EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT en P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, LEEUWARDEN
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND - DR. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

24

~~23~~e JAARGANG 1948
Nr 1/2

P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen. Prijs per jaargang *f* 8.00*. Zij die nevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 8.00*) zijn ingetekend, betalen *f* 6.75*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereeniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van *f* 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's-Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1946 t/m 31 Augustus 1947 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen *f* 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

OFFICIËLE MEDEDELINGEN VAN WIMECOS.

Door een opmerking van één der leden van Wimecos werd de aandacht van het Bestuur gevestigd op het feit, dat er Lycea zijn, die ook een afdeling voor de H.B.S.-B hebben, die in de tweede klasse een uur Wiskunde minder geven dan de H.B.S.-B. Daar dit, nu er algemeen een streven is om naar normale eisen terug te keren, voor het Bestuur aanleiding is geweest, om de aandacht van het College van Inspecteurs hierop te vestigen, wordt hieronder het antwoord van de Inspectie gepubliceerd, dat op 3 September j.l. is binnengekomen:

's-Gravenhage, 1 September 1948.

Inspecteur V.H.M.O.
No. D 1405.

Den Heer Secretaris van Wimecos
te Rotterdam.

Ten antwoord op Uw brief van 4 Juli ll. delen wij U het volgende mede:

Het aantal uren Wiskunde voor de B-leerlingen van het Gymnasium bedraagt 23, voor de H.B.S.-B 25 en het ligt dus voor de hand, dat men op het Lyceum tot 24 uren is gekomen, mede in de opvatting, dat voor de Wiskunde op een zo groot aantal uren een uur meer of minder niet van bedenkelijke aard is.

Om evenwel tegemoet te komen aan eventuele bezwaren voor het onderwijs in de tweede klasse berichten wij, dat wij de mogelijkheid willen openlaten om in die klas het aantal uren voor Wiskunde van 4 op 5 te brengen en dan van Nederlands van 4 op 3.

Er zijn scholen, waar dit zeker niet nodig is, omdat over het algemeen de leerlingen meer moeite hebben met Nederlands dan met Wiskunde, maar het omgekeerde komt ook voor, zodat wij ten deze de beslissing per school willen beoordelen.

Lycea, die dus hun lessentabel gewijzigd willen zien, waartoe voor de algemene tabel o.i. geen reden is, kunnen zich daartoe in verbinding stellen met den Inspecteur, die met het toezicht op de school belast is, met een gemotiveerd verzoek tot wijziging als genoemd.

U kunt dus aan de leden van Wimecos meedelen, dat wij bereid zijn eventuele voorstellen van de Rectoren der scholen in overweging te nemen.

Namens het College van Inspecteurs V.H.M.O.

(w.g.) J. VAN ANDEL, *Voorzitter*.
J. P. Chr. DE BOER, *Secretaris*.

VERANDERING VAN LEERPROGRAMMA VOOR DE MECHANICA.

Door het Bestuur zijn aangezocht en bereid gevonden, om te trachten met afgevaardigden van Velines over een nieuw programma voor het onderwijs in de Mechanica tot overeenstemming te komen, de H.H. Dr. Ir. A. J. Staring te Appingedam en Dr. N. R. Pekelharing Az. te Bussum. De afgevaardigden van Velines zijn nog niet bekend.

De Secretaris,
J. J. TEKELENBURG.

ZEVENDE CONGRES VAN LERAREN IN DE WISKUNDE EN DE NATUURWETENSCHAPPEN, GEHOUDEN OP 1 APRIL TE AMSTERDAM.

Van het verslag van bovengenoemd congres zijn nog enige exemplaren beschikbaar. Na storting van *f* 2,08 (*f* 2,— + porto) op postrekening 379319 van ondergetekende volgt de toezending.

De penningmeester v/h Congres
Amsterdam-Z, Amsteldijk 11. Dr. A. HOUDIJK.

RAPPORT INZAKE DE HERZIENING VAN HET EINDEXAMENPROGRAM VAN DE H.B.S.-B.

1. Naar aanleiding van een brief van de Inspecteurs van het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs aan het Bestuur van Wimecos, waarin aan dit Bestuur verzocht wordt een oordeel te geven over de volgende vragen:

a. Is het wenselijk èn mogelijk de uitbreiding van de leerstof voor de wiskunde, zoals deze is opgenomen in het leerplan der H.B.S.-B van 27 Mei 1937 geheel of gedeeltelijk op te nemen in het eindexamenprogram?

b. Impliceert het opnemen van nieuwe eindexamenstof, dat een deel van de oude examenstof dient te vervallen, en, zo ja, welke onderdelen zouden dan kunnen vervallen?

c. In welk jaar dient het gewijzigd eindexamenprogram van kracht te worden?

is in de jaarvergadering van Wimecos van 30 December 1947 besloten tot het instellen van een commissie om in deze een praeadvies uit te brengen, dat de grondslag zou kunnen vormen voor een bespreking van deze materie op de jaarvergadering van 1948.

Na deze vergadering zal dan het Bestuur van Wimecos op de vragen van de Inspecteurs antwoorden.

De samenstelling van de Commissie is als volgt:
C. J. Alders, leraar aan het R.K. Lyceum te Haarlem;
Dr. H. H. Buzeman, directeur der 2e Gem. H.B.S.-B te Amsterdam;
G. A. Janssen, rector van het Chr. Lyceum te Delft;
Dr. D. N. van der Neut, directeur van de Chr. H.B.S.-A en B te Zeist;
Dr. M. van Vlaardingen, oud-leraar aan het Rotterdams Lyceum en instructeur te Delft;
Dr. Joh. H. Wansink, leraar aan de Lorentz-H.B.S. te Arnhem.

De heren Alders, van der Neut en Wansink werden ter jaarvergadering aangewezen. Dr. van Vlaardingen werd aan de Commissie toegevoegd op grond van de overweging, dat het wenselijk is, dat vertegenwoordigers van de Gymnasia en van de H.B.S.-B, in verband met de studierechten die aan het bezit van het einddiploma van de H.B.S.-B verbonden zijn, t.a.v. de bij de eindexamens te stellen eisen met elkaar in overleg treden. Dr. Buzeman en de Heer Janssen hebben aan het werk der Commissie deelgenomen als bestuursleden van Wimecos. Dr. Buzeman trad op als voorzitter der Commissie; Dr. Wansink werd op de eerste vergadering als rapporteur aangewezen.

De Commissie heeft drie maal vergaderd en wel op 10 April, op 22 September en op 15 October 1948.

2. In de veronderstelling, dat het aantal uren voor wiskunde op de urentabellen minimaal 25 zal bedragen, — het aantal dat er op het leerplan van de H.B.S.-B momenteel voor is uitgetrokken, — is de Commissie na ampele discussie eenstemmig tot de overtuiging gekomen, dat het gewenst is de vragen van de Inspecteurs als volgt te beantwoorden:

a. Ja, het is wenselijk en mogelijk de uitbreiding van de leerstof gedeeltelijk op te nemen in het eindexamenprogram, o.m. voor wat betreft de beginselen der differentiaalrekening.

b. Neen, behalve t.a.v. de samengestelde interestrekening acht de Commissie het niet nodig een deel der oude examenstof te laten vervallen; vereenvoudiging van het eindexamen kan bereikt worden door het vermijden van gekunstelde opgaven.

c. Niet eerder dan in 1952 en niet eerder dan nadat na de vaststelling en bekendmaking van het nieuwe program minstens twee volle cursusjaren zullen zijn verlopen.

De Commissie heeft gemeend door een ontwerp voor een nieuw eindexamenprogram aan dit rapport toe te voegen haar mening t.a.v. de ter discussie gestelde kwestie het duidelijkst naar voren te kunnen brengen.

3. Ten einde haar standpunt te bepalen ten opzichte van de eerste der bovenvermelde vragen, heeft de Commissie nagegaan, of het wenselijk en mogelijk is:

I. alle leerstof op te nemen in het eindexamenprogram;
II. slechts een deel der leerstof op te nemen in het eindexamenprogram.

Bij elk dezer gevallen werden nog twee mogelijkheden onderzocht:

a. de gehele examenstof wordt zowel mondeling als schriftelijk geëxamineerd;
b. een deel der examenstof wordt uitsluitend mondeling geëxamineerd.

Het zou de Commissie aangenaam geweest zijn, indien ze tot aanvaarding van het onder I genoemde standpunt zou hebben kunnen adviseren.

Immers, tegen een eindexamenregeling, waarbij bepaalde onderdelen der in de hoogste klassen te behandelen leerstof op het eindexamen in het geheel niet aan de orde kunnen komen, zijn ernstige bezwaren in te brengen. De vrees schijnt gewettigd, dat bij een dergelijke regeling de in het eindexamenprogram niet genoemde onderwerpen op den duur op vele scholen bij het onderwijs op de achtergrond zullen geraken, ja, misschien in het geheel niet meer aan de orde zullen komen. Ondanks deze bezwaren voelt de Commissie zich genoodzaakt met een voorstel te komen, waarbij weliswaar alle „oude leerstof" mondeling en schriftelijk zal worden geëxamineerd, maar waarbij de „nieuwe leerstof" slechts voor een deel examenstof zal worden. Ze heeft dit gedaan op grond van de overweging, dat een eindexamenregeling, waarbij de leerstof van het program 1937 in zijn volle omvang tot de verplichte examenstof zou gaan behoren, onvermijdelijk leiden moet tot een overlading bij het onderwijs op de H.B.S. met vijfjarige cursus en daardoor tot een ontwrichting van dit onderwijs, die tot elke prijs moet worden vermeden.

De belangrijkste nieuwe onderwerpen, die volgens het leerplan 1937 aan het onderwijs op de H.B.S.-B moeten worden toegevoegd, zijn:

a. de differentiaal- en integraalrekening;
b. de kegelsneden;
c. de herhaling en uitbreiding van het getalbegrip;
d. de meetkunde op de bol.

De Commissie acht het niet mogelijk deze onderwerpen in de voor het onderwijs op de Hogere Burgerschool met vijfjarige cursus uitgetrokken tijd zodanig te behandelen, dat al deze leerstof normaal examineerbaar wordt. Zeker niet, als dit examineren schriftelijk zou geschieden door middel van opgaven van analoge moeilijkheid als van die welke voor de oude leerstof plegen te worden opgegeven. De Commissie herinnert eraan, dat dit in de jaren van het tot stand komen van het nieuwe leerplan ook geenszins in de bedoeling der autoriteiten heeft gelegen. Ze wijst in dit verband op de mening van de Heer J. van Andel, destijds Inspecteur der Lycea, geuit op een vergadering van Wimecos van 23 October 1937, waarvan het verslag in Euclides (14e jaargang, blz. 76) zegt:

> „Voorlopig is er in de onderwerpen voor het schriftelijk eindexamen niet de minste verandering te verwachten: het nieuwe moet rustig ingroeien. In de eerstvolgende jaren zal er dus niet over de kegelsneden, niet over D. en I. rekening, niet over het getalbegrip worden gevraagd, en zoals we er nu over denken, zegt Spr., zullen deze onderwerpen ook *nooit* op het schriftelijk eindexamen worden gevraagd".

Is het nu misschien wel wenselijk en mogelijk de nieuwe onderwerpen voor het mondeling examen te reserveren?

De Commissie is van oordeel, dat op grond van dezelfde motieven, waarmee ze zich verzet heeft tegen opname van *alle* nieuwe onderwerpen op het program voor het schriftelijk examen, ze zich ook moet verzetten tegen een onderbrengen van *alle* nieuwe leerstof op de lijst van onderwerpen, die voor het mondeling examen verplicht zijn. Ook dan zou het onderwijs in de hoogste klassen door overlading ontwricht worden.

Bij handhaving van het systeem der vrijstellingen zou een regeling als hier bedoeld nog tot een grove onbillijkheid leiden, die we onder ogen dienen te zien: de zwakke candidaten, nl. zij die het op het schriftelijk examen niet tot een vrijstelling hebben kunnen brengen, zouden dan over een groter deel der wiskunde worden ondervraagd dan de sterkere candidaten, die wèl een vrijstelling hebben kunnen verwerven. Dit acht de Commissie ontoelaatbaar. Het onderbrengen van nieuwe leerstof uitsluitend bij het mondeling examen zal naar het oordeel der Commissie onvermijdelijk afschaffing van het stelsel der vrijstellingen voor het mondeling examen tengevolge moeten hebben. De Commissie heeft daarom gemeend er goed aan te doen de vraag te overwegen, of afschaffing van de vrijstellingen inderdaad aanbeveling verdient.

Voor afschaffing van de vrijstellingen pleiten de volgende argumenten:

a. Een candidaat die voor zijn schriftelijk werk thans een 7 of meer behaalt, behoudt dit cijfer als eindcijfer. Is dit cijfer in verband met zijn werkelijke kennis geflatteerd, dan krijgt hij, met hen die over zijn toekomstplannen zullen hebben te beslissen, van zijn wiskundekennis een te hoge dunk, wat voor zijn toekomst bedenkelijke gevolgen kan hebben.

b. Als de vrijstellingen worden afgeschaft, kan de nieuwe leerstof bij het mondeling examen worden ondergebracht, waardoor t.a.v. deze materie op soepeler wijze rekening gehouden kan worden met de aard van het genoten onderwijs, dan het geval zal zijn, als over deze nieuwe leerstof centraal schriftelijk werk wordt opgegeven.

Voor handhaving der vrijstellingen gelden de volgende argumenten:

a. Centraal opgegeven schriftelijk werk garandeert, indien de opgaven juist zijn gekozen, de totstandkoming van een meer objectief oordeel dan een mondeling onderzoek van den aard zoals we dat nu kennen.

Indien de bewering, dat er thans op grond van een uitsluitend schriftelijk examen soms te veel hoge cijfers gegeven moeten worden, juist mocht zijn — een bewering die de Commissie niet voor haar rekening wenst te nemen — dan pleit dit niet tegen het systeem der vrijstellingen, maar tegen de kwaliteit van de opgegeven vraagstukken. Een „beter stel opgaven" zou dan moeten betekenen: een stel waarvoor niet zo gemakkelijk het waarderingscijfer 10 zou zijn te behalen, maar niet moeilijker het waarderingscijfer 6.

b. Het probleem der deskundigen zal bij afschaffing der vrijstellingen acuut worden. De Commissie vreest nl. dat de bereidheid van deskundigen om in examencommissies zitting te nemen sterk zal verminderen, als door het afschaffen van de vrijstellingen aan hen zwaardere eisen worden gesteld. Bovendien wijst de Commissie op het gevaar, dat door die verzwaring de kwaliteit van het examineren op een lager peil zal komen te staan; het gevaar dreigt, dat de leraar-examinator bij ononderbroken examineren niet steeds in staat zal zijn zijn taak zo te vervullen, dat geen der candidaten wordt gedupeerd.

De Commissie kent aan de argumenten die voor handhaving van de vrijstellingen pleiten, meer gewicht toe dan aan de argumenten die voor de afschaffing zijn opgesomd. De soms gehoorde bewering, dat de deskundigen bij afschaffing van de vrijstellingen een betere indruk krijgen van het wiskundeonderwijs op de H.B.S., maakt op de Commissie weinig indruk, omdat de deskundigen het schriftelijk werk mede beoordelen.

De Commissie acht afschaffing der vrijstellingen dan ook nòch nodig, nòch gewenst, maar adviseert tot handhaving ervan.

Op grond van de genoemde overwegingen is de Commissie van oordeel te moeten adviseren tot aanvaarding van standpunt II*a*, d.w.z.: *er worde slechts een deel van de leerstof van het leerplan van 27 Mei 1937 opgenomen in het eindexamenprogram; de examenstof gelde zowel voor het schriftelijke als voor het mondelinge examen.*

De Commissie wenst van de nieuwe leerstof — onder zekere beperkende voorwaarden — de reststelling en de beginselen der diffrentiaalrekening aan de oude stof toe te voegen. Ten opzichte van het huidige program betekent dit dus een uitbreiding bij de zogenaamde Wiskunde I (algebra en trigonometrie) en geen uitbreiding bij de Wiskunde II (meetkunde).

Als de uitbreiding binnen deze grenzen gehouden wordt, acht de Commissie het mogelijk de nieuwe leerstof zowel schriftelijk als mondeling te doen examineren. Hierdoor wordt bereikt, dat inderdaad alle scholen de genoemde leerstof zullen moeten behandelen en dat de beoordeling volgens meer objectieve normen kan plaats hebben dan bij uitsluitend mondeling examineren het geval is. Ook bij handhaving van de vrijstellingen blijft het dan mogelijk, het gebied waarover geëxamineerd moet worden voor alle candidaten gelijk te doen zijn. Deze gelijkheid wenst de Commissie in geen geval prijs te geven.

De bovenbedoelde beperkende voorwaarden zijn:

a. Het aantal opgaven, dat betrekking heeft op de nieuwe leerstof, moet beneden een niet te hoog gestelde grens blijven; de omvang ervan mag bv. 20% van die voor het schriftelijk werk voor Algebra en Trigonometrie niet overschrijden.

b. De opgaven moeten inderdaad eenvoudig zijn.

Als voorbeelden van opgaven van maximaal toelaatbare moeilijkheid worden genoemd:

het bepalen van de extreme waarden van tweede- en derdegraadsfuncties en van goniometrische functies;

het bepalen van een interval, waarin een dezer functies monotoon is;

het bepalen van de buigpunten in de grafieken van derdegraadsfuncties en van eenvoudige goniometrische functies.

De afgeleiden van exponentiële en logarithmische functies worden niet gevraagd.

De Commissie wil erop wijzen, dat het wenselijk kan blijken niet te volharden in de gewoonte om elk jaar voor elk stel werk twee opgaven op te geven, elk eventueel gesplitst in enige meer of min met elkaar in verband staande onderdelen. Ze zou het op prijs stellen, indien ook eens, bv. voor Algebra, stellen werk werden opgegeven bestaande uit bv. vijf enkelvoudige, eenvoudige, van elkaar onafhankelijke opgaven. Deze zouden tezamen een groter deel van de leerstof kunnen bestrijken dan thans veelal het geval is en op deze wijze het in elk examen gelegen toevalselement kunnen verkleinen. Door dan hoogstens één der vijf opgaven voor de nieuwe leerstof te reserveren wordt voorkomen, dat de uitbreiding van de examenstof de eindexamens onredelijk zal verzwaren. Ten aanzien van de Meetkunde stelt de Commissie echter geen wijziging in het aantal der opgaven voor.

De Commissie mag niet nalaten erop te wijzen, dat een uitbreiding van de examenstof in de aangegeven zin, hoe bescheiden ook bedoeld, na verloop van jaren tot een aanmerkelijke verzwaring van het eindexamen kan leiden door de tendens om eenmaal opgetreden typen van opgaven in toenemende gecompliceerdheid bij opvolgende examens aan de orde te stellen. De uiterste omzichtigheid dient dus te worden betracht.

Tot punten van secundaire betekenis, die aan de examenstof zijn toegevoegd, behoren de logarithmische functie, de exponentiële functie en de functie $y = a \sin x + b \cos x$. De logarithmische en de exponentiële functie worden in het leerplan niet uitdrukkelijk genoemd, maar worden blijkens examenopgaven der laatste jaren reeds thans in ons onderwijs verondersteld. De Commissie acht het uitdrukkelijk noemen van deze functies meer een verduidelijking dan een verzwaring van het examenprogram.

4. Wat de tweede vraag van de Inspectie betreft is de Commissie van oordeel, dat het niet nodig is om bepaalde in het eindexamenprogram van 1929 genoemde onderwerpen aan te wijzen, die in het nieuwe program niet meer zouden dienen voor te komen, met uitzondering van de samengestelde interestrekening. Het weinig gedetailleerde program van 1929 geeft tot het schrappen van details verder geen aanleiding. Vereenvoudiging van het eindexamen t.a.v. de traditionele stof moet naar het oordeel der

Commissie minder gezocht worden in een weglaten van onderwerpen dan wel in een streven naar een eenvoudiger structuur der opgaven, waardoor een africhten op speciale examenmoeilijkheden overbodig wordt gemaakt. Zo acht de Commissie het gewenst, dat bij de Beschrijvende Meetkunde geen vraagstukken over kegels en cylinders worden opgegeven, waarin de assen dezer lichamen niet loodrecht staan op een der drie onderling loodrechte projectievlakken. Voorts acht de Commissie het gewenst, dat de toekomstige auteurs van eindexamenopgaven, gekunsteldheid vermijdend, opgaven construeren, die minder gecompliceerd zijn dan in het verleden wel eens het geval geweest is. Zij is, om een voorbeeld te noemen, van oordeel, dat noch de vierkantsvergelijking, noch de kwadratische functie uit de examenstof dienen te worden geweerd, maar dat de vermelding van deze beide onderwerpen in het eindexamenprogram geen voldoende grond is voor de extensieve en de intensieve wijze, waarop deze materie op onze scholen gewoonlijk wordt behandeld. Het opgeven van bv. een vijftal eenvoudige, enkelvoudige, van elkaar onafhankelijke vragen in plaats van de samengestelde van tegenwoordig kan wellicht bevorderlijk zijn voor het bereiken van het hier gestelde doel.

5. Het leerplan van 1937 was nog niet in alle klassen ingevoerd, toen de oorlogsontreddering een besnoeiing van de leerstof nodig maakte, waarbij alle nieuwe onderwerpen minstens tot het tweede plan werden teruggedrongen. De ontwrichting van het onderwijs in de naoorlogse periode is oorzaak van het feit, dat met het nieuwe leerplan in de praktijk van het onderwijs nog weinig of geen rekening kon worden gehouden. Nog steeds zitten we met oorlogstekorten. De achterstand wordt weliswaar van jaar tot jaar kleiner, maar ook de klassen I, II, III en IV, die gedurende hun verblijf op school vrijwel normaal les hebben gehad, zijn nog niet op het vereiste peil, o.a. door de achterstand, waarmee ze van de Lagere School naar de Middelbare School zijn gekomen. Bovendien heeft het onderwijs op tal van scholen nog te lijden door gebrek aan goede huisvesting (combinatie van scholen in één gebouw) en door een tekort aan bevoegde docenten.

De Commissie acht het daarom gewenst het nieuwe program vooral niet op een te vroege datum te doen ingaan. Ze zou het op prijs stellen, indien bij het onderwijs in de klassen III, IV en V geheel met het leerplan 1937 rekening gehouden kan zijn, eer een bepaalde groep van leerlingen volgens het nieuwe program zal worden geëxamineerd.

De Commissie stelt daarom voor te adviseeren, dat het nieuwe program niet eerder van kracht zal worden dan in 1952, en niet eerder dan nadat na de vaststelling en bekendmaking van dit program ten minste twee volle cursusjaren zullen zijn verlopen.

6. Ontwerp voor een nieuw eindexamenpvogram.

Het examen voor wiskunde strekt zich uit over:

a. de reken- en stelkunde;
b. de driehoeksmeting;
c. de stereometrie;
d. de beschrijvende meetkunde.

Het examen kan worden verdeeld in een schriftelijk en een mondeling gedeelte, beide lopend over de hierna te noemen onderwerpen. De onderwerpen, die niet genoemd worden, maar wel voorkomen in het leerplan 1937, behoren noch tot de eisen voor het schriftelijk, noch tot die voor het mondeling examen. Op scholen, waar een leraar een of meer der hier bedoelde onderwerpen wel in de klasse heeft behandeld, is het den leraar-examinator echter niet verboden over die onderwerpen enige vragen te stellen.

Voor het Staatsexamen voor extraneï vervallen deze onderwerpen.

Op het examen wordt geëist de kennis van:

A. voor reken- en stelkunde:

a. de in het leerplan vermelde vergelijkingen;
b. de functies;

$$y = ax + b;\ y = ax^2 + bx + c;\ y = \frac{ax + b}{x + c};$$

$$y = a^x;\ y = {}^a\log x;$$

c. de reken- en meetkundige reeksen;
d. de logarithmen;
e. de reststelling;
f. de eenvoudige beginselen van de differentiaalrekening, voor zover deze voor de elders in het leerplan 1937 voorgeschreven leerstof van betekenis is te achten.

