

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, LEEUWARDEN
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND - DR. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

23e JAARGANG 1947/48

Nr. 2

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8.00*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 8.00*) zijn ingetekend, betalen f 6.75*.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van Wimecos (Vereniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,50 op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van Wimecos storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1946 t/m 31 Augustus 1947 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt; Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Prof. Dr C. S. Meyer, Convergentie en divergentie	65
Prof. Dr J. Popken, De jeugdperikelen van het getal	80
Het mathematisch centrum	98
Officiële mededelingen van Wimecos	102
Vereniging voor logica en wijsbegeerte	103
Drs M. Dijkshoorn, Naschrift op het artikel van blz. 48	104
Korrels LXXXI—LXXXIV	105
Van de personen	109
Boekbespreking	110
Ingekomen boeken	112

CONVERGENTIE EN DIVERGENTIE ¹⁾

door

Dr C. S. MEIJER.

In één van zijn werken karakteriseert de groote wiskundige Jacob Bernoulli het belang van de reeksen door de volgende uitspraak: „Hoe noodzakelijk en nuttig het beschouwen van reeksen is weet ieder, die ondervonden heeft, dat een dergelijke reeks bij zeer moeilijke problemen, aan welke oplossing men wanhopen moet, in zekeren zin een reddingsanker is, waartoe men als laatste middel zijn toevlucht mag nemen, als alle andere krachten van den menschelijken geest schipbreuk hebben geleden.” Inderdaad, bijna iedere wiskundige maakt vaak met voordeel gebruik van oneindig voortlopende reeksen. Hij ontmoet ze bij het oplossen van differentiaalvergelijkingen, bij het berekenen van bepaalde integralen, bij benaderingsproblemen, in de functietheorie en nog op vele andere gebieden van de wiskunde.

Maar niet alleen als hulpmiddel zijn de reeksen van beteekenis; hun theorie vormt ook een belangrijk zelfstandig onderdeel van de wiskunde. Over enkele punten uit de geschiedenis van deze theorie wil ik in dit uur tot U spreken.

Zoodra we ons gaan bezighouden met de theorie van de oneindig voortlopende reeksen, overschrijden we een grens, die men gewoonlijk trekt tusschen de elementaire en de hoogere wiskunde. Een oneindig voortlopende reeks is in bepaalde opzichten een generaliseering van het gewone optellingsproces. De optelling van een eindig aantal getallen is een aflopende procedure, die niet zonder meer op het geval van oneindig veel getallen kan worden toegepast. De principiële moeilijkheid, die hierbij moet worden overwonnen, is het zoeken naar een definitie van de som van oneindig veel termen, die in wezenlijke punten met die van de som van een eindig aantal termen overeenstemt. De sleutel tot de oplossing van dit probleem is het grensproces.

Een oneindig voortlopende reeks is in beginsel een oneindige verzameling van getallen, die ieder een rangnummer bezitten. Men noemt ze de termen van de reeks. We kunnen nu gaan beschouwen de som van de eerste n termen. Wanneer we n onbepaald laten toe-

¹⁾ Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Groningen op 12 December 1946.

nemen, dan bestaan er verschillende mogelijkheden. Het belangrijkste geval is dat, waarbij de som van de eerste n termen willekeurig dicht tot een eindige grenswaarde nadert. We noemen de oneindig voortlopende reeks dan convergent en de genoemde grenswaarde heet de som van de oneindig voortlopende reeks. In alle andere gevallen spreken we van een divergente reeks, waaraan we, voorloopig althans, geen som toekennen.

De divergente reeksen vertoonen nog zeer verschillend gedrag. Het kan voorkomen, dat de som van de eerste n termen een willekeurig groot positief getal overtreft, zodra n groot genoeg is. Het kan ook gebeuren, dat die som kleiner is dan elk willekeurig negatief getal, zodra n groot genoeg is. De overige divergente reeksen noemt men met een kenmerkend woord oscilleerend.

Deze definities van convergentie en divergentie vindt men in de tegenwoordige leerboeken. Het is plausibel, dat bij een convergente reeks de n^{de} term tot nul nadert, als n onbepaald aangroeit; en inderdaad kan men dit op grond van de zoeven gegeven definities gemakkelijk bewijzen. Men zou nu kunnen meenen, dat omgekeerd iedere reeks, waarbij de n^{de} term tot nul nadert, convergent is. Men kan echter gemakkelijk door een tegenvoorbeeld aantonen, dat dit niet het geval is. De reeks

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

bijvoorbeeld is divergent, niettegenstaande de n^{de} term tot nul nadert.

De wiskundigen van enkele eeuwen geleden hadden geen duidelijke voorstelling van het onderscheid tusschen convergentie en divergentie. Voor hen was een oneindige reeks de som van oneindig veel termen en ze werkten met oneindige reeksen op dezelfde wijze als met sommen van een eindig aantal termen.

Het eerste voorbeeld van de bepaling van de som van een oneindig voortlopende reeks vindt men bij den grooten Griekschen wiskundige Archimedes, die in de derde eeuw voor onze jaartelling leefde. Bij de berekening van de oppervlakte van een paraboolsegment ontmoette hij de meetkundige reeks

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots,$$

en hij bewees volkomen streng, op dezelfde wijze als wij het tegenwoordig doen, dat de som van deze reeks gelijk is aan $\frac{4}{3}$.

Al hebben de oneindig voortlopende reeksen hun oorsprong dus in de oudheid, de eigenlijke ontwikkeling van de theorie begint pas in de 17de eeuw, na de ontdekking van de differentiaal- en integraalrekening door Newton en Leibniz. In de werken van

deze wiskundigen treden reeds vele oneindig voortlopende reeksen op. Newton gebruikte ze zelfs systematisch. Hij kende verschillende methoden om een functie in een machtreeks te ontwikkelen. De bekende binomiaalreeks voor $(1 + x)^n$ komt het eerst in zijn geschriften voor. Reeksontwikkelingen zijn bij Newton geen doel, doch slechts een middel om integralen te berekenen. Een functie, waarvan de integraal niet op eenvoudige wijze is te vinden, ontwikkelt hij in een reeks, die daarna termsgewijs wordt geïntegreerd op dezelfde wijze als tegenwoordig.

Newton en Leibniz beseften wel, dat het noodzakelijk was na te gaan in hoeverre de door hen gebruikte reeksen convergent waren. Maar hun hulpmiddelen bij dit onderzoek waren nog primitief en in vele gevallen niet toereikend.

Een snelle ontwikkeling van de wiskunde vond plaats in de 18de eeuw. Op de door Newton en Leibniz gelegde fundamenteen werden de differentiaal- en integraalrekening en de theorie der reeksen opgebouwd. De belangstelling van de wiskundigen was in deze periode meer gericht op het bereiken van resultaten dan op methodisch onderzoek. Bovendien was het gevoel voor strengheid in de bewijsvoering volkomen verloren gegaan. De 18de eeuw is de formeele periode, de periode van de verwaarloozing der grondslagen.

De wiskundigen uit dit tijdperk, Euler, Lagrange en de Bernoulli's, hadden op zijn best nog een vaag gevoel van het onderscheid tusschen convergentie en divergentie. Ze gebruikten bij practische berekeningen en in theoretische onderzoekingen zoowel convergente als divergente reeksen en hebben met behulp hiervan vele problemen behandeld.

Verschillende van de door deze wiskundigen behandelde divergente reeksen zijn van groot belang bij practische berekeningen, in zoverre, dat ze een middel geven om bepaalde grootheden te benaderen. Men krijgt namelijk een sterke benadering van een gezochte grootheid door de bijbehorende reeks na een aantal termen af te breken. Het blijkt, dat deze benadering het volgende kenmerk vertoont: Het verschil tusschen de grootheid en de som van een willekeurig aantal begintermen van de reeks is van de orde van grootte van den eersten term, dien men niet meer meerekent. Bovendien hebben de termen de eigenschap, dat ze eerst afnemen, een minimum bereiken en vervolgens weer aangroeien. Breekt men bij den minimalen term af, dan krijgt men dikwijls een zeer nauwkeurige benadering. Divergente reeksen, die een dergelijk karakter vertoonen, noemt men *semiconvergent*. Reeds sinds lang maakt men in de astronomie bij de berekening van de posities der planeten

gebruik van zulke semiconvergente reeksen. Het feit, dat de resultaten van de berekeningen door de waarnemingen worden bevestigd, wijst er op, dat de benadering voldoende nauwkeurig is.

Ten einde ook aan divergente reeksen een som toe te kennen, voert Euler, de grootste wiskundige van de 18de eeuw, daarvoor een sombegrip in. Hij doet dit op de volgende wijze: Indien een functie van x voor bepaalde waarden van x in een convergente oneindig voortlopende reeks kan worden ontwikkeld, stelt hij voor alle waarden van x , ook die waarden, waarvoor de reeks divergent is, de som van de reeks gelijk aan die functie.

De functie $\frac{1}{1+x}$ bijvoorbeeld kan worden ontwikkeld in de reeks

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots,$$

mits x tusschen -1 en 1 ligt, de grenzen -1 en 1 niet inbegrepen.

Volgens de definitie van Euler is de som van de reeks nu voor iedere waarde van x gelijk aan $\frac{1}{1+x}$. Men mag dus ook $x = 1$ stellen en vindt dan

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2}.$$

Een nog zonderlinger resultaat komt voor den dag, als men $x = -2$ stelt. Dan krijgt men

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + \dots = -1.$$

Dergelijke betrekkingen werden in de 18de eeuw volkomen ernstig opgevat.

De reeks $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ heeft in dien tijd tot verschillende discussies aanleiding gegeven. Dat de som gelijk zou zijn aan $\frac{1}{2}$ noemde Jacob Bernoulli een „paradoxon non inelegans”. Grandi, een Italiaansch wiskundige, nam telkens twee opeenvolgende termen 1 en -1 samen en vindt dan, daar $1 - 1 = 0$, dat de som van de reeks gelijk is aan

$$0 + 0 + 0 + \dots = 0.$$

Maar de som is ook gelijk aan $\frac{1}{2}$. Er komt dus $0 = \frac{1}{2}$ en dit bewijst, volgens Grandi, dat het heelal uit niets is geschapen.

De 18de eeuw was een tijdperk van overstelpende productie. Een machtig analytisch apparaat werd geschapen, een apparaat, dat den wiskundige in staat stelt talrijke problemen van de natuurkunde, de sterrenkunde en de techniek tot een oplossing te brengen.

Maar het gebouw der analyse was op een wankelen grondslag gefundeerd. De mathematici uit den tijd van Euler stelden een bijna onbegrensd vertrouwen in het resultaat van berekeningen; doch ze vroegen zich niet af, of het geoorloofd was die berekeningen

onder alle omstandigheden uit te voeren. Ze hadden geen duidelijke voorstelling van het begrip grenswaarde. Ze werkten met oneindig op dezelfde wijze als met een eindig getal, ze wisselden limietovergangen en behandelden, zooals ik reeds heb vermeld, divergente reeksen alsof ze gehoorzaamden aan alle wetten van de convergente.

In het begin der 19de eeuw openbaarde zich onder den machtigen invloed van Gauss een streven om de analyse op een hechteren grondslag te fundeeren. Grensovergangen, continuïteit en discontinuïteit, convergentie en divergentie werden op exacte wijze gedefinieerd. Cauchy gaf een nauwkeurige definitie voor de bepaalde integraal van een continue functie, hij bouwde een strenge infinitesimaalrekening op en ontwikkelde de theorie der analytische functie van een complexe veranderlijke. In de theorie van de oneindig voortlopende reeksen stelden Gauss, Cauchy en Abel regels op, met behulp waarvan in vele gevallen kan worden uitgemaakt of een gegeven reeks convergent dan wel divergent is.

Het eerste strenge convergentieonderzoek is ingesteld door Gauss¹⁾. In een in 1812 verschenen verhandeling onderzocht hij de zoogenaamde hypergeometrische reeks¹⁾. Deze reeks, die reeds bij Euler voorkomt, is na Gauss nog door talrijke mathematici onderzocht. Ik noem hier slechts Kummer³⁾, Jacobi⁴⁾, Riemann⁵⁾, Goursat⁶⁾ en Barnes⁷⁾.

¹⁾ C. F. Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam Werke 3 (1866), pg. 123—162.

²⁾ De hypergeometrische reeks $F(a, b; c; x)$ wordt op de volgende wijze gedefinieerd

$$F(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{1 \cdot c} x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)} x^2 + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)} x^3 + \dots$$

Neemt men $a = c$ en $b = 1$, dan krijgt men de gewone meetkundige reeks $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

³⁾ E. E. Kummer, Über die hypergeometrische Reihe Journal für die reine und angewandte Mathematik, 15 (1836), pg. 39—83 en 127—172.

⁴⁾ C. G. J. Jacobi, Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 56 (1859), pg. 149—165.

⁵⁾ B. Riemann, Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Functionen. Gesammelte Mathematische Werke (1876), pg. 62—80.

⁶⁾ E. Goursat, Sur l'équation différentielle linéaire qui admet pour intégrale la série hypergéométrique. Annales de l'école normale supérieure (2de serie), 10 (1881), Supplément, pg. 3—142.

⁷⁾ E. W. Barnes, A new development of the theory of the hypergeometric functions. Proceedings of the London Mathematical Society (2de serie), 6 (1908), pg. 141—177.

De hypergeometrische reeks is vooral daarom van belang, omdat ze een zeer groot aantal toenmaals bekende reeksen als bijzonder geval bevat. Verschillende functies, die herhaaldelijk in de astronomie en de mathematische physica voorkomen, kunnen in de hypergeometrische reeks worden uitgedrukt. In zijn artikel geeft Gauss een opsomming van de belangrijkste bijzondere gevallen. Hij onderzoekt op strenge wijze de convergentie of divergentie, niet alleen voor reële, maar ook voor complexe waarden der veranderlijke en leidt verschillende interessante eigenschappen af, bijvoorbeeld kettingbreukontwikkelingen. De verhandeling van Gauss over de hypergeometrische reeks vormt een mijlpaal in de geschiedenis der wiskunde; immers het is het eerste voorbeeld van een volkomen streng convergentieonderzoek bij reeksen.

Toch wekte deze publicatie niet de belangstelling van zijn tijdgenooten op; misschien hebben de ongewone vorm en de strenge methoden afschrikwekkend gewerkt.

Geheel anders verging het Cauchy en Abel en daarom worden zij als de grondleggers der strenge analyse beschouwd.

In geschriften en voordrachten zette Cauchy omstreeks 1820 zijn ideeën uiteen. Hij ontwikkelde een exacte opbouw van de analyse en wees op de fouten, die bij het gebruik van divergente reeksen kunnen optreden. Hij zag zich daardoor genoodzaakt de divergente reeksen met uitzondering van de semiconvergente te verwerpen. Toch deed hij dit slechts aarzelend. In het voorwoord van zijn in 1821 verschenen „Analyse algébrique” schrijft hij o.a.: „J’ai été forcé d’admettre diverses propositions qui paraîtront peut-être un peu dures; par exemple, qu’une série divergente n’a pas de somme”.

De beschouwingen van Cauchy veroorzaakten onrust bij allen, die zich in hun wetenschappelijk werk met oneindig voortlopende reeksen bezighielden. Laplace, bijvoorbeeld, had ze in zijn beroemde „Mécanique céleste” herhaaldelijk gebruikt en juist zijn belangrijkste onderzoeken had hij zonder reeksontwikkelingen niet kunnen voltooien. Hij voelde zijn trotsch gebouw bedreigd door de denkbeelden van Cauchy. Het verhaal gaat, dat na een bijeenkomst, waarin Cauchy zijn ideeën uiteenzette, Laplace verontrust naar huis snelde en zich daar terugtrok, totdat hij alle reeksen in zijn „Mécanique céleste” had onderzocht. Gelukkig bleken ze alle convergent te zijn.

