaar- en Gymnasiaal Onderwijs van 8 October 1924(!), in een bespottelijk daglicht gezet. Ik dank de redactie van Euclides, dat mij de gelegenheid wordt geboden een verweer in de kring van vakkundigen te kunnen uiten! Wat is nl. het geval?

De brochure van Mevr. Ehrenfest—Afanassjewa over een propaedeutische cursus in de meetkunde was pas verschenen¹⁾. Hij werd druk bestudeerd en becritiseerd. Hoewel de ideeën van de schrijfster me zeer aantrokken, vond de „Ubungensammlung” (niet Übungssammlung, zoals de heren T. en G. het boek betitelen) minder instemming, omdat, naar mijn mening, de oefeningen te weinig geven, was des kinds is. Toen heb ik getracht elementen te vinden, die als deugdelijke ondergrond konden dienen voor een meetkundige scholing. Ik heb toen enige voorbeelden ontleend aan het practische leven en ook enige meetkundige concepties als begrip in het kinderebrein pogen vast te leggen door analoge begrippen uit de hun bekende wereld.

Zo wilde ik de leerlingen overtuigen van de noodzaak, dat de omkering van een stelling opnieuw moet worden bewezen. Mijn gedachtengang was de volgende:

Ik vang m'n les aan met de mededeling: „Jongelui! Als een kous kapot is, dan . . . moet hij gestopt worden”, En nu het omgekeerde: „Als de kous gestopt wordt, dan moet hij wel kapot zijn!” Dit gaat er goed in! (weinig kritiek!) Vervolgens: „Als het regent, dan wordt de straat nat!” (Ook waar!) En dus: . . . Als de straat nat wordt, dan regent het!” (Storm van protest!) We gaan nog even door: „Als iemand kiespijn heeft, dan voelt hij zich niet lekker!” En dus: . . . Als iemand zich niet lekker voelt, dan heeft hij kiespijn!” (Weer protest!) „Als een schip een besmettelijke zieke

¹⁾ „Wat kan en moet het Meetkunde-onderwijs aan een niet-wiskundige geven.”

aan boord heeft, dan voert hij de gele vlag!" En dus jongens!: „Als een schip de gele vlag voert, dan moet er een besmettelijke ziekte aan boord zijn!" (Accoord!)

En dan de overgang tot: In een gelijkbenige driehoek zijn de basishoeken gelijk!" En omgekeerd: „Als de basishoeken gelijk zijn, dan is die driehoek gelijkbenig!" (Juist!) Terwijl: „Als twee driehoeken de zijden twee aan twee gelijk hebben, dan zijn ook de hoeken twee aan twee gelijk!" Maar ... „Als twee driehoeken de hoeken twee aan twee gelijk hebben dan zijn de zijden *niet* twee aan twee gelijk!" De voorbeelden kunnen wellicht door betere vervangen worden, ik hoop dat U de bedoeling om aan te sluiten bij het leven begrepen hebt!

Ter inleiding van de keten oorzaak en gevolg nam ik het voorbeeld: Weggeworpen bananenschil (Oorzaak) en de daarover uitglijdende wandelaar, die komt te vallen en met een gebroken been naar het ziekenhuis moet! (Gevolg) Dan in de Meetkunde: „De tophoek van een gelijkbenige driehoek wordt middendoor gedeeld (Oorzaak) de basis van deze driehoek wordt nu rechthoekig middendoor gedeeld! (Gevolg!) Is in het eerste voorbeeld het gevolg niet noodwendig, bij het tweede is dit onverbiddelijk! Andere voorbeelden zoeken, waarbij dit onontkoombare gevolg ook in de practijk voorkomt!

Nu reageren de heren Turkstra en Geürsen in hun Psychologisch-Didactische Inleiding (Vijfentwintig jaar later!) op deze voorbeelden als volgt: „Beunk moest in z'n propaedeutische cursus wel komen tot de beschouwing van bananenschillen en kapotte kousen voor de ontwikkeling van het ruimtelijk voorstellingsvermogen"! Ik noem het weinig fraai om door een zo ernstige verdraaiing van de feiten de bedoelingen van de schrijver te willen belachelijk maken! Wie heeft dit artikel nog? De schrijver is misschien allang dood en begraven? Dus wat let ons mannen!

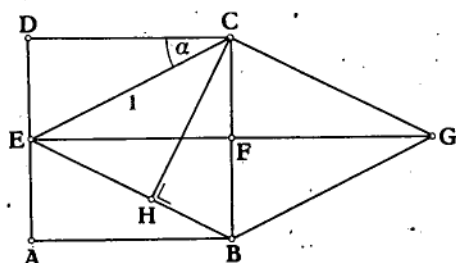
Baarn.

J. Beunk.

XCV.

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a.$$

Het zij mij vergund even de aandacht te vestigen op het volgende eenvoudige bewijs van bovenstaande identiteit. Men gaat



uit van een rechthoek ABCD, waarin de midden-parallel EF getrokken is, terwijl men $EC = 1$ stelt. Stel dan hoek $DCE = a$, dan is hoek $CEB = 2a$. Voorts tekent men de ruit EBGC. Het is direct duidelijk, dat de oppervlakten van ruit en vierkant ge-

lijk zijn.

Berekent men nu deze beide oppervlakten, uitgedrukt in a , dan geldt:

$$AD \cdot DC = EB \cdot CH, \text{ dus } 2 \sin a \cos a = \sin 2a.$$

Dit bewijs is waarschijnlijk niet nieuw, maar ik vond het wel aardig er de aandacht op te vestigen, omdat het slechts gebruik maakt van elementaire beschouwingen, en dus voor het onderwijs zijn nut kan hebben.

M. G. Beumer.

ENIGE ENGELSE „EINDEXAMEN“-OPGAVEN VOOR WISKUNDE, MECHANICA EN NATUURKUNDE.

door

Dr H. H. BUZEMAN.

Men hoort bij ons nogal eens beweren, dat het Engelse M.O. op een lager peil staat dan het onze, althans wat de algemeen culturele en de intellectuele vorming betreft. Of deze uitspraak in zijn algemeenheid juist is waag ik niet te beoordelen. Meet men de waarde van het onderwijs af aan het aantal vakken, dat een leerling heeft te bestuderen, dan zullen wij het wel winnen; meet men die waarde af aan de examen-seisen, in ieder vak afzonderlijk gesteld, dan staan de zaken misschien anders. Kennisneming van de opgaven maant tot voorzichtigheid, zoals hieronder moge blijken. Ter toelichting het volgende:

In Engeland bestaat leerplicht tot het 15e jaar. Op 11-jarige leeftijd komen de kinderen van de lagere school. Zij worden dan onderworpen aan een examen plus intelligentie-test. Het resultaat daarvan bepaalt, wie verder mogen gaan op een grammar school (te vergelijken met ons lyceum) en wie zullen gaan naar een Secondary Modern School (ongeveer onze U.L.O.-school); c.q. Technical School. De leerlingen van de Grammar school doen aan het einde van de vijfde klas, d.i. op 16-jarige leeftijd (doubleren komt heel weinig voor!) het z.g. School Certificate Examination, dat meestal een achttal vakken omvat. Dit examen is in hoofdzaak schriftelijk (voor wiskunde en mechanica uitsluitend). De opgaven worden op gezag van een of meer Universiteiten samengesteld door een centrale Commissie (waarin ook leraren zijn opgenomen), die tevens het gemaakte werk corrigeert en beoordeelt en tevens de uitslag vaststelt en aan de scholen meedeelt.

Van de geslaagden gaat een deel de school verlaten (de praktijk in); een ander deel blijft op school in de zesde klas, die twee jaar duurt, en waarin iedere leerling onderwijs krijgt in minstens drie, meestal vier vakken. Aan het einde hiervan, dus op 18-jarige leeftijd, volgt het Higher School Certificate Examination, dat op dezelfde wijze georganiseerd is als dat voor het S.C. en dat de gekozen vier vakken omvat. De Joint Matriculation Board van de

Universiteiten van Manchester, Liverpool, Leeds, Sheffield and Birmingham, die dit examen verzorgt voor een groot aantal Grammar Schools in de Noordelijke helft van Engeland, heeft mij toegestaan, de examenopgaven voor wiskunde en mechanica te publiceren. Zij volgen hieronder.

