

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOOT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, LEEUWARDEN
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND - DR. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELNBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

23e JAARGANG 1948

Nr. 4

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exakte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8.00*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 8.00*) zijn ingetekend, betalen f 6.75*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1946 t/m 31 Augustus 1947 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Prof. Dr J. HAANTJES, Vectorrekening met toepassingen in de meetkunde; slot	177
P. J. VAN ALBADA, De regelmatige zeventienhoek	183
Vacantie-cursus, Wiskunde	185
Mr B. JOHNSON, Mathematics in the English Grammar School	186
P. BOCKSTAELE, De geschiedschrijving der Wiskunde in Vlaanderen .	204
Prof. Dr P. H. VAN LAER, Causaliteit, determinisme, voorspelbaarheid	209
Dr L. KUIPERS, Solution of a geometric problem	214
„ Proof of the theorem of Desargues	217
Korrels LXXXV en LXXXVI	219
Ingekomen boeken	221
Boekbespreking	222
Jaarvergadering van L.i.w.e.n.a.g.e.l. op 5 Jan. 1948	223

men achtereenvolgens de punten P, Q, R en S. Stel $A_1P = \lambda A_1A_2$, $A_2Q = \mu A_2A_3$, $A_3R = \nu A_3A_4$, $A_4S = \varrho A_4A_1$. Dan is (zie (1))

$$\begin{aligned} p &= \lambda a_2 + (1 - \lambda)a_1 \\ q &= \mu a_3 + (1 - \mu)a_2 \\ r &= \nu a_4 + (1 - \nu)a_3 \\ s &= \varrho a_1 + (1 - \varrho)a_4. \end{aligned} \quad (3)$$

Liggen nu de punten P, Q, R en S in één vlak dan bestaat er een betrekking $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$ met $\Sigma \alpha = 0$.

Substitutie van (3) geeft de volgende lineaire betrekking voor de vectoren a_i :

$$[\alpha(1 - \lambda) + \delta\varrho]a_1 + [\beta(1 - \mu) + \alpha\lambda]a_2 + [\gamma(1 - \nu) + \beta\mu]a_3 + [\delta(1 - \varrho) + \gamma\nu]a_4 = 0.$$

De som van de hierin voorkomende coëfficiënten is nul wegens $\Sigma \alpha = 0$. Toch liggen de punten A_i niet in één vlak.

In verband met stelling 2 kan dit alleen als ieder der vier coëff. nul is. Dus

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda - 1) &= \delta\varrho; & \beta(\mu - 1) &= \alpha\lambda; \\ \gamma(\nu - 1) &= \beta\mu; & \delta(\varrho - 1) &= \lambda\nu. \end{aligned} \quad (4)$$

Vermenigvuldiging geeft na deling door $\alpha\beta\gamma\delta$

$$(\lambda - 1)(\mu - 1)(\nu - 1)(\varrho - 1) = \lambda\mu\nu\varrho$$

of

$$A_1P \cdot A_2Q \cdot A_3R \cdot A_4S = A_2P \cdot A_3Q \cdot A_4R \cdot A_1S. \quad (5)$$

Opmerking. We deelden door $\alpha\beta\gamma\delta$. Dit mag alleen als $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$. Is b.v. $\alpha = 0$, dan betekent de bovengenoemde lineaire betrekking voor p , q , r en s , dat Q, R en S op een rechte liggen. Men kan dan op meetkundige wijze aantonen, dat twee der punten in een hoekpunt liggen en dat ook weer (5) geldt.

Conclusie: Liggen de punten P, Q, R en S in één plat vlak, dan geldt (5).

Geldt omgekeerd (5) dan zijn de vergelijkingen (4) met α , β , γ en δ als onbekenden oplosbaar, d.w.z. voor p , q , r en s bestaat de betrekking $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s = 0$. Bovendien volgt uit (4) nog $\Sigma \alpha = 0$, zodat volgens stelling 2 de 4 punten in één vlak liggen.

III. *Zwaartepunt.* Beschouw een driehoek ABC. De vector van het midden van AB is $\frac{1}{2}(a + b)$. Een punt van de zwaartelijns uit C heeft dus tot vector

$$\frac{1}{2}\lambda(a + b) + (1 - \lambda)c.$$

Evenzo bepaalt de vector

$$\frac{1}{2}\mu(b + c) + (1 - \mu)a$$

een punt van de zwaartelijns uit A. Stelt men deze beide uitdrukkingen

aan elkaar gelijk, dan vindt men de vector z van het zwaartepunt

$$z = \frac{1}{3}(a + b + c) = \frac{2}{3}\left(\frac{a + c}{2}\right) + \frac{1}{2}b.$$

Met stelling 1 leest men hieruit af, dat Z ook ligt op de zwaartelijns uit B en tevens, dat de verhouding van de stukken, waarin Z de zwaartelijns verdeelt, is als $2 : 1$.

Beschouw thans 4 punten A, B, C en D (b.v. de hoekpunten van een tetraëder of ook vier in één vlak gelegen punten). We zullen laten zien, dat het zwaartepunt van deze punten tot vector heeft $z = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$. Immers

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{4}(a + b + c + d) = \frac{3}{4}\left(\frac{a + b + c}{3}\right) + \frac{1}{4}d \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{a + b}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{c + d}{2}\right). \end{aligned}$$

Uit de eerste gelijkheid volgt (opm. 1), dat Z ligt op de zwaartelijns uit D en deze verdeelt in de verhouding $3 : 1$. Hetzelfde geldt t.o.v. de andere zwaartelijnen. Uit de tweede gelijkheid volgt dat Z ligt op de verbindingslijns van de middens van AB en CD (in 't algemeen van 2 overstaande zijden) en wel in het midden van dit lijnstuk.

IV. Als volgende toepassing bewijzen wij:

De middens van de diagonalen van een volledige 4-zij liggen op een rechte.

Bewijs. De punten a, b, p en q (zie fig.) liggen in een plat vlak.

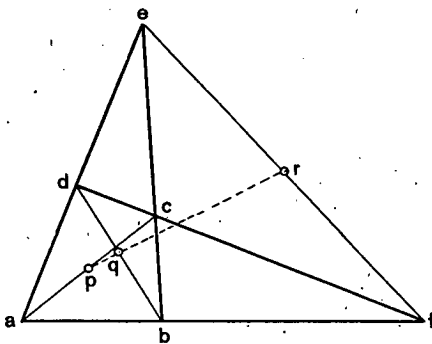


Fig. 2.

Volgens stelling 2 bestaat er dus een lineaire betrekking

$$\alpha a + \beta b + \gamma p + \delta q = 0 \text{ met } \Sigma \alpha = 0. \quad (6)$$

Substitutie van

$$p = \frac{1}{2}(a + c); \quad q = \frac{1}{2}(b + d)$$

geeft

$$(a + \frac{1}{2}\gamma)a + (\beta + \frac{1}{2}\delta)b + \frac{1}{2}\gamma c + \frac{1}{2}\delta d = 0.$$

Hieruit vindt men de snijpunten e en f , namelijk

$$e = \frac{(a + \frac{1}{2}\gamma)a + \frac{1}{2}\delta d}{a + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta} = \frac{(a + \frac{1}{2}\gamma)a + \frac{1}{2}\delta(2q - b)}{\frac{1}{2}(a - \beta)},$$

$$f = \frac{(a + \frac{1}{2}\gamma)a + (\beta + \frac{1}{2}\delta)b}{a + \beta + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{2}\delta} = \frac{\frac{1}{2}\gamma a + \frac{1}{2}\delta b - \gamma p - \delta q}{\frac{1}{2}(a + \beta)}$$

en

$$r = \frac{1}{2}(e + f) = \frac{2}{a^2 - \beta^2} \{ -a\delta a - \beta\delta b + \dots p + \dots q \}.$$

Met (6) volgt hieruit $r = \lambda p + \mu q$. Deze betrekking is onafhankelijk van de ligging van O , daar (6) dit ook is. Maar dit houdt in dat de som van de coëff. in de lineaire betrekking tussen p , q en r nul is, d.w.z. $\lambda + \mu = 1$, m.a.w. de punten P , Q en R liggen op één rechte.

Nog enige theorie. Het zal U opgevallen zijn dat de tot dusverre behandelde toepassingen alle tot de affiene eigenschappen behoren. Voor deze eigenschappen is de methode dan ook zeer geschikt. Toch behoeft men zich niet tot het affiene gedeelte te beperken, zoals uit het volgende zal blijken. Hiertoe willen we voor vectoren nog een bewerking invoeren en wel de *scalaire* vermenigvuldiging.

Onder het scalaire product $u \cdot v$ van twee vectoren u en v verstaat men het getal, dat verkregen wordt door het product van de lengten van u en v te vermenigvuldigen met de cosinus van de door de vectoren ingesloten hoek of ook door de lengte van de ene vector te vermenigvuldigen met de projectie van de tweede op de eerste. Het is niet moeilijk uit de definitie de volgende eigenschappen te bewijzen

$$u \cdot v = v \cdot u$$

$$u \cdot (v \pm w) = u \cdot v \pm u \cdot w$$

$$u \cdot v = 0 \Leftrightarrow u \perp v.$$

Dit betekent dat haäkjes in de scalaire vermenigvuldiging kunnen worden weggewerkt op dezelfde manier als waarop men dat in de algebra gewend is. Daar in het verderé alleen maar sprake is van scalaire vermenigvuldiging zullen we ter vereenvoudiging van de notatie de „stip” in $u \cdot v$ weglaten en u^2 schrijven voor $u \cdot u$.

Zetten we thans het lijstje met toepassingen voort.

V. Uit de boven besproken rekenregels volgt, dat ook voor vectoren de volgende identiteit geldt:

$$(a - b)^2 \equiv a^2 + b^2 - 2ab.$$

Voor de driehoek OAB leest men hieruit de cosinus-regel af:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \angle AOB.$$

VI. *De hoogtelijnen.* Voor elk viertal vectoren geldt de identiteit
 $(a - b)(h - c) + (b - c)(h - a) + (c - a)(h - b) \equiv 0. \quad (7)$

Laten nu a , b en c de vectoren zijn van de hoekpunten van een driehoek en h die van het snijpunt H van de hoogtelijnen uit A en C.

Daar $a - b$ de grootte en richting heeft van de vector $\overrightarrow{BA}$ volgt dan

$$(a - b)(h - c) = 0; \quad (b - c)(h - a) = 0.$$

Maar dan is ook de derde term van (7) gelijk nul, hetgeen betekent, dat de derde hoogtelijn ook door H gaat.

VII. *De middelloodlijnen.* We beschouwen de identiteit

$$(a - b)\left(m - \frac{a + b}{2}\right) + (b - c)\left(m - \frac{b + c}{2}\right) + (c - a)\left(m - \frac{c + a}{2}\right) \equiv 0.$$

Laat a , b en c dezelfde betekenis hebben als in VI, en m de vector van het snijpunt M van de middelloodlijnen van AB en BC. Dan is

$$(a - b)\left(m - \frac{a + b}{2}\right) = 0; \quad (b - c)\left(m - \frac{b + c}{2}\right) = 0.$$

Uit de bovengenoemde identiteit volgt dan, dat ook de derde term nul is, hetgeen betekent, dat de derde middelloodlijn ook door M gaat.

Er geldt dus

$$(a - b)(h - c) = 0; \quad (a - b)(2m - a - b) = 0.$$

Optelling geeft $(a - b)(h + 2m - 3z) = 0$. Op dezelfde manier volgt $(b - c)(h + 2m - 3z) = 0$. Nu is de vector $h + 2m - 3z$ verkregen door optelling van twee in het vlak ABC (of // aan ABC) gelegen vectoren. De genoemde betrekkingen betekenen echter dat de vector zowel loodrecht staat op AB als op BC. Dus is de vector de nulvector en men heeft

$$z = \frac{1}{3}h + \frac{2}{3}m,$$

wat wegens stelling 1 inhoudt dat Z ligt op de lijn HM zodanig dat $HZ : ZM = 2 : 1$.

VIII. Uit de identiteit

$$2(a^2 + b^2) \equiv (a + b)^2 + (a - b)^2$$

of

$$\left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}(a - b)^2$$

volgt voor de driehoek OAB de zwaartelijnsformule.

IX. Ook de identiteit

$$(\lambda a + \mu b)^2 \equiv (\mu + \lambda)(\lambda a^2 + \mu b^2) - \mu\lambda(a - b)^2$$

kan men meetkundig interpreteren in driehoek OAB. De vector

$$p = \frac{\lambda a + \mu b}{\lambda + \mu}$$

behoort namelijk tot een punt P op de zijde AB. Deling van de bovengenoemde identiteit door $\mu + \lambda$ geeft

$$(\mu + \lambda) p^2 = \lambda a^2 + \mu b^2 - \frac{\mu \lambda}{\mu + \lambda} (a - b)^2.$$

waaruit men de stelling van Stewart afleest als men bedenkt dat $AP : PB : AB = \mu : \lambda : (\mu + \lambda)$.

X. De identiteit

$$\left(\frac{a + b + c}{3} \right)^2 \equiv \frac{1}{3} (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{9} \sum (a - b)^2$$

levert een formule op voor de zwaartelijn in de tetraëder OABC, namelijk (Z is het zwaartepunt van $\triangle ABC$)

$$OZ^2 = \frac{1}{3} (OA^2 + OB^2 + OC^2) - \frac{1}{9} (AB^2 + BC^2 + AC^2).$$

Daar O ook in het vlak ABC gekozen mag worden, b.v. in M, geeft dit ons tevens een formule voor MZ^2 en dus ook voor $HM^2 = 9MZ^2$.

$$HM^2 = 9R^2 - AB^2 - BC^2 - AC^2.$$

(R is de straal van de omgeschreven cirkel). Een andere formule voor HM^2 wordt gevonden uit de identiteit

$$(a + b)^2 + (b + c)^2 + (c + a)^2 = (a + b + c)^2 + a^2 + b^2 + c^2,$$

als men O in M neemt, dus $m = 0$, waaruit

$$h = 3z - 2m = a + b + c.$$

De identiteit luidt dan

$$h^2 = (h - a)^2 + (h - b)^2 + (h - c)^2 - a^2 - b^2 - c^2$$

of

$$HM^2 = AH^2 + BH^2 + CH^2 - 3R^2.$$

XI. Beschouw een vierhoek ABCD, waarbij we voorlopig geheel in het midden laten of de punten wel of niet in een vlak liggen. De identiteit

$$(a + b - c - d)^2 - (a + d - b - c)^2 \equiv 4(a - c)(b - d)$$

of ook

$$\left(\frac{a + b}{2} - \frac{c + d}{2} \right)^2 - \left(\frac{a + d}{2} - \frac{b + c}{2} \right)^2 \equiv (a - c)(b - d)$$

geeft meetkundig

$$PQ^2 - RS^2 = AC \cdot BD \cos \varphi$$

waar φ de hoek is, die de diagonalen AC en BD met elkaar maken. Zoals we reeds zagen (zie III) snijden PQ en RS elkaar in het zwaartepunt $z = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$, dat het midden is zowel van PQ als van RS.