De „Analyse algébrique” van Cauchy, die ik U zooeven reeds noemde, is het eerste strenge leerboek der analyse. Het verschilt principiëel van alle vroegere werken: De begrippen oneindig klein

en limiet worden exact gedefiniëerd op dezelfde wijze als in onze tegenwoordige leerboeken.

In de theorie van de oneindig voortlopende reeksen werkt *Cauchy* niet meer, zooals zijn voorgangers, met het vage begrip „som van oneindig veel termen”. Integendeel, hij geeft een nauwkeurige definitie van convergentie en divergentie en maakt principiëel onderscheid tusschen deze beide begrippen. Een convergente reeks bezit een som, een divergente daarentegen niet. *Cauchy* geeft vervolgens een uitvoerige opbouw van de theorie. Hij leidt op strenge wijze tal van kenmerken af met behulp waarvan bij vele reeksen gemakkelijk de convergentie of divergentie kan worden vastgesteld. Het werk van *Cauchy* is van groote beteekenis geweest voor de ontwikkeling van de theorie der convergentie. Het vormde de grondslag, waarop van toen af alle strenge onderzoeken op het gebied der oneindig voortlopende reeksen moesten steunen.

Ook *Abel* gevoelde zich genoodzaakt het gebruik van divergente reeksen als hulpmiddel bij wiskundige beschouwingen uit te sluiten; maar, evenals *Cauchy*, deed hij dit slechts na aarzeling, blijkbaar doordat hij zich er van bewust was, dat de resultaten van vele berekeningen, die een vroegere generatie met behulp van divergente reeksen had uitgevoerd, toch goed waren.

In 1826 schrijft hij in een brief aan *Holmboë*¹⁾: „Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on ose y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs en qui ont enfanté tant de paradoxes. Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception des cas les plus simples, par exemple les séries géométriques, il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme soit déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire que la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant.”

In denzelfden brief oefent *Abel* felle critiek uit op de vroeger gebruikte methoden. Hij schrijft: „La théorie des séries infinies en général est jusqu'à présent très mal fondée. On applique aux séries infinies toutes les opérations, comme si elles étaient finies; mais cela est-il bien permis? je crois que non.”

¹⁾ Oeuvres complètes de N. H. *Abel* (nouvelle édition, 1881), tome 2, pg. 256—258.

De critiek, door Cauchy en Abel uitgeoefend op het gebruik van divergente reeksen, had tot gevolg, dat eerst in Frankrijk, later ook in de andere landen, de divergente reeksen, met uitzondering van de semiconvergente, door de wiskundigen niet meer in hun beschouwingen werden betrokken. De convergente wekten hun belangstelling op. Men leidde verschillende kenmerken af, met behulp waarvan in vele gevallen kan worden uitgemaakt of een reeks convergeert of divergeert. Bleek een reeks divergent te zijn, dan werd ze niet verder in behandeling genomen.

Bovendien werden de eigenschappen van de convergente reeksen nog aan een nauwkeurig onderzoek onderworpen. Voor de wiskundigen van de 17de en 18de eeuw was het vanzelfsprekend, dat reeksen met oneindig veel termen op dezelfde wijze behandeld konden worden als die met een eindig aantal termen. Voor hen was het bijvoorbeeld volkomen natuurlijk, dat de som van een reeks dezelfde waarde behoudt, als men de termen in een andere volgorde opschrijft. In het begin van de 19de eeuw toonde men echter aan, dat dit niet steeds het geval is. Men beschouwde bijvoorbeeld de reeks

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots$$

Er kan worden bewezen, dat de som van deze reeks gelijk is aan de natuurlijke logarithme van 2. Verandert men de volgorde van de termen zoodanig, dat op één positieve term telkens twee negatieve volgen, dan krijgt men de reeks

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} \dots$$

Deze reeks bevat dezelfde termen als de oorspronkelijke, maar de volgorde is anders. Men kan nu gemakkelijk aantonen, dat de som van de nieuwe reeks de helft is van die der oorspronkelijke.

Nu doet zich natuurlijk de vraag voor bij welke reeksen het wel geoorloofd is de volgorde van de termen te veranderen en bij welke niet. Er kan worden bewezen, dat bij een convergente reeks, waarvan alle termen positief zijn, de volgorde van die termen geen invloed heeft op de waarde van de som. Hetzelfde geldt bij een convergente reeks met alleen maar negatieve termen.

Bevat de reeks oneindig veel positieve en ook oneindig veel negatieve termen, dan zijn er twee mogelijkheden. De eerste mogelijkheid is, dat de reeks convergent blijft, als men iedere negatieve term door zijn tegengestelde vervangt. De tweede mogelijkheid daarentegen is, dat de reeks in een divergente overgaat, indien iedere negatieve term door zijn tegengestelde wordt vervangen. Het blijkt nu, dat men in het eerste geval in de gegeven reeks de volg-

orde van de termen mag veranderen; de reeks blijft convergent en behoudt dezelfde som. Maar in het tweede geval kan men de som van de reeks elke waarde, welke ook, geven, mits men slechts de volgorde van de termen op een geschikte wijze kiest. Ja, zelfs kan men op deze wijze bewerken, dat de reeks divergent wordt.

Het feit, dat in het verleden door bewerkingen met behulp van divergente reeksen resultaten zijn gevonden, die juist blijken te zijn, bracht tegen het eind van de 19de eeuw verschillende wiskundigen tot het vermoeden, dat het misschien mogelijk is het sombegrip op zoodanige wijze uit te breiden, dat het ook van toepassing wordt op sommige divergente reeksen. De theorie, die hierop betrekking heeft, is zeer abstract; volledigheidshalve wil ik haar heel in het kort aanroeren.

Gevraagd wordt een wet op te stellen, die ons voor iedere oneindig voortlopende reeks van een zekere klasse een eindig getal levert, een getal, dat afhangt van de termen van die reeks en door die termen volkomen is bepaald. Die wet moet bovendien voldoen aan de drie volgende voorwaarden:

1. De wet kan op alle convergente reeksen worden toegepast.
2. De wet kan op minstens één divergente reeks worden toegepast.
3. De wet levert, toegepast op een convergente reeks, een getal op, dat gelijk is aan de som van die reeks.

Nu noemen we het getal, dat deze wet bij een willekeurige reeks van de beschouwde klasse verschaft, per definitie de som van die reeks.

Bij convergente reeksen is dit sombegrif dus identiek met het oorspronkelijke; maar het nieuwe is, dat we nu ook bij bepaalde divergente reeksen zinvol van een som kunnen spreken, terwijl dit vroeger niet het geval was. Deze laatste divergente reeksen noemen we sommeerbaar; de wet zelf heet een sommatiemethode.

Het is duidelijk, dat de som van dergelijke divergente reeksen nu afhangt van de sommatiemethode, waarmee we werken. Verschillende zulke methoden zijn omstreeks het jaar 1900 opgesteld en met behulp hiervan is het mogelijk gebleken aan vele divergente reeksen een som toe te kennen.

Het zou me te ver voeren, indien ik U een overzicht ging geven van alle sommatiemethoden. Liever wil ik spreken over de semi-convergente reeksen. Ook deze wekten tegen het eind van de 19de eeuw opnieuw de belangstelling van de mathematici op. In 1886 verschenen twee artikels, het eene van onzen landgenoot

Stieltjes¹⁾, het andere van den Franschman Poincaré²⁾. Beide schrijvers stelden een theorie over de semiconvergente reeksen op. Daar de theorie van Stieltjes minder algemeen is dan die van Poincaré, zal ik de laatste in het kort uiteenzetten.

Poincaré gaat uit van een functie van x en brengt die functie in verband met een oneindig voortlopende reeks van de gedaante

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots$$

Hij neemt nu aan, dat voor groote waarden van x de functie bij benadering kan worden voorgesteld door de som van de eerste n termen van die reeks. Hij maakt namelijk de onderstelling, dat het verschil tusschen de functie en de som van de eerste n termen van de reeks voor groote waarden van x van dezelfde orde van grootte is als de $(n+1)^{\text{de}}$ term, d.w.z. van de orde van grootte van den eersten term der reeks, dien men niet meer meerekent. Als aan deze voorwaarden is voldaan, noemt hij de reeks een *asymptotische ontwikkeling* voor de functie.

In de meeste gevallen, die in de praktijk voorkomen, blijkt de reeks divergent te zijn. Maar dat is geen bezwaar. Immers we spreken niet over de som van de oneindig voortlopende reeks. We berekenen alleen de som van de eerste n termen van die reeks en deze eindige som levert, als x groot is, een benaderde waarde voor de functie. In vele gevallen kunnen we een zeer nauwkeurige benadering krijgen, door het getal n , dus het aantal termen van de reeks, dat we gebruiken, geschikt te kiezen.

De asymptotische ontwikkelingen zijn van groot belang in de theorie der differentiaalvergelijkingen. In het algemeen is het bij behoorlijk ingewikkelde differentiaalvergelijkingen niet mogelijk om de oplossingen uit te drukken met behulp van de bekende elementaire functies. Men neemt dan meestal zijn toevlucht tot reeksontwikkelingen. Dikwijls vindt men dan een oplossing in den vorm van een machtreeks

$$b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots$$

die voor iedere waarde van x convergeert. Men is dan, althans theoretisch, geslaagd. Immers, door de som van een voldoende aantal termen van de reeks te nemen, kan men de functie, die door deze reeks wordt voorgesteld, willekeurig scherp benaderen. Het bezwaar

¹⁾ Th. J. Stieltjes, Recherches sur quelques séries semi-convergentes. Annales de l'école normale supérieure (3de serie), 3 (1886), pg. 201—258 (Oeuvres Complètes, 2, pg. 2—58).

²⁾ H. Poincaré, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires. Acta Mathematica, 8 (1886), pg. 295—344.

van deze methode is echter, dat men voor groote waarden van x zeer vele termen van de reeks gebruiken moet om een voldoende nauwkeurige benadering te krijgen. Voor groote waarden van x is de machtreeks dus weinig geschikt voor practische becijferingen.

In vele gevallen nu is het mogelijk voor een oplossing van de differentiaalvergelijking ook een asymptotische ontwikkeling af te leiden, en met behulp hiervan kan men, als x groot is, de oplossing op een betere wijze benaderen dan met de machtreeks. De machtreeks en de asymptotische ontwikkeling karakteriseeren samen het gedrag van de oplossing.

Het is gebleken, dat de semiconvergente reeksen, waarvan men vroeger gebruik maakte bij practische becijferingen, bijvoorbeeld bij de berekening van de posities der planeten, asymptotische ontwikkelingen zijn volgens de definitie van P o i n c a r é.

Het aantal publicaties over semiconvergente reeksen, dat verscheen vóór 1886, het jaar waarin P o i n c a r é zijn theorie opstelde, is gering en deze oudere onderzoekingen dragen geen van alle een algemeen karakter. De schrijvers behandelen één of enkele functies en leiden daarvoor een semiconvergente reeks af.

Het artikel van P o i n c a r é echter vestigde de aandacht van vele mathematici op de asymptotische ontwikkelingen en de vragen, die zich daarbij kunnen voordoen. Talrijke publicaties zijn sindsdien verschenen en de problemen zijn van verschillende zijden belicht. Sommige onderzoekers behandelen één of enkele speciale functies en bestudeeren zoo nauwkeurig mogelijk de asymptotische ontwikkeling van die functies. Vele, dikwijls verrassende problemen doen zich bij een dergelijk gespecialiseerd onderzoek voor. Andere schrijvers daarentegen geven een zeer algemeene theorie, met behulp waarvan het asymptotisch gedrag van vele functies kan worden bepaald. Het is me niet mogelijk U een overzicht te geven van hun werkwijzen en resultaten; evenmin kan ik U alle problemen uiteenzetten, die zich bij deze onderzoekingen voordoen. Voor enkele punten slechts wil ik Uw aandacht vragen.

In 1909 heeft onze landgenoot P. D e b y e ¹⁾ een methode gepubliceerd, waarmee men in vele gevallen een asymptotische ontwikkeling voor een functie kan afleiden. De methode van D e b y e, de zoogenaamde zadelpuntenmethode, maakt gebruik van integralen uitgestrekt over geschikt gekozen integratiewegen in het complexe vlak. Met behulp hiervan kunnen verschillende moeilijke problemen

¹⁾ P. D e b y e, Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für große Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index. Mathematische Annalen, 67 (1909), pg. 535—558.

uit de theorie der asymptotische ontwikkelingen tot een oplossing gebracht worden. Deze methode van Debye blijkt één van de machtigste hulpmiddelen te zijn bij het onderzoek naar het gedrag van functies voor groote waarden van de veranderlijke.

Bij de asymptotische ontwikkelingen, waarover we tot nu toe gesproken hebben, ongerstelden we, dat slechts één veranderlijke groote waarden kan aannemen; het doel van de asymptotische ontwikkeling is een benaderingsformule te leveren voor een functie, die van die veranderlijke afhangt. Bij functies van twee of meer dan twee veranderlijken kan het voorkomen, dat bijvoorbeeld twee van die veranderlijken groote waarden aannemen en de eventueele andere niet. Men kan nu vragen naar een bruikbare benaderingsformule voor de functies, als die beide veranderlijken groot zijn. Dit probleem, dat herhaaldelijk in de mathematische physica voorkomt, kan dikwijls worden opgelost met behulp van de zadelpuntenmethode. Debye zelf heeft de zadelpuntenmethode ontwikkeld bij zijn onderzoek naar het gedrag van de Besselsche functies, indien zoowel de orde als het argument van deze functies groot is.

Verder vestig ik nog Uw aandacht op het onderzoek naar den restterm bij een asymptotische ontwikkeling. Zooals ik reeds vermeld heb noemt men een oneindig voortlopende reeks

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \dots$$

een asymptotische ontwikkeling voor een functie van x , indien het verschil tusschen de functie en de som van de eerste n termen van de reeks voor groote waarden van x van dezelfde orde van grootte is als de eerste term van de reeks, dien men niet meer meerekent. Bij praktische becijferingen, bijvoorbeeld bij het maken van een tabel van de functie, is het gewenscht, dat men een bovengrens kent voor de fout, die men maakt, als men de functie vervangt door de som van de eerste n termen der asymptotische ontwikkeling. Tot nu toe wisten we alleen, dat de fout van dezelfde orde van grootte is als de eerste niet meer meegerekende term. Maar dit kan nog zeer veel verschillende dingen beteekenen. Het kan bijvoorbeeld zijn, dat dit inhoudt, dat de afwijking vijf maal de bedoelde term is. Maar het zou ook kunnen zijn, dat dit beteekent, dat de fout duizend maal die term is. Men moet over nauwkeuriger gegevens beschikken; men dient bijvoorbeeld te kunnen zeggen: De fout is hoogstens tien maal de eerste niet meer meegerekende term. In sommige gevallen vindt men bij de afleiding van de asymptotische ontwikkeling meteen de verlangde gegevens betreffende de fout. In andere gevallen moet men daarvoor een apart onderzoek instellen.

Dit onderzoek naar den restterm is dikwijls geenszins eenvoudig en gelukt soms pas, nadat een groot analytisch apparaat is opgebouwd.

Tenslotte wil ik nog spreken over de gegeneraliseerde hypergeometrische functie¹⁾. Deze functie, in de vorige eeuw reeds bestudeerd door Clausen, Thomae, Goursat en Pochhammer, bevat de door Gauss onderzochte hypergeometrische functie als bijzonder geval. Doch niet alleen de functie van Gauss, ook vele andere functies, die herhaaldelijk in de analyse voorkomen, zijn een bijzonder geval van de gegeneraliseerde hypergeometrische functie of kunnen op een eenvoudige wijze in haar worden uitgedrukt. Ik noem U slechts de voor de theoretische natuurkunde belangrijke functies van Bessel en Whittaker, de bolfuncties en de veeltermen van Hermite en Laguerre.