Het H.S.C. is met het S.C. strikt nodig als entrée voor de vijf Noordelijke universiteiten, maar niet voor alle andere. De eisen voor deze zijn lager. Oxford en Cambridge evenwel stellen hogere eisen, die na het H.S.C. nog verscheidene maanden studie vergen.

Studie-beurzen worden gegeven, behalve door de Staat, de Graafschappen en de Gemeenten, door de Universiteiten. Wie voor een Universiteits-„scholarship” in aanmerking wil komen moet nog eens examen doen in het studie-vak zijner keuze. Een voorbeeld van de opgaven voor wiskunde, mechanica en natuurkunde is hieronder eveneens opgenomen; alle opgaven zijn van 1949.

UNIVERSITIES OF MANCHESTER, LIVERPOOL, LEEDS, SHEFFIELD AND BIRMINGHAM

Higher School Certificate Examination

PURE MATHEMATICS. PRINCIPAL SUBJECT Paper I

Answer nine questions.

Section (1)

1. (a) Solve the simultaneous equations

$$xy = 4, \quad 2x^2 + 3y^2 = 22.$$

- (b) If α, β are the roots of the quadratic equation

$$x^2 + 2px + q = 0,$$

prove that

$$2 \log \{ \sqrt{(y - \alpha)} + \sqrt{(y - \beta)} \} = \log 2 + \log \{ y + p + \sqrt{(y^2 + 2py + q)} \}.$$

2. If x is real and

$$y = \frac{5x^2 + 8x + 4}{x^2 + x},$$

prove that y cannot lie between -4 and $+4$.

Find the coordinates of the turning points of the graph of y , and the value of x at the point where the graph crosses its horizontal asymptote. Sketch the graph from $x = -3$ to $x = +3$.

3. How many sets of 4 cards is it possible to select from an ordinary pack of 52 playing cards, each set of 4 being drawn from the complete pack?

How many of these sets will contain (a) one, and only one, ace, (b) two, and only two, aces, (c) at least one ace?

4. (a) Find the first five terms of the expansion of $(1 - 4x)^{\frac{1}{2}}$ in ascending powers of x .

(b) Find the values of the constants a, b, c in the approximate formula

$$\log_e \frac{1+x}{1-x} - \frac{2x(1-ax^2)}{1-bx^2} = cx^7$$

in which x is so small that powers of x above the seventh have been neglected.

5. (a) Prove that in any triangle, with the usual notation,

$$(i) rs = \Delta, \quad (ii) 4R\Delta = abc.$$

$$\Delta = \frac{abc}{4R}$$

(b) If A, B, C, D denote the interior angles at the vertices of any plane quadrilateral ABCD, show that

$$\sin(A+B)\sin(B+C) = \sin A \sin C - \sin B \sin D.$$

Section (2)

6. (a) Find a general formula for all the angles θ that satisfy the equation $\tan \theta = \sqrt{3}$.

Find all the angles θ , between 0° and 360° , that satisfy

$$(i) \tan 2\theta = \sqrt{3}; \quad (ii) \tan \frac{1}{2}\theta = \sqrt{3}.$$

(b) Find all the angles θ , between -180° and $+180^\circ$, that satisfy the equation

$$\operatorname{cosec}^2 \theta - 2 \sec^2 \theta = 1.$$

7. (a) Given that $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$, show that

$$(i) 2 \sin^2 \theta = 1 - \cos 2\theta;$$

$$(ii) 8 \sin^4 \theta = 3 - 4 \cos 2\theta + \cos 4\theta;$$

$$(iii) \frac{1 - (2 \sin 15^\circ)^4}{1 + (2 \sin 15^\circ)^4} = \sin 60^\circ.$$

(b) If $x = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta$ and $y = (a-b) \sin \theta \cos \theta$, express x and y in terms of 2θ , and then eliminate θ .

8. Each of the three lines OA, OB, OC makes an angle α with each of the others, and they do not all lie in one plane. Prove that the cosine of the angle between the planes AOB and AOC is $\cos \alpha / (1 + \cos \alpha)$.

Prove also that, if OD makes an angle θ with each of the three lines, then

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{\alpha}{2}.$$

9. (a) Prove that, if a transversal meets the sides BC, CA, AB of a triangle in the points P, Q, R respectively, then

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1.$$

(b) Prove that, if a transversal meets the sides AB, BC, CD, DA of a quadrilateral in the points P, Q, R, S respectively, and if $AS/SD = BQ/QC$, then $AP/PB = DR/RC$.

10. What is meant by the statement that two figures are in similitude with the point O as a centre of similitude?

Prove that the two parabolas $y^2 = 4ax$, $y^2 = 4bx$ are in similitude with the origin as the centre of similitude.

Find the coordinates of the two centres of similitude of the two circles

$$(x - a)^2 + y^2 = r^2, \quad (x - b)^2 + y^2 = s^2.$$

PURE MATHEMATICS. PRINCIPAL SUBJECT Paper II

Answer nine questions.

Section (I)

1. (a) If m is the gradient of the hypotenuse of an isosceles right angled triangle drawn in the plane of a pair of rectangular axes OX, OY, find the gradients of the other sides of the triangles.

(b) Determine the coordinates of P, Q, the feet of the perpendiculars drawn from the origin O to the lines

$$x + y - 2 = 0, \quad 2x - y + 5 = 0$$

respectively.

If A is the point of intersection of the lines and PQ meets OA in M, determine the value of PM/MQ.

2. Explain the term *line of greatest slope* of a plane inclined to the horizontal.

A triangular lamina ABC in which $AC = CB = 8$ in and angle ACB is a right angle, is held in such a way that the vertical height of C above A is $2 \cdot 4$ in. and the vertical depth of B below A is $0 \cdot 8$ in. If P is the point in BC which is on the same level as A, determine the length of CP. Determine also the perpendicular distance of C from AP, and deduce the inclination of the lamina to the horizontal.

3. State and prove the formula for the area of the zone of a sphere of radius a , intercepted between two parallel planes distant h apart.

An open cubical box of edge 2 ft., made of material of negligible thickness, is placed with its base on a horizontal table. A sphere of radius 13 in. rests upon the four upper edges. Find

- (i) the height of the highest point of the sphere above the table,
- (ii) the area of that part of the surface of the sphere that is within the box.

4. Find the equation of the circle S that passes through the point (0, 6) and also through the points of intersection of the circle $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 32 = 0$ with the line $x - y + 2 = 0$.

If A, B are the points (8, 4), (0, 10) respectively, prove that AB touches the circle S, and determine the coordinates of the point C which is such that the circle touches the sides of the triangle ABC.

5. If the tangents to the parabola $y^2 = 4ax$ at the points $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ meet at (x_0, y_0) , show that

$$a^2(t_1 - t_2)^2 = y_0^2 - 4ax_0.$$

The chord of fixed gradient m through a variable point P on the parabola meets the curve again in Q, and the chord of gradient $2m$ through P meets

the curve again in R. Show that the locus of the intersection of the tangents at Q and R is a curve whose equation is of the form $y^2 - 4ax = k$, and state the value of k in terms of a and m .

Section(2)

6. Obtain the equation of the normal to the ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ at the point $(a \cos \theta, b \sin \theta)$. The normal at P to the ellipse meets the x -axis at A and the y -axis at B. Show that the locus of Q, the mid-point of AB, is an ellipse whose eccentricity is the same as that of the original ellipse. Also, if the eccentric angle of P is $\pi/4$, show that PQ is a tangent to the second ellipse.

7. (a) Find the derivatives with respect to x of the functions

- (i) $x \tan^{-1} x - \log \sqrt{1+x^2}$,
 (ii) $(2 \sin 2x - \cos 2x + 5)e^{-x}$.