Opmerkingen:

1. In de opgaven voor reken- en stelkunde wordt slechts kennis ondersteld van het reële getallensysteem.
2. Bij de differentiaalrekening worden de afgeleiden van de exponentiële en logarithmische functies niet gevraagd.

B. voor driehoeksmeting:

a. de goniometrie en de trigonometrie met eenvoudige toepassingen op meetkundige vraagstukken;

b. eenvoudige goniometrische vergelijkingen;
c. de functies:

$$y = a \sin x + b \cos x \quad \text{en} \quad y = \operatorname{tg} x.$$

Opmerking:

Met eenvoudige goniometrische vergelijkingen worden bedoeld de gonimetrische vergelijkingen, genoemd in de circulaire van de Inspecteurs van het Middelbaar Onderwijs van 28 October 1929.

C. voor de stereometrie:
a. eenvoudige eigenschappen van ruimtefiguren en eenvoudige stereometrische bewijzen;
b. eenvoudige ruimteconstructies, doorsneden en netwerken;
c. eenvoudige inhouds- en oppervlakteberekeningen;
d. de regelmatige vier-, zes- en achtvlakken.

D. voor de beschrijvende meetkunde:
a. de grondconstructies van de orthogonale parallelprojectie;
b. doorsnijding met platte vlakken van door platte vlakken begrensde lichamen;
c. de wenteling van figuren om een as in of loodrecht op het horizontale of verticale projectievlak;
d. de bol, benevens de kegel en de cylinder in eenvoudige ligging, d.w.z. met assen loodrecht op een der drie onderling loodrechte projectievlakken.

Arnhem, 15 October 1948 — de rapporteur,
w.g. Joh. H. WANSINK.

HOE HEBBEN DE OUDEN GEREKEND?

door

HANS FREUDENTHAL.

I.

In de vijftig jaar geleden teruggevonden en door H. Schöne uitgegeven Metrica van Heroon vindt men (Opera ed. Schöne III, p. 66, l. 13—19) een zinsnede, die vertaald luidt:

Archimedes bewijst in zijn geschrift „Over blokken en cilinders" (*περὶ πλινθίδων καὶ κυλίνδρων*), dat van elke cirkel de verhouding van omtrek en diameter groter is dan

$$211\,875 : 67\,441$$

en kleiner dan

$$197\,888 : 62\,351.$$

Heroon voegt eraan toe: Daar deze getallen voor de metingen niet gemakkelijk zijn, worden zij tot de verhouding van de kleinste getallen, te weten 22 : 7, teruggebracht.

Helaas bezitten wij het door Heroon geciteerde werk van Archimedes niet. In de „Cirkelmeting" (*κύκλου μέτρησις*) is ons een uittreksel uit het eveneens verloren geschrift overgeleverd, waarin Archimedes de vermaarde berekening heeft doorgevoerd, die tot

$$3\tfrac{10}{71} < \pi < 3\tfrac{1}{7} \qquad \text{(Archimedes)}$$

heeft geleid. De betekenis van het citaat uit Heroon is blijkbaar die, dat Archimedes nauwkeuriger waarden voor π heeft gekend, nl.

$$\frac{211\,875}{67\,441} < \pi < \frac{197\,888}{62\,351} \qquad \text{(Heroon).}$$

Helaas zijn beide waarden fout. De eerste, de schatting naar onderen, is *wiskundig* fout, want zij is $= 3{,}1416\ldots$, dus groter dan de werkelijke waarde van π, terwijl de tweede, de schatting naar boven, *historisch* fout is, want zij is $= 3{,}17\ldots$, dus veel slechter dan de beroemde waarde $3\frac{1}{7}$ uit de „Cirkelmeting". Met „historisch fout" bedoel ik, dat er een fout in de overlevering geslopen moet zijn. Het is immers onaannemelijk, dat van Archimedes tot en met Heroon geen wiskundige gemerkt zou hebben, dat deze met 5—6-cijfer-getallen opererende waarde voor π veel slechter was dan de simpele $3\frac{1}{7}$.

J. L. Heiberg heeft derhalve (mede een voorstel van T. N. Thiele accepterend) de waarden uit de Metrica van Heroon als volgt gecorrigeerd:

$$\frac{211\,875}{67\,444} < \pi < \frac{195\,888}{62\,351} \qquad \text{(Heiberg).}$$

(Zie Archimedes, Opera ed. Heiberg, II, 542). In decimale schrijfwijze: $3{,}14149 < \pi < 3{,}14169$

P. Tannery daarentegen corrigeert:

$$\frac{211\,872}{67\,441} < \pi < \frac{195\,882}{62\,351} \qquad \text{(Tannery).}$$

(Zie Journ. des Savants 1903, p. 205 = Oeuvres III).
In decimale schrijfwijze:

$$3{,}1415904 < \pi < 3{,}1416016.$$

(Deze twee getallen bezitten trouwens de gemeenschappelijke benaderende kettingbreuk 355/113, die door Metius bekend is geworden.)

Beide correcties schijnen mij onaanvaardbaar. Ten eerste de correctie van Heiberg, omdat de waarden van π, die Heiberg verkrijgt, slechts een nauwkeurigheid van 10^{-5} opleveren, die in geen redelijke verhouding staat tot het werken met tellers en noemers van 5—6 cijfers (samen 11 cijfers!). Het besef, dat de bij het rekenen met gewone breuken verkrijgbare nauwkeurigheid aan het kwadraat van de noemer beantwoordt, dateert namelijk niet pas uit de tijd nà het systematisch onderzoek van kettingbreuken. In de richting van dit besef is er reeds in de oudheid veel aanwezig. In de „Cirkelmeting" geeft Archimedes blijk ervan, dat het hem niet erop aankomt, willekeurig goede waarden voor π te verkrijgen. Hij vervangt de verkregen bovengrens

$$3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}$$

door de benaderende kettingbreuk van de eerste orde $3\frac{1}{7}$, en de verkregen ondergrens

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}}$$

door de benaderende kettingbreuk van de tweede orde $3\frac{10}{71}$. Had Archimedes werkelijk de door Heiberg aangegeven waarden verkregen, dan zou het voor hem voor de hand hebben gelegen, deze waarden door de meer eenvoudige en niet noemenswaardig onnauwkeuriger waarden

$$3\tfrac{14}{99} \text{ en } 3\tfrac{35}{247}$$

te vervangen. De astronomische getallen in de overleveringen van Heroon blijven, ook als men Heiberg's emendatie aanvaardt, onopgehelderd.

Iets bevredigender zijn in dit opzicht de correcties van Tannery, die inderdaad tot veel groter nauwkeurigheid leiden. Tannery zelf geeft echter toe, dat zij om philologische redenen slechts met zeer veel reserve aanvaard kunnen worden.

Ik meen, dat de verklaring voor de waarden bij Heroon in een geheel andere richting moet worden gezocht. Ik hoop, bij een andere gelegenheid op deze vraag terug te komen. Ondertussen wil ik de beschouwingen van de Heer E. M. Bruins, die zich met deze vraag bezig heeft gehouden in zijn Openbare Les „Mathematici en Physici" (gehouden op 7 Juli 1943 bij de aanvaarding van het lectoraat in de Analyse aan de Gemeente-Universiteit van Amsterdam = Euclides 20 (1943), 1—22) aan een critiek onderwerpen.

De Heer E. M. Bruins wil daar aantonen, dat de in Heroon's Metrica overgeleverde, aan Archimedes toegeschreven, waarden voor π historisch juist zijn. Hij meent de weg te hebben gevonden, waarop Archimedes deze waarden had verkregen. De Heer Bruins veronderstelt dus, dat Archimedes bij de berekening van de ondergrens een rekenfout heeft begaan, dat deze rekenfout tot de tijd van Heroon (of nog langer) niet bemerkt is, en dat (wat de schatting naar boven aangaat) Heroon en andere mathematici der oudheid niet zouden hebben gemerkt, hoe slecht deze waarde is (in elk geval veel slechter dan de vermaarde $3\frac{1}{7}$).

Als men de beschouwingen van de Heer Bruins analyseert, vindt men inderdaad bevestigd, dat deze berusten op de (meestal stilzwijgende) veronderstelling, dat Archimedes zich aan (soms zeer grove) rekenfouten schuldig heeft gemaakt. De mening, dat de Grieken bij al hun wiskundige prestaties door het ontbreken van een doelmatige getallen-notatie en door het ontbreken van papier, pen en inkt zodanig gehandicapt waren, dat zij slechts een gebrekkige rekentechniek konden ontwikkelen, is inderdaad enigszins populair, en misschien heeft dit vooroordeel de Heer Bruins parten gespeeld. In werkelijkheid bestaat er weinig aanleiding, om de rekenvaardigheid der Griekse geleerden laag aan te slaan. De Griekse sterrenkunde is ondenkbaar zonder een goed ontwikkelde rekentechniek, en van Archimedes, die zich in zijn „Cirkelmeting" een verbazend handig rekenaar toont, zou ik niet willen veronderstellen, dat hij in zijn verhandeling „Over blokken en cilinders" minder handig had gerekend.

Volgens de Heer Bruins nu is Archimedes in dit geschrift uitgegaan van de regelmatige 16-hoek. Het is vrij gemakkelijk, het verschil tussen de omtrekken der in- en omgeschreven n-hoeken te schatten. In het geval van de 16-hoek zou dit niet eens nodig zijn. Een simpele tekening toont, dat dit verschil voor $n = 16$ veel te groot is, om het bezigen van getallen met 5—6 cijfers te rechtvaardigen. Dat had eigenlijk Archimedes en andere wiskundigen der oudheid niet mogen ontgaan. Maakt men echter van een schatting voor het verschil tussen in- en omgeschreven n-hoek gebruik (ongeveer $17/n^2$), dan komt men voor $n = 16$ tot een bedrag van minstens 0,06, terwijl de waarden bij Heroon minder dan 0,03 verschillen. De feitelijk verkregen nauwkeurigheid zou dus dubbel zo groot zijn geweest, als bij de 16-hoek theoretisch mogelijk was. Zou werkelijk geen enkele wiskundige van Archimedes tot Heroon deze discrepantie gewaar zijn geworden? Ik kan het mij niet voorstellen. Zal niet elk verstandig rekenaar, die π wil bepalen, van te voren schatten, hoe ver hij moet gaan, om een bepaalde nauwkeurigheid te verkrijgen? En moeten wij niet, zolang het tegendeel niet is bewezen, Archimedes liever tot de verstandige rekenaars tellen?

We zullen trachten, de gedachtengang terug te vinden, waardoor de Heer Bruins zich in zijn beschouwingen heeft laten leiden. De Heer Bruins heeft blijkbaar de schatting naar boven

$$\frac{197\,888}{62\,351}$$

nader bekeken en opgemerkt, dat de teller $197\,888 = 256 \cdot 773$ is. Bij het klassieke bewijs in de „Cirkelmeting" van Archimedes, dat tot de schatting $3\frac{1}{7}$ leidt, blijft de noemer 153 van de voor $\sqrt{3}$ in het begin gebezigde approximatie $\frac{265}{153}$ door alle schattingen tot de voorlaatste toe behouden; bij de laatste stap wordt hij met 96 (het aantal zijden) vermenigvuldigd. Dit verschijnsel heeft de Heer Bruins blijkbaar tot de conclusie bewogen, dat de 256 in de factorsplitsing van 197 888 iets met het aantal zijden te maken heeft, terwijl 773 dan de noemer zou zijn van de gebezigde approximatie van $\sqrt{2}$, die als diagonaal van de regelmatige vierhoek het uitgangspunt van de berekening zou zijn geweest. De mogelijkheid van vereenvoudigingen, zoals er voortdurend worden gemaakt bij de berekening in de „Cirkelmeting", die tot de waarde $3\frac{10}{71}$ leidt, sloot de Heer Bruins in het onderhavige geval blijkbaar uit.

Van de veronderstelling, dat de noemer van de gebruikte approximatie van $\sqrt{2}$ 773 zou luiden, komt de Heer Bruins door een niet zeer overtuigende redenering tot de conclusie, dat de regelmatige 16-hoek aan de berekeningen ten grondslag heeft gelegen — ik heb reeds uiteengezet, om welke redenen mij dit zeer onwaarschijnlijk voorkomt. De 256 in de factorsplitsing van 197 888 doet eigenlijk aan de 256-hoek denken, maar we zullen zien, dat de ontbrekende 16 volgens de Heer Bruins is binnengeslopen door een rekenfout van Archimedes, waarvan het enig doel moet zijn geweest, de teller en noemer van de schatting onnodig te vergroten.

Om dat duidelijk te maken, zetten wij de methode uiteen, die Archimedes in de „Cirkelmeting" en volgens de Heer Bruins ook in de verhandeling over de blokken en cilinders heeft toegepast. Zij R de straal van de cirkel en A_n de halve zijde van de omgeschreven regelmatige n-hoek. We stellen

$$r_n = \sqrt{R^2 + A_n^2} \qquad (1)$$

Halvering van de overstaande hoek der zijde A_n en toepassing van de stelling van de bissectrix leidt tot

$$\frac{R}{A_{2n}} = \frac{R}{A_n} + \frac{r_n}{A_n}. \qquad (2)$$

Archimedes begon volgens de Heer Bruins met

$$\frac{R}{A_4} = 1, \quad \frac{r_4}{A_4} > \frac{1093}{773}.$$

Hieruit volgde

$$\frac{R}{A_8} > \frac{1866}{773}, \quad \frac{r_8}{A_8} > \frac{1}{773}\sqrt{773^2 + 1866^2}.$$

Hier nu maakt de Heer Bruins de eigenaardige veronderstelling, dat Archimedes deze vierkantswortel niet b.v. door 2019 zou hebben geschat (Archimedes was in zijn „Cirkelmeting" nogal bedreven in het uitrekenen van vierkantswortels), maar dat hij als het ware in het geheel niet de stelling van Pythagoras zou hebben toegepast. Archimedes zou eenvoudig zonder enige motivering,

$$r_8 - R > \tfrac{1}{16}(R + A_8)$$

hebben geschat.

Gedurende de 3500 jaar van Hamurapi tot de uitvinding der logarithmentafels toe zijn vierkantswortels op veel manieren berekend. Maar nergens vond ik een zo zonderlinge formule als Archimedes hier zou hebben gebruikt. De overgeleverde methoden komen neer op de zogenaamde formule van Heroon

$$\sqrt{a^2 + b} \sim a + \frac{b}{2a},$$

die soms bij herhaling wordt toegepast; en uit de commentaar van Eutocius op de „Cirkelmeting" (Archimedes, Opera ed. Heiberg, III, 232) weten wij stellig, dat ook Archimedes deze methode niet versmaadde. De hypothese van de Heer Bruins, dat Archimedes

$$\sqrt{773^2 + 1866^2} > 1866 + \tfrac{1}{16}(1866 + 773) \qquad (3)$$

zou hebben geschat, moet om vier redenen worden verworpen:

1. Van een dergelijke schattingsformule is niets bekend.
2. De hiermee verkregen schatting is ingewikkelder dan die volgens de formule van Heroon.
3. De verkregen schatting (dus de ongelijkheid (3)) is onjuist. Zij levert nl.

$$\frac{r_8}{A_8} > \frac{2030\frac{15}{16}}{773},$$

terwijl

$$\frac{r_8}{A_8} < \frac{2024}{773}$$

geldt.
(De Heer Bruins drukt dit uit, door te zeggen, dat in formule (3) de noemer 17 i.p.v. 16 „beter" ware geweest. Ik zou mij liever van de stellende trap bedienen en zeggen, dat 17 „goed" was geweest.)

4. De verkregen foutieve schatting leidt tot onnodig grote noemers. Maar dat was dan ook de bedoeling (niet van Archimedes, maar van de Heer Bruins, die de ontbrekende factor 16 in de noemer moest rechtvaardigen). Om A_{16} te berekenen zou Archimedes thans de onjuiste waarde

$$\frac{r_8}{A_8} = \frac{2030\frac{15}{16}}{773}$$

in formule (2) hebben gesubstitueerd; hoewel deze breuk door zeer onnauwkeurige schattingen was verkregen, zag Archimedes ertegen op, $2030\frac{15}{16}$ door b.v. 2031 te vervangen, en zodoende slaagde hij er inderdaad in, de noemer met 16 te vermenigvuldigen.

Wie de berekening vervolgt op het punt, waar wij haar hebben afgebroken (maar dan met de juiste waarde voor r_8/A_8), verkrijgt:

$$\frac{r_8}{A_8} > \frac{2019}{773}, \quad \frac{R}{A_{16}} > \frac{1866 + 2019}{773},$$

$$\frac{16A_{16}}{R} = \frac{16 \cdot 773}{3885} = 3{,}18\ldots,$$

een uiteraard niet fraaie schatting voor π, maar van een 16-hoek mag men niet beter verwachten. De Heer Bruins, in de voetsporen van Archimedes, naar hij meent, verkrijgt, dank zij de foutieve vierkantswortel, het gewenste

$$\frac{195\,888}{62\,351} = 3{,}17\ldots,$$

waarbij het grote aantal cijfers afkomstig is van de zet met de 16. Als benadering van boven voor de omtrek van de omgeschreven 16-hoek is dit getal onjuist (een iets te scherpe schatting van de 16-hoek — zegt de Heer Bruins laconiek). Als schatting van boven voor de cirkelomtrek valt het mee, doordat de 16-hoek nogal flink van de cirkel verschilt. Maar de manier, waarop Archimedes die benadering moet hebben verkregen, lijkt een beetje te zeer op wat wij op school deden, wanneer wij gespiekt hadden en de uitkomst achteraf door zo iets als een berekening moesten rechtvaardigen.

In de „Cirkelmeting" werkt Archimedes met twee zeer scherpe schattingen voor $\sqrt{3}$ (benaderende kettingbreuken), en de vraag, hoe Archimedes aan die schattingen gekomen kan zijn, heeft de wiskundigen sinds een eeuw niet met rust gelaten. Er zijn zeer scherpzinnige theorieën ontwikkeld, om die twee waarden te verklaren. De verklaring, die de Heer Bruins voor de waarde

$$\sqrt{2} > \frac{1093}{773}$$

geeft, die hij aan Archimedes toeschrijft, is zeer veel eenvoudiger — we zullen er straks op terugkomen.

Zij die zich met de waarden van $\sqrt{3}$ uit de „Cirkelmeting" bezig hebben gehouden, zijn uitgegaan van de veronderstelling, dat de theorie van de kettingbreuken geheel buiten het bereik van Archimedes moet hebben gelegen, en dat het optreden van benaderende kettingbreuken voor $\sqrt{3}$ bij Archimedes op een andere manier verklaard moet worden. Ik heb elders laten zien, dat deze veronderstellingen niet acceptabel zijn.

Wij kunnen deze algemene kwestie hier laten rusten, want van $\sqrt{2}$ was de kettingsbreukontwikkeling zeer waarschijnlijk reeds lang vóór Archimedes bekend. De zogenaamde zijde- en diagonaalgetallen der Pythagoreërs, waarvan Plato gewaagt (Politeia VIII, 546c: *ἑκατον μὲν ἀριθμῶν ἀπὸ διαμέτρων ῥητῶν πεμπάδος*) zijn volgens Proclus en anderen (zie b.v. E. J. Dijksterhuis, De Elementen van Euclides II, p. 21—23) niets anders dan de getallen

$$\begin{array}{llllll} a = 1 & 2 & 5 & 12 & 29 & \ldots \\ d = 1 & 3 & 7 & 17 & 41 & \ldots, \end{array}$$

die door

$$a_1 = d_1 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + d_{n-1}, \quad d_n = 2a_{n-1} + d_{n-1}$$

gedefinieerd zijn. Ze zijn met de noemer en tellers der benaderende kettingbreuken van $\sqrt{2}$ identiek, en de naam rationale diagonaal van a, die ook wel voor de bijbehorende d wordt gebruikt, toont, dat d/a inderdaad als benadering voor $\sqrt{2}$ werd opgevat. Deze benaderingen ontstaan op een zeer natuurlijke wijze: men tracht de diagonaal ($\sqrt{2}$) door de zijde (1) te meten (gaat één keer — rest $x_1 = \sqrt{2} - 1$); dan meet men de zijde (1) met de rest (x_1) (gaat twee keer — rest x_2); daarna meet men x_1 met x_2 (weer twee keer — rest x_3); en zo gaat men door, waarbij de periodiciteit van het proces, d.w.z. het onbegrensd herhalen van de 2, meetkundig zeer eenvoudig uit een evenredigheid blijkt. De aldus verkregen benaderingen zijn de beste in een zin, die door modern onderzoek is gepreciseerd. Maar ook de Griekse wiskundigen zal, wanneer zij met de zijde- en diagonaalgetallen bekend waren, niet verborgen zijn gebleven, dat de paren a, d oplossingen van de zogenaamde vergelijking van Pell voorstelden,

$$d^2 - 2a^2 = \pm 1,$$

en dit feit moest voldoende zijn, om de benaderingen d/a voor $\sqrt{2}$ een voorrang boven andere approximaties te verlenen. B.v. levert de benaderende kettingbreuk

$$\frac{1393}{985}$$

$\sqrt{2}$, op een fout na, die $< 10^{-6}$ is, terwijl de door de Heer Bruins aan Archimedes toegeschreven waarde

$$\frac{1093}{773}$$

slechts op ongeveer 10^{-3} na nauwkeurig is en wel bij hetzelfde aantal gebruikte cijfers. Zelfs de approximatie

$$\frac{239}{169}$$

zou nog een nauwkeurigheid van 10^{-4} hebben opgeleverd. Het valt mij moeilijk te geloven, dat Archimedes, die in de schattingen van zijn „Cirkelmeting" niet onderdoet voor moderne „epsilontici", in de verhandeling over de blokken en cilinders met zulke slechte benaderingen voor $\sqrt{2}$ genoegen zou hebben genomen.

Ook als men de stelling niet wil aanvaarden, dat Archimedes het een en ander van kettingbreuken afwist (het lijkt weinig waarschijnlijk, daar in de „Cirkelmeting" twee kettingbreuk-reducties voorkomen), dan mag men in geen geval de getuigenis van Eutocius (zie boven) verwaarlozen en evenmin de talloze voorbeelden, die men in spijkerschriftteksten (sinds ongeveer 2000 v. Chr.), in de Ṣulvasutra's der Hindoes (400 v. Chr.) en in andere Hindoe-geschriften, alsmede vooral in de boeken van Heroon en zijn school vindt. Deze voorbeelden wijzen op een oeroude traditie, die Archimedes niet geheel onbekend kan zijn geweest. Kende Archimedes de kettingbreuk-ontwikkeling van $\sqrt{2}$ niet, dan zou hij toch vermoedelijk de zogenaamde formule van Heroon (zie boven) herhaaldelijk hebben toegepast, en hij zou uitgaande van de approximatie 1 voor $\sqrt{2}$ de betere approximaties

$$\frac{3}{2}, \quad \frac{17}{12}, \quad \frac{577}{408}$$

binnen enkele seconden hebben gevonden (allemaal benaderende kettingbreuken van $\sqrt{2}$). Hij had dan als schatting van onderen voor $\sqrt{2}$ de breuk

$$\frac{816}{577}$$

kunnen kiezen, die een nauwkeurigheid van 10^{-5} bezit, dus nog veel beter is dan de door de Heer Bruins aan Archimedes toegeschreven approximatie

$$\frac{1093}{773},$$

die meer cijfers vergt en slechts tot een nauwkeurigheid van 10^{-3} leidt.