Verschillende wiskundigen hebben gepoogd asymptotische ontwikkelingen voor de gegeneraliseerde hypergeometrische functie af te leiden. De methoden van de oudere schrijvers zijn zeer gecompliceerd en hun resultaten zijn niet volledig. Aan den Engelschman Barnes²⁾, in zijn jeugd wiskundige, later Bisschop van Birmingham, is het gelukt deze functies voor te stellen met behulp van bepaalde integralen, die van groot belang blijken te zijn voor de geheele theorie van de gegeneraliseerde hypergeometrische functie. De Barnes-integralen zijn de sleutels, waarmede verschillende, vroeger gesloten deuren kunnen worden geopend. Door hun tussenkomst kunnen niet alleen het vraagstuk van de asymptotische ontwikkeling van de gegeneraliseerde hypergeometrische functie, maar ook allerlei andere problemen en berekeningen, waarin deze functies optreden, op verrassend eenvoudige wijze tot een oplossing worden gebracht.

Verscheidene betrekkingen en stellingen uit de theorie der zoo-genaamde speciale functies, die tot voor kort den indruk maakten onderling op geen enkele wijze met elkaar in verband te staan, vinden hun samenhang in de gegeneraliseerde hypergeometrische

1) De gegeneraliseerde hypergeometrische functie ${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z)$ wordt als volgt gedefinieerd:

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{z^h \prod_{j=1}^p \{a_j(a_j + 1) \dots (a_j + h - 1)\}}{h! \prod_{j=1}^q \{b_j(b_j + 1) \dots (b_j + h - 1)\}}.$$

Neemt men $p = 2$, $q = 1$, $a_1 = a$, $a_2 = b$ en $b_1 = c$, dan krijgt men de hypergeometrische reeks $F(a, b; c; z)$.

2) E. W. Barnes, The asymptotic expansion of integral functions defined by generalised hypergeometric series. Proceedings of the London Mathematical Society (2de serie), 5 (1907), pg. 59—116.

functie. Vele oogenschijnlijk geheel verschillende formules blijken slechts bijzondere gevallen te zijn van één zeer algemeene formule, waarin gegeneraliseerde hypergeometrische functies voorkomen. Bijvoorbeeld kunnen talrijke reeksontwikkelingen, waarin functies van Bessel en Whittaker optreden, — sommige reeds lang bekend, andere daarentegen nog slechts enkele jaren oud —, worden samengevat in een gering aantal zeer algemeene ontwikkelingen. De asymptotische ontwikkelingen van de functies van Bessel, Lommel en Whittaker zijn slechts bijzondere gevallen van de asymptotische ontwikkelingen van de gegeneraliseerde hypergeometrische functie. Deze functie stelt ons dus in staat met behulp van eenige algemeene stellingen en formules vele verspreide resultaten in de theorie der speciale functies vanuit een centraal gezichtspunt te bekijken. Bij het bewijs van dergelijke algemeene stellingen spelen de door Barnes gevonden integralen dikwijls een belangrijke rol.

Onder de speciale functies komen geen andere voor, die zoo uitvoerig en grondig zijn onderzocht als die van Bessel. Het aantal publicaties, dat op deze functie betrekking heeft, loopt in de honderden. Een voortreffelijk overzicht van alles, wat tot en met het jaar 1921 over de Besselsche functies is gepubliceerd, vindt men in het in 1922 verschenen werk van den Engelschen wiskundige G. N. Watson „A treatise on the theory of Bessel functions”. Dit standaardwerk, ruim 800 bladzijden groot, geeft niet alleen een samenvatting van de gevonden resultaten, maar bovendien een geheel eigen opbouw van de theorie. Sinds het verschijnen van dit werk, dat de aandacht van vele onderzoekers trok, is het aantal publicaties over de functies van Bessel enorm gestegen en hun aantal neemt nog geregeld toe.

Vraagt men, wat de oorzaak is, dat deze functies zoozeer de belangstelling van de onderzoekers wekken, dan is het antwoord niet moeilijk: Deze ligt in de wisselwerking tusschen de natuurwetenschappen en de wiskunde. Besselsche functies komen reeds in de 18de eeuw voor in artikels van Daniël Bernoulli en van Euler over trillingsproblemen. Hun naam danken ze aan den astronoom F. W. Bessel, die ze in het begin van de 19de eeuw gebruikte bij zijn onderzoekingen over de storingen der planeten. Men ontmoet ze herhaaldelijk bij de oplossing van wiskundige problemen in de theoretische physica. Zoo onderzocht Debye in zijn artikel, dat ik U zooeven reeds genoemd heb, de Besselsche functies in verband met problemen uit de optica.

Al vindt de theorie van de Besselsche functies dus haar oorsprong

in de toegepaste wiskunde, ook vele zuivere mathematici hebben later hun aandacht aan deze functies geschonken en aan den opbouw van de theorie medegewerkt. Het kan zijn, dat sommige deelen van deze theorie aanvankelijk niet van belang zijn voor de practici, toch blijkt later dikwijls, dat ook deze deelen toegepast kunnen worden in de natuurwetenschappen. De wisselwerking tusschen de wiskunde en de natuurwetenschappen was voor beide partijen van nut en bracht vele en rijke vruchten voort.

Ook de andere functies van de mathematische physica, ik noem hier slechts de veeltermen van Legendre, Hermite en Laguerre, ondervinden niet alleen de belangstelling van de wiskundigen van de practische richting, ook talrijke zuivere wiskundigen voelen zich tot de studie van deze functies aangetrokken.

Het gebied der speciale functies bevat nog vele mogelijkheden tot onderzoek. Hierbij kan de gegeneraliseerde hypergeometrische functie, waarover ik zooeven reeds gesproken heb, een belangrijke rol vervullen. Verschillende bekende stellingen en eigenschappen, die betrekking hebben op één speciale functie, kunnen worden uitgebreid tot veel algemeener stellingen en eigenschappen, waarin gegeneraliseerde hypergeometrische functies optreden. Eén voorbeeld slechts wil ik noemen:

De door Fejér en Perron¹⁾ gevonden asymptotische ontwikkelingen van de veeltermen van Laguerre voor groote waarden van hun orde zijn slechts bijzondere gevallen van asymptotische ontwikkelingen van de gegeneraliseerde hypergeometrische functie voor groote waarden van één der parameters.

Verschillende Nederlanders hebben hun krachten gewijd aan de problemen van de asymptotische ontwikkelingen. Ik noemde U reeds Stieltjes en Debye. De methode van de stationnaire phase, één der belangrijkste hulpmiddelen bij het onderzoek naar het asymptotisch gedrag van functies, is ontwikkeld door Van der Corput²⁾. Door hem bezield gevoelden ook verschillende van zijn leerlingen zich tot de studie der asymptotische ontwikkelingen aangetrokken.

¹⁾ Vergl. G. Szegő, *Orthogonal Polynomials* (1939), pg. 192.

²⁾ J. G. van der Corput, *Zur Methode der stationären Phase. Compositio Mathematica*, 1 (1935), pg. 15—38 en 3 (1936), pg. 328—372.

DE JEUGDPERIKELLEN VAN HET GETAL ¹⁾

door

Dr J. POPKEN.

In het binnenland van Brazilië leven de Botocudos, Indianen, die op een buitengewoon lage trap van ontwikkeling staan. Landbouw is een onbekend begrip voor hen en ze bezitten geen kano's, geen aardewerk, geen kleding.

De mathematische kennis van dit volk kan ons maar matig imponeren; ze tellen namelijk slechts tot twee. Hun enige telwoorden luiden: „pogik” en „kripo”, letterlijk vertaald: „een vinger” en „dubbele vinger”; alle aantallen boven twee heten onveranderlijk „uruhu”, d.w.z. „veel”.

Ook in Indonesië komt een volk voor, dat slechts voor 1 en 2 telwoorden heeft, en wel de z.g. Tapiro-dwergen uit Nieuw-Guinea. Bovendien pronken deze lieden ook nog met andermans veren, want volgens de Engelse onderzoeker Wollaston zijn deze telwoorden identiek met de overeenkomstige bij de naburige Papoea-stammen.

De Botocudos en de Tapiro-dwergen vormen geen uitzonderingen; het is regel, dat primitieve volken slechts zeer weinig telwoorden kennen en ook over een uiterst gebrekkig getalbegrip beschikken. Francis Galton, dezelfde die vooral bekend is geworden door zijn statistische onderzoekingen op het gebied van de erfelijkheidsleer, verhaalt van de moeilijkheden, die hij had bij de handel met de Damara's, een Zuid-Afrikaanse negerstam. Hij beschrijft hoe schapen tegen tabak geruild werden, waarbij de Damara voor elk schaap twee rollen tabak ontving, maar daarbij moest deze transactie persé voor elk schaap afzonderlijk worden uitgevoerd. Hij had wel eens de proef genomen om twee schapen tegelijkertijd te nemen en daarvoor vier rollen tabak neer te leggen. Dan echter werd de zwarte handelaar volkomen van zijn stuk gebracht. In zo'n geval nam de man twee van de vier rollen apart en tevens wierp hij een blik op één der beide schapen om er zeker van te zijn, dat deze althans eerlijk betaald was. Tot zijn verrassing bleven er dan nog precies twee rollen over als koopsom voor het andere schaap. Maar dan ineens begon hij weer te twijfelen; hij nam het eerste paar tabaksrollen weer in zijn handen en keek dan van het ene schaap

¹⁾ Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Utrecht op 20 Oct. 1947.

naar het andere; kortom hij was de kluts volkomen kwijt. Het slot van het lied was, dat hij de koop ongedaan maakte en niet tevreden was, voordat eerst het ene schaap betaald werd, en, nadat dit weggedreven was, ook het tweede.

Een vaars werd van de Damara's gekocht voor tien rollen tabak. Voor de berekening van het juiste aantal spreidde de neger zijn grote handen op de grond uit en op elke vinger werd een rol geplaatst. Als men een tweede vaars wou kopen werd het gehele proces nog eens herhaald, maar soms paste men dan met succes de truc toe om halve in plaats van hele rollen neer te leggen. De man was dan zo geabsorbeerd door het telproces, dat hij dit bedrog niet eens merkte.

In vele gevallen zal de natuurmens het gebruik van het abstracte telwoord vermijden en zich op andere wijze behelpen. De Duitse ethnoloog Thurnwald haalt als voorbeeld aan, hoe zijn inlandse bediende de grootte van een gezelschap, dat op bezoek gekomen was, aankondigde: „Een man met een grote neus, een oude man, een kind, iemand met een huidziekte en een klein mannetje wachten.”

Met dit gebrekkige getalbegrip staat in verband, dat in vele gevallen de tijdrekening ontbreekt. Vraagt men een inboorling naar zijn ouderdom, dan antwoordt hij bijvoorbeeld: „Ik was zo en zo groot, toen de zon ziek was” en met de zieke zon wordt dan de laatste zonsverduistering bedoeld. Bekend is ook het verhaal van die eerbiedwaardige grijsaard uit de stam van de Sakei op Malakka. Toen men hem vroeg hoe oud hij wel was, constateerde hij: „Mijnheer, ik ben drie jaar”. Drie had voor hem de betekenis van „veel”.

Eigenlijk moeten we ons over zulke dingen niet verwonderen. Een Kraaien-Indiaan beweerde eens tegenover een taalgeleerde: „Fatsoenlijke lieden hebben geen gelegenheid om getallen boven tien te gebruiken.” Inderdaad, een fatsoenlijk man, die niet op roof uittrok, had gewoonlijk slechts zeer bescheiden aantallen op te noemen; b.v. hoeveel stuks wild hij die dag gevangen had, hoeveel bomen geveld, misschien ook hoeveel scalpen hij in zijn leven veroverd had of mogelijkerwijs hoeveel vrouwen het opperhoofd „Eenzame Wolf” er wel op na hield.

Aan de rekenkunst van de meest primitieve volken worden allerm minst hoge eisen gesteld. Bezittingen kennen deze mensen vrijwel niet. Ik weet niet of gij wel eens het interieur bewonderd hebt van een hut in het Drentse veengebied of van één der afgrijselijkste krotten in een achterbuurt van een grote stad, daar waar de typische geur van rottend vuil U een dorado voor de rattenwereld voorspelt.

Welnu dit zijn vaak paleizen vol kostbare schatten vergeleken met de woonverblijven bij zeer primitieve volken. In de Arische taal van de Bos-Wedda's op Ceylon is het woord voor „woning” identiek met „holle boom” en in een dergelijke verblijfplaats kan men alleen in sprookjes rijkdommen verwachten. Zulke primitieve mensen leven van dag tot dag en wel van jacht, visvangst en van in het wild groeiende vruchten. Voorraden worden zo goed als niet gevormd en zodoende ontbreekt de handel ook bijna geheel.

Getallen boven een zekere grens laten de natuurmens meestal volkomen koud. Zijn belangstelling en zijn kennis is uitsluitend beperkt tot het kleine en geïsoleerde gebied, waarin zijn stam leeft. Met alle bijzonderheden daarvan is hij vaak op verbazingwekkende wijze op de hoogte, maar de mogelijkheden, die zich daarin niet realiseren, kan hij zich niet voorstellen en laten hem daarom onverschillig. Toen Thurnwald eens telproeven nam met een inboorling en wel op de volgende manier: één varken, twee varkens, enzovoort, weigerde de man om verder te gaan toen zij in de buurt van zestig à tachtig varkens gekomen waren met de motivering, dat er meer varkens immers niet bestonden. Een aantal van duizend varkens b.v. was voor hem even onaanvaardbaar als $\sqrt{-1}$ varkens dat voor ons zijn.

Ook wanneer een natuurmens wel bezittingen heeft, b.v. in de vorm van vee, dan toch zal hij deze in vele gevallen niet tellen; waar wij dit onder dergelijke omstandigheden zeker zouden doen. Sommige schrijvers vermelden, hoe de eigenaar zijn grote kudde vee — soms van honderden stuks — bij het binnenkomen controleert en hoe hij dan onmiddellijk bemerkt, dat er ook maar één dier ontbreekt, eenvoudig omdat hij één bekend gezicht mist. Ook wij bezitten zo'n vermogen, maar bij de natuurvölker is deze faculteit veel sterker ontwikkeld dan bij ons. Dit staat in verband met het feit, dat het geheugen bij de primitieve mens een buitengewoon grote rol speelt, speciaal dan wanneer het de herinnering aan concrete dingen betreft. Men moet zich b.v. verwonderen over de massa van detailpunten, die de primitieve mens in zijn verhalen vlecht; hoe hij zich nog na jaren precies kan herinneren wat A zei, hoe B daarop antwoordde, enzovoort. De natuurmens kent al de bijzonderheden van zijn omgeving; hij weet precies waar water te vinden is en hij herkent onmiddellijk het spoor van elke diersoort, ja zelfs de verschillende voetindrukken van zijn stamgenoten. Men heeft hier te maken met een organisatie van de geest, die van de onze verschilt. De primitieve mens gebruikt zijn hersenen voornamelijk voor het memoriseren. Wij daarentegen werken veel meer

met abstracte begrippen, terwijl het schrift ons ontlast van het onthouden van een verwarrende hoeveelheid detailpunten.