(b) The abscissa x of a point P moving along the x -axis is given in terms of the time t by the equation

$$x = 16(e^{-t} - e^{-2t}).$$

Determine the acceleration when P reaches its maximum distance from O and the maximum speed in the subsequent motion.

8. (a) Determine the coordinates of the points of maximum or minimum gradient on the curve $y = 48x^2 - 8x^4$, and calculate the area of the triangle formed by the tangents at these points and the x -axis.

(b) A variable line is drawn above the x -axis and parallel to it, meeting the parabola $ay = a^2 - x^2$, ($a > 0$), at the points P, Q. Lines parallel to the y -axis are drawn through P, Q to meet the x -axis at S, R respectively. Show that the maximum area of the rectangle PQRS is $4a^2/3\sqrt{3}$.

9. (a) Find

$$(i) \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x}} dx \quad (ii) \int \sin^3 x \cos^3 x dx.$$

(b) Find the value of a for which

$$\int_0^1 \frac{x-a}{(x+1)(3x+1)} dx = 0.$$

10. Make a rough sketch of the parabola

$$4y = 3x^2 - 2x + 3,$$

and verify that the tangents at P(1, 1), Q(-1, 2) pass through the origin O.

Determine the area bounded by these tangents and the arc of the parabola between the points of contact.

Find also the volume generated by a complete revolution about the x -axis of that part of the above area that lies in the first quadrant.

APPLIED MATHEMATIC. PRINCIPAL SUBJECT Paper I

Answer seven questions.

(Take g to be 32 ft./sec.²)

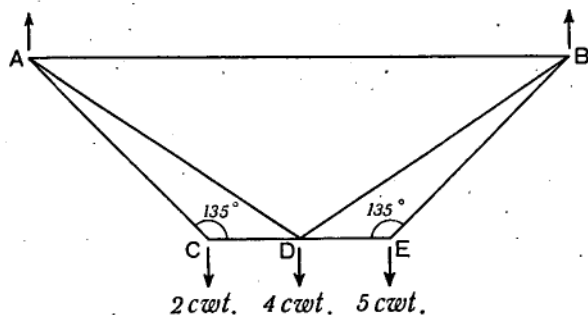
Section (1)

1. In a trapezium ABCD in which AB and DC are parallel, E and F are points in the side DC such that DE = 3 in., EF = 4 in., FC = 3 in. and ABFE is a square of side 4 in. Forces of magnitudes 27, 10, 15, 15 lb. wt. act along BA, BC, DC, DA respectively in the directions indicated by the order of the letters. Find the magnitude of their resultant. If the line of action of the resultant cuts CD at L and CB at M, find the distance CL, and show that M is the mid-point of BC.

2. A uniform rigid wire of length 40 cm. and mass 80 gm. is bent into the form of a right-angled triangle ABC in which AB = 8 cm., AC = 15 cm. and BC = 17 cm. Find the distances from AB and AC of the centre of gravity of the bent wire.

The wire is freely pivoted to a fixed point at A and hangs in a vertical plane. Find the mass of the particle which must be attached to the point B in order that the wire may hang in equilibrium with BC horizontal.

3. The figure shows a framework of seven light freely-jointed rods supported in a vertical plane by vertical forces at A and B with AB and CDE horizontal. The rods AC and BE are each inclined at 45° to the horizontal, and AB = 3CE, CD = CE. Loads of 2, 4 and 5 cwt. are attached at C, D and E respectively. Find graphically the stresses in all the rods, and state whether they are tensions or thrusts.



4. An aeroplane which flies at 200 m.p.h. in still air is to travel in a straight line from a point A to a point B due N.E. of A, the distance AB being 360 miles. If the wind blows steadily at 40 m.p.h. from the north, show that the aeroplane must be headed in a direction $\sin^{-1}(3/5)$ east of north, and find the time taken on the journey.

If the wind continues to blow as before, find the direction in which the aeroplane must be headed in order to return in a straight line from B to A, and find the time of the return journey.

Section (2)

5. Define *power*, and show that when the point of application of a force P lb. wt. moves at speed v m.p.h. in the direction of the force, the horse-power is $Pv/375$.

The resistance to motion of a train of total mass 300 tons is 3,600 lb. wt. The greatest tractive force which the engine can exert is 6,000 lb. wt. and the greatest horse-power is 480. The train starts from rest and moves along a level line with the greatest possible acceleration. Show that the engine first develops its greatest horse-power when the speed is 30 m.p.h. Find the acceleration in ft. sec. units when the speed is (i) 20 m.p.h., (ii) 40 m.p.h. Find also the greatest possible speed of the train.

6. A fine smooth straight tube of length l is fixed at an angle α with the horizontal. A particle is projected inside the tube from its lower end A with initial velocity $\sqrt{2gh}$; after issuing from the upper end of the tube the particle moves freely under gravity and meets the horizontal plane through A at a point C. If the direction of motion at C is inclined at angle φ to the horizontal, show that

$$\cos \varphi = \cos \alpha \sqrt{\{(h - l \sin \alpha)/h\}}.$$

If $AC = c$, show that

$$h = l \sin \alpha + \frac{(c - l \cos \alpha)^2}{4c \sin \alpha \cos \alpha}.$$

7. A hollow right circular cone of semi-angle α is placed with its axis vertical and vertex O downwards. Show that if the inner conical surface is smooth, a particle can move on it in a horizontal circle with uniform angular velocity ω provided the circle is at a height $g/(\omega \tan \alpha)^2$ above the horizontal plane through O.

If the surface is rough, with coefficient of friction μ ($\mu < \tan \alpha < 1/\mu$), and the cone is rotating about its axis with uniform angular velocity ω , show that in order that the particle may be carried round in a horizontal circle without moving relative to the cone, the height of the circle above the horizontal plane through O must lie between the values

$$\frac{g \cot \alpha - \mu}{\omega^2 \tan \alpha + \mu} \quad \text{and} \quad \frac{g \cot \alpha + \mu}{\omega^2 \tan \alpha - \mu}.$$

8. A uniform rectangular lamina ABCD of mass m in which $AB = 2a$, $BC = 4a$ is free to rotate about a fixed horizontal axis which is perpendicular to its plane and passes through O, the mid-point of AB. Show that the moment of inertia of the lamina about this axis is $17 ma^2/3$.

When the lamina is at rest with AB horizontal and uppermost, a particle of mass $2m$ is attached to it at B without impulse. Show that in the subsequent motion the lamina will be momentarily at rest when AB is vertical, and find an expression for ω , the angular velocity of the lamina when AB is inclined at angle θ to the horizontal. Show also that when AB is vertical, the vertical component of the reaction at O is $57 mg/23$, and find the horizontal component.

APPLIED MATHEMATICS. PRINCIPAL SUBJECT Paper II

Answer seven questions.

(Take g to be 32 ft./sec.²)

Section (1)

1. Three uniform rods AB, BC, CD, equal in length and of weights w , $2w$, and $3w$ respectively, are freely jointed at B and C and freely hinged

to a fixed point at A. The rods hang in equilibrium inclined at angles α , β and γ respectively to the vertical under the action of a horizontal force $4w$ applied at D. Show that $\tan \gamma = \frac{8}{3}$ and find the angles α and β .

2. Two rods OA, OB are fixed in a vertical plane with O uppermost, each rod making an acute angle α with the vertical. Two smooth rings of equal weight w which can slide, one upon each rod, are connected by a light inextensible string, upon which slides a third smooth ring of weight $2w$. Show that in the symmetrical position of equilibrium the ratio of the distance from O of the third ring to the distance from O of either of the others is $\frac{1}{2}(\sec \alpha + \cos \alpha)$.

3. A hemisphere of radius a whose centre of gravity is on its axis of symmetry at a distance b from the centre of its base rests with its curved surface in contact with a rough horizontal floor, coefficient of friction μ_1 , and a rough vertical wall, coefficient of friction μ_2 . If the hemisphere is about to slip when its base makes an angle θ with the horizontal, show that

$$\sin \theta = \frac{a\mu_1(1 + \mu_2)}{b(1 + \mu_1\mu_2)}$$

4. A particle moves with uniform acceleration in a straight line. Show; graphically or otherwise, that the distance described in a given interval of time is the product of the time and half the sum of the initial and final velocities.