Met het oog op deze historische en mathematische feiten dunkt het mij geen benijdenswaardige taak voor de Heer Bruins, de waarde voor $\sqrt{2}$ te verklaren, die hij aan Archimedes toeschrijft als grondslag voor een apocryphe π-berekening. De Heer Bruins schijnt die historische argumenten echter niet gekend of op zijn minst onderschat te hebben, want zijn verklaring voor die waarde van $\sqrt{2}$ luidt als volgt: Archimedes zou zo geredeneerd hebben:

$$\frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{10}{7},$$

$$\frac{110}{78} < \sqrt{2} < \frac{109}{77},$$

$$\frac{1093}{773} < \sqrt{2} < \frac{1094}{773}.\ [1]$$

Er zijn, voorzover mij bekend is, in de gehele literatuur nergens aanwijzingen te vinden, dat de Ouden ooit benaderingen van vierkantswortels verbeterd zouden hebben, door teller en noemer met 10 te vermenigvuldigen en dan de eenheden te variëren. Het is ook onwaarschijnlijk, dat iemand vóór de uitvinding van de tiendelige breuken op zulk een onpractische en tijdrovende wijze te werk zou zijn gegaan, en vooral van Archimedes, die men de grootste wiskundige der oudheid pleegt te noemen, zou ik fraaiere prestaties verwachten. Maar nog is er geen aanleiding, zich te verontrusten: deze methode — zou ik willen beweren — is niet van Archimedes afkomstig, maar van de Heer Bruins, die de door hem aan Archimedes toegeschreven waarde

$$\frac{1093}{773}$$

[1]) Ik heb de tussenberekeningen van de Heer Bruins weggelaten. Toen ik het artikel schreef, vond ik het niet nodig, deze na te rekenen. Toen ik bij het nazien van de proef dit verzuim inhaalde, bleken ze onjuist te zijn, in die zin, dat volgens de beginselen van de Heer Bruins in de tweede regel kon staan

$$\frac{113}{80} < \sqrt{2} < \frac{112}{79},$$

en in de derde regel (indien de tweede, zoals ze bij de Heer Bruins staat, als juist wordt verondersteld):

$$\frac{1097}{776} < \sqrt{2} < \frac{1097}{775}.$$

moest rechtvaardigen, en die stapsgewijs de twee achterste cijfers van het gewenste resultaat wegstreepte, om ze er dan stapsgewijs weer aan te lijmen. Ik bloos even, wanneer ik dit schrijf, want ik denk weer aan benauwde uren van wiskundig proefwerk. Zou ook Archimedes dergelijke methoden hebben toegepast? Uit welk boek moet *hij* dan hebben gespiekt?

Het zou oneerlijk zijn, te verzwijgen, dat de Heer Bruins onder de moderne mathematisch-historische onderzoekers volstrekt niet de enige is, die onbewust het verstandelijke peil der Griekse wiskundigen onderschat. Deze misvatting moge dan bij de Heer Bruins bijzonder sterk opvallen — hij is toch wel de dupe geworden van een algemener verspreide misvatting. Het zou daarom eveneens onrechtvaardig zijn, het positieve in zijn onderzoekingen te verzwijgen. De Heer Bruins heeft immers de zeer scherpzinnige opmerking gemaakt, dat in de bij Heroon overgeleverde schatting naar boven voor π,

$$\frac{197\,888}{62\,351},$$

de teller de vorm $256 \cdot 773$ bezit, terwijl de noemer bij deling door $1866 = 773 + 1093$ het quotient 33 en de rest 773 oplevert, dus

$$\frac{197\,888}{62\,351} = \frac{256}{33t + 34},$$

waar

$$t = \frac{1093}{773}$$

een, slechte, approximatie voor $\sqrt{2}$ voorstelt. Zo iets kan zuiver toeval zijn — diophantische vergelijkingen bezitten nogal vaak mooie oplossingen. Is het geen toeval, dan heeft de Heer Bruins iets belangrijks gevonden — misschien de sleutel voor het probleem, dat Heroon ons heeft opgegeven. Het is jammer, dat één vernuftige opmerking nog niet voldoende was, om dat moeilijke raadsel op te lossen.

Het is eveneens jammer, dat dit positieve element geheel ontbreekt in het tweede deel van de beschouwingen, waarmee de Heer Bruins de Heroon-Archimedische waarden voor π wil rechtvaardigen. Op grond van deze benadering van $\sqrt{2}$ — zegt de Heer Bruins — gelukt het inderdaad, de onderste grens te verkrijgen. Dat is pertinent onjuist, want de getallentheoretische eigenschappen van de teller en noemer van

$$\frac{1093}{773},$$

die bij de rechtvaardiging van de bovenschatting nog een schijn van overtuigingskracht bezaten, gaan in het vervolg geheel ten onder in grove ad hoc geconstrueerde schattingen. Trouwens had voor de schatting naar onderen niet

$$\sqrt{2} > \frac{1093}{773},$$

maar b.v.

$$\sqrt{2} < \frac{1094}{773}$$

moeten worden toegepast.

Herinnert men zich de virtuoze en nauwkeurige manier, waarop Archimedes in zijn „Cirkelmeting" rekent, dan kan men nauwelijks geloven, dat de wiskundige, wiens berekeningen de Heer Bruins meent te herhalen, Archimedes kan zijn geweest. Terwijl Archimedes steeds zeer zorgvuldig schat, staan hier *negen* gelijk-tekens, waar groter of kleiner-tekens hoorden te staan. Door deze gelijk-tekens wordt de indruk gewekt, als of delingen en worteltrekkingen opgaan — als dit werkelijk het geval is, dan moet de auteur, die de voetsporen van Archimedes zoekt, op de goede weg zijn. Maar deze delingen en worteltrekkingen gaan niet op, en de gelijk-tekens hadden door groter- of kleiner-tekens moeten worden vervangen. Ik geef toe, dat dit haast ondoenlijk zou zijn geweest, want dan zou men onmiddellijk hebben gezien, dat zes van die negen schattingen in de verkeerde richting lopen, en dat bij de voorlaatste de fout in de verkeerde richting liefst $\frac{1}{2}$% bedraagt. Rekent men de laatste regel na, dan verkrijgt men

$$\frac{211\,875}{67\,440\frac{3}{16}}$$

i.p.v. de zogenaamd Archimedische waarde

$$\frac{211\,875}{67\,441},$$

die de Heer Bruins met vette letters als resultaat aangeeft, en men constateert met verbazing, dat Archimedes, die een regel hoger nog zo geknoeid had, dat de noemer 300 eenheden te klein is geworden, ineens voor die 3/16 vervaard is en de kans voorbij laat gaan, om van de noemer 67 440 te maken. Ja maar, dat mocht niet. Want als Archimedes zo intelligent te werk was gegaan, dan had hij door 5 kunnen delen en de breuken met die astronomische tellers en noemers kunnen verkleinen, en dan was niet de verkeerde waarde voor de omtrek van de ingeschreven 16-hoek uitgekomen, die de Heer Bruins aan Archimedes toeschrijft.

De Heer Bruins heeft de bij Heroon overgeleverde schatting van π naar onderen inderdaad uit zijn basis-approximatie voor $\sqrt{2}$ verkregen, maar slechts nadat hij deze approximatie door een andere vervangen en bovendien verscheiden rekenfouten begaan heeft. De methode van rectificaties ad hoc is hier met nog minder overtuigingskracht toegepast dan in het eerste gedeelte.

II.

Het voorafgaande stuk is enige jaren geleden door mij geschreven. (Ik heb er slechts enkele stilistische wijzigingen in aangebracht en critische opmerkingen op andere onderdelen van de Openbare Les van de Heer Bruins weggelaten.) Om zeer persoonlijke redenen heb ik mijn stuk toen of later niet gepubliceerd. Ik zou ook in de toekomst niet tot een publicatie zijn overgegaan, indien van de Heer Bruins niet kortgeleden een stuk was verschenen, dat gedeeltelijk als vervolg op zijn Openbare Les kan worden aangemerkt, gedeeltelijk op de uitkomsten van zijn vroeger onderzoek steunt, gedeeltelijk zijn oude redeneringen herhaalt. Zolang alleen het eerste stuk bestond, was er geen groot gevaar te duchten van de verspreiding der door de Heer Bruins geponeerde hypothesen — deze waren immers tijdens de oorlog, in een uitgesproken Nederlands tijdschrift en in het Nederlands gepubliceerd. Na het nieuwe artikel, dat kort geleden in de Proceedings der Kon. Akademie (51 (1948), 332—341) en in het Engels is verschenen, bestaat dit gevaar wel degelijk. Dat ik van een gevaar spreek, is geen overdrijving; iedereen, die in het panopticum der geschiedschrijving der wiskunde thuis is, zal het toegeven. Neem b.v. het verhaaltje van de Egyptische harpenodapten, die een rechte hoek moesten construeren, door eèn touw in de vorm van een driehoek 3 : 4 : 5 te leggen! M. Cantor opperde het aanvankelijk als een hypothese, die op niets anders dan het woord „harpenodapten" steunde, maar die bij elke herhaling overtuigender klonk. De meest verwoede vernietigingspogingen van de meest vooraanstaande historici hebben het moeten afleggen tegen de vitaliteit van dit sprookje, dat op zijn minst om de tien jaar in het een of ander populaire geschrift herrijst en dan als onomstotelijk bewezen feit wordt aangediend. En zelfs verklaringen, die wellicht eens als collegegrap zijn verzonnen, zoals de interpretatie van het Egyptische teken voor 1 000 000 als het portret van de rekenaar met ten hemel geheven handen, uit verbazing of ontsteltenis over het ontzaglijke getal — zelfs zo iets gaat er nog steeds als zoete koek in.

Of nog een derde voorbeeld. Aan vrijwel elk onderzoek, dat tot nu toe over Archimedes' rekenmethoden is verschenen, ligt de impliciete veronderstelling ten grondslag, dat Archimedes een uiterst matig begaafd rekenaar zou zijn geweest. Vrijwel allen, die zich op dit gebied hebben bewogen, zijn aan deze blijkbaar door haar impliciete karakter bijzonder fascinerende suggestie ten offer gevallen — wiskundigen van goede naam en faam niet buitengesloten.

Het is dus misschien niet overbodig, met klem te protesteren, eer het definitief te laat is. Komt dit protest niet, dan is te vrezen, dat de Heer Bruins met dergelijke publicaties school maakt, maar ook dat de Nederlandse geschiedschrijving der wiskunde, die steeds een hoge reputatie genoot, veel van haar crediet verliest.

Ik wend mij thans tot de bespreking van het nieuwe stuk van de Heer Bruins.

III.

Het uitgangspunt is de eigenaardige worteltrekking, die de Heer Bruins in zijn vroeger stuk Archimedes in de schoenen heeft geschoven,

$$\sqrt{r^2 + a^2} = r + \lambda(r + a), \qquad (4)$$

met een λ, die min of meer van het goeddunken van de rekenaar afhing. De Heer Bruins schijnt nu in de Babylonische literatuur (een reeds door Neugebauer opgemerkt) voorbeeld (BM 34568, MKT III, 20) voor een dergelijke worteltrekking te hebben gevonden. Uit het vooropstellen van het zogenaamd Archimedische voorbeeld zou men dit ten minste kunnen opmaken, al wordt het door de Heer Bruins niet uitdrukkelijk beweerd.

De geciteerde spijkerschrift-tekst luidt in de vertaling van de Heer Bruins („omitting the calculations"): The flank 4, the front 3. What is the diagonal? Supposed you don't know it, you will have to add half of the flank to the front . . . or one third of the front to the flank . . . [1]).

[1]) Na inzage van de bron-publicatie van deze tekst (MKT III, 14—17), meende ik te moeten constateren, dat deze interpretatie een belangrijke vooruitgang voorstelt, vergeleken bij de oorspronkelijke door Neugebauer. Achteraf blijkt

Uit het vervolg van de tekst blijkt, dat de schrijver wel degelijk op de hoogte was van de stelling van Pythagoras, en dit voorbeeld staat dan ook geheel geïsoleerd in de Babylonische literatuur, zoals wij die tot nu toe kennen. Desondanks acht ik het als werkhypothese volkomen aanvaardbaar, wanneer de Heer Bruins (in navolging van Neugebauer) uit dit ene voorbeeld concludeert op een meer algemene wortel-extractie van het type

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a + \frac{1}{\lambda} b \qquad (5)$$

(met een nog nader te bepalen λ) als een der Babylonische methoden. De onbekende λ zou dan volgens de Heer Bruins door

$$\lambda - \frac{1}{\lambda} = \frac{2a}{b} \qquad (6)$$

zijn bepaald. (Terloops vragen we de lezer, op het verschil tussen de zogenaamd Babylonische formule (5) en de vooropgestelde zogenaamd Archimedische formule (4) te letten.)

Volgens de Heer Bruins zouden de Babyloniërs het berekenen van vierkantswortels, waarvoor zij goede methoden hadden, hebben teruggebracht op het oplossen van vierkantsvergelijkingen (6); deze laatste (6) zouden dan met behulp van reciprokentafels zijn opgelost. Op zich zelf is het bezigen van reciprokentafels voor vierkantsvergelijkingen volstrekt niet onwaarschijnlijk, al kenden de Babyloniërs de exacte oplossingsformule. Maar als dan in dit verband reciprokentafels moesten worden toegepast, dan lag het toch wel voor de hand, dit al bij het worteltrekken te doen, nl. in de vorm

$$x = \frac{D}{x}.$$

Dat dit voor $D = 2$ inderdaad is geschied, heb ik in een nog niet gepubliceerd onderzoek inderdaad trachten waarschijnlijk te maken.

---

de lezing van de heer Bruins een vrije vertaling in het Engels te zijn van de interpretatie in het Frans, die Thureau—Dangin (TMC p. 57) ondertussen van dezelfde tekst heeft gegeven. Dat dit zo is, blijkt uit een vertaalfout. De Heer Bruins heeft volgens de Franse vertaling i.p.v. het akkadisch origineel van Thureau—Dangin gewerkt; daardoor heeft hij aššum onjuist door „supposed" weergegeven, terwijl de zin is „met het oog op het feit, dat . . ."

Verbeteringen, zoals Thureau—Dangin er in de interpretatie van Neugebauer heeft aangebracht door de lezing van aššum voor het ideogram MU en door de lezing van een u (= of) verderop in de tekst, behoren tot een andere soort dan correcties van drukfouten en errata. Het geestelijke auteursrecht van Thureau—Dangin op dit punt te herstellen, is de bedoeling van deze voetnoot.

Gezien het ontbreken van elk bewijsmateriaal pro of contra zou ik niet durven beweren, dat de Heer Bruins inderdaad ongelijk heeft. Wel meen ik, dat de Heer Bruins ook t.a.v. het gebruik van reciproken-tafels voor het trekken van vierkantswortels aan zeer onwaarschijnlijke hypothesen de voorkeur geeft boven voor de hand liggende. Voor de deugdelijkheid van een onderzoek, dat practisch uit een aaneenschakeling van hypothesen zonder bewijsmateriaal bestaat, is dit niet bevorderlijk. Een op zich zelf aanvaardbare uitgangshypothese wordt op deze wijze veeleer ad absurdum gevoerd dan bewezen.

T.a.v. MKT III, 20 zijn wij ondertussen niet veel wijzer geworden. Er zijn echter veel mogelijkheden, om deze plaats te interpreteren. Ik zelf zou een verband willen leggen met Plimpton 322 (MCT, p. 38), een tafel van Pythagorese getallen, vooral ook omdat in het vervolg van de onderhavige tekst (BM 34568) vraagstuk 11 als de theorie der Pythagorese getallen kan worden geïnterpreteerd. Maar zolang wij deze tafel nog niet ten volle begrijpen, is het nutteloos, hierop nader in te gaan.

Uit de veronderstelling, dat de Babyloniërs (5) en (6) bezigden voor het berekenen van vierkantswortels, trekt de Heer Bruins de conclusie, dat de Babyloniërs de uit (5) en (6) volgende formule

$$a + \frac{b^2}{2a + b} < \sqrt{a^2 + b^2} < a + \frac{b^2}{2a} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

kenden en gebruikten. De schatting naar boven is als Babylonisch eigendom wel bekend (VAT 6598, MKT I, 280); we hebben hier met de zogenaamde formule van Heroon te maken. Voor de stelling van de Heer Bruins is dit echter van geen bewijskracht, want hiervoor zou essentieel zijn dat deze schattingsformule niet op de meest voor de hand liggende, maar op een zeer gezochte weg was verkregen.

En nu de schatting naar beneden in (7)! Leest men het hier volgende niet critisch genoeg, dan zou men kunnen menen, dat de Heer Bruins ook hiervoor een Babylonisch voorbeeld heeft ontdekt. De Heer Bruins bespreekt nl. het probleem (7) uit VAT 6598 (MKT I, 280), dat tot nu toe nog niet bevredigend is verklaard (ook naar mij schijnt, niet door Neugebauer). De schrijver van deze tekst, die in de hieraan voorafgaande som

$$\sqrt{a^2 + b^2} \quad (a = 40', \; b = 10')$$

heeft geschat door

$$a + \frac{b^2}{2a},$$

schat nu dezelfde vierkantswortel door (naar het schijnt)

$$a + 2ab^2.$$

De Heer Bruins maakt nu de buitengewoon aardige opmerking dat de 40′, die hier als factor optreedt, in strijd met de tekst verklaard kan worden als reciproke van $2a + b = 1°30'$, zodat de door de schrijver bedoelde schatting zou moeten luiden

$$a + \frac{2b^2}{2a + b}.$$

Ik heb ook tegen deze verklaring bezwaren, al vind ik haar veel overtuigender dan die van Neugebauer [1]).

Gezien de positieve waarde van deze prestatie is het alleen spijtig, dat de Heer Bruins haar op een geheel misleidende manier aanbiedt, nl. in samenhang mèt en ogenschijnlijk als bewijsmateriaal ten gunste van het vroeger gestelde. De schatting naar beneden uit (7), die door de interpretatie van VAT 6598 als Babylonisch eigendom scheen gestaafd te moeten worden (om dan weer (5) en (6) te staven), heeft in werkelijkheid met de interpretatie van VAT 6598 niets te maken, zoals de Heer Bruins, zij het dan op zeer gewrongen wijze, toegeeft. VAT 6598 in de lezing van de Heer Bruins leidt tot

$$\sqrt{a^2 + b^2} \sim a + \frac{2b^2}{2a + b},$$

dus in 't geheel niet tot een schatting naar beneden, maar tot een schatting naar boven, die slechter is dan die uit (7).

De nu bij de Heer Bruins volgende § 2 heeft met het voorafgaande minder te maken. Voor het grootste gedeelte gaat het hier om bekende dingen. Toch zouden we in gebreke blijven, als we nalieten te vermelden, dat de in deze § door de Heer Bruins gegeven verklaring voor de Heronische approximatie van $\sqrt[3]{100}$

---

[1]) Na inzage van de photocopie (MKT II, plaat 17) zie ik mij genoodzaakt, de opmerking van de Heer Bruins tegen te spreken: „On the rupture however we see the upper half of 6′40″, the area . . .” Het eerste teken kan een der cijfers 4—9 zijn, het tweede is vermoedelijk een 20.

deugdelijk en aanvaardbaar is. Dit is des te opmerkelijker, daar over deze 3e-machtswortel tot nu toe boekdelen vol nonsens bij elkaar zijn geschreven. We mogen echter ook niet verzwijgen, dat (practisch woordelijk) dezelfde verklaring voor de Heronische $\sqrt[3]{100}$ reeds in 1897 is gegeven door A. Kerber (Zeitschr. f. Math. u. Phys. **44** (1899), hist.-litt. Abt., p. 3).

§ 3 daarentegen vereist een uitvoeriger bespreking. Zoals de lezer weet, berustte het vroeger onderzoek van de Heer Bruins op de veronderstelling, dat Archimedes niet in staat was, eenvoudige vierkantswortels te trekken, en dat hij zich daarom van zeer stuntelige methoden bediende. Ondertussen heeft de Heer Bruins de prestaties der Babyloniërs (en van Heroon) leren kennen of tenminste waarderen. Het begin van § 3 schonk mij nu bij de eerste lezing de bevrediging, te constateren, dat de Heer Bruins van mening veranderd was, en dat hij Archimedes thans ook tot prestaties in staat achtte, zoals wij van de Babyloniërs, de Hindoe's en de school van Heroon gewend zijn. Mijn bevrediging was van korte duur. Archimedes beschikt thans weliswaar over formules voor de schatting van vierkantswortels en is dus niet op pure gissingen aangewezen, maar de formule, die hij in de eerste helft van de „Cirkelmeting" bezigt, b.v. bij het berekenen van $\sqrt{349\,450}$, luidt

$$d > \frac{d^2 + a(a+1)}{2a+1} \tag{8}$$

(a is een nulde benadering van d, in casu $a = 591$). Dat is in alle ernst de veronderstelling van de Heer Bruins.

Het ligt voor de hand, en tot nu toe heeft er nooit iemand aan getwijfeld, dat Archimedes zich, overeenkomstig de overlevering van Eutocius, van de formule van Heroon heeft bediend, dus

$$\sqrt{d} \sim \frac{1}{2}\left(a + \frac{d}{a}\right) = a + \frac{d - a^2}{2a}. \tag{9}$$

Weliswaar levert deze formule een schatting naar boven, terwijl hier schattingen naar beneden vereist zijn, maar zodra men volgens deze formule b.v.

$$\sqrt{349\,450} \sim 591 + \frac{119}{2 \cdot 591} > 591\tfrac{1}{8}$$

heeft verkregen, kan men zonder moeite verifiëren, dat inderdaad ook

$$\sqrt{349\,450} > 591\tfrac{1}{8}$$

is; bij de hier vereiste nauwkeurigheid is deze werkwijze voldoende. Met de 100 keer zo grote nauwkeurigheid van de omslachtige formule (8) valt hier toch niets te beginnen.

Wil men echter liever veronderstellen, dat Archimedes met een expliciete schatting ook naar beneden voor vierkantswortels werkte, dan is het beter, niet ad hoc formules uit te vinden en aan Archimedes toe te schrijven. Ik denk hier aan de schatting

$$\sqrt{d} > a + \frac{d - a^2}{2a + 1} \qquad \text{voor } a = [\sqrt{d}], \tag{10}$$

waarmee de Arabieren werkten, en ik wil gaarne toegeven, dat reeds Archimedes deze formule kende en

$$\sqrt{349\,450} > 591 \frac{169}{2 \cdot 591 + 1}$$

rekende. Wat ik echter niet kan toegeven, is dat Archimedes die dwaze becijferingen zou hebben uitgevoerd, die voor formule (8) vereist zijn. (8) en (10) zijn trouwens formeel identiek, wat de Heer Bruins over 't hoofd schijnt te hebben gezien. Practisch is er desondanks een hemelsbreed verschil tussen (8) en (10) — anders dan bij de twee aequivalente formuleringen voor (9).

Verder lezend in het stuk van de Heer Bruins komen wij tot de plaats in de „Cirkelmeting", waar Archimedes een ogenschijnlijk geheel ongemotiveerde noemer 11 invoert. Alle auteurs, die zich met Archimedes' berekeningen bezig hebben gehouden, hebben dit verklaard als een kunstgreep, waardoor Archimedes de mogelijkheid schept, een bij de volgende stap optredende breuk te verkleinen. Sommigen hebben naar aanleiding van deze plaats hun bewondering voor Archimedes niet onder stoelen en banken gestoken. Dat komt mij echter overdreven voor, want voor dergelijke kunstgrepen zijn er meer voorbeelden in de antieke literatuur (b.v. schijnt de bekende breuk van Eratosthenes, 11/83, voor de dubbele helling van de ecliptica op iets dergelijks te berusten): pas de moderne, met gewone breuken minder vertrouwde, rekenaar kan hierin iets bijzonders zien.

De Heer Bruins verklaart de noemer 11 inderdaad op de gebruikelijke wijze. Alleen kan ik hem niet volgen in de veronderstelling, dat Archimedes $\sqrt{3\,380\,928}$ van beneden zou hebben benaderd; van boven dus met 1839 te beginnen, ligt veel meer voor de hand, en ik zie niet in, waarom men, zolang er geen andere bewijsmiddelen zijn, aan de onwaarschijnlijkere verklaring de voorkeur moet geven. Maar dit is hier een ondergeschikte kwestie.