Laten we nu aannemen, dat de figuur een vlakke figuur is, waarvan de diagonalen loodrecht op elkaar staan. Dan is $PQ = RS$ en is er dus een cirkel mogelijk met Z als middelpunt, die door P, Q, R en S gaat. Daar PQ middellijn is van de cirkel zal deze DC nog snijden in het voetpunt van de loodlijn uit P op DC neergelaten. Zo vindt men acht punten van deze cirkel.

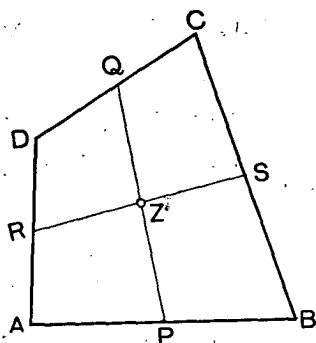


Fig. 3.

Passen we dit resultaat toe op de vierhoek $ABCH$, waar H het hoogtepunt van $\triangle ABC$ is. De diagonalen AC en BH staan inderdaad loodrecht op elkaar. De bedoelde cirkel gaat door de middens van AB, BC, CH, HA en door de voetpunten van de loodlijnen uit C en A . Toepassing op de vierhoek $ACBH$ geeft een cirkel door de middens van AC, CB, BH, AH en de voetpunten der loodlijnen uit B en A . Daar deze twee cirkels drie punten gemeen hebben vallen ze samen. Het is de bekende negenpuntcirkel. De vector van het middelpunt is

$$n = \frac{1}{4}(a + b + c + h) = \frac{1}{4}h + \frac{3}{4}z = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}m$$
 d.w.z. N is het midden van HM .

Uit deze beschouwingen blijkt wel, dat de vectorrekening in de meetkunde met vrucht gebruikt kan worden. Het veld van de toepassingen kan nog vergroot worden door de invoering van het zogenaamde vectoriële product. U kunt hiervan en van het hierboven behandelde o.a. enkele toepassingen vinden in een boek van Louis Brand, *Vector and tensor analysis*, New York, John Wiley & Sons, 1947.

DE REGELMATIGE 17-HOEK.

Dat de regelmatige 17-hoek met passer en lineaal te construeren is, is bekend sinds Gauss ¹⁾ de binomiaal-vergelijking $x^{17} = 1$ wist op te lossen, maar dat voor de analyse geen kennis van de algebra der complexe getallen nodig is, ben ik nog nooit in de litteratuur tegengekomen.

Hieronder volgt een oplossing van het vraagstuk, die van geen andere kennis gebruik maakt dan van de uit de gewone vlakke meetkunde bekende stellingen van Pythagoras en Ptolemaeus.

Zoals we om de regelmatige 5-hoek te construeren eerst de constructie van de 10-hoek analyseren, zo onderzoeken we ook hier niet de 17-hoek zelf, maar de 34-hoek. Zijde en diagonalen van de regelmatige 34-hoek duiden we aan met k_n , waarbij k_n de koorde is die een boog van $\frac{n}{17}$ van de halve cirkelboog onderspant.

Beschrijven we in de halve cirkel nu een gelijkbenig trapezium met als been bv. k_3 , zodat de kortste van de evenwijdige zijden k_{11} en de diagonaal k_{14} wordt, dan geeft toepassing der stelling van Ptolemaeus:

$$k_{14}^2 = 2R \cdot k_{11} + k_3^2$$

terwijl volgens de stelling van Pythagoras

$$k_{14}^2 + k_3^2 = 4R^2.$$

Uit beide vergelijkingen samen vinden we

$$k_3^2 = 2R^2 - R \cdot k_{11}.$$

Stellen we (om in deze tijd van materiaal-schaarste papier en inkt te sparen) $R = 1$, dan wordt het complete stel vergelijkingen, dat we op die manier af kunnen leiden:

$$\begin{array}{llll} k_1^2 = 2 - k_{15} & k_5^2 = 2 - k_7 & k_9^2 = 2 + k_1 & k_{13}^2 = 2 + k_9 \\ k_2^2 = 2 - k_{13} & k_6^2 = 2 - k_5 & k_{10}^2 = 2 + k_3 & k_{14}^2 = 2 + k_{11} \\ k_3^2 = 2 - k_{11} & k_7^2 = 2 - k_3 & k_{11}^2 = 2 + k_5 & k_{15}^2 = 2 + k_{13} \\ k_4^2 = 2 - k_9 & k_8^2 = 2 - k_1 & k_{12}^2 = 2 + k_7 & k_{16}^2 = 2 + k_{15} \end{array}$$

Nemen we nu een gelijkbenig trapezium, waarvan de evenwijdige zijden allebei koorden zijn, bv. k_3 en k_{13} . Het been wordt dan k_5 , de diagonaal k_8 .

Toepassing der stelling van Ptolemaeus geeft dan weer:

$$k_3 \cdot k_{13} = k_8^2 - k_5^2 = k_7 - k_1.$$

¹⁾ Zie Sch u h Lessen over de Hogere Algebra II § 72.

Op dezelfde manier vinden we:

$$\begin{array}{llll}
 k_1 k_3 = k_{15} - k_{13} & k_3 k_5 = k_{15} - k_9 & k_5 k_9 = k_{13} - k_3 & k_7 k_{15} = k_9 + k_5 \\
 k_1 k_5 = k_{13} - k_{11} & k_3 k_7 = k_{13} - k_7 & k_5 k_{11} = k_{11} - k_1 & k_9 k_{11} = k_{15} + k_3 \\
 k_1 k_7 = k_{11} - k_9 & k_3 k_9 = k_{11} - k_5 & k_5 k_{13} = k_9 + k_1 & k_9 k_{13} = k_{13} + k_5 \\
 k_1 k_9 = k_9 - k_7 & k_3 k_{11} = k_9 - k_3 & k_5 k_{15} = k_7 + k_3 & k_9 k_{15} = k_{11} + k_7 \\
 k_1 k_{11} = k_7 - k_5 & k_3 k_{13} = k_7 - k_1 & k_7 k_9 = k_{15} - k_1 & k_{11} k_{13} = k_{15} + k_7 \\
 k_1 k_{13} = k_5 - k_3 & k_3 k_{15} = k_5 + k_1 & k_7 k_{11} = k_{13} + k_1 & k_{11} k_{15} = k_{13} + k_9 \\
 k_1 k_{15} = k_3 - k_1 & k_5 k_7 = k_{15} - k_5 & k_7 k_{13} = k_{11} + k_3 & k_{13} k_{15} = k_{15} + k_{11}
 \end{array}$$

Bekijken we nu het eerste stel vergelijkingen, dan zien we dat de koorden met oneven index in 2 cycli uiteenvallen:

$$\begin{array}{ll}
 k_1^2 = 2 - k_{15} & k_3^2 = 2 - k_{11} \\
 k_{15}^2 = 2 + k_{13} & k_{11}^2 = 2 + k_5 \\
 k_{13}^2 = 2 + k_9 & k_5^2 = 2 - k_7 \\
 k_9^2 = 2 + k_1 & k_7^2 = 2 - k_3
 \end{array}$$

wat uitnodigt om te gaan schrijven:

$$\begin{aligned}
 k_{13}^2 - k_1^2 &= k_{15} + k_9 \\
 k_{15}^2 - k_9^2 &= k_{13} - k_1 \\
 (k_{13}^2 - k_1^2)(k_{15}^2 - k_9^2) &= (k_{15} + k_9)(k_{13} - k_1) \\
 (k_{15} - k_9)(k_{13} + k_1) &= 1 \quad \dots \quad (1)
 \end{aligned}$$

en op dezelfde manier:

$$(k_5 - k_3)(k_{11} + k_7) = 1. \quad \dots \quad (2)$$

Stellen we nu

$$k_1 + k_{13} = a \quad k_{15} - k_9 = b \quad k_5 - k_3 = c \quad k_{11} + k_7 = d$$

dan zien we dat alle koorden te construeren zijn zodra we de lijnstukken a, b, c, d hebben; immers in het 2e stel vergelijkingen vinden we:

$$k_1 k_{13} = c \text{ (d.w.z. } cR) \quad k_9 k_{15} = d \quad k_3 k_5 = b \quad k_7 k_{11} = a$$

zodat we de 8 koorden kunnen splitsen in 4 tweetallen waarvan we telkens de som en de middelevenredige kennen.

Volgens de vergelijkingen (1) en (2) is $ab = 1$ en $cd = 1$ zodat we alleen nog $a + b$ of $a - b$, $c + d$ of $c - d$ moeten vinden.

Schrijven we het product ab helemaal uit, dan komt er:

$$\begin{aligned}
 ab &= (k_{13} + k_1)(k_{15} - k_9) = k_{13} k_{15} - k_9 k_{13} + k_1 k_{15} - k_1 k_9 = \\
 &= k_{15} - k_{13} + k_{11} - k_9 + k_7 - k_5 + k_3 - k_1 = 1. \quad (3)
 \end{aligned}$$

We stellen daarom $a - b = e$ en $d - c = f$. Blijft dus over e en f te construeren. Nu is $f - e = 1$ volgens vergelijking (3), terwijl

$$\begin{aligned}
 e \cdot f &= (k_1 + k_{13} + k_9 - k_{15})(k_7 + k_{11} + k_3 - k_5) = \\
 &= 4(k_{15} - k_{13} + k_{11} - k_9 + k_7 - k_5 + k_3 - k_1) = 4.
 \end{aligned}$$

Hiermee is de analyse ten einde.

Het wonderlijke is, dat ik op het moment dat bovenstaande analyse na een tijd geconcentreerd rekenen voor het eerst op een paar kladjes stond, niet meer wist hoe ik eigenlijk op het idee was gekomen het vraagstuk langs deze weg aan te pakken. Achterna valt het wel op dat deze analyse nauwelijks van die van Gauss verschilt: Gauss werkt wel met complexe getallen, maar tot het eind toe blijven ze in toegevoegd complexe tweetallen optreden. Stellen we van de vergelijking $x^{17} = 1$ de wortel $e^{\frac{2\pi i}{17}} = \varepsilon$, zodat alle andere wortels machten van ε worden, dan is b.v.

$$\varepsilon^4 + \varepsilon^{13} = 2 \cos \frac{8\pi}{17} = 2 \sin \frac{\pi}{34} = k_1.$$

Blijkbaar werkt ook Gauss met de koorden van de 34-hoek, maar ze treden bij hem aanvankelijk gecamoufleerd op als sommen van paren toegevoegd complexe getallen. Feitelijk ligt het dus voor de hand om ook eens naar een meer elementaire analyse te zoeken.

Toch heb ik een kleine 20 jaren vast geloofd dat het zonder complexe getallen niet ging. Wij wiskunde-leraren pretenderen dikwijls, dat het wiskunde-onderwijs zo goed is voor de ontwikkeling van het logisch denken en hier loop ik zelf 20 jaar zonder het te merken rond met een onlogisch getrokken conclusie (nog wel op eigen vakgebied), nl. dat uit het feit dat een bepaalde kennis voldoende is voor het oplossen van een probleem ook volgt, dat die kennis noodzakelijk is. Ik zou het interessant vinden van andere collega's te vernemen, welke ervaringen zij op dit punt bij zich zelf hebben opgedaan; speciaal hoe zij tot nu toe hebben gedacht over de al of niet uitvoerbaarheid van een elementaire analyse in bovenstaand vraagstuk.

P. J. VAN ALBADA.

VACANTIE-CURSUS WISKUNDE.

Vanwege het **Mathematisch centrum** zal op 23, 24 en 25 Aug. a.s. een vacantie-cursus voor wiskunde gehouden worden.

De voordrachten zullen voornamelijk betrekking hebben op logica en grondslagenonderzoek.

Nadere bijzonderheden zullen nog bekend gemaakt worden.

Churchill-laan 107, Amsterdam Zuid.

H. MOOY.

MATHEMATICS IN THE ENGLISH GRAMMAR SCHOOL ¹⁾

by

Mr. B. JOHNSON — Accrington, England.

Grammar Schools in England, whether for boys only, girls only or both boys and girls, take pupils at the age of 11. These pupils generally come from the primary schools and are selected by means of an examination which usually includes papers in arithmetic and English, tests of intelligence and frequently an interview. On entering the Grammar School the pupil takes a general course comprising English, History, Geography, classical and modern languages, mathematics, science, art, music, handicrafts or domestic science, religious knowledge, physical training and games. This course leads to the School Certificate examination, which is a test of general education and a necessary preliminary for entrance to the professions. The normal period of preparation for this examination is 5 years, but in many schools a small number of the ablest pupils are allowed to take it after 4 years, so that they may spend a larger proportion of their school life on more advanced study in the groups of subjects in which they are most interested. The first part of our discussion will be devoted to the mathematics which is studied in the general school course.

The pupil's time table is divided into periods of 40 or 45 minutes, there being usually 35 such periods per week. As a rule 5 or 6 of them are spent on mathematics. Since the great majority of Grammar Schools are day schools, work is set for the pupils to do at home during the evening. In the early years about 1 hour per week of homework is set in mathematics, but for the older pupils this increases to about 2 hours, usually divided into three equal periods. Of the work in school, usually 2 periods are devoted to algebra, 2 to geometry and 1 or 2 to arithmetic or trigonometry. In the higher classes it is common for the two geometry periods to be taken consecutively so that there shall be sufficient time both to study and master a piece of new geometrical knowledge and also to apply it to the solution of problems.