A train is scheduled to make a run of 21 miles from rest to rest in 32 minutes. Initially it moves with uniform acceleration until it reaches its maximum speed which it maintains for 28 minutes and is then brought to rest by a uniform retardation. On a certain journey, owing to a check on the stretch where maximum speed should have been maintained, the speed was reduced uniformly to 10 miles per hour and immediately accelerated uniformly to its former value, the total time during which the speed was below the maximum on account of the check being 3 minutes. Find how late the train was in arriving at its destination.

Section (2)

5. A smooth horizontal circular tray, centre O, has a smooth vertical rim round its edge. A particle is projected horizontally with velocity u from a point A just inside the rim, and after two impacts with the rim returns to A. If the original velocity of projection makes an angle α with the radius AO and V is the velocity with which the particle again reaches A, show that

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & (1 + e + e^2) \tan^2 \alpha = e^2, \\ \text{(ii)} \quad & V^2 = e^3 u^2, \end{aligned}$$

where e is the coefficient of restitution between the particle and the rim.

6. Define *simple harmonic motion* and show that if a particle describes a circle with uniform angular velocity, its projection on any fixed diameter of the circle moves with simple harmonic motion.

A particle is moving with simple harmonic motion in a straight line, its acceleration at any point being n^2 times its distance from a point O in the

line. If v is its velocity when at a distance b from O, show that the intervals of time between the instants when the velocity has the numerical value v are alternately

$$\frac{2}{n} \tan^{-1} \frac{nb}{v} \quad \text{and} \quad \frac{2}{n} \cot^{-1} \frac{nb}{v} \quad 1)$$

7. A heavy particle is attached to a fixed point O by a light inextensible string of length l . The particle is held initially with the string taut and inclined at an acute angle α with the upward-drawn vertical at O and is then allowed to fall. Show that the velocity of the particle when it is vertically below O is

$$\sqrt{\{2gl(1 - \cos \alpha \cos 2\alpha)\}}.$$

8. (a) Show that the moment of inertia of a uniform circular disc of mass M and radius a about an axis through its centre perpendicular to its plane is $\frac{Ma^2}{2}$. Deduce that

(i) the moment of inertia of the disc about an axis through a point on its circumference and perpendicular to its plane is $\frac{3Ma^2}{2}$,

(ii) the moment of inertia of the disc about a tangent is $\frac{5Ma^2}{4}$.

(b) The centre of a uniform circular disc is O, and OA is a radius. The mid-point of OA is C. A circle, centre C and radius CO, is cut from the disc. Compare the times of the small oscillations of the lamina so formed when swinging freely about a horizontal axis through A when

(i) the axis is perpendicular to the plane of the lamina.

(ii) the axis is a tangent to the lamina.

APPLIED MATHEMATICS SCHOLARSHIP PAPER

1. A uniform rod of length $2a$ and mass m_1 is suspended by means of a light inextensible string of length $2l$ ($l > a$) fastened to its ends and passing over a small smooth fixed peg. A particle of mass m_2 is attached to the rod at a distance d from its mid-point. If the rod hangs freely at rest, prove that there is a position of equilibrium in which the lengths of the two portions of the string are

$$l\left(1 + \frac{\lambda d}{a}\right) \quad \text{and} \quad l\left(1 - \frac{\lambda d}{a}\right)$$

where $\lambda = m_2/(m_1 + m_2)$.

Prove that the tension in the string is

$$\frac{(m_1 + m_2)gl}{2a} \sqrt{\left(\frac{a^2 - \lambda^2 d^2}{l^2 - a^2}\right)}.$$

2. Four uniform rods AB, BC, CD, DE, each of length a and mass m , are freely hinged to one another at B, C, D and freely hinged to fixed points A, E which are in the same horizontal plane at a distance $a \operatorname{cosec} \frac{\pi}{8}$ apart.

1) $\tan^{-1}$ betekent bg tg.

Prove that the rods will hang in equilibrium in the form of half of a regular octagon if equal and opposite couples are applied either to AB and DE, or to BC and CD.

Prove that the ratio of the moments of the couples in the two cases is $-\cot \frac{\pi}{8}$.

3. A light inextensible string of length $2b$ is attached to one end A of a uniform rod AB of length $2a$, the other end of the string being attached to a fixed point C on a vertical wall. The end B of the rod rests against the wall vertically below C, and BA makes an angle θ with the downward vertical, the rod being in a vertical plane perpendicular to the wall. If the wall is smooth, prove that there can be equilibrium only if $a < b < 2a$, and that then

$$\sin \theta = (4a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}/a\sqrt{3}.$$

If the wall is rough and the angle of friction between the rod and wall is λ , show that if

$$\cos \lambda \leq \frac{ab}{|2a^2 - b^2|},$$

limiting equilibrium is possible for any value of the ratio of b to a .

4. Two boats move with constant speed u relative to water, and both cross a straight river of constant width a which flows with constant speed v . One crosses by the shortest path and the other crosses in the shortest time. Prove that the difference between the times taken to cross is either

$$\frac{a}{u} \left\{ \frac{v}{(v^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\} \quad \text{or} \quad \frac{a}{u} \left\{ \frac{u}{(u^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right\}$$

according as v or u is the greater.

5. A man travels with constant speed u along a circular track of radius r on a horizontal plane. He throws a ball with velocity v relative to his body so that the ball hits the plane at the centre of the track. If the height of the ball above the plane at the instant of projection is neglected, prove that v^2 is not less than $u^2 + gr$.

6. Two small smooth pegs are fixed at A and B, where AB is horizontal and of length a , and C and D are vertically below B and A respectively such that $BC = AD = a$. A light elastic string of unstretched length $2a$ and modulus mg passes over the pegs, its ends are fixed at C and D, and a particle of mass $2m$ is attached to its mid-point. Prove that the equilibrium position of the particle is at the mid-point of CD.

If the particle is released from rest at the mid-point of AB, prove that it will first reach its equilibrium position in a time

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{\left(\frac{a}{g} \right)}.$$

7. Two equal scale pans, each of mass m_1 , are connected by a long light inextensible string which passes over a fixed smooth pulley. Initially the scale pans hang freely at rest. Two particles of equal mass m_2 , one inelastic and the other elastic with coefficient of restitution e , fall vertically one into

each scale pan, and strike at the same instant with equal velocities u . Prove that the elastic particle will again strike the corresponding scale pan after a time

$$\frac{eu(2m_1 + m_2)}{g(m_1 + m_2)}$$

8. Two particles A and B, of masses m_1 and m_2 respectively, are joined by a light inextensible string which passes through a small smooth ring fixed on a smooth horizontal plane on which the particles are free to move. The system is initially at rest with the string taut and B at a distance c from the ring. The particle B is projected on the plane with velocity u in a direction perpendicular to the part of the string between it and the ring. Prove that, when the distance of B from the ring is r , the speed of A is

$$\left[\frac{m_2 u^2}{m_1 + m_2} \left(1 - \frac{c^2}{r^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

while r is less than the length of the string.

9. A uniform circular cylinder of radius a is projected up a fixed rough inclined plane of angle α , the axis of the cylinder being horizontal and parallel to the plane. If the initial speed of the cylinder is u and there is initially no rotation, prove that slipping momentarily ceases after a time

$$u/g(\sin \alpha + 3\mu \cos \alpha)$$

where μ is the coefficient of friction.

Show also that if $\mu \geq \frac{1}{3} \tan \alpha$, the cylinder subsequently rolls without slipping.

PURE MATHEMATICS. SCHOLARSHIP PAPER

1. (a) Show that $x(x-1)(x-2)(x-3)$ differs by a constant from a perfect square. Determine the range or ranges of values of x for which

$$64x(x-1)(x-2)(x-3) < 17.$$

(b) Sketch the graph of the function $|x|/(1+x)$.