Uit het hiervoor gezegde moet men echter vooral niet opmaken, dat bij alle natuurvölker de telwoordenrij even armoedig en het getalbegrip even gebrekkig is als in de genoemde gevallen. Integendeel, vele hebben het in dit opzicht verder gebracht. Als een voorbeeld noem ik hier de bewoners van de Tonga-archipel in Polynesië. In onze dagen hebben deze lieden de blanke beschaving grotendeels overgenomen, maar ik spreek hier over een tijd, toen ze nauwelijks met onze cultuur in aanraking waren gekomen. Ook reeds in die dagen bezat dit handel drijvende volk een eigen telwoordenstelsel en wel tot aan honderdduizend toe. De Franse onderzoeker Labillardière vermoedde zelfs, dat het stelsel nog verder liep en hij viel de bevolking net zo lang lastig tot ze hem er nieuwe telwoorden bij noemden, waaruit bleek, dat hun systeem zelfs tot 10^{15} zou voortschrijden. Dit was een prachtig resultaat, dat triomfantelijk werd gepubliceerd. Pijnlijk was het echter, toen bij een nader onderzoek bleek, dat de vermeende telwoorden voor een deel uit zinledige constructies bestonden en, erger nog, overigens een kleine vocabulaire van onwelvoegelijke woorden vormden.

Een fout, die dikwijls gemaakt wordt, is dat men het getalbegrip van een mens vereenzelvigt met zijn kennis aan telwoorden. Iemand kan heel goed in het bezit zijn van het begrip aantal zonder ook maar één telwoord te kennen. Stel bijvoorbeeld, dat we iemand, die niet tellen kan en die nooit van getallen heeft gehoord, in de kortst mogelijke tijd een aantalbegrip moeten bijbrengen. We zetten dan voor onze leerling een partij appels en een tweede hoeveelheid peren. Nu leren wij hem, hoe hij een appel van de ene hoop en een peer van de andere kan nemen en we laten hem dit kunststuk net zo lang herhalen tot het niet meer gaat. Zijn op dat ogenblik beide stapels uitgeput, dan zeggen we, dat er evenveel appels als peren waren. Blijven er daarentegen nog appels over, terwijl de partij peren verdwenen is, dan zeggen wij, dat er meer appels dan peren waren; in het tegenovergestelde geval echter wordt ervan gesproken, dat er minder appels dan peren waren. De leerling weet nu wat „evenveel”, wat „meer” en wat „minder” is, maar hij kan nog geen enkel aantal benoemen.

Dit is niet louter theorie, maar volgens het genoemde principe tellen vele natuurvölker. Ze beschikken daartoe over een hulpverzameling, b.v. een partij steentjes. Naast elk voorwerp van de te tellen hoeveelheid wordt dan één der steentjes gelegd. Deze laatste worden daarna vergaard en het verkregen hoopje stenen

stelt het aantal van de op de genoemde wijze getelde hoeveelheid voor. Zo'n stapeltje stenen is soms een geschikt middel om te controleren of de burens eerlijk zijn; men legge daartoe na verloop van tijd naast elk voorwerp weer een steentje.

Een hoofd op één der Fidzji-eilanden toonde eens aan een zending de boekhouding van zijn vader, die uit een steenhoop van 872 stuks bestond. De zieleherder was danig onthutst toen hij leerde, dat elke steen één opgepeuzeld mens representeerde.

In plaats van steentjes maken vele inboorlingen ook gebruik van stokjes, schelpen, graankorrels of andere kleine voorwerpen. Eens hield Gessi, een luitenant van Gordon, een rechtszitting in het Zuidelijk deel van de Soedan en bij die gelegenheid toonde hem het volk door middel van een bundel strohalmen en twijgen aan, hoeveel vrouwen, kinderen en koeien door de slavendrijvers waren weggevoerd. De langste strohalmen moesten natuurlijk het belangrijkste bezit vertegenwoordigen, namelijk de koeien.

De hier besproken manier om aantallen aan te geven past geheel bij de zeer concrete denkwijze van de primitieve mens. Soms kent hij wel hogere telwoorden, terwijl hij zich toch geen voorstelling kan vormen van de bijbehorende aantallen; eerst de concrete representatie door een stapel stenen of zo iets zegt hem wat. In hun standaardwerk over de Toradja's van Midden-Celebes verhalen Adriani en Kruyt, hoe een hoofd terug kwam van een rechtszitting en in volle gemoedsrust vertelde, dat hem een boete van twintig buffels was opgelegd. Toen men hem zei, dat die boete toch wel buitengewoon zwaar was, vroeg de man: „Vindt ge dat veel?” en meteen telde hij twintig stukjes areca-noot neer. Toen hij echter die stukjes zag liggen, voor elke buffel één, sprak hij ineens verschrikt zichzelf aldus aan: „Sakkerloot, zoudt gij dát kunnen betalen?”

In zeer vele gevallen legt men aantallen ook vast door middel van knopen in een koord of in een blad. Dit middel is bijvoorbeeld algemeen verbreid in Indonesië en ook onder de Indianen. Men vertelt, dat de schonen uit de stam van de Huichol-Indianen dit procédé gebruiken om hun successievelijke minnaars te registreren.

Speciaal één zeer bepaalde toepassing is buitengewoon populair. Zal er over enige tijd een grote gebeurtenis plaats vinden, een feest, een overval op een naburige stam of zoiets, dan worden snoeren uitgedeeld, waarin door knopen is aangegeven, hoeveel nachten er moeten verlopen eer het zover is. Zo'n snoer wordt bij de leger-sponde opgehangen en elke morgen wordt bij het opstaan één knoop

losgemaakt. Men merkt dan automatisch wanneer de grote dag is aangebroken.

Ook uit de geschiedenis kennen we die methode. Herodotus verhaalt ons, hoe Darius bij het oversteken van de Ister, d.w.z. van de Donau, zijn Ionische hulptroepen achterliet met de opdracht om de gebouwde brug zestig dagen lang te bewaken en voor dat doel gaf hij hun een riem, waarin zestig knopen gelegd waren en waarvan elke dag één knoop losgemaakt moest worden. Het koord met knopen werd in overoude tijden ook in China toegepast, maar de hoogste ontwikkeling kreeg dit systeem in het Inka-rijk en wel in de vorm van de beroemde quipu.

Een ander bekend middel om aantallen op te tekenen is de kerfstok. De wilde, die een kerf maakt in de steel van zijn knots, telkenmale wanneer hij dit instrument met succes heeft gebruikt, past reeds deze methode toe. Luister ook naar Multatuli in zijn verhaal over Saïdjah en Adinda. Daarin vraagt het meisje: „Maar, Saïdjah, hoe kan ik weten wanneer ik moet heengaan om je te wachten bij de ketapan?

Saïdjah bedacht zich een ogenblik, en zeide: — Tel de manen. Ik zal uitblijven driemaal twaalf manen... deze maan rekent niet mee. Zie, Adinda, kerf een streep in je rijstblok bij elke nieuwe maan. Als je driemaal twaalf strepen hebt ingesneden, zal ik de dag, die daarop volgt aankomen, onder de ketapan. Beloof je dáár te zijn?”

Het is echter in het geheel niet nodig om een exploratietocht in de oerwouden te ondernemen om meer van zulke voorbeelden op te sporen. Immers in ons eigen volksleven nam de kerfstok eertijds een voorname plaats in; bij de kleine leveranciers werd deze algemeen toegepast.

Ook in de financiële wereld stond de kerfstok vroeger in hoog aanzien. Hier gebruikte men doorgaans een stok, die uit twee juist in elkaar passende delen bestond. De kerven werden dan ingesneden, terwijl beide delen tegen elkaar werden gehouden, zodat het aangegeven bedrag op beide stukken hetzelfde was. Schuldeiser en schuldenaar behielden elk één van beide delen. Iemand, die aan de „Bank of England” geld leende, werd daarom een „stockholder” genoemd en hij bezat een „bankstock”. Ook de Engelse schatkist heeft eeuwenlang de boekhouding met behulp van kerfstokken gevoerd en eerst in 1826 werd deze lichtelijk verouderde methode afgeschaft. Men wist toen geen raad met de voorraad nutteloze kerfstokken, die een gehele kamer van het parlamentsgebouw vulden. In 1834 besloot men eindelijk om ze te verbranden, voor welk doel een kachel in het Hogerhuis werd gebruikt. De stokers

hielden er blijkbaar in hun enthousiasme niet voldoende rekening mee, hoe brandbaar deze vermolmden stukken hout waren. De kachel werd oververhit, er ontstond brand en de parlamentsgebouwen gingen in vlammen op. Men ziet dus, dat de kerfstok nog al wat op zijn kerfstok heeft.

Laten wij niet te zeer lachen om deze conservatieve Engelsen: weinigen weten, dat een dubbele kerfstok nog heden ten dage in ons land een wettig bewijs voor schuldveroordeeling vormt: Art. 1924 van ons huidig B.W. luidt namelijk als volgt:

„Kerfstokken, met hun dubbel overeenkomende verdienen geloof tusschen degenen die gewoon zijn om leveranciën, welke zij in het klein doen, of ontvangen, op dusdanige manier te bewijzen.”

Bij de voorbeelden, die we hiervoor aangehaald hebben, geschiedde het tellen telkens door middel van een hulpverzameling. Het principe was steeds, dat men elk van de te tellen voorwerpen met juist één ding van de hulpverzameling liet corresponderen. Bij ons eigen tellen doen we feitelijk niets anders, maar onze hulpverzameling bestaat niet uit steentjes, stokjes of dergelijke voorwerpen, maar uit woorden, n.l. de telwoorden „één”, „twee”, „drie”, enzovoort, welke in deze volgorde vast in ons geheugen zijn gegrift. Tellen wij b.v. vier ogen op een dobbelsteen, dan laten wij die ogen, de één na de ander, corresponderen met de telwoorden één, twee, drie en vier. Het laatste gebruikte telwoord stelt ons steeds in staat het aantal te benoemen. Zoals men ziet is deze methode om aantallen aan te geven reeds tamelijk abstract en wij moeten het telwoordenstelsel dan ook beschouwen als een betrekkelijk laat verworven geestelijk goed der mensheid.

Men neemt wel aan, dat de gesproken taal niet de oorspronkelijke uitdrukkingwijze van de mens is geweest, maar dat het gebaar meer primair is dan het woord. Het is hier niet de plaats om op dit probleem uitvoerig in te gaan; ik wijs alleen op de uiterst belangrijke rol, die het gebaar in het leven van de primitieve mens speelt. Kenmerkend voor het prille denken is het plastische en concrete van de voorstellingen en de meest natuurlijke uitdrukkingsvorm daarvan is het gebaar.

Het tellen gaat bij een natuurmens meestal gepaard met de vaste erbij behorende gebaren. Luisteren we eens naar wat een missionaris ons daarover te vertellen heeft: „Er is geen Indiaan in Amerika, die een getal uitspreekt zonder het met de vingers, met de handen of met de voeten aan te geven. Wanneer de Indiaan zegt: geef mij één vrucht, dan heft hij direct één vinger op; hij zal nooit vijf zeggen zonder de hand te tonen, nooit tien zonder beide handen

uit te strekken en nooit twintig zonder met de vingers van beide handen naar de tenen te wijzen." In sommige gevallen is het telwoord zelfs een directe vertaling van het gebaar. Zo wordt in de taal van de Zoeloe's zes uitgedrukt door „tatisitupa", wat letterlijk „de duim nemen" betekent, omdat bij zes de ene hand afgeteld is en overgegaan wordt op de duim van de andere hand. Het getal zeven wordt aangegeven door het werkwoord „kombā", d.w.z. „wijzen", omdat dit aantal door de wijsvinger wordt uitgedrukt. Wanneer een Zoeloe zegt: „amahashi akombile" of wel: „de paarden hebben gewezen", dan bedoelt hij, dat er zeven paarden waren. De negerstam der Subiya's aan de bovenloop der Sambesi drukt het begrip „zes mannen" uit door de zin: „mannen, die één vinger gebogen hebben", omdat zij bij het aangeven van het getal zes één vinger van de rechterhand ombuigen.

Dat bij het tellen de gebaren de oorspronkelijke en de telwoorden de secundaire vormingen zijn, blijkt duidelijk hieruit, dat bij sommige volken wel de getallengebaren bestaan maar niet de bijbehorende telwoorden. Zo kennen de Bosjesmannen slechts enkele telwoorden; boven een bepaalde grens geven ze alle aantallen door het woord „veel" aan, maar intussen drukken zij die „veelheid" vaak heel precies door een gebaar uit. Dergelijke verschijnselen kent men meer, b.v. bij de Bakaïri en de Papoea's. Een merkwaardige gewoonte bestaat bij sommige negerstammen, zoals de Nkosi. Hier noemt de spreker in de loop van zijn verhaal geen enkel aantal, maar elk getal wordt door een gebaar aangegeven. Van de toehoorder daarentegen wordt verwacht, dat hij telkens het telwoord uitspreekt.

In vele gevallen hangt het telwoord voor 5 bij primitieve volken samen met „hand", dat voor 10 met „twee handen", „beide handen" of iets dergelijks, terwijl 20 vaak door het woord „mens" aangegeven wordt, omdat men dan de tenen ook meerekent. Een Caraïbische stam spreekt dichterlijk van „de kinderen der handen" om het getal 10 aan te geven. Eigenaardige telwoordvormingen treft men ook aan in sommige Melanesische talen op Nieuw-Guinea, waarin 5 uitgesproken wordt als b.v. „mijn hand sterft" of „mijn hand is dood". Men stelle zich de vingers voor, die eerst rechtop staan, maar bij het tellen stuk voor stuk, „sterven", d.w.z. neervallen. Het getal 99 is in één dier talen: „vier mensen sterven, twee handen gaan ten einde, een voet gaat ten einde en vier". Inderdaad is $99 = 4 \times 20$ (4 mensen) + 10 (2 handen) + 5 (een voet) + 4.

Het idee om de telling periodiek te herhalen, telkens nadat de

vingers afgeteld zijn, vinden wij erg voor de hand liggend, maar toch moet het de mensheid grote moeite gekost hebben om tot deze stap te komen. Men vertelt van de Kamtsjadaden, de afstammelingen van de oorspronkelijke bewoners van Kamtsjatka, dat ze na het aftellen van al hun vingers en tenen niet wisten hoe ze verder moesten gaan en iets dergelijks wordt van de negerstam der Bergdama's bericht. Meer geniaal zijn de meeste Papoea-stammen, die behalve de vingers en tenen ook allerlei andere lichaamsdelen in het telproces betrekken. Een Sulka op Nieuw-Brittannië roept, wanneer hij aan zijn eigen vingers en tenen niet genoeg heeft, de hulp in van een stamgenoot op wiens vingers en tenen hij verder telt. Meer dan één assistent heeft hij niet van node, want over getallen hoger dan veertig breekt geen Sulka zijn hoofd.

Interessant is ook de wijze waarop de Groenlandse Eskimo placht te tellen. Een getal als b.v. 53 drukte hij uit door de zin: „aan de derde man aan de eerste voet drie”, wat blijkbaar betekent, dat men om 53 te bereiken eerst twee mannen moet aftellen, wat 40 oplevert, daarna de vingers van een derde, zodat men tot 50 komt, en tenslotte nog drie tenen van diens voet. Tellen moet een koud karwei in de poolwinter geweest zijn.

Zulke voorbeelden kan men meer geven en zij illustreren duidelijk hoe het tellen volgens een twintigtallig systeem ontstaan kon. Het lijdt geen twijfel dat ons eigen tientallig stelsel op een dergelijke wijze zijn oorsprong vond in het tellen op de vingers, een theorie, die Aristoteles reeds in zijn „Problemen” ter sprake brengt.

Het schooljongetje, dat in de eerste klas met die nieuwe en ingewikkelde getalvoorstellingen worstelt, ondervindt dergelijke moeilijkheden als de primitieve mens. Ook hij roept graag de hulp van zijn vingers in. Wijze paedagogen echter hebben dit middel in de ban gedaan en daarom zal onze knaap zijn clandestiene rekenmachine bij voorkeur listig onder de bank verborgen houden. Toch is op dit gebied het laatste woord nog niet gesproken en zo zijn er enkele paedagogen, zoals b.v. Meumann, die het rekenen op de vingers hebben verdedigd; zij noemen dit het beste en eenvoudigste middel om de getallen aanschouwelijk te maken.