First Year. On entering the Grammar School the pupil has generally little or no knowledge of algebra or geometry. He is expected to be able to add, subtract, multiply and divide whole

¹⁾ Lecture held on 27th Jan. 1948 for „Thomas Stieltjes”.

numbers and to perform simple calculations involving money, weights and measures and time. As our English system of weights and measures is very elaborate, we cannot be sure that our pupils have mastered all the details of it before they come to us, and a good deal of revision and practice is often necessary. The use of vulgar fractions is taught in the primary schools, but we generally find that our pupils need a good deal of practice in this also. Many of them have little or no knowledge of decimals, so that a good deal of time in the first year is spent in mastering decimal notation and calculations. This is naturally associated with the study of the metric system of weights and measures, and the work of the mathematics teacher has to be linked with that of the teacher of science, who often complains that his pupils do not know any arithmetic. It will be readily understood that our work in both mathematics and science during the first year or two is hampered by the fact that so much time has had to be spent in mastering our system of weights and measures. This means that in the early stages of the course we spend rather a large proportion of our time on arithmetic. There is a good deal of difference between the knowledge and facility of our best pupils and that of the weakest ones, so that the teacher in charge of the younger boys prefers not to try to cover too much ground but to make sure that, by the end of the first year, all the members of his class have a good grasp of vulgar and decimal fractions and the metric system and are able to perform calculations with reasonable accuracy and speed.

The study of algebra begins in the first year of the Grammar School course by the generalisation of arithmetical results and problems. A good deal of oral work is necessary until the pupils are thoroughly familiar with the idea of summing up a large number of results of the same kind by the use of symbols. The same is true of the opposite process, namely that of deriving the result of a particular calculation by substitution in a general formula. Once the use of symbols is understood we then proceed to apply to them the processes of addition, subtraction, multiplication and division and to study the laws of indices. The use of brackets is then introduced, using a great many arithmetical illustrations, and when this technique has been mastered we proceed to the solution of simple equations of an elementary type. To begin with, signless numbers are used throughout, and it is not until the pupils are proficient in all this work that we introduce the notion of directed numbers. In doing this great use is made at first of geometrical illustrations, indicating $+$ and $-$ numbers by points on a line etc.

A great deal of oral work is done at this stage until the application of the four rules to directed numbers is thoroughly understood. We then revise our previous work, bringing in the new knowledge and devoting special attention to the use and removal of brackets. We then introduce more difficult simple equations involving fractions and brackets, and we proceed to the solution of problems by the formation and solution of simple equations. It is necessary to discuss a good many such problems in detail before the pupils are able to form the equations for themselves, and the problems have to be carefully graduated in difficulty, beginning with those which merely involve numbers and not measured quantities. The first year's algebra course is completed by the introduction of graphical methods for showing the variation of quantities, beginning with simple cases of statistical graphs which do not involve the idea of functionality. This gives us an opportunity to correlate our work with that done in other subjects, e.g. Geography.

The work in geometry in the first year is, to begin with, approached practically, and the pupils have a great deal of practice in the use of the ruler, protractor and set-square. By drawing and measurement they discover the sum of the angles of a triangle, the congruence properties, and the angle properties of parallel lines. These results are made the foundation on which the whole of our geometry teaching is built, and the first exercises in deductive geometry are applications of these results to prove other properties, such as the angle property of the isosceles triangle and the sums of the interior and the exterior angles of polygons. In addition to formal proofs depending on congruences the pupils are taught the methods of bisecting lines and angles and of drawing perpendiculars, and the theoretical justifications of these constructions are shown. Along with this theoretical work go arithmetical applications of the angle sum properties of polygons. Great stress is laid on the difference between the discovery of a geometrical property by measurement and its theoretical demonstration, and the pupils are gradually taught how to set out a geometrical proof, what is the function of an illustrative diagram and how an added construction can be used to aid the proof. Classes are given as much practice as possible in discovering proofs, and many proofs are built up by discussion from the blackboard until the boys are sufficiently experienced to be able to build up proofs individually. This work will occupy the whole of the first year, and at the end of it the pupils should be ready to apply their knowledge to the study of the geometry of parallelograms, circles etc.

Second Year. Our pupils are now able to apply their knowledge of fractions and decimals to various kinds of practical problem. As many calculations depend on the principle of simple proportion, we first give them a good deal of practice in this, using cases both of direct and inverse variation, e.g.

If 12 yd. of cloth cost £ 2 find the cost of 15 yds.

If 10 men dig a trench in 6 days, find how long 4 men would take. At first our pupils are taught to introduce an intermediate step, finding the cost of 1 yd. and the time taken by 1 man. When this has been mastered we go on to compound proportion, introducing three or more variables. This work leads on to the important idea of percentage. Fractions are expressed as percentages and vice versa, and examples are worked involving the idea of percentage increase and decrease in quantities. This in its turn leads to the discussion of problems on profit and loss, e.g. A horse costs £ 23 and is sold at a profit of 15 per cent. Find its sale price. In problems of this kind and in the calculation of Simple Interest it is frequently necessary to apply decimals to financial calculations, so that we have to spend a good deal of time and give our boys much practice in changing shillings and pence into decimals of a pound and vice versa. This is another consequence of our peculiar system of units. Besides the work I have described the other main topic in second year arithmetic is the calculation of areas and volumes. We begin with the simplest cases of rectangles and rectangular solids, proceeding to the areas of triangles and polygons as soon as our work in geometry has reached that stage. Our work on the areas of squares makes it necessary for us to teach the process of finding the square root. We first teach the method of factors for dealing with square integers, and we then go on to cases of large integers and numbers involving decimals, to which the square root process is applied. In all the work of the second year we use graphical illustrations wherever it is possible. This is particularly useful in problems on proportion, which provide the simplest illustration of the straight line graph.

The work in algebra begins with the solution of pairs of equations involving two unknowns. At first we take simple cases such as $x = 2y + 3$, $4x - y = 19$, which can be solved by direct substitution and then proceed to elimination by equating coefficients of one unknown in the two equations. In this work we always insist on our pupils checking their results from the original equations. From this we proceed to the solution of problems by forming pairs of equations, e.g. 2 pens and 3 books cost $3/3$, whereas 3

pens and 2 books cost 3/—. Find the cost of a pen and the cost of a book. Such problems are often artificial, but the technique involved in solving them is valuable. The next stage of our work is the technique of factorisation, and this with its attendant problems occupies most of the year. We take first the simplest cases of common factors such as $2x^2 + 6xy$, proceed to the method of grouping terms as in $2ax + 3ay + 2bx + 3by$, then apply the method to the trinomial, first with unit coefficient as in $x^2 + 4x + 3$, then the general case $2x^2 + 5xy + 2y^2$. Gradually our pupils learn to factorise such expressions without making the intermediate step of splitting up the second term. We also devote much attention to the difference of squares, and take the simpler cases of sum and difference of cubes. This work naturally goes on side by side with the multiplication and division of polynomials, the squaring of binomials and completing the square. When this technique has been acquired we apply it to finding H.C.F. and L.C.M. of algebraic expressions by factors and to the manipulation of algebraic fractions. We also give our pupils more difficult equations which require for their solution a knowledge of factors, and we introduce the simpler quadratic equations which can be solved by factors. During this year we study the straight line graph in some detail, introduce the idea of the equation of a straight line and apply it to the graphical solution of equations of the first degree.

Our work in geometry begins with the study of the parallelogram and provides good opportunities for our pupils to use their knowledge of congruence and parallel lines to prove the properties of the parallelogram, rectangle and rhombus. They are expected to memorise these and be able to apply them to theoretical and practical exercises. They learn, in particular, how to construct parallels and parallelograms from given data and how to divide straight lines into a given number of equal parts. From this we proceed to the study of areas of parallelograms and triangles: the main results are proved and applied to numerical and theoretical examples, though at this stage we do not insist on the memorisation of the proofs themselves. They are rather regarded as exercises in the use of previous knowledge. This part of our work is completed by the study of the Theorem of Pythagoras and its converse. In all our work on areas we correlate our geometry closely with our algebra and arithmetic, giving many numerical examples and, in the case of the right-angled triangle, using the factors of the difference of squares to calculate the lengths of the shorter sides. A study of the properties of chords of circles is also introduced and gives

further opportunities for the application of the Theorem of Pythagoras.

Third Year. In arithmetic a good deal of time is spent on more difficult applications of work done in the previous year. More complicated calculations involving fractions and decimals are done, and there are more difficult examples on Profit and Loss and Percentages, e.g. A motor car is sold for £ 336 at a profit of 40 per cent. Find the profit per cent if the price is reduced to £ 300. The calculation of Simple Interest is studied systematically, and we deal with problems in which the time or the rate of interest is to be found, e.g. Find how long it takes for the interest on £ 750 at 8 per cent to amount to £ 150. We also introduce the easier problems on investments, e.g. A man invests £ 200 in 3.5 per cent stock at 68.5. Find how much stock he buys and also find his annual dividend. The work on areas and volumes is extended to include the circle and the cylinder. During this year the study of elementary numerical trigonometry is begun. By drawing and measurement the constancy of the sine, cosine and tangent of acute angles is discovered, and we apply these functions to the solution of easy problems in heights and distances, introducing our pupils to the use of trigonometrical tables.

In algebra we study the quadratic equation in detail, teaching the solution by completing the square and also by the general formula. The quadratic equation is then applied to the solution of problems involving speeds and times. Much discussion is necessary before the pupils are able to form the equations for themselves, and we also discuss the significance of the two solutions of the equation. Our work is naturally combined with the study of the graph of the quadratic function, and the graph is applied to the solution of equations. More difficult examples on factors and algebraic fractions are set, and there is general revision of this part of the work. If the syllabus is sufficiently well known we shall probably be able, with a good class, to study the properties of indices in greater detail and to introduce the definitions and uses of negative, fractional and zero indices, preparing for the study of logarithms.

The main part of our time in geometry is spent in the study of the properties of the circle, particularly with reference to cyclic quadrilaterals and concyclic points and the elementary properties of tangents. We discuss the construction of circles from given conditions and this of course involves the study of the locus of a point. We also deal with the concurrency of the perpendicular bisectors of the sides and the bisectors of the angles of a triangle and

discuss the circles associated with a triangle. During this year we supplement our work on areas by studying the geometrical illustrations of algebraic results such as $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, and we include the extensions of the Theorem of Pythagoras. At the same time we revise our previous work and begin to group our geometrical theorems systematically. Throughout the work we provide both arithmetical illustrations and calculations on our results and also theoretical exercises so that our pupils associate certain diagrams with results which they have proved and memorised.

Fourth Year. This year's work in arithmetic is largely devoted to more difficult examples of the type of problem which has been dealt with in the previous year, e.g. Simple Interest, Profit and Loss, Stocks and Shares and Mensuration. With this is combined work on mixtures, problems on speeds and times (using graphical methods as well as purely arithmetical ones) and Compound Interest, in which the sums on which interest is calculated vary from year to year. In the latter case our pupils have an opportunity to make use of the knowledge of logarithms which they acquire during the year, so that they can calculate the amount at compound interest by using the formula for a constant growth factor. Speaking generally, we now tend to make our work in arithmetic less mechanical than before and we expect our pupils to be able to think out the solutions to problems of a less standardised nature. Along with this goes revision of previous work and more difficult manipulative calculation. In trigonometry we introduce the functions of obtuse angles and teach the relations between the functions of complementary and supplementary angles. This enables us to solve the general triangle by using the sine and cosine formulae and so to solve a wider range of problems on heights and distances. We also apply trigonometrical knowledge to the mensuration of the triangle, circle, cone and sphere. In the work of this year we have to make extensive use of tables and this gives our pupils much practice in the use of logarithms. We encourage them to be economical of effort in calculations and teach them the elementary principles of approximation.

In algebra the study of the quadratic equation is extended to include the solution of pairs of equations of which one is of the second degree, and we also introduce the study of equations with literal coefficients and the elementary use of identities. A great deal of time is spent on the use of negative, fractional and zero indices, and the properties and uses of logarithms in computation are

thoroughly studied. Our pupils have much practice in the use of logarithms, and they are applied to the work in arithmetic and trigonometry. We also introduce the elementary uses of irrationals and especially quadratic surds, teaching the simplification of fractions with irrational denominators. During the year we revise the earlier work, giving further practice in the solution of equations, factorisation and the simplification of algebraic fractions, and graphical work. Graphical methods are used in the study of indices and logarithms and in the solution of different types of equation. A sufficient knowledge of ratio and proportion is given to enable the classes to understand the work on this subject in the geometry syllabus.

The main topic in geometry is ratio and the properties of similar triangles. We prove first the equality of the ratios of the segments of the two sides of a triangle made by a parallel to the third side, and from that we deduce the similarity of equiangular triangles. The converse property is then established and finally the case of triangles with pairs of sides in the same ratio and the included angles equal. We apply this knowledge to prove the properties of intersecting chords of a circle and of the right angled triangle with a perpendicular from the right angle vertex to the opposite side. The ratio property of the bisector of an angle of a triangle is proved, and our results are applied to the construction of fourth and mean proportionals.

As in all our geometrical work, both theoretical and numerical exercises are given in plenty. The rest of the year in geometry is devoted to the elementary inequality properties of the triangle and to revision of previous work. Geometrical knowledge is being gradually systematised and our pupils made familiar, by repetition, with the proofs of the most important propositions to prepare the way for the next year's work.