2. (a) Prove that

$$\{1 \cdot n + 2 \cdot (n-1) + 3 \cdot (n-2) + \cdots + (n-1) \cdot 2 + n \cdot 1\}/n^3$$

tends to a limit as $n \rightarrow \infty$, and find this limit.

(b) Sum the infinite series

$$\frac{\log 3}{1!} + \frac{(\log 3)^3}{3!} + \frac{(\log 3)^5}{5!} + \cdots$$

(c) Find the sum to infinity of the series

$$1 + (1+x)y + (1+x+x^2)y^2 + (1+x+x^2+x^3)y^3 + \cdots$$

stating the conditions under which the sum exists.

3. (a) If $\tan \frac{1}{2}\theta = \tan \frac{1}{2}\alpha \tan \frac{1}{2}\beta$, prove that

$$\cos \theta = (\cos \alpha + \cos \beta)/(1 + \cos \alpha \cos \beta).$$

(b) Show that, if $m < 0$, the equation

$$\tan 2\theta + m \tan \theta + n = 0$$

has just three roots in the range $|\theta| < \frac{1}{2}\pi$, that the roots are distinct, and that just one of them lies in the range $|\theta| < \frac{1}{4}\pi$. Show also that, if the roots are denoted by $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, then $\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) = -n/(m+1)$.

4. Variable points P, Q move on fixed lines OA, OB respectively, so that the segment PQ is of constant length. The perpendicular from P to OB meets the perpendicular from Q to OA in R. Prove that R moves on a circle of centre O.

5. (a) Four circles are arranged inside a square so that each circle touches two sides of the square and also touches two other circles. Prove that there are two pairs of equal circles.

(b) Points X, Y, Z are taken, one on each of three mutually perpendicular concurrent lines. Prove that the triangle XYZ is acute-angled.

6. The directrix corresponding to a focus F of an ellipse meets the major axis of the ellipse in G. A line through G meets the ellipse at P and Q. If FP meets the ellipse again at R, prove that QR is parallel to the minor axis of the ellipse.

7. Sketch the curve

$$(a^2 + x^2)y = a^2(a - x)$$

where $a > 0$. Verify that the three points of inflexion are collinear.

8. The normal at P on the parabola $y^2 = 4ax$ meets the parabola again in Q. Find the minimum length of PQ.

9. (a) Find the n th derivative of $\frac{1}{x^2(1-x)}$.

(b) Evaluate $\int_x^\infty \frac{dt}{t^5(t-1)}$ where x is greater than 1.

10. (a) Prove that $2 \sin x + \tan x > 3x$ for $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

(b) Evaluate $\int_{-1/6\pi}^{1/6\pi} \frac{dt}{3 \cos t + \cos^3 t}$.

PRACTICAL PHYSICS. PRINCIPAL SUBJECT Alternative A

Answer two questions.

1. Find the lengths (l) of a stretched wire, held at constant tension, which vibrate with the same frequencies (n) as four given tuning forks. Plot a graph with $\log n$ and $\log l$ as coordinates and deduce the relation between n and l .

2. Put some of the crystalline solid provided into a test tube, to a depth of about 5 cm. Fix the tube in the clamp of a retort stand and lower it into water in a beaker standing on a tripod. Heat the water, observe what happens to the substance and record at one minute intervals the temperature

shown by a thermometer placed in it. When it has attained 65°C ., remove the tube from the water and allow it to cool in free air, continuing the temperature readings down to 40°C . Then add a crystal of the solid and continue the observations for another five minutes. Use the thermometer as a stirrer.

Plot a temperature-time graph with all your readings and comment on it. Also determine the rate of cooling at 50°C .

3. Place a converging lens in a holder with its principal axis horizontal and fix a plane mirror behind and in contact with it. Use a pin method

(a) to find the focal length of the lens (f),

(b) to locate, with the mirror still in position, five real images when an object is placed symmetrically at right angles to the principal axis of the lens and at five different distances in front of it. Calling the distances from the lens of object and image u and v respectively and considering u , v and f all as positive magnitudes, plot a graph of $\log(u - f/2)$ and $\log(v - f/2)$. Deduce a relation between u , v and f from the graph. (No credit will be given for a theoretical treatment of the problem.)

4. Connect a cell and a reversing key to a tangent galvanometer and a resistance box joined in series. (The cell to be used is an accumulator whose effective internal resistance has been increased by joining one end of a fixed resistance to one of its terminals: use the terminals indicated by the Supervisor). Note the galvanometer deflections with five different resistances in the box and plot a graph showing how the power consumed by the resistance in the box varies with the magnitude of that resistance. Deduce from the graph the total resistance of the circuit excluding the resistance in the box.

PHYSICS. PRINCIPAL SUBJECT Paper I

Answer **six** questions including:

(a) **four** from Section (1); (b) **two** from Section (2).

Section (1)

1. What is understood by (a) the principle of the *conservation of energy*, (b) the principle of the *conservation of momentum*?

A bullet of mass 20 gm., travelling horizontally at 100 metres per sec., imbeds itself in the centre of a block of wood of mass 1 kgm. which is suspended by light vertical strings 1 metre in length. Calculate the maximum inclination of the strings to the vertical.

Describe in detail how the experiment might be carried out and used to determine the velocity of the bullet just before the impact with the block.

2. Define *surface tension* and derive an expression for the pressure difference for equilibrium between the two sides of a spherical liquid surface.

Describe how you would determine the surface tension of soap solution by measurements made on **either** (a) a soap bubble **or** (b) a soap film.

Two bubbles of unequal size are blown on the two ends of a tube, communication between the bubbles being prevented by means of a closed tap in the tube. Describe and explain what happens when the tap is opened.

3. Describe the nature of the disturbance set up in air by a vibrating tuning fork and show how the disturbance can be represented by a sine curve. Indicate on the curve the points of (a) maximum particle velocity, (b) maximum pressure.

What characteristics of the vibration determine the pitch, intensity and quality respectively of the note?

4. Define the various coefficients of expansion of a substance which are appropriate to each of its three physical states. Comment on the relation (a) between the coefficients in the solid state, (b) between the coefficients in the liquid state.

An iron rod of cross-sectional area 0.72 sq. cm. is heated so that its temperature is increased by 100 deg. C. What force will be required to hold the rod at its expanded length when the rod is cooled to its original temperature? Express your answer in kilogram-wt. (Take the coefficient of linear expansion of iron as 1.1×10^{-6} per deg. C. and Young's modulus for iron as 2.0×10^{12} dynes per sq. cm.)

5. Describe the determination of the latent heat of fusion of ice by the method of mixtures and, in particular, show how allowance is made for heat interchange with the surroundings.

A calorimeter of water equivalent 20 gm. contains 980 gm. of water supercooled to -4° C. Taking the latent heat of fusion of ice at 0° C. as 80.0 calories per gm., find the amount of ice formed when the water suddenly freezes. Calculate also the latent heat of fusion at -4° C. if the specific heat of ice is 0.5.

6. Define *dew point* and explain what is meant by *relative humidity*. Describe how you would determine the dew point of the atmosphere. What is the relative humidity of an atmosphere whose temperature is 16.3° C. if its dew point is 12.5° C.? The following table gives the saturation pressure, P, of water vapour in mm. of mercury at various temperatures, t.

t° C.	10	12	14	16	18	20
P mm.	9.20	10.51	11.98	13.62	15.46	17.51

Section (2)

7. Derive an expression for the moment of inertia of a uniform circular disc of mass M, radius r, about a central axis perpendicular to its plane. How would you determine this moment of inertia experimentally?

A circular disc of mass 800 gm., radius 10 cm., is suspended by a wire through its centre perpendicular to its plane and makes 50 torsional oscillations in 59.8 sec. When an annulus is placed symmetrically on the disc, the system makes 50 oscillations in 66.4 sec. Calculate the moment of inertia of the annulus about its axis of rotation.

8. Define *coefficient of viscosity*.

For orderly flow of a given liquid through a capillary tube of length l, radius r, the volume of liquid issuing per sec. is proportional to $\frac{pr^4}{l}$ where p is the pressure difference between the ends of the tube. How would you

verify this relation experimentally for water at room temperature? How would you detect the onset of turbulence?