Toch is dit tellen op de vingers, waarbij de ene vinger na de andere aan de beurt komt, geen beginpunt geweest. Om dit in te zien doen we er goed aan om iets dieper op het getalbegrip van de meest primitieve stammen in te gaan; we zullen dan zien, dat dit essentieel van het onze verschilt. Het abstracte getalbegrip, dat wij ons eigen hebben gemaakt, is de natuurmens namelijk geheel vreemd. Wij zagen reeds aan enkele voorbeelden hoe deze conceptie bij hem

gebonden is aan bepaalde zeer concrete voorstellingen. In sommige delen van Nieuw-Guinea wordt het getal tien door het woord „krokodil” aangeduid, omdat in de geest van de inboorling dit getal onverbrekkelijk verbonden is met het beeld van het spoor van een krokodil, hetwelk uit tien streepjes bestaat. Als laatste voorbeeld haal ik aan, hoe bij de Afrikaanse stam der Mandigo's het getal veertig een „mat” genoemd wordt, omdat de vingers en tenen van man en vrouw, als deze op hun mat liggen, juist dit aantal voorstellen.

Het verschijnsel van de z.g. telwoordenklassen houdt hiermee ook verband. Bij sommige volken variëren namelijk de gebruikte telwoorden naar gelang van de aard van de te tellen voorwerpen. In dergelijke gevallen heeft men b.v. een apart stel telwoorden voor mensen, weer andere voor kano's, enz. De taal der Nasioi op Bougainville slaat in dit opzicht wellicht het record met meer dan veertig klassen. Echter vindt men ook bij ons nog resten van zulke stelsels, b.v. wanneer wij bij het tellen van dagen spreken van een week, van een maand of van een jaar en bij het tellen van soldaten van een compagnie, van een regiment of van een divisie.

Zeër typerend is ook de heterogene wijze, waarop bij vele primitieve volken de getallen geïnterpreteerd worden. We spraken zoëven over een taal, waarin tien door het woord „krokodil” werd aangeduid. In diezelfde taal wordt vijf betiteld met „hand”, zes met „drie en drie” en twintig met „mens”. Welk een verschil met het stelsel, waarin wij de getallen geplaatst denken! Bij ons is elk getal van de rij 1, 2, 3, 4, . . . een schakel uit een homogeen systeem; wij denken ons de getallen gegenereerd uit de eenheid en zó tellen we: één, twee, drie, enz. door bij elk getal één op te tellen om het volgende te krijgen. De natuurmens bezit een dergelijk logisch opgebouwd stelsel in het geheel niet; hij kent alleen individuele getallen, waarbij het ene getal voor hem een veel grotere betekenis heeft dan het andere.

Voor al het getal twee heeft op de primitieve mens steeds een bijzondere indruk gemaakt. Hij zag het tastbaar voor zich bij het breken van een stok¹⁾ en in de symmetrie van het menselijk lichaam. Hij ontmoette het in de fundamentele tegenstellingen, zoals die tussen man en vrouw, rechts en links, dag en nacht, hemel en aarde, enz. Het valt op hoevele natuurvölker nog steeds leven in een denkwereld van dergelijke tegenstellingen. Bij de Papoea's bij-

¹⁾ In vele talen der natuurvölker staat het telwoord voor 2 in verband met „splijten”.

voorbeeld is de maatschappij verdeeld in twee groepen, die van de „landkant” en die van de „zeekant”, welke twee groepen elkaar als het ware aanvullen. Zo is bij het huwelijk een man van de landkant aangewezen op een vrouw van de zeekant en omgekeerd. Ook hier en daar in Indonesië, b.v. op Ambon, vindt men ditzelfde verschijnsel.

Dit „dualisme” is een wezenstrek van de primitieve geestesgesteldheid. Het uit zich bijvoorbeeld in het voorkomen van mensenbeeldjes, die voor de ene helft rood, voor de andere zwart geverfd zijn en ook in de welbekende dubbelmaskers.

Ook de voorouders der thans beschaafde volkeren moeten sterk in de ban van het dualisme gestaan hebben. Slechts zo kan men het verschijnsel van de duale vormen in de taalkunde verklaren. Verder wijs ik op de categorieën-tafel der Pythagoreeërs en op de dualistische filosofie van het oer-oude boek „Yih-King” der Chinezen.

Maar ook de moderne Westerse mens staat nog duidelijk onder invloed van deze denkvorm. Ik herinner aan de onderscheiding tussen links en rechts in de politiek. Gewoonlijk beweert men, dat het verschil in het denken van de gecultiveerde en dat van de primitieve mens grotendeels daarin ligt, dat de eerste logisch redeneert en de tweede wat men noemt prelogisch. Maar ook deze hooggeprezen logica bevat zeer duidelijk dualistische principes. Denk b.v. aan ons tweevoudig waarheidsbegrip: een zinvolle uitspraak is óf waar óf noodzakelijk een leugen; een derde mogelijkheid bestaat niet. Denk verder aan de logische regel „tertium non datur”. In dit verband herinner ik eraan, dat de moderne wetenschap ook logische systemen kent met een meervoudig waarheidsbegrip ¹⁾, waarin dus het dualisme is losgelaten, terwijl het z.g. Intuitionisme van L. E. J. Brouwer zijn meest hevige aanvallen richt tegen de onbepaalde toepassing van het „tertium non datur” in de wiskunde.

Het vormen van paren, het met elkaar in verband brengen van twee dingen tot een hogere eenheid, is wellicht het meest fundamentele principe — de oerintuïtie ²⁾ zou ik het noemen — van de menselijke geesteswerkzaamheid. We zagen al hoe het ook de grondslag vormt van ons tellen, zoals het duidelijk tot uiting komt bij de wilde, die naast elk te tellen voorwerp een steentje legt. Maar ook anders kent de wiskunde daarvoor vele voorbeelden: ik behoef maar aan het functiebegrip te herinneren.

¹⁾ Een drievoudige logica werd reeds door William of Occam (1270—1349) voorgesteld.

²⁾ Niet te verwarren met het gelijknamige begrip in het Intuitionisme.

Echter, bij de synthese behoort ook de analyse; in dit geval de splitsing van een grootheid in twee delen. In de oer-oude maat-systemen der Egyptenaren voor akkers en voor koren werd de eenheidsmaat in twee gelijke delen verdeeld, de nieuwe maat weer in twee delen, enz. Halvering en verdubbeling waren vroeger fundamentele bewerkingen in de rekenkunde, waarop b.v. de vermenigvuldiging berustte. Russische boeren rekenen waarschijnlijk nog op deze wijze, terwijl onze bankiers hardnekkig een grote voorkeur aan de dag leggen voor breuken als $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, enz.; men sla slechts een koersenlijst na om dit te controleren.

Bij sommige van de meest primitieve volken — ik noem er drie uit drie werelddelen: de Australiërs, de Bosjesmannen en de Bakaïri uit Brazilië — speelt het getal twee ook een alles overheersende rol bij het tellen. Deze natuurvölker kennen slechts eigen telwoorden voor „één” en „twee”, terwijl alle overige telwoorden hiermee worden samengesteld ¹⁾ en wel volgens het schema:

$$3 = 2 + 1$$

$$4 = 2 + 2$$

$$5 = 2 + 2 + 1$$

$$6 = 2 + 2 + 2.$$

Verder loopt het stelsel dan gewoonlijk niet. Om een voorbeeld te nemen: Bij de Bakaïri is de eenheid „tokále” en „twee” heet „aháge”; daarom wordt het getal vijf uitgesproken als „aháge-aháge-tokále”. De bekende ontdekkingsreiziger Karl von den Steinen heeft interessante proeven gedaan over de primitieve telkunst van dit volk. Legde hij b.v. drie maiskorrels neer en vroeg hij naar het aantal, dan schoof de Bakaïri met de rechterhand een tweetal samen en liet de derde korrel afzonderlijk liggen. Het paar werd daarna weer aangeraakt, vaak zelfs onderzoekend betast. Daarop werd met de rechterhand de pink en de ringvinger van de linkerhand beetgenomen, waarop „aháge” werd uitgesproken. Eerst dan werd de derde korrel aangeraakt, de middelvinger van de linkerhand bij de pink en ringvinger geschoven, „tokále” gezegd en tenslotte werd verkondigd: „aháge-tokále”. Om in een verhaal mede te delen, dat de stamvader Kamuschini vijf bomen velde, had de verteller drie zinnen nodig; de Bakaïri zei namelijk: „Hij velde twee Piki-bomen. Hij velde nog eens twee. Hij velde één.” Na zes beschikt de Bakaïri niet meer over telwoorden; hij telt dan eerst nog op de vingers en tenen voort, maar zegt dan telkens daarbij „méra”, d.w.z. „deze”. Dit tellen verwekt echter weinig enthous-

¹⁾ Soms heeft ook het getal drie een eigen telwoord.

siasme bij hem en hij klaagt dan onmiddellijk over „kinaráchu iwáno”, wat zowel „hersenarbeid” als „hoofdpijn” betekent. Heeft hij ook de tenen afgeteld en is hij dan nog niet aan het eind gekomen, dan grijpt hij zich in de haren en trekt die in alle richtingen uit elkaar.

Bij iets hoger ontwikkelde telwoordenstelsels vindt men, behalve voor één en twee, ook een telwoord voor drie of voor drie en vier beide. Zo vertelt Pulle in zijn boek „Naar het Sneeuwgebergte van Nieuw-Guinea”, dat de Pesechems telwoorden voor één, twee en drie hadden, terwijl de andere getallen door combinatie's worden aangegeven; b.v. vier is „twee-twee”, vijf is „twee-drie” en zes: „drie-drie”. In zeer vele gevallen heeft men individuele telwoorden voor de eerste vier getallen. Het getal zes wordt dan opgebouwd gedacht uit twee drietallen, acht uit twee viertallen, vijf uit drie en twee of uit twee paren plus één, zeven uit vier en drie of uit twee driefallen plus één, enz.

Zulke telwoordvormingen vindt men bij de primitieve volken overal op aarde. Zeer vaak bij negerstammen, maar ook in Canada, Californië, Mexico, Zuid-Amerika, Nieuw-Guinea, en Zuid-Azië. Zelfs vindt men ze in Engeland, wel te verstaan alleen bij de Zigeuners. Zeven is bij dit volkje „dui trins ta jek” ofwel „twee drietallen en één” en acht is „dui stors”, d.w.z. „twee viertallen”.

De Zigeuners spreken een Indogermaanse taal en daarom ligt in het voorgaande een aanwijzing, dat onze voorouders ook op een dergelijke primitieve wijze geteld hebben. Ik vermoed namelijk, dat we hier te maken hebben met de resten van een oer-oude Indogermaanse telmethode, waarbij alleen individuele telwoorden voor de getallen van één tot en met vier bestonden. Weliswaar zegt het voorkomen van deze telwoordvormingen bij de Engelse Zigeuners op zichzelf niet veel, maar er zijn enkele andere feiten, die onze hypothese steunen: Het telwoord voor acht is in verschillende Indogermaanse talen duidelijk een dualis. Ik behoef daartoe maar te herinneren aan het Indisch en het Gotisch in welke talen dit telwoord „aštau”, resp. „ahtau” luidt. Deze woorden voor acht zijn dus kennelijk uitdrukkingen voor een paar. Een paar van wat? Het ligt voor de hand om aan te nemen, dat hier een paar van viertallen bedoeld is.

Een ander belangrijk feit is, dat in de oudste Indogermaanse talen alleen de telwoorden van één tot en met vier verbogen worden, de volgende daarentegen niet.

Tenslotte wijzen we op de vorm van de tekens, die in een bepaald getschrift voorkomen. Het hier bedoelde schrift werd in Voor-

Indië gevonden en dateert waarschijnlijk uit de eerste eeuw v. Chr., zodat het mogelijk van Indogermaanse oorsprong is. De getallen één, twee en drie worden hierin resp. door één, twee en drie verticale strepen aangeduid, het getal vier daarentegen door een kruis, het algemeen verspreide symbool voor de vier windstreken. Welnu, in dit schrift bestaat het teken voor acht uit twee kruisen, dat voor vijf uit een kruis en een verticale streep en dat voor zes uit een kruis en twee strepen.

Hoe primitief de hier besproken systemen ook aandoen, toch is er verwantschap met ons eigen stelsel. Is immers bij ons b.v. het telwoord „vijf en twintig” ook niet samengesteld?

Voor de moderne mens ligt de betekenis van het getal grotendeels in de rol, welke het speelt in de handel, in de techniek en in de natuurwetenschap. Voor de natuurmens heeft het getal meestal een geheel andere zin. Toen wij over het dualisme spraken, zagen we reeds welke betekenis het getal twee voor het voorstellingsleven van de primitieve mens kan hebben. Twee staat in dit opzicht in het geheel niet alleen. Als een voorbeeld haal ik aan hoe bij sommige hoger ontwikkelde natuurvölker de sociale structuur van de maatschappij ten dele beheerst wordt door bepaalde getallen. Ik wijs daartoe op de onderzoeken, die in 1929 door de toenmalige controleur H. J. Jansen in de Ambonse Molukken zijn gedaan en waarbij de betekenis van de getallenrij 3, 5, 7, 9 voor de Inlandse bevolking in het licht werd gesteld ¹⁾. Het gaat hier om het merkwaardige begrip „oeli”, dat men waarschijnlijk het best omschrijft als een organische, autarkische groep van families of dorpen. Deze oeli's zijn bijna steeds uit 3, 5, 7 of 9 delen samengesteld. De oeli met de meest eenvoudige structuur bestaat uit drie delen, waarvan één deel, het midden, sociaal het overwicht op de beide andere heeft en ook een representatieve functie vervult. Twee van zulke systemen kunnen een nieuwe eenheid vormen, waarbij de beide middens samensmelten. Zo ontstaat dan een oeli bestaande uit het midden en vier uiterste delen, d.w.z. uit vijf componenten. Het getal vijf en speciaal de oeli van vijf delen wordt geïdentificeerd met het menselijk lichaam bestaande uit het hoofd-rompstuk en de vier ledematen.

Een nog hogere organisatie wordt b.v. verkregen uit de vereniging van twee oeli's van vijf delen, waarbij de één mannelijk, de andere

¹⁾ H. J. Jansen, Inheemsche groepen-systemen in de Ambonsche Molukken, Adatrechtbundels XXXVI, pag. 445—459; vergelijk ook: F. D. Holleman, Synthetische vormen in de „primitieve” cultuur (1932).

vrouwelijk verondersteld wordt. Dan ontstaat een nieuwe oeli met negen delen, omdat ook nu weer de beide middens samensmelten tot het midden van het nieuwe stelsel. Helaas ontbreekt de tijd om op deze interessante kwestie nader in te gaan.

Een getal is voor de natuurmensen geen abstract begrip, geen schakel uit een logisch opgebouwd systeem, maar het is een mysterieus individu, vervuld van een goede of boze potentie. Sommige aantallen stemmen hem vreugdevol, andere boezemen hem angst in. Trouwens, ook voor velen onder ons hebben de getallen 7, 11 en 13 nog altijd een zeer bijzondere betekenis. Bijna elk natuurvolk heeft zijn „heilige” getallen. Zo is vier een dergelijk getal bij verreweg de meeste Indianenstammen.

Bij sommige volken vindt men ook een schroom om mensen, dieren of waardevolle bezittingen te tellen uit vrees om daardoor demonische machten te ontketen. Wanneer in vroeger jaren iemand op een vergadering van de Zuid-Afrikaanse stam der Thonga's informeerde naar het aantal aanwezigen, dan vroeg men hem verschrikt: „Wat? Je wilt ons tellen? Wie is hier, die je mee in het verderf wilt storten?” In een fabel der Avatime komt een spin op gemakkelijke wijze aan de kost. Zij bouwt namelijk zeven hoopjes aarde en laat die door verschillende dieren tellen, die dan natuurlijk ten dode zijn opgeschreven. Dit alles herinnert sterk aan het Bijbelverhaal over het onheil, dat over Israël werd gebracht, toen de Satan David had aangepord om de zonen Israëls te tellen ¹⁾.