Fifth Year. By this time most of the syllabus for the School Certificate examination has been covered, and the year's work is largely devoted to revision and consolidation of ground previously covered, with a view to ensuring accuracy and reasonable speed in answering examination questions. A few more difficult topics are left for study during this year, such as the more general theory of logarithms, harder cases of variation involving more than one independent variable, the graphs of more difficult functions (e.g. the inverse variation graph) and the solution of trigonometrical problems on heights and distances in three dimensions, but the weaker candidates will probably have to concentrate on the less

difficult parts of the syllabus and a great deal of revision will be necessary. There are several School Certificate examinations organised by the different Universities, but the work I have outlined covers the ground for the one for which my pupils prepare, which is probably the largest one in England. There are three mathematics papers, viz. Arithmetic and Trigonometry (2 hours), Algebra (2 hours) and Geometry ($2\frac{1}{2}$ hours). Each is divided into two sections, A and B. Section A consists of a large number of small questions which are straightforward applications of elementary knowledge, and in which the candidate is only expected to give enough explanation to make his result clear. Section B consists of a few more difficult questions requiring more explanation and more real skill. Not all the questions have to be attempted. The trigonometry is all found in Section B of the Arithmetic paper, and is frequently attempted rather than the more difficult arithmetical problems in that section. These usually include a graphical problem on speeds and times, a problem on Stocks and Shares and a difficult example on percentages. Logarithms are not to be used in the arithmetical part of Section B. In the algebra paper Section B includes a graphical example, more difficult equations, an example on the theory of logarithms, a difficult logarithmic calculation which will probably involve sums and differences and probably an example on variation. In Section B of the geometry paper proofs of the more difficult theorems are asked for, each one usually combined with a theoretical exercise.

Although it is not essential to pass in mathematics in order to obtain a School Certificate, provided the candidate passes in five subjects including either a language or a science, most boys take the mathematics papers because they need a qualification in mathematics either to embark on more advanced work or as a preliminary to entering some profession. They have to gain one third of the full marks in order to pass, and nearly one half in order to reach 'Credit' standard. We find that on the whole boys are quite interested in mathematics and work quite well. Our method of teaching is largely based on question and answer, with a great deal of blackboard work, and the best teachers make the pupils discover as much as they can for themselves. We discourage mechanical observance of rules and insist on the pupils making clear and complete statements in their books. A great deal of written work is done, both in class and at home, and particularly during the 5th year.

There are a great many excellent text books available, embodying

the most modern ideas in English teaching. The tendency is for examples to be more interesting, stimulating and practical than was formerly the case, when the emphasis was rather on the acquisition of mechanical skill. The different branches of the subject are now much more closely linked than they used to be; and mathematical teaching is correlated with that in other subjects, especially physics and geography. There is at present a shortage of well-qualified teachers, but we have a great many inspiring and enthusiastic teachers, who have during the last few years been steadily raising the standard of mathematical education in this country. This is particularly the case in more advanced work, with which I shall presently deal.

The Advanced Courses which are taken in the Sixth Form by pupils who have reached a sufficiently high standard in the School Certificate examination usually involve three Principal Subjects and often a Subsidiary Subject to which less time is devoted. The course for the Higher School Certificate occupies two years, and this examination is usually taken at the age of 17 or 18, though a few of the ablest boys may take it at 16 and then continue at school with more advanced work in their main subjects. I shall first give an account of the Higher Certificate course in Mathematics and then indicate what ground is covered by those who stay for three or more years in the Sixth Form.

Mathematics is usually combined with Physics as Principal Subjects, and often with another science such as Chemistry. In some schools Pure Mathematics, Applied Mathematics and Physics are the three main subjects and no other science is studied, but my own view is that such a course is too narrow to be educationally sound, in spite of the fact that our boys retain a general cultural background to their work by continuing to receive instruction in English, modern languages, art, music and religious knowledge, with physical training and organised games. For that reason my pupils have a smaller allowance of time for Applied Mathematics and those who are not primarily mathematical specialists take it as a Subsidiary and not a Principal Subject. The good mathematicians can make rapid progress in Applied Mathematics with a smaller amount of teaching if they are prepared, as they usually are, to do more examples outside the classroom. Such boys have usually taken the School Certificate in four years and can spend a third year in the Sixth Form during which they can reach a high standard in Applied Mathematics.

For this reason, in my school Pure Mathematics is studied for

seven periods and Applied Mathematics for four periods per week, each period lasting 40 or 45 minutes. In addition, work is set to be done at home, but this is regarded as a minimum and the student is expected to be prepared to do more for himself. Sixth Form pupils as a rule have a certain amount of time for private study in school hours, and during the Sixth Form course they are gradually trained to direct their own studies so that they are able to profit from the greater freedom which they will enjoy at the Universities. They are referred to books which can be borrowed from the special libraries in school and which they can use to extend their knowledge of any given topic. I will give an account of the work done in Pure Mathematics and will then discuss the syllabus in Applied Mathematics.

The work in algebra begins with the theory of quadratic equations and quadratic functions, with a study of the quotient of two quadratic functions, its graph and its possible maximum and minimum values. In view of the many applications of this work in geometry and in Applied Mathematics, a good deal of time and attention is given to this topic. Permutations and combinations are next dealt with, more from the point of view of application to the binomial theorem and other series than for their own sake. Pupils are encouraged to think out problems on this subject from first principles and not to rely too much on the use of formulae. The binomial theorem for a positive, integral index is thoroughly studied, and this gives a good first application of the method of mathematical induction. We then introduce our pupils to the most important and most familiar convergent power series, chiefly the binomial, exponential and logarithmic series. At this stage we do not attempt to discuss the theory of convergence in general, but we do indicate the theoretical difficulties which arise, and our pupils are taught the conditions under which the series they use are convergent. The use of the logarithmic series naturally causes us to discuss the theory of logarithms in general, and they are familiar with the series which are generally used for the calculation of logarithms. The tendency now is for this part of the work to be approached by defining the logarithmic function $\log x$ as $\int 1/t$ from 1 to x and proceeding to the exponential function as the inverse. The modern text book is much more conscientious in facing theoretical difficulties, and though our discussions are admittedly incomplete we try to present our material in such a way that our pupils will not have anything to unlearn when they study this topic more precisely at a later stage in their mathematical education.

The algebra syllabus is completed by the study of the resolution of a rational fraction into partial fractions.

Our trigonometrical work begins by completing the definitions and properties of the circular functions of the general angle, together with their graphs and the study of the circular measure of angles. It then proceeds to the proofs of the formulae for the circular functions of the sum and difference of two angles and to the factor formulae, with the extensions to the double and triple angle. We are then in a position to solve generally the easier trigonometrical equations, particularly $a \cos x + b \sin x = c$, which we discuss both by using the tangent of the half angle and also by expressing the left hand side as $r \cos (x + \alpha)$. Our pupils are expected to give the general solution of such an equation. From this we proceed to the most important formulae connecting the sides and angles of a triangle, so that we can give the most economical methods of solving triangles. The trigonometry of the triangle is studied, along with the circles associated with it, and our pupils learn the important results concerning the radii of the circumscribed, inscribed and escribed circles. Many examples are given to strengthen the power of manipulation, especially in view of the importance of this work in its applications to statics and dynamics. More interesting and difficult problems are set on heights and distances in two and three dimensions, particularly of a generalised rather than a numerical nature.

In geometry we begin by supplementing our previous work on the triangle and the circle, including centres of similitude, the pedal line, the 9 points circle and the study of concurrence and collinearity. This work is of course correlated with our trigonometrical study and, wherever possible (as in the study of co-axal circles) with analytical geometry. We also include the main theorems of solid geometry dealing with straight lines and planes, spheres and polyhedra (particularly the tetrahedron), but the treatment is entirely geometrical. We complete our study of the mensuration of prisms, pyramids, cones, cylinders and spheres, applying wherever possible the methods of the integral calculus. Our analytical geometry is mainly confined to the use of Cartesian co-ordinates with rectangular axes, but it includes the study of the straight line, the circle, the parabola, the ellipse and the hyperbola (including the rectangular hyperbola). Most of the chief properties are studied, including conjugate diameters, and our pupils are not restricted in their choice of method, though we have not time to develop the properties of the conic sections in full by purely geometrical methods. Though the

examination syllabus does not include the combined equation of two straight lines nor the properties of pole and polar, we prefer to deal with these topics if there is time, and in fact we do not entirely restrict ourselves to the examination syllabus in any branch of our work. For example, though the use of determinants is not prescribed, it is obviously a great advantage in the study of analytical geometry.

In approaching the calculus we observe the same policy with regard to the rigour of our proofs as I have already indicated in the case of infinite series. Our work includes the derivatives of the algebraic, circular, inverse circular, logarithmic and exponential functions, and our pupils learn to differentiate quite difficult functions by making mental substitutions. This knowledge is applied to the study of the graphs of simple algebraic functions, maxima and minima, rates of change, tangents and normals and the kinematics of motion in a straight line. Integration is studied systematically, including the methods of change of variable and integration by parts, the application of partial fractions and the integration of powers of circular functions. This is applied to the evaluation of areas bounded by curves, volumes of solids of revolution, moments of inertia and the positions of centres of gravity. We encourage boys to use their knowledge of the calculus to help them in other branches of their work, and in the modern text books no artificial boundaries are recognised between one branch of mathematics and another. One of our best authors has written text books on algebra, trigonometry and the calculus, in each of which certain topics (notably the exponential and logarithmic functions) are to be found treated in the same way except for slight differences in the emphasis placed on the different parts of the work. In this, as in other respects, the influence of the late Professor Hardy on the work in schools has been very great, and the teaching of analysis has enormously improved during recent years.

In the Higher Certificate there are two papers in Pure Mathematics as a Principal Subject, each taking 3 hours. The first includes algebra, trigonometry and plane pure geometry: the second includes solid geometry, analytical geometry and calculus. The pass mark is 40 per cent, and the distinction mark 80 per cent. If a candidate fails to reach the pass mark but scores 30 per cent he is credited with a pass at the Subsidiary Standard. A Subsidiary Paper is also set for those who have specialised less highly: it is set on a greatly reduced syllabus and consists of two parts in much the same manner as the School Certificate papers.

The Applied Mathematics course includes both statics and dynamics, which are usually taught side by side, though sometimes by different teachers. The experimental results on which the work is based have usually been discovered earlier in the physics course, and they are taken for granted in the Sixth Form. Calculus methods are used whenever they are appropriate, and a close connection is maintained with the work done in Pure Mathematics. My own view is that it is better for both branches to be taught by the same man. When pupils find difficulty in the work, it is usually due not to their lack of understanding of mechanical principles but to deficiency in their manipulative technique. Questions set in examination papers do not usually require the reproduction of a great deal of book work, but rather the power to apply mechanical knowledge to the solution of problems. We therefore discourage excessive reliance on the memory.

In dynamics we teach the use of graphical methods in the study of motion with variable velocity, and later we supplement this by the use of differential equations (for example, in the study of simple harmonic motion). We then go on to consider relative velocity, motion under constant acceleration and free motion under gravity. In studying the motion of projectiles we make free use of analytical geometry, and the theory of quadratic equations is constantly referred to. The study of the laws of motion leads to the concept of mass and to the absolute measurement of force etc. From the laws we proceed to the principles of energy and momentum, which are applied to the solution of a wide range of problems, especially those concerning connected systems of particles. Direct and oblique impact is studied as an application of the principle of momentum and Newton's Law of collision. The theory of uniform circular motion leads to the conical pendulum and is also applied to simple harmonic motion. This topic is treated in considerable detail, with its applications to the simple pendulum, the vibrations of elastic strings and to other problems of a similar nature. We then go on to study the kinematics of a lamina and the simpler parts of the dynamics of rigid bodies, with special attention to the compound pendulum and the motion of a lamina in its own plane. The principles of energy and momentum are applied to the solution of problems on impulsive motion.

Our work in statics includes the composition and resolution of forces and its application to the equilibrium of rigid bodies, confining our attention to two dimensional problems. Frameworks and connected systems of bodies are studied, and graphical methods

are applied in cases where the method of sections is not needed. The laws of friction are discussed and applied to a wide range of problems, both statical and dynamical. The determination of centres of gravity is done by the application of methods of analytical geometry and the calculus, though general problems on stability of equilibrium are not included at this stage. Our syllabus is completed by considering statical problems involving light elastic strings.

During the first year we tend to set examples of a numerical type, so that the need for an advanced mathematical technique shall not add to the difficulties which already exist in the subject. But as the experience of our pupils grows we expect them to be able to deal with problems of a more general nature and to discuss the conditions limiting their solutions. In the Higher Certificate examination this technique is expected. There are two papers of three hours, each containing questions on both statics and dynamics, and the standard required for success is the same as in Pure Mathematics. The syllabus for the Subsidiary Paper is nearly the same, except that there is no rigid dynamics. But the questions are much more straightforward in type and usually involve only numerical data. It remains to add that there is a subject known as Pure and Applied Mathematics which is sometimes taken by pupils who are studying science but are not particularly interested in mathematics. There is a paper in each branch, occupying three hours, the content of which is intermediate between the Principal and Subsidiary standard in that branch.

There are a few schools in which the elements of statistical method are taught to boys who are specialising in economics, though this is not a common practice. For the benefit of such schools a Subsidiary Subject exists in the Higher Certificate which is known as Mathematics and Elementary Statistical Method. The pure mathematical content of the syllabus includes indices, logarithms, the most elementary number progressions, simple numerical trigonometry, the coordinate geometry of the straight line and graphs of the cubic and quadratic functions. The statistical work covers the various measures of average, index numbers, frequency distribution, plotting of statistics, examples of the normal curve and related types, measures of deviation from the mean etc., short time fluctuations and secular trend in a time series, lines of best fit, meaning and simple calculation of correlation, correlation suggested by graphs and regression coefficient. I ought to say, however, that there are not yet many teachers of mathematics in England who are well

equipped to teach this subject. It does not normally form part of the University course for an Honours degree in mathematics and most of us read up the subject for ourselves after graduation. Fortunately, there are several very good English text books available, and the study of statistical methods is increasing in importance.

The last section of my subject concerns the work done by the ablest mathematicians who are candidates for scholarships to the Universities. To be eligible for a State Scholarship or one offered by an Education Authority on the results of the Higher Certificate, the candidate must take a more difficult paper in each of two subjects. This is called a Scholarship Paper. The Scholarship Papers in Pure and in Applied Mathematics do not strictly require any knowledge beyond that for the Principal Subjects, but the questions set are much more of a problem type and require real ability in applying fundamental principles. There is, however, a whole section of the examination known as Higher Mathematics for which an able boy can prepare without having to take any other Principal Subject, usually spending three years in the Sixth Form before taking it. There are also special examinations set by the various Universities, either in mathematics alone or in mathematics combined with other sciences, for the purpose of awarding scholarships, and our pupils usually prepare for them during their third year in the Sixth Form, after having passed the Higher Certificate examination. I shall treat all these together and give an indication of the scope of the work we do to cover the ground for these different examinations, for some of which there is no syllabus published.

In pure mathematics we give an elementary treatment of the theory of convergence with special attention to comparison and ratio tests and with application to the exponential, logarithmic, binomial, circular and inverse circular functions. Infinite products are not usually studied in school. Complex numbers are very thoroughly discussed with the theorem of De Moivre and all its most important applications. We also study the summation of series by the most important methods, with an elementary treatment of difference equations. Inequalities, determinants and the theory of equations (with the chief methods of approximate solution and a study of equations of the third and fourth degree) usually complete the work we are able to do in algebra. We now consider the theory of continuity more thoroughly, discussing Rolle's Theorem, the Mean Value Theorems and Taylor's Theorem, with its applications to indeterminate forms, maxima and minima, the contact of curves and, of course, the expression of functions as convergent infinite series.

This naturally involves the question of successive differentiation, and the Theorem of Leibnitz is proved and applied. We study the theory of integration in greater detail and deal with the most important types of reduction formula. The calculus is applied to the study of curves, with further discussion of areas and an elementary treatment of rectification. Polar equations, the pedal equation, curvature, envelopes, evolutes and asymptotes are all dealt with, and the more important curves such as the cycloid, cardioid, catenary and spiral are specially studied. Our pupils have a great deal of practice in curve tracing and finding areas and lengths of curves. Our work in the calculus is completed by the consideration of partial differentiation, double integration and elementary differential equations (including equations of the first order and the easier second order types, especially linear equations with constant coefficients). As far as geometry is concerned there is a considerable difference between the needs of pupils who are primarily mathematicians and those who are combining mathematics with other sciences. The latter do not need to study a great deal of geometry beyond the stage they have reached for the Higher Certificate examination. But the others have much new ground to cover. They study the method of projection and the geometry of cross ratio and harmonic section, with its applications to the complete quadrangle, quadrilateral and the conic sections, including the theorems of Pascal and Brianchon. Reciprocation, inversion and orthogonal projection are also included, and the geometrical treatment of these topics is naturally linked with the further study of analytical geometry. In this section of the work we study the general equation of the second degree and the tracing of conics, systems of conics and tangential equations. With the ablest pupils we are able to introduce the use of homogeneous co-ordinates and parametric representation.

In Applied Mathematics there is not a great deal of ground to cover from the Higher Certificate papers to the papers set for scholarship candidates. In statics we consider more difficult graphical problems including the use of the method of sections, the equilibrium of strings and chains, bending moments, virtual work with its application to the determination of stability and more difficult problems on centre of gravity and on friction. In dynamics we deal with the two-dimensional motion of a particle more generally, including the use of polar co-ordinates and motion on a curve and discussing motion in a resisting medium. More difficult applications of general principles are dealt with, and generally

speaking the work consists more in enlarging the range of the pupil's experience and technique than in teaching him a large number of new facts.

The work of mathematics teachers, especially those engaged in advanced work, is greatly helped by the Mathematical Association, to which many teachers both in schools and in Universities belong. The Association has branches in several parts of the country, holding regular meetings to hear and discuss papers. It also publishes a journal containing articles on teaching methods, accounts of new developments affecting school work and detailed reviews of new books. From time to time it also publishes reports on the teaching of various parts of the subject, some of which I have brought with me. The reports have had a great influence on the development of teaching technique and have proved particularly helpful and inspiring to young teachers during their period of training and probation.

I have spent a great deal of time giving an account of the ground we cover with pupils from the age of 11 to the age of 18, and I can only indicate very briefly the principles which inspire us in our work. Throughout the school course we try to make our teaching lively and stimulating and to communicate to our pupils our own love of mathematical truth and a sense of adventure and love of discovery. While we take every opportunity of correlating our work with that done in other departments we do not assess the value of our work by its usefulness. We try to inculcate accuracy and precision of thought and expression with economy and elegance of method, and we encourage our pupils to adopt a critical attitude not only to their own work but to ours also. The field of mathematical study is so vast that no one person can claim to have explored it: we try to make clear to our pupils how much remains to be done and to encourage them to continue their studies with determination and patience and in the spirit of our greatest mathematician, Sir Isaac Newton, who said of himself :-

I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me.

DE GESCHIEDSCHRIJVING DER WISKUNDE IN VLAANDEREN.

Kunst en wetenschap zijn twee van de voornaamste levensuitingen van elk cultuurvolk. Wil men doordringen tot de kern van een cultuur, dan is het zeker nodig elk van deze beide geestesactiviteiten te volgen en te bestuderen in hun ontstaan en groei. Dr George Sarton, over wiens werk wij aan het eind van dit overzicht nog enkele aanduidingen moeten geven, schrijft in een artikel: "no history of civilisation can be tolerably true and complete in which the development of science is not given a considerable place," en misschien wel wat te exclusief gaat hij verder: "Indeed, the evolution of science must be the leading thread of all general history." ¹⁾ En nochtans wordt meestal heel weinig gelet op wat een volk presteerde op wetenschappelijk gebied, of althans slechts zeer oppervlakkig: men wijst op enkele grote ontdekkingen en noemt enkele grote namen, zonder maar iets te vermelden van de onafgebroken arbeid van tientallen min bekenden, die daaraan ten grondslag ligt, of zonder verder het diep menselijke dat in elk groot werk ligt, ook in elke wetenschappelijke ontdekking, te gaan nasporen. Zeker gaat iedereen akkoord met het principe, dat er geen sprake kan zijn van geschiedschrijving, wanneer alleen de in het oog springende feiten worden verhaald, terwijl al het gewone wordt vergeten. Zonder de achtergrond van het alledaagse gebeuren en van de stille arbeid van minder beroemden blijft het meer opvallende in de geschiedenis zinloos en onbegrijpelijk. Dit geldt evengoed wanneer het gaat over de geschiedenis van de wis- en natuurkundige wetenschappen, en toch verliest men het heel dikwijls uit het oog. Vele ontwikkelden hebben minstens een vaag beeld van de algemene geschiedenis der kunst, maar hoevelen weten ook maar iets af van de ontwikkeling der exacte wetenschappen, zelfs van die wetenschap, waarin ze zich specialiseerden? Eerst de laatste jaren is men ook in Vlaanderen dit tekort gaan aanvoelen, en werd hier en daar begonnen de grondslag te leggen voor verdere studie. Nu het terrein, waarop men voort kan bouwen stilaan klaar komt, is het misschien niet nutteloos eens na te gaan, wat in Vlaanderen reeds gepresteerd werd. Wij beperken ons hier tot het gebied van de geschiedenis der wiskunde.

Een geschiedenis van de wiskunde kan op twee zeer verschillende manieren geschreven worden:

¹⁾ G. Sarton, *An Institute for the history of science and civilisation. Science*. Vol. XLV, 1917, 284—286.

1. Of wel men onderzoekt of de studie van de wiskunde bloeide in een bepaalde streek of in een bepaalde tijdsperiode; welke politieke, sociale of culturele factoren hierop inwerkten, enz. Daarbij worden dan de nieuwe ontdekkingen als bewijsmateriaal vermeld.

2. Of wel men beschrijft de ontwikkeling van de wiskunde zelf; hoe de ene ontdekking organisch groeide uit wat vooraf bestond, uit welke noden nieuwe methoden ontstonden, enz.

Dat laatste is meer de innerlijke geschiedenis van de mathesis, terwijl in het eerste geval die wetenschap meer van buiten af wordt bekeken. Het spreekt van zelf, dat geen enkele van die twee wijzen van geschiedschrijving te verwerpen is; beide zijn nodig, en ze zullen ook nooit volledig gescheiden voorkomen. Wel kan in concrete gevallen de ene of de andere overwegen. Bovendien zal de tweede methode altijd de eerste insluiten, en daarom is ze ook de volledigste en meest diepgaande. Als kroon op het werk moet dan de plaats bepaald worden van de wiskunde in de cultuur in het algemeen, of in de beschaving van een volk, door bijvoorbeeld een antwoord te zoeken op de vraag, waarom de mathesis bij het ene volk dát karakter aanneemt, terwijl in een andere periode of bij een ander volk het uitzicht ervan volledig anders is. Naast de algemene geschiedenis der wiskunde of van een afzonderlijke tak ervan, neemt natuurlijk ook de biographische studie van wiskundigen een voorname plaats in. Een dergelijke studie moet, naast een beeld van de mathematicus als mens, ook een analyse geven van zijn wetenschappelijk werk en het plaatsen in zijn tijd en in verband met het werk van andere geleerden.

Het is vooral in de eerste helft der 19de eeuw, dat het onderzoek naar de geschiedenis der wiskunde opbloede in Europa.

Kort na 1830 ontstond onder de patriotten van de jonge staat België een beweging om de nationale beroemdheden op het gebied van kunsten en wetenschappen te bestuderen, en aldus de nationale fierheid te bevorderen. De leiders van die stroming waren o.a. Felix Victor Goethals, Adolphe Quetelet, Steichen, Stas. Alle publicaties, die daaruit ontstonden, waren in het Frans geschreven. Het is eerst rond 1850, dat de Vlaamse beweging daartegen begon te reageren, en dan nog bijna uitsluitend op letterkundig gebied; de wetenschappen bleven nog heel wat langer volledig Frans. Hier volgt nu een kort overzicht van wat rond die tijd en later werd geschreven.

F. V. Goethals gaf enkele korte biographieën van wiskundigen in zijn werk: „Lectures relatives à l'histoire des sciences, des arts, des lettres, des mœurs et de la politique en Belgique et dans les pays limitrophes. Bruxelles 1837,” en in: „Histoire des lettres et des

sciences et des arts en Belgique et dans les pays limitrophes. Brux. 1840." Hij schreef ook een biographie van Simon Stevin (1841). Ter gelegenheid van de oprichting van diens standbeeld te Brugge verschenen nog enkele levensschetsen, o.a. van Quetelet (1845), Steichen (1846) en van F. P. van Kerkhoven (1846). Reeds vroeger hadden Verhaeghe (1821), Voorduyn (1823), Delepierre (1839) en Jughels (1840) over Stevin geschreven. Het is vooral Adolphe Quetelet (geb. 1786 te Gent, overl. te Brussel in 1874) die de studie van de geschiedenis der wiskunde in België vooruit heeft geholpen. Hij schreef biographieën van Gregorius a S. Vincentio (1821), van Gemma Frisius (1825), van Van Lansberghe (1837) en van Simon Stevin (1845). In 1835 verscheen van hem een artikel „Aperçu de l'état actuel des sciences mathématiques chez les Belges." Zijn voor-naamste bijdrage tot de geschiedenis der wiskunde en ook het uitgebreidste werk, dat tot nu toe daarover in België verscheen, is zijn „Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges." Bruxelles, 1864. Daarin werd zeer veel materiaal verzameld en ook het plan van het werk is goed, maar het verwerken van de gegevens liet veel te wensen over. Als uitgangspunt voor verdere studie kan het goede diensten bewijzen, hoewel reeds veel erin aangevuld en gewijzigd zou moeten worden. In 1866 verscheen een vervolg erop met als titel: „Sciences mathématiques et physiques chez les Belges au commencement du XIX^{me} siècle", dat echter weinig nieuwe gegevens bevat. Als verdere bijdragen tot de geschiedenis der mathesis kunnen we nog vermelden het „Rapport séculaire sur les travaux mathématiques de l'Académie Royale de Belgique (1772—1872)" van J. M. de Tilly en een overzicht van de geschiedenis der wiskunde in België door C. Lagrange in „Cinquante ans de liberté" (Brux. 1881, T. II, 203—275).

Vooraf onder invloed van wat in andere landen werd verwezenlijkt, o.a. door Cantor, Zeuthen en Tannery, kwam ook in België een zekere verdieping tót stand. Ph. Gilbert, professor aan de Universiteit van Leuven, schonk ons een aantal biographieën (van Pagani, Chasles, Puiseux). Een centrum van grote wetenschappelijke bedrijvigheid was de in 1875 door Pater Carbonnelle S.J. gestichte „Société scientifique de Bruxelles", waarvan, naast Gilbert, ook prof. Paul Mansion van de Universiteit van Gent lid was. P. Mansion liet talrijke korte studies of levensschetsen na op het gebied van de geschiedenis der wiskunde. Vooral enkele Paters Jezuïeten, verbonden aan de Société scientifique, moeten hier vermeld worden: Thirion, Lefebvre en Henri Bosmans. Aan deze laatste danken wij de meest oorspronkelijke studies over het hier besproken

terrein, welke tot nu toe in België verschenen. Hij wees op de betekenis van talrijke vergeten Zuid-Nederlandse mathematici, en wat hij schreef over Tacquet, Gregorius a S. Vincentio, Simon Stevin, Ferd. Verbiest en anderen is op menig punt nieuw en soms definitief. Talrijke handschriften uit het archief van de Sociëteit van Jezus of van andere bibliotheken werden door hem gepubliceerd; hij verzamelde o.a. voor een groot deel de brieven van Pater Verbiest (in 1938 door H. Josson S.J. en L. Willaert S.J. uitgegeven) en ook documenten over Gregorius a S. Vincentio. In nauwe betrekking met Pater Bosmans stond Pater L. van Hee S.J., die enkele belangrijke studies schreef over chinese wiskunde. Verder kunnen wij nog de beide professoren M. Lecat en M. Alliaume vermelden. Laatst genoemde schreef een „Esquisse de l'histoire des mathématiques et de l'astronomie en Belgique depuis 1830.” Ook prof. Jean-Pelseneer van de Universiteit van Brussel moet hier vermeld worden, naast prof. Godeaux van Luik, om zijn in 1943 verschenen werkje: „Esquisse d'une histoire des sciences mathématiques en Belgique.”

Het grootste deel van de genoemde werken zijn gewijd aan de wiskunde in België. Om de ontwikkeling van de mathesis in een bepaald land te kunnen begrijpen, is echter ook een voldoende kennis van de geschiedenis der wiskunde in het algemeen nodig. Op dit breder terrein werd tot nu toe in Vlaanderen niet zo heel veel, maar wel belangrijk werk geleverd. We bedoelen hier het monumentale werk van Ir. Paul Ver Eecke: zijn talrijke en zeer goede Franse vertalingen van de werken van classieke Griekse mathematici, o.a. Archimedes, Diophantus van Alexandrië, Pappus van Alexandrië, Apollonius van Perga, en de uitgave van de commentaren van Pappus en Theoon van Alexandrië op de Almagest door prof. Rome van Leuven (3 vol. Rome, 1931—1943).

Als slot van dit overzicht willen wij ook niet nalaten een woord te wijden aan het werk van professor G. Sarton (geb. 1884 te Gent). In 1913 stichtte hij het tijdschrift „Isis. Revue internationale consacrée à l'histoire et à l'organisation de la science”, waarvan het doel is de verschillende wetenschappen te bestuderen in hun onderling verband, en hun betekenis voor de filosofie en de cultuur te onderzoeken. Bij het begin van de vorige wereldoorlog week hij met zijn plannen uit naar de U.S.A., waar van 1919 af Isis weer verscheen (de bijtitel van de revue werd: Quarterly Organ of the History of Science Society and of the International Academy of the History of Science. Uitgegeven bij: The Saint Catherine Press Ltd. Bruges, Belgium). Van 1936 af verschenen ook onder zijn redactie de verschillende volumes van „Osiris. Studies on the history and

philosophy of science and on the history of learning and culture". Van zijn uitgebreid werk „Introduction to the history of science" verscheen einde 1947 het derde deel.

Aan het einde van deze korte beschouwingen over de geschiedschrijving der wiskunde in Vlaanderen moeten wij de vraag stellen wat hier tot nu toe in het Nederlands daarover verscheen? Het antwoord daarop is zeer kort: feitelijk niets. Dat zou misschien ontmoedigend klinken, indien niet talrijke factoren erop duiden, dat ook voor die tak der geschiedenis de belangstelling groeit. Daarvoor getuigen de oprichting van de Commissie voor de geschiedenis der wetenschappen van de Koninklijke Vlaamse Academie en de plannen voor het oprichten van een Museum voor Wetenschappen.

Een zeer sterke steun zou kunnen uitgaan van onze Universiteiten indien, bijvoorbeeld aan de studenten van het licentiaat, een cursus zou gegeven worden over de geschiedenis van de wetenschap of minstens over de geschiedenis van het vak, waarin ze zich specialiseren. Een leergang over de geschiedenis der wiskunde bestond te Gent van 1884 af, en werd gedoceerd door prof. P. Mansion tot 1910, in welk jaar prof. A. Claeys de lessen overnam. Door de wet van 1890—1891 werd een dergelijke cursus verplichtend gemaakt voor alle Belgische Universiteiten (voor de studenten in de wis- en natuurkunde)¹⁾. In 1929 schafte de nieuwe wet over het toekennen der academische graden alles af; alleen een facultatieve cursus bleef bestaan, waarvan echter weinig in huis kwam. Voór het ogenblik worden alleen aan de Brusselse Universiteit, door prof. J. Pelseneer, regelmatig colleges over de geschiedenis der wetenschappen gegeven.

Het is misschien wel langs de weg der geschiedenis, dat de beste oplossing kan gevonden worden voor het probleem van de eenzijdigheid der exactwetenschappelijke vorming. In verband hiermede willen wij als slot een tekst van G. Sarton ter overdenking aangeven: "Knowledge is power, but this power may become a danger if its spirit be false and if it be bent solely upon material achievements. It is only when science is explained and tempered by history that it acquires its whole educational value, and that the main objections to scientific education cease to be valid. The more science enters into our lives, the more it must be "humanized", and there is no better way to humanize it than to study its history."

Eekloo.

P. BOCKSTAELE.

¹⁾ De lessen werden te Leuven gegeven door prof. Ch. de la Vallée Poussin en te Brussel door prof. M. Brand.

CAUSALITEIT, DETERMINISME, VOORSPELBAARHEID.

Van mijn artikel „Causaliteitsbeginselen en moderne physica” (Eucl. J. 23, 15—26, 1947) heb ik veel genoeg beleefd. Men heeft het duidelijk en overtuigend gevonden. Vele lezers hebben mij bekend, dat het hun een helder inzicht gegeven had in den aard van de antinomieën, die de moderne physica op het gebied der causaliteit had doen ontstaan, en dat zij daardoor ook overtuigd waren van de juistheid van de voorgestelde oplossing. Het ligt echter ook voor de hand, dat niet allen het met mijn betoog eens zijn. In de laatste nummers van dit tijdschrift zijn twee reacties op mijn artikel verschenen, één van den Heer J. Scheltens (Korrel LXXXIV, b. 107—109 en één van den Heer W. Sjoerdsma („Causaliteit en determinisme”, b. 166—172). De laatste vooral valt mijn uiteenzetting aan en wil ze krachteloos maken door te wijzen op een fundamentele tegenspraak, die hij in mijn publicatie meent te hebben ontdekt. Een zware beschuldiging, die een weerlegging vraagt, en die ik dus niet zonder meer kan laten passeren. Ik zal mijn antwoord op beide opponenten in enkele punten samenvatten en voor het gemak zal ik de conclusies van den Heer Sjoerdsma volgen.

1. *Het causaliteitsbeginsel heeft realiteitswaarde.*

De eerste conclusie van Sjoerdsma is, dat er tegenstrijdigheid bestaat tussen de wijze waarop ik het causaliteitsbeginsel definieer en de wijze waarop ik het gebruik. De vergissing van Sjoerdsma zit hier, dat hij uit het gebruiken door mij van den Kantiaansen term „analytisch oordeel” ook afleidt dat ik aan een dergelijk oordeel dezelfde kentheoretische betekenis toeken als Kant, dus het beschouw louter als een uitspraak van het verstand die op een objectieve werkelijkheid geen betrekking kan hebben, terwijl toch de inhoud van mijn artikel, naar mijn mening, wel zeer duidelijk mijn van Kant afwijkend standpunt heeft doen uitkomen. Trouwens het feit dat ik, zoals Sjoerdsma terecht vermoedt, aanhanger ben van de Aristotelisch-Thomistische wijsbegeerte, had hem voor de genoemde conclusie moeten behoeden. Iedereen, die ook maar enigszins op de hoogte is van dit wijsgerig stelsel, weet dat het een realistisch stelsel is, dat houdt in (en dit op kritisch onderzochte en deugdelijk bevonden gronden) dat onze verstandelijke begrippen, die alle in de ervaring hun oorsprong hebben, ook een beeld van

de werkelijkheid geven, dus realiteitswaarde hebben, en dat oordelen, welke op een juiste wijze (overeenkomstig den inhoud der begrippen) twee van zulke begrippen met elkaar verbinden, ook een uitspraak zijn aangaande de realiteit, dus een verband uitdrukken dat in de werkelijkheid bestaat tussen de objecten die aan deze begrippen beantwoorden.

De Thomistische wijsbegeerte gebruikt verder den term „analytisch oordeel”. niet alleen, zoals Kant, voor een oordeel waarbij het praedicaatsbegrip in het subjectsbegrip formeel ligt opgesloten, maar ook als eerst bij verstandelijke beschouwing en ontleding van twee begrippen blijkt dat het ene van het andere moet worden bevestigd of ontkend. Dit laatste nu is het geval bij het causaliteitsbeginsel. Kant spreekt in het tweede geval van „synthetische oordelen a priori”. Maar het grote verschil met Kant (ik wil hier nog eens den nadruk op leggen) is en blijft dat de Thomistische wijsbegeerte aan zulke oordelen werkelijkheidswaarde toekent. Uit een en ander blijkt dat er van tegenstrijdigheid in mijn betoog geen sprake is.

Er worden van het wijsgerig causaliteitsbeginsel verschillende formuleringen gegeven. De door mij gegeven formulering, die mij om diverse redenen het meest geschikt lijkt, luidt: „Voor het worden, zijn en zó-zijn der dingen is een geëvenredigde oorzaak vereist”. Naar Thomistische opvatting nu steunt het in deze uitdrukking tussen de begrippen gelegde verband op een verstandelijke analyse van die begrippen zelf. Heel in het kort kan ik den hierbij gevolgden gedachtegang als volgt schetsen. Iets, dat den grond van zijn bestaan niet in zich zelf heeft, dus niet noodzakelijk is; iets, dat wordt, dus kan zijn maar ook niet kan zijn; iets, dat verandert, dus zó kan zijn, maar ook anders kan zijn, heeft iets anders nodig dat de vereiste zijnsbepaling geeft, dus den voldoende grond voor dit worden, zijn en zó-zijn verschaft. Dit andere nu wordt oorzaak genoemd. Het zo geformuleerde beginsel is een wijsgerig beginsel, maar het drukt iets uit over reële relaties van afhankelijkheid tussen reële dingen. Overal, waar iets tot het ontstaan komt, of verandert, of waar iets in stand blijft dat niet noodzakelijk is of zó is, moet iets anders zijn waarvan het eerste in zijn worden of zijn afhankelijk is. Het causaliteitsbeginsel is dus algemeen geldig op ieder gebied van de realiteit. Het zal nooit in zijn algemeenheid geverifieerd kunnen worden, eenvoudig omdat het onmogelijk is alles, wat gebeurt of is, in zijn onderzoek te betrekken en van alles de oorzaak te achterhalen. Maar het zal ook nooit, door welke ervaring ook, weerproken kunnen worden, omdat het een uitspraak is, die op het

wezen der dingen betrekking heeft en dus algemeen geldig is. Voor den Heer Scheltens is dit voldoende om te verklaren dat de uitspraak dan in wetenschappelijk opzicht zonder waarde is. Ja, als men wetenschap vereenzelvigt met natuurwetenschap, dan is een dergelijke uitspraak inderdaad zonder directe waarde, en het betrokken probleem een schijnprobleem (Sjoerdsma, b. 170). De geldigheid van het causaliteitsbeginsel kan men zeker niet met fysische middelen of volgens fysische methodes verifiëren, maar het zou onredelijk zijn dit te eisen en als voorwaarde te stellen alvorens de waarheid van het beginsel te erkennen. Er is meer dan zintuigelijke ervaring en meer dan natuurwetenschap.

2. *Causaliteit en determinisme.*

„De stelling van het determinisme is door de moderne quantumtheorie gefalsificeerd, het causaliteitsbeginsel niet” is de tweede conclusie van Sjoerdsma. Ik wil met het laatste beginnen. Sjoerdsma formuleert het causaliteitsbeginsel met Ph. Frank: „Er is steeds een wet, waardoor het mogelijk is, uit een toestand A_0 volgende toestanden te voorspellen.” Ik ben het met hem eens dat deze uitspraak inderdaad door de moderne physica niet gefalsificeerd is, maar evenmin het causaliteitsbeginsel in de door mij gegeven formulering. Dit laatste zou tot een onware uitspraak worden, als zou aangetoond zijn dat er natuurverschijnselen gevonden worden, die niet veroorzaakt zijn door iets anders, die niet door hun antecedenten zijn bepaald. Het gebeurt natuurlijk vaak genoeg dat men de antecedenten niet of niet voldoende kent, of niet weet op welke wijze een effect door zijn antecedenten wordt bepaald, zodat men de *feitelijke* oorzaak van een verschijnsel niet altijd kan achterhalen. Dit heeft zijn grond in onze gebrekkige kennis van de stoffelijke natuur en haar werkingen en is natuurlijk niet in strijd met het causaliteitsbeginsel. Een verschijnsel echter, *dat niet veroorzaakt is*, moet nog ontdekt worden.

Verder wil ik nog opmerken, dat de door Sjoerdsma (met Frank) geformuleerde causale wet het wijsgerige causaliteitsbeginsel in de door mij gegeven formulering veronderstelt en daarenboven het gedetermineerd verloop van de natuurverschijnselen. Hoe zou het immers mogelijk zijn uit een begintoestand A_0 volgende toestanden te voorspellen, als er effecten zouden kunnen optreden die niet veroorzaakt zijn, niet door de antecedenten (toestand A_0) bepaald, die ineens uit het niet opduiken, door niets in hun worden, zijn en zó-zijn bepaald? Ten tweede, hoe zou voorspelling mogelijk zijn,

als de serie verschijnselen, met toestand A_0 als uitgangspunt, niet natuurnoodzakelijk op deze wijze, en op deze wijze alleen, zou verlopen, dus als de natuur niet gedetermineerd zou zijn? Ik herhaal derhalve wat ik in mijn eerste artikel heb gezegd. Voorspelling van het toekomstig verloop is alleen mogelijk, als: 1. alles, waarop de voorspelling betrekking heeft, door oorzaken is bepaald (wijsgerig causaliteitsbeginsel); 2. er determinisme is, d.w.z. dat de bepalende oorzaken krachtens hun natuur noodzakelijk werken als de vereiste voorwaarden vervuld zijn, en noodzakelijk werken, zoals ze werken; 3. een begintoestand tot in bijzonderheden bekend is. Als aan een van deze voorwaarden niet voldaan is, kan er van een nauwkeurige voorspelling geen sprake zijn. Dit zijn eisen van de elementaire, veel gesmade, logica, eisen van het gezond verstand, eisen die men op zijn studeerkamer kan formuleren, zonder ooit een boek over physica gelezen te hebben.

De hier verdedigde opvatting, dat het wijsgerig causaliteitsbeginsel (in den door mij bedoelden zin) en het determinisme van de stoffelijke natuur, door de moderne physica niet in het minst geleden hebben, wordt ook door veel physici nog steeds, en naar mijn mening steeds meer, gehouden. Ik zou deze bewering met veel citaten kunnen staven, maar korthedshalve moet ik dit nalaten.

3. *Determinisme en voorspelbaarheid.*

De laatste conclusie van Sjoerdsma luidt: „Ontneemt men aan de stelling van het determinisme het criterium der voorspelbaarheid, dan wordt dit een tautologie.” Hierover slechts enkele opmerkingen.

a. Voorspelbaarheid of, wat hetzelfde is, mogelijkheid tot voorspellen, veronderstelt als noodzakelijk fundament dat de natuur gedetermineerd is (zie onder 2) en is dus zonder determinisme niet denkbaar. Voorspelbaarheid alleen kan echter nooit als een criterium gelden, daar zij niet kenbaar is. Alleen een *uitgekomen voorspelling* is kenbaar en kan eventueel ter verificatie worden gebruikt. Een uitgekomen voorspelling kan dus in het algemeen als criterium gelden voor een gedetermineerd verloop. Ik zeg: in het algemeen, want niemand zal betwisten, dat een voorspelling toch wel eens uit kan komen, ook als het fundament, waarop zij steunde, niet juist was. Uit het onder 2 gezegde blijkt verder duidelijk, dat determinisme zonder mogelijkheid tot voorspellen zeer goed denkbaar is, daar voor het tweede meer nodig is dan determinisme alleen, met name de nauwkeurige kennis van een begintoestand. Ondanks het feit, dat niemand betwist, dat de verschijnselen in de atmosfeer, die het

weer bepalen, volkomen gedetermineerd verlopen, weet toch ieder dat het vaak onmogelijk is een nauwkeurige weersvoorspelling te doen, omdat nl. de vereiste gegevens ontbreken.

b. Waarom determinisme zonder het criterium der voorspelbaarheid (afgezien van de critiek sub *a*) een tautologie zou zijn, is mij een raadsel. Van een tautologie is er m.i. alleen sprake, als een zelfde begrip wordt weergegeven door verschillende woorden of uitdrukkingen die dezelfde betekenis hebben, zodat men inderdaad telkens „hetzelfde zegt” (letterlijke betekenis van tautologie). Ik kan nu niet begrijpen wat er voor tautologisch zou schuilen in de volgende uitspraken: „De natuur is gedetermineerd”, of „De verschijnselen in de natuur worden volkomen bepaald door oorzaken die natuur noodzakelijk werken”, en dergelijke. Toch zijn dit uitspraken over het determinisme in de natuur, zonder dat hieraan voorspelbaarheid gekoppeld is. Als deze uitspraken een tautologie zouden zijn dan zou de uitspraak „De natuur is niet gedetermineerd” een contradictio in terminis zijn.

In het voorgaande heb ik mijn standpunt, dat ik in het eerste artikel heb uiteengezet, verdedigd tegen de aanvallen van tegenstanders. Op enkele punten ben ik iets uitvoeriger ingegaan. Ik hoop dat ook dit artikel weer een bijdrage heeft geleverd om in dit veel omstreden probleem iets meer klaarheid te brengen.

Leiden, Maart 1948.

Dr P. H. VAN LAER.

Hiermede wordt de discussie gesloten.

Redactie.

SOLUTION OF A GEOMETRIC PROBLEM.

In one of the issues of the magazine „Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung (1931)” the following problem was given for solution (Aufgabe 86):

„If two triangles ABC and PQR correspond in a central collineation while the centre of collineation coincides with the orthocentre of $\triangle ABC$ and with the centre of gravity of $\triangle PQR$,

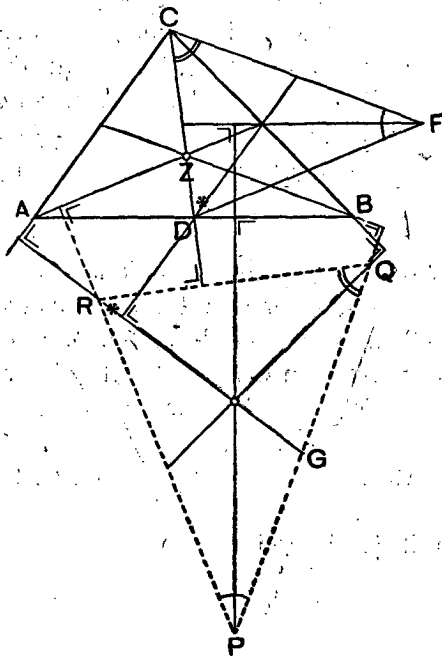


Fig. 1

then the axis of collineation is perpendicular to the Euler-line of $\triangle ABC$."

As far as I can ascertain no solution has ever been published. By means of elementary geometric aids the above theorem can be proved in a simple way.

1. The perpendiculars of $\triangle ABC$ lie on the medians of $\triangle PQR$. Hence the sides of $\triangle PQR$ are at right angles to the medians of $\triangle ABC$. (See fig. II).

For, suppose Z to be the centre of gravity of $\triangle ABC$ and suppose the sides of $\triangle PQR$ to be at right angles to the medians of $\triangle ABC$.

(See fig. 1). We draw $DF \parallel AZ$ and $CF \parallel BZ$, then $\triangle DCF \sim \triangle RQP$. Now the medians of $\triangle PQR$ are at right angles to the medians of $\triangle DCF$, hence parallel to the sides of $\triangle ABC$. So the above problem has been proved.

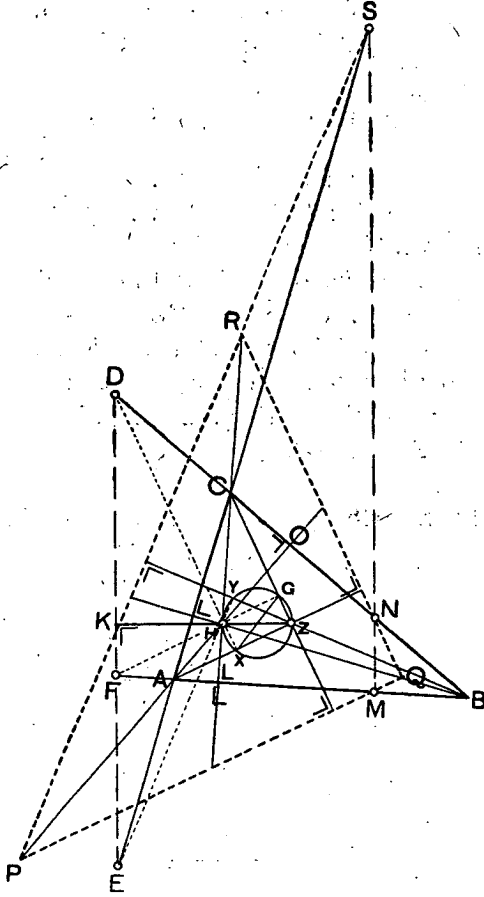


Fig. 2.

2. Through the orthocentre H of $\triangle ABC$ (See fig. II) we draw two lines from the points A and C respectively perpendicular to the medians of the same triangle. These lines respectively cut the sides BC and AB in the points D and F and the medians mentioned in the points X and G .

Then $HF \times HG = CH \times HL = AH \times HO = HD \times HX$,

therefore $\triangle DHF \sim \triangle GHX$,

so $\angle DFH = \angle GXH$.

HXZG is a quadrilateral inscribable in a circle, therefore

$$\angle GXH = \angle HZG.$$

The triangles FKH and ZGH have two equal angles, hence

$$\angle FKH = \angle HGZ = 90^\circ.$$

3. Now we are going to prove that the axis of collineation MNS of the two triangles ABC and PQR are parallel to DF.

$$CZ \perp PQ, \text{ so } FHG \parallel PQ,$$

and

$$FM : MB = HQ : QB.$$

In the same way

$$DN : NB = HQ : QB,$$

so

$$FM : MB = DN : NB,$$

and we have $DF \parallel MN$.

Therefore HZ (Euler-line of $\triangle ABC$) $\perp$ MN (axis of collineation).

4. The perpendicular from H to BZ cuts CA in E. From the above argumentation it follows that the points D, E and F are collinear. The straight line DEF is the inversed of the circle through H, X, Z, G and Y; here the centre of inversion is H and the constant of inversion is $-AH \times HO$.

Dordrecht, Febr. 1948.

Dr L. KUIPERS.

PROOF OF THE THEOREM OF DESARGUES.

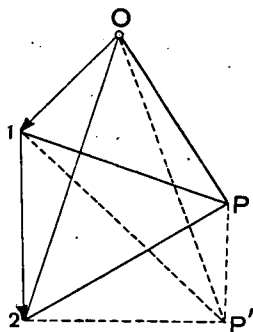
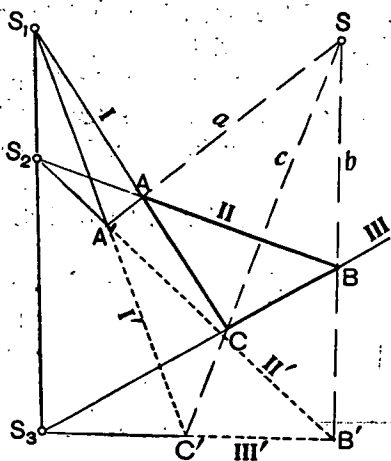
By means of graphostatics several problems of plane geometry may be solved. We shall show that for instance this is the case with the theorem of Desargues concerning two triangles corresponding in a central collineation. The theorem of statics here to be used is:

„If for the same number of forces (acting in a plane) two funicular polygons are drawn with reference to two different poles, the points of intersection of corresponding bars are in a straight line parallel to the line joining the poles.”

We shall prove this theorem for the case of two forces (it does not make this proof less general) for the convenience of those who are not acquainted with the principles of graphostatics.

1. Suppose a and b to be the lines of action of the forces $O1$ and 12 (the direction of each force is indicated by the order in which the letters O and 1 , respectively 1 and 2 are given).

Then the forces OP and $P1$ represent components of the force $O1$, respectively with lines of action I and II . Also, the forces $1P$ and $P2$, respectively with lines of action II and III , represent components of the force 12 . It is obvious, that the forces $O1$ and 12 may be replaced by the forces OP and $P2$, respectively with lines of action I and III . The point of intersection C of I and III is a point of the



line of action of the resultant of these forces OP and $P2$. If we choose another point P' as a pole, in the same way we construct the funicular polygon $I'II'III'$ with reference to P' . It is obvious that the straight line joining the points C and C' , being the line of

action of the resultant of the forces 01 and 12, is parallel to the vector 02, and meets the lines a and b in their point of intersection.

2. s_1 is the point of intersection of the lines I and I', etc. Now I shall consider the system of the forces 01(a), 1P(II), P0(I), 10(a), 0P'(I') and P'1(II'). These 6 forces are in equilibrium. It is evident that the forces

1P(II), P0(I), 0P'(I') and P'1(II')

are in equilibrium too. Therefore the resultant of 1P(II) and P'1(II') is the equilibrant of the resultant of 0P'(I') and P0(I). The former resultant is equal to the vector P'P and the second is equal to the vector PP'. Evidently the line joining the points s_1 and s_2 is the common line of action and therefore parallel to the vector PP'. In the same way we can prove that s_2s_3 is parallel to PP'. So we have proved the theorem of statics quoted above.

3. Let us suppose the two triangles ABC and A'B'C' to be corresponding in a central collineation. We can interpret the sides of $\triangle ABC$ as the bars of the funicular polygon I II III for two forces with a and b as the lines of action, c is the resultant's line of action. This funicular polygon is in correspondence with the diagram 012P. This diagram can be drawn if for instance the magnitude of the force 01 is given. Likewise we interpret the sides of $\triangle A'B'C'$ as the bars of the funicular I'II'III'. In correspondence herewith is the diagram 012P'. Availing ourselves of the above theorem, we conclude that the corresponding sides of the two triangles intersect at points of a straight line, which we intended to prove.

4. The sides of $\triangle ABC$ may also be considered as the bars of a closed funicular polygon with reference to the forces 01(a), 12(b) and 20(c). These forces form a closed polygon 012, etc. The result of the argumentation is the same.

Dr L. KUIPERS.

De stelling van Schlömilch-Weissbach en de constructie van Tesař.

In zijn Leerboek der Beschrijvende Meetkunde, deel 1, § 66, bespreekt Prof. Dr Hk. de Vries in het hoofdstuk Axonometrie de stelling van Sch.-W., dat de zijden van de voetpuntsdriehoek van de tafereelsdriehoek zich verhouden als de kwadraten van de verkortingsverhoudingen van de assen. Daarbij merkt hij op, dat deze stelling niet in staat stelt zonder hulpfiguur de tafereelsdriehoek in de gebruikelijke stand te construeren, wat wel het geval is met de constructie van Tesař. Deze bewijst hij daarna met cirkels, die projecties zijn van vierdegraads ruimtekrommen. Die constructie kan evenwel, als de stelling van Sch.-W. eenmaal bewezen is, ook veel eenvoudiger bewezen worden. Dat veel eenvoudiger bewijs wordt door Prof. de Vries niet besproken en komt evenmin voor in andere mij bekende werken over axonometrie, waarom het hier met enkele woorden mag worden aangegeven. Dat bewijs kan worden gegeven met een eenvoudig figuurtje, dat de lezer zelf gemakkelijk kan vervaardigen. Daarmee kan eerst worden bewezen de stelling:

De lijnen, die de afstanden van de hoekpunten van een driehoek tot zijn hoogtepunt loodrecht middendoor delen, verdelen de zijden in stukken, die zich verhouden als de zijden van de voetpuntsdriehoek van die driehoek.

Voor het bewijs van deze stelling noemen we, evenals in de axonometrie gebruikelijk is, de hoekpunten en hoeken van de (tafereels-) driehoek X, Y en Z en zijn hoogtepunt O. Verbindt men nu de zes snijpunten van de middelloodlijnen van OX, OY en OZ en de zijden XY, XZ en YZ met O, dan ontstaan er zes gelijkbenige driehoeken, waarvan de toppen op XY, XZ en YZ liggen, en drie ongelijkbenige driehoeken, alle negen met O als gemeenschappelijk hoekpunt. Elk van die ongelijkbenige driehoeken ligt tussen twee gelijkbenige.

Van die drie ongelijkbenige driehoeken is nu eerst gemakkelijk te bewijzen, dat zij gelijkvormig zijn met de voetpuntsdriehoek van de tafereelsdriehoek. Daarvoor is slechts nodig te bewijzen, dat de hoeken van deze drie driehoeken evenals van de voetpuntsdriehoek $180 - 2X$, $180 - 2Y$ en $180 - 2Z$ zijn, wat een normale leerling H.B.S. wel kan bewijzen.

Met de gelijkbenige driehoeken is daarna de hier gegeven stelling direct te bewijzen, en de constructie van Tesař daarna ook weer direct met de cirkels, waarvan de middelpunten en stralen opv. de toppen en benen van de gelijkbenige driehoeken zijn.

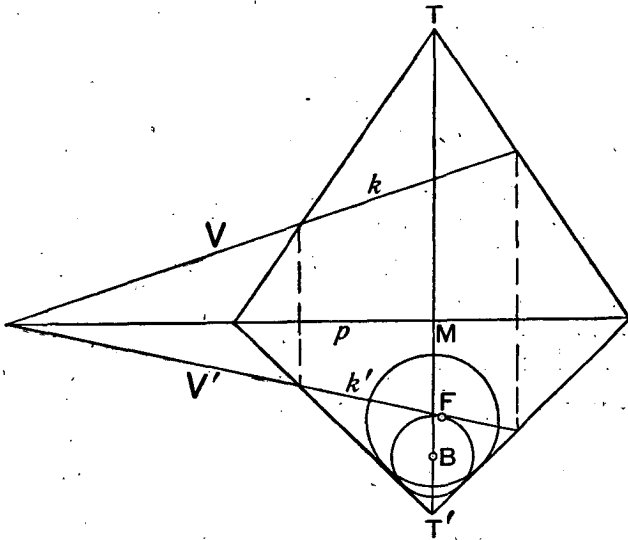
Ir D. POSTMA (Amsterdam).

LXXXVI.

Er bestaan verschillende bewijzen van de eigenschap, dat als een omwentelingskegel $T.M$ (zie Fig.) gesneden wordt door een plat vlak V , het middelpunt M van de grondcirkel één van de brandpunten is van de projectie p van de doorsnijding k van $T.M$ en V op het grondvlak van $T.M$.

Het volgende eenvoudige bewijs komt, voor zo ver mij bekend, in de literatuur niet voor en kan, naar mijn mening, de vergelijking met andere bewijzen wel doorstaan.

Voegt men aan kegel $T.M$, vlak V en hun doorsnijding k een affiene figuur $T'M$, V' en k' toe, waarbij het affiniteitsvlak van beide



figuren het grondvlak en de affiniteitsrichting evenwijdig aan de as van $T.M$ is, dan is p de gemeenschappelijke projectie van k en k' op het grondvlak van $T.M$.

Volgens de stelling van Dandelin is één van de brandpunten van k' het raakpunt F van V' en een bol B , die V' en $T'M$ raakt. Denkt men nu de affiniteitsverhouding $T'M : TM$ veranderlijk en kleiner wordend, dan naderen het middelpunt van bol B en het brandpunt F van k' steeds meer M en in de limietstand, dat $T'M = 0$ is, valt k' met p en F met M samen, waarmee het bewijs voldoende gegeven mag worden geacht.

Ir D. POSTMA (Amsterdam).

INGEKOMEN BOEKEN.

Van Wolters:

Dr A. van Thijn en M. L. Kobus, <i>Algebraische vraagstukken III</i> , 4e druk	f 2.65
P. Visser, <i>Leerboek der Vlakke Driehoeksmeting</i> , deel II, vervolg van de goniometrie-trigonometrie, goniometrische functies, goniometrische vergelijkingen, 8e druk	- 1.50
Dr P. G. J. Vredenduin, <i>Goniometrie</i> . Ten gebruike bij Middelbaar en voorbereidend Hoger onderwijs	- 2.25
Antwoorden	- 1.—
Dr N. R. Pekelharing en Dr K. W. Rutgers, <i>Leerboek der Werktuigkunde</i> , met opgaven. Ten dienste van het Middelbaar Onderwijs, 5e druk	- 3.80
Antwoorden bij Leerboek der werktuigkunde, 5e druk	- 1.—
Dr P. G. J. Vredenduin en Dr A. van Haselen, <i>Algebra II</i> , (inclusief rekenkunde), voor V.H. en M.O. 3e druk	- 2.50

Van Noordhoff:

C. J. Alders, <i>Algebra voor M.O. en V.H.O.</i> , deel I, 7e druk, gecartonneerd	- 2.—
K. H. W. Visser, <i>Analytische meetkunde, Differentiaal- en integraalrekening</i> , 4e druk	- 2.65
Bestemd voor M.T.S. en Nijverheidsonderwijsakten.	
Dr E. J. Dijksterhuis en Dr W. van der Wielen, <i>Vreemde woorden in de wiskunde</i> , 2e verbeterde druk	- 3.25
P. Wijdenes, <i>Practische driehoeksmeting met toepassing op verschillend gebied</i> , 4e druk	- 2.75
C. J. Alders, <i>Algebra voor M.O. en V.H.O.</i> , deel IIB, 3e druk f 1,70, gecart.	- 2.10
P. Wijdenes, <i>Nieuwe school-algebra</i> , deel II, 16e druk	- 3.—
deel III, 11e druk	- 3.—
P. Wijdenes en Dr D. de Lange, <i>Vlakke Meetkunde II</i> , 11e druk	- 2.90
P. Wijdenes en Dr P. G. van de Vliet, <i>Algebra voor de H.B.S. A</i> , 5e druk	- 2.90



BOEKBESPREKING.

Dr E. J. Dijksterhuis en Dr W. van der Wielen, *Vreemde woorden in de wiskunde*. Tweede verbeterde druk. Groningen—Batavia, P. Noordhoff N.V. 1948. 100 blz., prijs f 3,25.

Het verheugt mij bijzonder, dat van dit, in 1939 verschenen werkje, een herdruk noodig is gebleken, want dit bewijst, dat velen behoefte hebben gevoeld aan de inlichtingen, welke het verstrekt. Wat trouwens niet te verwonderen is, want de lectuur ervan behoort tot de interessantste, die men zich kan denken; en ik kan mij moeilijk voorstellen, dat er velen zijn, voor wie de rijke inhoud weinig of geen nieuws bevat.

Ten einde de verantwoording voor ophelderingen van taalkundigen aard te kunnen dragen heeft de schrijver, Dr Dijksterhuis, zich de medewerking verzekerd van een taalkundige, Dr Van der Wielen.

Het aantal opgenomen woorden is iets vermeerderd, een enkele verklaring eenigszins gewijzigd. Belangrijke verbeteringen acht ik, dat in vele gevallen de klemtoon is aangegeven en de juiste wijze van woordafbreking (abs-tract, a-sym-ptoot).

Deze tweede druk zal ongetwijfeld ook belangstellende lezers vinden.

J. H. S.

Dr H. J. E. Beth, *Meetkundige toepassingen van de differentiaalrekening*. Noordhoff, Groningen—Batavia (1948). 53 blz. f 1,90.

Het is gebleken, dat het bekende werk van de schrijver, *Inleiding tot de differentiaal- en integraalrekening* (waarvan de vierde druk ter perse is) in sommige opzichten te weinig bevat om het volkomen geschikt te doen zijn als leerboek bij de voorbereiding voor bepaalde examens, met name aan de Technische Hogeschool. Bovenstaand boekje is als supplement bedoeld. Het bevat eenvoudige differentiaalmeetkundige beschouwingen over vlakke krommen (raaklijn, buigpunt, meervoudig punt, kromming) en enkele opmerkingen over ruimtekrommen (formules van Frenet) en oppervlakken (indicatrix, stellingen van Euler en van Meusnier). De bruikbaarheid wordt verhoogd door enkele vraagstukken.

O. BOTTEMA.

JAARVERGADERING VAN L.I.W.E.N.A.G.E.L. OP 5 JAN. 1948.

Om 11.45 opent de voorzitter de vergadering en spreekt eerst een woord van welkom tot de inspecteurs, de heren van Andel en Dr de Boer en verder ook tot de vertegenwoordigers van de bevriende groepen en verenigingen. Daarna wijdt de voorzitter enige woorden aan de nagedachtenis van de Bestuursleden van L.i.w.e.n.a.g.e.l., die tijdens de oorlog zijn overleden om vervolgens te vertellen hoe het tegenwoordige bestuur tot stand gekomen is. Nadat de samenstelling van het bestuur door de vergadering is goedgekeurd en het bestuur dus wettig gekozen is, wordt er een commissie benoemd tot het nazien van de rekening en verantwoording van de penningmeester, deze commissie bestaat uit de heren Nathans en Menk.

De voorzitter deelt mee dat de heren Wielenga en Mooy L.i.w.e.n.a.g.e.l. vertegenwoordigen bij het Mathematisch Centrum en dat Prof. Bremekamp verzocht heeft ook een vertegenwoordiger van L.i.w.e.n.a.g.e.l. te zenden naar het Wiskundig Genootschap. Dr M. van Rees is bereid de vertegenwoordiging bij het Wiskundig Genootschap op zich te nemen.

De voorzitter spoort de aanwezige leden aan om onder de docenten in de exacte vakken leden te werven voor het Genootschap; deze zijn dan ook vanzelf lid van L.i.w.e.n.a.g.e.l. en kunnen Euclides, het officiële orgaan van L.i.w.e.n.a.g.e.l. tegen sterk gereduceerde prijs krijgen.

Onder de toekomstplannen van L.i.w.e.n.a.g.e.l. noemt de voorzitter:

- 1e. het organiseren van een Congres in 1948, samen met de verenigingen Wimeco's, Velibi en Velines; mededelingen over dit congres kunnen binnenkort verwacht worden.
- 2e. Het op de bres staan voor de belangen van o.a. de Wiskunde, b.v. een lesuur meer in 5B.
- 3e. Het bespreken van de kwestie: wat mag de Middelbare school van de lagere school eisen?
- 4e. Hoe moet het programma voor 5A en 6A worden?

De heer Nathans merkt op, dat de uren voor Natuurkunde anders verdeeld zijn over de klassen dan vroeger en de heer Mooy zou graag meer tijd beschikbaar hebben voor het schriftelijk eindexamen Wiskunde.

Op de vraag of de aanwezigen voor het schriftelijk werk het

verkieslijker vinden om de vraagstukken zelf op te geven inplaats van Centraal werk wordt met algemene stemmen geantwoord, dat centraal werk verkieslijker is.

Nadat er nog enige vragen gesteld zijn over het toekomstig schriftelijk eindexamen H.B.S. antwoordt inspecteur van Andel, dat het leerplan H.B.S. sinds 1937 uitbreiding heeft ondergaan, maar dat het eindexamen tot nu toe onveranderd is gebleven. Een verandering in het eindexamen zal tijdig bekend gemaakt worden. Inspecteur v. Andel verzoekt het bestuur van L.i.w.e.n.a.g.e.l. een lid aan te wijzen in de commissie, die onderzoeken zal hoe het eindexamen H.B.S. gewijzigd kan worden.

Hierna wordt het 1e gedeelte van de vergadering gesloten.

Om $\pm$ 1.45 wordt de vergadering heropend.

De Kascommissie deelt mee, dat de rekening en verantwoording van de penningmeester in orde zijn bevonden.

De voorzitter deelt mee, dat bij vele oud-leerlingen van Gymnasium A het verlangen bestaat om iets te weten over de Natuurwetenschappen en dat daarom deze kwestie nu eens door L.i.w.e.n.a.g.e.l. in bespreking wordt gebracht.

Als eerste inleider bespreekt nu de heer Mooy de vraag:

Moet de Wiskunde op het Gymnasium A gegeven worden, zoals die nu gegeven wordt?

- I. In het rapport, uitgebracht door het Genootschap wordt in 5 A en 6 A natuurkunde aanbevolen inplaats van wiskunde.

Argumenten worden niet gegeven. Deze kunnen ontleend worden aan een referaat van Dr Wielenga op 31 Oct. 1946 gehouden in Amsterdam.

Hierin zijn de belangrijkste argumenten:

- a) Het onderwijs in de lagere klassen kweekt een zo grote tegenzin bij de slechte leerlingen, dat in 5 A, 6 A de wisk. niet verwerkt kan worden.

De conclusie moet hier luiden: dan moet het onderwijs in de laagste klassen gewijzigd worden.

- b) De mathematische concepties zijn geen schepping van de autonome menselijke geest.

Dit is echter m.i. wel zo en één der redenen om juist wisk. in 5 A en 6 A te geven.

- c) Het wisk. ond. staat of valt met de vormende waarde.

Dit is echter noch waar voor 5 A en 6 A noch in 't algemeen. De reële waarde van de wiskunde is zo groot, dat er alle reden is om dit in 5 A en 6 A te geven.

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH

AMERSFOORT

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| I. Zeventiende druk | 156 blz. 21 fig. f 3.—* |
| II. Zestiende druk | 204 blz. 50 fig. f 3.00* |
| III. Elfde druk | 198 blz. 60 fig. f 3.00* |

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Vijfde druk. 164 blz. 20 fig. f 2,00*.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

V α en VI α Nieuwe Schoolalgebra III α

V β en VI β Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Verschenen: nieuwe drukken van alle drie antwoordenboekjes.

Voor leraren zijn antwoorden verkrijgbaar; bovendien bij
P. Wijdenes de volledige uitwerkingen van de logaritmenvraagstukken in 4 en in 5 decimalen.

Uitgave P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Begin Juni verschijnt:

Dr P. MOLENBROEK

LEERBOEK DER VLAKE MEETKUNDE

Tiende druk, f 15.00*, geb. f 17.50*

★

Zo juist verscheen:

Dr J. G. RUTGERS

LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

Eerste deel, De Rechthoekige Projectie

Eerste stuk, Tweede druk f 3.25*

Tweede en derde stuk ter perse

★

Begin Juni verschijnt:

Dr H. J. E. BETH EN Dr P. J. VAN LOO

MECHANICA

voor het M.O. met vraagstukken

6e druk f 3.90*

★

Ter perse om spoedig te verschijnen:

P. WIJDENES

MIDDEL-ALGEBRA

Deel I - 4e druk

UITGAVEN P. NOORDHOFF, N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Ingevolge papiertoewijzing B.P.P. No. 573 verschijnt deze uitgave zes maal per jaar en is de omvang van dit Nummer 48 pag's., formaat 16 × 24½ cm.