

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN Dr H. STREEFKERK EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, HASSELT
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, UTRECHT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROOSENDAAL - DR. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

25e JAARGANG 1949/50

Nr 1

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8.00*. Zij die nevens op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde (f 8.00*) zijn ingetekend, betalen f 6.75*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmo-graphie aan Hogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1948 t/m 31 Augustus 1949 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) ten bedrage van f 4,50 op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. Ook voor 1 September 1949—1 September 1950 is de contributie vastgesteld op f 4,50. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan Dr H. Streefkerk, Hilversum, Van Lennepaan 16, Tel. K 2950; 5558.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstr. 88; Tel. K 2900; 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Dr U. Ph. LELY † Aanschouwelijke figuren in de ruimte.	1
P. WIJDENES. De evenwijdige lijnen in de schoolmeetkunde	22
Boekbespreking.	31
Korrel XCIV	34
Tweede conferentie-weekeinde uitgaande van de Wiskunde Werkgroep	35
Mathematisch centrum	37
Circulatie van tijdschriften	41
Dr E. J. DIJKSTERHUIS. Proklos' Commentaar op Euclides I vertaald door	
Dr E. J. Dijksterhuis.	43
Dr J. KOKSMA. Functies en grafieken	55

Oordeel over Eindexamenvraagstukken van 1949.

In verband met het op de laatste Algemene Vergadering aangenomen voorstel zal het Bestuur van Wimecos het op prijs stellen een goed gefundeerd oordeel over de eindexamenvraagstukken van het jaar 1949 te ontvangen. Indien de opmerkingen der leden hier aanleiding toe geven, kunnen dan aan de autoriteiten bepaalde wenssen ter kennis gebracht worden.

De Secretaris: J. J. TEKELENBURG.

AANSCHOUWELIJKE FIGUREN IN DE RUIMTE ¹⁾

door

Dr U. PH. LELY †.

De kegelsneden met hun brandpunten en richtlijnen zijn, wat betreft hun ontstaanswijze als doorsnijdingen van omwentelingskegels met platte vlakken, voor de niet-geoefende niet zo gemakkelijk te bevatten en te overzien. Hier moge een schets worden gegeven van een methode tot het tekenen van deze krommen en ook van sommige krommen van hogere orde; een methode, die zeer aanschouwelijk is, en waardoor hij, die er mede bezig is, zeer gemakkelijk wordt gebracht tot een vruchtbaar inzicht ¹⁾.

We stonden in 1946 voor een moeilijkheid, die algemeen is voor het onderwijs in de na-oorlogse tijd. Klassen, die te weinig les hadden gehad, en dus veel gapingen hadden in de scholing, en daarbij nog voortdurende hinder in de gang van het onderwijs door kolenbeperkingen en ziekte. Waarmede moest men klaar komen? Zo was het in ons gymnasium slecht gesteld met de A-afdeling van de zesde klas. Voorstellingsvermogen was er vrijwel niet, kennis dus zeker niet. Toch moest daarmede het eind-examen worden bereikt. Hoe moest men dan toch wel de stereometrie met haar bollen, kegels en cylindfers behandelen??

Doch ons kwam een nieuwe aanvat te hulp. In de lichtbundel van een projectielantaarn wentelde met een vijftal toeren per seconde een cirkel. Dan tekent zich een bol af. Zet men voor de condensor-lens een scherm met een lijnvormige spleet en projecteert men deze met een lens, dan blijft van de bol slechts over de doorsnijding van de bol met een plat vlak. Verschuift men dit vlak, dan varieert de doorsnijdingscirkel in allerlei afmetingen van die van een grote cirkel af tot die van de puntcirkel bij raking. Men richt de spleet zo in, dat zij draaibaar is om de as van het projectietoestel.

¹⁾ Na het gereed komen van dit artikel bereikte mij van bevriende zijde de opmerking, dat E. Papperitz in een artikel: „Über das Zeichnen im Raume", Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung XX, 1911, Heft 7/8, dezelfde methode beschrijft. Conclusies worden echter niet getrokken. De foto's verraden het ruimtelijke karakter niet. De osculatiecirkels, de dubbelpunten zijn niet aan de orde.

Maakt men nu een draadfiguur, bestaande uit twee elkaar snijdende cirkels met hun machtlijn, en laat men deze wentelen om de centraal, dan ontstaan twee elkaar snijdende bollen met hun machtvlak. Snijdt men deze met een lichtvlak, dan begint het verrassende. Er ontstaan dan twee cirkels; de doorsnijding met het machtvlak geeft de machtlijn van de cirkels aan.

Voor A-leerlingen is het bewijs, dat twee elkaar snijdende cirkels

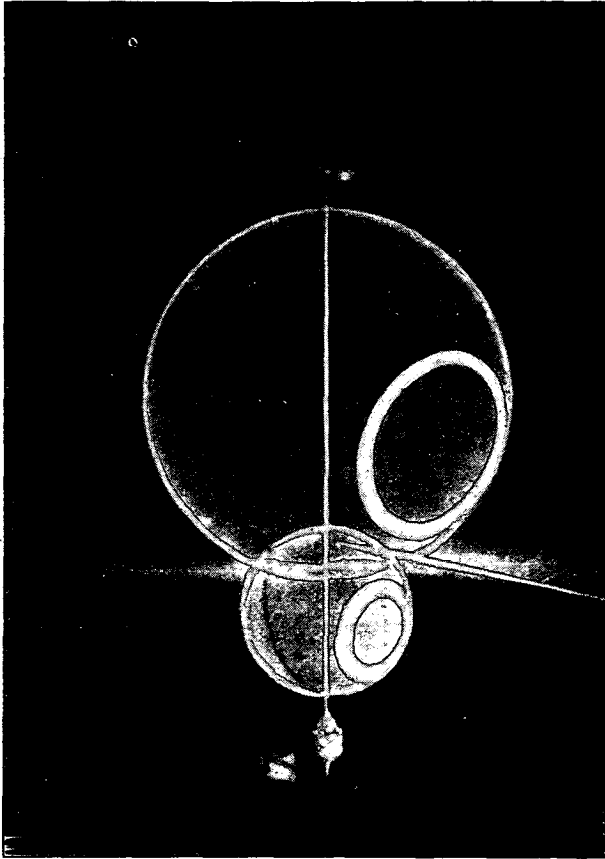


Fig. 1. Twee bollen met hun machtvlak. Doorsnijdingsvlak geeft twee cirkels, waarbij de ene de andere insluit. Machtlijn tussen de beide cirkels.

hun gemeenschappelijke koorde als machtlijn hebben, gemakkelijk te leveren. Snijden ze elkaar niet, dan zijn er velen, die de berekening verwerpen, voor ze haar hebben ingedacht. Maar nu: twee elkaar snijdende cirkels hebben hun machtlijn, dus twee elkaar snijdende bollen hun machtvlak. Nu kan men het lichtvlak, waarin zich de

twee doorsnijdingscirkels aftekenen met hun machtlijn, die de doorsnijding is van het lichtvlak met het machtvlak, door verschuiving allerlei standen laten doorlopen; achter elkaar krijgt men twee snijdende, rakende, en elkaar niet snijdende cirkels te zien (fig. 1). En de figuren zijn getrouw vergezeld van de machtlijnen. Ook tekent de machtlijn zich af bij een cirkel en puntcirkel. Zelfs ook, als één of beide cirkels imaginair zijn geworden!

Voorts kan men de doorsnijding zo maken, dat men twee cirkels

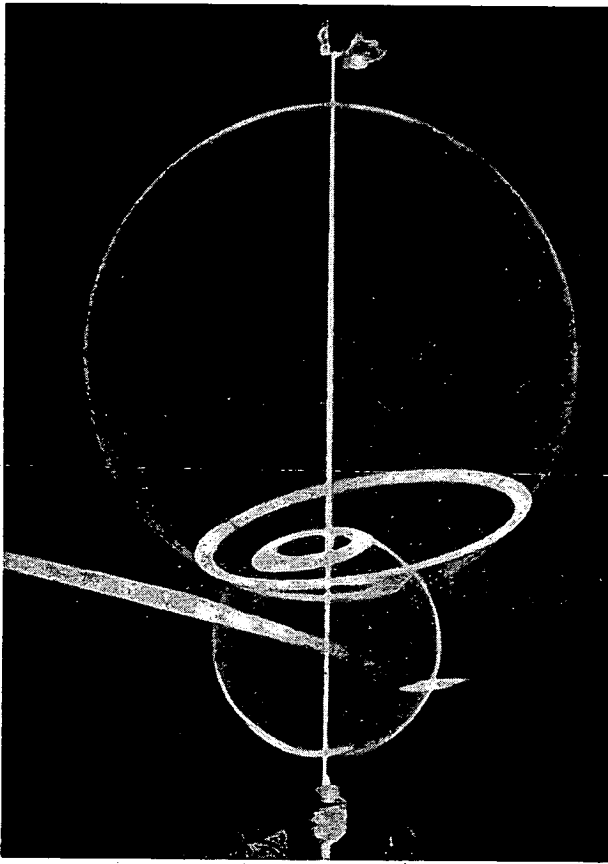


Fig. 2. Twee bollen met hun machtvlak. Doorsnijdingsvlak geeft twee cirkels, waarvan de ene binnen de andere ligt. Machtlijn buiten beide.

krijgt, die binnen elkaar liggen; de machtlijn komt dan voor den dag als een lijn, die geheel buiten de cirkels ligt (fig. 2). Worden de cirkels concentrisch, dan verdwijnt de machtlijn naar het oneindige, daar het snijvlak en het machtvlak evenwijdig worden.

Hoe bewijst men nu, dat twee elkaar niet-snijdende cirkels, in een plat vlak gelegen, één machtlijn hebben? Wel, breng door de cirkels twee elkaar snijdende, overigens willekeurige bollen aan, bepaal hun machtvlak; de snijlijn van het vlak der cirkels met het machtvlak is de gezochte machtlijn.

Een leerlinge, behorende tot het lagere niveau van de zesde klas (A), moest op een proefwerk aantonen, dat twee cirkels, die niet concentrisch waren, en waarbij de ene de andere geheel omsloot, een machtlijn hadden, die buiten de beide cirkels lag. Deze kwestie was niet behandeld in de les. Slechts was behandeld het geval, dat de cirkels een machtlijn hebben, als ze elkaar niet snijden. Zij loste het vraagstuk aldus op. Breng door de beide cirkels twee bollen aan, en zorg, dat de bol van de kleinste cirkel de andere inwendig raakt; het gemeenschappelijke raakvlak is het machtvlak, en zijn snijding met het vlak der cirkels levert de machtlijn. Aangezien het raakpunt der beide bollen is verschoven ten opzichte van het hoogste punt van elk van de bollen, in een richting van het middelpunt van de grootste cirkel naar die van de kleinste, bijvoorbeeld naar rechts, snijdt het gemeenschappelijke raakvlak het vlak der cirkels buiten elk der cirkels, ook aan de rechterkant. Het meisje had nu de volgende, zelfstandige vondsten gedaan: laat die bollen elkaar niet snijden, maar raken; en daarbij: het raakvlak is het machtvlak.

Toen we dit bemerkten, voelden we de vruchtbaarheid van de nieuw ingeslagen weg en gingen voort. Een moeilijker vraagstuk luidt: zoek het machtpunt van twee cirkels, die in verschillende vlakken liggen en elkaar niet snijden, en niet op één bol liggen.

Als men vervolgens bezig raakt over vier bollen en hun machtpunt en dan merkt, dat een leerling uit zich zelf bewijst, dat de middelloodvlakken van de ribben van een viervlak door één punt gaan, omdat deze de machtvlakken zijn van de vier puntbollen in de hoekpunten; of als ze het ook gemakkelijk volgen, dat de bissectrices van een driehoek als de limieten van machtlijnen van drie cirkels met gelijke maar onbeperkt aangroeiende stralen kunnen worden opgevat en mitsdien door één punt moeten gaan, en dan de conclusie trekken, dat het analogon van deze planimetrische figuur een viervlak is met zijn bissectricevlakken; als men dan meer dan eens het beleeft, dat de les zich plotseling oplost in een vijf of zes groepen, die, gesticulerend en heftig redenerend, wijzen naar de wentelende figuren, waarbij men als leraar zich uit de discussie kan terugtrekken, voorwaar, dan is er wat gewekt! Een cylinder wordt een hoed genoemd en de discussie loopt in bevattelijke uitdrukkingen langs logische lijnen!

Kegelsneden.

Doch nu de kegelsneden. Een gelijkbenige driehoek wentelt om de bissectrix van de top. In de driehoek zijn twee cirkels aangebracht, die elkaar niet snijden en die raken aan de opstaande zijden. Er zijn ook de lijnen, evenwijdig aan de basis door de raakpunten van

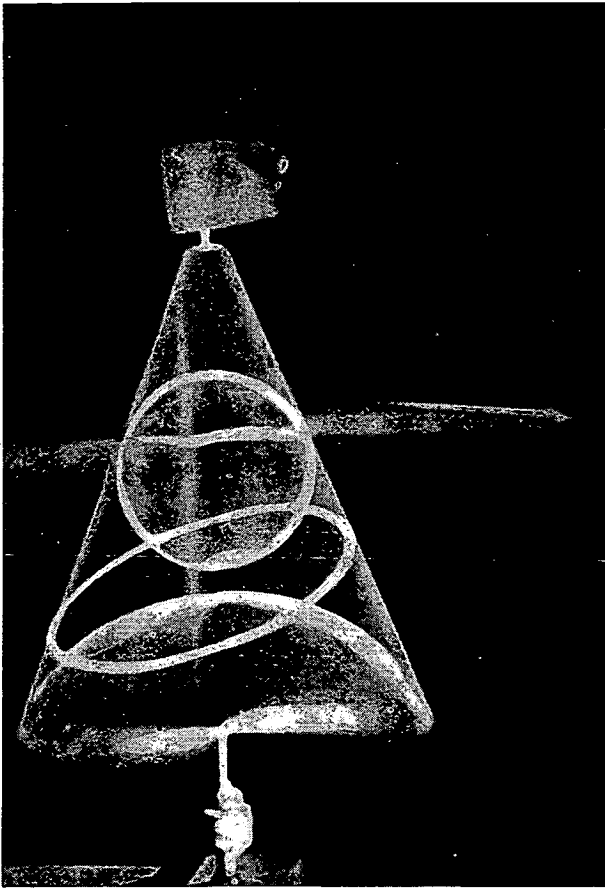


Fig. 3. Kegel met kegelsnede, de bollen van Dandelin en de brandpunten. In het vlak door de aanrakingscirkel van de bovenste bol van Dandelin ligt de richtlijn van de ellips.

de cirkels met de opstaande zijden. Die figuur, die door de wenteling ontstaat, is dan een kegel met twee rakende bollen daarin. Snijdt men de kegel met een lichtvlak, dat raakt aan de beide bollen, dan zweeft ons voor ogen een ellips met haar beide brandpunten en de beide richtlijnen, de gehele figuur van Dandelin (fig. 3). Een

andere figuur is er voor de hyperbool en voor de parabool; en men kan laten zien, hoe ze in elkaar overgaan, door geleidelijk de stand van het lichtvlak te veranderen (fig. 4). Het is niet moeilijk voor de A-leerlingen de hoofdeigenschap der brandpunten te bewijzen en ze zeggen je dan: geeft U ons nu op het eindexamen wat over die ellipsen — dat is gemakkelijk! Voor de B-leerlingen is de relatie

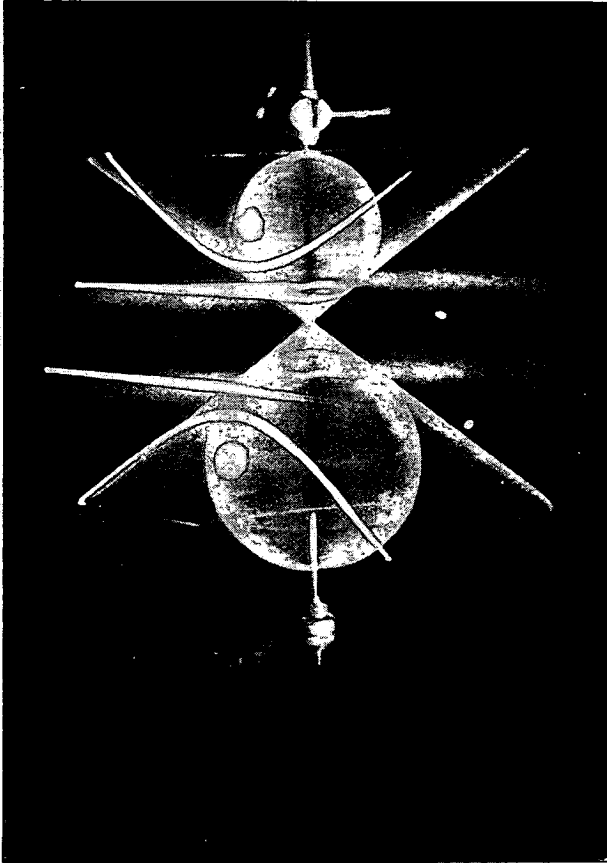


Fig. 4. Kegel met hyperbool met brandpunten en richtlijnen.

van pool en poollijn voor een brandpunt en de bijbehorende richtlijn niet zo bezwaarlijk naar voren te brengen.

Er is echter nog iets, dat vanzelf voor den dag komt. In de kegel is een bol en er is een vlak door de aanrakingskromme van de bol en de kegel. Men bringe nu een lichtvlak aan, dat de kegel snijdt volgens een ellips. De bol wordt gesneden volgens een cirkel, het vlak door de aanrakingskromme van bol en kegel volgens een

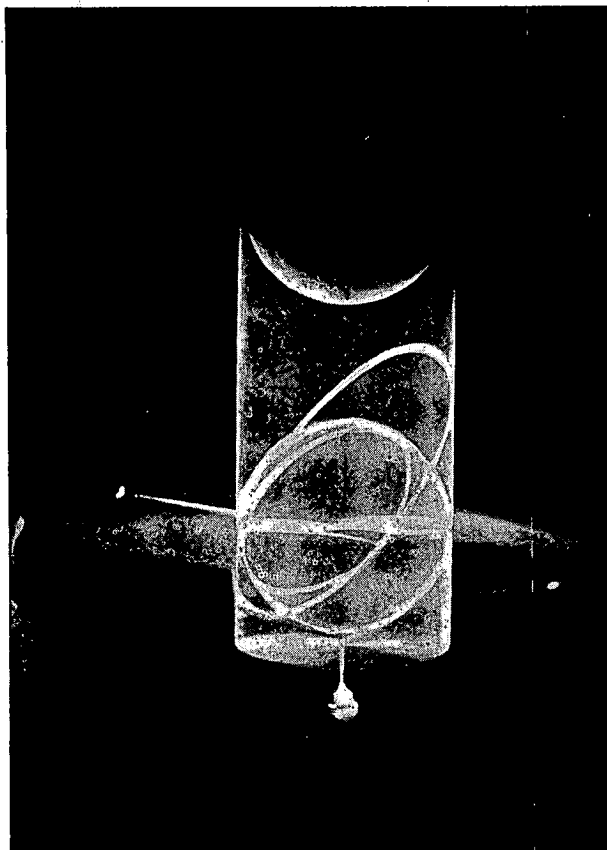


Fig. 5. Cylinder met ingeschreven bol. Ellips met een tweemaal rakende cirkel en de raakkoorde.

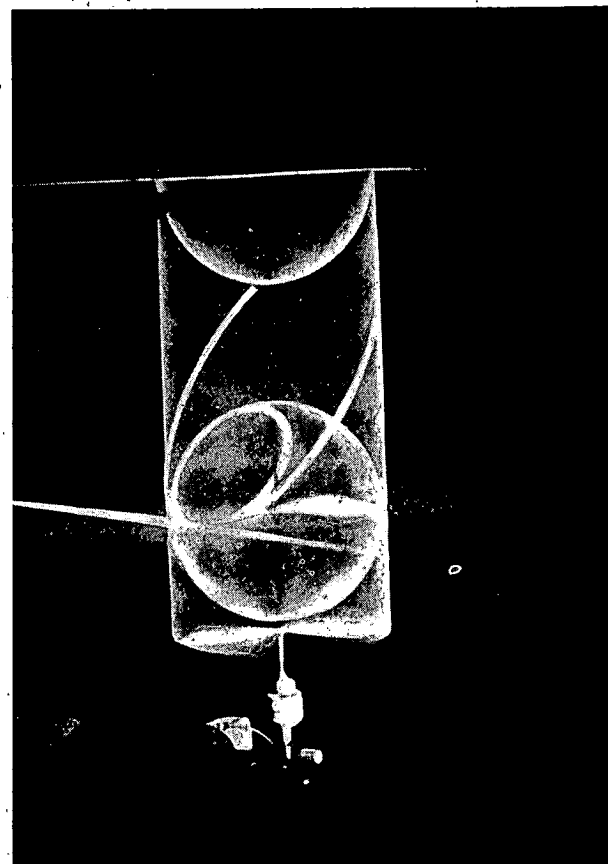


Fig. 6. Cylinder met ellips en zijn osculatiecirkel en gemeenschappelijke raaklijn. Er is een viervoudige aanraking van de ellips met de cirkel.

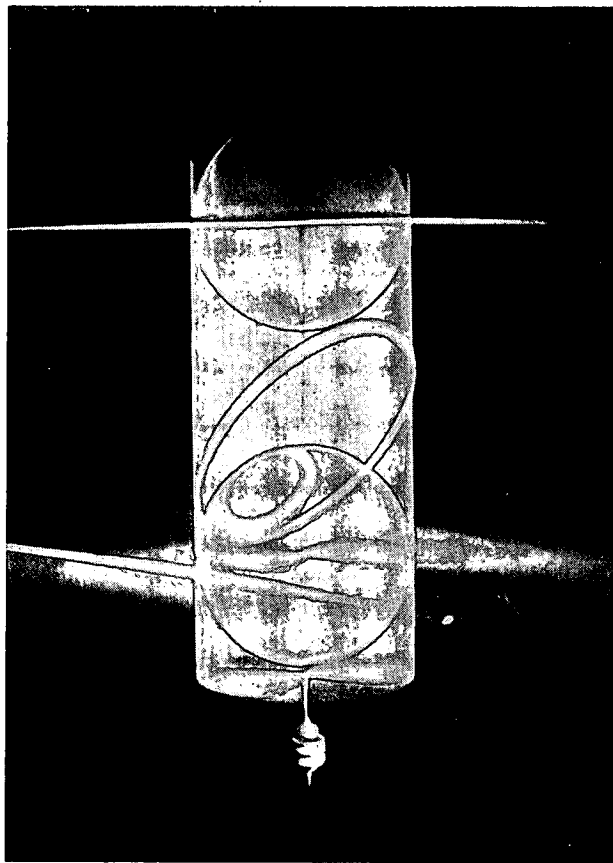


Fig. 7. Cylinder met ellips en daarbinnen liggende cirkel; ook is er de gemeenschappelijke raakkoorde, die door de twee imaginaire aanrakingspunten gaat.

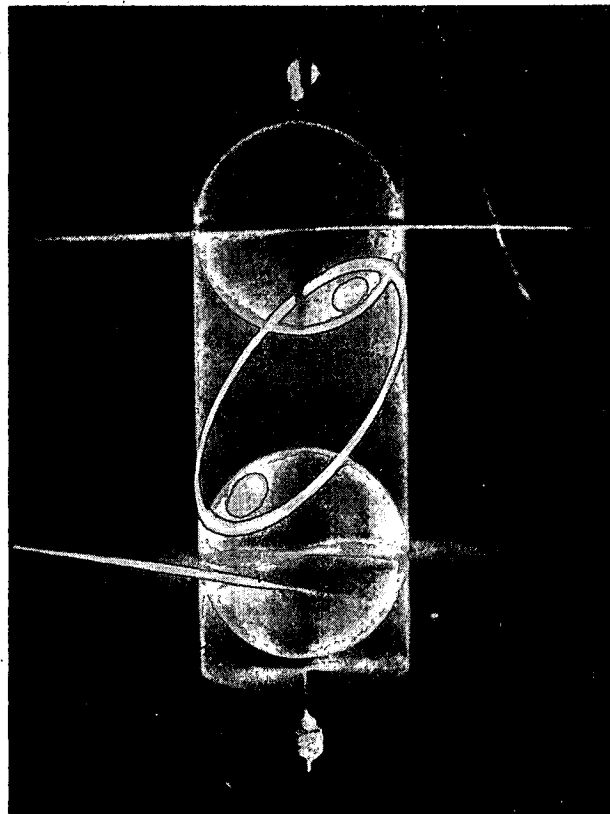


Fig. 8. Cylinder met ellips, brandpunten en richtlijnen. De richtlijn gaat door de imaginaire punten, waarin de puntcirkel, die het brandpunt is, de ellips aanraakt.

rechte lijn. Dicht bij de top raakt de cirkel de ellips in twee punten, waardoor de zo even genoemde rechte gaat. Verschuift men het snijvlak evenwijdig aan zich zelf naar grotere afstanden van de kegeltop, dan schuift deze rechte naar de top van de ellips, de beide raakpunten van ellips en cirkel met zich medenemend; ten slotte wordt hij raaklijn in de top van de ellips, en daarbij is de cirkel in vierpuntige aanraking met de ellips. Dit is de osculatiecirkel in de top.

De osculatiecirkel van de top van een ellips verkrijgt men dus door een bol te beschrijven in de kegel zó, dat de aanrakingskromme van bol en kegel door de top van de ellips gaat; de doorsnijding van de bol en het vlak van de ellips is de osculatiecirkel of kromtecirkel. Een eenvoudige berekening van de kromtestraal in de top is hiermede te vinden (zie fig. 5 t.e.m. 8).

Doch ook blijkt uit deze beschouwing opnieuw, dat de richtlijn poollijn is van het brandpunt. Want als men het snijvlak, dat de ellips oplevert, nog verder verwijdert van de kegeltop, dan wordt de aanraking van de allengs kleiner wordende snijcirkel met de ellips imaginair. De rechte door de raakpunten blijft echter reëel, het blijft de snijlijn van het ellipsvlak met het vlak door de aanrakingskromme van bol en kegel. Ten slotte gaat de doorsnijdingscirkel over in een puntcirkel, het brandpunt van de ellips. We hebben te doen met de bol van Dandelin. Dezelfde dingen blijven gelden. De snijlijn is nu richtlijn en gaat door de beide raakpunten, waarin de puntcirkel de ellips aanraakt; de puntcirkel bestaat echter uit de isotrope lijnen van uit het brandpunt, die de ellips aanraken in de imaginaire punten, waarin de richtlijn de ellips snijdt; hun snijpunt, het middelpunt van de puntcirkel en tevens het brandpunt van de ellips, is dus pool van de richtlijn. En het brandpunt is het snijpunt van een raaklijn aan de ellips uit het ene imaginaire cirkelpunt I, met die uit het andere imaginaire cirkelpunt J.

Zo kan men ook opereren met een bol in de buurt van de andere meer van de kegeltop verwijderde top van de ellips. Al deze dingen gelden eveneens voor andere standen van het snijdende vlak, zodat hyperbolen, ellipsen en parabolen gemakkelijk in elkaar overgaan.

Omwentelingshyperboloiden en hun raakvlakken

Een andere draadfiguur bestaat uit twee elkaar kruisende rechte lijnen, met een as symmetrisch daartussen. Twee rechten werden genomen ter wille van het dynamische evenwicht, hoewel meetkundig slechts één nodig is. Ook werd hierbij een cirkel aangebracht.

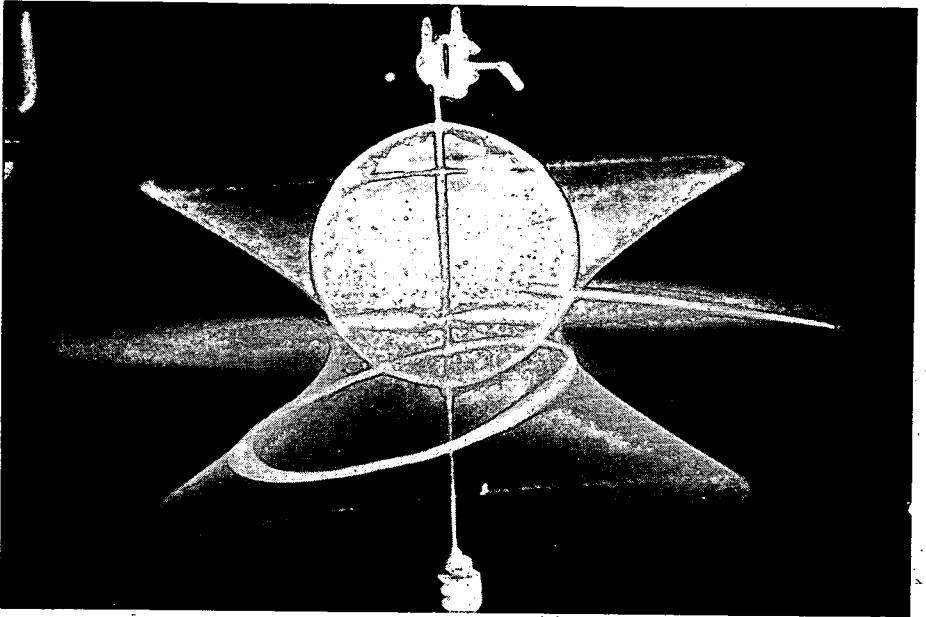


Fig. 9. Hyperboloïde. Doorsnede met brandpunt en ellips. Bol van Dandelin.

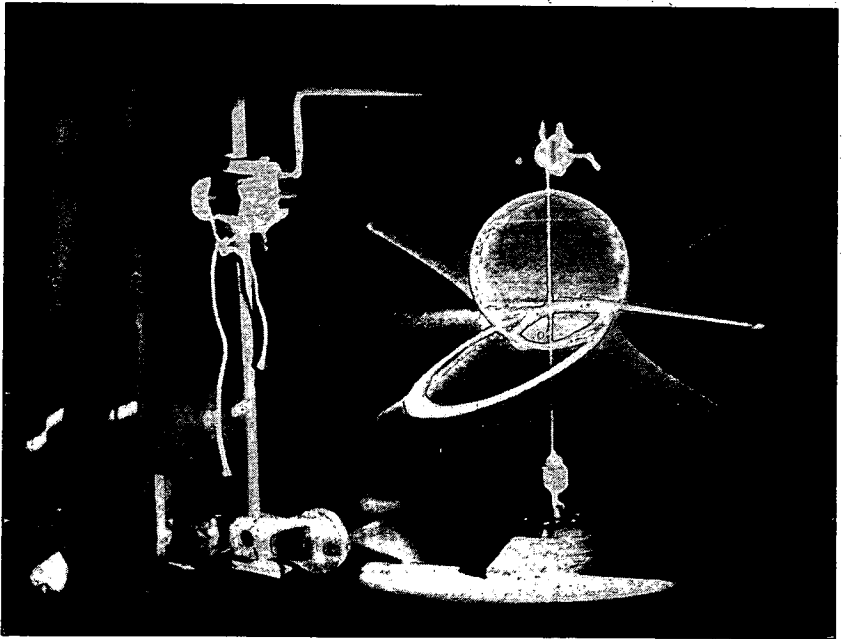


Fig. 10. Hyperboloïde. Osculatiecirkel met gemeenschappelijke raaklijn.

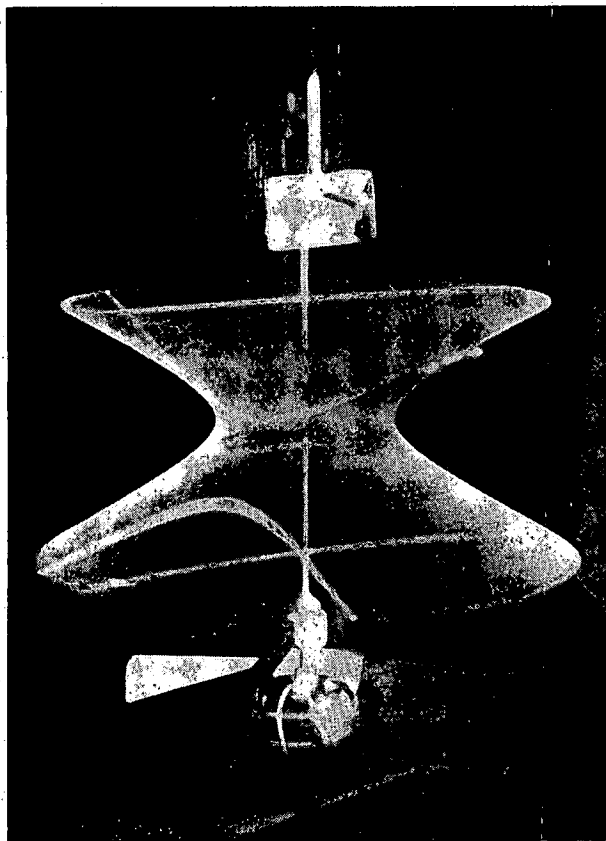


Fig. 11. Hyperboloïde ontstaan door een wentelende lijn, die de as kruist. Doorsnijdingskromme is een hyperbool.

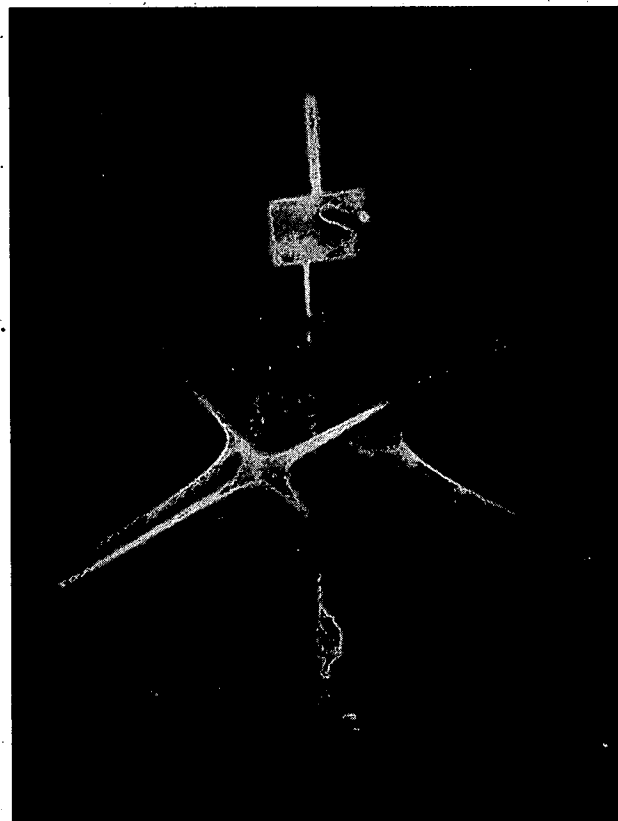


Fig. 12. Hyperboloïde. Het doorsnijdingsvlak is raakvlak. De hyperbool ontaardt in een lijnenpaar.

Deze cirkel is een mediaancirkel; het middelpunt ligt op de as in een vlak loodrecht op de rechte, in het punt der rechte, waar de cirkel doorheen gaat.

Laat men de draadfiguur wentelen, dan ontstaat een eenbladige omwentelingshyperboloïde. De cirkel produceert weer een bol van Dandelin, behorende bij de ellips, hyperbool of parabool, eigen aan bepaalde snijvlakken (zie fig. 9). Een tweede bol van Dandelin zou men kunnen aanbrengen; en evenals bij de kegelsneden krijgt men zo de beide brandpunten met hun richtlijnen en het eenvoudige bewijs van de hoofdbrandpuntseigenschap van de kegelsnede, zoals Dandelin die steeds heeft aangegeven. Doch ook hier treedt de osculatiecirkel op, geheel analoog als bij de kegel (fig. 10).

Interessant worden echter de ontaardingën. Verschuift men het snijvlak, dat de hyperboloïde volgens een hyperbool snijdt, (fig. 11) dan wordt de kromme allengs scherper, totdat zij een dubbelpunt vertoont. Een tweede-gradskromme kan dit niet verdragen, en de hyperbool ontaardt in twee elkaar snijdende lijnen; het snijvlak is dan raakvlak in dat dubbelpunt geworden (fig. 12). Verschuift men het snijvlak nog iets verder, evenwijdig aan zich zelf, zo verschijnt er weer een hyperbool, zwevend in de ruimte als het ware juist dáár, waar men de toegevoegde van de aanvankelijke zou verwachten. Andere standen vertonen ellipsen en cirkels.

Is het snijvlak evenwijdig aan een beschrijvende, dan ontstaat er een parabool. Bij evenwijdige verschuiving ontaardt de parabool in twee evenwijdige lijnen, die aan weerskanten van de keel van de hyperboloïde liggen. Waarom deze ontaarding? De stand van het vlak is zo, dat de hyperboloïde in het oneindige geraakt wordt, en aldaar heeft de snijkromme een dubbelpunt; dit heeft ten gevolge dat de parabool ontaardt in twee evenwijdige lijnen, die de keel omvatten. Een kegel is op te vatten als een hyperboloïde met een oneindig dunne keel. De ontaardingën van de hyperbool worden hier dan twee elkaar in de kegeltop snijdende lijnen, en die van de parabool wordt een dubbellijn door de top.

Doorsnijding van een kegel met een andere of met een hyperboloïde of cylinder.

Verrassende figuren doen zich voor, als men de wentelende draadfiguren in plaats van met een lichtend vlak laat snijden met een lichtende kegel. Niet, dat hun karakter niet van overlang zou bekend zijn, maar het didactische gewicht daarvan boeit niet weinig.

Voor de condensorens van de projectielantaarn plaatst men voor

dit doel een scherm, niet met een rechte lijn, maar met een cirkelvormige of een elliptische groef, die het licht doorlaat. Men projecteert deze met een objectief met nauw diafragma. Uit de lens treedt een lichtbundel in de gedaante van een kegelmantel. Deze lichtmantel treft de draaiende draadfiguur, die een hyperboloïde of een kegeloppervlak beschrijft. Er tekent zich nu een fraaie vierdegraadskromme in de ruimte af (fig. 13). Door verschuiving van de

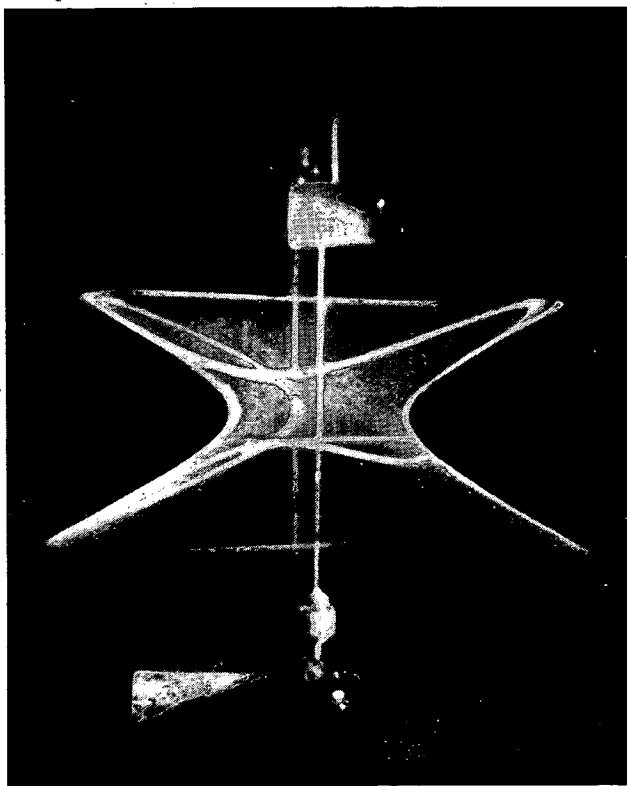


Fig. 13. Hyperboloïde. Doorsnijding met een kegel. Ruimte-kromme van de 4e graad. Er zijn geen dubbelpunten.

projectielantaarn kan men nu gemakkelijk gedaan krijgen, dat de ruimte-kromme twee dubbelpunten vertoont. Is de kromme een ruimte-kromme, dat wil zeggen, dat haar punten niet in één plat vlak liggen — wat uit het ongerijmde niet moeilijk is aan te tonen — dan moet zij bij het vertonen van twee dubbelpunten ontaarden in twee vlakke krommen, gelegen in twee platte vlakken, die niet samenvallen (fig. 14). Een plat vlak toch, gaande door de twee

dubbelpunten, heeft met de kromme vier punten gemeen; laat men het vlak nu draaien om de verbindingslijn der dubbelpunten, dan kan het op een goed moment nog een vijfde punt met de kromme gemeen hebben. Maar dan moet het dadelijk oneindig veel punten daarmede gemeen hebben. Aangezien de vierdegraadskromme niet in één plat vlak is gelegen, moet er meer dan één vlak bestaan; in dit geval twee. Immers, de doorsnijding van het zo even be-

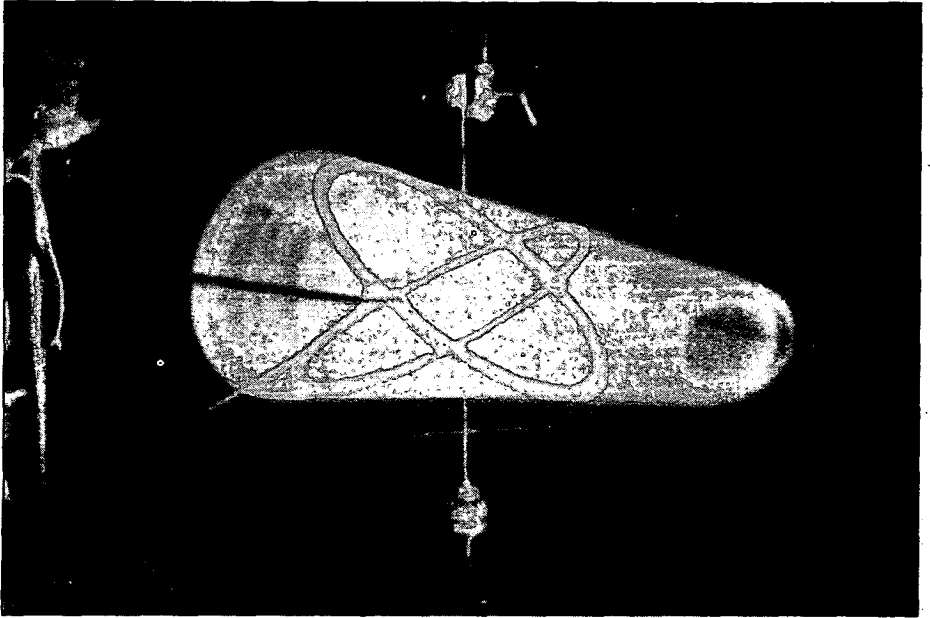


Fig. 14. Hyperboloïde gesneden door een kegel. De 4e graadskromme heeft twee dubbelpunten en ontgaat in twee ellipsen.

Na het fotograferen van de ruimtekromme en daarna van de hyperboloïde werd alles uit de lichtbundel weggeschoven. Toen bewogen we een wit scherm door het gebied, waardoor de kegel zich aftekende. De laatste is wat overbelicht.

schreven vlak door de dubbelpunten met het tweedegraadsoppervlak is een kegelsnede; twee daarvan moeten nu dienen om samen één vierdegraadsoppervlak te maken.

Deze demonstratie is fascinerend. Scherp tekent het vlak zijn der krommen zich af; bij de verschuiving ziet men de slingerende vierdegraadskrommen zich namelijk plotseling in de twee vlakke krommen splitsen. Het is een genot, de verwondering mee te maken van de gymnasiasten, als ze dit zien gebeuren; ze vinden dat minstens mysterieus.

Ook kan men — maar dit vereist nogal zorg — de top van de

lichtmantel leggen op de hyperboloïde en dan zó, dat het raakvlak aan de hyperboloïde in dat punt zowel de kegel als de hyperboloïde doorsnijdt volgens hetzelfde lijnenpaar. De vierdegraadskromme valt nu uiteen in een ontaarde kegelsnede en een gewone kromme van de tweede graad. Beschrijft de wentelende draadfiguur een kegel, zo kan men zorgen, dat de top van de lichtmantel ergens op de kegelmantel ligt, terwijl beide kegels elkaar raken volgens een beschrijvende. Uit de vierdegraadskromme maakt zich een (dubbel-)rechte los en het overschot is een ellips, cirkel of hyperbool; een parabool ontstaat als beide kegels een zelfde tophoek hebben.

Optisch is het niet mogelijk de top naar het oneindige te verleggen. Men zou dan bij de doorsnijding met de hyperbolide twee evenwijdige lijnen kunnen krijgen voor één der ontaardingën. De andere kegelsnede zou in het oneindige te zoeken zijn.

- Raakvlakken en doorsnijdingen bij een torus.

Twee gelijke cirkels, gelegen in hetzelfde vlak, wentelen om een as, eveneens in dat vlak, die de centraal loodrecht middendoor deelt. Eigenlijk is er maar één cirkel nodig; maar dynamisch is de gebalanceerde figuur noodzakelijk. We krijgen zo een torus, een oppervlak van de vierde graad. We doorsnijden deze met een lichtvlak. Nu ontstaat een vlakke vierdegraadskromme (fig. 15). Is het doorsnijdingsvlak een meridiaanvlak, zo ontaardt de kromme in twee cirkels (fig. 16), hetgeen onmiddellijk is in te zien.

We verschuiven het vlak en zorgen, dat het de torus inwendig raakt. Dan ontstaat er een lemniscaat, als het raakvlak evenwijdig is aan de as, en een daarop min of meer lijkende kromme, wanneer dit vlak niet evenwijdig is met de as. De krommen vertonen één dubbelpunt. Is het vlak evenwijdig aan de as, dan is het dubbelpunt tevens dubbelbuigpunt.

Men kan nu zorg dragen, dat de kromme twee keer de torus raakt. Dan heeft hij twee dubbelpunten en nu ontaardt hij in twee cirkels. Waarom?

De beide generatorcirkels hebben in het oneindige de beide punten, waarin de imaginaire bolcirkel op oneindig door het meridiaanvlak wordt gesneden, gemeen. Deze punten doorlopen bij de wenteling de imaginaire bolcirkel, en vormen een lijn, waarbij het oppervlak zich zelf snijdt. Het dubbelrakende vlak snijdt deze imaginaire bolcirkel eveneens; en deze snijpunten, de imaginaire cirkelpunten op oneindig in dit vlak, zijn mitsdien ook dubbelpunten van de vierdegraadsdoorsnijding van de torus met het platte vlak.

De vierdegraadskromme heeft nu vier dubbelpunten, hetgeen zij niet kan verdragen, zodat zij ontaardt. Want brengen wij een kegelsnede door vier dubbelpunten, en door nog een vijfde gewoon punt, wat altijd mogelijk is, dan heeft deze er negen punten mede gemeen.

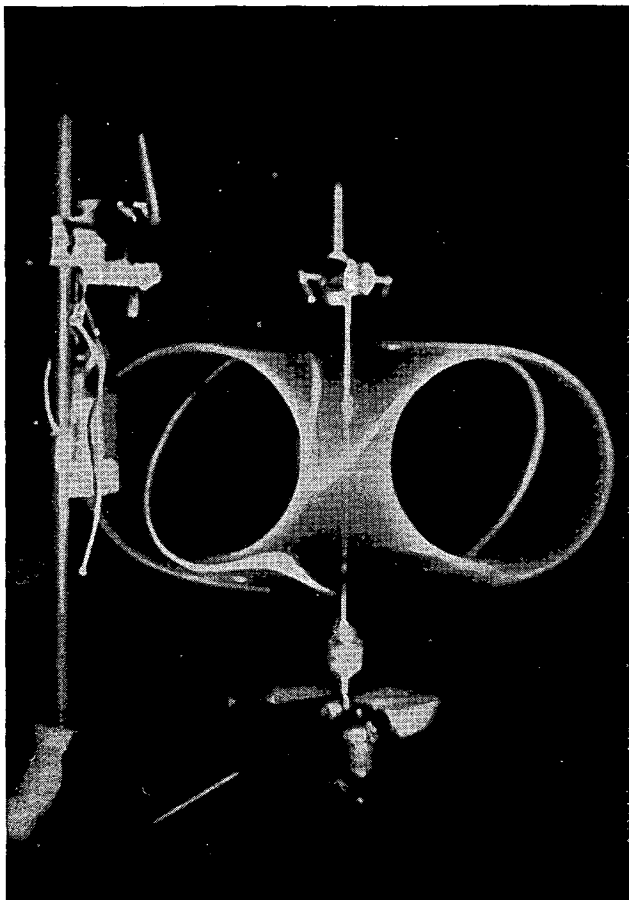


Fig. 15. Torus met vlakke doorsnijding Vlakke 4e graads.
kromme.

Doch daar de doorsnijding er normaal slechts acht gemeenschappelijke punten mede gemeen kan hebben, moeten er oneindig veel zijn. Dus is de kegelsnede deel van de vierdegraadskromme. Zo zien we, dat er twee kegelsneden zijn, die tezamen als ontaarding optreden en wel twee cirkels, omdat elk der kegelsneden gaat door de twee imaginaire cirkelpunten op oneindig.

Maar nu nog iets over de hoedanigheid van de punten op de

torus. Raakt het vlak de torus aan de binnenkant, en is er een dubbelpunt, dan hebben we te doen met een hyperbolisch punt: Raakt het vlak de torus uitwendig, dan ontstaat een elliptisch punt, wat dadelijk in het oog valt, als we het lichtvlak een weinig

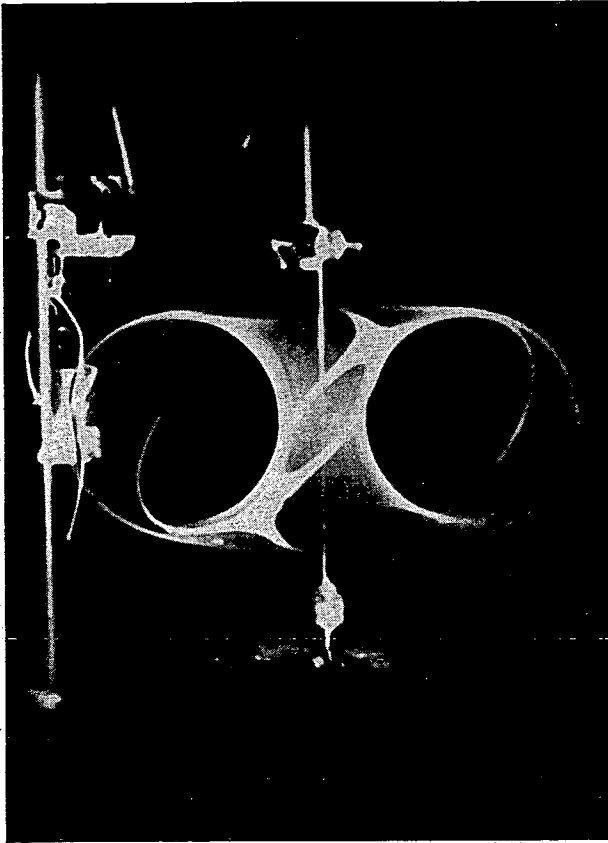


Fig. 16: Torus met dubbelraakvlak. De 4e graadskromme heeft twee dubbelpunten en ontaardt in twee cirkels.

parallel verschuiven. Er tekent zich dan een kleine ellips af. Een navelpunt vinden we echter niet, tenzij de generatorcirkels elkaar zouden snijden. Doch op de demonstratie van een navelpunt komen we terug bij een ander model.

De overgang tussen de elliptische en hyperbolische zadelpunten is gelegen in het raakvlak, dat loodrecht op de wentelingsas van de torus ligt, het vlak, dat boven op de torus ligt. Dan zien we als doorsnijding, wanneer het raakvlak een weinig parallel aan zich zelf wordt verschoven, twee concentrische cirkels, die in een on-

eindig klein gebied als een ontaarde parabool, bestaande uit twee evenwijdige lijnen, zijn op te vatten; deze parabolische punten hebben echter de bijzonderheid, dat er een oneindig aantal in twee aaneengesloten krommen wordt gevonden; indien dit niet zo ware, zou de evenwijdige verschuiving niet een ontaarde, maar een niet-ontaarde parabool hebben vertoond.

Een pseudotorus met twee in één vlak gelegen gelijke ellipsen met parallele assen als generatorkrommen.

De wentelings-as ligt in het meridiaanvlak, dat de beide ellipsen bevat, en is de middelloodlijn van de verbindingslijn der middelpunten. De lange assen der ellipsen zijn evenwijdig met de omwentelings-as

Deze omwentelingsfiguur werd gemaakt om navelpunten te verwezenlijken. Bij een geschikte keuze van de lange as ten opzichte van de korte, en ten opzichte van de middelpuntsafstand krijgt men navelpunten; er zijn er, evenals bij de parabolische punten, oneindig veel gelegen op twee meridiaankrommen. In een bijzonder geval vallen de beide meridiaankrommen samen in het midden van de pseudo-torus.

Maar ook hier zijn de dubbelraakvlakken interessant. De doorsnijdingskrommen zijn, evenals de vorige, oppervlakken van de vierde graad. Heeft de doorsnijdingskromme twee dubbelpunten, dan krijgen we weer ontaarding, nu niet in cirkels, maar in twee ellipsen.

De imaginaire asymptoten der beide generator-ellipsen zijn evenwijdig en snijden elkaar in het oneigenlijke vlak. Deze snijpunten, die in het oneindige liggen, behoren tot de ellipsen, die elkaar aldaar snijden in twee punten, niet op de as gelegen. Bij de wenteling doorlopen deze punten een kegelsnede, volgens welke het oppervlak zich zelf doorsnijdt. Het dubbelraakvlak doorsnijdt deze imaginaire kegelsnede in twee punten, die dubbelpunten zijn van de doorsnijdingskromme, zodat ook nu vier dubbelpunten worden gevonden. De doorsnijdingskromme ontaardt. De twee kegelsneden, die de ontaarding vormen, zijn thans twee ellipsen, omdat de imaginaire kegelsnede in het oneigenlijke vlak nu niet meer de imaginaire bolcirkel is.

Laat de z -as met de omwentelings-as samenvallen, laat de afstand der middelpunten van twee in een zelfde meridiaanvlak gelegen ellipsen $2p$ zijn, laat de ellips-as, evenwijdig aan de z -as, $2b$ zijn, de andere assen $2a$, dan zijn de vergelijkingen van de gene-

matrix, gelegen in een meridiaanvlak, dat samenvalt met het vlak XOZ:

$$y = 0; \quad \frac{(x - p)^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

De imaginaire asymptotische richtingen hiervan zijn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0;$$

de kegel der asymptotische richtingen heeft tot vergelijking:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0$$

en de imaginaire kegelsnede op oneindig:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 0, \quad t = 0,$$

waarbij t de vierde homogene coördinaat is.

De imaginaire bolcirkel in het oneigenlijke vlak heeft tot vergelijkingen $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ en $t = 0$. De imaginaire kegelsnede van de asymptotengekel in het oneigenlijke vlak en de imaginaire bolcirkel hebben de punten $x = 1, y = +i, z = \pm 0, t = 0$ en $x = 1, y = -i, z = \pm 0, t = 0$ gemeen en raken elkaar in die punten aan. Het dubbelraakvlak echter snijdt het aequatoriale vlak $z = 0$ volgens een reële lijn door de oorsprong, en niet volgens een der isotrope lijnen daarvan. Hieruit volgt, dat dit vlak de imaginaire kegelsnede en de imaginaire bolcirkel niet in dezelfde punten snijden kan, zodat de in het oneindige gelegen dubbelpunten der vierdegraadskromme in het dubbelraakvlak niet de imaginaire cirkelpunten van dat raakvlak kunnen zijn. De ontaarding, waarin de vierdegraadskromme uiteenvalt, zijn daarom geen cirkels, maar kegelsneden en wel ellipsen, die van wege de symmetrie congruent zijn en waarvan de assen evenwijdig zijn, daar de imaginaire asymptoten elkaar in het oneindige snijden en dus evenwijdig zijn.

Zijn de assen der generator-ellipsen niet evenwijdig, waarbij evenwel toch een symmetrische stand wordt ingenomen ten opzichte van de omwentelings-as, dan hebben de twee ellipsen, die weer een vierdegraadsoppervlak doorlopen, vier snijpunten reëel of imaginair gemeen. Twee van deze snijpunten liggen op de wentelings-as, twee op een lijn loodrecht daarop. Bij het wentelen doorlopen de laatste een zelfde cirkel, waarin het omwentelingsoppervlak zich zelf snijdt. Een dubbelraakvlak snijdt deze cirkel reëel of imaginair in twee punten, en deze snijpunten zijn dubbelpunten van de vierdegraads-

snijkromme en het dubbelraakvlak. Zo blijkt, dat ook nu vier dubbelpunten worden gevonden, met het gevolg, dat de kromme ontaardt in twee kegelsneden (ellipsen). Dit ziet men gebeuren, als de beide ellipsen geen reële snijpunten hebben, daar in dit geval twee (reële) raakpunten met een vlak mogelijk zijn. Nu zijn de assen der beide wentelende ellipsen niet meer evenwijdig.

Bij deze draadfiguren, bij een geschikte keuze van de afstand van de middelpunten der ellipsen tot de as, mede in verband met de assenverhouding van de ellipsen, kan men zorgen, dat de aëquatoriale punten aan de buitenomtrek elliptische punten zijn, waarbij de lange assen der oneindig kleine ellipsen evenwijdig zijn aan de wentelingsas van de torus, terwijl er dan ergens boven en beneden de aequator van de torus een cirkel van navelpunten is te vinden.

Punten op een vierdēgraadskromme, waarbij de tweede en de derde afgeleiden nul zijn, zonder dat dit dubbelpunten zijn.

Men snijdt de torus met een vlak, evenwijdig aan de wentelings-as. Men laat het de torus inwendig raken. De doorsnijdingskromme heeft in het midden een dubbelpunt en de vorm van een lemniscāat. Dan verschuift men het snijvlak naar buiten. Het dubbelpunt verdwijnt. De kromme is een ovaal met twee symmetrie-assen, waarvan de y -as evenwijdig aan de omwentelings-as is, en de x -as loodrecht daarop. In het midden bij de y -as is zij ingedeukt. Verschuift men het snijvlak verder, dan verdwijnt de insnoering; denkt men zich een raaklijn, evenwijdig aan de x -as, die de kromme tweemaal raakt, dan schuiven de beide raakpunten bij het naar buiten verplaatsen van het vlak naar elkander toe. Een raaklijn heeft dan vier punten met de kromme gemeen en er is een aanraking van de derde orde. Hij gaat wat lijken op een rechthoek met afgeronde hoeken, en het gedeelte bij de y -as maakt voor een stuk de indruk van een rechte lijn.

Men make eens een grafische voorstelling van de functie $y = x^{100}$ met haar honderd wortels $x = 0$ van de vergelijking $x^{100} = 0$. Deze grafische voorstelling is in het interval $-1 < x < +1$ op het oog niet te onderscheiden van een recht lijnstuk met twee loodrechte halve rechten in de uiteinden.

Dit eigenaardige, dat we bij de doorsnijding van de torus vonden, doet zich bij verticale doorsnijdingsvlakken tegelijkertijd voor boven en beneden de x -as; is echter het doorsnijdingsvlak scheef, dan vinden we het of boven of beneden.

Slotwoord: Dank aan het Christelijk Gymnasium te Den Haag,

waar mij de gelegenheid gegeven werd tot dit onderzoek; dank aan de animerende belangstelling van Hoogleraren en Collega's; menige opmerking stootte aan tot een voortgaan op de ingeslagen weg; dank aan mijn amanuensis, de Heer J. Koolen, die menige grillige opdracht nauwkeurig uitvoerde; dank ook aan mej. W. Mante en mevr. W. Schlingemann-Bijleveld die mij hielpen bij het moeilijke fotograferen.

Christelijk Gymnasium, 1946/'47.
's-Gravenhage.

U. Ph. LELY.

Dr U. Ph LELY †

Dr Lely is geboren in 1889; hij deed in 1907 het Staatsexamen B en studeerde daarna van 1907—1913 aan de Technische Hogeschool te Delft. Als electro-technisch ingenieur heeft hij daarna in het vrije bedrijf gewerkt: bij de Bell-telefoon te Antwerpen, bij het gemeentelijk telefoonbedrijf te 's Gravenhage en op een octrooibureau aldaar. In 1921 ging hij over naar het onderwijs en wel aan het Christelijk Gymnasium in de Groothertoginnelaan; hij heeft zijn ambt als leraar vervuld tot zijn heengaan in eeuwige ruste in 1948.

In het Weekblad voor Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs van Sept. 1948 is een „In memoriam” van Dr. Lely opgenomen, geschreven door zijn ambtgenoot de Heer J. A. Schouten. De heer Schouten tekent de mens Lely, de hoge, de gave mens, de toegewijde dienaar. Hij schrijft ook over de dorst naar kennis op velerlei gebied. Over Dr Lely's onderwijs vinden we deze zin: „Zijn onderwijs in natuurkunde was zo, dat meermalen de gecommiteerden bij de eindexamens hem om demonstratie van de originele proeven vroegen, die hij had gevonden en niet zelden hem complimenteerden over de zeer oorspronkelijke wijze, waarop hij onderwijs gaf”. De lezing van het artikel, waarmee de 25e jaargang van Euclides wordt geopend, geeft daar getuigenis van!

P. W.

DE EVENWIJDIGE LIJNEN IN DE SCHOOLMEETKUNDE

door

P. WIJDENES.

De behandeling van de evenwijdige lijnen is in alle schoolboeken vrijwel dezelfde; er is maar één schoolboek bij mijn weten, die deze leerstof plaatst na de congruentie van twee driehoeken, die twee zijden en de ingesloten hoek gelijk hebben; die congruentie wordt als axioma vooropgesteld. Alle andere doen het met kleine verschillen als volgt; (ik neem Haalmeyer als voorbeeld):

Axioma I. Door P buiten l gaat één lijn $m \parallel l$.

Daarna de stellingen:

St. 1. Twee lijnen evenwijdig met een derde zijn onderling evenwijdig.

St. 2. Een lijn, die een van twee evenwijdige lijnen snijdt, snijdt ook de andere.

St. 3. Twee lijnen, die een derde snijden onder gelijke overeenkomstige hoeken, zijn evenwijdig.

St. 4. Twee evenwijdige lijnen snijden een derde onder gelijke overeenkomstige hoeken.

Een paar schrijvers geven ook st. 3 als axioma; er is er ook een, die 3 en 4 beide als axioma geeft.

Het is vooral over stelling 3, dat ik een woordje wou zeggen. Het bewijs verloopt bij allen zo: twee lijnen l en m en een snijlijn s ; s maakt gelijke overeenkomstige hoeken α en α ; de figuur wordt „doorgesneden” volgens s ; l wordt daardoor verdeeld in twee halve lijnen l_1 en l_2 , m in m_1 en m_2 . Het ene halve vlak met de twee halve lijnen l_1 en m_1 wordt rondgezwaaid en men laat het het andere bedekken, daarbij zorgende, dat $m_1 l_2$ bedekt en $l_1 m_2$; hetgeen mogelijk is vanwege de gelijke hoeken; dan nog een redenering uit het ongerijmde. Ook wordt wel gedraaid om het midden M van PQ.

Ik stel voor het anders te doen, *veel eenvoudiger*; ik zie in fig. 1 een lijnenpaar met P als hoekpunt en een tweede met Q als hoekpunt; het eerste (s, l) wordt verschoven over PQ en bedekt het tweede (s, m); s wordt in zich zelf verschoven; (ook een plat vlak heeft de eigenschap, dat het in zich zelf verschoven kan worden;

deze eigenschappen moeten we in de meetkunde uitbuiten.). Ik zeg

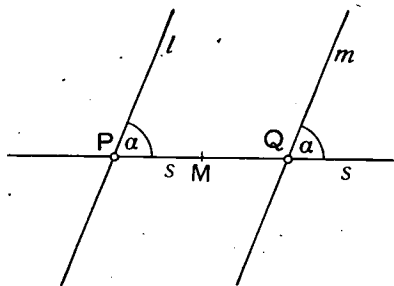


Fig. 1.

dus: het vlak wordt met het lijnenpaar (s, l) verschoven tot het (s, m) bedekt.

Dit eenmaal zo bekeken (de beweging is simpel vergeleken met de „zwaai”, die ik aanduidde), dan komt men er toe enige theorie te geven over verschuiving; een theorie, die in de meetkunde ook verder van groot nut is.

PQ noemen we een vector, een verschuivingsvector; men moet een bepaling van verschuiving geven; men moet een axioma opstellen, dat inhoudt, dat door verschuiving een rechte lijn in een evenwijdige rechte lijn overgaat.

Dit is in het kort, hoe ik er toe kwam het volgende voor te stellen als een geheel nieuwe behandeling van de evenwijdige lijnen; geschreven als een hoofdstuk voor een schoolboek; met alles, wat aan st. 3 en 4 voorafgaat.

In een bladzij of wat moeten, zoals bij allen, voorafgaan: rechte, ax. 1: „twee punten bepalen een rechte lijn”; halve rechte, lijnstuk, iets over hoeken, rechthoekig, complement en supplement; st. 1: „overstaande hoeken zijn gelijk”; iets over driehoeken; de gewone leerstof voor de eerste drie weken meetkunde.

Evenwijdige lijnen I

§ 1. Twee lijnen heten evenwijdig of parallel, als zij in hetzelfde vlak liggen en elkaar niet snijden; denk aan de lijntjes in je schrift, aan de naden tussen de planken van de vloer, aan de

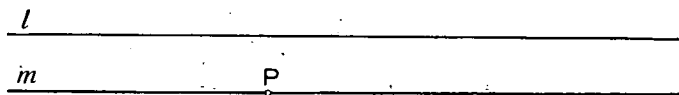


Fig. 2.

rails van een recht baanvak. Natuurlijk kunnen we slechts een heel klein stukje van de lijnen tekenen; we moeten denken, dat l en m van fig. 2 aan weerszijden doorlopen.

Lijnstukken, ook halve lijnen, waarvan de dragers evenwijdig zijn, noemt men evenwijdig. Op fig. 3 is het lijnstuk AB van l evenwijdig met PQ van m , als hun dragers l en m evenwijdig zijn.

Ook is de halve lijn, links van A, is evenwijdig met de halve lijn, rechts van Q. Het teken voor evenwijdig is $//$; dit betekent niet, dat men het woord evenwijdig steeds mag vervangen door dat

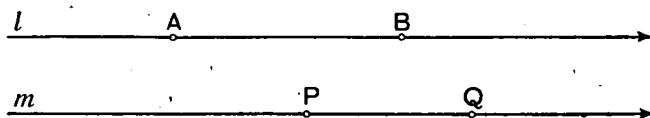


Fig. 3.

teken. Toegelaten is b.v. „op fig. 2 is $l // m$ ”, niet: „men trekt door P een lijn, waarvan twee $//$ lijnen een lijnstuk d afsnijden”; evenmin als: „trekt men in een $\triangle$ de lijn door A $\perp$ op BC en daarna $//$ aan de basis nog ...”.

Axioma II. Een lijn l en een punt P er buiten bepalen een tweede lijn m door P evenwijdig, aan de eerste (fig. 2).

Men kan het ook zo zeggen:

Door een punt P buiten een lijn l gaat juist één lijn m evenwijdig met l .

Stelling 2 Twee lijnen l en m , evenwijdig met een derde lijn n , zijn onderling evenwijdig.

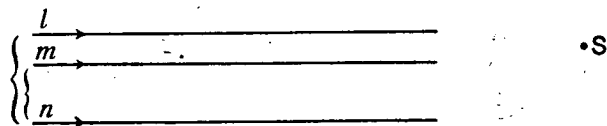


Fig. 4.

Eén van tweeën; l en m hebben een snijpunt S of ze hebben geen snijpunt. Sneden ze elkaar in S, dan zouden er door S twee lijnen gaan evenwijdig met n ; dit is in strijd met ax. II (zie de tweede vorm daarvan); l en m hebben dus geen snijpunt; dat is: ze zijn evenwijdig.

Stelling 3. Drie lijnen l , m en n liggen in hetzelfde vlak;

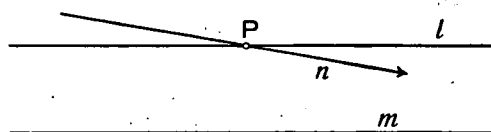


Fig. 5.

als n één van de evenwijdige rechten l en m snijdt, snijdt hij ook de andere. Op fig. 5 is $l // m$; n snijdt l in het punt P; n is

zeker niet evenwijdig met m ; in dat geval toch moest hij samen-
vallen met l (zie ax. II); dus zal n de lijn m ergens snijden.

„Het lijnstuk AB” en „het lijnstuk BA” duiden tot zo ver
dezelfde figuur aan; voor zekere meetkundige beschouwingen is het
nuttig, ook wel nodig, dat we verschil maken. Met AB zullen we
dan bedoelen, dat men het lijnstuk doorloopt bij A te beginnen en
te eindigen bij B; met BA, dat men bij B begint en in A eindigt.
Dat men het lijnstuk AB doorloopt met A als oorsprong en B als
eindpunt, duidt men zo aan: $\overrightarrow{AB}$ (lees: AB met pijl); dat pijltje
betekent niet, dat A links ligt en B rechts; $\overrightarrow{AB}$ kan elke stand in-
nemen.

$\overrightarrow{AB}$ heet een lijnstuk en $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{AB}$ heet een **gericht lijnstuk**;
 $\overrightarrow{AB}$ en $\overrightarrow{BA}$ zijn tegengesteld.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{PQ}$ betekent, dat de lengten van de lijnstukken AB en PQ
gelijk zijn en dat ze in dezelfde richting doorlopen worden; op één lijn
of op evenwijdige lijnen.

Een gericht lijnstuk kan men aangeven door de volgorde van
oorsprong en eindpunt; ook door een pijl, waarvan de punt naar het
eindpunt wijst. De richting van een halve lijn of een lijn wijst men
gewoonlijk aan door een pijlpunt; zie fig 6. met het gerichte lijn-
stuk AO, de gerichte halve lijn h en de gerichte lijn l .

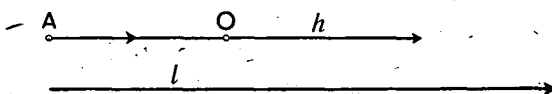


Fig. 6.

Evenwijdige lijnen met de pijl naar dezelfde kant hebben dezelfde
richting; men zegt, dat ze **gelijk gericht** zijn. Lijnstukken, ook
halve lijnen, op dragers in dezelfde richting noemt men ook gelijk
gericht.

Axioma II kan men ook in deze vorm geven: **Er is juist één
rechte lijn door een punt P in een gegeven richting.**

§ 2: Verschuiving.

Een vlak stuk wit papier; daarop een stuk carbonpapier (door-
drukpapier) en daarop een stuk wit papier; dat komt veel voor;
waartoe het dient? Wel, om een doorslag te maken van wat je op
het bovenste schrijft of tekent. We prikken de drie vellen papier

met een paar spelden op een stuk karton of op het bord en tekenen een figuur F op het bovenste papier; we halen daarna het carbonpapier er tussen uit. Er zijn nu twee figuren F , waarvan de ene de andere bedekt; we kunnen de vellen tekenpapier verwisselen; dan bedekt de andere de ene; we zeggen: ze bedekken elkaar.

De figuren F liggen in twee vlakken; als we het onderste vlak laten liggen, dan kan het bovenste vlak bewegingen maken over het onderste. We prikken twee punten A en B door en zetten bij de twee op het onderste vlak en bij die op het bovenste vlak A_v en B_v ; A en B op het onderste vlak en de figuur F daarop blijven stil liggen; A_v en B_v op het bovenste vlak, het schuivende vlak, laten we **een recht lijnstuk doorlopen**; zie fig. 7. Hierop is de figuur, bestaande uit de punten A en B en $\triangle PQR$ na de verschuiving A_v , B_v en $\triangle P_vQ_vR_v$. Wat rechts op de figuur te zien is, is de ver-

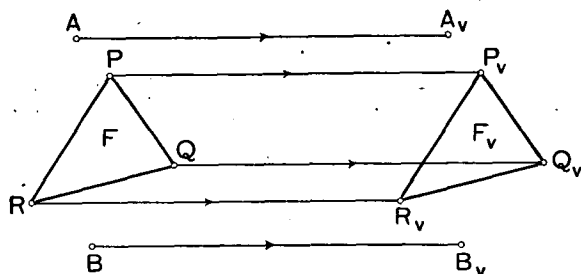


Fig. 7.

schoven linkerfiguur; wederkerig kan men de linkerfiguur als de verschoven rechter beschouwen; (v is de eerste letter van verschoven). Nu het begrip is aangebracht kunnen we de volgende bepaling geven.

*Onder een verschuiving van een figuur F verstaan we een verplaatsing, waardoor alle punten van F in dezelfde richting over dezelfde afstand verplaatst worden; elk tweetal punten A en B gaat over in A_v en B_v , waarbij $\overrightarrow{AA_v} = \overrightarrow{BB_v}$ is; $\overrightarrow{AA_v}$ noemt men de **verschuivingsvector**.*

Door verschuiving wordt een figuur ergens anders in het platte vlak overgebracht; de eerste en de tweede stand zijn in alles gelijk, behalve in plaats; men noemt ze **congruent**; zie fig. 8a, b en c, waarop een lijn, een hoek en een driehoek zijn verschoven.

Op fig. 8a zien we een lijn l en een verschovene l_v ; deze zijn evenwijdig; dit wordt uitgedrukt in

Axioma IIIa. l en l_v zijn evenwijdig of vallen samen.

Axioma IIIb. Als men twee lijnen l en m heeft en het is mogelijk l zo te verschuiven, dat l_v samenvalt met m , dan is $l \parallel m$.

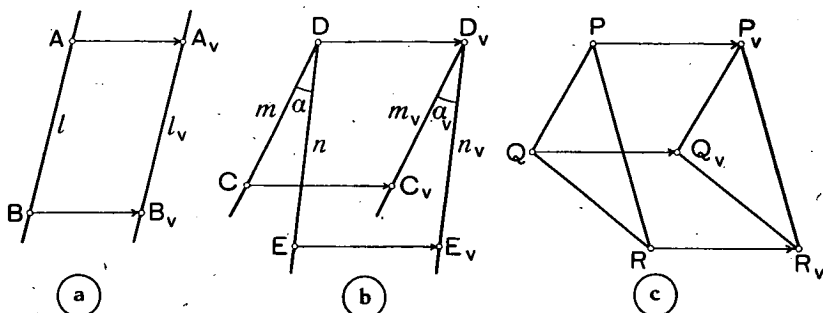


Fig. 8.

Ax. IIIa zegt: door P gaan twee samenvallende lijnen; een er van wordt verschoven; die noemen we l_v ; nu is $l_v \parallel l$.

Ax. IIIb zegt: twee lijnen l en m ; als l na verschuiving samenvalt met m , dan zijn l en m evenwijdig.

Evenwijdige lijnen II.

§ 3. Op fig. 9 zien we een lijn l en een lijn m , die l snijdt in S; deze m is uit l ontstaan door draaiing over een hoek α in de zin van de gebogen pijl.

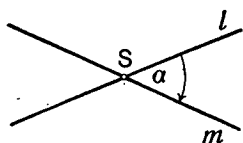


Fig. 9.

Het paar rechten l en m met inachtneming van hun volgorde noemen we het **lijnenpaar** (l, m) .

Zie fig. 10, waarop twee lijnen l en m voorkomen en een lijn s , die beide snijdt.

Tussen l en m liggen vier hoeken β, γ, α_1 en δ_1 ; ze heten *binnenhoeken*; buiten de strook begrensd door l en m liggen de *buitenhoeken* α, δ, β_1 en γ_1 . Een binnen- en een buitenhoek aan dezelfde kant van s , mits geen nevenhoeken, heten **overeenkomstige hoeken**; op fig. 10 zijn ze met dezelfde letter aangeduid. Twee binnenhoeken aan weerskanten van de snijlijn, mits geen nevenhoeken, heten **verwisselende binnenhoeken**; op fig. 10 zijn het β en δ_1 , ook

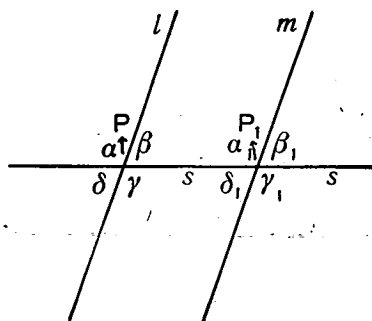


Fig. 10.

γ en α_1 . De hoeken α en γ_1 , ook δ en β_1 heten **verwisselende buitenhoeken**; ze liggen aan weerszijden van s en hebben geen hoekpunt gemeen.

Hebben we op een of andere manier uitgemaakt, dat $\alpha = \alpha_1$ is, dan volgt, dat hun supplementen δ en β_1 , ook β en δ_1 gelijk zijn; verder zijn α en β_1 supplementair, evenals β en α_1 en nog twee paren hoeken aan de andere kant van de snijlijn.

Op fig. 10 ziet men twee evenwijdige lijnen l en m ; een derde lijn s snijdt l in P en m in P_1 ; verschuif het lijnenpaar (s, l) over de vector PP_1 ; s verschuift in zich zelf, l valt samen met m (ax. IIIa); het lijnenpaar (s, l) is dus congruent met het lijnenpaar (s, m) ; we drukken dit uit in:

Een lijn s , die twee evenwijdige lijnen l en m snijdt, maakt twee congruente lijnenparen (s, l) en (s, m) .

Voor de hoeken geldt dus:

Stelling 4a. Als twee evenwijdige lijnen door een derde gesneden worden, zijn de paren overeenkomstige hoeken gelijk; ook de paren verwisselende binnen- en buitenhoeken;

4b. twee binnen-, ook twee buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn zijn supplementair.

Gevolg. Als een van twee evenwijdige lijnen loodrecht staat op een derde, staat de andere er ook loodrecht op; zie fig. 11.

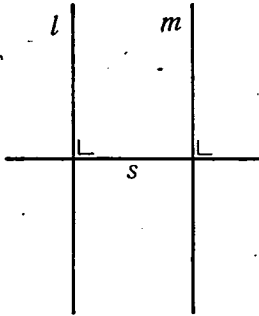


Fig. 11.

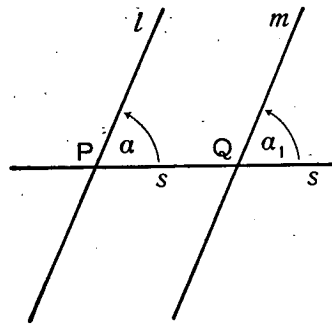


Fig. 12.

Op fig. 12 is $\alpha = \angle(s, l)$. Met Q als hoekpunt en s rechts van Q als ene been wordt α_1 gelijk gemaakt aan α ; het tweede been is m . Verschuiving van het lijnenpaar (s, l) over de vector PQ doet l met m samenvallen, daar α en α_1 gelijk zijn; dus is $l \parallel m$ (ax. IIIb). We drukken dit uit in:

Als twee lijnenparen (s, l) en (s, m) congruent zijn, is $l \parallel m$.

Let men op de hoeken, dan zegt men dit zo:

Stelling 5a. Als twee rechten door een derde gesneden worden onder gelijke overeenkomstige hoeken of onder gelijke verwisselende binnen- of buitenhoeken, dan zijn de lijnen evenwijdig; op fig. 13, als $\alpha = \alpha_1$ of $\gamma = \alpha_1$ of $\alpha = \gamma_1$ is, dan $l \parallel m$.

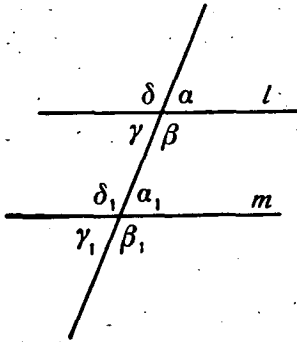


Fig. 13.

5b. als twee binnen- of buitenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn s supplementair zijn, dan lopen de lijnen l en m evenwijdig; $\alpha + \beta_1 = 180^\circ$ is nl. hetzelfde als $\alpha = 180^\circ - \beta_1 = \alpha_1$.

Als bijzonder geval hebben we dit:

Gevolg: twee rechten, die rechte hoeken maken met een zelfde rechte lijn, zijn evenwijdig; zie fig. 11.

Op fig. 10 hebben we een lijnenpaar (l, s) verschoven over een vector, die op s ligt; dit is natuurlijk een bijzonder geval. Het algemene geval is voorgesteld in fig.

14; uit het lijnenpaar (l, m) is door verschuiving over SS_1 het lijnenpaar (l_1, m_1) ontstaan, dat congruent is met (l, m) ; dat houdt in: 1) $\alpha = \alpha_1$; 2) $\gamma = \alpha$; 3) $\beta + \alpha_1 = 180^\circ$. Daar $l \parallel l_1$ en $m \parallel m_1$ is, kunnen we deze drie gelijkheden als volgt onder woorden brengen:

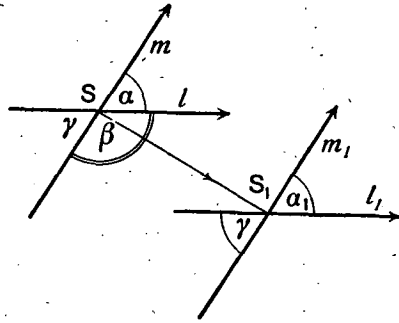


Fig. 14.

Stelling 6a en b. Als de benen van twee hoeken beide gelijk of beide tegengesteld gericht zijn, zijn die hoeken gelijk; c. als twee benen gelijk, de andere tegengesteld gericht zijn, zijn de hoeken supplementair. Deze stelling 6 steunt blijkbaar op ax. IIIa.

Zoals de lezer bemerkt, is de behandeling van de bekende stellingen 4 en 5 geheel anders dan in alle andere schoolboeken. Al tamelijk lang geleden heb ik hetzelfde gedaan nl. in de 1e druk van de Meetkunde voor MULO (van 1914) en in het eenvoudige schoolboek Planimetrie; eenvoudige theorie, die berust op de verschuiving. In dat boekje ga ik uit van het begrip richting, die door verschuiving dezelfde blijft. Wat hier stelling 6 is, is daar het begin; fig. 12 en 13 zijn daar bijzondere gevallen.

In die boekjes zonder „axioma's"; voor het M.O. moet men een eenvoudige theorie voorop stellen, zoals men die hier aantreft.

Tot slot nog eens: ik zie in de figuren 1, 10, 12 en 13 twee lijnenparen, die door verschuiving elkaar kunnen bedekken. Ik hoop, dat er collega's zijn, die het eens willen proberen met mijn manier van doen. De theorie is wel zo gemakkelijk als de oude; de verschuiving is simpel, vergeleken bij de beweging, die alle schrijvers een half vlak laten uitvoeren!

BOEKBESPREKING.

Herman Meyer. Kennis en Realiteit. Utrecht
1949. 307 blz.

Dit boek, dat zich met de grondvragen der kennistheorie bezighoudt, is voor wiskundigen, die zich voor de wijsgerige achtergrond der wiskunde interesseren, van belang, omdat de schrijver een uitvoerig hoofdstuk wijdt aan de grondslagen der wiskunde, in het bijzonder het getalbegrip. Het is niet mogelijk, hier op de wijsgerige beschouwingen van de schrijver in te gaan; ik moet mij beperken tot een korte aanduiding. In al onze kennis is volgens hem een aanschouwelijk en een logisch element aanwezig. Bij de opbouw van het getalbegrip vindt men het aanschouwelijke element in de tijdsbeleving, die wij kennen als een onscherp begrensde kort tijdsbestek in het „Nu”; het logische in de herhaalbaarheid van als gelijk gestelde tijdsintervallen. De rij van deze intervallen, die wij door tekens vastleggen, levert ons de rij der natuurlijke getallen. Uitbreiding tot negatieve en gebroken getallen wordt eerst mogelijk door de ruimtelijke aanschouwing. Anders dan in de tijd, kan men in de ruimte heen en weer tellen en punten tussen vroeger reeds ingevoerde punten invoegen.

Deze opvatting vertoont veel overeenkomst met de intuitionistische. Evenwel begint de wiskundige te werken met het getalbegrip, zoals dat in zijn begrippenarsenaal gereed ligt: een analyse, zoals hier beproefd, is voor hem niet nodig, en vermenging van beschouwingen als deze met eigenlijke wiskundige afleidingen leidt tot heilloze verwarring. Dit is geen kritiek op het boek, want de schrijver onthoudt zich van zuiver wiskundige ontwikkelingen. Deze bescheidenheid wreekt zich echter in het vervolg, waar hij een synthese tussen de verschillende richtingen, de formalistische, logicistische en intuitionistische tracht te bereiken, want zulk een synthese zou haar levensvatbaarheid eerst in een werkelijke opbouw der wiskunde kunnen bewijzen. De schrijver maakt een onderscheid tussen het *tellen* en het *rekenen*. Bij het tellen worden de natuurlijke getallen gebruikt in de vorm, zoals hierboven geschetst; het rekenen daarentegen geschiedt in een abstracte calculus, waarbij de versmelting van het aanschouwelijke en het logische element voert tot het als herhaalbaar gestelde teken. Hoe deze twee theorieën tot één wiskunde

moeten voeren, is niet duidelijk. En de eisen, die op blz. 207—208 aan logicisten en intuitionisten worden gesteld, om hen tot overeenstemming te doen komen, zullen in geen van beide kampen met geestdrift worden aanvaard. Beide zullen hetzelfde bezwaar aanvoeren: de aanvaarding van de tweewaardige logica. Ziet de logicist van zijn platoniserende beschouwingswijze af, dan heeft voor hem de tweewaardige logica geen bevoorrechte plaats meer, waardoor zij als grondslag voor de wiskunde geschikt zou zijn. En de intuitionist zal, wanneer hij al aan de logica het vermogen toekent, de begrippen te ontrafelen, daarbij zeker niet in de eerste plaats aan de tweewaardige logica denken.

Bij de toepassing van zijn kennistheorie op meer concrete vragen maakt de schrijver vele verhelderende opmerkingen. Daarnaast vallen enkele slordigheden op. Op blz. 212 vat de schrijver de bekende definitie van het reële getal volgens Cantor als existentieaxioma op. Zijn bezwaren verdwijnen, wanneer men, zoals meer gebruikelijk is, de fundamenteaalrij als de definitie van het reële getal opvat. Wat deze zaak met het keuze-axioma van Zermelo te maken heeft, is mij niet duidelijk. Verder beroept schr. zich ten onrechte op Mannoury voor zijn begrip uitsluitingsnegatie. Mannoury verstaat daaronder geheel iets anders, namelijk het afwijzen van een begrip of voorstelling, zonder er iets anders voor in de plaats te stellen. Hier echter vervult de uitsluitingsnegatie de rol, „al dat gene af te wijzen, wat niet tot het kenmerk behoort, dat wij willen vasthouden” (blz. 164 boven). Mannoury zou dit waarschijnlijk eerder een keuze-negatie noemen.

Men moge in de voorgaande opmerkingen geen beoordeling zien van het boek als geheel. De diep doordachte beschouwingen van de schrijver over de kennistheorie beveel ik in de aandacht van alle in deze materie belangstellenden aan. De beschouwingen over de wiskunde, hoe belangrijk ook op zich zelf, vormen daarvan slechts een klein onderdeel.

A. HEYTING.

Lagere Algebra. Leerboek voor de akte Wiskunde L.O. door P. Wijdenes; dl. II: vergelijkingen, functiën grafieken en reeksen. 5e druk. P. Noordhoff, Groningen, 1949. geb. f 12.50.

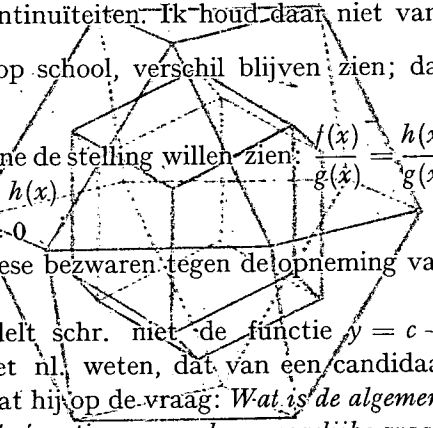
Wie de inhoud van dit kloeke boek (tezamen met die van het in jg. 24, nr 5 aangekondigde 1e deel) tot zijn eigendom gemaakt heeft, is in de sluippaadjes van het struikgewas der akte Wiskunde L.O. thuis. Hij kan gochelen met de nog steeds in de mode zijnde dwaze

functies $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ met $p \neq 0$ en met $p = 0$, ja hij kan zelfs

door P (2, 3) een raaklijn trekken aan $y = (x - 2) \times 2 \frac{3x^2 - 8x + 6}{(x - 2)^2} + 6$.

Men mene echter niet, dat schr. zich hierdoor heeft laten dwingen een laagstaand boek té schrijven; integendeel, op vele plaatsen wordt de lezer gedwongen om ook eens vanaf een heuvel op het struikgewas neer te zien. Veel werk is gemaakt van de ontwikkeling van het functiebegrip, van de gelijkwaardigheid van stelsels van vergelijkingen, van afhankelijkheid en strijdigheid in die stelsels. De onbepaalde vergelijkingen worden behandeld volgens de reeds zovele jaren door schr. gepropageerde methode; bijzonder aardig is de behandeling van de vraag naar het aantal positieve oplossingen van $ax + by = c$ (heel anders dan in de 1e druk een bewijs voor schr.'s vitaliteit). Zeer fraaie figuren zijn met kwistige hand door het boek gestrooid. Jonge leraren kunnen uit dit boek veel leren voor de praktijk van het les geven.

Een enkele opmerking: op blz. 6 blijkt niet of de verg. $\frac{x^2}{x^2 + 1} = x$ nu identiek is, of niet. Wel kan men uit blz. 249-250 opmaken, wat schr.'s opvatting is; hij definieert daar: $x = c$ is een wortel van $f(x) = g(x)$; als $\lim_{x \rightarrow c} \{f(x) - g(x)\} = 0$ is. Dit betekent dus, dat $x = c$ aan $h(x) \equiv 0$ voldoet, als $\lim_{x \rightarrow c} h(x) = 0$, dus het stilzwijgend opheffen van ophefbare discontinuïteiten. Ik houd daar niet van; tussen $\frac{x^2}{x}$ en x wil ik, zeker op school, verschil blijven zien; dat scherpt de zinnen.

Op blz. 253-254 zou ik gaarne de stelling willen zien: $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{h(x)}{g(x)}$ is gelijkwaardig met $f(x) = h(x)$  $g(x) \neq 0$.

Misschien heeft schr. praktische bezwaren tegen de opneming van deze stelling.

Tot mijn vreugde behandelt schr. niet de functie $y = c - a^2(x - p)^2(x - q)^2$. Men moet nl. weten, dat van een candidaat Wisk. L.O. verwacht wordt, dat hij op de vraag: *Wat is de algemene gedaante van de geheel rationale functies van zo laag mogelijke graad, die voor $x = p$ en voor $x = q$ ($p \neq q$) hetzelfde maximum c bereiken?* voetstoots bovenstaande functie reproduceert. Ik kan niet inzien dat de „lagere” algebra daar „hoger” van wordt, en schr. blijkbaar ook niet.

Het boek wordt aan de belanghebbenden van harte aanbevolen.

H. Str.

KORREL.

XCIV.

Iets over korrel XCIII.

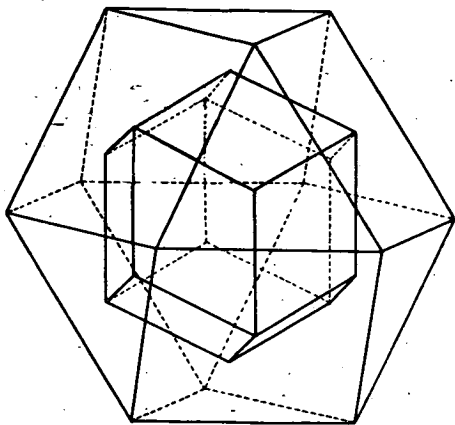
Wanneer men een regelmatig zeszijdig prisma aan beide kanten door een uit drie congruente ruiten bestaand dak afsluit en wel zodanig dat ook de zijvlakken dezelfde ruiten zijn als de daken krijgt men een 12 ruitenvlak waarvoor

$$H = 14 \quad Z = 12 \quad \text{en} \quad R = 24$$

terwijl in 8 hoekpunten 3 ruiten samenkomen met stompe hoeken en in 6 hoekpunten er 4 samenkomen met scherpe hoeken. De verhouding van de halve diagonalen en de zijde van de ruit is $1 : \sqrt{2} : \sqrt{3}$.

Dit 12 ruitenvlak treedt op bij de dichtste bolstapeling.

Maakt men nl. een bolstapeling zodanig, dat in een horizontaal vlak de bollen aan elkaar grenzen, er boven een laag boven de gaten en daarboven weer een laag boven de gaten van de eerste laag die nog niet gebruikt zijn, vervolgens een 4e laag gelijk aan de eerste enz. Elke bol wordt dan aangeraakt door 12 andere bollen nl. 6 in het horizontale vlak, 3 er boven en wel boven de zwaartepunten



van driehoeken gevormd door de middelpunten van bollen en 3 er onder, onder de zwaartepunten van 3 andere driehoeken. We beschouwen de middelpunten van deze 12 bollen.

Er zijn 4 vlakken die allen 6 punten bevatten en aan elke kant 3 punten. Deze vlakken gaan door de grote diagonalen van de oorspronkelijke

zeshoek. Deze 12 punten vormen de hoekpunten van een kubo-octaëder. Voor dit lichaam is:

$$H = 12 \quad Z = 14 \quad R = 24.$$

Het wordt begrensd door 8 driehoeken en 6 vierkanten.

Hoe krijgen we de ruimte die beschikbaar is voor elke bol. Daartoe moeten we in de raakpunten van de bol met de 12 aanrakende bollen gemeenschappelijke raakvlakken aanbrengen en deze met elkaar tot snijding brengen. We krijgen dan het 12-ruitenvlak. De 6 hoekpunten hiervan, waar 4 vlakken samenkomen zijn de middelpunten van de vierkanten van de kuboctaëder.

De middelpunten van de vlakken van het 12 ruitenvlak zijn weer de hoekpunten van een nieuwe kuboctaëder, half zo groot als de oorspronkelijke. Men kan de gehele ruimte vullen met 12 ruitenvlakken. In een punt waar 3 ribben van een lichaam samenkomen, komen 4 lichamen samen, in de andere punten 6 lichamen.

Men kan ook een 12 ruitenvlak en een kuboctaëder laten ontstaan uitgaande van een kubus.

De samenkomst van 6 lichamen is zoals in 't middelpunt van een kubus, terwijl 4 lichamen samenkomen zoals in 't middelpunt van een regelmatig viervlak. De verhouding van de inhouden van bol en 12 ruitenvlak is $\pi\sqrt{2} : 6$. Dit is dus tevens de verhouding van de ruimte door alle bollen in dichtste bolstapeling ingenomen en de totale ruimte.

Dr J. F. VAN DE VOOREN—VAN VEEN.

TWEEDE CONFERENTIE-WEEKEINDE, UITGAANDE VAN DE WISKUNDE WERKGROEP.

De Wiskunde Werkgroep der W.V.O. (Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs) zal evenals verleden jaar, ook deze herfst weer een conferentieweekend organiseren in het Maarten-Maartenshuis te Doorn. Terwijl de inleiders verleden jaar meer een didaktisch en methodisch gebied behandelden, is besloten om dit jaar als centraal onderwerp te kiezen:

de Wiskunde voor niet-mathematische richtingen.

Dit onderwerp zal belicht worden van algemene, van paedagogisch en van niet-mathematische zijde, door de heren Dr F. van der Blij, leraar aan het Gem. Gymnasium te Breda, P. J. van Albada, leraar aan het Lyceum voor Montessori-leerlingen te Rotterdam en H. J. Struik, zenuwarts te Deventer, terwijl Prof. Dr H. Freudenthal, evenals verleden jaar, bereid is gevonden de algemene leiding op zich te nemen.

De conferentie zal beginnen Zaterdagmiddag, 5 November 1949 om 14 uur en eindigen Zondagavond, 6 November om 19 uur. De Zondagmorgen zal worden vrij gehouden.

H.H. Inspecteurs zijn zo welwillend om Rectoren en Directeuren aan te bevelen op verzoeken van docenten om door ruiling van uren het laatste deel van de Zaterdagmorgen vrij te maken, gunstig te willen beschikken. Mocht een overwegend aantal deelnemers, desondanks bezwaar hebben tegen het beginnen om 14 uur, dan zal alsnog het tijdstip van aanvang later worden gesteld. Bezwaren worden gaarne door de Secretaris ingewacht.

Een volledig programma met bijzonderheden en een deelnemerslijst zullen later worden toegezonden.

De kosten bedragen voor niet-leden van de Wisk. Werkgroep f 7.— per persoon en f 6.— voor leden (maaltijden en logies inbegrepen).

Opgave met tegelijkertijdige storting van de kosten kan geschieden bij de secretaris van de Wiskunde Werkgroep der W.V.O., Drs Hermen J. Jacobs Jr., Hobbemalaan 66 te Bilthoven, giro 478401, tel. K3402—3255. Spoedige aanmelding is gewenst.

MATHEMATISCH CENTRUM

2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O.

Tel. 51660 (Administratie, Bibliotheek, Afdelingen Zuivere Wiskunde en Statistiek).

Tel. 56643 (Rekenafdeling en Afdeling Toegepaste Wiskunde).

Tramlijnen Van C.S. lijn 5. Uit Oost, West en Zuid lijn 3, 7 en 10.

Rooster voordrachten en cursussen.

(Najaar 1949)

ZUIVERE WISKUNDE

Amsterdam.

Indien niet anders is vermeld, worden de voordrachten gehouden in het gebouw van het Mathematisch Centrum (adres zie boven). Indien vermeld is V.U., dan vindt de voordracht plaats in de laboratoria der Vrije Universiteit, de Lairesestraat 174 (tram: van C.S. lijn 16).

1. Serie voordrachten van Prof. Dr J. C. H. Gerretsen, getiteld: *Puntrijen van Reye*. Tijd en plaats van deze voordrachten zullen nog nader worden vastgesteld. Gegadigden kunnen zich opgeven aan de administratie van het Mathematisch Centrum.
2. *Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit*. Deze serie voordrachten wordt hervat op Woensdag 28 September 20 uur, en vervolgens iedere 14 dagen. Plaats: V.U.
 - a. 28 September, Dr J. Ridder:
„Convexe functies”.
 - b. 12 October. Prof. Dr O. Bottema:
„De vierhoek van Bennett”.
 - c. 26 October, Prof. Dr J. G. Rutgers:
„Enkele onderwerpen uit de Centrale Projectie”.
 - d. 9 November, Prof. Dr J. A. Schouten:
„De differentiaaloperator van Lie”.
 - e. 23 November. Prof. Dr J. C. H. Gerretsen.
 - f. 7 December, Prof. Dr F. Loonstra:
„Orde in de Wiskunde”.
3. Colloquium *Topologie* onder leiding van Prof. Dr J. de Groot op Woensdagavond om de 14 dagen. Aanvang 19 October 19.30 uur. Plaats: U.V. Deelnemers dienen aan te schaffen: S. Lefschetz, Introduction to topology, Princeton Univ. Pr. (1949).
4. Colloquium *Asymptotische Ontwikkelingen* onder leiding van Prof. Dr J. G. van der Corput en Prof. Dr S. C. van Veen. Het doel is om te komen tot een standaardwerk over dit gebied met alle toepassingen. Hervatting Donderdagavond 6 October en verder iedere Donderdag om 19.15.
5. *Actualiteiten*. Een serie korte voordrachten over actuele onderwerpen op de laatste Zaterdag van de maand (althans op de Zaterdag, waarop het Wis-

kundig Genootschap vergadert). Tijd 14—15 uur precies, zodat men gemakkelijk op tijd kan zijn voor de vergadering van het Wiskundig Genootschap. Plaats: een zaal van het Universiteitsgebouw, Oude Manhuispoort 4 (tramlijnen 4, 5, 9, 16, 24, 25).

- a. 24 September, de Heer W. Peremans:
„Existentie van eindige binaire projectieve groepen”.
 - b. 29 October, de Heer J. H. B. Kemperman:
„Exacte formules in de „sequential analysis””.
 - c. 26 November, de Heer C. Schogt:
„Enige stellingen van Lubelski uit de groepentheorie”.
 - d. 17 December, de Heer J. Hemelrijk:
„Over de bepaling van betrouwbaarheidsintervallen- en schattingen van de coëfficiënten van een rechte lijn uit een aantal onnauwkeurig waargenomen punten”.
6. *Avondcursussen*. De z.g. „*avondcursussen*” van het Mathematisch Centrum, die in 1947 en 1948 zijn gegeven, hadden de bedoeling om wiskundig begaafden, die niet in de gelegenheid zijn een universiteitsstudie in de wis- en natuurkunde te volgen, althans van de wiskunde zoveel kennis bij te brengen als overeenkomt met de voor het candidaatsexamen vereiste stof. Daar de stof thans eenmaal is doorgenomen, zullen deze cursussen voorlopig niet worden herhaald, tenzij zich bij de administratie van het Mathematisch Centrum vóór 15 October een voldoende aantal nieuwe gegadigden zou opgeven.
 7. Avondcursus *Vectoranalyse*. Het ligt in de bedoeling een cursus te geven, die enige voorkennis van de analyse veronderstelt en die door degenen die de avondcursus onder 6 bedoeld geheel of gedeeltelijk hebben gevolgd, kan worden gezien als een vervolgcursus. Deze cursus is echter eveneens toegankelijk voor hen, die de avondcursus niet hebben gevolgd. Het onderwerp is gekozen in overleg met enkele groepen geïnteresseerden. De cursus beslaat 2 uur per week en wel op Vrijdag en wordt gegeven door de Heer W. Peremans. Aanvang 7 October, 20 uur.
 8. Besprekingen zijn gaande met Dr I. S. Gál uit Parijs, die over een onderwerp uit de getallentheorie zal spreken, dan wel over een onderwerp uit de theorie der reële functies. Zodra nadere gegevens bekend zijn zal aan hen, die daartoe de wens te kennen geven, bericht worden gezonden.
 9. Verdere besprekingen met buitenlandse wiskundigen zijn gaande. Zodra nadere gegevens bekend zijn, zal aan hen, die de wens daartoe te kennen geven, bericht worden gezonden.

Den Haag.

10. Bij voldoende deelneming zal het colloquium *Moderne Algebra* onder leiding van Prof. Dr F. Loonstra worden hervat.

Sittard.

11. Over de mogelijkheid van een nieuwe serie colloquia of voordrachten te houden in Sittard zijn onderhandelingen nog gaande. Gegadigden kunnen zich in verbinding stellen met Drs J. H. J. Almering, Wilhelminasingel 121, Maastricht.

Rotterdam.

Voor deze voordrachten wende men zich tot de Secretaris van het Wiskundig Dispuut „Thomas Jan Stieltjes”, de Heer H. Pleysier, Nobelstraat 105b, Rotterdam. Zie ook onder Toegepaste Wiskunde.

12. Een voordracht door Prof. Dr J. G. van der Corput over „*De Hoofdstelling van de Algebra*” op 13 September.
13. Een voordracht door Prof. Dr J. F. Koksma over „*Metrische stellingen uit Getallenleer en Analyse*” op 27 September.

Eindhoven.

14. Cursus: *Grondslagen der Wiskunde* door Prof. Dr A. Heyting, om de 14 dagen van 19.45—21.45 uur in het gebouw van het Academisch Genootschap Ten Hagestraat 1, tel. 5020. Aanvang Woensdag 28 September. De cursus is geen vervolg op de cursussen, die Prof Heyting in de jaren 1947—1948 en 1948—1949 heeft gehouden. Wel wordt van de deelnemers enige bekendheid met de hogere wiskunde verondersteld. De stof zal overeenkomen met de inhoud van: E. W. Beth, *Wijsbegeerte der Wiskunde*.

TOEGEPASTE WISKUNDE**Amsterdam.**

Voor de plaats der voordrachten zie Amsterdam onder Zuivere Wiskunde.

15. Cursus voor *Medici en Biologen*. De vroeger gegeven cursus, welke laatstelijk gegeven werd door de Heer W. Peremans, is afgesloten. Indien er voldoende belangstelling voor bestaat, zal een der medewerkers van het Mathematisch Centrum een eenvoudige cursus geven over voor medici en biologen belangrijke methoden betreffende de wiskundige bewerking van waarnemingsmateriaal. Gegadigden dienen zich voor 1 October op te geven aan de administratie van het Mathematisch Centrum.
16. Cursus *Kristallografische Groepen* door Prof. Dr B. L. van der Waerden op Dinsdagavonden, 20—22 uur, aanvang op 18 October.
17. Voordracht door Dr M. V. Wilkes, Director of the Mathematical Laboratory, Cambridge University, getiteld *The electronic computing machine of Cambridge University* op Donderdag 22 September te 20 uur, plaats V.U. Deze machine, de EDSAC (Electronic delay storage automatic computer), is de zo juist in Engeland gereedgekomen rekenmachine.

Den Haag.

18. De kadercursus *Mathematische Statistiek* van Prof. Dr D. van Dantzig zal nog gedurende enkele maanden worden voortgezet. Voor degenen, die de cursus tot nu toe gevolgd hebben en het cursusgeld over 1948—1949 betaald hebben, zijn er geen kosten aan verbonden.
19. Cursus *Waarnemingsrekening* (de grondslagen, de ontwikkeling van de methode der kleinste vierkanten met toepassingen) door Prof. J. M. Tienstra, wekelijks op Maandagavonden te 20 uur, beginnende Maandag 17 October in het gebouw van het Kadaster, Nieuwe Haven 6, Den Haag. Deze cursus zal tenminste 15 avonden in beslag nemen. Het is de bedoeling van de docent dat de te behandelen methoden in een dergelijke vorm worden voorgedragen dat ze regelrecht bij het bewerken van waarnemingen zullen kunnen worden toegepast. Er zal echter naar worden gestreefd de theorie zo logisch mogelijk op te bouwen.

Rotterdam.

20. In het najaar organiseert het dispuut „Thomas Jan Stieltjes“ (zie Rotterdam, 1960 onder: Zuivere Wiskunde) enkele voordrachten door Prof. Dr. B. L. van der Waerden over de Laplace-transformatie.

Opmerkingen:

a. Alle cursussen en voordrachten, behalve eventueel nr. 6, zijn kosteloos toegankelijk.

b. Van de meeste voordrachten worden aan de hoorders kosteloos syllabussen verstrekt. Alleen bij de nrs. 7, 18 en 19 is voor de syllabussen een bijdrage in de Kostprijs verschuldigd op een basis van fl. 15,- per 100 bladzijden. Voor zover de voorraad strekt zijn tegen betaling op dezelfde voet syllabussen van vroegere cursussen en voordrachten bij het Mathematisch Centrum op aanvraag verkrijgbaar. Bovendien zijn zolang de voorraad strekt verkrijgbaar de volgende dictaten:

D. van Dantzig, *Waarschijnlijkheidsrekening*.

Caput 1. Grondslagen (Whr 1—46) fl. 2.25

Caput 2. Absoluut, additieve verzamelfuncties

Momenten en ongelijkheden (Whr 51—118) fl. 3.25

D. van Dantzig, *Mathematische Statistiek*.

Deel I (fl. 300 p.) fl. 8,-; wordt nog vervolgd.

D. van Dantzig, *Inleiding in de Algemene Signifikanstheorie* (fl. 75 p.) fl. 3.50

benevens 4 fl. 0.50 de scripta van P. Erdős, A. Selberg, J. G. van der Corput, *Démonstration élémentaire*

du théorème sur la distribution des nombres premiers.

J. G. van der Corput, *Le théorème fondamental de l'algèbre*.

3. J. G. van der Corput, *Sur les fonctions symétriques*.

Aanvragen voor toezending der dictaten en scripta moeten gericht worden tot het Mathematisch Centrum, 2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam-O., onder gelijktijdige overboeking van de verschuldigde bedragen op postgirorekening 462890 of rekening M 2138 bij het Girokantoor der Gemeente Amsterdam van deze instelling, waarbij naam en eventueel gedeelte van het verlangde dictaat vermeld moeten worden.

1961

CIRCULATIE VAN TIJDSCHRIFTEN.

In vervolg op de mededeling op blz 263 en blz 264 van de 24e jaargang van Euclides delen we mede, dat het Bestuur van WIMECOS de volgende regelen heeft vastgesteld in verband met de aangekondigde circulatie van tijdschriften.

1. De vereniging Wimecos stelt een circulatie in van tijdschriften op het gebied van de didactiek en de methodiek der wiskunde en op het gebied der algemene en bijzondere didactiek en methodiek, voorzover hiervoor bij de leden voldoende belangstelling zal blijken te bestaan.
2. Het Bestuur van Wimecos wijst één of meer leden aan als Verzorgers der in 1^o bedoelde circulatie.
3. Alleen leden van Wimecos en van Liwenagel komen, na zich als Lezer te hebben opgegeven, voor toezending van de in 1^o bedoelde tijdschriften in aanmerking.
4. Het Bestuur van Wimecos stelt vast, welke tijdschriften in circulatie zullen worden gebracht en maakt de namen van deze tijdschriften bekend. Zij, die Lezer willen worden, kunnen uit deze lijst van tijdschriften één of meer nummers kiezen. Bij toetreding in de loop van het jaar heeft men slechts recht op toezending van die nummers, die na de toetreding in circulatie worden gebracht. Voor deze tijdschriften zal een evenredig deel moeten worden betaald van het leesgeld, dat voor een volle jaargang verschuldigd is.
5. De maximale leestijd bedraagt één week, tenzij door de Verzorger in bijzondere gevallen anders wordt bepaald. De Lezers verplichten zich de tijdschriften die ze ontvangen, uiterlijk 7 dagen na ontvangst, voldoende gefrankeerd aan een volgend adres door te zenden.
In het ongerede geraakte nummers mogen niet worden doorgezonden, maar moeten na ontvangst terstond aan de Verzorger worden geretourneerd.
6. De Verzorger zendt een waarschuwing aan die Lezers, die in hun plichten t.a.v. een ordelijke circulatie zijn te kort geschoten. Het Bestuur van Wimecos kan daarna deze Lezers eventueel van verdere deelname aan de circulatie uitsluiten.
7. Het leesgeld wordt voor elk der tijdschriften afzonderlijk vast-

gesteld. Het bedrag dat een Lezer voor een komend jaar in totaal schuldig zal zijn, wordt hem door de Verzorger mede-deeld en moet bij vooruitbetaling worden voldaan.

De uitgaven van het Wiskundig Genootschap zullen gratis aan de Lezers worden toegezonden.

8. De tijdschriften worden aan het eind van het leesjaar in de bibliotheek der vereniging geplaatst en kunnen tegen vergoeding van kosten daaruit door de Leden van Wimecos en van Liwenagel ter lezing worden verkregen.

Naar aanleiding van deze regelen wordt het volgende meegedeeld.

In de loop van de maand September 1949 wordt begonnen met de circulatie van:

- a) Elemente der Mathematik, Basel; verschijnt om de 2 mnd;
- b) The Mathematical Gazette, London; verschijnt 5 maal per jaar;
- c) The Mathematics Teacher, New York; verschijnt 8 maal per jaar;
- d) Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht, Bonn — Frankfurt; verschijnt om de 2 mnd;
- e) Paedagogische Studiën, Groningen; verschijnt maandelijks;
- f) Mathematisch-Physikalische Semesterberichte, Göttingen; verschijnt op ongeregelde tijden tot ongeveer 350 blz. per jaar.

Zo spoedig mogelijk wordt hieraan nog toegevoegd:

- g) School Science and Mathematics, Menasha.

Het op blz 263 van jrg. 24 vermelde tijdschrift: l'Enseignement Mathématique, Genève blijkt niet meer te verschijnen en is dus van de lijst afgevoerd.

Als verzorgers der circulatie zijn aangewezen:

Dr Joh. H. Wansink en Drs P. Beimers, Breitnerstraat 23, Arnhem. Alle correspondentie inzake de tijdschriften (o.m. de aanmeldingen als Lezers) te richten aan het laatste adres. Het leesgeld bedraagt voor elk der bovengenoemde tijdschriften f 1.50 per jaar.

Voor het jaar 1949 zal in verband met de weinige maanden die nog resten, slechts het halve leesgeld in rekening worden gebracht, hoewel aan de lezers in een versneld tempo toch alle verschenen afleveringen zullen worden toegezonden.

Ook voor het jaar 1949 kan men zich nu nog als Lezer opgeven!

Arnhem, 9 September 1949. P. BEIMERS, Breitnerstraat 23

Joh. H. WANSINK.

PROKLOS' COMMENTAAR OP EUCLIDES I VERTAALD

door

Dr E. J. DIJKSTERHUIS.

De neo-platonische wijsgeer Proklos (410—485), die zeven eeuwen na Plato de Atheense Akademie leidde en daarbij alle andere hoofden die de school intussen bezeten had, zozeer in de schaduw stelde, dat hij den erenaam Diadochos (d.i. de Opvolger) verwerven kon, heeft naast commentaren op werken van zijn groten voorganger en zelfstandige philosophische geschriften een werk over het eerste boek van de *Elementen* van Euclides nagelaten, dat in de geschiedenis der wiskunde een even belangrijke plaats inneemt als zijn andere geschriften het in die der wijsbegeerte doen.

De grote waarde die de historici der wiskunde ten allen tijde aan zijn commentaar op Euclides hebben gewijd, berust voornamelijk op twee gronden: vooreerst vult dit werk, door ons in te lichten over de wijze waarop de Griekse mathematici de meetkunde beoefenden en over het doel dat zij met de samenstelling van element-verzamelingen beoogden, de leemte aan die Euclides zelf door zijn uiterst zakelijken schrijftrant — niets dan definities, postulaten, axiomata en proposities zonder een woord van inleiding, verbinding of toelichting — overlaat; en vervolgens verschaft het in een overzicht van de voorgeschiedenis van de *Elementen*, den befaamden *catalogus geometrarum*, een aantal belangrijke gegevens over de wijze waarop de Helleense wiskunde gegroeid is, die op geen enkele andere wijze bewaard zijn gebleven.

Alles wat Proklos ons op deze twee gebieden leren kan, is reeds lang in de gangbare werken over de geschiedenis der wiskunde overgegaan en daardoor reeds min of meer gemeengoed geworden, ook al beseft men niet altijd, dat wij het behoud ervan aan hem te danken hebben. Zijn commentaar vertoont echter nog een derde aspect, dat in historische belangrijkheid voor de andere twee allerm minst onderdoet, maar dat in onzen tijd zo weinig meer de aandacht blijkt te trekken, dat men het zelfs in werken die zich speciaal met den daarin tot uiting komenden kant van de geschiedenis van het denken bezig houden, in volstrekt stilzwijgen voorbij kan zien gaan.

Proklos blijkt namelijk zijn commentaar niet in de eerste plaats met vakwetenschappelijke of historische, maar voor alles met wijs-

gerige bedoelingen te hebben samengesteld: evenals voor Plato is ook voor hem de wiskunde niet een wetenschap onder vele andere, maar bekleedt zij als enige en onmisbare propaedeuse tot den hoogsten vorm van menselijk kennen, die de filosofie is, een geheel eigen plaats in de intellectuele opvoeding; wat bij Plato echter in verschillende werken en dan nog vaker meer als aanduiding dan als samenhangend betoog te lezen staat, wordt bij hem in de twee prologen, die aan den eigenlijken commentaar voorafgaan, tot een zelfstandig onderdeel van zijn wijsgerig systeem verwerkt en daarna nog telkens bij de bespreking van de grondslagen en proposities van de *Elementen* verder ontwikkeld, toegelicht en gebruikt. Daardoor vindt bij hem, naast de ten ondergang neigende antieke wijsbegeerte in het algemeen, die der wiskunde in het bijzonder een laatste synthese.

Men zal zich wellicht geneigd voelen om met volledige erkenning van het belang dat aan dit derde aspect van Proklos' werk voor wetenschapshistorici verbonden kan zijn, te betwijfelen, of het een voldoende actuele betekenis bezit om in een tijdschrift, dat aan de didactiek der hedendaagse wiskunde gewijd is, ter sprake te worden gebracht: de Griekse wiskunde ligt reeds ver achter ons; wat een neo-platonisch wijsgeer in de vijfde eeuw over het wiskundig denken dacht, schijnt nog verder buiten onzen gezichtskring te vallen.

De waarheid blijkt bij nader toezien een andere te zijn: het is algemeen bekend, dat wat op onze middelbare scholen op het gebied van meetkunde behandeld wordt, met het werk van Euclides in het nauwste verband staat, maar men beseft niet steeds, dat de vragen van wijsgerigen aard die nog in onzen tijd steeds weer moeten rijzen bij ieder die de wiskunde niet geheel machinaal doceert, nog altijd dezelfde zijn als die in de vierde eeuw voor Chr. Plato en in de vijfde na Chr. Proklos verwonderden en tot nadenken aanspoorden. Wat zij op die vragen antwoordden, zal tegenwoordig wel niemand meer volkomen kunnen bevredigen, maar het blijft de moeite waard er kennis van te nemen; want niet alleen is de positie die de wiskunde in het hedendaagse onderwijsstelsel inneemt, in hoge mate het product van een historische ontwikkeling, die in hun theorieën haar oorsprong vindt maar bovendien blijken, bij alle verschil in uitwerking, zekere principiële trekken van hun zienswijze bij menigen modernen wiskundige zo levend te zijn als ooit te voren.

De vragen die Proklos in de twee prologen van zijn commentaar stelt, betreffen in de allereerste plaats de zijnswijze der mathematische entiteiten en de gronden van de kenmerkende eigenschappen

der wiskundige denkwijze. Men zet stippen neer, die punten en trekt strepen, die lijnen moeten voorstellen, maar men is zich daarbij ten volle bewust, dat noch het mathematische punt, noch de mathematische lijn zich in waarneming of voorstelling ooit voor zullen doen; onvermijdelijk rijst daarbij de vraag, wat dan toch wel de aard van het zijn is, dat men met zo volle overtuiging aan meetkundige figuren toekent. Men bewijst aan een ruwe, uit strepen en stippen samengestelde tekening, dat de daardoor voorgestelde meetkundige figuur een zekere eigenschap bezit en men voelt zich daarbij ten volle verzekerd, dat die eigenschap algemeen en exact geldt, terwijl men bovendien de eigenaardige gewaarwording van haar apodicticiteit ondergaat, d.w.z. dat men haar niet kan beschouwen als een resultaat dat ook wel anders had kunnen uitvallen, maar alleen als een waarheid die op een of andere manier onwrikbaar in het wezen der wiskundige dingen verankerd ligt. Men moet al heel ver afgestompt zijn in het vermogen zich te verwonderen — de oorsprong van alle wijsbegeerte! — om het raadsel hoe dit alles mogelijk is, over het hoofd te kunnen zien.

Natuurlijk kan de hedendaagse wiskundige op al deze en dergelijke vragen antwoorden geven, waarover Proklos niet beschikte en die er zich bij uitstek toe lenen, een lastigen vrager uit het veld te slaan. Hij zal bij voorbeeld zeggen, dat punten en lijnen niets anders zijn dan zekere niet rechtstreeks te omschrijven dingen, die impliciet worden gedefinieerd door het stelsel der axiomata, waaraan ze geacht worden te voldoen, en dat de exactheid en apodicticiteit van de stellingen die men er over uitspreekt, het vanzelfsprekende gevolg zijn van het feit, dat men zuiver deductief uit de opgestelde axiomata andere beweringen heeft afgeleid, die geen betrekking hebben op een werkelijkheid buiten ons, maar die slechts aanspraak maken op geldigheid voor die dingen, waarvoor de axiomata gelden; korter gezegd, dat de meetkunde een hypothetisch-deductief systeem vormt. Hij kan ook volhouden, dat hij eigenlijk zekere algebraïsche bewerkingen met getalgrepen en vergelijkingen heeft uitgevoerd en er alleen aardigheid aan had, dat rekenwerk met meetkundige klinkende namen uit te drukken. Maar of hij nu een van deze antwoorden geeft of een ander middel aangrijpt om met zijn intellectuele geweten in het reine te komen, het gevoel, dat hij eigenlijk uitvluchten zoekt om aan een zeer reëel probleem, namelijk dat van het verband tussen zijn denken en zijn aanschouwelijke ervaring, te ontkomen, zal hij niet van zich af kunnen zetten; en wanneer zijn leerlingen niet te onkritisch, te gedwee of te onverschillig waren om te blijven vragen, wat die

punten en strepen nu eigenlijk precies te betekenen hebben en hoe het komt, dat men door zuiver redeneren iets nieuws en absoluut zekers over het onvoorstelbare onbekende, dat zij voorstellen, te weten kan komen, zou hij moeilijke ogenblikken beleven.

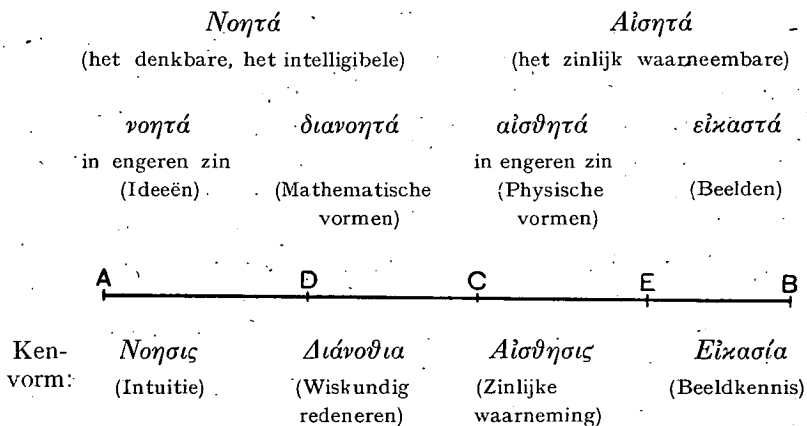
Een echte Platonist, zoals Proklos was, wist in zulke gevallen wel een antwoord te geven: mathematische punten, lijnen en cirkels, zou hij zeggen, bestaan zeer zeker, maar hun zijn is een gans ander dan dat van de fysieke lichamen die wij met onze zintuigen waarnemen. Buiten ruimte en tijd, onttrokken aan ontstaan, veranderen en vergaan, leiden zij een voor ons voorstellingsvermogen ontoegankelijk bestaan, waarvan wij echter door het redenerend verstand kennis kunnen verwerven. Die kennis is van denzelfden aard als het gekende: al het benaderde, toevallige, bijzondere, onnauwkeurige, dat aan ons zintuiglijk kennen eigen is, is er van afgefallen en het verworven inzicht is in kwaliteit even ver verheven boven onze vage en verwarde meningen over het zintuiglijk waarneembare als het rijk der ideale mathematische vormen uit een oogpunt van werkelijkheid staat boven de wereld van de ruwe en onvolkomen afbeeldingen die de niet wijsgerig geschoolde alleen voor werkelijk houdt. Die afbeeldingen, i.c. de stippen en strepen die de wiskundige tekent en waarvoor hij bij oppervlakkige beschouwing ook schijnt te redeneren, zijn daarom echter nog niet waardeloos: in de menselijke ziel sluimert als overblijfsel uit een vroeger, anders geaard bestaan de herinnering aan het rijk van het ideale; de waarneming van de afbeeldingen van de daarin eenmaal aanschouwde vormen werkt als wekker, die het discursieve verstand aanspoort, de reeds aanwezige, maar onbewust geworden wiskundige kennis te actualiseren; wiskunde leren blijkt slechts een zich herinneren te zijn van wat men allang wist.

Het mathematische weten — zo zal de Platonische wiskundige, eenmaal over deze dingen aan het spreken geraakt, voortgaan — moge hoog verheven zijn boven ons fysisch menen, den hoogsten graad van het kennen bereikt het toch niet. Het kan de mathematische entiteiten en de relaties die daartussen bestaan, slechts leren kennen door het moeizame proces van het stap voor stap voortschrijdend redeneren, dat weliswaar instemming afdwingt, maar dat niet het volkomen, eind- en beginpunt der redenering in een oogopslag verbindend inzicht schenkt. Ook moet de mathesis gebruik maken van grondslagen, waarvan zij zelf geen rekenschap kan geven, maar die zij aan een hoger weten moet ontleen. Haar rijk is dan ook nog slechts een voorhof van het hogere rijk van de Geest (*Noûs*), waarin niet langer het discursieve verstand, maar de in-

stantane intuïtie als kenvorm optreedt en dat geheel vrij is van hypothetische elementen.

Het onderscheid tussen het rijk van den Geest en dat der mathesis, dat niet alleen een verschil in kenwaarde, maar ook een in realiteitsgraad is, vindt een analogon in de relatie die in de zinlijke wereld bestaat tussen de dingen die daar werkelijkheid heten en hun schaduwen of spiegelbeelden, die ook weer én minder exact kenbaar én minder werkelijk zijn dan zij. Deze door Plato uitgesproken gedachte opent de mogelijkheid, de verschillende zijnsvormen met hun realiteitsgraden en kenvormen in een overzichtelijk beeld voor ogen te voeren. Zij AB een lijnstuk, dat in C in een zekere verhouding verdeeld is. Verdeel elk der twee verkregen lijnstukken, AC en CB in de punten D en E opnieuw in dezelfde verhouding in dier voege dat

$$AD : DC = CE : EB = AC : CB.$$



De verschillende rijken van het zijn met de bijbehorende kenvormen volgens Proklos, Proloog I (ed. Friedlein 10,21—11,9).

Wanneer nu AD het rijk van den Geest voorstelt, verbeeldt DC dat van de mathematische entiteiten; CE geeft de zinlijk waarneembare wereld weer, EB de schaduwen en spiegelbeelden van de daarin bestaande dingen. Hoe verder een lijnstuk in de figuur aan den rechterkant ligt, des te geringer is de realiteitsgraad die aan het voorgestelde gebied toekomt en de kenwaarde van wat we er van kunnen zeggen. De figuur laat nu echter ook met één oogopslag zien, waarom aan de wiskunde zulk een hoge en geheel eigen betekenis als geestelijk opvoedingsmiddel moet worden gehecht: de overgang van het lijnstuk CE naar het stuk DC beduidt een zich afwenden van het lagere, niet exact kenbare stoffelijke en een

naderen tot den hoogsten intuïtief te doorgronden vorm van zijn, die door het lijnstuk AD wordt voorgesteld.

Er zal wel niemand meer bestaan, die de theorie waarvan wij hier enkele grote lijnen hebben trachten weer te geven, volledig voor zijn rekening zou willen nemen. Zó als ze door Pláto geschetst en door Proklos uiteengezet en met de grondslagen van het neo-Platonisme verbonden wordt, blijft zij té veel in het vage en wanneer men haar tracht te preciseren, stuit men al spoedig op onoverkomelijke moeilijkheden. Maar de greep van het genie is er onmiskenbaar in en al de kritiek waaraan zij reeds in de Oudheid heeft blootgestaan, heeft evenmin tot haar volkomen verwerping kunnen leiden als de door Aristoteles voorgestelde, tot groot succes geroepen, maar ook aan ernstige bezwaren onderhevige z.g. abstractietheorie van het wiskundig zijn haar heeft kunnen verdringen. De grondgedachte, het bestaan van een transcendent intelligibel rijk van mathematische vormen, die in de zinlijk waarneembare wereld onvolkomen zijn afgebeeld en waarvan het discursieve verstand, aangespoord door de zinlijke ervaring, uit eigen kracht kennis kan verwerven, treft een wezenlijken trek van het wiskundig denken en zij heeft dan ook door alle tijden heen bepaalde groepen van productieve mathematici kunnen bekoren. Terwijl velen zich niet hebben uitgelaten over de betekenis die zij aan hun mathematische productie hechtten en anderen met nadruk hun werkzaamheid als een scheppen van nieuwe dingen uit kracht van het denken hebben omschreven, zijn er ook telkens weer geweest — men kan aan Georg Cantor en aan Charles Hermite als illustere voorbeelden denken — die sterk het gevoel hebben gehad, dat zij, wiskundig werkzaam, niets anders deden dan verder doordringen in een onafhankelijk van hun denken bestaande geestelijke wereld, waarin het hun vergund was binnen te treden, maar waaraan zij niets hadden voor te schrijven. Deze overweging alleen rechtvaardigt reeds onze belangstelling in den oorsprong van die denkrichting in de wijsbegeerte der wiskunde, die men als platoniserend realisme of kortweg als platonisme plaagt aan te duiden ¹⁾).

Wie de mededelingen van mathematischen of historischen aard die de werken over geschiedenis der wiskunde aan Proklos plegen te ontlenen, bij de bron wilde controleren of van zijn wijsgerige beschouwingen kennis wilde nemen, zag zich tot dusver aangewezen

¹⁾ Over het voorkomen van platonische opvattingen bij moderne mathematici zie men E. W. Beth, *Wijsbegeerte der wiskunde*. Antwerpen-Nijmegen ²1948. p. 337.

hetzij op een Latijnse vertaling uit de 16e eeuw ¹⁾, hetzij op een Engelse uit de 18e ²⁾, hetzij op een uitgave van den Grieksen tekst, die in 1873 door G. Friedlein bezorgd werd ³⁾, van welke edities practisch alleen de laatste toegankelijk was. Bedenkt men daarbij, dat de lectuur van zijn beschouwingen een grote mate van vertrouwdheid met Grieks wiskundig denken vereist, terwijl het Grieks waarin zij gesteld zijn, niet zo heel gemakkelijk te lezen is, dan is het wel te begrijpen, hoe het komt, dat zijn commentaar noch onder classici, noch onder mathematici de bekendheid geniet, waarop zij om haar belangrijkheid recht heeft ⁴⁾.

Nu heeft zich echter tijdens den tweeden wereldoorlog het merkwaardige feit voorgedaan, dat twee geleerden, die van elkanders plannen geheel onkundig waren en dat tot lang nadien gebleven zijn, gelijktijdig een overzetting van het werk in een moderne taal hebben ondernomen, waardoor nu de gelegenheid tot kennismaking plotseling voor iedereen open is komen te liggen. Dat doet nu echter de vraag rijzen, in hoeverre men, van die gelegenheid gebruik makend, werkelijk met Proklos' eigen denken in aanraking komt. Wij willen in de volgende bladzijden aan deze vraag enkele beschouwingen wijden.

II

Wij spreken eerst over een Franse vertaling van de hand van den Belgischen ingenieur Paul Ver Eecke, die daarmee een reeds lange rij van vertalingen van Griekse wiskundige werken voortzet. De titel luidt:

Proclus de Lycie. Les commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclide, traduits pour la première fois du grec en français avec une introduction et des notes. Collection de Travaux de l'Académie internationale d'Histoire des Sciences. No. 1. — Desclée de Brouwer et Cie. Bruges 1948. XXIV et 372 p.

¹⁾ *Procli in primum Euclidis elementorum librum commentariorum libri IIII a Francisco Barocio, patrito veneto editi.* Patavii 1560. geciteerd bij Steck, p. 7, n. 4.

²⁾ *The philosophical and mathematical commentaries of Proclus on the first book of Euclid's Elements.* London, printed for the author (T. Taylor), 1792, geciteerd bij Steck, p. 7, n. 5.

³⁾ *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum Commentarii.* Ex rec. G. Friedlein. Lipsiae 1873.

⁴⁾ Onder de weinige mathematici die er aandacht aan hebben gewijd, noemen we: O. Becker, *Mathematische Existenz.* Jahrb. f. Phil. und phaenomen. Forschung (Husserls Jahrbuch) 8 (1927), 441—809. A. Speiser, *Die mathematische Denkweise.* Zürich 1932. 65—75.

Dit is een typografisch keurig uitgevoerd (maar dan ook heel duur) werk, dat evenals alle vertalingen van Ver Eecke getuigenis aflegt van een grote vertrouwdheid met de Griekse wiskunde en van een zeer omvangrijke kennis der bibliographie.

Zolang het om het zuiver mathematische deel van den inhoud gaat, zal men het met vrucht kunnen raadplegen. Wij krijgen echter den indruk, dat de vertaler zich slechts zeer weinig heeft geïnteresseerd voor de filosofische beschouwingen die Proklos in de beide prologen en daarna weer bij de afzonderlijke in de *Elementen* ter sprake komende onderwerpen houdt, terwijl bovendien blijkt, dat hij niet opgewassen is geweest tegen de taalkundige moeilijkheden die bij de vertaling van deze gedeelten van het werk (voor Proklos de hoofdzaak en in ieder geval in omvang de rest verre te boven gaand) te overwinnen waren, moeilijkheden die inderdaad ook wel veel groter zijn dan bij de overzetting van een strict mathematischen tekst plegen op te treden. Men stuit namelijk telkens weer op ernstige, hier en daar zelfs volkomen onbegrijpelijke vertaalfouten, die den vertaler zelf zeker zouden zijn opgevallen, indien hij zich met de liefde en de aandacht, die het iemand eerst mogelijk maken, de gedachten van een vreemden auteur in de eigen taal over te brengen, in Proklos' denken verdiept had. Het betreurenswaardige gevolg is, dat het betoog van tijd tot tijd geheel onbegrijpelijk wordt, zodat raadpleging van den Grieksen tekst onmisbaar blijkt. Men zal dan ook de vertaling van Ver Eecke nooit in de plaats van het origineel in bewijsplaatsen kunnen citeren.

Dit tijdschrift is niet de plaats om het bovenstaande oordeel, dat eerst na een zorgvuldige vergelijking van vertaling en oorspronkelijken tekst tot stand is gekomen, door voorbeelden te rechtvaardigen. De belangstellende lezer moge hiervoor een artikel van de hand van schrijver dezes raadplegen, dat onder den titel *Deux traductions de Proclus*, vermoedelijk in Juli 1950, in de *Archives internationales d'Histoire des Sciences* zal verschijnen en waarin vijftientwintig passages worden besproken, die door Ver Eecke onjuist zijn weergegeven.

III

De tweede vertaling, in het Duits, is van de hand van den in 1943 overleden Duitsen Benedictijn en schoolleider P. Leander Schönberger. Haar uitgave is in 1945 bezorgd door den wiskundige Max Steck onder den volgende titel:

Proklus Diadochus. 410—485. Kommentar zum ersten Buch von Euklids „Elementen“. Aus dem Griechischen ins Deutsche

übertragen und mit textkritischen Anmerkungen versehen von P. Leander Schönberger †, O.S.B. Eingeleitet, mit Kommentaren und bibliographischen Nachweisen versehen und in der Gesamtedition besorgt van Max Steck. Herausgegeben im Namen der Kaiserlich Leopoldinisch-Carolinischen Deutschen Akademie der Naturforscher von Emil Abderhalden, Präsidenten der Deutschen Akademie der Naturforscher. — Halle (Saale) 1945. XXIV u. 589 S.

De gehele opzet van deze editie wijst er op, dat er meer mee wordt beoogd dan enkel den tekst van Proklos in een moderne vertaling ter beschikking van den lezer te stellen. Tussen het aandeel van den vertaler en dat van den uitgever moet echter zorgvuldig onderscheiden worden en we bespreken ze dan ook afzonderlijk.

Men behoeft slechts enkele bladzijden van de vertaling van Schönberger te hebben bestudeerd om de overtuiging te verkrijgen, dat hier iemand aan het woord is, die niet alleen het Grieks volkomen beheerst, maar die bovendien in staat blijkt om op grond van een aandachtig zich verdiepen in den geest van het origineel de gedachten van Proklos in het Duits zo volledig weer te geven, dat men — hoogste lof! — vergeet, met een vertaling te maken te hebben. Alle gezonde vertaalbeginselen: „zo getrouw als mogelijk, zo vrij als nodig is”; „vertaal zo, dat een commentaar zoveel mogelijk overbodig wordt”, vinden hier een uitmuntende toepassing.

Er is slechts één overweging die de bewondering, waarmee men dit werk moet beschouwen, tempert: er zijn hier en daar passages aan te wijzen, waarin de vertaler onvoldoende op de hoogte blijkt met bepaalde specifiek-mathematische gedachtengangen of termen en waarin hij er daardoor niet in slaagt, het origineel juist weer te geven. De belangstellende lezer zal in het boven geciteerde artikel van de *Archives* deze bewering door tien voorbeelden gestaafd kunnen vinden.

IV

De vertaling van Schönberger wordt voorafgegaan door een *Vorwort*, een *Allgemeine Einführung* en een *Einleitung* en gevolgd door *Anmerkungen des Herausgebers*, *Bibliographie* (ondverdeeld in vijf hoofdstukken), een aantal *Register* und *Verzeichnisse* en een aantal *Zeittafeln*, alles van de hand van M. Steck. Deze blijkt bij de samenstelling van al dit voor- en bijwerk (dat met een gezamenlijken omvang van 270 bladzijden de vertaling zelf, die er 315 telt, bijna opzij streeft en in ieder geval een getuigenis van grote vlijt

en verzamelijver aflegt) een dubbele bedoeling te hebben gehad: hij voelde zich tot zijn zeer omvangrijken arbeid niet alleen gedreven door den wens, den commentaar van Proklos voor den hedendaagsen lezer zo goed mogelijk toegankelijk te maken, maar ook (als wij ons niet vergissen zelfs in de eerste plaats), door zijn overtuiging, dat de wijsgerige richting die de commentaar vertegenwoordigt, voor onzen tijd een actuele betekenis heeft, die te weinig beseft wordt. Hij beschouwt Proklos niet als een geïsoleerd historisch verschijnsel, dat men bestuderen kan zonder zich daarvoor in zijn eigen denken beïnvloed te voelen, maar als een denker, waarnaar onze tijd goed zou doen te luisteren en die in dat geval een positieve bijdrage zou kunnen leveren voor de geestelijke herorientering waaraan een zo sterke behoefte bestaat. Het is bepaald merkwaardig te lezen, hoeveel er ten goede zou veranderen, als wij allen oprechte Procleianen werden. In het bijzonder neemt Steck Proklos tot bondgenoot in een kruistocht, dien hij tegen machtige hedendaagse geestesstromingen, met name het formalisme in het wiskundig grondslagenonderzoek en het positivisme en nominalisme in de algemene wijsgerige cultuur, wil gaan voeren.

Deze emotionele instelling ten aanzien van den inhoud van het uitgegeven werk verklaart tot op zekere hoogte (zonder haar echter te verontschuldigen) een uiterlijke eigenaardigheid van de editie, t.w. de veel grotere aandacht die voor de persoon van den uitgever wordt opgeeeist dan voor die van den vertaler. Op het omslag komt alleen de naam Steck voor; op het titelblad wordt Schönberger wel vermeld, maar hij kan het toch niet tot even vette letters brengen als Steck zelf; en wanneer deze over hem samen spreekt, zegt hij: Herausgeber und Übersetzer . . .

Steck zou, menen wij, goed hebben gedaan te overwegen, dat de visie, die hij zelf op de ontwikkeling van het denken heeft, evenzeer een persoonlijke, voor bestrijding zeer vatbare uiting is als zijn heftige polemiek tegen overheersende stromingen in de hedendaagse wijsbegeerte der wiskunde en algemene geestescultuur, maar dat de vertaling die hij bekend maakt (voor dit initiatief zal men hem steeds erkentelijk moeten blijven) een onaantastbare waarde bezit, die geheel onafhankelijk is van de betekenis der omlijsting waarin ze verschijnt en die ook erkend zal moeten worden door lezers, die de beschouwingen van de Inleiding volstrekt verwerpen.

V

Wij doen dat niet. De commentaar van Proklos is zonder enigen twijfel een van de belangrijkste mathematische werken van de

Oudheid; door Plato's denkbeelden over de wijsbegeerte der wiskunde samen te vatten en uit te werken, legt zij den grondslag voor een beschouwingwijze van het wiskundig denken die men evengoed zal moeten kennen als de zoveel meer gangbare Aristotelische, om de historische ontwikkeling goed te kunnen begrijpen. Verder verdient de door den schrijver in het licht gestelde samenhang tussen het denken van Proklos en dat van Cusanus evenzeer belangstelling als de invloed die de neo-platonische denkbeelden op Kepler hebben uitgeoefend.

Dit neemt niet weg, dat wij tegen Steck's werk grote bezwaren hebben. Vooreerst dit, dat het pleidooi dat hij voor het Platonisme voert, niet verder gaat dan het aanheffen van leuzen. Hij verwacht van deze denkrichting wel een wonderbaarlijk sterken invloed ten goede op het hedendaagse denken, maar hij blijft in gebreke, om zelfs maar voor een detailpunt bij wijze van voorbeeld uit te werken, hoe hij zich die bijdrage voorstelt en welke gevolgen hij er precies van hoopt. En hij onderschat, naar het ons voorkomt, den denk arbeid die tot dusver in het wiskundig grondslagenonderzoek verricht is en waarop men alleen kan reageren met studies die op de in deze richting van onderzoek bereikte hoogte blijken te staan, maar niet met exclamaties, dat het voortaan heel anders zal moeten.

Vervolgens valt het, bij volledige erkenning van de juistheid van de ontwikkelde beschouwingen over de grote ontwikkelingslijn, die van Proklos naar Cusanus en verder naar Kepler loopt (Copernicus, die vóór alles astronoom was, wordt er maar wat geforceerd bijgehaald en in hoeverre men zeggen kan, dat die lijn bij Gauss (soms ook Riemann) eindigt, is ons niet duidelijk geworden) moeilijk den schrijver vrij te pleiten van een grote eenzijdigheid van visie op de ontwikkeling van het Europese denken. De Zeittafel IV, waarin alle aandacht wordt geconcentreerd op de z.g. deutsche Geisteslinie, terwijl figuren als Galilei, Descartes, Pascal en Newton in een als „westliche” betitelde zijlijn zijn ondergebracht, spreekt in dit opzicht een taal, die aan duidelijkheid niets te wensen overlaat.

Ook door de aantekeningen die hij aan den commentaar van Proklos toevoegt, heeft de schrijver ons niet van het bestaansrecht van zijn werk kunnen overtuigen. Het gebeurt herhaaldelijk, dat men er slechts datgene in vindt wat iedereen eigenlijk wel weet, althans gemakkelijk zelf vinden kan, maar dat men wat de essentiële moeilijkheden betreft die het betoog van Proklos in zo groten getale bevat, zo wijs wordt gelaten als voorheen. De wiskundige tekortkomingen van de vertaling worden bovendien ongecorrigeerd ge-

laten. De schrijver blijkt niet voldoende op de hoogte te zijn van de zeer omvangrijke literatuur over de Griekse wiskunde om een werk als dit te mogen ondernemen.

En ten slotte wordt men doorlopend onaangenaam getroffen door een onmiskenbare neiging tot Duits imperialisme op geestelijk gebied. Wanneer men beschouwingen leest over den „deutschen Humanismus des 20. Jahrhunderts zu dem Europa sich langsam zu bekennen anschickt" (p. 126), over de cultuur van het Avondland, „deren neuen Aufgang wir Deutschen durch das gegenwärtige Ringen erstreben und einleiten wollen" (p. 127), over de noodzaak, „eine Neuordnung auch im Geistigen vorzunehmen, wenn das gegenwärtige Ringen überhaupt einen Sinn haben soll" (p. 126) en nog tal van soortgelijke uitlatingen meer, kan men niet nalaten te bedenken, dat dergelijke Deutschland, Deutschland über alles-klanken niet het meest gewenste praeludium vormen voor het weder aanknopen van intellectuele relaties, dat van Duitsen kant begeerd wordt, maar waartegen in het Westen nog zóvele bezwaren bestaan.

FUNCTIES EN GRAFIEKEN

door

Dr J. KOKSMA.

Het leerplan van de H.B.S. vermeldt voor de tweede klas: „coördinaten; functies, grafische voorstellingen; de lineaire functie $y = ax + b$.” Het door deze onderwerpen ingeleide leerstofcomplex der algebra wordt semi-officiëel, bijvoorbeeld in de koppen van paragrafen en hoofdstukken, ofwel in de titel van een leerboekje of artikel aangeduid in de samenvatting, die ook dit artikel tot naam moet strekken. In de wandeling tenslotte laat men het eerste woord er meestal af en spreekt men kortweg van „grafieken”.

De wiskundig geschoolde belangstellende, die, niet met de practijk bekend, zich met dit leerplan op de hoogte zou willen stellen, zou (hoop ik) bij de genoemde passage goedkeurend knikken. Hij zou het program even neerleggen en zich overgeven aan overdenking van het begrip der functie. Hij zou bepeinen, hoe dit begrip der wereld aanschijn heeft veranderd; hoe van hier de uitgangen zijn der wetenschappen, steeds nog bezig dat aanschijn intensiever te veranderen; hoe veel aan inzicht in dat alles hij moet missen, die van dit begrip verstoken blijft. Inkerend tot zich zelve zou hij voelen, hoe in hem de functie werd tot vlees en bloed, hoe op een wijze, mysterieus en onnaspeurlijk, ze is vervlochten in zijn wezen en mede voedt, wat hij zijn wijsheid weet, moog' ook een ander het zijn eigenwijsheid noemen. En, wederkerend tot dat kleine wereldje der school waar deze stoute vlucht begon, zou hij bedenken, hoe dit begrip de leerstof moest doordringen en tot nieuw leven wekken.

Aan de tweede-klassertjes zou hij wel even denken, maar zich over hen niet erg bezorgd maken; hij zou ze weten in liefdevolle handen. De vierdeling in het leerplandeel zou hem niet als zodanig opvallen, het zou hem één complex aanduiden met zijn begrenzing. Aan de verschuiving in de niet-officiële betitelingen zou hij geen speciale betekenis hechten, hoogstens zou ze hem aanleiding zijn tot taalphilosophische beschouwingen, zo hij daarvan een minnaar ware.

Wanneer nu eens deze belangstellende de practijk intrad, en daarin werkzaam werd, wat zou hij vinden? Hij zou vermoedelijk . . .

Tja, hier moet ik kiezen, het woord „vermoedelijk” schijnt me

twee betekenissen te hebben in zo'n verband. Is het wetenschappelijk gebruikt, dan wordt het gevolgd door datgene, dat het meest gebeurt, dat dus het statistisch meest waarschijnlijk is. In deze zin denk ik, dat hij vermoedelijk zich aan zou sluiten bij de gebruikelijke behandeling. Hij zou zich wijden aan zijn taak en daarin wel slagen ook. Of hem dat moeite kosten zou, durf ik niet zeggen, wel zou ik, zonder ook maar een ogenblik aan zijn oprechtheid te twijfelen, niet allemaal geloven, wat hij zelf daarvan zeide, althans niet, zolang de victorie, die thans in Utrecht begonnen is, niet over de hele linie zou zijn behaald.

Tot hoge vlucht zouden zijn gedachten niet veel gelegenheid meer hebben, ook zouden ze daartoe steeds minder neigen, wijl in beslag genomen door het detail van alledag. Maar dat zou ook gevolgd zijn op het woord „vermoedelijk” in zijn tweede betekenis, die ik de gebruikelijke zou willen noemen. De auteur gebruikt het dan, wanneer hij zijn denkbeeldig personage wil laten doen, wat hij zelf deed of gedaan zou hebben.

In dat geval zou mijn phantoom, vermoedelijk dan, na geestdriftig aan de slag te zijn gegaan, zich spoedig met pijnlijke verbazing afvragen, waarom het succes uitbleef. Vanwaar die onmacht bij 't publiek, 't erbarmelijk geblunder in de terminologie, dat blijkbaar ontoegankelijk zijn voor het begrip der functie? Bezinning zou hem spoedig leren, dat 't aan 't publiek niet lag, hij zelf was schuld. Wat hij het gaf, het was de functie niet, 't was een hybrisch monstrem; het was een onverteerbaar mengsel van de idee der functie met die der vergelijking. Het was bedorven analytische meetkunde en hiervan zou hij spoedig in de gemelde naamsverschuiving zo dan niet een symptoom, dan toch 't symbool gaan zien. 't Zou blijken, dat met geringe middelen hieruit een weg te vinden was en daarbij zou 't voorlopig blijven. Wel zou hij gretig elk nieuw leerboek naslaan om te zien, of dan niet iemand brak met het verderfelijke systeem. Steeds meer zou klemmen de consciëntievraag: „Moet ik dan zelf . . . ?” Tot als een lichtstraal de gedachte kwam: „„Euclides” is een Tijdschrift voor de Didactiek, ik heb 't er buitenop zien staan!” En dan zou hij zich zetten tot datgene, wat ik nu bezig ben te doen.

Mijn waardering voor het functiebegrip op de H.B.S. loopt parallel aan die van mijn gefingeerde collega, alleen zou ik er voor me zelf zo dik niet over doen. Ik juich het toe, dat de functie vroegtijdig wordt geïntroduceerd om geleidelijk een meer centrale plaats in te nemen, maar ik stel hier, dat een vlot opnemen van dit begrip

ernstig wordt in de weg gestaan door de gebruikelijke introductie, als ik die getekend mag achten in die punten, waarin vijf prominente leerboeken der algebra overeenstemmen. Zoals gezegd ligt mijn bezwaar in de verregaande vermenging, zowel in de theorie als in de vraagstukken, van (laat ons het noemen) functieleer en analytische meetkunde. Terwille van een zich door de leerling spoedig en grondig eigen maken van het functiebegrip behoorden deze beide naar mijn inzicht ten strengste te worden gescheiden.

2 Laat ons beginnen met de functieleer nader te bekijken. Hoe zullen we onze leerlingen met het päs ingevoerde begrip vertrouwd maken? Het is volslagen nieuw, het nieuwe er in wordt gekenmerkt door de begrippen „veranderlijk” en „afhankelijk”. Wie weet, welke moeilijkheden deze begrippen aanvankelijk baren, kan volkomen een inleiding over barometerstanden, vetgehalten en verbruik van bieren billijken, zoals twee der genoemde boeken geven. Het kan er ook wel zonder, de andere drie slaan dat over en volstaan met wiskundige voorbeelden, vermoedelijk uit de eveneens te billijken zucht de wiskunde „rein” te houden. Maar bij een definitie, toegelicht door voorbeelden, mag de didactiek niet blijven staan, het nieuwe begrip moet geoefend worden. Natuurlijk liggen dan opgaven voor de hand die vragen naar wat men het „verloop” van een gegeven functie pleegt te noemen: welke waarde ze heeft voor zekere x ; voor welke x ze een bepaalde waarde aanneemt; heeft ze uiterste waarden, hoe groot zijn die en van welke aard, waar worden ze aangenomen? Omgekeerd kan een onbekende functie uit soortgelijke gegevens worden opgespoord, en verder komen er vragen over toe- en afnemen of positieve en negatieve toestand.

Nu is het te verstaan, dat men ter illustratie al spoedig naar de grafiek grijpt. Voorzichtigheid is echter geboden, de grafiek mag de aandacht niet van de functie afleiden, en waar het gesignaleerde euvel stellig is ontstaan doordat gepast gebruik ontaardde in een orgie, heeft het zin te vragen, in hoeverre het er zonder kan, en dat kan voor het grootste deel. Wat de simpeler vragen betreft, spreekt dat van zelf, voor de moeilijker quaesties kan ik me beroepen op gedeelten der genoemde werken. Allereerst behandelen ze alle de lineaire ongelijkheden en sommige zelfs de quadratische, zonder van grafieken gebruik te maken. En wat een onderwerp als de extrema der quadratische functie betreft (het leerplan noemt daar geen grafieken meer), het spreekt vanzelf, dat men ter verduidelijking iets aan de parabool kan hebben, als de leerling in staat is, die als grafiek te „lezen”, maar dat hij op die hoogte ook in staat

moet zijn de algebraïsche behandeling daarzonder te begrijpen. In twee der genoemde leerboeken wordt die algebraïsche behandeling gegeven en het resultaat in tal van (behoorlijk taaie) vraagstukken geoefend, voordat de parabool aan de orde wordt gesteld!

Ik meen daaruit te mogen opmaken, dat ook naar het besef van de auteurs de parabool *om wille van zichzelf* behandeld wordt, maar bij het onderzoek van de quadratische functie een grotendeels ontbeerbaar hulpmiddel is. Niet zonder betekenis is in dit verband, dat in de meeste herhalingsvraagstukken op dit terrein in het geheel niet verwacht wordt dat de leerling de bijbehorende parabolen tekent; het hulpmiddel grafiek heeft dan zijn rol grotendeels uitgespeeld, het heeft voornamelijk gediend bij het vertrouwd maken met het begrip functie.

En hiermee zijn we aan een belangrijk punt, want „hulpmiddelen ter verduidelijking” zijn soms gevaarlijk, het komt niet zo zelden voor, dat de leerling meer moeite heeft de verduidelijking te begrijpen dan datgene wat verduidelijkt moest worden. Tot dit soort gevaarlijke hulpmiddelen reken ik de grafiek, wanneer ze niet op het allersimpelst en doorzichtigst wordt geïntroduceerd en zeker, wanneer ze meteen ook *om zich zelf* wordt bestudeerd.

De simpelste wijze is echter deze. Men beeldt de x af op een horizontale getallenas en denkt in elk punt een loodlijnstuk opgericht, dat de functiewaarde aangeeft. Begin met een positieve functiewaarde; kleinere waarde, korter stukje; functiewaarde nul, loodlijnstukje nul; functie negatief, nóg meer zakken, loodlijnstukje naar beneden! De eindpunten vormen de grafiek. Laat nu x maar lopen van klein naar groot en men ziet de functie stijgen, dalen, maximaal of negatief worden. Dat is alles. Een y -as is niet nodig, zelfs hinderlijk, ze snijdt de grafiek nodeloos in tweeën, leidt af, geeft (misschien minder bewuste) preoccupatie met $x = 0$. Coördinaten zijn geheel uit de boze: even sterk als op de essentiële x -as betrekken ze de figuur op de geheel overbodige y -as en verzwakken daardoor het functie-illustreerend element. In dit verband wijs ik er op, dat het eveneens overbodig is de functie y te noemen, het is zelfs schadelijk. Misschien zal men hier aan spijkers op laag water denken, ik heb echter mijn goede reden. Toen ik deze stof voor het eerst behandelde, was dat voor een klas, die zoveel begaafde en daarenboven hoogbegaafde leerlingen telde, dat ze nog steeds na jaren, op mijn school (met twintig klassen) nu en dan als unicum ter sprake komt. Het toen gebruikte (slechte) boekje (dat alleen de „grafieken” behandelde) had toevallig functies nooit anders gepresenteerd dan met „ $y =$ ” er voor. Toen echter tussen de vraag-

stukken plompverloren een vraag gesteld werd over de „quadratische vorm $ax^2 + bx + c$ ”, bleek men die niet te hebben kunnen beantwoorden. De behandeling heeft mij een les gekost, maar in die les kwam uit, dat van de functievoorstelling mijner leerlingen niets deugde, werd daarvan de oorzaak onderkend en werd ze rechtgezet. Het komt zelden voor, dat men zo ondubbelzinnig met de resultaten van een methode wordt geconfronteerd en mijns inziens is er allé aanleiding tot de raad, zich eens te bezinnen op de vraag in hoeverre later blijkend on- of wanbegrip omtrent functies terug te brengen is tot dergelijke kleinigheden of de nog te bespreken erger dingen.

Want laat ons maar eens nagaan hoe het nu staat met de uitvoering van het zo even globaal ontwikkelde program. Al dadelijk wordt het voortbouwen op het met zoveel omhaal pas geïntroduceerde begrip onderbroken! Gaan we de vraagstukken over lengten van lijnstukken e tutti quanti nu maar stilzwijgend voorbij, dan ziet men dat ten aanzien van de lineaire „functie” wel opgaven worden gesteld, maar géén functie vragen. Vraagt men zich af, hoe die er uit zouden moeten zien, dan blijkt het, dat ze onmiddellijk tot zo eenvoudige lineaire vergelijkingen en ongelijkheden leiden, dat de grafiek er niet bij te pas komt, laat staan het feit, dat die een rechte lijn is. Inderdaad worden deze onderwerpen immers door de genoemde boeken ook vóór de grafieken afgehandeld, dus ook niet van functiestandpunt bekeken. Wat men wel aantreft, zijn vragen over snijden en evenwijdigheid en dergelijke, die *geen* functie vragen zijn, al is formeel het tegenovergestelde vol te houden, immers een eigenschap van de grafiek is een eigenschap van de functie! Waar deze vragen in functieform gegoten zouden kunnen worden, gebeurt het niet. De vraag: voor welke x hebben twee gegeven functies dezelfde waarde? komt men sporadisch tegen. De functiebetekenis van de richtingscoëfficiënt: het aangeven van de mate, waarin de functie toeneemt bij toenemende x , vind ik nergens in het licht gesteld. Waar wordt de symmetrieëigenschap van de parabool, hoewel uit de functie bewezen, uitdrukkelijk als eigenschap van de functie in functietaal overgezet? Niet dat ik al deze dingen zou willen propageren, het gaat er maar om aan te tonen, dat hier slechts in schijn de functieleer wordt onderwezen, wat werkelijk bedreven wordt heet analytische meetkunde.

De analytische meetkunde is inderdaad *meetkunde*, ze onderzoekt figuren, dat onderzoek is *doel*. Gaat het om niet-algebraïsch gede-

Fundamenteel is in de analytische meetkunde het begrip coördinaat, waarvoor kenmerkend is de gelijkwaardigheid van abscis en ordinaat. De kromme komt te voorschijn als meetkundige plaats, is ze er eenmaal, dan zijn alle punten er tegelijk en is de suggestie weg van veranderlijkheid, van het opvolgende, van het doorlopen worden, de enige didactische rechtvaardiging van de grafiek. Er is dan ook alle aanleiding de naam „kromme” uitdrukkelijk in te voeren en de „grafiek” bij de functie te laten, waar ze thuis hoort. En waarom niet? 't woord wordt nu wel clandestien gebruikt. Omdat het een beetje gek is als de enige kromme, die in dit stadium nader onderzocht wordt een rechte blijkt? Een beetje hilariteit kan dan juist welkom zijn, het wekt de ontvankelijkheid voor de herinnering, dat een wiskundig begrip precies betekent, wat in zijn definitie staat uitgedrukt.

Het is geen geringe opgave langs deze weg de functionele aanvaardbaar te ontwikkelen. De begrippen functie en vergelijking, kromme en grafiek scherp uiteen te houden, te onderscheiden, wanneer de figuur om zich zelf wordt onderzocht en wanneer ze enkel dienen moet om het verloop der functie te illustreren, het is gladweg onmogelijk. Het gebeurt dan ook niet, al wordt ook de functie steeds vooropgezet, ongemerkt wordt telkens de draai naar de vergelijking genomen. En ik heb sterk de indruk dat mijn auteurs er ook wel eens mee zitten. In elk geval is het leerzaam en niet gans onvermakelijk te aanschouwen in welke bochten ze zich soms moeten wringen om de zaak althans formeel in orde te krijgen. Ik wil wel eens een enkel bloempje plukken.

Leerboek nummer één opent de beschouwingen met enkele voor-

Widener
d
Beth.

1952.56.

beelden van het barometertype en komt dan via een meetkundig voorbeeld tot de gebruikelijke opsomming van soorten functies. Daar is het vooreerst halt, de coördinaten worden ingevoerd (dat is „daarvoor nodig”, wordt gezegd) en in tal van vraagstukken geoefend. Dan wordt de draad weer opgenomen bij de lineaire functie. Stelling 1: De grafiek van een lineaire functie is een rechte. Stelling 2: „Elke rechte is de grafische voorstelling van een lineaire functie.

Geg.: P is een punt van de rechte AB.

Gest.: *Er bestaat een lineaire betrekking tussen de coördinaten van P.*”

Cursivering van mij. Het woord functie wordt in het gehele bewijs niet weer genoemd, wel wordt uiteraard via de afgeleide betrekking y in x uitgedrukt. Het bewijs sluit met een vetgedrukte definitie van het begrip „vergelijking van een rechte (kromme)”. Daar in de onmiddellijk volgende toepassingsvoorbeelden weer uitsluitend van „functie” gesproken wordt, wordt blijkbaar aan de lezer overgelaten het onderscheid tussen functie en vergelijking uit te knoben. Misschien wordt dat ook niet gewenst, het tweede voorbeeld luidt: „Gegeven twee punten P(3, 17) en Q (15, — 19) van de grafische voorstelling van een lineaire functie; gevraagd de functie”; voorwaar een fraaie functie-vraag. Na een beschouwing over de betekenis der coëfficiënten p en q voor de grafiek van $y = px + q$ wordt terloops opgemerkt, dat men „dikwijls de betrekking tussen x en y herleidt tot de vorm $ax + by + c = 0$ ”. Er wordt nu verder gesproken van „de grafische voorstelling van $ax + by + c = 0$ ” en daarmee is dan de hutspot gaar en kan ze worden opgediend.

Is bij nummer één het onderscheid tussen functie en vergelijking dus geheel verdoezeld, de auteurs van nummer twee brengen een duidelijke scheiding aan, echter op een wijze, die ik als precies averechts moet kwalificeren. Er worden namelijk aparte paragrafen gewijd aan de grafische voorstelling van een eerste-graads functie en aan „de grafische voorstelling van een eerste-graads vergelijking”, daarbij wordt de laatste tot de eerste herleid. Het spreekt van zelf dat de volgorde andersom moet zijn en dat alleen kunstmatig deze opzet kan worden uitgevoerd. Dat blijkt dan ook duidelijk. Het begrip functie wordt geïntroduceerd met het voorbeeld $y = 3x + 1$, de begrippen argument en functiewaarde worden vastgesteld en dan volgt op *de negende regel* vetgedrukt en wel de mededeling (horribele dictu): „verder zeggen we, dat b.v. $x = 1$, $y = 4$ aan de functie voldoet”. Er zou alle aanleiding zijn de leerlingen te laten aantekenen, dat men het „we” in de aangehaalde zin geacht wil hebben op de schrijvers te slaan en geen citering te dulden anders

62. 58.

p. 62.

63.

Vredenduin
+
v. Haselen

39
41

36

dan in de vorm: „verder zeggen ze.” Ondertussen is hier het prille functiebegrip wel ongeveer meteen weer vermoord. De grafische voorstelling van de *functie* wordt nu gedefiniëerd als de meetkundige plaats van de punten „waarvan de coördinaten aan de functie voldoen”, het bewijs van de volgende stelling over de rechte is uiteraard geheel meetkundig, evenals de meeste vraagstukken die daarna worden opgegeven. De volgende paragraaf definiëert analoog de „grafische voorstelling van een vergelijking” als de meetkundige plaats der punten, „waarvan de coördinaten aan de vergelijking voldoen”. Met het bewijs voor de stelling over de lineaire vergelijking is men nu gauw klaar: de grafiek van de vergelijking $3x + y = 5$ is natuurlijk identiek met die van de functie $y = -3x + 5$ en daarmee is de stelling tot de vorige teruggebracht.

Het zal overbodig zijn de boven gegeven qualificatie van deze opbouw door nadere analyse toe te lichten, men zou zelfs verder kunnen gaan en vinden, dat het begrip functie hier geheel overbodig is ingevoerd, in het geheel niet tot zijn recht komt en zelfs vertroebelend werkt.

Waarom Op nummer drie is eigenlijk niets aan te merken, *zo lang men de gebruikelijke behandeling onontkomelijk acht*. Daarom moet ik wel even citeren, het gaat me niet om critiek op leerboeken, maar juist om de bezwaren tegen de behandeling.

De coördinaten worden afgehandeld voordat over functies gesproken wordt. Dan wordt het functiebegrip ingevoerd en de grafiek gedefiniëerd als de meetkundige plaats der punten, waarvan de coördinaten via de functie „bij elkaar behoren”. Nadat de stellingen omtrent de rechte lijn behandeld zijn, wordt de overgang tot de vergelijking aldus gemaakt:

„Men zegt, de functie $y = mx + n$ heeft tot grafische voorstelling een rechte lijn; we gaan uit van de functie en vinden daarbij de grafiek. Gaat men uit van een rechte lijn en bepaalt men daarbij de functie $y = mx + n$, dan noemt men $y = mx + n$ of $mx - y + n = 0$ ook wel *de vergelijking van die rechte*. De rechte lijnen evenwijdig aan de y-as zijn geen grafieken van lineaire functies $y = f(x)$, maar hebben wel een vergelijking, n.l. $x = c$.” Men ziet, het bezwaar van een enigszins clandestiene overgang op de vergelijking blijft bestaan, te meer daar de aangehaalde zinnen verstopt zitten in een fijn-gedrukte opmerking. Overigens is dit wel zowat het beste wat langs deze weg te bereiken valt, ook in de volgende vraagstukken wordt consequent aan de onderscheiding vastgehouden: waar het woord functie staat, wordt ook een functievraag gesteld, in alle andere wordt van vergelijking gesproken.

In nummer vier is de ontwikkeling vrijwel net zo, functie en vergelijking worden iets minder uitdrukkelijk onderscheiden, ze gaan wat te gemakkelijk in elkaar over.

Met genoeg heb ik tenslotte geconstateerd, dat de auteurs van het laatste werk blijkbaar de geopperde bezwaren delen, door vasthouden aan de traditionele opzet hebben ze ze natuurlijk niet kunnen ontgaan, maar uit alles blijkt dat er naar gestreefd is de nadelen zo klein mogelijk te houden. 't Begint met een tweetal voorbeelden van het thermometertype, de ordinaten worden opgericht in de punten van de x -as en bij elk voorbeeld wordt een aantal vragen opgegeven, die beogen de grafiek te leren lezen. Jammer genoeg begint dan de paragraaf over de functie der algebra met een struikeling: „Laat gegeven zijn de *vergelijking* $y = 2x^3 - 17x^2 + 40x - 25$.” Dat had natuurlijk niet gemoeten (ik cursiveerde). Het vervolg is ook niet zo best: „We denken ons x veranderlijk, d.w.z. we stellen ons voor, dat x achtereenvolgens verschillende waarden aanneemt. Bij elke waarde van x kunnen we een zodanige waarde van y vinden, dat het eerste lid van de vergelijking bij invulling van deze waarden van x en y gelijk is aan het tweede lid.” De laatste zin is bij alle juistheid gewrongen onzin, het lijkt er op dat de zondaar op het smalle pad zich wat onwennig voelt en heimwee krijgt naar de brede weg: onmiskenbaar draaien we hier op de vergelijking toe. Even is er nog uitstel van executie, de grafiek wordt ingevoerd, zonder dat het woord „coördinaat” valt. Wel is er een y -as, maar de ordinaat wordt in het punt der x -as opgezet en vanaf de y -as afgepast. Weer komen er over deze paragraaf nuttige lees oefeningen. Maar dan is het ook uit: het coördinatenstelsel wordt officieel ingehuldigd en de plechtigheid wordt besloten met het vet laten drukken der definitie: „onder de grafiek van de functie $y = \dots$ (zie boven) ten opzichte van een gegeven coördinatenstelsel (ja, ja, we zijn exact!) verstaat men de meetkundige plaats van de punten, waarvan de coördinaten voldoen aan de vergelijking $y = \dots$ ” Men ziet, ook hier neemt de andere hand terug, wat de ene gaf: de vergelijking is bereikt. Maar het onderscheid is gemaakt en wordt ook volgehouden. En verderop, bij de algemene lineaire vergelijking, blijkt dat de auteurs zich bewust zijn van wat ze doen. Een vergelijking is geen functie en functies staan op het program: de enige uitweg is de impliciete functie, expliciet gedefiniëerd. Het is consequent, waarvoor respect. Maar impliciete functies, vrijwel aan het begin der functieleer...? Het zal duidelijk zijn, dat de vergelijking had moeten worden losgelaten, en daarmee is dit hele dilemma in zijn kern gegrepen.

Spelings
v. Tol.

51

Het heeft me in de loop der jaren vaak bevreemd, dat ons onderwijs op dit punt zo in het slop kon raken. Nu ik me er intensief mee bezig gehouden heb, is het raadsel mij nog groter. Vast staat wel, dat dit onderdeel der algebra nog steeds niet ook maar enigszins voldoende *didactisch* is doordacht. Uiteraard sla ik de wetenschappelijke standing van de gewraakte behandeling evenmin hoog aan, maar, althans in de door mij geciteerde werken is de ontwikkeling formeel in orde, en dat schijnt dan ook het enige criterium geweest te zijn. Maar een echt benaderen van deze stof vanuit didactisch oogpunt had moeten leiden tot het doorbreken van een traditie, die zich niet eens had mogen vormen. De oorsprong zal wel gelegen zijn in het coördinatenbegin der meeste leerboeken over differentiaalrekening. Dat is geen excuus, die boeken zijn bestemd voor lezers, die de middelbare school achter de rug hebben en bovendien zal men in geen enkel leerboek der differentiaalrekening of der analytische meetkunde het mengelmoes aantreffen, dat wij onze leerlingen voorzetten. De verdere ontwikkeling laat zich wel raden: de rechte lijn te hebben en er niets mee te doen, ze kon toch allicht eens een andere snijden! En daarna zal geleidelijk het hek van de dam geschoven zijn, tot practisch een woord als „functie” of „grafiek” de voorstelling van dit conglomeraat voor ogen riep. Een typisch voorbeeld van onbewuste betekenisverschuiving, en dat bij lieden, wier werk en trots het is begrippen onfeilbaar te hanteren! Niet een volkomen verschuiving trouwens: daar is iets blijven hangen van de functie die men vroeger kende, daar blijft een vaag verlangen om tot de onbevleete functie weer te keren en dat geeft juist dat krampachtig vasthouden aan de functie-fictie, dat de zaak vooral niet beter maakt.

Intussen moet men niet denken, dat ik een hekel aan coördinaten heb, het leerplan zou het me trouwens niet veroorloven. Integendeel, het begrip is te belangrijk (en te simpel) dan dat men er de HBS-er niet op zou vergasten. Ook de snijd- en raakproblemen haat ik niet, ik behandel ze zelfs gaarne. 't Is duidelijk, dat bovenstaand betoog slechts gesloten behoefde te worden om tot de eis te voeren, alles te schrappen wat naar meetkunde riekt, alleen ik trek de conclusie niet; zo'n formalist ben ik niet en bovendien buig ik te willig voor de practijk. Mijn bedoeling was slechts, nu dit alles gedekt wordt door de woorden „functie” en „grafiek” en pretendeert die begrippen te verhelderen, te laten zien, hoe de practijk die pretentie doorkruist. De erkenning van de waarde der vertroebelende gedeelten op zich zelf brengt mee, dat we nu ook de keerzij der medaille moeten

Verschenen:

P. WIJDENES

Beginnelsen van de Getallenleer

2e druk, 258 blz. f 8,25, geb. f 10,50

Inhoud:

I. Deelbaarheid	blz. 5—32
II. Congruenties	blz. 33—87
III. Indices en kwadraatresten	blz. 88—153
VI. Congruenties met deelbare modulus	blz. 154—203

Algemene herhaling

Stellingen

Primitieve wortels

Kleinste priemfactoren van de getallen tot 20000

Historische aantekeningen

door Dr E. J. Dijksterhuis

Antwoorden en register

LAGERE ALGEBRA II

5e druk

vergelijkingen, functies en grafieken

443 blz., 150 figuren, geb. f 12,50

Inhoud:

I. Lineaire vergelijkingen; lineaire ongelijkheden	blz. 1—79
II. Lineaire functies	blz. 80—110
III. Vierkantsvergelijkingen	blz. 111—157
IV. Kwadratische functies	blz. 158—200
V. Gehele rationele vergelijkingen	blz. 201—247
VI. Andere verg. en functies	blz. 248—335
VII. Onbepaalde vergelijkingen van de eerste graad	blz. 336—366
VIII. Reeksen	blz. 367—422
Algemene herhaling	blz. 423—439
Register	blz. 440—448

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Ter perse de 9e druk van

MOLENBROEK—WIJDENES

Stereometrie voor M. en V. H. O.

Richtsnoer: beperking tot redelijke eisen.

De gehele leerstof is 124 blz. met 142 fig.

Blz. 125—130 Inhoudsberekening met integraalrekening.

Blz. 131—138 Twee projectiemethoden (scheve projectie en klinografische projectie).

Blz. 139—159 Algemene herhaling.

Verschenen:

Dr. P. Molenbroek, Leerboek der Stereometrie, 11e druk en
Antwoorden en oplossingen op dit leerboek. 5e druk.

P. WIJDENES en Dr H. STREEFKERK

OEFENBLADEN

VOOR DE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

5e druk

Twee schriften: I met 48 blz. f 1,25; II met 64 blz. f 1,60.
Formaat 18 bij 24 cm (blocnote-grootte).

Daarnaast:

Handleiding bij de Oefenbladen

bevattende de hele Beschrijvende Meetkunde voor de
H.B.S. B; 64 blz. met 124 figuren f 1,25.

Vraagt een ex. ter kennismaking aan de uitgever.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.