Getallenmagie en -mystiek bloeien vooral bij de hogere natuurvölker. Trouwens de cultuurvolken der oudheid deden niet voor hen onder. Luister slechts naar het volgende zogenaamde gebed van de Pythagoreërs, gericht aan tetraktys, het heilige viertal:

„Zegen ons, goddelijk getal, gij die de goden en de mensen hebt verwekt! O heilige, heilige tetraktys, gij die de oorsprong en de bron van de eeuwige stroom der schepping bevat! Want het goddelijk getal begint bij de zuivere en diepe eenheid en bereikt vervolgens het heilige viertal; dan verwekt het de moeder van het al, die alles omvat, alles verbindt, de eerstgeborene, die nooit afwijkt, die nooit vermoeid raakt, de heilige tien, die de sleutel van alle dingen bewaart.”

In vele gevallen werden de oneven getallen als geluk aanbrengend beschouwd in tegenstelling met de even getallen, welke laatste vaak met het vrouwelijke principe in de cosmos vereenzelvigd werden.

¹⁾ 1 Kronieken 21 en 27; vergelijk in dit verband ook Exodus 30 : 12.

Zo tracht bij Vergilius ¹⁾ een verlaten minnares aldus de ontrouwe terug te winnen:

„Trekt, o mijn zangen, trekt Daphnis weg van de stad naar mijn huis. Eerst wind ik deze negen draden van drie verschillende kleuren om je beeld en voer dit driemaal rondom dit altaar; het oneven getal behaagt aan de godheid.”

Bij Shakespeare ²⁾ leest men: „...: I hope good luck lies in odd numbers . . . , they say there is divinity in odd numbers either in nativity, chance or death.”

Naast het getal drie stond vooral zeven in hoog aanzien. Bij de Babyloniërs was zeven het aantal delen, waaruit alle volkomen dingen bestonden. Er waren zeven hemelen en ook de onderwereld bestond uit zeven afdelingen, afgesloten door zeven poorten. In de mythe van Ištar's tocht naar deze verblijfplaats moet de godin bij elke poort één van haar zeven bekleedsels afleggen. Zeven werd daardoor tot een begrip, dat aangaf dat iets compleet was. De Babylonische wereldkaart vertoont zeven landen, d.w.z. alle landen. Van het enorme aantal demonen wordt gezegd: „Zeven zijn ze, zeven zijn ze, tweemaal zeven zijn ze!” Ook in de Bijbel is zeven het „volkomen” getal. De schepping duurde zeven dagen om uit te drukken dat ze volledig was. Job's vrienden zaten zeven dagen sprakeloos, omdat ze bij het zien van de ellende van hun vriend volkomen verslagen waren.

De geheime leer van de getallen stond bij de oude cultuurvolken, vooral bij de Babyloniërs, hoog in aanzien. Een kleitafel leert ons, dat het de godin Nisaba is, die „de betekenis der getallen kent” en ook bestaat er een lijst van goden met de daarmee corresponderende getallen. De wiskundigen van die dagen moesten terdege op de hoogte zijn van de magische krachten, die in de getallen scholen. Koning Sargon II deelt ons mede, dat hij de muur, die de Sargonsburcht omgaf, 16280 ellen lang had laten maken, omdat dit getal met zijn naam overeenkwam. De „wijze schrijvers van de getallen”, zoals een spijkerschrifttekst de wiskundigen noemt, waren verenigd in een soort „Mathematisch Centrum”: „het Huis van Moemmoë”. De goddelijke beschermheer Moemmoë was de zoon en woordvoerder van Apsoe, de god van het oerwater, en we moeten in hem de verpersoonlijking van de intelligibele wereld zien. Toen een koning de oorspronkelijke bouwoorkonde van een tempel niet kon vinden, „verzamelde hij”, zoals een tekst woordelijk zegt, „de oudsten der stad, de bewoners van Babel en de wijze wis-

¹⁾ Vergilius, *Bucolica* VIII, vs. 72—75.

²⁾ Shakespeare, *Merry Wives of Windsor*, begin van de vijfde acte.

kundigen, die in het Huis van Moemmoe wonen en het grote geheim der goden bewaren”.

Een dergelijke mysterieuze leer der getallen kent men ook nu nog bij sommige van de hoger ontwikkelde natuurvölker. De plaats Lilibooy op Ambon en het naburige eilandje Noesa Laoet b.v. moeten nog ouden van dagen tellen, die in deze kunst bedreven zijn. Aan de andere kant stonden ook mannen als Plato, Dante en Kepler sterk onder invloed van de getallenmystiek, ja zelfs kan men in de moderne natuurwetenschap een heropleving van het Pythagoreïsme constateren; ik herinner slechts aan de bekende beschouwingen van Eddington.

We hebben in het voorgaande gezien, hoe gebrekkig het getalbegrip bij primitieve volken is. Sommige schrijvers — ik denk speciaal aan de school van Lévy-Bruhl — zagen daarin een bewijs voor hun stelling, dat de geest van de natuurmens essentiëel van de onze verschilt. Latere onderzoekingen hebben echter de onjuistheid van deze bewering aangetoond. Verschillende malen hadden we in het voorgaande gelegenheid om op te merken, hoe ook op het gebied van het getal primitieve denkvormen en methoden bij ons aanwijsbaar zijn. Wij moeten aannemen, dat het getalbegrip bij onze voorouders aanvankelijk op een even laag plan stond als dat van van de meest onbeschaafde volken en dat dit begrip in de loop der tijden is gegroeid.

Diep kan ik hier niet op deze kwestie ingaan, maar toch wil ik enkele voorbeelden aanhalen, die laten zien, hoe gebrekkig in de oudheid het begrip voor grote aantallen was. Herhaaldelijk ontmoeten we in de Bijbel plaatsen, waar ons de verzekering wordt gegeven, dat bepaalde aantallen te groot waren om geteld te worden. Zo heet het in 1 Koningen 8 : 5: „De Koning Salomo nu en de gansche vergadering van Israël, die bij hem vergaderd waren, waren met hem voor de ark, offerende schapen en runderen, die vanwege de menigte niet konden geteld noch gerekend worden” en in Genesis 41 : 49 lezen we: „Alzoo bracht Jozef zeer veel koren bijeen, als het zand der zee, totdat men ophield te tellen; want daarvan was geen getal”.

Het tellen van grote aantallen was in de oudheid geen aangelegenheid, waarover men lichtvaardig dacht. Herodotus verhaalt ons hoe Xerxes zijn millioenenleger telde in een vlakte aan de kust van Thracië¹⁾: „Een groep van tienduizend man werd op een bepaalde plaats samengebracht en deze mensen werden zo dicht opeengedrongen als maar mogelijk was. Daarna werd om hen

¹⁾ Herodotus VII, 59 en 60.

heen een cirkel getrokken, waarop deze mannen vrijgelaten werden. Toen werd langs de cirkel een omheining opgericht ter hoogte van het middel van een man. Vervolgens werden in de ruimte erbinnen andere manschappen gedreven, totdat het gehele leger op deze manier geteld was".

Zelfs de Grieken, die overigens veel hebben bijgedragen tot verheldering van het getalbegrip, hadden een zekere afkeer van het werken met grote getallen.

Toch was er in de oudheid één volk, waarvoor het voorgaande niet opging en wiens geest als het ware zwolg in een orgie van grote getallen. Dat waren de Indiërs. Zij verdromen zich graag in een eigen wereld van fantastische afmetingen en hun verbeeldingskracht erkent geen enkele grens. Vaak waren het religieuze voorstellingen, die hen prikkelden om de getallenrij steeds verder voort te zetten. De Indiër kent geen maat in het aantal van zijn godheden. In een volksgezegde is er sprake van 330 miljoen en in het epos Mahabharata zelfs van 24×10^{15} . Voordat Boeddha zich terugtrok in de eenzaamheid der wildernis zoekt zijn vader hem aan het aardse leven te binden en hem te kluisteren — zoals het verhaal zegt — „in een kerker, waar de min cipier, de vreugde dorpelwachter was". Hij schonk zijn zoon namelijk een harem met maar eventjes 84000 vrouwen! Op een andere plaats lezen we, dat Boeddha 600000 miljoen zonen gehad moet hebben. Luister ook naar de z.g. verkondiging van Boeddha:

„Aan 32 hoofd- en 80 neventekens zal Boeddha, aan 32 zijn moeder, aan 8 het huis, waarin hij geboren zal worden, herkenbaar zijn. Door 10 miljoen vrouwen wordt zijn moeder, de koningin Maya-Devi, bediend. Honderdduizenden van heiligen en honderdduizend miljoenen van verhevenen zullen Boeddha huldigen. Zijn troon is samengesteld uit de goede werken gedurende honderdduizend miljoenen van wereldperiodes. De grote lotus echter, die in de nacht van de ontvingenis van Boeddha opbloeit, opent zijn bloem in een omtrek van 68 miljoen mijlen."

Men ziet hoe het getal hier een middel is tot versterking van de dichterlijke kracht.

Hiermee wil ik eindigen; ik hoop U een idee gegeven te hebben, welke moeilijkheden de primitieve mens bij het eenvoudige tellen te overwinnen heeft, en tevens, dat de weg, die naar het moderne abstracte getalbegrip voerde, voor de mensheid een zeer lange en moeizame geweest moet zijn. Ik hoop verder, dat ik U bij al deze getallen niet te veel — om met de Bakaïri te spreken — „kinarachu iwano" heb bezorgd.

ROOSTER VAN CURSUSSEN EN VOORDRACHTEN VOOR HET NAJAAR 1947.

I. TE AMSTERDAM.

Alle voordrachten vinden plaats in de laboratoria der Vrije Universiteit, de Laïressestraat 174 (van het C.S. met lijn 16).

- A. *Cursus Prof. Dr. J. A. Schouten*: Tensorrekening voor physici, op de Vrijdagen 3, 10, 17, 24, 31 October, 7, 14, 21, 28 November, 12 en 19 December 1947, telkens van 14—16 uur.
- B. *Cursus van Prof. Dr. J. Haantjes*: Afstandsmetkunde, op de Maandagen 6, 13, 20, 27 October, 3 en 10 November 1947, telkens van 14—16 uur.
- C. *Colloquia, onder leiding van Prof. Dr. J. G. van der Corput en Prof. Dr. S. C. van Veen* over: Asymptotische ontwikkelingen, te beginnen met Donderdag 2 October 1947 van 19.15—21 uur en verder iedere Donderdagavond op dezelfde tijd.
- D. Drie voordrachten over toegepaste wiskunde:
Dr. C. Campagne (Directeur der Verzekeringskamer) over: Wiskundige problemen over bedrijfsreserve en eigenbehoud bij de brandverzekering, op Zaterdag 8 November 1947 te 14 uur.
Dr. R. Timman (Medewerker aan het Nationaal Luchtvaart Laboratorium) over: Wiskundige Problemen uit de Grenslaagtheorie, op Zaterdag 15 November 1947 te 14 u.
De Heer P. de Wolff (Directeur v. h. Gem. Bureau v. d. Statistiek te Amsterdam) over: Problemen uit de Econometrie, op Zaterdag 22 November 1947 te 14 uur.
- E. *Cursus Getallenleer door Prof. Dr. J. G. van der Corput* op de Woensdagavonden 17 September, 15 October, 29 October, 12 November, 26 November, telkens te 19.30 uur.
- F. *Colloquium Moderne Algebra (voortzetting) onder leiding van Dr. J. de Groot en Dr. F. Loonstra* op de Woensdagavonden 24 September, 8 en 22 October, 19 November, 3 December en 17 December, telkens te 19.30 uur.
- G. *Dispuut over de Didactiek der Wiskunde* op de Woensdagavonden 1 October, 5 November en 10 December, telkens te 19.30 uur.

H. Avondcollege in Analyse (Differentiaal- en Integraal-rekening), Algebra en Analytische, Projectieve en Beschrijvende Meetkunde, te geven door *Dr. F. van der Blij*, *Dr. A. Heyting* en *J. Korevaar*.

Prospectus wordt op aanvraag door het M.C. verstrekt.

J. Wiskundecursus voor medici en biologen, te geven door de heren *Korevaar* en *van der Blij*, te beginnen Oct. 1947.

K. Besprekingen zijn gaande met Prof. Manneback uit Brussel betreffende een door hem in November te houden voordracht over moderne rekenmachines.

II. TE UTRECHT.

Twee cursussen Numerieke en Grafische Methoden, te geven door *Prof. Dr. H. Freudenthal*, met aansluitende praktische oefeningen. Inlichtingen bij Prof. Freudenthal, Fr. Schubertstraat 44, Utrecht.

III. TE ROTTERDAM.

Een cursus over Topologie, te geven door *Dr. J. de Groot* en een cursus van *Prof. Dr. H. D. Kloosterman*, over: Kwadratische vormen en kwadratische getallenlichamen. Inlichtingen bij de secretaris van het dispuut „Thomas J. Stieltjes”, den Heer H. Pleysier, Nobelstraat 105b, Rotterdam (C.).

IV. TE 's-GRAVENHAGE.

Diverse cursussen over Statistiek te geven door *Prof. Dr. D. van Dantzig*. Nadere gegevens worden op aanvraag door het M. C. verstrekt.

V. TE SITTARD.

Een colloquiumserie over Moderne Algebra, te leiden door *Dr. F. Loonstra*, te beginnen op Zaterdag 20 September te 15 u. in Hotel De Zwaan, Sittard. Nadere inlichtingen bij *Dr. F. Chamuleau*, Oude Woldeweg 9, Maastricht.

CURSUSSEN EN VOORDRACHTEN VOOR HET VOORJAAR 1948.

I. TE AMSTERDAM.

Voortzetting der cursussen IA, C, E, F, G, H, J. Een definitief rooster wordt later uitgegeven. Verder zijn in voorbereiding: *Prof. Dr. J. N. Burgers*: Een cursus over problemen uit de Aerodynamica.

Dr. A. Heyting: Een cursus Logistiek.

Prof. Dr. H. D. Kloosterman: Een cursus Getallenleer.

Prof. Dr. D. van Dantzig: Een cursus Wiskunde en Ervaringswetenschap.

II. TE UTRECHT.

Voortzetting der colleges van *Prof. Freudenthal*.

III. TE ROTTERDAM.

Een cursus Afstandsmetkunde door *Prof. Dr. J. Haantjes*.

IV. TE 's-GRAVENHAGE.

Voortzetting der colleges van *Prof. van Dantzig*.

V. TE SITTARD.

Voortzetting van het colloquium.

Opmerking: Alle voordrachten en cursussen zijn kosteloos toegankelijk, behalve de onder I H genoemde avondcursus, waarvoor een cursusgeld van f 100.— per jaar is verschuldigd.

KADERCURSUS STATISTIEK.

Op verzoek en met medewerking van de Vereniging voor Statistiek heeft het Mathematisch Centrum een „kadercursus” (Statistiek) georganiseerd bestemd voor hen, die reeds enigszins met de mathematische statistiek bekend zijn en hun kennis willen aanvullen tot een niveau, dat ongeveer met dat van de toekomstige universitair gevormde statistiek zal overeenkomen.