Terwijl de Heer Bruins voor de noemer 11 de juiste verklaring heeft gevonden, is elk gevoel voor de geest van het breukrekenen weer geheel afwezig in de verklaring voor de breuk

$$3\tfrac{10}{71} \quad (< \pi),$$

die in de „Cirkelmeting" uit

$$3\frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} \tag{11}$$

door een vereenvoudiging ontstaat. De Heer Bruins meent: Archimedes had reeds $3\frac{1}{7}$ als schatting naar boven voor π verkregen; hij ging nu teller en noemer met 10 vermenigvuldigen en probeerde het dan met de gewijzigde noemer 71, om tot een schatting naar beneden te komen; daarna verifieerde hij, dat het inderdaad klopte.

Deze methode van schattingen te verbeteren of te wijzigen, door teller en noemer met 10 te vermenigvuldigen en dan te corrigeren, is echter een pure uitvinding van de Heer Bruins, die hij reeds in zijn Openbare Les Archimedes in de schoenen schoof, om de (door hem geponeerde) Archimedische schatting voor $\sqrt{2}$ te rechtvaardigen. Ik onderstreep nog eens, dat er in de gehele antieke literatuur geen enkele aanwijzing te vinden is voor een dergelijke methode, die met de geest van het breukrekenen spot en alles elimineert, waardoor het breukrekenen uitmunt boven het tientallig rekenen. Daarentegen ligt het volkomen in de lijn van het antieke breukrekenen, te veronderstellen, dat de breuk $3\frac{10}{71}$ uit (11) is verkregen als benaderende kettingbreuk. Voor de door de Heer Bruins aan Archimedes toegeschreven methode bestaan in de gehele oudheid geen andere voorbeelden dan die, die door de Heer Bruins ad hoc bedacht zijn, terwijl wij verschillende kettingbreuk-approximaties bij antieke schrijvers vinden (behalve de reeds aangehaalde bij Archimedes nog bijzonder mooie bij diens voorganger Aristarchos).

In het begin van § 3 mocht ik de hoop koesteren, dat de Heer Bruins, Archimedes thans in staat achtte, vierkantswortels te trekken. In § 4 wordt deze illusie de bodem ingeslagen. De dwaze vierkantsworteltrekking

$$\sqrt{R^2 + A_8^2} = R + \tfrac{1}{16}(R + A_8)$$

uit de Openbare Les wordt zonder blikken of blozen herhaald. Toen moest Archimedes de (foutieve) factor 1/16 zomaar uit zijn mouw schudden. Na de lezing van § 1 had ik tenminste verwacht, dat Archimedes nu aan die factor was gekomen volgens de intelligente methoden, die de Heer Bruins in een analoge situatie aan de Babyloniërs toeschrijft. Maar neen, om die factor 1/16 te verkrijgen, moest Archimedes een lange berekening uitvoeren, die aan de treurigste bladzijden van HBS-kladschriften doet denken. Even als in zijn Openbare Les vermijdt de Heer Bruins, de vinger te leggen op de laatste stap, een grove fout, die de gehele berekening overbodig maakt. „A rough approximation", zegt de Heer Bruins en laat het aan de lezer over, uit te zoeken, dat het een „rough approximation" in de verkeerde richting was geweest. «17 was „beter"» en «een iets te scherpe schatting van de zestienhoek», zei de Heer Bruins toen. Het was iets eerlijker. Maar op wetenschappelijk onderzoek zou ik het predicaat „eerlijk" liever in de stellende dan in de vergelijkende of overtreffende trap toepassen, evenals ik gewend ben, het juiste van het onjuiste niet door het bijvoeglijk naamwoord „beter", maar door „goed" te onderscheiden. Zonder twijfel meent de Heer Bruins, met de door hem geprefereerde formuleringen aan de eisen van zijn wetenschappelijk geweten voldaan te hebben — ik ben er verre van, hem kwade trouw te verwijten —, maar voor mijn gevoel was hier geen andere inkleding mogelijk dan ruiterlijk te bekennen: „Ik veronderstel op deze plaats, dat Archimedes een grove fout heeft begaan." Elke zwakkere formulering is alleen maar geschikt, de minder critische lezer te misleiden en bij de critische lezer de indruk te wekken, dat de misleiding opzet was. De kans is groot, dat een lezer onderzoekingen verwerpt, wanneer de schrijver toegeeft, dat zij berusten op de veronderstelling van grove rekenfouten bij Archimedes, die tot en met Heroon niet bemerkt zouden zijn. Maar als de schrijver deze plicht verzaakt, dan bestaat er aan de andere kant ook een kleine kans, dat een enkele lezer zulk een onderzoek uitpluist en ernstiger conclusies trekt.

De Archimedes uit de Openbare Les, die de factor 1/16 uit zijn mouw schudt (of liever uit de plooien van zijn toga) is mij nog iets sympathieker dan die uit het nieuwe stuk van de Heer Bruins, die aan deze factor door een geheel ongemotiveerde, dwaze en foutieve berekening komt. Met de werkelijke Archimedes hebben beiden bitter weinig te maken.

Over de rest van § 4 kan ik kort zijn. De methode, approximaties door aanplakken van cijfers in teller en noemer te verbeteren, heb ik herhaaldelijk als ongrieks afgekeurd. De verklaring, die de Heer Bruins in zijn Openbare Les heeft gegeven voor de foutieve *boven*schatting van π, die Heroon citeert, schijnt hij nu te laten vallen. „Schijnt", moet ik helaas zeggen, want van een ruiterlijke bekentenis verwacht ik andere accenten. «The „lower bound" given by Heron is also an upper bound. Therefore we cannot give a „correct" deduction of this one.» Aldus de Heer Bruins, en hij speelt met een dubbele betekenis van „correct", zoals hij in zijn Openbare Les speelde met de aanhalingstekens in de zin «17 was „beter"».

IV.

Er valt nog een woord te zeggen over de methode in 't algemeen — ik bedoel de methode, historisch-mathematische feiten door mathematische redeneringen te reconstrueren. Zij is zeker onmisbaar, en zij kan vruchtbaar zijn, als zij met de nodige kiesheid wordt toegepast. Hoe moeilijk zij in de praktijk is, zelfs wanneer men over een overvloed van gegevens beschikt, leert het voorbeeld van $\sqrt[3]{100}$ bij Heroon; ofschoon alle stappen van de berekening zorgvuldig zijn overgeleverd, zijn er door een tiental, gedeeltelijk zeer bekwame, onderzoekers de meest onzinnige verklaringen gegeven. Waar het materiaal schaars is, zoals bij de problemen, die de Heer Bruins heeft bestudeerd, moeten zelfs de vernuftigste en best gefundeerde reconstructies met zeer strenge critiek worden bejegend. Dat klemt te meer, wanneer een onderzoek practisch uit niets anders bestaat dan uit een opeenstapeling van hypothesen, en wanneer de auteur het nodige historische overzicht mist, om ook het materiaal te kennen, dat net aan de rand van het door hem behandelde probleem ligt. Het mathematisch-historisch onderzoek is in dit opzicht vaak tekort geschoten, en de Heer Bruins is in deze slechts de voortzetter en het slachtoffer van een traditie, waarvan hij dan weliswaar ook de kroon spant.

Wiskundig-historische kwesties kunnen soms niet zonder tussenkomst van de wiskunde worden beantwoord. Het wiskundig werk kan dan wel ook zeer omvangrijk worden, zoals in Neugebauers onderzoek van het Babylonische sexagesimale stelsel of van de Babylonische maantheorie of in v. d. Waerdens onderzoek van de Egyptische $2/n$-tafel. Maar in al deze gevallen was het wiskundige apparaat evenredig aan de hoeveelheid beschikbaar feitenmateriaal. Daarentegen is mij geen voorbeeld bekend van *vruchtbaar* historisch-mathematisch onderzoek, beoefend met vrijwel uitsluitend mathematische methoden op een feitenmateriaal, dat practisch nihil is. Ik beroep mij, als ik dit zeg, minder op de historisch-mathematische literatuur, dan wel op eigen ervaringen. Iemand, die aan het rekenen slaat, is niet meer te temmen.

Hij is vatbaar voor alle geestesgesteldheden, van vernauwing van het bewustzijn tot verstandsverbijstering toe. De bekroning van het reusachtige werk, dat hij in deze toestand verzet, zal over het algemeen bestaan in die heldere ogenblikken, waarin hij inziet, dat heel het werk vergeefs is geweest. Wat voor de buitenstaander meetelt, is helaas niet het werk, dat verzet moest worden, maar de bekwaamheid, deze laatste bittere conclusie te kunnen trekken.

Ik heb herhaaldelijk laten uitkomen, dat ik een groot deel der gewraakte tekortkomingen niet de Heer Bruins persoonlijk wil aanwrijven. Hierdoor werd de toon van mijn critiek dus niet bepaald. Mijn ergernis werd veroorzaakt door hetgeen ergerlijk is in de methoden van de Heer Bruins. Niet door de wonden, waar ik mijn vinger op legde, maar door de zalf van dubbelzinnige uitspraken en aanhalingstekens, waarmee de te zachte heelmeester deze wonden aan het gezicht onttrok.

ROND EEN OUDE PSYCHOLOGISCHE STRIJDVRAAG

door

Dr KAREL CUYPERS.

Cardinaal- of ordinaalopvatting van het natuurlijk getal?

Niets schijnt zo vanzelfsprekend als het aanleren van de bewerkingen door middel van oefeningen met *hoeveelheden*: bv. het optellen van $3 + 4$ als $(1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1)$, waarbij elk getal een *meervoudigheid* is, samengesteld uit zelfstandige *eenheden*, die wij aanschouwelijk kunnen voorstellen door stukken krijt, streepjes of iets dergelijks. Dit is de algemeen gangbare, aloude psychologische verklaring van het begrip „natuurlijk getal", de cardinaalvoorstelling van het tellen. Couturat noemde ze de *rationale* opvatting [1]): „le nombre est l'unité d'une pluralité d'unités; l'idée d'unité est l'idée rationelle par excellence. Elle est à la fois l'élément qui est à la base de toutes les synthèses numériques et la forme de chaque synthèse numérique". De cardinaalopvatting maakt van het getal ten slotte een geheel, een product van synthetisch inzicht, een object van intuïtieve denkakt, een statisch „zijnde" denkbaarheid.

Doch in de moderne psychologie komt een gans ander concept naar voren, dat een steeds groeiende betekenis krijgt. Het is de veelzijdig geniale Helmholtz, fysioloog-fysicus-psycholoog, die hier op het gebied van de zuivere wiskunde de weg wees. Zijn helder inzicht van het ruimtebegrip heeft de ontwikkeling der meetkunde sterk geholpen [2]). Ook over het getal had hij zijn eigen opvatting, die vinnige bestrijders vond, zoals trouwens ook zijn meetkundige opvattingen. Volgens Helmholtz is het natuurlijk getal minder „aantal" dan „rangorde", het „ontstaat", het „wordt", het is een dynamisch verschijnsel. Het groeit uit de correspondentie met de *telrij*, die verondersteld wordt à priori gegeven te zijn, als

---

[1]) Couturat, De l'infini mathématique, p. 361.

[2]) cf. E. W. Beth, Inleiding tot de wijsbegeerte der wiskunde, Antwerpen—Nijmegen 1940; p. 27; 46.

E. W. Beth, De wijsbegeerte der wiskunde van Parmenides tot Bolzano Antwerpen—Nijmegen 1944; p. 146.

H. J. E. Beth, Inleiding tot de niet-Euclidische meetkunde op historische grondslag, Groningen 1929; p. 121.

het zuivere, eenvoudige verschijnsel van de ritmische verdeling van de tijd.

In de moderne wiskunde speelt deze één-éénduidige verwantschap van hoeveelheid tot telrij, of door (vaak stilzwijgende) bemiddeling der telrij, een opmerkelijke rol. Door haar koppelt men immers met elk object van een reeks één en slechts één object in een andere reeks, welke uit een volkomen verschillend universum kan getrokken worden. Deze „correspondance bi-univoque", deze „one to one correspondence", dringt zich op als hoofdprocédé, vooral nadat Cantor het sinds Aristoteles zo gevreesde *Actuele* oneindige weder invoerde, juist op het ogenblik dat het volledig verslagen scheen in de wiskundige analyse. De infinitesimaalrekening had immers, na harde strijd, het steeds groeiende, *Potentieel* „ontstaande", niet „zijnde" oneindige als enig mogelijke aanvaard [1]). De eeuwenoude tegenstelling tussen *zijn* en *worden* was hiermede evenwel niet uit de weg geruimd. De leer der verzamelingen met haar subtiele vraagstukken en haar onopgeloste paradoksen, bewees dat Helmholtz een zwakke plek in het denken had gevonden en het bleek ten slotte de oude wonde van de Eleaten te zijn.

De strijd is op dit ogenblik zeker niet beslecht. En hij geschiedt zo ver van het terrein der schoolwiskunde, dat men het vrij natuurlijk zal vinden hiervan niets in de pedagogische zielkunde te vernemen. Wat we wel eens horen, is een onduidelijk geluid van het verre strijdgewoel.

Het probleem hangt in de lucht, men kan er zelfs sporen van ontdekken in de methodiek van het lager onderwijs.

Zo beginnen vele moderne methoden van aanvankelijk rekenen thans met de *Telrij* als taalverschijnsel; bij de allereerste stappen in de rekenkunde wordt de ritmische tijdverdeling als grondslag genomen. In de methode Schneider [2]) wordt deze ritmiek nog beklemtoond door het nadruk leggen op het eindpunt van het kwadraatbeeld, op de 4 en de 8. Daar deze methode bewezen heeft practische resultaten te brengen, bezorgt ze door haar scanderen

---

[1]) F. Kaufmann, Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung, Leipzig—Wien 1930.

[2]) Dr. W. Schneider, „Het aanvankelijk rekenonderwijs op gezonde gronden. Handleiding voor de eerste twintig getalhoeveelheden." Methode: Langs kunnen naar kennen. De Sikkel, Antwerpen.

Het feit dat sprake is van getal*hoeveelheden* toont duidelijk aan, dat de schrijver geen argumenten wil leveren voor het ordinaalconcept. Zijn getuigenis lijkt me daarom nog van groter waarde.

een argument voor het ordinaalconcept, wat des te meer waarde heeft, daar het blijkbaar niet haar bedoeling was zich in de strijdvraag te mengen.

In het middelbaar onderwijs houdt men zich meer bij de oude methode, het bijeenvoegen van *hoeveelheden.* Men werkt gewoonlijk van de eerste lessen af met het begrip *éénheid.*

Persoonlijk heb ik tijdens ongeveer zeventien jaren proeven genomen met het steunen der volledige theoretische rekenkunde op de telrij zonder het begrip éénheid. De uitslagen waren in elk opzicht zo bevredigend als met de cardinaalopvatting. Het gevaar van een nominalistische structuur is evenwel, dat de zeer zwakke leerlingen geneigd zijn het „spel" der formule als gewonnen te beschouwen door het van buiten leren zonder inzicht van de redeneerketen, wat bij haperingen natuurlijk jammerlijke mislukkingen meebrengt.

Mijn bedoeling is geenszins streng dogmatisch vast te houden aan het ordinaalconcept op pedagogisch gebied. Ik wil er alleen op wijzen, dat dit concept mij, als psychologisch en filosofisch vertrekpunt, best gefundeerd lijkt. Pedagogisch brengt het star vasthouden aan één enkele richting gewoonlijk geen voordeel en verkiest men beter een zekere soepelheid. Het verstandig mengen van cardinaal- en ordinaalopvatting blijkt soms nuttiger dan het scherp logisch doordenken in één enkele richting. Zo bezorgt o.a. de cardinaalopvatting een zeer aanschouwelijke schikking voor het bewijs van commutatieve en associatieve eigenschappen van de vermenigvuldiging. Men kan trouwens door één-éénduidige verwantschap zonder moeite ordinaal- omzetten in cardinaalconcept.

Laat ons dus aannemen, dat de mens a priori de ritmische tijdreeks 1, 2, 3, 4, . . . in infinitum bezit. Deze reeks is een zuiver conventioneel verschijnsel, een *taalverschijnsel* van het ogenblik, dat we de deelpunten van de tijd benoemen om ze te onderscheiden. Onze rekenkunde begint dus met de postulaten:

Gegeven de rij der natuurlijke getallen:

een, twee, drie, vier, . . .

Getallen [1]) zijn willekeurige, doch eens voor goed gekozen woorden en tekens [2]) *met een vaste volgorde.*

Gevolg: Op elk getal volgt een ander; de rij der getallen is onbegrensd; één is het eerste getal; er bestaat geen grootste getal.

---

[1]) Getal staat hier en in het volgende steeds voor „natuurlijk getal".

[2]) Ze verschillen volgens de talen en beschavingen. Zie: Helmholtz „Zahlen und Messen erkenntnisstheoretisch betrachtet".

Tellen is de voorwerpen doen overeenkomen met de rij der getallen aldus:

telrij:	1	2	3	4	5	6
voorwerpen:	*	*	*	*	*	*

Het laatst genoemde of geschreven „getal" geeft het „aantal" *.
Het is dus onnodig het begrip éénheid in te voeren [1])
Van den beginne af wordt ook de betrekking van meten tot tellen vastgelegd, en voeren we de getallenas in:

1 2 3 4 5 6 in inf.

dit is de grafische voorstelling van de oneindige tijdreeks, omgezet in een stelsel van gelijke afstanden.

Het begrip „groter" wordt aldus „volgen in de rij of op de as". Vele lastige definities worden aldus vermeden en geen beroep moet gedaan worden op abstraherende eigenschappen. De leerlingen begrijpen zonder meer dat niet de woorden een, twee, drie, vier, . . . van belang zijn, noch de tekens 1, 2, 3, 4, . . . wel de orde van opeenvolging waarin zij voorkomen. Het kan immers net zo goed un, deux, trois, . . . of one, two, three, of eins, zwei, drei zijn en we kunnen ze met Romeinse of met Griekse letters schrijven zonder dat hun betekenis verandert; het kunnen allerlei conventionele klanken of krabbels worden, bv. de vijf als vier verticale streepjes, die doorgehaald worden, zoals bij het „turven". Alle voorstellingen voldoen op voorwaarde, dat de *vaste volgorde* van de telrij er is. Deze orde is zuiver conventioneel zoals bv. die van de letters in het alfabet. De zogenaamd „natuurlijke orde" bestaat slechts door historische traditie.

Le Roy en Vincent [2]) verwarren opzettelijk *Cijfers* met *Getallen*. Volgens deze doorgedreven nominalistische opvatting, is het zelfs niet meer nodig de één-éénduidige verwantschap van

---

[1]) Couturat, „L'infini mathématique", p. 328, „Nulle part dans la théorie du nombre pur, Helmholtz n'emploie le mot, ni invoque l'idée d'unité".

[2]) Le Roy et Vincent, „Sur l'idée de nombre" (Revue de métaphysique 1896, p. 745; cf. Brunschvicg, „Les étapes de la philosophie mathématique", Paris 1929, p. 365.) „Nous créons une infinité de petits dessins que nous appelons des signes, bien qu'ils ne désignent rien, se succédant régulièrement d'après une loi de formation que nous allons indiquer. Les premiers sont donnés individuellement . . . Ils sont d'ailleurs supposés rangés. (De gewone schrijfwijze wordt uitgelegd). Il set clair qu'on peut prolonger indéfiniment ce jeu, puisque rien n'est capable d'imposer un arrêt à l'esprit dans une opération purement logique où n'intervient pas la considération de l'extérieur. (Let op de zuiver nominalistische strekking). Chaque signe de la suite créée est un symbole".

cardinaalgetal met ordinaalgetal aan te wijzen [1]): het ordinaalgetal is het énig werkelijke, het is het kind van de telrij, van het „aangeboren" verdelen van de tijd, zoals bij het tikkende uurwerk.

Men heeft Helmholtz verweten de rekenkunde te herleiden tot een simpel spel van de correspondentie. Hij zou haar aldus alle aanspraken op de naam van wetenschap ontzeggen, vermits ze in niets meer tot het zoeken naar de waarheid zou bijdragen [2]).

Immers Helmholtz dacht moedig verder in zijn lijn! Ook de bewerkingen krijgen een nominalistische betekenis [3]). Ze worden gedegradeerd tot aanvaarde combinaties, steunend op willekeurige definities en conventionele regels. Brunschvicg noemt zulks niets minder dan het schandaal van het einde der XIXe eeuw [4]).

Dit alles hangt nauw samen met de opvatting dat de wiskunde slechts een uitdrukking, een vereenvoudigde uitdrukking, van de waarheid is. Men kan haar om deze reden al dan niet de titel van *wetenschap* weigeren, dat schaadt haar werking geenszins. Met de statistiek gebeurt trouwens hetzelfde, en die verheugt zich in een voortdurende groei en invloed.

De wiskunde is volgens deze opvatting een *taal*, die werkelijke en ingebeelde werelden op korte, bondige en volledige wijze helder voorstelt, zodat men er gemakkelijk mee kan werken [5]). Haar bewerkingen vormen een stelsel regels, zoals bij de rechtspleging of bij het schaakspel: vrij gekozen in oorsprong, doch eens in voege, dan onverbiddelijk met kracht van wet. Het is een vorm van

---

[1]) Brunschvicg, l.c.p. 367. „Il ne s'agit pas non plus de retrouver après coup le passage de la conception ordinale à une conception cardinale, déjà instituée par ailleurs et d'établir ainsi une relation qui serait susceptible de vérification. Le but de Helmholtz est, au contraire, de se dispenser de la notion proprement dite de nombre cardinal".

[2]) Brunschvicg l.c., p. 367. „La correspondance entre la série dénombrante et la collection à dénombrer est introduite comme une règle de jeu, qui échappe par hypothèse, à toute objection, puisque, par hypothèse, elle est absolument arbitraire".

[3]) Le Roy et Vincent l.c., „L'arithmétique n'est pas autre chose que le récit des opérations que l'esprit peut s'amuser à faire sur ces symboles".

[4]) Brunschvicg l.c., p. 367, in verband gebracht met wat hij noemt: „le courant pragmatique . . . au lendemain du Génie du christianisme, à l'aurore du romantisme" met uitlatingen van Poinsot en een curieus artikel van Taine in de Revue des deux mondes t. XCIX, p. 660, waaruit we overnemen: „Chaque doctrine naissante se crut obligée d'établir qu'elle venait à point, que les circonstances la réclamaient, que les hommes la désiraient, qu'elle venait sauver le genre humain . . ."

[5]) K. Cuypers, „Het Aankweeken van het Wiskundig Denken", Antwerpen 1940, p. 16.

Kantiaans apriorisme, dat aan de logica een superieure taak reserveert door een strenge deductieve gang, die ook Einstein zo lief is[1]). De wetenschap van Newton en de wijsbegeerte van Kant liepen terug naar de oorsprong. De nominalistische rekenkunde schrijdt voort volgens de wetenschap van Descartes of volgens de wijsbegeerte van Leibniz[2]). Dit is als het ware een herinnering aan de fantastische droom uit de tijden der alchemie, der astrologie en der zwarte kunst: een allesbeheersende superwetenschap, een denkmachine, die de objectieve Waarheid moet leveren. Voor de theorie der bewerkingen schijnt mij dat ideaal wezenlijk bereikbaar, zoals ik zal trachten aan te tonen in een volgend artikel.

[1]) H. Gordon Garbedian, „Albert Einstein", Amsterdam 1948

[2]) Brunschvicg l.c., p. 396.

ORDINAALCONCEPT EN NOMINALISME IN DE THEORETISCHE REKENKUNDE

door

Dr KAREL CUYPERS.

Bij het opsporen van de psychologische basis voor het getalbegrip treden, zoals wij zagen [1]), twee mogelijke richtingen naar voren: *cardinaalopvatting* en de *ordinaalopvatting*. Feitelijk gaat het hier om twee wezenlijkheden, die met de rekenkunde op het eerste gezicht weinig verband houden: de *ruimte* en de *tijd*. De cardinaalopvatting ziet het getal als een *gelijktijdige* aanschouwing van verschillende hoeveelheden *nevens* elkaar [2]) *in de ruimte*. De ordinaalopvatting steunt op het *na elkaar* waarnemen van deze hoeveelheden. De eerste opvatting is de thans vrij algemeen gangbare, de tweede vindt men bij Helmholtz [3]) en ook bij Kant en bij Hamilton. In enkele Engelse en Franse handleidingen van rekenkunde vindt men ze, niet altijd consequent, toegepast.

Er bestaat nog wel een derde opvatting, die deze beide wil overtreffen door het getalbegrip, als iets zéér speciaals, boven ruimte en boven tijd te verheffen [4]). Deze eredienst van het getal [5]) komt hier niet ter sprake.

Het opbouwen van de rekenkunde kan volgens de beide richtingen dus zowel in de ruimte, als in de tijd, logisch en aanschouwelijk worden uitgevoerd, al wint de logische ontwikkeling voortdurend veld [6]). Er is zelfs, met succes, beproefd een theorie zonder tekst, uitsluitend met symbolische tekens, op te stellen [7]). De oude

---

[1]) Euclides.

[2]) Felix Klein, Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus I, Berlin 1933, p. II.

[3]) Zie voornoemd artikel sub (1).

[4]) cf. F. Klein l.c., p. 12: „„Ich glaube, dass diese Auffassung gut gekennzeichnet wird, wenn man mit Minkowski . . . auf die Zahlen das Faustzitat anwendet:

„Göttinnen thronen hehr in Einsamkeit
Um sie kein Ort, noch weniger eine Zeit." "

[5]) Kronecker's befaamde: „Die ganzen Zahlen sind von Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk".

[6]) F. Klein l.c., p. 13: „Die Grenze zwischen Anschauung und Logik wird zugunsten der letzteren verschoben".

[7]) Reeds in 1889 verscheen Peano's: „Arithmetices principia nova methodo exposita".

school steunde alleen op aanschouwing. Kant zag bv. het bewijs van de commutatieve eigenschap bij een som van twee getallen reeds voldoende geleverd door het aanschouwen van de figuur

1 1 1
1 1 1

waaruit blijkt, dat

$$3 \times 2 = 2 \times 3$$

aldus de methode van de oude Hindoes volgend, die bij een aanschouwelijke schikking slechts „Kijk!" schreven.

H. Poincaré, die de algemene inductie als énig betrouwbare bewijsvoering beschouwde [1]), zag ook graag uit de superieure wet van n op $n + 1$, gekoppeld aan de ervaring, de grondslagen der rekenkunde afgeleid. Doch het schijnt ons, hoe aanschouwelijk bedoeld ook, onmogelijk zulks bruikbaar voor het onderwijs uit te werken.

Anderzijds geeft de gewone behandeling met eenheden in de cardinaalvoorstelling, de traditionele les in de theoretische rekenkunde, die slechts door weinige leraars op een interessante wijze gegeven wordt en die gewoonlijk voor haar saaiheid gevreesd wordt, zowel vóór als achter het katheder. Ze leert immers niets nieuws en schijnt alleen te dienen om gemakkelijke dingen moeilijk te praten, zonder hierbij *inzicht* te verschaffen.

De ordinaalopvatting biedt daarentegen een charme van originaliteit. Het getal is hier geen reëel ding, maar slechts een naam, een rangorde. De bewerkingen worden gedefinieerd als zuiver conventionele werkwijzen, die slechts dienen om het tellen te vergemakkelijken. Alle bewerkingen zijn te herleiden tot tellen [2]). De logische draad door de ganse theoretische rekenkunde heen wordt aldus nergens gebroken. Hieruit volgt een klare wijze van afleiden en een buitengewone besparing van energie. Door deze opvatting worden vermeden alle logge theoretische uitweidingen over eenheid, maatgetal, verhouding, verdeling, breuk en dergelijke [3]). Al deze dorre dingen worden vaak reeds aan een jeugd van twaalf jaar opgedrongen. Het zijn voor hen onbelangrijke

[1]) F. Klein l.c., p. 12: „Dieser Satz, dessen Ursprung ich für recht intuitiv halte, hilft in der Tat gerade über die Schranke hinweg, an der die sinnliche Anschauung versacht".

[2]) Mijn bijdrage „Over een dynamisch-intuïtieve ontwikkeling van de theoretische rekenkunde", Euclides, p. 310.

[3]) Mijn bijdrage „Over een dynamisch-intuïtieve ontwikkeling van de theoretische rekenkunde", Euclides, p. 314.

subtiliteiten, die met tegenzin van buiten worden geleerd. Anderzijds geeft het ordinaalconcept een vaste lijn zonder overtolligheden. En kinderen hebben wel smaak in korte, duidelijke, logische ontwikkelingen (als men maar niet al te streng wordt, en zich aan de grote lijn houdt). Men moet de redeneerketen sierlijk doen uitkomen langs een van bijzaken gezuiverde denkweg.

Tellen is de bron van alle rekenen [1]). En tellen is volgens de ordinaalopvatting een vertaling van de ritmische verdeling van de tijd. Tellen is taal. De verwantschap van de woorden is niet toevallig. Ze bestaat in alle talen. Denk aan to tell, zahlen, erzählen, vertellen, getal, taal, compter en conter (in het Oudfrans zonder onderscheid).

Een vorm van tellen is optellen: de optelling is de eerste en feitelijk de enige bewerking, en ze is ten slotte slechts een tellen in de rij. De verwantschap met de taal moet het mogelijk maken de specifiek onmathematische geesten open te houden voor de logische ontwikkeling van de theorie. De psychologisch algemene behandeling moet toegankelijk zijn voor elke aanleg.

Wij definiëren het *plusteken*:

$$a + b \text{ is het } b^{\text{de}} \text{ getal na } a.$$

Dus:

$3 + 4$ is niet meer $(1 + 1 + 1) + (1 + 1 + 1 + 1)$ als *definitie*, misschien wel als *gevolg*.

Dit brengt dus geen verdeling in eenheden en bijgevolg geen moeilijkheden bij het invoeren der *breuken*.

Wij zeggen immers:

$3 + 4$ is het vierde getal na drie in de telrij, aldus:

telrij:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	. . . .
				eerste getal na 3	tweede getal na 3	derde getal na 3	vierde getal na 3					

Het *begrip groter* wordt dan in formule

$$a > b \text{ als } a = b + m$$

[1]) Mijn bijdrage „Rond een oude psychologische strijdvraag: Cardinaal- of Ordinaalopvatting van het natuurlijk getal?" Euclides, p. 35.

hier $7 > 3$ omdat men, na 3, nog met vier getallen moet doortellen om 7 te bereiken.

De *commutatieve eigenschap* wordt met deze opvatting als volgt bewezen (bv. $3 + 4 = 4 + 3$).

$3 + 4$ is het vierde getal na 3.

Tel dus tot 3, daarna tot 4, aldus:

1 2 3 . 1 2 3 4 We noemen dit *Rij* 1.

Doch tellen in rechte of in omgekeerde orde geeft door ééneénduidige verwantschap met de telrij hetzelfde eindpunt 4. Aldus:

1 2 3 4
4 3 2 1

Met de cardinaalopvatting zouden we zeggen: het aantal hoeveelheden verandert niet, hoe men ze ook telt. Indien de leerlingen zulks beter begrijpen, dan kan men het ook zo zeggen. Trouwens men kan spoedig een brug slaan van het ene concept naar het andere. Niets is in de pedagogiek zo verderfelijk als een doctrinair vasthouden aan dogma's. Onderwijzen is aanpassen, improviseren, uitvinden. Het is niet hetzelfde als een boek schrijven. Een goed leraar kan men niet vervangen door het voorlezen van een goede tekst of door een uitstekende gramofoonplaat.

Bij de commutatieve eigenschap hadden we dus:

1 2 3 4

te vervangen door

4 3 2 1

Tel dus de Rij 1 helemaal in omgekeerde richting

4 3 2 1 . 3 2 1 We noemen dit *Rij* 2.

Ze geeft hetzelfde eindresultaat (de laatste 1 correspondeert met dezelfde 7 van de telrij. Controleer:

Telrij:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Rij 1:	1	2	3 .	1	2	3	4			
Rij 2:	4	3	2	1 .	3	2	1			

De gedeeltelijke omkering geeft ook geen verandering, en

1 2 3 4 . 1 2 3

geeft ook de zeven van de telrij, die door de laatste schikking duidelijk het derde getal na vier is, dus

$$7 = 4 + 3$$

waar we vroeger vonden $7 = 3 + 4$ en $3 + 4 = 4 + 3$.

De *associatieve eigenschap* vinden we eveneens gemakkelijk

$$3 + 4 + 5 = (3 + 4) + 5 = 3 + (4 + 5)$$

door eenvoudig voort te tellen, het vierde getal na drie, of het vijfde na vier, telkens te verifiëren met de uitkomst in de telrij.

Bovenstaande bewijsvoeringen kunnen aanschouwelijk gegeven worden door voorwerpen te doen corresponderen met een geschreven telrij, aldus de voordelen van de cardinaalopvatting gebruikend en tevens door het aanwenden van een correspondentie, een der belangrijkste procédé's invoerend van de moderne wiskunde. Men kan in lagere klassen zelfs kartonnen schijfjes gebruiken, waarop cijfers staan. Het gehele gebeuren is belangwekkender dan het samenbundelen van eenheden als zuiver verifiëren. Er steekt een veel algemener redenering in het omkeren der telling. De bewijsvoering kan dan ook *met letters* gegeven worden, liefst als oefening door de leerlingen, zelfstandig op te stellen.

De rekenregels *Som + Getal, Getal + Som, Som + Som,* volgen nu als zuiver logische toepassing. Men komt aldus tot de fundamentele wetten, die men kan herleiden tot elf [1]).

Zulks biedt het onschatbare voordeel, dat al onze leerboeken over het hoofd zien, *slechts deze elf grondstellingen te verifiëren bij latere uitbreidingen van het getalbegrip* en aldus met één slag de rekenkunde der natuurlijke getallen te verruimen tot die der meetbare positieve en negatieve getallen, *rekenkunde en algebra in één vak omvattend voor alle rekenregels en alle eigenschappen.* Zelfs bij de onmeetbare getallen kan de monotonie-wet

Uit: $a > b$ volgt $a + c > b + c$

en $ac > bc$

zich doen gelden [2]), zodat al wat we hier leren van onschatbaar belang is, en niet ernstig genoeg behandeld en herhaald kan worden.

Het aldus opgestelde *geraamte* van de ganse rekenkunde kan nu verder, zuiver logisch, d.i. zonder aanschouwing, geleidelijk bekleed worden, deductief.

---

[1]) H. Burkhardt, „Algebraische Analysis", Berlin 1920, p. 6: „Sobald bewiesen ist, dass diese bestehen bleiben, kann sofort geschlossen werden, dass das gleiche auch für die abgeleiteten Gesetze gilt; die im Gebiete der ganzen Zahlen für diese letzteren geführten Beweise bleiben Wort für Wort auch in dem erweiterten Gebiete anwendbar, da sie ja auf die Bedeutungen der Zahlen gar nicht mehr zurüchgreifen, sondern nur auf den vorher schon bewiesenen Eigenschaften der Operationen beruhen".

[2]) F. Klein l.c., p. 10.

Het lijkt ons raadzaam onmiddellijk gelijkheden en ongelijkheden te behandelen. Doch in plaats van, zoals steeds gebeurt, na de optelling de aftrekking aan te vatten, zie ik er zeker voordeel in, voort te werken in de rechtstreekse richting met vermenigguldiging en machtsverheffing. Dit laat toe de groeiende logische gang te volgen.

De vermenigvuldiging wordt een uitgebreide optelling, de machtsverheffing een uitgebreide vermenigvuldiging. Van nu af moet geen enkel aanknopingspunt met de telrij meer gezocht worden, want de aansluiting zit reeds door de optelling stevig bevestigd, en alle volgende bewerkingen zijn, door definitie, slechts ingewikkelde optellingen.

Bij elke bewerking is het goed onmiddellijk na de definitie de aaneengeschakelde complicaties [1]: gedurige som, gedurig product, veelterm enz. aan te vatten, om de betekenis der haakjes vast te leggen. De bewijzen worden immers geleverd door de wijdreikende dubbele interpretatiemogelijkheid van een bewerking als *ontstaand* of als *resultaat* (wederom de dualiteit: worden en zijn). Door in de aaneengeschakelde bewerkingen haakjes te plaatsen, kan men een gedeelte er van beschouwen als *één getal* of als *één bewerking*, en aldus de redeneringen sterk vereenvoudigen. [2]

Met middelmatige leerlingen van ongeveer vijftien jaar kan men met deze methode, al de bewerkingen, worteltrekking incluis, behandelen in een zestigtal lessen. Alleen de optelling en de aftrekking moeten *aangeleerd* worden. Al de overige bewerkingen worden door logische uitbreiding uit de moederbewerking, *door de leerlingen zelf afgeleid*, eventueel zuiver nominalistisch om het fijne en nooit falende van het denk-*mechanisme* aan te tonen. Het is als een transpositie in een andere toon, of soms gewoon als een vertaling, waarbij het woord „som" vervangen wordt door het woord „product", „min" door „gedeeld door".

De aldus opgevatte leer der bewerkingen is zeker niet Stendhal's geeuwpartij. Onze leerlingen kunnen wel woedend worden voor de gevraagde inspanning, maar voor het geeuwen krijgen ze de gelegenheid niet. Ze worden verplicht al hun *aandacht* en al hun *scherpzinnigheid* te gebruiken (in het vooruitzien van de te gebruiken

---

[1]) Zie K. Cuypers, „Het Aankweeken van het wiskundig Denken", Antwerpen 1940, p. 17.

[2]) Een zuiver theoretische behandeling vindt men in de Franse bewerking van de Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Zie het artikel van Schubert—Molk—Tannery (Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées, Paris 1904).

bewijsweg). Tevens wordt hun over het getal een nieuwe horizon geopend. Ze beginnen te vermoeden hoe getal en bewerking in hun eigen geest als *begrip* gegroeid zijn door het gebruik, en zij verheugen er zich om, al dat onbegrepene thans uitgelegd te vinden. Het is een eerste verrassende onderdompeling in een strenge, abstracte wetenschap. Bij sommigen wordt het een sportief enthoesiasme, een geestelijk genot, dat spel met formules. Poincaré zag dit goed in. Hier, bij de grond der rekenkunde, legt men de liefde tot de wiskunde, hier ontdekt de leerling eventueel zijn aanleg, ... ook al sukkelde hij steeds met de cijfers in de lagere school.

MATHEMATISCHE CENTRUM.

Hoofdgebouw.
Administratie, Bibliotheek, Afdelingen Zuivere en Toegepaste Wiskunde, Rekenafdeling.
Wijttenbachstraat 5,
Amsterdam-O.
Tel. 51660 (Algemeen).
Tel. 56643 (Rekenafdeling).

Bijgebouw.
Tijdelijk Afdeling Statistiek.
Nieuwe Kerkstraat 124,
Amsterdam-C.
Tel. 54611, toestel 22.
Bij geen gehoor: tel. 51660.

Rooster Voordrachten en Cursussen.
(Najaar 1948).

Zuivere Wiskunde.

Amsterdam.

De meeste voordrachten en cursussen Zuivere Wiskunde te Amsterdam vinden plaats in de Laboratoria der Vrije Universiteit, de Lairessestraat 174. (Van het C.S. te bereiken met lijn 16).

1. Een serie voordrachten *Elementaire onderwerpen van hoger standpunt uit,* te houden op *Woensdagavond* om de 14 dagen; aanvang 20 uur precies. (Duur ongeveer 1½ uur). Plaats: de Lairessestraat 174.
   a. 13 October, Prof. Dr B. L. v. d. Waerden:
   „Oppervlak en Inhoud".
   b. 27 October, Prof. Dr J. Popken:
   „De irrationaliteit van π".
   c. 10 November, Dr E. M. Bruins:
   „De symbolische methode in het Hexagramma mysticum".
   d. 24 November, Prof. Dr J. de Groot:
   „Ondergroepen uit de additieve groep der reële getallen met een bijzondere eigenschap".

   Voor het voorjaar 1949 hebben reeds verschillende sprekers toegezegd.
2. Colloquium *Moderne Algebra* onder leiding van Prof. Dr J. de Groot en Dr F. Loonstra op *Woensdagavond* om de 14 dagen, te beginnen 6 October te 19 uur 30. Plaats: de Lairessestraat 174.

3. Colloquium *Asymptotische Ontwikkeling* onder leiding van Prof. Dr J. G. van der Corput en Prof. Dr S. C. van Veen. Het doel is om te komen tot een standaardwerk over dit gebied met alle toepassingen. Hervatting *Donderdagavond* 30 September en verder iedere *Donderdag* om 19 uur 15. Plaats: de Lairessestraat 174.
4. *Actualiteiten.* Een serie korte voordrachten over actuele onderwerpen op de laatste Zaterdag van de maand (althans op de Zaterdag, waarop het Wiskundig Genootschap vergadert). Tijd 14—15 uur precies, zodat men gemakkelijk op tijd kan zijn voor de vergadering van het Wiskundig Genootschap. Plaats: Voorlopig tot de Kerstvacantie in een zaal van het Universiteitsgebouw, Oude Manhuispoort.
   a. 25 September, Prof. Dr H. D. Kloosterman: „Over afgeleiden en differenties".
   b. 30 October, J. Kemperman: „Dimensietheorie".
   c. 27 November, J. Korevaar: „Ruimten van Banach".
   d. 18 December, Dr F. v. d. Blij: „Over Quaternionen en Getaltheorie".

   Voor het voorjaar 1949 hebben reeds toegezegd Prof. Dr H. Freudenthal en Prof. Dr J. de Groot.
5. *Avondcursussen.* Vervolg van de verleden jaar begonnen twee-jarige cursus, echter ook toegankelijk voor nieuwe cursisten. De behandelde stof staat op het peil van de voor de Universitaire Candidaatsexamens Wis- en Natuurkunde vereiste Wiskunde, terwijl aan de toepassingen speciale aandacht wordt geschonken. De cursus begint op 4 October en het rooster is als volgt:
   a. Iedere Maandagavond, 20 uur. Prof. Dr A. Heyting, *Meetkunde.*
   b. Iedere Woensdagavond, 20 uur. Dr F. v. d. Blij, *Moderne Algebra; Analyse.*
   c. Iedere Vrijdagavond, 20 uur. J. Korevaar, *Analyse.*

   Kerstvacantie 18 December—16 Januari. Plaats: voorlopig de Lairessestraat 174. Aan deze cursus zijn kosten verbonden. Inlichtingen aan het Hoofdgebouw van het Mathematisch Centrum.
6. Drie voordrachten van Dr A. Rényi over zijn bewijs, dat ieder natuurlijk getal kan worden geschreven als som van een priemgetal en een „bijna-priem"getal. Zodra nadere

gegevens bekend zijn, zal aan gegadigden, indien zij de wens daartoe te kennen geven, bericht worden gezonden.

7. Voordracht van Prof. Dr P. Erdös van de Syracuse University, Syracuse (U.S.A.), over *een nieuw bewijs van de priemgetalstelling*, in de maand October. Zodra nadere gegevens bekend zijn, zal aan gegadigden, indien zij de wens daartoe te kennen geven, bericht worden gezonden.
8. *Topologische dag*, waarschijnlijk op of omstreeks 11 October 1948. Spreker Prof. Dr H. Hopf. Verder zijn aangezocht: Prof. Dr D. van Dantzig, Prof. Dr H. Freudenthal, Prof. Dr J. C. H. Gerretsen, Prof. Dr J. de Groot, Prof. Dr B. L. v. d. Waerden. Zodra nadere gegevens bekend zijn, zal aan gegadigden, indien zij de wens daartoe te kennen geven, bericht worden gezonden.
9. In de maand *November* zal Prof. Dr G. Szegö, Stanford University, Californië, spreken over een onderwerp uit de complexe functietheorie. Zodra nadere gegevens bekend zijn, zal aan gegadigden, indien zij de wens daartoe te kennen geven, bericht worden gezonden.
10. Verdere besprekingen met buitenlandse wiskundigen zijn gaande. Zodra nadere gegevens bekend zijn, zal aan gegadigden, indien zij de wens daartoe te kennen geven, bericht worden gezonden.

Den Haag en Sittard.

11, 12. Cursus *Moderne Algebra* onder leiding van Dr F. Loonstra. Deze cursus zal bij voldoende deelname worden voortgezet op zodanige wijze, dat ook nieuwe cursisten kunnen deelnemen. Gegadigden worden verzocht zich voor 5 October op te geven bij Dr F. Loonstra, Havikstraat 25, Den Haag. Daarna volgt nader bericht.

Rotterdam.

Voor deze voordrachten wende men zich tot de Secretaris van het Wiskundig Dispuut „Thomas Jan Stieltjes", de Heer H. Pleysier, Nobelstraat 105*b*, Rotterdam.

13. Prof. Dr J. Haantjes zal zijn zursus over *Afstandsmeetkunde* met een slotvoordracht afronden.
14. Prof. Dr S. C. van Veen zal waarschijnlijk een cursus geven over *Waarschijnlijkheidsrekening*.

15. Prof. Dr G. Szegö zal waarschijnlijk ook te Rotterdam spreken.
Verdere voordrachten in voorbereiding.

Eindhoven.

16. Cursus *Moderne Algebra* door Prof. Dr A. Heyting, op Vrijdag om de 14 dagen, des avonds van 8—10 uur. De cursus is weer begonnen op 17 September en wordt gehouden in het Gebouw van het Academisch Genootschap, Ten Hagestraat 1, Tel. 5020. Gegadigden kunnen zich aldaar opgeven.

Toegepaste Wiskunde.

Amsterdam.

17. Reeds vond plaats de apart aangekondigde voordracht van Prof. Dr D. Brouwer van de Yale University, New Haven, Connecticut, over:
„Numerieke problemen uit de Hemelmechanica", op Vrijdag 10 September.

Verder volgen de voordrachten:

18. Prof. Dr B. L. van der Waerden, *De Laplace transformatie*, zes voordrachten op Zaterdagmiddagen te 15 uur 30, op de data 9 Oct., 16 Oct., 23 Oct., 6 Nov., 13 Nov., 4 Dec. (de Lairessestraat 174).
19. Dr Ir A. van Wijngaarden, *Moderne Rekenmethoden*. Deze voordrachten worden gehouden elke Dinsdagavond van 8—10 uur in het gebouw de Lairessestraat 174. Aanvang 12 October. Gegadigden worden verzocht zich op te geven aan het Mathematisch Centrum.
20. Prof. Dr E. Stiefel, Zürich, zal waarschijnlijk in October een voordracht houden. Zodra nadere gegevens bekend zijn, zal aan gegadigden, indien zij de wens daartoe te kennen geven, bericht worden gezonden.
21. Cursus voor *Medici* en *Biologen* onder leiding van Dr F. v.d. Blij en de heer J. Korevaar. Deze cursus zal bij voldoende deelname opnieuw worden gegeven in enigszins andere vorm. Gegadigden dienen zich voor 19 October op te geven aan de sprekers, Mathematisch Centrum, Wijttenbachstraat 5. Daarna volgt nader bericht.

Utrecht.

22. Prof Dr H. Freudenthal, *Numerieke Methoden.* Deze cursus zal bij voldoende deelname worden gecontinueerd. Gegadigden dienen zich voor 5 October bij Prof. Freudenthal (Schubertstraat 44, Utrecht) op te geven. Daarna volgt nader bericht.

Den Haag.

Hier zullen bij voldoende deelname de drie onder omschreven cursussen worden gegeven door de heer F. Harkink, Landmeter van het Kadaster, en wel op iedere Maandagavond op een nader vast te stellen uur in het Centraal Teken- en Opleidingsbureau van het Kadaster, Nieuwe Haven 6, Tel. 180647. Gegadigden dienen zich voor 5 October bij de Heer Harkink (p/a Bovengenoemd Bureau) op te geven. Daarna volgt nader bericht. De deelneming is kosteloos.

23. *Machinerekenen.* (Vooropleiding tenminste Mulo-B). Een algemene opleiding in het algebraisch rekenen met Brunsviga-machines.
24. *Benaderde waarden.* (Vooropleiding H.B.S.-B of daarmee gelijkwaardig). De invloed van het afronden van gegevens en van tussenresultaten op het eindresultaat. Vaststelling van de nauwkeurigheid die de gegevens moeten hebben om een bepaalde nauwkeurigheid, in het resultaat te bereiken.
25. *Interpolatie.* (Vooropleiding H.B.S.-B of daarmee gelijkwaardig). Ongelijke en gelijke intervallen. Formules van Newton, Gregory, Gauss, Stirling, Everett, Lagrange. Ruitenschema van Fraser. Terugworpmethode van Comrie.

Voortzetting van de kadercursussen Statistiek. In samenwerking met de Vereniging voor Statistiek organiseert het Mathematisch Centrum twee cursussen over Statistiek, die gehouden worden in het Gebouw van de Postchèque- en Girodienst, Spaarneplein, Den Haag. Deze cursussen zijn bestemd voor hen, die reeds enigszins met de Mathematische Statistiek bekend zijn en hun kennis willen aanvullen tot een niveau, dat ongeveer met dat van de toekomstige universitair gevormde statistici zal overeenkomen. (Niet kosteloos).

26. *Elementaire en Beschrijvende Statistiek* door Dr J. J. J. Dalmulder. Elke Donderdag van 17.30—18.30 uur. Hervatting 14 October.

27. *Mathematische Statistiek* door Prof. Dr D. van Dantzig. Elke Donderdag van 19.30—21.30 uur. Hervatting 14 Oct.

Grondslagen.

28. *Inleiding in de Algemene Signifika. Begripscritiek der Ervaringswetenschappen.* Een serie voordrachten van Prof. Dr D. van Dantzig. Elke Zaterdagmiddag van 14—15 uur, behalve op de Zaterdagen, waarop het Wiskundig Genootschap vergadert. Hervatting op 16 October. Vóór de Kerstvacantie dus op 16 Oct., 23 Oct., 6 Nov., 13 Nov., 20 Nov., 4 Dec., 11 Dec. De voordrachten, die in hoofdzaak gedacht zijn voor ingenieurs, leraren in wiskunde, natuurwetenschappen, biologie e.d., psychologen en anderen, die belang stellen in grondslagenonderzoek, hebben in hoofdzaak ten doel, de signifische methoden van begrippenonderzoek te demonstreren aan de hand van enige fundamentele voorbeelden, b.v. het wiskundige „oneindigheids"-begrip, de wiskundige „zekerheid", het „causaliteits"-begrip in de fysika, het „doelmatigheids"-begrip in de biologie, het „behaviorisme" in de psychologie, e.d. Ook zullen de betrekkingen tussen wiskunde, logika en ervaringswetenschappen worden onderzocht en zullen de betrekkingen van de signifika tot de logische syntaxis en semantiek ruw worden geschetst. Voorkennis van hogere wiskunde of symbolische logika wordt niet vereist. (de Lairessetraat 174).

Opmerkingen:

a. Alle cursussen en voordrachten zijn kosteloos toegankelijk behalve nrs. 5*a*, *b*, *c*, 26, 27.

b. Van de meeste voordrachten worden kosteloos syllabussen verstrekt. Van de voordrachten 26, 27, 28 worden door de sprekers uitgewerkte dictaten beschikbaar gesteld, die voor niet-hoorders tegen vergoeding verkrijgbaar zijn.

c. Binnenkort verschijnt een catalogus van de Bibliotheek van het Mathematisch Centrum. Een beperkt aantal exemplaren van de catalogus is voor belangstellenden tegen kostprijs beschikbaar. De Bibliotheek van het Mathematisch Centrum streeft er naar van iedere auteur op het gebied van zuivere en toegepaste wiskunde en theoretische physica een zo volledig mogelijke collectie overdrukjes te verzamelen. De medewerking van in het bijzonder de Nederlandse wetenschappelijke wereld zal in deze zeer worden gewaardeerd.

WISKUNDIG DISPUUT „THOMAS J. STIELTJES".

Jaarverslag over het 2e werkjaar 1947/48.

Het tweede werkjaar begon met een viertal lezingen van Prof. Dr H. D. Kloosterman uit Leiden over: Kwadratische vormen en kwadratische getallenlichamen, welke zich in grote belangstelling mochten verheugen. Hieraan ging vooraf een inleidende voordracht van Dr M. v. Rees, Rotterdam, over de beginselen der getallentheorie.

Verder werden de drie in het vorige jaarverslag aangekondigde lezingen over Topologie door Dr J. de Groot uit Amsterdam gehouden.

Van de voorgenomen serie lezingen door Prof. Dr J. Haantjes uit Amsterdam over Afstandsmeetkunde kon helaas slechts een tweetal doorgang vinden. Het ligt in de bedoeling t.z.t. de slotlezing te houden.

Behalve deze lezingen werden door onze leden verschillende voordrachten gehouden, en wel: door de Heer J. Sanders, Rotterdam over vlakke derdegraadskrommen, en door de Heer G. Root, Rotterdam, over Homomorphie.

Het was ons een voorrecht ook twee buitenlandse gasten te ontvangen, de Heer Bernard Johnson, Headmaster van de Grammarschool in Accrington, Lancashire, Engeland, en Prof. Saunders Mc. Lane uit Chicago, U.S.A.

De Heer Johnson sprak in Januari j.l. over Mathematics in the English Grammarschool. De lezing stelde onze leden en andere belangstellende toehoorders niet alleen in staat kennis te nemen van de wijze waarop op Engelse Middelbare scholen wiskunde onderwezen wordt, maar verschaft hun ook waardevolle inlichtingen omtrent het Engelse Middelbare en Hogere Onderwijs in het algemeen. Het contact was des te vruchtbaarder doordat de Heer Johnson door verschillende onzer leden in de gelegenheid gesteld werd een viertal onderwijsinstellingen te bezoeken en hun werkwijze niet alleen gade te slaan, maar ook zelf actief aan het onderwijs deel te nemen. In dit verband spreken wij onze dank uit aan alle leden en directeuren van de betrokken scholen, die ertoe bijgedragen hebben het bezoek van de Heer Johnson tot een dusdanig succes te maken. De lezing van de Heer Johnson is gepubliceerd in „Euclides" No. 4, 23e jaargang. De Heer Johnson was ook in de gelegenheid de studenten van de Economische Hogeschool te Rotterdam een college te geven in de Wiskundige

Propaedeuse. Dit bezoek heeft aangetoond, hoe waardevol en wederkerig stimulerend internationaal contact kan zijn.

Prof Mc. Lane, Chicago, sprak in April jl. voor ons over Duality of Groups, een onderwerp, dat aansloot bij ons werk van verleden jaar. Alhoewel deze lezing op zeer korte termijn georganiseerd moest worden was de belangstelling groot. Het was te betreuren, dat Prof. Mc. Lane ons land zo spoedig moest verlaten, waardoor het persoonlijk contact beperkt bleef tot een gezellig samenzijn na afloop van zijn lezing. Ook van zijn kant betreurde hij de korte duur van zijn bezoek, zoals uit later binnengekomen correspondentie bleek.

De lezingen van Dr J. de Groot, Prof. Haantjes en Prof. Mc. Lane werden gehouden met medewerking van het Mathematisch Centrum.

Op 6 Juli jl. werd het werkjaar besloten, zoals verleden jaar, door een lezing van de Voorzitter, Dr M. v. Vlaardingen, waarvoor als thema gekozen werd een onderwerp uit het werk van Thomas J. Stieltjes, nl. de constructie van een functie, die alleen binnen de eenheidscirkel bestaat.

Na deze lezing werden de plannen voor het derde werkjaar besproken. In beginsel was men het erover eens, dat getracht zal worden een serie lezingen over waarschijnlijkheidsrekening te organiseren, waarvoor als spreker uitgenodigd zal worden Prof. Dr S. C. v. Veen, Delft. Verder werd het verlangen naar voren gebracht, meer dan in het afgelopen jaar de leden zelf aan het woord te doen komen. Als bezwaar wordt algemeen aangevoeld, dat in verband met de dagelijkse werkzaamheden van onze leden, het werkrooster beperkt moet blijven tot één lezing op Dinsdagen om de drie weken. Overwogen werd daarom eventueel bepaalde onderwerpen door kleinere groepen intensiever te behandelen.

In deze vergadering werd tevens de wens geuit tot een bestuursverkiezing over te gaan. Met algemene stemmen werd het zittende bestuur in zijn functies bevestigd, terwijl de Heer Root in het bestuur werd gekozen.

Gestreefd zal worden om het ledental uit te breiden en het Bestuur wekt hiermede alle leden op hun collega's voor het werk van het Dispuut te interesseren en hun thans reeds er op te wijzen één Dinsdag om de drie weken vrij te houden.

Met een gezellig samenzijn werd het werkjaar besloten.

Het zal nodig zijn de lezingen van Prof. Dr S. C. v. Veen voor te bereiden door een tweetal inleidende voordrachten, waarin de grondbeginselen van Waarschijnlijkheidsrekening worden besproken. Er wordt een dringend beroep op de leden gedaan zich voor het houden van deze inleidende voordrachten beschikbaar te stellen, en zich thans reeds hieromtrent met de Voorzitter in verbinding te stellen, daar het in de bedoeling ligt deze op 14 September a.s. en 5 October a.s. te houden.

Wij hopen alle leden bij het begin van het nieuwe werkjaar voltallig te kunnen begroeten.

Namens het Bestuur:

Rotterdam, 5 Augustus 1948. Dr M. v. VLAARDINGEN,

Voorzitter.

WISKUNDE WERKGROEP DER W.V.O.

Groot zijn de moeilijkheden bij het Wiskunde onderwijs. Sinds 1936 zoekt de Wiskunde Werkgroep van de *Werkgemeenschap voor Vernieuwing van Opvoeding en Onderwijs* naar een goede oplossing van vragen betreffende leerstof, methodiek en didaktiek. Teneinde haar inzichten in ruimere kring te be spreken organiseert zij van Zaterdag 13 November pl.m. 16 uur tot Zondag 14 November pl.m. 19 uur in het Maarten-Maartenshuis te Doorn, onder de algemene leiding van Prof. Dr H. Freudenthal een conferentie-weekend, waar een drietal onderwerpen, het Wiskundeonderwijs op de Middelbare School betreffende, behandeld zullen worden:

Prof. Dr H. Freudenthal, hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht, zal een elementair onderwerp van hoger standpunt bespreken;

Dr L. N. H. Bunt, conservator aan het Paedagogisch Instituut te Utrecht, zal een inleiding houden over Wiskunde-onderwijs en leerstof bij het V.H.M.O.

en Drs P. M. van Hiele, leraar aan het Kennemerlyceum te Bloemendaal, zal spreken over een poging tot het opstellen van de richtlijnen van een didaktiek der wiskunde. Na iedere inleiding hopen we een vruchtbare discussie te hebben.

De kosten bedragen *f* 6,— per persoon, maaltijden en logies inbegrepen.

Opgave met tegelijktijdige storting van de kosten kan geschieden bij de secretaris van de Wiskunde Werkgroep Drs Hermen J. Jacobs Jr., Hobbemalaan 66, Bilthoven, girorekening 478401. Spoedige aanmelding is gewenst. Tijdig ontvangt U dan nog een volledig programma.

VAN DE PERSONEN.

Tot Rector van het 1 September j.l. opgerichte Chr. Lyceum te Delft is benoemd de heer G. A. Janssen, leraar aan de Chr. H.B.S. te Leiden en Penningmeester van Wimecos.

Dr U. PH. LELY. †

Op 58-jarige leeftijd overleed te 's-Gravenhage Dr U. Ph. Lely, leraar in de wis- en natuurkunde aan het Christelijk Gymnasium, aldaar.

EEN MEETKUNDIGE PLAATS MET EEN HISTORISCHE BETEKENIS

door

Dr H. J. E. Beth.

§ 1. In een brief van Descartes aan P. Mersenne van 23 Augustus 1638 daagt hij Fermat uit diens tangentenmethode toe te passen ,,à trouver la tangente d'une ligne courbe qui a cete proprieté, que l'aggregat des 4 lignes tirées de chascun de ses poins vers 4 autres poins donnez, comme vers A, B, C, D, est touiours esgale à une ligne donnée" [1]).

Stellen we de vraag algemeen, dus voor n in een plat vlak gegeven punten $A_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, dan wordt de raaklijn gevraagd in een punt P van de kromme

$$\Sigma \sqrt{\{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2\}} = \text{constant.}$$

In de voorbeelden, die Fermat aanvankelijk van zijn methode gegeven heeft, was de vergelijking van de kromme rationaal. Descartes zal dus in de mening verkeerd hebben, dat Fermat moest beginnen met het rationaal maken van zijn vergelijking, waarvan 4 termen wortelvormen zijn, en dat hij voor dit werk zou terugdeinzen. Nu bezat Fermat reeds een eigen methode voor het rationaal maken; deze heeft hij een tijdlang geheim gehouden. Waar Fermat echter beweert, dat hij dit vraagstuk spelenderwijs heeft opgelost, is het waarschijnlijk, dat hij niet tot het rationaal maken is overgegaan, maar dat hij de weg heeft gevolgd, die ook wij volgen (afgezien van de andere notaties).

Als P niet in een van de punten A_i ligt, geldt

$$\Sigma \frac{X - x_i}{PA_i} \cdot dX + \Sigma \frac{Y - y_i}{PA_i} \cdot dY = 0$$

of

$$(\Sigma \cos \alpha_i) dX + (\Sigma \sin \alpha_i) dY = 0,$$

waarin α_i de hoeken zijn, die de rechten PA_i maken met de positieve X-as.

---

[1]) De Heer C. de Waard te Vlissingen, die de publicatie van de correspondentie van en met P. Mersenne verzorgt, vestigde mijn aandacht op deze vraag, en deelde erbij mee, dat in de correspondentie een antwoord op de vraag niet te vinden is.

De raaklijn aan de niveaulijn door P is dus loodrecht op de rechte, waarvan de richting gegeven wordt door

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\Sigma \sin \alpha_i}{\Sigma \cos \alpha_i}.$$

Dit is de rechte, die P verbindt met het zwaartepunt van n gelijke massapunten, geplaatst in de snijpunten van de rechten PA_i met een cirkel, die zijn middelpunt in P heeft.

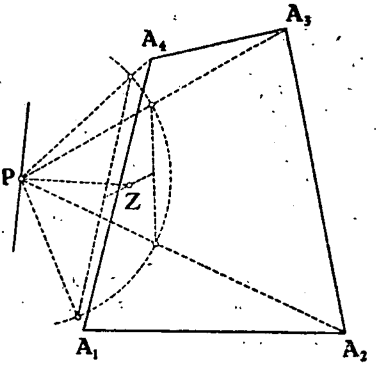


Fig. 1.

Men ziet in Fig. 1 de constructie uitgevoerd voor $n = 4$.

§ 2. De in § 1 gegeven constructie voor de raaklijn mislukt, als het zwaartepunt van de massa-punten in P zelf valt; de som van de afstanden PA_i is dan extreem. We onderzoeken het oppervlak:

$$Z = \Sigma \sqrt{\{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2\}}.$$

Als P niet een van de punten A_i is, geldt:

$$\frac{\partial Z}{\partial X} = \Sigma \frac{X - x_i}{PA_i}, \quad \frac{\partial Z}{\partial Y} = \Sigma \frac{Y - y_i}{PA_i},$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} = \Sigma \frac{(Y - y_i)^2}{PA_i^3}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial X \, \partial Y} = -\Sigma \frac{(X - x_i)(Y - y_i)}{PA_i^3}, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = \Sigma \frac{(X - x_i)^2}{PA_i^3},$$

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial X \, \partial Y}\right)^2 - \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} \cdot \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2} = \Sigma \frac{1}{PA_i^3 PA_j^3}\{2(X-x_i)(X-x_j)(Y-y_i)(Y-y_j) - (X-x_i)^2(Y-y_j)^2\} =$$

$$= -\Sigma \frac{1}{PA_i^3 \, . \, PA_j^3}\{(X - x_i)(Y - y_j) - (X - x_j)(Y - y_i)\}^2. \quad (i \neq j)$$

Deze uitdrukking is negatief, mits niet alle punten A_i op dezelfde rechte liggen en P op die rechte genomen wordt (we zien af van het geval $n = 2$; op het oppervlak ligt dan een lijnstuk evenwijdig met het XY-vlak; in alle punten van dit lijnstuk, behalve in de eindpunten, is het raakvlak evenwijdig met het XY-vlak).

Voorts is $\frac{\partial^2 Z}{\partial X^2} > 0$. Het oppervlak, dat de verandering van de som van de afstanden in beeld brengt, is dus, als we afzien van het genoemde bijzondere geval, in al zijn punten positief gekromd en in geen van de punten is het raakvlak loodrecht op het XY-vlak; de punten op het oppervlak, die behoren bij de punten A_i, moeten nader onderzocht worden. Er kan slechts een enkel punt zijn, waar de som extreem is, en dit extremum is een minimum. Er zijn nog twee mogelijkheden: 1°. het minimum beantwoordt aan $\frac{\partial Z}{\partial X} = 0$, $\frac{\partial Z}{\partial Y} = 0$; 2°. het minimum behoort bij een van de punten A_i.

Uit het vorige volgt, dat de niveau-lijnen, dus de doorsneden van het oppervlak door vlakken evenwijdig met het XY-vlak, convexe krommen zijn; singuliere punten kunnen alleen zijn de punten A_i en het minimum.

§ 3. We onderzoeken nu het oppervlak in de buurt van een van de punten, die corresponderen met de punten A_i en verplaatsen daartoe de oorsprong van het assenstelsel naar dat punt. Dan is

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} + \Sigma \sqrt{\{(X - x_i)^2 + (Y - y_i)^2\}}.$$

Dus:

$$Z = \sqrt{X^2 + Y^2} + \Sigma \sqrt{\{(x_i^2 + y_i^2) - 2(x_i X + y_i Y) + (X^2 + Y^2)\}} =$$

$$= \sqrt{X^2 + Y^2} + \Sigma\{\sqrt{x_i^2 + y_i^2} - \Sigma \frac{x_i X + y_i Y}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} + \ldots\}.$$

Dus:

$$Z - \Sigma\sqrt{x_i^2 + y_i^2} = \sqrt{X^2 + Y^2} - \Sigma \frac{x_i X + y_i Y}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2}} + \ldots$$

Het onderzochte punt van het oppervlak is dus een kegelpunt; de raakkegel is kwadratisch.

Van de twee bladen van het oppervlak, die in het kegelpunt samenhangen, is slechts één voor ons vraagstuk van belang. Het andere heeft betrekking op het vraagstuk, dat ontstaat, als we in de uitdrukking ΣPA_i een van de termen het negatieve teken geven.

Snijdt een vlak, evenwijdig met het XY-vlak, gebracht door het onderzochte punt, het oppervlak volgens een kromme, die in dat punt een knooppunt heeft, dan is dat punt niet het minimum. Het punt is het minimum, als de doorsnede in het punt een geïsoleerd punt heeft.

§ 4. We moeten dus onderzoeken of door een punt A_i takken van een niveaulijn gaan. Uit de vergelijking van het oppervlak in de buurt van een kegelpunt, blijkt, dat de vergelijking van de niveaulijn door een punt A_i te schrijven is:

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = X\,\Sigma \cos \alpha_i + Y\,\Sigma \sin \alpha_i + \ldots,$$

waarin α_i de hoeken zijn, die de verbindingslijnen van het onderzochte punt A met de $n - 1$ overige punten A_i maken met de positieve X-as.

$$X^2 + Y^2 = X^2(\Sigma \cos \alpha_i)^2 + 2XY(\Sigma \cos \alpha_i . \Sigma \sin \alpha_i) + Y^2(\Sigma \sin \alpha_i)^2,$$

dus: $\{1 - (\Sigma \cos \alpha_i)^2\}X^2 - 2\{\Sigma \cos \alpha_i . \Sigma \sin \alpha_i\}XY +$

$$\{1 - (\Sigma \sin \alpha_i)^2\}Y^2 = 0.$$

De beide raaklijnen aan de niveaulijn zijn reëel, als

$$\{\Sigma \cos \alpha_i . \Sigma \sin \alpha_i\}^2 - \{1 - (\Sigma \cos \alpha_i)^2\}\{1 - (\Sigma \sin \alpha_i)^2\} > 0.$$

Of:

$$(\Sigma \cos \alpha_i)^2 + (\Sigma \sin \alpha_i)^2 > 1,$$

$$n - 1 + 2\Sigma \cos (\alpha_i - \alpha_j) > 1, \quad (i \neq j)$$

$$\Sigma \cos (\alpha_i - \alpha_j) > \frac{2 - n}{2},$$

waarin het eerste lid dus voorstelt de som van de cosinussen van de hoeken, die de verbindingslijnen van het onderzochte punt A met de overige $n - 1$ punten A_i *onderling* maken.

§ 5. We zullen nu aantonen, dat aan de gevonden voorwaarde steeds voldaan is, als de punten A_i de hoekpunten zijn van een convexe n-hoek met meer dan 3 zijden, voor elk van die punten.

Daartoe merken we vooreerst op, dat in het geval van een convexe n-hoek de genoemde verbindingslijnen alle binnen een gestrekte hoek liggen.

Zij $n = 2k$; k geheel. Draaien we een van de twee uiterste verbindingslijnen, zodat hij in het verlengde van de andere komt. Dan hebben we een aantal hoeken vergroot, dus $\Sigma \cos (\alpha_i - \alpha_j)$ verkleind. Deze som wordt nu gelijk aan -1, vermeerderd met de uitdrukking $\Sigma \cos (\alpha_i - \alpha_j)$ voor $2k - 3$ punten A_i. Gaan we op deze wijze voort, dan houden we ten slotte 3 rechten over en voor deze geldt $\Sigma \cos (\alpha_i - \alpha_j) > -1$.

Dus geldt:

$$\Sigma \cos (\alpha_i - \alpha_j) > (k-2) - 1 - 1 = -k + 1 = \frac{2-n}{2}.$$

Zij thans $n = 2k + 1$; k geheel. We bewijzen voor dit geval op dezelfde wijze:

$$\Sigma \cos (\alpha_i - \alpha_j) > \frac{3-n}{2} + \cos v_{\min},$$

als $v_{\min}$ de kleinste is van de hoeken, die twee van de door het onderzochte punt A naar de overige punten A_i getrokken halve rechten onderling maken. Als $\cos v_{\min} > -\frac{1}{2}$, dus $v_{\min} < \frac{2}{3}\pi$, dan is aan de voorwaarde voldaan. Voor een convexe veelhoek is dat steeds zo, mits $n > 3$ is. Voor $n = 3$ is $\alpha_i - \alpha_j$ de grootte van de hoek van de driehoek in het onderzochte hoekpunt. Door dit hoekpunt gaan alleen dan twee takken van een niveaulijn, als de hoek kleiner dan $\frac{2}{3}\pi$ is.

§ 6. Als de takken door een punt A_i reëel zijn, dan stelt de vergelijking

$$\sqrt{X^2 + Y^2} = X \Sigma \cos \alpha_i + Y \Sigma \sin \alpha_i$$

ons in staat, op eenvoudige wijze de richting van die takken te construeren. We plaatsen op de verbindingsrechten van het te onderzoeken punt met de overige $n - 1$ punten A_i gelijke massa's, op een afstand gelijk aan de lengte-eenheid van dat punt verwijderd. Zij Z het zwaartepunt van die massa's, d zijn afstand tot het onderzochte punt en φ de hoek, die de lijn AZ maakt met de positieve X-as, terwijl ψ de hoek is, die een gevraagde richting maakt met de positieve X-as, dan geldt:

$$d \cos \varphi \cos \psi + d \sin \varphi \sin \psi = \frac{1}{n-1}$$

$$\cos \chi \equiv \cos (\varphi - \psi) = \frac{1}{(n-1)d},$$

waardoor de hoek χ te construeren is, die elk van de gevraagde richtingen maakt met de rechte naar Z.

Liggen de punten A_i in de hoekpunten van een convexe veelhoek of in de hoekpunten van een driehoek, waarvan de grootste hoek kleiner dan $\frac{2}{3}\pi$ is, dan geldt voor elk hoekpunt, zoals uit het voorgaande volgt:

$$(n-1)d > 1.$$

Voor het hoekpunt van een driehoek is de rechte naar het zwaartepunt Z tevens de bissectrix van de hoek. Noemen we α de hoek in het onderzochte hoekpunt, dan geldt

$$\cos\chi = \frac{1}{2\cos\frac{1}{2}\alpha}.$$

§ 7. Thans is voor het geval van een convexe veelhoek en van een driehoek het stelsel niveaulijnen in algemene trekken aan te geven. Het zijn, zoals gebleken is, convexe krommen; alleen in de hoekpunten treedt een singulariteit op; de richtingen van de knooppuntsraaklijnen kunnen we construeren. Bepalen we voor elk hoekpunt de som van de verbindingslijnen naar de andere hoekpunten en rangschikken we die sommen naar hun grootte, dan weten we in welke volgorde de niveaulijn door het ene hoekpunt die door het andere omgeeft.

Een overgebleven moeilijkheid is die van de bepaling van het minimum, behalve in de gevallen $n = 3$ en $n = 4$. Is van een driehoek de grootste hoek kleiner dan $\frac{2}{3}\pi$, dan ligt het minimum in het punt, vanwaar men de zijden onder hoeken groot $\frac{2}{3}\pi$ ziet (punt van Torricelli), zoals dadelijk uit de constructie van § 1 volgt. Is een hoek gelijk aan of groter dan $\frac{2}{3}\pi$, dan ligt het minimum in het hoekpunt van die hoek.

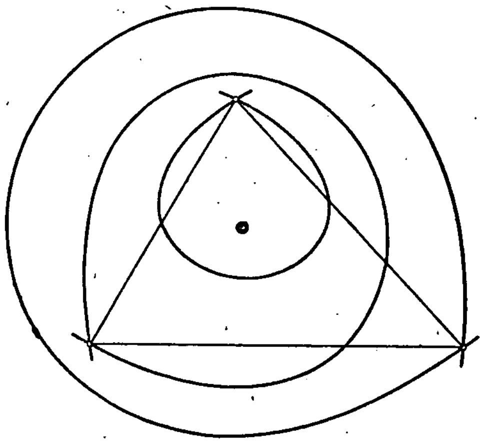


Fig. 2.

Voor $n = 4$ ligt het minimum in het snijpunt van de diagonalen.

In het algemeen kan men de plaats van het minimum proefondervindelijk bepalen. Maken we in een vlak openingen ter plaatse van de punten A_i en laten we daardoor koorden gaan, die aan hun ene uiteinde, dat afhangt, met gelijk gewicht bezwaard worden en met het andere uiteinde aan elkaar geknoopt, dan wijst in de evenwichtsstand het knooppunt de plaats van het minimum aan; dit volgt weer uit de constructie van § 1 [1]).

---

[1]) Op de eigenschappen van de krommen (ze zijn algebraisch, of maken deel uit van algebraische krommen) ga ik niet in. Ze behoren tot de „polyzomal curves", welke naam gegeven is door A. Cayley, die de krommen ook heeft onderzocht (zie Gino Loria, Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven, dl 1, blz. 348).

UIT „EEN SCHOOL-BOECK DER WYNROEYERYEN MET AENHANGH GENAEMT DEN BRIL, VOOR DE AMSTERDAMSCHE BELACHELIJCKE GEOMETRISTEN"

door

Dr F. VAN DER BLIJ.

„Ik twyffele niet, of veelen zullen zig verwonderen, dat ik, die het grootste gedeelte van mynen leeftyd aan de Sterrekunde, Werktuigkunde, en Waterloopkunde besteed heb, de pen heb opgevat om de Grondbeginselen der Roey- en Peil-kunde die weinig gemeenschap schynen te hebben met de gemelde deelen der toegepaste Wiskunde, ten dienste der Landgenooten, inzonderheid ten nutte der Zuid-Hollandsche Wynroeyers en Peilders te beschryven: voor weinige maanden konde ik zelf niet vermoeden, dat ik in omstandigheden zoude worden gebragt, die my het opstellen en uitgeeven van dit Werkje zouden aanraaden, en my zelfs eeniger maaten daar toe noodzaaken: weshalven ik het niet ondienstig oordeele eenig verslag te doen van het geene hier toe heeft aanleidinge gegeeven."

Met deze ietwat lange volzin begint de voorrede in de „Grondbeginselen der Wynroey- en Peil-kunde ten dienste der Landgenooten beschreven door Johan Lulofs, Hoog-leeraar in de Philosophie, wis- en sterrekunde op 's Lands Universiteit te Leyden" een „werkje" van 309 pagina's dat in 1764 te Leyden verscheen. Mutatis mutandis kan ik dit deel van deze voorrede aan dit opstel laten vooraf gaan. Een vondst in een reeks duplicaten uit de bibliotheek van het Wiskundig Genootschap en een verzoek een voordracht in de Woensdagavond-reeks van het Mathematisch Centrum te houden, mogen als voldoende excuses worden aangevoerd, al moet ik toegeven dat de excuses van Prof. Lulofs overtuigender waren, hij schreef immers in opdracht van „Haar Ed. Mog. de Heeren Gecommitteerde Raaden van Haar Ed. Groot Mog. in Zuidholland" om aan ruzies van de Wynroeyers een einde te maken.

Uit de zeer omvangrijke literatuur, die heden ten dage iedere roeyer ten dienste staat heb ik een vijftal boekjes gekozen, waaruit ik U iets wil meedelen. Het zijn de volgende werken:

Cornelis van Leeuwen, *School-Boeck der Wynroeyeryen.* (Amsterdam 1663).

Johan Lulofs, *Grond-beginselen der Wynroey- en Peil-kunde.* (Leyden 1764).

Hendrik de Hartog, *Nieuwe Theorie, der Wynroey- en Peil-kunde.* (Amsterdam 1815).

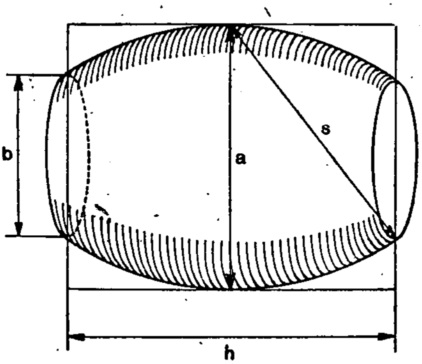
R. Lobatto, *Proeve eener nieuwe handelwijze ter bepaling van den inhoud der vaten.* ('s-Gravenhage 1839).

G. den Hartogh, *Nieuwe cursus. Hulpvakken.* (pag. 57 t/m 118: *Roei- en Peilkunde*). (Gorinchem 1903).

Uit de titel van het boekje van Lobatto is U al enigszins duidelijk geworden wat nu wijnroei- en peilkunde eigenlijk is. Onder wijnroeikunde wordt gerekend de bepaling van de inhoud van vaten; door de Peil-kunde verstaat men de kunst om de hoeveelheid vogts te meeten, welke in een vat is begreepen, dat niet geheel vol is, (Lulofs).

Om een verklaring van het woord roeien te vinden, wil ik er op wijzen, dat het gereedschap van de roeier bestaat uit maatstokken, de „quadraatroede en de Cubiek-roede".

Het probleem is natuurlijk de vorm van de duigen van het vat. Velerlei veronderstellingen zijn gemaakt, vele formules aangegeven om een zo goed mogelijk resultaat te vinden. We zullen steeds aannemen, dat de bodems even grote cirkels (met middellijn b) zijn. De middellijn van de grootste doorsnee-cirkel, die door het sponsgat, heet de sponsdiepte en wordt met a aangegeven. De afstand van de beide bodems zij h.

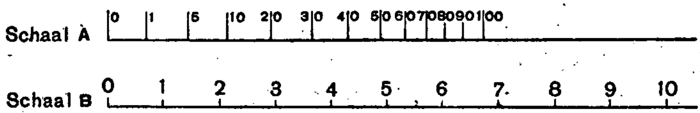


Een eerste benadering voor de inhoud van het vat wordt gevonden door het vat te beschouwen als de som van twee afgeknotte kegels met gemeenschappelijk grondvlak. We vinden voor de inhoud $\frac{\pi}{12}h(a^2 + ab + b^2)$, maar dit getal is zeker minder dan de inhoud van het vat.

C. van Leeuwen geeft een methode aan om de inhoud van het vat te vinden, die berust op de formule $\frac{\pi}{8}h(a^2 + b^2)$. Hij bewijst dat deze formule een groter antwoord geeft als die met de afgeknotte kegels, immers

$$\tfrac{1}{8}(a^2 + b^2) - \tfrac{1}{12}(a^2 + ab + b^2) = \tfrac{1}{24}(a - b)^2 > 0.$$

De inhoudsbepaling, zoals C. van Leeuwen die beschrijft, gebeurt met de „quadraatstok”. Op deze stok zijn twee schaalverdelingen aangebracht, de schaal A verloopt kwadratisch, de schaal B verloopt lineair. De lineaire schaal wordt bij gegeven kwadratische schaal op de volgende manier geijkt: Van een vat bepalen we de inhoud door met een maatkan de hoeveelheid vloeistof te meten, die het vat bevatten kan. Laat deze inhoud bijvoorbeeld 124 mingelen zijn. We brengen eerst een voorlopige lineaire schaal aan. We steken de stok door het sponsgat en lezen op schaal A nu bv. 34 af. Daarna meten we de bodemmiddellijn met schaal A op en vinden 28. Tenslotte meten we met de voorlopige schaal B de lengte van het vat, deze zij 9. We berekenen nu $\frac{1}{2}(34 + 28) \,.\, 9 = 279$; de inhoud was 124 mingelen; in plaats van 9 hadden we 124/279 . 9 af moeten lezen, nu kan de definitieve schaal aangebracht worden.



Men ziet gemakkelijk in hoe de schaal ook theoretisch geijkt had kunnen worden. In het boekje van Van Leeuwen wordt dit niet vermeld, wel worden afwisselend de verhoudingen 22/7 en 355/113 voor die van omtrek en middellijn van de cirkel gebruikt. In het enige maanden later verschenen werk: Christiaen Martini Anhaltin: *Oprecht, Grondich en Rechtsinnigh Schoolboeck van de wyn-royeryen, tegens dat verbrodde, valsch en niets doogende, den maker selfs niet verstaende schoolboeck van wynroeyeryen, onlanghs uytgegeven door* Cornelis van Leeuwen werd deze methode becritiseerd en een gebruik van de kwadraatstok voorgesteld, dat neerkomt op het gebruik van de formule $\frac{\pi}{16} h(a + b)^2$.

Van Leeuwen beschrijft ook het gebruik van de „cubiekstok”, die vermoedelijk langer in gebruik is gebleven. We gaan van de veronderstelling uit dat alle vaten gelijkvormige lichamen zijn; de verhouding van de inhouden van twee vaten is dan gelijk aan de verhouding van de derde machten van overeenkomstige afmetingen. Voor deze afmeting wordt bij voorkeur de *steeklijn* gebruikt, dat is de afstand van het sponsgat tot de onderrand van een van de bodems van het vat. We kunnen een kubische schaalverdeling aanbrengen op de maatstok, die met behulp van een vat van bekende inhoud geijkt wordt, zodat we op de „cubiekroede" direct de inhoud van het vat af lezen.

In het werk van Lulofs worden de formules $\frac{\pi}{16} h(a+b)^2$ en $\frac{\pi}{8} h(a^2+b^2)$ en $\frac{\pi}{12} h(a^2+ab+b^2)$ als te onnauwkeurig verworpen. Hij beschrijft enkele methoden, die nauwkeuriger uitkomsten zullen geven.

I. *Ellipsvormige duigen* (voorgesteld door Clavius, Keplerus, Wallisius en Gregory). Het vat wordt beschouwd als afgeknotte ellipsoide, de assen van de doorsnede-ellips zijn a en $\frac{ah}{\sqrt{a^2-b^2}}$; de inhoud van het lichaam dat ontstaat door een symmetrisch stuk met lengte h om de lange as te laten wentelen is

$$\pi \int_{-^1/_2 h}^{^1/_2 h} \left\{ \frac{a^2}{4} - x^2 \frac{a^2-b^2}{h^2} \right\} dx = \frac{\pi}{12} h(2a^2+b^2).$$

Deze formule is ook wel „elementair" af te leiden uit de inhoudsformule van de bolschijf.

II. *Cirkelvormige duigen* (voorgesteld door Keplerus). Het vat ontstaat door de wenteling van een cirkelsegment om een lijn evenwijdig aan de koorde. Volgens een regel van Guldin is de inhoud van het lichaam gelijk aan de oppervlakte van de wentelende figuur vermenigvuldigd met de lengte van de weg, die het zwaartepunt van de figuur bij deze wenteling heeft beschreven. De berekening laten we hier maar achterwege.

III. *Parabolische duigen.* A. (voorgesteld door Pezenas). Twee afgeknotte omwentelingsparaboloïden worden met de afgeknotte kant aan elkaar geplakt. De keuze lijkt weinig gelukkig, de theoretische duigenkromme vertoont op de cirkel door het sponsgat een discontinuiteit in de richting van de raaklijn.

IV. *Parabolische duigen.* B. (voorgesteld door Jones). De duigen zijn parabolisch gebogen, de top van de parabool ligt op de cirkel door het sponsgat. Kiezen we de omwentelingsas van het vat als X-as en de verticaal door het sponsgat als Y-as, dan wordt de vergelijking van de parabool $y = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}(a-b)(2x/h)^2$. De inhoud van het vat wordt dus

$$\pi \int_{^1/_2 h}^{^1/_2 h} \left\{ \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}(a-b)\left(\frac{2x}{h}\right)^2 \right\}^2 dx = \frac{\pi}{60} h(8a^2+4ab+3b^2).$$

V. *Parabolische duigen.* C. (voorgesteld door Camus). De lengte van het vat wordt in vier gelijke delen verdeeld, op de buitenste stukken nemen we de duigen als recht aan, op de binnenste delen parabolisch gebogen, we kiezen de lijnen zo, dat de rechte aan de parabool raakt. We gaan niet verder op deze handelwijze in, alhoewel op deze manier een zeer behoorlijke benadering verkregen kan worden.

VI. *Experimentele formule voor de inhoud* (voorgesteld door Lulofs). „Deze formule berust niet op meetkundige gronden, maar zal in de practijk heel goed voldoen." De bewuste formule is $\frac{\pi}{100} h(3a + 2b)^2$.

Vervolgens bespreekt Lulofs uitvoerig hoe hij met behulp van de lengte van de secundeslinger te Leiden een lengteeenheid had vastgelegd, op een koperen staaf werd door streepjes deze lengte-eenheid afgezet en de staaf werd in een kistje aan het observatorium te Leiden gegeven. Hiermee wordt een volume eenheid vastgelegd en dan de zwaarte van het regenwater en van het putwater uit verschillende putten o.a. die bij het huis van Van Mussenbroeck bepaald.

Indien de kwadraatstok gebruikt wordt, moet op de formule $\frac{\pi}{8} h(a^2 + b^2)$ een correctie worden aangebracht. Volgens Stone moet dit getal vermeerderd worden met $\frac{\pi}{120} h(a^2 - b^2)$, een andere keer geeft Stone ook $\frac{\pi}{40}$ in plaats van $\frac{\pi}{120}$ op.

Lulofs geeft zelf een experimentele formule op die ons wel wat erg vreemd voorkomt, hij stelt namelijk voor

$$\frac{\pi}{8} h(a^2 + b^2) + \frac{\pi}{8}(a^2 - b^2).$$

Het boekje van Hendrik de Hartog levert ons weer een nieuwe formule voor de inhoud van het vat. De berekening berust op de veronderstelling, dat de duigenkromme is te beschrijven door een „bastaardparabool": $y = px^{5/3}$. In de gegevens a, b, h uitgedrukt ontstaat het vat door wenteling van

$$y = \tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}(a - b)\,|\,2x/h\,|^{5/3}, \qquad (|\,x\,| \leqq \tfrac{1}{2}h)$$

om de X-as. De inhoud wordt dus

$$2\pi \int_0^{1/2h} \left\{\tfrac{1}{2}a - \tfrac{1}{2}(a - b)\left(\frac{2x}{h}\right)^{5/3}\right\}^2 dx = \frac{\pi}{208} h\{25a^2 + 15ab + 12b^2\}.$$

Bij benaderingen in de practijk wordt deze formule wel vervangen door $\frac{\pi}{256}h(5a + 3b)^2$. Het verschil

$$\frac{\pi}{4}h\left\{\frac{25a^2 + 15ab + 12b^2}{52} - \frac{25a^2 + 30ab + 9b^2}{64}\right\} = \frac{\pi h}{4} \cdot \frac{75}{832}(a-b)^2$$

zal in de meeste gevallen verwaarloosd kunnen worden.

Lobatto tracht op elementaire grondslag een goede benaderingsformule te vinden. Hij verdeelt het halve vat in twee delen, die hij beide benadert door afgeknotte kegels. Beide kegels hebben een hoogte $\frac{1}{2}h$; van de grootste zijn de stralen van de cirkels $\frac{1}{2}a$ en $\frac{1}{2}c$, van de kleinste zijn de stralen van de cirkels $\frac{1}{2}c$ en $\frac{1}{2}b$. Uit een figuur is het direct duidelijk, dat $\frac{1}{2}(c - b) > \frac{1}{4}(a - b)$ en dat $\frac{1}{2}(c - b) < \frac{1}{2}(a - b)$. Om een redelijke benadering te krijgen stellen we $c = \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}b$. Voor de inhoud vinden we dan

$$\frac{\pi}{24}h(a^2 + ac + c^2 + c^2 + cb + b^2) = \frac{\pi}{192}h(23a^2 + 14ab + 11b^2).$$

In de practijk vervangen we deze formule door $\frac{\pi}{256}h(5a + 3b)^2$.

Het verschil

$$\frac{\pi}{4}h\left\{\frac{23a^2 + 14ab + 11b^2}{48} - \frac{25a^2 + 30ab + 9b^2}{64}\right\} = \frac{\pi}{4}h \cdot \frac{17}{192}(a-b)^2$$

kan meestal verwaarloosd worden. U ziet, dat deze benaderingsformule dezelfde is als die, welke we met behulp van de bastaardparabool volgens De Hartog hadden afgeleid.

Vervolgens tracht Lobatto alle vaten als gelijkvormig te beschouwen en op de zo gevonden uitkomsten correcties aan te brengen. We stellen de steeklijn-lengte gelijk s, $\frac{a}{a-b} = p$ en noemen de hoek tussen de steeklijn en de verticaal door het sponsgat α. De formule

$$I = \frac{\pi}{4}h\left(\frac{5a + 3b}{8}\right)^2$$

kan direct omgevormd worden tot

$$I = \frac{\pi}{2}s^3\left(\frac{p - \frac{3}{8}}{p - \frac{1}{2}}\right)^2 \sin\alpha\cos^2\alpha.$$

Nu zal in de practijk steeds gelden

$$5 < p < 10 \quad \text{en} \quad 30^\circ < \alpha < 40^\circ.$$

Verder geldt voor

$$5 < p < 10, \text{ dat } 1{,}026 < \left(\frac{p - \frac{3}{8}}{p - \frac{1}{2}}\right)^2 < 1{,}056$$

en voor

$$30^\circ < \alpha < 40^\circ, \text{ dat } 0{,}375 < \sin\alpha \cos^2\alpha < 0{,}385.$$

De formule $I = 0{,}62\, s^3$ zal dus voor alle vaten een redelijke benadering geven, voor eventuele correcties als de waarden van α en/of p bekend zijn, kunnen uit tabellen afgelezen worden. Zonder deze correcties zal de fout ten hoogste 2,8% bedragen.

Uit het werkje van G. den Hartogh, dat geschreven is als handleiding bij de opleiding tot kommies, surnumerair etc. vermelden we alleen nog dat voor het gebruik worden aangeraden:

Voor dikbuikige vaten $(a : b : h = 1000 : 840 : 1175)$;

de formule van Gregory $I = \frac{\pi}{4} h \left(\frac{2a + b}{3}\right)^2$.

Voor middelbaarbuikige vaten $(a : b : h = 1000 : 880 : 1175)$;

de formule van Lobatto $I = \frac{\pi}{4} h \left(\frac{5a + 3b}{8}\right)^2$.

Voor dunbuikige vaten $(a : b : h = 1000 : 920 : 1175)$;

de formule van Lulofs $I = \frac{\pi}{4} h \left(\frac{3a + 2b}{5}\right)^2$.

De bovenstaande formules komen alle neer op het vervangen van het vat door een cylindrisch vat met geschikt gekozen middellijn. In de peilkunde zullen we ons steeds tot cylindrische vaten beperken. Voor staande vaten is de zaak eenvoudig, maar de meeste vaten, die gepeild moeten worden, zullen liggen. Als het vat niet al te leeg of al te vol is, gaan we op onderstaande manier te werk. Noem de hoogte van de vloeistof, gemeten door het sponsgat d; de sponsdiepte geven we aan met a, de middellijn van het geidealiseerde cylindrische vat met $a - k$; dan staat de vloeistof in het geidealiseerde vat op hoogte $d - \frac{1}{2}k$.

Men gebruikt nu tabellen, waarin bij gegeven verhoudingen van pijl tot middellijn, de bijbehorende verhouding van oppervlakte segment tot oppervlakte cirkel is te vinden. Deze peil-tabellen vinden we in iedere handleiding; in het boekje van C. van Leeuwen vinden we reeds bij verhoudingen van pijl tot middellijn opklimmende met 0,001 de verhouding van de oppervlakten in drie decimalen opgegeven.

Het ligt voor de hand, dat deze methode in de gevallen, waarin het vocht onder de onderrand van de bodem of boven de bovenrand van de bodem komt, niet meer toegepast kan worden. Het is voldoende alleen het eerste geval te behandelen. Indien b weer de middellijn van de bodem en h de lengte van het vat voorstelt, geldt in dit geval de formule

$$I = \frac{\pi}{4} h\, d^2 \sqrt{\frac{2(a-d)}{a-b}}.$$

Deze benaderingsformule kan worden afgeleid, als we het onderste deel van het vat benaderen door een elliptische paraboloide.

(Bladvulling uit: J. Lulofs: Grondbeginselen der Wynroey- en Peilkunde, Leyden 1764).

Het schoolboeck der Wynroeyeryen van Cornelis van Leeuwen beslaat 28 pag. en wordt gevolgd door een *„Aenhangh genaemt den bril voor de Amsterdamsche belachelijke geometristen. Bestaende in eenige geometrische en andere questien / die door haer openbaer / op de manier als de quacksalvers zyn aengeslagen / en my van haer eenige voorgestelt / die ick alle klaer hebbe gedemonstreert ende bewesen. Door my Cornelis van Leeuwen, gesworen lantmeter ende liefhebber der Mathematische konsten, resideerende op de Zeedijck daer de stuurman uythangt"* van 79 bladzijden.

Het Oprecht, Grondig en Rechtsinnigh Schoolboeck van de Wyn-royeryen van Christiaen Anhaltin wordt gevolgd door *„Half slapende aenspraecke over de bril voor de Amsterdamsche brillachende geometrist, kostelijck uytgegeven ende met verscheydene glasen te samen geset, door den niet wel-geoeffenden, in den konst broddelaer Cornelis van Leeuwen"* en dit geschrift wordt op zijn beurt weer gevolgd door een *„Bewys met fondamentale reeden, dat Cornelis van Leeuwen een broddelaer en windbuydel is, met alle de geene die by hem geleert hebben en noch leeren".*

Abraham de Graaf schreef een brief aan Van Leeuwen, die we afgedrukt vinden aan het einde van zijn boek: *„Ontleding van de bril voor de Amsterdamze belachelijke geometristen* (1663);

onder andere opmerkingen ook, dat: „De Wynroyery (van Van Leeuwen) is zeer Lam, onnosel en slecht, en de Aanhangh zeer onzedig; voortgebracht door de Nydigheit, opgevult met Faamroverije, leugens en leugenachtige vertellingen."

Deze titels klinken in onze oren wat erg grof; ze dekken de inhoud toch heel aardig. Maar U zult zich afvragen, wat de oorzaak van deze scheldpartij was?

Laat ik eerst vertellen, dat in de 16de en 17de eeuw er een internationaal gebruik bestond „Gesolveerde en ongesolveerde Questien" openbaar aan te slaan. Aan de kerken, soms ook aan de huisdeuren werden plakkaten aangeplakt met wiskundige problemen, voor de oplossingen werden geldprijzen of zilveren bekers uitgeloofd. Vaak had de steller het probleem opgelost en pronkte op deze manier met zijn kennis, na afloop van de inzendingstermijn kon men dan bij de steller de oplossing tegen betaling van leergeld vernemen. Hierbij werd steeds een plechtig contract opgemaakt, een dergelijk contract drukt Van Leeuwen in zijn Bril af. Aan dit bedrijf deed iedere wiskundige mee, zo heeft Prof. Ludolf van Ceulen in 1583 te Delft gediscussieerd met Goudaen, die enkele problemen aan de kerk te Delft had aangeplakt.

Nu was Meester Van Leeuwen anno 1663 niet al te geliefd in Amsterdam, met gevolg dat men „Pasquillen aan zyn deur plackt en Questien onder zyn deur door steekt" zonder zijn naam daarbij te vermelden. Zelfs had men 's nachts een bordje aan zijn deur getimmert: „Hier woont Cornelis Labbekack, die alle mensen gaet belabben en beliegen / en alle menschen eer gaet steelen."

Is het te verwonderen, dat Meester in zijn Bril tussen de tientallen sommetjes in zo nu en dan zijn hart eens lucht en roept: „Ick sal U Pasquillen aen myn deur en Questien onder myn deur door leeren steecken / dat ghy u verwonderen sult en dat ghy u wel wachten sult sulks meer te doen." „Ick geloove seecker dat ze van de Uylen uytgebroet zyn / want sy syn haters van 't licht / om datse by nacht wandelen / ofte ten minste haer oogen met het bloedt van een Vleermuys bestreken hebben / om datse by nacht de schreven van de deuren so moy konnen vinden / om daar Questien door te steken."

Hij verwijt zijn collega's opgaven van anderen als hun eigen uit te geven. Abraham de Graaf moet het wel erg ontgelden:

De Wis-konstenaer Abraham de Graef, heeft hem machtigh uytgheslooft/ in het aenslaen en 't uytgeven van dese slechte Questie/ even op de manier als een seeckeren Boer/ die meende boter uyt sijn Karren te krijghen/ en vondt daer in een nest met jonghe Katten/ den Boer verwondert zijnde over dit groote mirakel/ riep sijn gantsche huysgesin by een/ en begon luyde te roepen/ Wonderlijcke boter/ wonderlijcke boter/ by na sonder ophouden: Alsoo heeft dese man hem over dese questie oock soo verwondert als de Boer over de Katten/ en hem ingebeeldt die ghene de mondt met dese questie te stoppen/ die haer met sijn arbeyt soecken groot te maken. Wel lieve soete man/ wie zijn die gene die haer met u werck soecken groot te maecken? meent ghy oock u selfs? want mijns oordeels/ is 'er niemandt uws gelijck als de Gietermaker, om dies wille ghy met u beyden meer als ghemeen bent/ om andere lieden haer werck en questien uyt te geven en aen te slaen voor u eygen werck/ want dese questie/ en al de questien die in dat groote Placcaet staen/ sijn Mr. Sybrants questien/ 't welck ick hier voort sal bewijsen. En besiet u Astronomia/ die hebt ghy geplundert uyt de Astronomia van Dirck Rembrantsz. van Nierop, en meentse beter te maken/ maer hebtse juyst wel tienmael slimmer gemaeckt/ 't welck ick u wel kan bewijsen. En u groote Boeck van de Navigatie/ wel lieve man is dat Boecken maken? wel hebje geen schaemt/ soo schandelijck andere Autheuren haer boecken en wercken na te potsen/ en na te plunderen/ en van haer naem en eer te berooven? en noch durfje u tyteleeren Wis-en Sterre-konstenaer; maer had ghy geschreven Mis-en Narre-konstenaer/ soo had ghy u recht ghetyteleert/ want het is maer Narre werck andere luyden haer questien aen te slaen/ en andere lieden haer werck/ (wat mach ick segghen werck) heele boecken uyt te geven van andere Autheuren voor u eygen; Abraham de Graef 't blijckt hier niet aen dat de Menisten gauwe Konstenaers zijn/ als onder andere Religien/ hoewel ghy eens teghens my geseght hebt dat het scheen of Godt de Menisten uytsonderde; want seght ghy daer is Geraard Kinckhuysen tot Haerlem/ en Dirck Rembrantsz. van Nierop, en Mr. Sybrant zal. die Menist zijn/ en hy woude seggen ick ben mede Menist: Wel Graefje wilje u by sulcke mannen vergelijcken/ nu den Hooghgeleerden Professor de Bye, en oock den Professor Schoten zal. tot Leyden/ zijn die oock Menist/ en Wasenaer tot Uytrecht en Jacob Brasser tot Hoorn/ zijn dat oock Menisten? en meer andere die ick soude konnen aenwijsen/ dat gauwe mannen zijn/ en niet sulcke Mis-en Narre-konstenaers als ghy zijt: Ick soude noch wel meer van Graefjen schrijven/ maer sal 't hier by laten tot naerder gelegentheyt.

Het wordt tijd dat ook meester Anhaltin een woordje mag zeggen, hij heeft al de tijd dat ik Van Leeuwen aan het woord liet rustig zitten wachten. U moet hem even voor U roepen; een deftig schoolmeester, haast zalvend pratend, zachtzinnig en oprecht, vooral oprecht. Hij praat niet luid en zorgt er voor iedere bewering door een, al dan niet passend gekozen, Bijbeltekst te illustreren. Hoor, op vaderlijke, vermanende toon zegt hij nog net even tegen Van Leeuwen, die inwendig nog woedend op de eerste rij is gaan zitten, dat hij meer in de Heilige Schriften moest lezen naast zijn lectuur van Euclides, hij moest het één doen en het andere niet laten.

Nu richt hij zich tot U:

„Eer en achtbare seer discrete beminde Bueren, seer aengenaem is te betrachten en te lesen de spreucke der drie jongelingen des Koninghs Darus, die een yegelyck van haer schreven, wie de sterckste was.

De eerste schreef, de Wyn is de sterkste.

De tweede schreef, de Koningh is de sterckste.

De derde schreef, de vrouwen zijn de sterkste, maar bovenal overwint de Waerheydt. (Esdre 3 en 4)".

„Dat ick tegens Cornelis van Leeuwen moet schryven is my hertelyck leet / daer van is Godt myn getuyge / hy heeft niemant te dancken als labbekackers / lasteraers en leugenaers die my by hem hebben aengeset en belogen / daer nae hem selven dat hij haer alsooveel geloofs heeft gegeven / hy Cornelis van Leeuwen heeft meer op syn eygen Echo en Weerklanck te letten / hy en stellet my mede onder de Geometrische Apen."

Maar luistert U nog even langer naar deze zeer oprechte schoolmeester:

„Als het wederom gebeurt my te lasteren, soo sal ick haer niet ontsien meer soodanige dwasen en sotten tegelyck met malkanderen in eenen Mortier steecken en stooten die te samen tot stof! Ick sal Van Leeuwen een oog uytsteken en den opgeblaesen Leeuw de voeten voor en after afkappen, also dat hy syn levedaghe de smert en lyden voelen sal."

„U.E. Ootmoedigen seer willigen Dienaer Christianus Martini Anhaltin. Tot Amsterdam. Op de Zeedyck daer de Konst-Schoole uythanght en de Stuerman op de Stock staet. Oock houd'ick Jonghmans en Scholiers in de kost."

Als U zin heeft kunt U dus nog een tijdje bij deze zachtmoedige schoolmeester in de kost en lering gaan.

Abraham de Graaf is een heel andere figuur. In zijn ontleding van de Bril blijft hij zakelijk en weerlegt vele beweringen van Van Leeuwen door zuivere bewijzen. Over zijn andere boeken spreekt zelfs De Gelder nog zeer waarderend. Zijn vriend Claes Hendricksz. Gietermaker neemt het scheldwerk van hem over, door het schrijven van een boekje:

„Den Amsterdamschen belachelycken geometrischen brilmaker Cornelis van Leeuwen. Voorgestelt in een vertooningh der opgeraepte vuyle leugenen ende opgeblasen Quacksalvers-redenen ontrent synen bril, voor de Amsterdamsche belachelycke Geometristen."

Tot slot komt nu Van Leeuwen zich nog verweren tegen alles, wat men over hem gezegd heeft. De beste methode van verweer is een nieuwe reeks schimpscheuten, die U kunt vinden in zijn:

„Antwoordt, tegen den belachelycken Geometrist en Brilsifter Klaes

Hendricksz Gietermaker; waer in ick wederlegge al 'tgene hy uyt myn Bril gesift heeft en de valsche logens die hy my te laste leyt: en oock noch vorder bewesen wat voor een broddelaer hy is".

Een dichterlijke proeve hieruit moge voldoende illustratie zijn.

Gietermaker.

Met logens gaenje te samen om,
Dat recht is maeckje te degen krom;
Met logens soeckje my te verbluffen,
'k Ben geen Karseboom, 'k sal niet suffen:
Godt helpt de logenaers tot den val,
De waerheyt beklijft boven al.

Deze pennestrijd tussen Van Leeuwen, Anhaltin, De Graaf en Gietermaker is in één band gebonden aanwezig in de Bibliotheek van het Wiskundig Genootschap (depot U.B. Amsterdam, wordt niet buiten het gebouw uitgeleend).

Uitgebreide overzichten over het leven van wiskundigen in de 16de en 17de eeuw vindt men in:

G. A. Vorsterman van Oyen, 144 Vraagstukken van Nederlandsche Wiskundigen der XVIIde eeuw. (Schoonhoven 1868).

P. Langendijk, De wiskunstenaars of het gevlugte Juffertje, speciaal de inleiding van G. W. Wolthuis in de uitgave van J. M. Meulenhoff.

Tot slot wilde ik nog enige opgaven noemen uit de Bril om een indruk van de problemen in die tijd te geven. Gedeeltelijk hebben we ze omgezet in het hedendaagse formuleschrift.

1. Van $\triangle$ ABC is gegeven $\overline{BC} = 15$; M is het middelpunt van de omgeschreven cirkel, $\overline{AM} = 9$; $\angle BAC = 3 \angle MAC$. Te berekenen $\overline{AB}$ en $\overline{AC}$.

2. Gegeven een koordenvierhoek ABCD ($\overline{AB} = 6$; $\overline{BC} = 12$; $\overline{CD} = 9$; $\overline{DA} = 8$). Bereken de stukken waarin de middellijn uit D de zijde BC verdeelt.

3. Twee getallen leveren na vermenigvuldiging 100 en na deling 6. Welke zijn die getallen?

4. „Voorgegeven twee Boomen / waer van de eenen langh is 80 voeten als CT en d'ander is langh 60 voeten als AV. Staen van malkanderen 100 voeten als AC, ende sy syn met de toppen tegen malkanderen aangevallen als in B, nu wordt er een lootlijn als BD van de toppen neder gedacht tot de grondt toe. Vrage hoeveel

voeten dat de lijn van de toppen tot de grondt langh is geweest?" (Antwoordt 48 voeten voor 't begeerde).

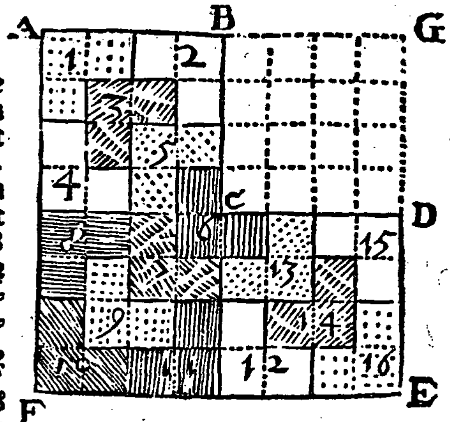
5. Van twee getallen is het verschil 14 en het product 2352. De meetkundig geformuleerde oplossing gaat voor verschil v en product p via de berekening $p + (\frac{1}{2}v)^2 = q^2$, de getallen zijn $q + \frac{1}{2}v$ en $q + \frac{1}{2}v$.

6. Zoek een getal x zodat zowel $x + 16$ als $x - 16$ een kwadraat oplevert. (Oplossing $\frac{1}{2} . 16 = 8$, $8^2 + 1^2 = 65$ is het gevraagde getal; door de keuze $x = (\frac{1}{2}a)^2 + 1$ worden $x + a$ en $x - a$ beide kwadraten).

De 7e geven we in de oorspronkelijke vorm, met het naschrift; boven de linkse bladzijden staat: Den Bril voor de Amsterdamsche en boven de rechtse: Belachelijcke Geometristen.

Sevenſte Queſtie.

Daer is een Winckelhaeck als dese nevenstaende figuer ABCDEF. Waer van AB. BC. CD. DE. malkanderen ghelijck zijn/ als mede AF gelijck FE, dese Winckelhaeck begeert men te deelen in 16 ghelijcke deelen/ dat yder deel van yder langhte en breete/ als mede van een form is.



Demonſtratie.

Terwijl CD ghelijck is aen AB ofte BC, daerom is dan oock BG of GD oock gelijck aen AB, soo volght dan mede dat AG. GE. FA. de een de ander gelijck is. Nu dit soo zijnde/ dan deel ick yder zijde in 8 ghelijcke deelen / en dan twee zijden met malkanderen ghemultipliceert / dat is 8 met 8 komt 64 vierkante quadratjens voor de inhoudt AGEF. Nu om dat AB gelijck is aen BG, soo is 4 deelen/ dit gequadrateert komt 16 voor 't quadrat BGDC, dit getrocken van 't groote quadrat AGEF 64/ daer rest noch 48 kleyne quadratjens voor de Winckelhaeck ABCDEF, nu hy wil dese Winckelhaeck ghedeelt hebben in 16 deelen van een form/ soo deelt 48 door 16/ daer komt 3 quadratjens voor een deel van de 16 deelen die men begeert / teeckent dan 16 Winckelhaeckjens / yder van drie kleyne quadratjens / als in de figuer te sien is/ soo hebbe ick de groote Winckelhaeck gedeelt in 16 kleyne winckelhaeckjens/ die d'een d'ander gelijck en van een form zijn/ na den eysch.

Dese

Dese Questie is openbaer tot Doesburch aengeslaghen/ van de Landtmeeter die daer woont / en is my van een Liefhebber/ aldaer woonachtig/ gesonden / de reden waerom ickse hier stel gesolveert / is dese / om dat dese Lantmeeter gaet uytstropen datter niemandt in de werelt is die dese Questie kan solveeren / hy seydt dat hyse de gheleertste lieden / als Professors/ Lantmeeters tot Leyden en tot Uytrecht/ en op andere plaetsen heeft voorgestelt/ en hebbense noyt konnen solveeren / dese Questie is al te slecht om demonstratie van te geven / ick laet staen yemant dese voor te stellen of aen te slaen/ en dat noch de geleertste van 't Lant; maer 't gaet met dese Lantmeeter / als met dese Belachelijcke Geometristen / weet hem oock moy met swetsen en windtbuylen te behelpen / en oock de fraeye Liefhebbers mede gaen blameeren / als al de Broddelaers ghewoon zijn te doen / hier uyt dan volght dat hy mede een Broeder van dese ghemeente is / en een van de Belachelijcke Geometristen.

Ik besluit als Van Leeuwen (die zijn belofte ook niet na kwam) met: „Nu wat aengaet dese en de andere Questien die ick hier ongedemonstreert ghestelt hebbe, sal ick soo 't my de Goede Godt toelaet / in 't kort met myn hondert Questien aen den dagh brenghen / hiermede afbrekende / en aldus gemaeckt het

EYNDE

BOEKBESPREKING.

A. Th. Sedee, *Gonio- en Trigonometrie.* Hilversum, Firma Beekman en De Vos (v/h. Schaafstal), 1948. Deel I, *f* 1,65; deel II en III, *f* 3,30.

De volledige titel van dit werk vermeldt, dat het bedoeld is voor Wiskunde L.O. en onderwijs aan H.B.S. en gymnasium-B, maar blijkens het voorbericht stelt de schrijver zich nog een andere categorie van gebruikers voor, die met een beknopten cursus kunnen volstaan, en die de gewone berekeningen in planimetrische figuren moeten kunnen verrichten. In verband hiermede is het boek in drie delen gesplitst, waarvan het eerste voor laatstgenoemde categorie van gebruikers bestemd is, het tweede moet ook worden doorgewerkt op H.B.S. en gymnasium, terwijl het derde enige uitbreidingen heeft in verband met de exameneisen voor Wiskunde L.O., mogelijk ook voor K I. Deel I, dertig bladzijden tekst, is afzonderlijk verkrijgbaar gesteld, deel II en III, samen 90 bladzijden, zijn gezamenlijk verkrijgbaar. Deze verdeling is wat vreemd: de leerlingen der scholen hebben juist I en II nodig.

Deze concentrische behandelingswijze heeft natuurlijk haar voordelen; of deze opwegen tegen het bezwaar, dat herhaaldelijk veranderingen in de definities moeten worden aangebracht, is een quaestie van smaak. Ook zal het van de smaak des lezers afhangen, hoe hij staat tegenover sommige taalkundige en stylistische eigenaardigheden van het boek, b.v. het gebruik van „volkomen gelijk" waar „gelijk" bedoeld is, de spelling „hypothenusa" en het gebruik van aanhalingstekens bij sommige (niet alle) eigennamen. Er wordt nl. steeds geschreven over de stelling van „de Moivre" en van „de Ceva", terwijl Pythagoras, Snellius, Brocard e.a. het zonder aanhalingstekens moeten stellen.

Erger wordt het, als de taalkundige slordigheid zo ver gaat, dat de inhoud van de zin er door wordt aangetast. Reeds de tweede zin van § 1: „de grootte van die hoek is dan onafhankelijk van de lengte der benen OX en OA, maar alleen van de opening tussen die benen is" noch naar de vorm, noch wat de inhoud betreft fraai. En de bewering in de vierde zin, dat de grootte van die hoek dus volkomen de rechthoekige driehoeken OAB, OA_1B_1 enz. bepaalt, is onjuist. Het voor het onderwijs zo gewichtige onderscheid tussen vorm of functie en vergelijking wordt niet steeds in het oog gehouden, althans op bladzijde 13 wordt over de betrekking

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}$$

gezegd, dat deze *vorm* een onbekende hoek bevat, die zo bepaald moet worden, dat de *vorm waar* wordt (cursiveringen van de recensent).

Wat wordt bedoeld in § 30, waar de schrijver zegt: „de functie $y = \sin x$ is een *indirecte* functie van x, een verandering van $4x$ doet de sinus veranderen en daardoor pas verandert y"? Is dan b.v. ook x^2 een indirecte functie van x? Of $y = x^2$?

Als dit boekje een tweede druk beleeft, mag het wel geducht worden nagezien.

J. H. S.

P. Wijdenes, *Middel-Algebra*, Leerboek voor Akte-studie en inleiding tot de analyse; 4e druk, deel I, 419 blz., 165 fig., P. Noordhoff, Groningen-Batavia (1948); geb. ƒ 17.50.

Dat van dit werk binnen betrekkelijk korte tijd een vierde druk nodig blijkt, is wel het beste bewijs voor de belangstelling die het heeft ondervonden. Het richt zich blijkens het voorwoord tot verschillende categorieën van lezers, waarvan die, welke zich voor het examen K I voorbereiden, wel de grootste zal zijn. Het is geschreven in de stijl, die voor de schrijver kenmerkend is, geeft een groot aantal voorbeelden om de theorie toe te lichten en bevat een ruime collectie vraagstukken ter oefening van de lezer. Het voldoet zozeer aan de bestaande behoefte, dat nadere aanbeveling vrijwel overbodig mag heten.

O. BOTTEMA.

Verschenen:

GONIO- EN TRIGONOMETRIE

VOOR WISKUNDE L.O. EN ONDERWIJS
AAN H.B.S. EN GYMN.-B

door

A. Th. SEDEE

Leraar Gymnasium - Den Haag

DEEL I geeft voor hen, die met een beknopte cursus kunnen volstaan een afgerond geheel. Prijs *f* 1.65

DEEL II en III (in 1 band) geven behalve dit ook algebraïsche afleidingen en toepassingen en enige uitbreiding in verband met exameneisen speciaal voor Wisk. l.o. (mogelijk ook K. I). Prijs *f* 3.30

Kort — maar niet beknopt.
419 met zorg gekozen opgaven.
Met antwoorden.

Ook in de boekhandel verkrijgbaar

Fa. BEEKMAN & DE VOS v/h Schaafstal - HILVERSUM

Ter perse:

P. WIJDENES en Dr H. STREEFKERK

OEFENBLADEN

VOOR DE BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

5e druk

Twee schriften: I met 48 blz., II met 64 blz. Formaat 18 bij 24 cm. (blocnote-grootte).

Daarnaast:

Handleiding bij de Oefenbladen

bevattende de hele Beschrijvende Meetkunde voor de H.B.S. B; 64 blz. met 124 figuren. Verschijning: de 1e week van Januari 1949.

Vraagt een ex. ter kennismaking aan de uitgever.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN - BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Tekent in op

SIMON STEVIN

26e JAARGANG

onder redactie van Prof. Dr J. HAANTJES, Dr J. BILO en Prof. Dr S. C. VAN VEEN.

De 25e Jg. bevatte artikelen van: G. Beerten, V. van Bouchout, E. W. Beth, M. G. Beumer, J. Bilo, F. van der Blij, O. Bottema, A. Claeijs, R. Deaux, E. J. Dijksterhuis, H. Freudenthal en B. L. van der Waerden, L. Godeaux, J. Haantjes, F. de Kok, J. Korevaar, K. Mahler, R. Mertens, B. van der Pol, A. J. Staring, G. Verriest, J. E. Verschaffelt, F. Wuytach en P. Wuyts.

Voor int. op Euclides en op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde slechts *f* 10 per jg.

NIEUWE SCHOOLALGEBRA

door

Dr H. J. E. BETH, AMERSFOORT

en

P. WIJDENES, AMSTERDAM

I.	**Achttiende druk**	156 blz. 21 fig. *f* 3.—*
II.	**Zestiende druk**	204 blz. 50 fig. *f* 3.—*
III.	**Elfde druk**	198 blz. 60 fig. *f* 3.—*

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Vijfde druk. 164 blz. 20 fig. *f* 2.90*.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Ter overname gevraagd:

Oude Jaargangen „Euclides"

Aanbiedingen aan O. CORNELISSEN, Albr. Dürerstr. 38, Amsterdam Z.