9. Write a concise essay on the contributions of Copernicus, Kepler and Newton to the study of gravitation.

Describe a laboratory experiment by which the gravitational constant has been measured.

10. Give a brief account of the principles underlying the establishment of a scale of temperature and explain precisely what is meant by the statements that the temperature of a certain body is (a) $t^{\circ}\text{C}$. on the constant volume air scale, (b) $t_p^{\circ}\text{C}$. on the platinum resistance scale, and (c) $t_T^{\circ}\text{C}$. on the Cu-Fe thermocouple scale. Why are these three temperatures usually different?

Describe an optical pyrometer and explain how it is used to measure the temperature of a furnace.

11. How would you determine the relation between pressure and volume for dry air at constant temperature over a range of pressure from about half an atmosphere to two atmospheres?

Describe, with the aid of graphs, how the behaviour of carbon dioxide at various temperatures deviates from Boyle's Law.

12. Use the kinetic theory to derive an expression for the pressure of a gas, pointing out any assumptions made.

Calculate the root mean square velocity of oxygen molecules at 17°C . and 745 mm. of mercury pressure if the density of oxygen at S.T.P. is 0.00143 gm. per c.c. and that of mercury is 13.6 gm. per c.c.

PHYSICS. PRINCIPAL SUBJECT Paper II

Answer six questions including:

(a) four from Section (1); (b) two from Section (2).

Section (1)

1. Describe how you would determine the focal length of a diverging lens if you were provided with a converging lens (a) of shorter focal length, (b) of longer focal length.

An illuminated object is placed at right angles to the axis of a converging lens, of focal length 15 cm., and 22.5 cm. from it. On the other side of the converging lens, and coaxial with it, is placed a diverging lens of focal length 30 cm. Find the position of the final image (a) when the lenses are 15 cm. apart and a plane mirror is placed perpendicular to the axis 40 cm. beyond the diverging lens, (b) when the mirror is removed and the lenses are 35 cm. apart.

2. Draw a diagram of a photometer suitable for the comparison of the intensities of light sources and explain the principles involved in its use.

Two sources of light are adjusted so as to produce equal illuminations at a photometer. One source at 50 cm. has to be moved 5 cm. nearer to restore the balance when a sheet of plain glass is interposed between it and the photometer. Find the percentage light transmitted.

How much nearer would this source have to be moved if a second similar sheet of glass were introduced?

3. Define the absolute electromagnetic unit of current and also the practical unit.

Describe how you would determine the value of the horizontal component of the earth's magnetic intensity with the aid of a tangent galvanometer and a copper voltmeter.

A tangent galvanometer is set with the plane of the coil parallel to the magnetic meridian. A short bar magnet is placed so as to lie along the axis of the coil perpendicular to its plane and 30 cm. from its centre, and a current of such magnitude and direction is sent through the coil as to result in zero deflection of the needle. On removing the bar magnet and turning the plane of the coil through 50° , the needle points E. and W. Calculate the magnetic moment of the magnet, assuming that the horizontal component of the earth's magnetic field is 0.18 oersted.

4. Define the terms *potential* and *capacity* of a conductor as used in electrostatics.

Describe how you would use an electroscope or electrometer to compare the capacities of two condensers, each of small capacity.

The plates of an oil filled condenser are charged to a potential difference of 200 volts. When an air condenser of the same dimensions is connected in parallel with it, the potential falls to 150 volts. What is the dielectric constant of the oil?

5. Calculate the resistivity of mercury if a thread 50 cm. long in a tube of 1 mm. internal diameter has a resistance of 0.61 ohms.

Describe a method suitable for determining the resistivity of mercury supplied in a tube having dimensions of the order of magnitude mentioned. Give reasons for the procedure adopted.

6. Answer **two** of the following:

- Explain the use of a laminated soft iron core in a transformer.
- Explain the unidirectional conductivity of a diode and give **one** application.
- Describe a photo-cell and give **one** application.

Section (2)

7. (a) Show by means of a diagram the general distribution of temperature in the atmosphere and explain briefly the terms *troposphere*, *stratosphere*, *lapse rate* and *inversion*. Why may a cloud layer act as a kind of thermostat controlling the ground temperature?

(b) What are the conditions necessary for the condensation of water vapour in the atmosphere? How are these fulfilled in the formation of fog and cloud?

8. Discuss the terms *intensity* and *loudness* as applied to sound.

A concert hall has a domed ceiling which is a portion of a sphere whose centre of curvature is at floor level. Assuming the source of sound to be at this level explain why, from the acoustical standpoint, the design is not

good and would be much improved by doubling the radius of curvature of the dome without altering its maximum height above the floor.

Explain why the acoustical properties of a concert hall may vary with the size of the audience.

9. Draw a diagram to show the paths through a telescope of three rays from a non-axial point on a distant object.

Show that when a telescope is in normal adjustment the magnification is equal to the diameter of the rim of the object glass divided by the diameter of its image formed by the eyepiece.

Explain why very large telescopes are usually 'reflectors', i.e. have mirrors as object glasses.

10. Describe one experiment which supports the idea that light is a wave motion, and another which demonstrates the transverse nature of these waves.

How has it been shown that X-rays exhibit the characteristics of waves whose wave-lengths are about one-thousandth of those of visible light?

11. A closed flat coil is rotated with uniform angular velocity about a diametral axis which is perpendicular to a uniform magnetic field. Show that an alternating e.m.f. is produced in the coil. Indicate by a diagram the relative magnitude and direction of the e.m.f. for various positions of the coil during one revolution.

Describe how these deductions can be confirmed by the use of a cathode ray oscillograph.

12. What properties of cathode rays are utilized in finding the ratio of their charge to their mass? Describe a method of finding this ratio.

The ratio e/m for cathode rays is found to be 1.76×10^7 e.m.u. per gm.; the electrochemical equivalent of hydrogen is 1.05×10^{-5} gm. per coulomb. Compare the mass of the electron with the mass of the hydrogen atom (expressing the result as a fraction).

Verslag van de Vergadering van de groep L.I.W.E.NA.G.E.L. op Drakenburg, 2 September 1949.

De voorzitter opent de vergadering en zegt: „Daar er dit jaar 2 vergaderingen gehouden worden — de huidige en de traditionele Liwenagel-vergadering in de kerstvacantie — zal het bestuur thans geen verslag uitbrengen over de sinds de Januarivergadering verrichte arbeid. Op de vergadering in de kerstvacantie zal dan een uitvoerig jaarverslag over de bestuurswerkzaamheden worden gegeven. Mocht iemand nadere inlichtingen wenssen over een of ander bepaald onderwerp van actie, dan zal het bestuur daarover — voor zover mogelijk — reeds thans gaarne inlichtingen verstrekken.

Het bestuur heeft gemeend twee onderwerpen aan de orde te moeten stellen, waaromtrent het gaarne de mening van zoveel mogelijk leden zou willen vernemen, t.w.:

- 1e. Behandeling van eventuele wenssen omtrent de regeling van het eind-examen Gymnasium.
- 2e. Behandeling van het probleem: Is onderwijs in infinitesimaalrekening op het Gymnasium B wenselijk?

Het zou het bestuur verheugen, indien bij de rondvraag zou blijken, dat uit de kring der ter vergadering aanwezigen probleemstellingen, suggesties voor eventuele acties, enz. naar voren kwamen, waaruit het bestuur dan inspiratie zou kunnen putten om — naast de werkzaamheden waarover in de kerstvacantie zal worden bericht — verdere activiteit te ontplooiën.

Na het uitspreken van de hoop, dat de huidige vergadering tot een vruchtbare discussie zou leiden, verklaar ik deze geopend.”

De notulen van de vorige vergadering worden goedgekeurd en onder dank aanvaard.

Hierna brengt de voorzitter de wenssen omtrent de regeling van het eind-examen Gymnasium in discussie en zegt:

Zoals u bekend zal zijn is door het Genootschap een commissie ingesteld ter bestudering van een eventuele reorganisatie van de inrichting van het Gymnasiale eindexamen. Het gaat dus niet over de aard van de te examineren leerstof, doch uitsluitend over de inrichting van het eindexamen.

Deze commissie bestond tot nu toe uitsluitend uit classici, die zich uiteraard met het eindexamen in de klassieke talen hebben bezig gehouden. Zij is thans zover met haar taak gevorderd, dat zij het nodig oordeelde, ook vertegenwoordigers der B-faculteit in haar midden op te nemen ten einde de regeling van het eindexamen in de exacte vakken nader te onderzoeken. Na een tot het bestuur van Liwenagel gericht verzoek heeft dit zich willen belasten met de taak in deze commissie zitting te nemen.

In verband hiermede zou het bestuur het op prijs stellen wenssen en verlangens van de leden te mogen vernemen, waarmede dan eventueel bij de beraadslagingen der commissie rekening zou kunnen worden gehouden.

In dit verband moge ik herinneren aan de oproep van Liwenagel in het Weekblad van 19 Januari 1949.

De reacties hierop waren helaas niet zoals het bestuur zich die had voorgesteld; er kwam niet één brief! Dit is mede een der redenen waarom deze kwestie thans aan de orde is gesteld.

Ten slotte moge worden opgemerkt, dat de oproep in het Weekblad méér omvatte dan het onderwerp, waarover wij thans gaan spreken. Bij de oproep verzocht het bestuur om wensen kenbaar te maken omtrent *examenstof* en *examenregeling*. Thans gaat het alleen en uitsluitend om de regeling. De kwestie van de examenstof komt voor een klein gedeelte bij het vierde agendapunt ter sprake en zal overigens te zijner tijd onderwerp voor een uitgebreide discussie vormen.

De aanwezigen bleken over het algemeen tevreden te zijn met de regeling van het eindexamen, vooral zoals deze dit jaar gewijzigd is. Alleen merkten de heren Leujes en Mooy op, dat de wiskundevakken niet de geschiktste zijn om de eerste dag mee te beginnen en zeker niet met de stereometrie. De wens werd uitgesproken, dat het examen zou beginnen met een moderne taal.

Daarna komt punt 4 van de Agenda in behandeling en de voorzitter zegt:

Het bestuur heeft gemeend deze kwestie in discussie te moeten brengen op o.a. de volgende gronden:

1e: In het „Rapport inzake de Herziening van het Eindexamenprogram van de H.B.S. B (zie Euclides 23e jaargang 1—2) wordt aanbevolen aan de (schriftelijke) examenstof voor reken- en stekunde o.a. toe te voegen: „de eenvoudige beginselen van de differentiaalrekening, voor zover deze voor de elders in het leerplan 1937 voorgeschreven leerstof van betekenis te achten zijn.” Op verschillende plaatsen in dit rapport worden dan mededelingen gedaan omtrent aard en omvang van de te behandelen stof en van het examen.

2e: Op de algemene vergadering van Wimecos van 5 Jan. 1949 werd dit rapport in zijn geheel aanvaard.

3e: Bij vele docenten in Natuurkunde bestaat een steeds sterker wordende neiging om de infinitesimaalrekening als een min of meer onmisbaar element van de voor dit onderwijs noodzakelijke mathematische apparatuur te beschouwen en wel hoofdzakelijk op twee gronden:

a) Eenvoudiger behandelingswijze en mooiere afronding van vele onderwerpen.

b) Aan de leerlingen wordt een beter inzicht verschaft in de mathematische fysieke denkmethode, die een steeds belangrijker plaats in de menselijke samenleving gaat innemen, zowel op geestelijk als op materieel gebied. (biologie, techniek, economie).

Het bestuur weet, dat er onder de leden van Liwenagel voorstanders en tegenstanders zijn van onderwijs in Infinitesimaalrekening. Ten einde een zo vruchtbaar mogelijke discussie over dit onderwerp uit te lokken, heeft het Dr. van Rees gevraagd over dit onderwerp een inleiding te willen houden. Collega van Rees was zo vriendelijk aan deze uitnodiging gehoor te geven, waarvoor wij hem reeds thans onze dank willen betuigen.

Hierop zegt Dr. van Rees:

„Bij het bladeren in enkele recente nummers van ons blad Euclides trof ik daarin enkele verslagen aan van werkvergaderingen handelende over het wiskundeonderwijs in de 1ste klasse van onze scholen. Voornamelijk ging

het hier over het bijbrengen van de eerste kennis van de vlakke meetkunde. Uit deze verslagen blijkt, dat allerlei paedagogische en didaktische kwaliteiten nodig zijn om deze klaarblijkelijk moeilijke materie te behandelen voor onze jeugdige abiturienten. Dat men naar middelen zoekt om het zware pad, dat tot de hogere regionen der wiskunde moet leiden te effenen, is lofwaardig en bewijst, dat ons onderwijs levend en veranderlijk is. Hetgeen 20 jaar geleden voor goed gold, is nu niet goed genoeg meer. Hoe staat het nu met het onderwijs in de wiskunde in de hoogste klasse. Ga ik eens na wat er al zo in mijn 25-jarige loopbaan bij het gymnasiale onderwijs is veranderd. Ik zelf heb de tijd net niet meer medegemaakt, dat het vak boldriehoeksmeting op het programma stond. Iedereen zal het met mij eens zijn, dat de vervanging van deze formulewinkel door het vak analytische meetkunde het onderwijs in de wiskunde is ten goede gekomen. Ons onderwijs, dat volgens Prof. Ehrenfest leed aan sin. en cos. pest, werd daardoor in gezonder banen geleid. Vele jaren heb ik de beginselen van de differentiaal rekening behandeld in de zesde klasse, totdat het toenemend aantal leerlingen en het dalende peil hunner kennis mij het succes twijfelachtig deed schijnen. Toen tenslotte het aantal uren voor de wiskunde nog verminderd werd, is de behandeling van de differentiaal rekening een onmogelijkheid geworden. Nu onze leerlingen volgend jaar weer voor het eerst eindexamen zullen doen met een 5 uur wiskunde in V en VI B rijst de vraag of de invoering van de differentiaal en integraal rekening wenselijk is of niet.

Momenteel zijn er nog altijd voor- en tegenstanders van de behandeling van dit vak op onze scholen en het bestuur van Liwenagel zou het op prijs stellen, indien deze inleiding aanleiding moge geven tot een uitwisseling van gedachten onder de hier aanwezigen.

Wanneer men zou overgaan tot de behandeling van de differentiaal rekening breng ik de volgende voordelen onder uwe aandacht.

Bij de anal. meetkunde een eenvoudige afleiding van de formule voor de raaklijn bij de krommen van de 2de graad. Zoals we het nu gewend zijn te doen, herhalen we bij ieder voorkomend geval een differentiatie proces zonder het zo te noemen. De onoverzichtelijke vergelijkingen, waaruit het eventuele middelpunt van een 2de graads kromme moet worden gevonden, veranderen

in $\frac{1}{2} \frac{df}{dx} = 0$ en $\frac{1}{2} \frac{df}{dy} = 0$. Formules, die niet meer worden vergeten.

Voor een zelfde geval komt men te staan in de algebra bij het bepalen van maxima en minima. Hier zoeken we een raaklijn te bepalen // aan de X-as door als voorwaarde te stellen dat een vergelijking twee samengevallen wortels heeft. De differentiaalrekening geeft hier de algemene oplossing van het probleem. Leert men de leerlingen eenvoudige functies differentiëren, dan zijn al deze moeilijkheden als bij toverslag verdwenen.

Wanneer men, zoals in sommige leerboeken gebeurt, de inhoudsformule van de pyramide afleidt met de inhouden van om- en ingeschreven prisma's, dan kan men die bestede tijd misschien beter gebruiken door een elementaire methode van integratie te behandelen. In de mechanica komt het differentiëren bij de kinematica zo veelvuldig voor, dat vele collega's, die dit vak bij de natuurkunde behandelen, zelf een korte inleiding over de differentiaal rekening houden. Hoe zou men ook zonder differentiaal quotient iemand de begrippen snelheid en versnelling bij een veranderlijke beweging willen bijbrengen? Zelfs al beperkt men zich tot de rechtlijnige beweging. En zo

zijn er legio voorbeelden, waarbij men de differentiaal rekening maar node kan ontberen. In de natuurkunde bij de Thermodynamica, theorie van het elektrische veld, de werking van een oneindig lange rechte stroomgeleider op een magneetpool enz. De a.s. studenten in de geneeskunde geeft het vak steun bij het college natuurkunde. Ik herinner mij uit mijn studietijd, dat op het college voor 1ste jaars de vergelijking van Claperyron op het zwarte bord verscheen en hoe na afloop de a.s. medici de hoofden bij elkaar staken en hun onkunde betuigden over die geheimzinnige $\frac{dp}{dt}$. Ook bij de

studie aan de economische hogeschool zal een geringe kennis van de differentiaal rekening een welkome steun zijn voor de wiskundige propadeuse. Ik ben er zeker van, dat de voordelen, die ik heb opgesomd voor de invoering van de differentiaal rekening door u met nog vele voorbeelden kunnen worden aangevuld, maar ik wil nu ook een mijns inziens ernstig bezwaar naar voren brengen. We krijgen bij de behandeling een verschuiving van universitair onderwijs naar dat van het V.H.O., en is dat wenselijk? Voor de a.s. studenten in de wiskunde zeker niet! en ik baseer dit op de volgende gronden: een a.s. mathematicus moet van de beginne af wennen aan de grote strengheid van bewijsvoering, die aan het vak eigen is. Dat houdt in, dat vóór de eigenlijke behandeling van de differentiaal rekening als grondslag dient gelegd te worden het getal- en het limietbegrip, benevens de puntverzamelingen, dat verder bij de behandeling van de differentiaal rekening aan de strengheid der bewijsvoering niets te kort wordt gedaan. Aan deze eisen kunnen onze lessen op de school niet voldoen en mogen ze ook niet voldoen. Ze kunnen er niet aan voldoen, omdat wij te beperkt zijn in onze tijd en ze mogen er niet aan voldoen, omdat de aanleg en interesse van onze leerlingen in de hoogste klasse teveel uiteenlopen.

Wanneer men toch een modus wil vinden om de differentiaal rekening te behouden voor de school door een deel van deze eisen te laten vallen en dus ruw gesproken slechts methoden en resultaten zal laten zien, dan heeft men bij de a.s. mathematici de kiem gelegd van slordigheid in gedachten en uitdrukkingswijze. Zij kunnen hier later nooit anders dan last van ondervinden en ik vind het voordeel van enige feitenkennis niet opwegen tegen het nadeel van aangekweekte slordigheid in redenering en bewijsvoering.

Tenslotte moeten wij ons afvragen of bij eventuele invoering van de differentiaal rekening dit vak examenvak moet worden of niet, schriftelijk of uitsluitend mondeling? Ook hierover lopen de meningen uiteen. Leent zich de stof hier wel toe? Kan men ieder jaar opnieuw geschikte opgaven vinden? enz. Wanneer het geen examenvak wordt, voorzie ik bij onze grote klassen een verminderde belangstelling.

En hiermede, mijnheer de voorzitter, hoop ik aan uw verzoek om een korte inleiding over de wenselijkheid van de invoering der differentiaal rekening op onze scholen te hebben voldaan."

Op deze inleiding volgt een langdurige en geanimeerd discussie, waaraan door allen wordt deelgenomen. Alle aanwezigen, zijn het er over eens, dat I. R. op Gymnasium B behandeld behoort te worden. De heren Striefkerk, Medenblik, Lenstra en van Kuyk betogen, dat er volstrekt geen bezwaar tegen is als de leerlingen eerst een inleiding krijgen in de I. R., die minder exact is; de strengheid van behandeling moet in het algemeen gelijke tred houden met de leeftijd van de leerlingen.

Minder eensgezind is de vergadering wanneer de vraag in bespreking komt: „*Moet de I. R. gaan behoren tot de verplichte examenstof?*”

Voorstander is o.a. de heer Medenblik, die meent, dat er anders scholen zullen zijn, die de I. R. niet of slecht zeer vluchtig zullen behandelen. Spr. meent, dat de a.s. studenten meer gebaat zullen zijn met een verplichte behandeling van de I. R. dan van b.v. de Trigonometrie. De heer Wansink en de voorzitter betogen, dat de divergentie tussen Gymn. B en H.B.S. B i.c. zo klein mogelijk moet gehouden worden, waarmee de heer Schuyt het eens is.

Tot de tegenstanders behoort vooral de heer Wielenga, die voor alles vrijheid wenst: zowel vrijheid om I. R. al of niet te behandelen als wel vrijheid om I. R. aan bepaalde leerlingen van eenzelfde klas wel en aan anderen niet te doceren. In deze geest spreken o.a. ook de heren Steenberg en Lenstra. De heer Mooy is tegen schriftelijk eindexamen in de I. R., maar zou het wel op het mondeling examen wenssen.

Op voorstel van de Voorzitter zal een Commissie worden ingesteld ter bestudering van deze materie. Indien mogelijk zal in de Januarivergadering het rapport van deze Commissie in bespreking worden gebracht.

Ten slotte komt de rondvraag: De heer Schuyt spreekt over de moeilijkheden bij de kleinere Lycea, waar de B-leerlingen van het Gymn. het eindexamen in de exacte vakken aan de H.B.S. afleggen. De heer van Alphen vraagt naar de ervaringen met de exacte vakken in Va. Hierover wordt enige tijd gesproken.

De heer Schrek klaagt over onnauwkeurigheid, slordigheid in redactie, aard en combinatie der vraagstukken bij het schriftelijk eindexamen. Hij vindt veel bijval en de vergadering verzoekt aan het bestuur om deze klachten aan de Inspecteur over te brengen.

Hierna sluit de Voorzitter de vergadering.

A. T. M. Kramer, secretaresse.

Kruisbessenstraat 12, 's-Gravenhage.

STUDIEBOEKEN

1 Dr P. MOLENBROEK

Leerboek der Vlakke Meetkunde

in de bewerking van P. WIJDENES

10e druk 632 blz. 582 fig. f 15,—. geb. f 17,50

2 Dr P. MOLENBROEK

Leerboek der Stereometrie

in de bewerking van P. WIJDENES

11e druk 368 blz. 239 fig. geb. . . f 10,—

3 P. WIJDENES

Lagere Algebra I

5e druk 276 blz. 20 fig. geb. . . f 8,75

Lagere Algebra II

5e druk 448 blz. 150 fig. geb. . . f 12,50

4 P. WIJDENES

Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie

6e druk 371 blz. 205 fig. geb. . . f 12,50

5 P. WIJDENES

Middel-Algebra I

4e druk 419 blz. 165 fig. geb. . . f 17,50

Middel-Algebra II

4e druk 375 blz. 56 fig. geb. . . f 15,—

6 P. WIJDENES

Getallenleer (met de antwoorden)

2e druk 260 blz. 1 fig. f 8,25 geb. f 10,50

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook bij de boekhandel verkrijgbaar

P. WIJDENES
OEFENBLADEN

Volledige leergang in de
BESCHRIJVENDE MEETKUNDE
voor de H.B.S.

5de druk

geheel omgewerkt door
DR. H. STREEFKERK

deeltje 1 f 1,25 - deeltje 2 f 1,60 - handleiding f 1,25

*

M. EILANDER
VLAKKE MEETKUNDE

voor het
voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs

deel 1 - theorie f 3,50

deel 2a f 1,75 en deel 2b f 2,90 - vraagstukken

*

P. WIJDENES en DR. H. J. E. BETH
NIEUWE SCHOOLALGEBRA

deel 1 - 18de druk deel 2 - 17de druk

deel 3 - 11de druk prijs per deel f 3.—

GRAFIEKENSCHRIFT - 11de druk f 0,65

Ook bij de boekhandel verkrijgbaar

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN-BATAVIA