De cursus zal te 's Gravenhage gegeven worden en ongeveer 2 jaren duren. Hij omvat:

1e. Een cursus *Elementaire en Beschrijvende Statistiek* van 1 uur per week, te geven door *Dr. J. J. J. Dalmulder*, lector aan de R.K. Economische Hogeschool te Tilburg, des *Vrijdag van 17—18 u.*

2e. Een cursus *Mathematische Statistiek* van 2 uren per week, te geven door *Prof. Dr. D. van Dantzig*, hoogleraar aan de Gem. Universiteit te Amsterdam, des *Vrijdag van 19—21 u.*

Dr. Dalmulder zal tevens praktische toepassingen van de cursus Mathematische Statistiek behandelen en voorts van tijd tot tijd deskundigen uit het bedrijfsleven uitnodigen, speciale onderwerpen in het kader van zijn cursus nader toe te lichten.

Prof. van Dantzig stelt zich voor o.m. de volgende onderwerpen te behandelen: Grondbegrippen en grondproblemen, de theorie van chi-square verdelingsfuncties van verschillende statistische variabelen, correlatie- en regressie-analyse, „analysis of variance”, de

theorie der „Maximum likelihood” en der vertrouwensgrenzen, „sequential analysis”, enz. Deze cursus zal een mathematisch en kritisch karakter dragen en behalve aan een uiteenzetting der belangrijkste methoden ook aan een beschouwing over de grenzen van haar geldigheidsgebied aandacht schenken. Hiertoe is een *wiskundige vooropleiding* noodzakelijk, ongeveer gelijkstaand met die voor een candidaatsexamen in de wis- en natuurkunde aan een Universiteit, een candidaatsexamen „grote cursus” Delft of M.O. Wiskunde K V; in het bijzonder betreft het hier kennis en vaardigheid in het behandelen van bepaalde en onbepaalde integralen, reeksen, maxima en minima van functies van een of meer veranderlijken en Analytische Meetkunde in n -dimensies.

Voor hen, die wel een althans bij benadering hiermede gelijkwaardige vooropleiding bezitten, maar wier kennis niet of niet meer geheel toereikend is, is het Mathematisch Centrum bereid bij voldoende belangstelling een zuiver wiskundige aanvullings- en herhalingscursus te doen geven door Dr. F. Loonstra en wel op Maandag- of Donderdagavond gedurende ongeveer drie maanden. Deze laatste cursus zal ook toegankelijk zijn voor belangstellenden die niet de cursus mathematische statistiek wensen te volgen.

Van alle cursussen zal een uitvoerige syllabus worden verstrekt.

De kosten van deze leergangen bedragen:

- A. voor de cursus van Dr. Dalmulder en Prof. v. Dantzig samen f 100.— per jaar.
- B. voor de cursus van Dr. Dalmulder afzonderlijk f 40.— per jaar.
- C. voor de cursus van Prof. v. Dantzig afzonderlijk f 75.— per jaar.
- D. voor de aanvullingscursus van Dr. Loonstra f 25.—.

Aanmeldingen voor deze cursussen kunnen schriftelijk geschieden bij het Mathematisch Centrum, Nieuwe Kerkstraat 124, Amsterdam (C.), tel. 56643, alwaar desgewenst ook nadere inlichtingen kunnen worden verkregen.

De eerste voordrachten vinden plaats op Vrijdag 14 November 1947 op een aan de deelnemers nader mede te delen plaats te Den Haag.

HERHALINGS- EN AANVULLINGSCURSUS WISKUNDE.

In verband met een onder auspiciën van het Mathematisch Centrum door Prof. Dr. D. van Dantzig te 's-Gravenhager te geven avondcursus over de Mathematische Statistiek, te beginnen met

Vrijdag 14 November 1947, heeft het Mathematisch Centrum de bedoeling om bij voldoende deelname tevens een herhalings- en aanvullingscursus Wiskunde te organiseren, die ook toegankelijk zal zijn voor hen, die niet aan de cursus van Prof. van Dantzig wensen deel te nemen.

De cursus is bedoeld voor allen, die hoger onderwijs in de wiskunde genoten hebben, maar die hetzij een opleiding in dit vak gehad hebben, die niet geheel toereikend is voor hun tegenwoordige mathematische behoeften, hetzij de vroeger verkregen kennis niet meer voldoende beheersen. In aanmerking komen b.v. zij, die te Wageningen of te Rotterdam hebben gestudeerd of de zgn. „kleine cursus” te Delft hebben gevolgd alsmede zij, die b.v. door zelfstudie een daarmede gelijkwaardige kennis verkregen hebben.

De cursus zal circa drie maanden duren en een inleiding geven in de differentiaal- en integraalrekening en in enkele gedeelten der analytische meetkunde van 3 en meer dimensies.

De cursus zal te 's-Gravenhage worden gegeven door Dr F. Loonstra, op Maandag- of Donderdagavond.

De kosten bedragen f 25.—.

OFFICIELE MEDEDELING VAN WIMECOS.

Jaarlijkse algemene vergadering op Dinsdag 30 December 1947 in het American Hotel te Amsterdam. Convocaties volgen.

De Secretaris

J. J. TEKELENBURG.

MATHEMATISCH CENTRUM.

Woensdag 10 Dec. a.s. houdt Prof. Dr. G. H. A. Groshede een voordracht over een meetkundig onderwerp in verband met de leerstof in de middelbare school in het gebouw van de Vrije Universiteit. De Lairessestraat 174. Aanvang 19.30 uur precies. Toegang kosteloos.

WISKUNDIG DISPUUT „THOMAS J. STIELTJES”.

2 December 1947. Werkvergadering. Sprekers: G. A. J. Rooth: Over een onderwerp uit de groepentheorie, J. M. Sanders: Verdere behandeling van de vlakke C_3 met toepassing op de groepentheorie.

13 Januari 1948. Dr. J. de Groot, Amsterdam. Eerste lezing: Topologie.

27 Januari 1948. Dr. Bernard Johnson, Accrington. „Mathematics in English Secondary schools”.

3 Februari 1948. Dr. J. de Groot, Amsterdam. Tweede lezing: Topologie.

17 Februari 1948. Werkvergadering: Opgave volgt.

24 Februari 1948. Dr. J. de Groot, Amsterdam. Derde en laatste lezing: Topologie.

Alle lezingen beginnen te 19.45 uur in het St. Franciscus Collège, Beukelsdijk 91, Rotterdam.

H. PLEYSIER, Secretaris,
Nobelstraat 105b, Rotterdam.

INTERNATIONALE VERENIGING VOOR LOGICA EN VOOR WIJSBEGEERTE DER WETENSCHAP. Nederlandse afdeling.

De aankondiging van de vorming van een Nederlandse afdeling van de te Zürich in December 1946 opgerichte „Société internationale de logique et de philosophie des sciences”, heeft een bevredigende aanmelding van belangstellenden opgeleverd, zodat de Nederlandse afdeling als opgericht is te beschouwen.

In het voorlopige bestuur der afdeling hebben zitting genomen:

Prof. Dr. E. W. Beth, voorzitter.

Dr. A. Heyting, lid.

Prof. Mr. B. M. Kazemier, lid.

Prof. Dr. A. G. M. van Melsen, lid.

Dr. P. G. J. Vredenduin, lid.

H. Meyer, secretaris-penningmeester.

De contributie voor het eerste verenigingsjaar, lopende van September 1947—September 1948 is vastgesteld op f 2.50. U wordt uitgenodigd, deze contributie tegelijk met Uw aanmeldingsbiljet te verzenden, de contributie bij voorkeur door overschrijving op postgiro van de secretaris-penningmeester, H. Meyer, No. 257975 te Enschede.

Het ligt in het voornemen, de werkzaamheden in October aan te vangen. Hieromtrent krijgt U nog nadere mededeling.

Spoedige aanmelding, ook door hen, die reeds voorlopig hun instemming met het streven van onze afdeling hebben betuigd, zal zeer op prijs worden gesteld.

Secretariaat: Enschede, Cort van der Lindenstraat 12.

EEN INTERESSANTE TOEPASSING VAN HET BINOMIUM VAN NEWTON.

Naschrift.

Bij het overlezen van mijn water-wijn overpeinzing in het vorige nummer van „Euclides” viel mij op, dat misschien een verklaring gewenst was waarom die evidente stelling in § 2 (zie 23e jg. No. 1 blz. 49) zo'n ingewikkeld bewijs gekregen heeft.

De juistheid van deze stelling is n.l. weer direct in te zien door een redenering overeenkomend met die in § 1. Stellen bij een zekere proef a en b resp. voor de hoeveelheden water en wijn in het heengaande schepje en c en d die in het teruggaande schepje, dan volgt uit $a + b = c + d$, dat $a - c = d - b$, d.w.z. er gaat bij iedere proef evenveel water naar het wijnglas als wijn naar het waterglas.

Ook volgt de juistheid van de stelling direct uit het feit, dat de totale hoeveelheid vloeistof per glas gelijk blijft bij elke proef. Het is dus eenvoudig een kwestie van verdringing van water door wijn en omgekeerd. Dit alles geldt ook voor de opmerking in § 2.

In § 1 werd aan de eerste redenering (dus de verdringing in de schepjes) de voorkeur gegeven boven de tweede (dus de verdringing in de glazen), omdat daar de berekeningen beter bij aansluiten.

De bedoeling van het artikeltje was echter om oefenmateriaal te verschaffen voor het rekenen met het binomium van Newton en voor het geven van bewijzen door volledige inductie.

Daar in § 7 een tweede afleiding gegeven zou worden van formule (6), was tabel 2 nodig, die nu tevens gebruikt is om de juistheid van de stelling in § 2 te demonstreren.

Er is helaas verzuimd dit in een opmerking aan het eind van § 2 te vermelden. Hiertoe diene dus dit naschrift.

M. DIJKSHOORN.

KORREL LXXXI.

Het „water-wijn” vraagstuk.

De door Dr. M. Dijkshoorn in de 23e jg., nr. 1, blz. 48, § 1 gestelde en opgeloste strikvraag kan veel algemener gesteld en nog eenvoudiger opgelost worden. Men heeft een glas met water en een 2e glas met een even groot volume wijn. Men neemt een of meer even grote schepjes uit het 1e glas en doet die in het 2e; men roert als men er zin in heeft, maar men mag het ook nalaten; men neemt nu een of meer, weer even grote, schepjes uit het 2e glas, en doet die in het 1e (roeren als boven); men zet deze handelingen naar willekeur voort; bij het beeindigen zorgt men er echter voor, dat evenveel schepjes uit het 2e glas genomen zijn, als uit het eerste.

Er is nu evenveel wijn in het 1e glas als water in het 2e! En het heeft met goed roeren niets te maken.

De zaak is eenvoudig: de hoeveelheid wijn in het 1e glas is uit het 2e glas gekomen en heeft in het 1e glas een hoeveelheid water verdrongen, die even groot is (het glas is even vol gebleven!) en die onherroepelijk in het 2e glas terecht gekomen is!

H. STREEFKERK.

KORREL LXXXII.

Bewijs.

Zijn AD en BE de gelijke bissectrices van $\triangle ABC$, I hun snijpunt, dan past men op het verlengde van CI een stuk IP af, zodanig dat $IP = \frac{AI \times ID}{CI}$ en een stuk IQ, zodanig, dat $IQ = \frac{BI \times IE}{CI}$. De punten A, C, D en I liggen dan op één cirkel, eveneens de punten B, C, E en Q. Deze cirkels zijn gelijk ($AD = BE$, $\angle ACD = \angle ECB$). Verder zijn dan ook de bogen APD en BQE gelijk, dus ook de helften daarvan: bg PD = bg QE, dus koorde PD = koorde QE. Daar $PD^2 = PI \times PC$ en $QE^2 = QI \times QC$, is $PI \times PC = QI \times QC$. Uit de constructie volgt, dat I de punten P en C scheidt, en ook de punten Q en C. Stelt men nu de lengte van CI door n voor, die van IP door x , die van IQ door y , dan is $x > 0$, $y > 0$, $n > 0$ en $x(x + n) = y(y + n)$, dus $(x - y)(x + y + n) = 0$, terwijl $x + y + n > 0$, zodat $x - y = 0$ of $IP = IQ$. De punten P en Q

vallen derhalve samen, en wel met het 2e snijpunt R der beide cirkels. Deze (gelijke!) cirkels hebben nu de koorde CR gemeen, zodat $bg\ CDR = bg\ CER$, waaruit volgt $bg\ CDA = bg\ CEB$ of $AC = BC$.

Opmerking. Wezenlijk is bij dit bewijs, dat AD en BE elkaar binnen de driehoek snijden. Het rechtstreekse bewijs daarvoor worde den lezer overgelaten.

KORREL LXXXIII.

Het is mogelijk, in een bijzonder geval van een der door Lagrange gevonden strenge oplossingen van het zg. drie-lichamen-probleem een elementaire en bijzonder eenvoudige behandeling te geven.

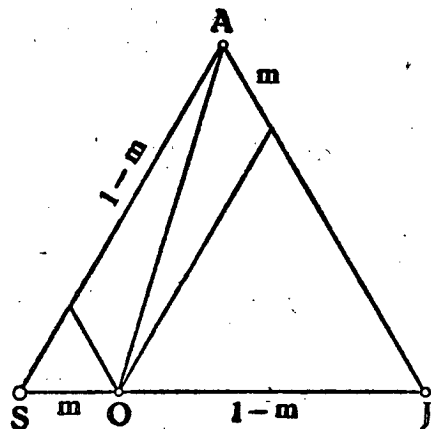
Wij gaan uit van een speciaal geval van het twee-lichamen-probleem. De zon S en de planeet Jupiter J beschrijven cirkels om hun gemeenschappelijk zwaartepunt O. Wij kiezen de afstand SJ als lengte-eenheid en de som der massa's van S en J als massa-eenheid; we kunnen dan de massa's van S en J opv. voorstellen als $1 - m$

en m ; verder wordt $OS = m$, $OJ = 1 - m$. Kiezen we de tijdseenheid zo, dat de gemeenschappelijke hoeksnelheid van S en J gelijk aan 1 wordt, dan krijgt ook de constante f in de gravitatiewet van Newton:

$$K = f \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

de waarde 1.

We plaatsen nu een derde planeet A, waarvan we de massa μ zo gering voorstellen, dat we zijn aantrekkende werking op S en J kunnen verwaar-



lozen, in het vlak van de beweging van S en J, en wel zo, dat driehoek SAJ gelijkzijdig is, zodat $AS = AJ = 1$.

Nu oefent S op A een kracht $(1 - m)\mu$ langs AS uit, wat voor A een versnelling $1 - m$ langs AS oplevert; evenzo oefent J op A een kracht $m\mu$ langs AJ uit, wat voor A een versnelling m langs AJ oplevert. De resulterende versnelling wordt klaarblijkelijk in richting en grootte voorgesteld door AO.

Dit is echter juist de middelpuntzoekende versnelling, die beant-

woordt aan een eenparige cirkelbeweging van A om O , met een hoeksnelheid 1. Geven we dus aan A nog de juiste beginsnelheid, dan zullen S , J en A bij voortduring zo bewegen, dat SAJ een gelijkzijdige driehoek met zijden 1 is.

Interessant is nog, dat in 1906 en later enkele kleine planeten zijn ontdekt, waarvan de beweging bij benadering aan die van de planeet A beantwoordt.

E. W. BETH.

KORREL LXXXIV.

Het causaliteitsbeginsel.

De werken van de wijsgeren zijn vaak moeilijk te begrijpen. Ze gebruiken soms woorden, waar ze een bepaalde gedachte aan verbinden, maar die niet meer in betrekking staan tot de wereld buiten hen. We moeten immers onderscheid maken tussen de verschijnselen, de gedachten, die wij naar aanleiding van die verschijnselen hebben en de woorden, die uitdrukking aan die gedachten geven. Maar door deze twee overgangen van verschijnsel op gedachte en van gedachte op woord bestaat er grote kans, dat er geen directe betrekking bestaat tussen het woord en het verschijnsel. Het wordt voor een derde dan moeilijk, ja onmogelijk, om deze woorden te begrijpen. De uitspraken, die zo ontstaan, zijn niet door derden te controleren; ze kunnen alleen waarde hebben voor de schrijver zelf; voor de wetenschap zijn ze waardeloos. Zulk een uitspraak is: „Voor ieder verschijnsel is een oorzaak nodig.” Hoe zouden we kunnen onderzoeken, of dit juist is? Door de proef op de som te nemen en voor ieder verschijnsel een oorzaak op te sporen. Dit nu mislukt ten enen male. Wanneer we aannemen, dat er een oorzaak is, dan berust dit alleen op ons geloof in dit opzicht, of zoals Prof. P. H. van Laer zegt op ons inzicht. Het kan nooit door welke ervaring ook weersproken worden. Daardoor echter is de uitspraak in wetenschappelijk opzicht zonder waarde. Er zijn heel wat physici geweest, die stellingen geponeerd en hypothesen uitgesproken hebben, die alleen op hun inzicht berustten. Deze uitspraken konden naderhand door de proef bevestigd of afgewezen worden. De mens zal dus inderdaad met succes gebruik kunnen maken van zijn inzicht, maar alleen, wanneer de resultaten door derden gecontroleerd kunnen worden. Is dit niet het geval, zoals bij bovengenoemde

stelling, dan is deze een persoonlijke mening, die niet wetenschappelijk gestaafd kan worden. Van sommige onderzoekers zou de wetenschappelijke activiteit misschien geremd worden, als ze niet veronderstelden, dat alles een oorzaak moet hebben.

Ze zouden de wereld leeg en koud vinden. Aan de andere kant belet een vooropgestelde mening het aannemen van een ruimer standpunt.

Kennen wij eigenlijk wel van één verschijnsel de oorzaak? Laten we eens de volgende drie gevallen bespreken. 1e. Een thermometer wordt in warm water gestoken; we zien het kwik rijzen. 2e. Een stuk ijzer wordt bij een magneetnaald gebracht, de magneetnaald gaat draaien. 3e. Een opgetrokken hefblok laat men los; het valt naar de aarde. In het eerste geval kan men als verklaring geven, dat er warmte overgaat van het water op het kwik. Met deze verklaring was men niet tevreden; door middel van de kinetische theorie kan men het verschijnsel al beter beschrijven. Men heeft het dan over moleculen, die zich bewegen; daarbij tegen andere moleculen aanbotsen, er een kracht op uitoefenen, waardoor de snelheid verandert. De oorzaak kan dus ten slotte teruggebracht worden tot een kracht. En wat is een kracht; volgens de gebruikelijke definitie is een kracht de oorzaak voor de verandering van de bewegingstoestand van een lichaam. Het is dus zo; wij zoeken een oorzaak, vinden er geen; maar omdat we er toch een willen hebben, geven we alvast een naam, kracht. Uiteraard zijn we hierdoor nog niet veel verder gekomen. In het tweede geval kunnen we zeggen, dat de oorzaak gevonden wordt in de aantrekkingskracht van het ijzer op de magneet. Hiermee niet tevreden, komt men tot de moleculen, die zelf magnetisch zijn; dit magnetisme wordt opgewekt door elektrische stroompjes. De draaiing zou dus verklaard kunnen worden door de werking van een elektrische stroom op een andere. Wat de oorzaak van deze werking is, weten we niet. Bij het vallen van een voorwerp naar de aarde zijn we al heel gauw uitgepraat, wat de oorzaak betreft. We hebben er een woord voor: aantrekkingskracht, dat is alles. We kunnen het laatste verschijnsel ook anders beschrijven, nl.: een voorwerp buiten de aarde kan zich alleen langs bepaalde lijnen bewegen. Dit is een nauwkeuriger omschrijving van wat er gebeurt, maar zegt terecht niets over de oorzaak. Nog steeds kan Galilei ons als voorbeeld dienen. Zoals hij, moeten wij onderzoeken, *wat* er gebeurt en er een zo nauwkeurig mogelijke beschrijving van geven. Of er een oorzaak voor is of niet, kunnen wij in het midden laten. Indien wij zeggen, dat alles een oorzaak moet hebben, zijn we dan wel veel verder dan de Griekse filosoof,

die zei dat een steen valt, omdat de plaats van de steen nu eenmaal beneden is? Door dit aan te nemen belet men het onderzoek van het verschijnsel, daar men meent, dat er een verklaring voor gevonden is. We moeten ons onbevooroordeeld tegenover de verschijnselen plaatsen en behoeven ons niet te bekommeren over het al of niet werken van de causaliteitswet. Lukt het ons nauwkeuriger uit te leggen, wat er gebeurt, dan is dat door ieder, mits men de nodige voorkennis heeft, te controleren. Hiermee is de wetenschap dus gebaat.

In plaats van: men zoekt nu eenmaal een oorzaak, ook als men er in het geheel geen ziet, zou men ook kunnen zeggen: men wil nauwkeuriger weten, wat er nu eigenlijk gebeurt. Dit is de drang, die vele wetenschappelijke onderzoekers in zich hebben en die zeer vruchtbaar kan werken.

Het woord oorzaak zullen we uit onze terminologie wel niet meer kunnen missen; voorlopig kan het ook nog wel goede diensten bewijzen. Het is evenwel vruchteloos om te debatteren over de vraag of alles een oorzaak heeft ja dan nee, daar dit niet uit te maken is.

Middelburg.

J. SCHELTENS.

VAN DE PERSONEN.

Benoemd aan de Economische Hogeschool te Rotterdam om les te geven in de wiskunde:

Dr. M. v. Vlaardingen; studeerde aan de R. U. te Utrecht en promoveerde in 1936 op een proefschrift getiteld: Over Reeksen van

den vorm $\sum \frac{Ax}{Z - \alpha_x}$ (promotor Prof. Dr. J. Wolff).

Hij is leraar in de Wiskunde en Mechanica aan het Rotterdams Lyceum.

De Heer H. Pleysier studeerde Wis- en Natuurkunde aan de R. U. te Leiden en is leraar aan de Chr. H.B.S. te Rotterdam.

BOEKBESPREKING.

P. H. van Laer. *Actio in distans en aether*. Bibliotheek van thomistische wijsbegeerte. Het Spectrum. Utrecht—Brussel 1947. 151 blz.

Professor van Laer plaatst zich in deze natuurphilosophische studie op het standpunt van de aristotelisch-thomistische cosmologie, zoals deze door P. Hoenen in een tweetal bekende werken is ontwikkeld en verdedigd (ter informatie van de lezer diene, dat vooral de bekende franse auteur J. Maritain een andere opvatting van de peripatetische natuurleer propageert, terwijl de franse dominicaan D. H. Salmon t.a.v. de peripatetische cosmologie een zeer vrijzinnige mening aanhangt). Ik wil eerst de doelstelling en de inhoud van zijn werk kort schetsen, om het daarna van mijn eigen standpunt uit te beoordelen.

De vraag naar de mogelijkheid van afstandswerking is al zeer oud. Ze wordt reeds door Aristoteles en zeer uitvoerig door een reeks middeleeuwse auteurs behandeld. Over het algemeen werd gedurende deze lange periode de actio in distans verworpen. De gravitatieleer van Newton bracht haar aanhangers echter tot aanvaarding van het feitelijk bestaan van afstandswerking. Dit leidde er toe, dat ook de theorieën van electriciteit en magnetisme aanvankelijk op de onderstelling van een actio in distans werden gefundeerd. De experimenten en theorieën van Faraday, Maxwell en Hertz evenwel leidden tot de volledige verdringing van de leer der afstandswerking uit de leer van electriciteit en magnetisme. Einstein bracht deze ontwikkeling tot afsluiting. Zijn speciale relativiteitsleer brengt mee, dat een werking zich steeds voortplant met een eindige snelheid, die hoogstens gelijk is aan de voortplantingssnelheid van het licht; zijn speciale relativiteitstheorie vervangt voor de gravitatie de leer der afstandswerking van Newton door een veldtheorie. Daarmee was, voorzover het de verklaring van de macrophysische verschijnselen betrof, uit de physische elke afstandswerking uitgeschakeld. Door de quantumtheorie is het vraagstuk nogmaals in een nieuw licht getreden. Volgens het complementariteitsbeginsel van Bohr vereist elke veldtheorie als complement een deeltjestheorie; zo beantwoordt aan de theorie van het electromagnetisch veld de leer der photonen of lichtdeeltjes; aan de theorie der gravitatie de leer der gravitonen; aan de theorie van het kernveld de leer der

mesonen. Men denkt dus bv. de electromagnetische wisselwerking tussen twee electronen enerzijds overgebracht door het veld tussen de electronen, anderzijds bewerkstelligd door uitwisseling van photonen.

Het boek van Professor van Laer valt uiteen in drie afdelingen. In afdeling A wordt het probleem der localisatie behandeld; schr. concludeert, dat men noodzakelijk een universeel localisatiemedium moet onderstellen, om van plaats, afstand en beweging te kunnen spreken; dit medium kan worden geïdentificeerd met de aether van Lorentz.

In afdeling B komt het vraagstuk van de mogelijkheid van afstandswerking aan de orde. Hier wordt geconcludeerd tot de metaphysische onmogelijkheid van zulk een werking op grond van inzicht in de voorwaarden, waaraan zulk een werking moet voldoen; tot de physische onmogelijkheid; althans tot het feitelijk niet bestaan ervan, op grond van de gegevens der ervaring.

Deze beide afdelingen, die samen het grootste deel van het boek beslaan, bevatten een confrontatie van de meningen van in hoofdzak — oudere en nieuwere — scholastieke auteurs; van de moderne natuurkundigen komen er slechts enkelen aan het woord; afdeling C geeft echter een beknopt overzicht van de opvattingen der physici over het probleem der afstandswerking.

Mijn bezwaren tegen de zeer ernstige studie van Professor van Laer hangen samen met mijn opvatting, dat er tussen peripatetische cosmologie en hedendaagse natuurwetenschap geen continuïteit bestaat.

De peripatetische natuurleer stelt zich in beginsel en in feite op het standpunt van het natuurlijk, d.w.z. vóór-wetenschappelijk, bewustzijn. Zij gaat uit van die feiten, die elk mens door dagelijkse ondervinding bekend zijn, en behandelt deze met behulp van het algemeen gangbaar begripsapparaat, dat in de omgangstaal verankerd ligt.

De hedendaagse natuurwetenschap daarentegen gaat mede uit van feiten, die geheel buiten de kring van onze dagelijkse ondervinding liggen en die dan ook alleen met behulp van zeer bijzondere hulpmiddelen kunnen worden opgespoord. Zij moet zich voor de verklaring van die feiten bedienen van een zich steeds ontwikkelend begripsapparaat, dat verschilt van dat van de peripatetische cosmologie en daartoe niet te herleiden is.

De argumenten, die men in de peripatetische natuurleer voor of tegen de actio in distans kan aanvoeren, kan men dientengevolge in de hedendaagse natuurwetenschap niet overnemen, en omge-

keerd. De discontinuïteit tussen deze beide vormen van speculatieve natuurbeschouwing blijkt dan ook telkens, als de schr. de opvatting van de nieuwere natuurwetenschap in het geding brengt. Naar mijn mening slaagt hij er niet in — en kon hij er ook niet in slagen —, deze in zijn betoog te integreren.

Ondanks deze bezwaren ben ik echter overtuigd, dat een physicus met wijsgerige of historische belangstelling en meer in het bijzonder de docent van de lezing en overdenking van de interessante en scherpzinnige studie van Professor van Laer zeer veel profijt zal kunnen hebben.

E. W. BETH.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van J. B. Wolters — Groningen, Batavia	
Dr. A. van Thijn, <i>Leerboek der Stereometrie</i> , 17e druk f 3,50, geb.	f 3,90
Van P. Noordhoff — Groningen, Batavia	
C. J. Alders, <i>Algebra</i> voor Middelbaar en voorb. hoger onderwijs deel I — 7de druk f 2,—; deel IIA — 5de druk f 2,10, gec.	- 2,40
C. J. Alders, <i>Vlakke meetkunde</i> voor middelb. en voorb. hoger ond. 6de druk, gecartonneerd	- 3,40
P. Wijdenes, <i>Planimetrie</i> , Een eenvoudig schoolboek, deel I — 4de druk f 2,20; deel II — 4de druk	- 2,20
Beide delen tezamen gebonden	- 4,40
P. Wijdenes en Dr D. de Lange, <i>Leerboek der Algebra</i> , deel I — 11de druk	- 2,60
Dr D. J. E. Schrek, <i>Beginnels der Analytische meetkunde</i> , 9de druk f 3,85, gebonden	- 4,60
P. Wijdenes en Dr H. J. E. Beth, <i>Nieuwe School-algebra</i> , deel I — 17de druk en III — 10e druk	- 3,—
P. Wijdenes en Dr D. de Lange, <i>Rekenboek</i> voor H.B.S. deel I — 22ste druk	- 2,30
P. Wijdenes, <i>Algebra voor examens in Handelsrekenen</i> M.O. K XII, Accountancy en Staatspractijkexamens — 3de druk f 3,90, gebonden	- 4,75
P. Wijdenes, <i>Algebra</i> voor Middelbare Handelsscholen II, 7e druk, gec.	- 2,40
P. Wijdenes, <i>Algebraïsche vraagstukken</i> II, 10e druk, f 2,30, gec.	- 2,80
P. Wijdenes, <i>Practische driehoeksmeting</i> , 4de druk	- 2,75

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH

AMERSFOORT

I. Zeventiende druk	156 blz. 21 fig. f 3.—*
II. Zestiende druk ter perse	204 blz. 50 fig. f 3.00*
III. Elfde druk	198 blz. 60 fig. f 3.00*

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Vijfde druk. 164 blz. 20 fig. f 2,00*.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

$V\alpha$ en $VI\alpha$ Nieuwe Schoolalgebra III α

$V\beta$ en $VI\beta$ Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Verschenen: nieuwe drukken van alle drie antwoordenboekjes.

Voor leraren zijn antwoorden verkrijgbaar; bovendien bij
P. W i j d e n e s de volledige uitwerkingen van de logaritmen-
vraagstukken in 4 en in 5 decimalen.

Uitgave P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA
Ook verkrijgbaar door de boekhandel.



J. B. WOLTERS
GRONINGEN - BATAVIA

Zo juist verschenen 3e druk

Dr P. G. J. VREDENDUIN
en Dr A. VAN HASELEN

ALGEBRA I

(INCLUSIEF REKENKUNDE)

voor V. H. en M. O.

Ingen. f 2,75*, geb. f 3,25*

ANTWOORDEN

bij Algebra I . . . f 1,00*

Verkrijgbaar bij de Boekhandel

Zo juist verscheen:

Dr P. MOLENBROEK
en
P. WIJDENES

STEREOMETRIE

voor Middelbaar en voorbereidend
Hoger Onderwijs

Achtste druk

f 2.65*, geb. f 3.20*

UITGAVE P. NOORDHOFF N.V.
GRONINGEN - BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de Boekhandel

Verschenen:

Dr P. MOLENBROEK

LEERBOEK DER STEREOMETRIE, 10e druk
Geb. f 9.50*

P. WIJDENES

BEKNOPT DRIEHOEKSMETING, 10e druk
A f 1.05*; B f 1.80*; A en B f 2.85*

Dr B. GONGGRIJP

TAFEL D, 8e druk, geb. f 3.40*

P. WIJDENES en Dr D. DE LANGE

VLAKKE MEETKUNDE I, 13e druk
f 2.40*

P. WIJDENES

ALGEBRA VOOR MULO I, 39e druk, f 1.80*
ALGEBRA VOOR MULO IIB, 16e druk, f 3.00*
MEETKUNDE VOOR MULO II, 9e dr., gec. f 2.00*

NOORDHOFF's TAFEL IN VIER DECIMALLEN, 12e druk,
f 1.35*

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V.  GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel