

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT- EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, LEEUWARDEN
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND - DR. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

23e JAARGANG 1947/48

Nr. 1

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8.00*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 8.00*) zijn ingetekend, betalen f 6.75*.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmo-graphie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,— op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van **Wimecos** storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1946 t/m 31 Augustus 1947 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

• I N H O U D .

	Blz.
Prof. Dr O. BOTTEMA, Verscheidenheden	
XV. De uitbreiding van de stelling van Pythagoras	1
XVI. Over ingeklede vraagstukken	1
XVII. De driehoek met twee gelijke bissectrices	5
Het Mathematisch Centrum; avondcursus en cursussen in numerieke en grafische methodes	9
Wiskundig dispuut: „Thomas Stieltjes”	12
Prof. Dr P. A. VAN LAER, Casualiteitsbeginsel en moderne physica	15
Prof. Dr D. VAN DANTZIG, Toespraak gericht tot Prof. Dr G. Mannoury	27
Van de personen	38
Boekbesprekingen	39
Ingekomen boeken	46
Dr M. DIJKSHOORN, Een interessante toepassing van het binomium van Newton	48

VERSCHEIDENHEDEN.

door

Prof. Dr. O. BOTTEMA.

XV. De uitbreiding van de stelling van Pythagoras.

De voor de zijvlakken van een rechthoekig viervlak geldende betrekking, die een stereometrisch analogon is van de stelling van Pythagoras, kan op de volgende wijze met behulp van de resultaten der mechanica bewezen worden — wij nemen aan dat men het stadium heeft bereikt waarin het samenstellen van krachten in de ruimte mogelijk is.

Langs elk der ribben van het viervlak ABCD, waarvan de hoeken bij D recht zijn, legt men twee tegengestelde kracht-vectoren, waarvan de grootte gelijk is aan de lengte der betreffende ribbe. De twaalf krachten zijn uiteraard in evenwicht. Men groepeert ze in vier stelsels van drie krachten: BD, DC en CB, CD, DA en AC, AD, DB en BA, AB, BC en CA. Elk der drietallen is gelijkwaardig met een koppel en de momenten der koppels zijn resp. gelijk aan de dubbele oppervlakken der driehoeken BDC, CDA, ADB en ABC. Daar de moment-vectoren van de eerste drie koppels onderling loodrecht zijn, vindt men op grond van de regel voor het samenstellen van koppels onmiddellijk

$$(\text{opp. ABC})^2 = (\text{opp. BCD})^2 + (\text{opp. CDA})^2 + (\text{opp. DAB})^2.$$

Men kan desgewenst ook omgekeerd van de meetkundige stelling uitgaan om de regel voor het samenstellen van koppels te bewijzen.

XVI. Over ingeklede vraagstukken.

De ontwikkeling van het wiskundeonderwijs aan onze middelbare scholen heeft geleid tot een verminderde belangstelling voor het zogenaamde *ingeklede vraagstuk*. De aandacht is gegaan naar de functionele afhankelijkheid van grootheden, naar de grafische voorstelling daarvan, naar vragen van uiterste waarden, naar de beginselen der infinitesimaalrekening en heeft zich min of meer afgewend van het oplossen van vergelijkingen en vooral ook van opgaven waarbij het opstellen van vergelijkingen aan de hand van een bepaalde tekstopgave hoofdzaak is. Zeer zeker worden in de

lagere klassen vraagstukken van deze soort nog wel aan de leerlingen opgegeven, maar zij zijn over 't geheel eenvoudiger dan vroeger en in de hogere klassen komen zij weinig meer voor. Een periode waarin men op het schriftelijk eindexamen der Hogere Burgerscholen de kandidaten een ingekleed vraagstuk voorlegde, doet ons aan als een tijdperk uit het grijze verleden. Ook voor andere hoofdstukken waarbij een geesteswerkzaamheid werd vergegd, analoog aan die welke voor het oplossen van ingeklede vraagstukken nodig is, ging de belangstelling geheel of gedeeltelijk verloren. Wij denken aan de vraagstukken over samengestelde interest en aan de meetkundige constructie opgaven, waarbij het hulpmiddel der zogenaamde algebraïsche analyse werd toegepast.

Voor het verschijnsel zijn verschillende oorzaken aan te wijzen. De nieuwe problemen vragen zoveel aandacht en zoveel tijd, dat men wel gedwongen was een deel van de oude leerstof op te offeren. Daarnaast zal ook wel enige tegenzin tegen de opgaven zelf van belang zijn geweest en mag men de verminderde belangstelling toeschrijven aan een reactie tegen een overschatting, die zich vooral praktisch demonstreerde door het feit dat de opgaven dikwijls een gecompliceerd en gekunsteld karakter kregen.

Nu waren inderdaad de bedoelde vraagstukken grotendeels van dusdanige aard, dat men een glimlach niet onderdrukken kan, wanneer men ze vergelijkt met de werkelijkheid, waarvan zij door hun redactie en soms ook blijkbaar naar bedoeling, een afspiegeling pretendeerden te zijn. Heel erg heb ik dat nimmer gevonden en wanneer men de opgaven neemt voor wat zij moeten zijn, nl. als een hulpmiddel tot het bereiken van een bepaald doel, dan worden de desbetreffende bedenkingen spoedig teruggebracht tot een bezwaar tegen de vorm, maar niet tegen het wezen der opgaven. En zij blijken geheel vergelijkbaar met die welke men kan aanvoeren tegen onnatuurlijke themazinnen en ridicule dictee's. Zoals men deze in de laatste decennia heeft vervangen door opgaven van minder gekunstelde structuur, maar hun innerlijke gesteldheid niet veranderen kan zonder een onmisbaar middel van taalonderwijs over boord te werpen, zo kunnen wij eventueel ook pogingen doen de uiterlijke vorm der opgaven wat te moderniseren. Essentieel is dit niet — trouwens naar mijn mening is het mogelijk tegenover elke „belachelijke” ingeklede opgave van vroeger een even „dwaas” vraagstuk over een al of niet gebroken kwadratische functie aan te halen.

Ik weet niet of het mogelijk zal blijken de ingeklede opgaven in hun vroegere luister te herstellen, maar wel lijkt het mij nood-

zakelijk dat elke docent overweegt of de nieuwe leerstof hem een vergoeding kan geven voor wat hij door het terzijde stellen van deze opgaven derft. Het oplossen van een ingekleed vraagstuk vergt een geesteswerkzaamheid van zeer bijzondere aard en van een veelzijdigheid die onvergelykbaar is met die welke voor het oplossen van een gegeven vergelijking nodig is. Terwijl de leerling met het laatste al heel ver komt als hij in staat is een zeker rekenrecept toe te passen en over de geeiste nauwkeurigheid beschikt, is voor het eerste nog heel wat meer nodig en dat meerdere omvat juist die eigenschappen in hoge mate wier ontwikkeling wij, dunkt mij, met het wiskundeonderwijs vooral beogen. De leerling moet allereerst goed *lezen*, hij moet van het, uiteraard met taalkundige omhaal medegedeelde het wezenlijke scheiden van het bijkomstige, hij moet de nederlandse tekst nauwkeurig, maar met weglating van al het onbelangrijke, vertalen in de internationale taal der algebra. Bij deze vertaling geniet hij anderzijds weer een zekere vrijheid maar dit recht is weer bezwaard met de plicht der zelfstandigheid: hij mag, hij moet zelf zijn onbekenden kiezen, hij mag zelfs beslissen hoeveel het er zullen zijn; weet hij met minder rond te komen dan een ander, dan heeft hij eigenlijk te voren al gewerkt aan het eliminatieproces dat straks zal volgen. Hij moet zich ook terdege rekenschap geven van de verraderlijke kwestie der eenheden en er zorg voor dragen dat de beide leden van elk van zijn vergelijkingen in de zelfde grootheden zijn uitgedrukt, Bij de keuze van zijn onbekenden moet hij niet automatisch te werk gaan, maar beseffen dat het zijn nut kan hebben andere grootheden als onbekenden in te voeren dan die welke uiteindelijk in de opgave worden gevraagd. Als tenslotte de vergelijkingen er staan, zo mogelijk evenveel als het aantal onbekenden bedraagt, dan is een belangrijke geestelijke werkzaamheid verricht. Wat dan volgt is nuttig en onmisbaar rekenwerk, dat bepaald van lagere orde is dan de prestatie van het eerste stadium en geschikt om het woord te illustreren van een onzer filosofen: waar het rekenen begint, houdt het denken op. Zijn de vergelijkingen opgelost, dan mag hij zijn werk niet voltooid achten met het onderstrepen van het stelsel der oplossingen; hij moet de oplossingen nog interpreteren, hij moet ook nagaan of de formele antwoorden corresponderen met werkelijke mogelijkheden voor het gestelde probleem en komt misschien tot de conclusie dat zijn onbekenden nog moeten voldoen aan bepaalde ongelijkheden of aan andere voorwaarden, die hij zich bij het stellen der onbekenden niet dadelijk heeft gerealiseerd.

Uit dit alles blijkt dat de vormende waarde van wiskundeonderwijs door het oplossen van ingeklede vraagstukken onweersprekelijk wordt opgevoerd. Van niet minder belang is echter de praktische waarde. Overal waar wiskunde wordt toegepast, hebben wij met ingeklede vraagstukken te maken; in de mechanica, in de theoretische physica, in de wetenschappelijke techniek, in de econometrie is de moeilijkheid veel meer gelegen in het opstellen der vergelijkingen dan in het oplossen. Het gehele probleem der toegepaste wiskunde heeft zijn oervorm in de simpele rekenvraagstukken, die „met stekende moeten worden opgelost”.

Otto Toeplitz, hoogleraar aan de universiteit te Bonn, wiskundige van vermaardheid en daarnaast een groot kenner van de geschiedenis in het bijzonder der Griekse wiskunde, heeft het niet beneden zijn waardigheid geacht een studie te wijden aan het ingeklede vraagstuk, vooral aan dat hetwelk in de laagste klassen der middelbare scholen aan de orde komt, een studie waarvan men slechts betreuren moet dat zij in een moeilijk toegankelijk tijdschrift is verschenen. (O. Toeplitz, *Die Behandlung der eingekleideten Gleichungen und das allgemeine Unterrichtsprinzip, das sich daraus ableitet*, Sem.Ber. der Univ. Bonn, Wintersemester 1933/34, pg. 34—58). Aan de hand van een aantal der eenvoudigste voorbeelden ontleedt Toeplitz het proces dat zich bij het oplossen dezer vraagstukken afspeelt en maakt een reeks psychologische en praktische opmerkingen. Hij brengt b.v. ter sprake het voorstel om de opgaven met één onbekende niet te scheiden van die welke het invoeren van meer onbekenden vorderen en hij voelt er ook wel voor om in de opgaven niet ter zake dienende gegevens op te nemen of zelfs zekere onduidelijkheden (in dit opzicht zal men vermoedelijk met hem van mening verschillen). Belangrijker dan deze details is de belangstelling die hij voor het onderwerp heeft en de grote waardering die hij voor de opgaven blijkt te hebben. Uitvoerig bespreekt hij de verhouding van werkelijkheid tot abstractie die bij deze opgaven aan de orde is en hij bespeurt in het oplossen der ingeklede vraagstukken een begin van dat merkwaardig proces, dat zich in de wiskunde en in de historie der wiskunde herhaaldelijk voltrekt en dat door Aristoteles met *aphaerese* wordt aangeduid. Door deze zeer lezenswaardige en helder gestelde opmerkingen wordt het onderwerp op een hoger plan geheven. Bij de apologie der ingeklede vraagstukken, die de kern van het betoog vormt, moge de schrijver dezer regelen zich in alle bescheidenheid aansluiten.

XVII. De driehoek met twee gelijke bissectrices.

Als wij niet wel wat anders aan ons hoofd hadden, zouden wij in deze jaren het centenarium hebben kunnen vieren van de stelling: *een driehoek met twee gelijke bissectrices is gelijkbenig*.

Zij werd in 1840 door Lehmus voorgelegd aan Jacob Steiner met het verzoek om een meetkundig bewijs. Deze gaf het als vraagstuk in het *Journal* van Crelle en publiceerde in datzelfde tijdschrift zijn eigen oplossing en wel in 1844. (28, pg. 375, zie ook Jacob Steiner, *Gesammelte Werke* II, pg. 323). Verschillende andere bewijzen zijn sindsdien bekend gemaakt; men vindt een omvangrijke literatuur over het onderwerp in dat eigenaardige en vormloze, maar niettemin nuttige werk van Simon, *Ueber die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX*

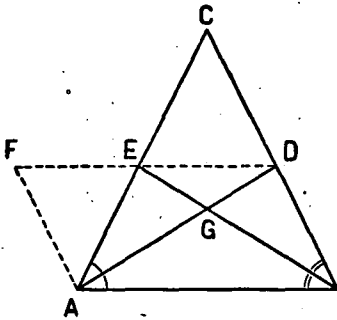


Fig. 1.

Jahrhundert (Leipzig 1906, pg. 131-133). Het bewijs van Steiner en verschillende andere meetkundige bewijzen zijn indirect. Toen ik onlangs van zeer deskundige zijde de eervolle vraag ontving of mij een rechtstreeks bewijs bekend was, bleek mij dat het volgende bewonderenswaardige betoog, dat ook bij Simon niet vermeld wordt, geen gemeengoed is van de betrokken mathematici.

Zij (fig. 1) ABC de gegeven driehoek met de gelijke bissectrices AD en BE . Construeer de driehoek ADF zo, dat $AF = AE$ en $DF = AB$. Dan is $\triangle ADF \cong \triangle EBA$, dus $\angle FAD = \angle AEB$ en $\angle ADF = \frac{1}{2}\beta$. Nu blijkt uit de driehoeken AGE en BGD dat

$$\angle AEB + \frac{1}{2}\alpha = \angle ADB + \frac{1}{2}\beta$$

$$\text{dus} \quad \angle FAD + \frac{1}{2}\alpha = \angle ADB + \angle ADF$$

$$\text{of} \quad \angle FAB = \angle BDF,$$

terwijl deze hoeken ook gelijk zijn aan

$$\angle AEB + \frac{1}{2}\alpha = \angle AGB = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} > 90^\circ.$$

Hieruit volgt de congruentie van de driehoeken BAF en FDB ($BA = FD$, $BF = FB$, $\angle FAB = \angle BDF$, terwijl de overige hoeken scherp zijn), zodat $AF = DB$, dus $AE = BD$, waaruit het gestelde onmiddellijk blijkt. Wij noemden dit bewijs een bewonderenswaardig betoog, men kan het ook een geraffineerde intrigue noemen. Het is eenvoudig genoeg, berust op een paar hulplijnen en enige stellingen

congruente driehoeken, maar ontbeert zo zeer logische rechtlijnigheid dat het zich, naar mijn persoonlijke ervaring, uiterst moeilijk laat onthouden. Het behoort tot de bewijzen die de meetkunde in discredit kunnen brengen en Schopenhauer zou het met meer recht dan het Euclidische bewijs voor de stelling van Pythagoras een muizenvalbewijs hebben kunnen noemen.

De geschiedenis van het bewijs is even merkwaardig als het bewijs zelf. Men vindt het in de *Philosophical Magazine*, vol. XLVII, fourth series (1874), pg. 255—257 onder de titel *Direct solution of a geometrical problem*. Het was in dat jaar aan de redactie gezonden door ene mej. Christine Chart uit Oakland. Deze verwees naar vroegere artikelen van 1852 in dat tijdschrift, waarbij Sylvester een direct bewijs voor de stelling had gevraagd, en waar

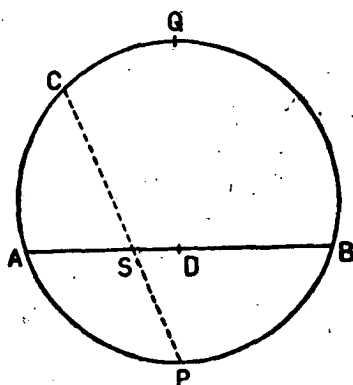


Fig. 2.

„after a protracted discussion it was concluded that none was possible” en deelde mede dat het onderhavige bewijs in 1842 gevonden was door een zekere F. G. Hesse. Deze auteur schijnt overigens geheel onbekend te zijn en de overeenstemming tussen het jaartal en de publicaties van Steiner in *Crelle*, is blijkbaar een volledig toeval.

Een ander, eveneens rechtstreeks bewijs, dat naar het schijnt voor het eerst door Rougevin werd gegeven (*Nouvelles Annales*, 2 (1842), pg. 138; vgl. Simon, pg. 131) berust op de volgende hulpstelling (fig. 2). Zijn P en Q de middens van de beide bogen AB, C een punt op AQ, S het snijpunt van CP met AB; dan neemt CS toe als C van A naar Q loopt. Het bewijs is eenvoudig genoeg; zij D het midden van AB, dan is

$CS \cdot SP = AS \cdot SB = (AD - SD)(SD + DB) = AD^2 - SD^2$
en daar SP en SD afnemen, neemt CS toe. Hieruit volgt de stelling: twee driehoeken die de basis, de tophoek en de bissectrice van de tophoek gelijk hebben zijn congruent.

Zijn nu (fig. 3) AD en BE de gelijke bissectrices van driehoek ABC, en I hun snijpunt, dan volgt uit $AD = BE$, $\angle C = \angle C$,

„after a protracted discussion it was concluded that none was possible” en deelde mede dat het onderhavige bewijs in 1842 gevonden was door een zekere F. G. Hesse. Deze auteur schijnt overigens geheel onbekend te zijn en de overeenstemming tussen het jaartal en de publicaties van Steiner in *Crelle*, is blijkbaar een volledig toeval.

Een ander, eveneens rechtstreeks bewijs, dat naar het schijnt voor het eerst door Rougevin werd gegeven

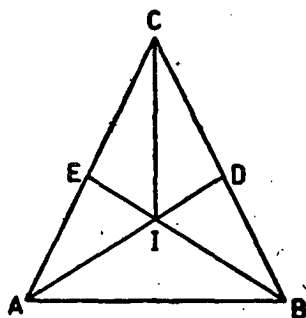


Fig. 3.

$CI = CI$ dat of $\triangle ADC \cong \triangle BEC$ of $\triangle ADC \cong \triangle EBC$. In het laatste geval zou $\angle ADC = \angle EBC$ zijn, wat blijkbaar onmogelijk is. Van de indirecte bewijzen reproducen we hier niet het bekende

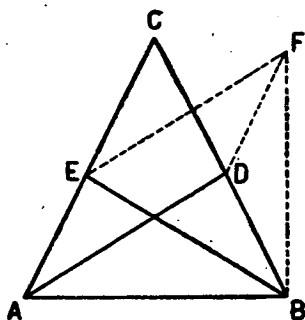


Fig. 4.

bewijs van Steiner, maar de volgende variant daarop, van de hand van Descube (*Journal de mathématiques élémentaires et spéciales*, 1880, pg. 538). Beschrijf het parallellogram ADFE en trek BF (fig. 4). Dan is $EF = AD = BE$, dus $\angle EFB = \angle EBF$. Is nu $\alpha > \beta$, dan is $\angle EFD > \angle EBD$, dus $\angle DFB < \angle DBF$, $DB < DF$ of $DB < AE$, waarna uit de driehoeken ABD en BAE volgt $\alpha < \beta$. De ver-

onderstelling was dus ongerijmd, hetzelfde geldt voor $\alpha < \beta$, en men heeft dus $\alpha = \beta$.

Een kort (indirect) goniometrisch bewijs is het volgende. Men heeft $AD \cdot (b + c) \sin \frac{1}{2}\alpha = 2O$, $BE (a + c) \sin \frac{1}{2}\beta = 2O$ zodat uit $AD = BE$ volgt

$$b \sin \frac{1}{2}\alpha - a \sin \frac{1}{2}\beta = c (\sin \frac{1}{2}\beta - \sin \frac{1}{2}\alpha), \dots (1)$$

Is nu $\beta > \alpha$, dus $\cos \frac{1}{2}\alpha > \cos \frac{1}{2}\beta$, dan volgt uit $b \sin \alpha = a \sin \beta$ dat het linkerlid van (1) kleiner, terwijl het rechterlid groter dan nul is. Evenzo is $\beta < \alpha$ ongerijmd. Dit bewijs, dat men bij Simon vindt, is wezenlijk korter dan dat van Sylvester (*Phil. Mag.* IV, 1852) en dan het bewijs dat Killing en Hovestadt¹⁾ geven en dat door Kruytbosch²⁾ wordt geciteerd.

De stelling kan ook door rechtstreekse berekening worden aangetoond.³⁾ Men heeft

$$AD^2 = \frac{bc(a + b + c)(-a + b + c)}{(b + c)^2},$$

$$BE^2 = \frac{ac(a + b + c)(a - b + c)}{(a + c)^2}, \text{ zodat uit } AD = BE \text{ volgt:}$$

$$(a - b)\{c^3 + (a + b)c^2 + 3abc + ab(a + b)\} = 0.$$

Daar de tweede factor van het linkerlid uit positieve termen bestaat, volgt hieruit $a = b$.

¹⁾ Killing und Hovestadt, *Handbuch des mathematischen Unterrichts* II, pg. 69.

²⁾ Kruytbosch, *Bijdragen tot de methodologie van de beginselen der meetkunde* (1931); pg. 155.

³⁾ Zie b.v. ook het (naar mijn oordeel gekunstelde) bewijs bij Versluys, *Over methoden bij het oplossen van meetkundige vraagstukken* (Groningen, 1920) pg. 40.

Gelijk welbekend is, behoeft een driehoek met *twee gelijke buiten-bissectrices* niet gelijkbenig te zijn. De berekening geeft nu de relatie $(a - b)\{c^3 - (a + b)c^2 + 3abc - ab(a + b)\} = 0$.

Men kan aantonen, dat er positieve getallen a , b en c bestaan, die aan de driehoeksongelijkheden voldoen en waarvoor de tweede factor van het linkerlid nul wordt. Bekend is het door E m m e r i c h gegeven voorbeeld: $\alpha = 12^\circ$, $\beta = 132^\circ$, $\gamma = 36^\circ$ (fig. 5), waarbij $AD' = c = BE'$.

De niet-gelijkbenige driehoeken met twee gelijke buitenbissec-

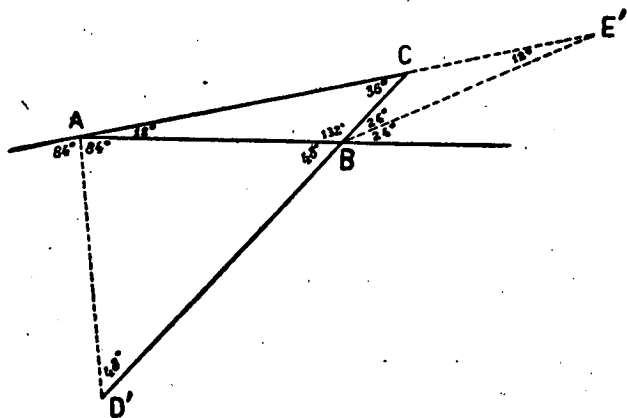


Fig. 5.

trices zijn het eerst gegeven door A l a u d a (Intermédiaire des Mathématiciens, 1894, pg. 70), die voor hen de betrekking $CI^2 = AI \cdot BI$ bewees, waarin I het middelpunt is van de ingeschreven cirkel. Een overzicht van de eigenschappen van deze pseudo-gelijkbenige driehoeken, alsmede van de betrokken literatuur, vindt men bij N e u b e r g (Bibliographie des triangles spéciaux, Bruxelles-Liège, 1924, pg. 11—13).

AVONDCURSUSSEN VANWEGE HET MATHEMATISCH CENTRUM.

Het Mathematisch Centrum te Amsterdam, dat zich de bevordering van de studie en de toepassing der wiskunde in de meest uitgebreide zin ten doel stelt, heeft in het afgelopen jaar een groot aantal cursussen doen houden. Voor het komende jaar is weer een uitgebreid programma in voorbereiding. Hoezeer strekking en niveau dezer voordrachten mogen verschillen, zij richten zich, op een enkele uitzondering na, tot een gehoor met een zekere rijpheid op wiskundig gebied.

Nu doet zich echter in ons land de omstandigheid voor, dat verscheidene personen met uitstekende wiskundige aanleg, hun neiging om de wiskunde tot studievak te kiezen niet hebben kunnen volgen, omdat hun de gelegenheid tot universitaire studie heeft ontbroken. Sommigen hunner, in beslag genomen door een drukke werkkring, benutten hun avonduren om zich voor te bereiden voor de acten M.O., anderen trachten door zelfstudie de universitaire examens af te leggen.

Een ideale oplossing van het hier aan de orde gestelde probleem, dat ook voor andere studievakken bestaat, zou kunnen worden gevonden in een herziening der universitaire tradities en met name in de instelling van avondcolleges.

Daar is gebleken, dat dit laatste op grote moeilijkheden stuit, wil het Mathematisch Centrum trachten, op dit gebied, althans met betrekking tot de wiskunde, iets te doen.

Met de komende herfst zal, bij voldoende deelname te Amsterdam, een avondcursus worden georganiseerd in bovenbedoelde geest. Mocht in andere delen van ons land eveneens voldoende deelname worden gevonden, dan wordt overwogen ook in andere centra een dergelijke cursus te organiseren. Het is, dit zij uitdrukkelijk vermeld, niet de bedoeling op te leiden voor de middelbare acten. De cursus, die een tweetal jaren in beslag zal nemen, richt zich naar de universitaire studie van de wiskunde. Echter zij vooropgesteld, dat aan de cursussen zelf geen examens zijn verbonden of rechten kunnen worden ontleend. Wel spreekt het vanzelf, dat de toehoorders, zo zij eventueel zouden trachten in de toekomst universitaire examens af te leggen, de facto een grote voorsprong zullen hebben, wanneer zij zich melden bij de universiteit hunner keuze.

Gegadigden kunnen zich opgeven aan het Mathematisch Centrum, Nieuwe Kerkstraat 124 Amsterdam, Tel. 56643, waar ook verdere inlichtingen gaarne worden verstrekt. In tegenstelling met de andere voordrachten van het Mathematisch Centrum, die kosteloos toegankelijk zijn, zal voor de hier bedoelde voordrachten een zeker cursusgeld moeten worden betaald.

CURSUSSEN NUMERIEKE EN GRAFISCHE METHODEN.

Dank zij de medewerking van de directie der N.V. Levensverzekering-Maatschappij „Utrecht”, die voor dit doel op ruime schaal rekenmachines in bruikleen beschikbaar stelt, zullen onder auspicen van het Mathematisch Centrum en onder leiding van Prof. Dr. H. Freudenthal, te beginnen met 1 October 1947, in Utrecht cursussen worden gegeven in „*Numerieke en grafische methoden*”.

Elk dezer cursussen bestaat uit één uur per week theorie (gegeven in een collegezaal der Rijksuniversiteit te Utrecht) en uit praktische oefeningen, waarbij van rekenmachines gebruik gemaakt moet worden (in een lokaal der „Utrecht”).

Naar aanleiding van de theoretisch behandelde stof zullen vraagstukken worden opgegeven, die door de deelnemers moeten worden opgelost — zo mogelijk zal hierbij door een assistent bijstand worden verleend. De ingeleverde oplossingen zullen door een assistent worden nagezien. Deelnemers, die aan de gestelde eisen hebben voldaan, zullen in het bezit van een getuigschrift worden gesteld. De duur van de cursussen blijft, gezien het ontbreken van ervaringen op dit gebied, voorshands nog onbepaald; vermoedelijk zal Cursus I meer dan één academisch jaar, Cursus II ongeveer één academisch jaar vergen. Mocht het aantal aanmeldingen de capaciteit der beschikbare rekenmachines te boven gaan, dan zal een keuze moeten worden getroffen. Hierbij zullen zij, die reeds uit hoofde van hun beroep praktisch wiskundig werk verrichten, de voorkeur genieten.

Aanmeldingen schriftelijk bij de leider van deze cursussen: Prof. Dr. H. Freudenthal, Fr. Schubertstraat 44, Utrecht.

Bedrijven, die nog rekenmachines in bruikleen beschikbaar kunnen stellen, wordt verzocht, zich eveneens met bovengenoemde in verbinding te stellen, om te voorkomen, dat wegens een tekort aan rekenmachines belangstellenden moeten worden afgewezen.

PROGRAMMA.

I. Cursus voor wis- en natuurkundigen. Behandeld zal worden: Het gebruik van rekenmachines. Het numerieke en grafische oplossen van lineaire en algebraïsche vergelijkingen. Het berekenen van eigenwaarden van symmetrische matrices. Interpolatie. Mechanische kwadratuur. Approximatie van functies, harmonische analyse. Foutentheorie, methode der kleinste kwadraten. Numerieke en grafische integratie van gewone differentiaalvergelijkingen. Elementen der nomografie. Theorie van de Differential Analyser en van de moderne automatisch geleide rekenmachines, alsmede het ontwerpen van rekenschema's voor concrete opgaven.

De deelnemers moeten over een kennis der hogere wiskunde beschikken, die beantwoordt aan de vereisten voor het cand.-ex. Wiskunde a-d of examens K V of Prop. ex. Delft. Indien deze vooropleiding niet uit een diploma of anderszins blijkt, zullen zij zich aan een klein tentamen moeten onderwerpen.

II. Cursus voor chemici, biologen, geografen, psychologen, enz. Behandeld zal worden: Het gebruik van rekenmachines met toepassingen hoofdzakelijk op de foutentheorie. Het gebruik van grafieken.

De deelnemers moeten over een kennis van de wiskunde beschikken, zoals vereist bij de eindexamens HBS of Gymn. B.

III. Voor belangstellenden, die slechts over MULO-vooropleiding beschikken, maar reeds praktisch als rekenaar werkzaam zijn geweest, zal bij voldoende belangstelling een cursus worden gegeven, waarvan het programma enige gelijkenis vertoont met dat van Cursus I. Over de nadere bijzonderheden zal met de deelnemers overleg worden gepleegd.

Belangstellenden voor een der cursussen, die op bepaalde dagen of uren verhinderd zijn of om andere redenen aan bepaalde dagen of uren de voorkeur geven, wordt verzocht, dit bij hun aanmelding kenbaar te maken. Tevens wordt verzocht, bij de aanmelding aan te geven, of de betrokkene zelf over een rekenmachine kan beschikken.

Mathematisch Centrum

Nieuwe Kerkstraat 124, Amsterdam.

WISKUNDIG DISPUUT „THOMAS J. STIELTJES”.

Verslag over de werkzaamheden in 1946/47 en Programma 1947/48.

In October 1946 werd te Rotterdam op initiatief van Dr. M. v. Vlaardingen, Drs. H. Pleijsier en P. S. Wertheimer opgericht het Wiskundig Dispuut „*Thomas J. Stieltjes*” met de bedoeling enkele onderwerpen uit de hogere wiskunde in bredere kring te kunnen behandelen. Dit initiatief vond veel weerklank bij de in Rotterdam en omgeving wonende mathematici. Op 19 November 1946 vond in een lokaal van de Chr. H.B.S. Henegouwerplein, Rotterdam, dat ons door Dr. M. Kruiswijk welwillend voor de duur van de cursus ter beschikking was gesteld, de eerste vergadering plaats, waarbij ongev. 25 belangstellenden aanwezig waren, die ons ook gedurende het gehele werkjaar trouw zijn gebleven.

Op deze avond werd op voorstel van de initiatiefnemers besloten

een begin te maken met de behandeling van de groepentheorie van den beginne af. De werkvergaderingen hadden plaats eens in de drie weken, en wel op Dinsdagavonden, en er werden op elke werkvergadering twee colloquia gehouden, één over zuivere groepentheorie, en één over haar toepassingen. De colloquia werden ingeleid door de leden zelf. In de loop van de cursus hebben gesproken: Dr. v. Geldrop, Drs. Gouweloos, Drs. Pleijsier, Dr. M. van Rees, Dr. M. v. Vlaardingen en P. S. Wertheimer.

De behandelde stof besloeg de inleiding in de theorie der eindige groepen, welke zeer uitvoerig is besproken. Het grondslagenonderzoek werd behandeld door Pleijsier en v. Geldrop, terwijl de voortzetting der theorie (ontbinding in ondergroepen, normaaldeeler, tot aan de hoofdstelling van Jordan-Hölder over de éénduidigheid der indexrij toe) door Rooth behandeld werd. Door Pleijsier werd, tegen het eind van de cursus een lezing gewijd aan de voorstelling der groepen door matrices. De lezingen van Van Vlaardingen, uitgestrekt over het grootste deel van het werkjaar, behandelden eerst enkele meetkundige toepassingen en voorbeelden, en daarna als hoofdstema de theorie der derde, vierde en hogere-machtsvergelijkingen, in het licht der arbeiden van Lagrange, Galois en Abel, culminerend in het onmogelijkheidsbewijs van Abel-Kronecker over de oplosbaarheid der hogere machtsvergelijkingen. Bij het naderen van de examentijd werd de behandeling der groepentheorie tijdelijk opgeschort, en inplaats daarvan werden enkele losse onderwerpen behandeld, en wel door Dr. v. Rees over de transcendentie van e , door Dr. Gouweloos over multigrade vergelijkingen, door Dr. v. Vlaardingen over de irrationaliteit van π .

Een avond werd gewijd aan een lezing met demonstraties van Dr. M. Kruiswijk over een meervoudige oscillograaf, welke zich in grote belangstelling der leden mocht verheugen.

Het werk van het Dispuut vond ook erkenning in universitaire kringen en wij mochten ons verheugen in de belangstelling van Prof. Dr. v. d. Woude, die bereid gevonden werd op 3 December j.l. ten overstaan van een groot gehoor van leden een lezing te houden over Parametervoorstellingen. Er bestond ook contact met het eveneens in 1946 in Amsterdam opgerichte Mathematisch Centrum, hetwelk o.a. ten behoeve van Amsterdamsche mathematici colloquia en lezingen organiseerde, welke eveneens onderwerpen uit de moderne algebra behandelden. De steun van het Centrum bij het organiseren van lezingen te houden door niet-leden is toegezegd.

De succesrijke afsluiting van het eerste werkjaar van het Dispuut, dat zich voortdurend in de belangstelling en medewerking van al

zijn leden mocht verheugen, heeft aan het inmiddels uitgebreide bestuur aanleiding gegeven om plannen te beramen en met de leden te bespreken omtrent de voortzetting van het werk van het Dispuut. Deze werden in de laatste huishoudelijke vergadering van het Dispuut „Thomas J. Stieltjes” op 1 Juli j.l. behandeld. Er bestond overeenstemming om het werk van het Dispuut in het nieuwe, omstreeks eerste helft September 1947 beginnende werkjaar met energie voort te zetten. Zoals in het afgelopen werkjaar zullen de werkvergaderingen eens in de drie weken, en wel op Dinsdagavonden worden gehouden, terwijl getracht zal worden academische sprekers uit te nodigen op extra-avonden — voor zover mogelijk eveneens op Dinsdagen — lezingen te houden, die onderwerpen behandelen, welke aansluiten op het werk van het Dispuut.

Over de in het nieuwe werkjaar te behandelen onderwerpen is besloten allereerst door te gaan met de behandeling en voortzetting van de groepentheorie, te beginnen met de stelling Jordan-Hölder, alsmede met de theorie van Galois. Daarnaast zullen behandeld worden kubische krommen, mogelijk ook onderwerpen uit de niet-euklidische meetkunde e.a. Met het Math. Centrum zal contact gezocht worden voor drie lezingen op extra avonden over topologie, waarvoor als spreker uitgenodigd zal worden Dr. J. de Groot. Het bestuur zal diligent blijven om andere academische sprekers voor het werk van het Dispuut te interesseren en voor het houden van lezingen uit te nodigen. Behalve de genoemde onderwerpen hebben zich de leden gaarne verenigd met het voorstel van Dr. v. Vlaardingen om een drietal lezingen te wijden aan de persoon en het werk van onze grote landgenoot Thomas Jan Stieltjes, wiens naam het Dispuut draagt.

De organisatie van de werkavonden zal dusdanig zijn, dat op elke werkavond één lezing resp. colloquium gehouden wordt over groepentheorie, resp. de theorie van Galois, terwijl na de pauze, in het tweede deel van de avond andere onderwerpen behandeld zullen worden.

Het bestuur zal tevens trachten contact te zoeken met in het buitenland werkende groepen, die een zelfde doelstelling hebben. Gedacht is hierbij aan de culturele samenwerking „Benelux”.

Méér nog dan in het afgelopen werkjaar ligt het in de bedoeling de lezingen voor alle in Rotterdam en omgeving wonende belangstellenden toegankelijk te doen zijn. Op de medewerking van alle leden bij het houden van inleidende lezingen wordt méér dan in het afgelopen werkjaar gerekend. Ten einde een werkschema te kunnen opstellen, worden de leden beleefd, maar dringend uitgenodigd zich

gedurende de vacantielijd met de voorzitter in verbinding te stellen, onder opgave van die delen der groepentheorie en andere onderwerpen, die zij zich voorstellen te behandelen. Het bestuur stelt zich voor op grond van deze berichten een werkschema op te stellen, dat bij de behandeling op de breedst mogelijke basis tevens een systematische arbeid in de te behandelen stof verzekert.

Omtrent de verdeling van de zeer minimale kosten waren de leden het eens, dat deze het best gedragen kunnen worden door per avond van de aanwezige leden een kleine bijdrage te vragen, terwijl ook de kosten voor sprekers — nietleden — op dezelfde wijze gedragen kunnen worden zonder dat de kosten hoog worden.

Met deze plannen hebben zich alle leden verenigd. Het deed het bestuur genoegen, dat men algemeen van mening is, dat het Dispuut niet alleen levensvatbaarheid bezit, maar ook een levendige wens van vele mathematici vervult.

Met een gezellig samenzijn werd het eerste werkjaar van het Wiskundig Dispuut „Thomas J. Stieltjes” op 1 Juli j.l. afgesloten.

Wij verwachten gaarne bericht van de leden omtrent door hen te houden lezingen.

Rotterdam Juli 1947.

Het Bestuur van het Wiskundig Dispuut
„Thomas J. Stieltjes”.

Voorzitter: Dr. M. v. Vlaardingen.
Secretaris: Drs. H. Pleijsier.
Penningmeester: P. S. Wertheimer.
Bestuurslid: Dr. W. Th. v. Geldrop.

WISKUNDIG DISPUUT „THOMAS J. STIELTJES”.

Het nieuwe werkjaar zal worden geopend met een reeks voordrachten door Prof. Dr. H. D. Kloosterman, Leiden, over kwadratische vormen en kwadratische getallen-lichamen.

Deze zullen worden gehouden op Dinsdagen en wel op 30 September, 14 October en 28 October a.s. in de Chr. H.B.S. Henegouwerplein 16 des avonds te 7 uur 45.

Ter inleiding zal door Dr. M. v. Rees en Dr. M. v. Vlaardingen een overzicht worden gegeven van enige begrippen en stellingen uit de elementaire getallentheorie. De bedoeling is dat men op de hoogte komt van de inhoud van werkjes als: P. Wijdenes Beginselen der Getallentheorie, of Dr. M. Scheffer Rekenkunde voor K.I.

Deze inleiding vindt plaats op Dinsdag 16 September a.s. eveneens te 7 uur 45 in de Chr. H.B.S. Henegouwerplein 16.

Voor verdere voordrachten hebben hun medewerking toegezegd o.a. Prof. Dr. J. Haantjes, Amsterdam, en Dr. J. de Groot, Amsterdam.

3 Sept. 1947.

De Secretaris
H. Pleysier, Nobelstraat 105b.

CAUSALITEITSBEGINSELEN EN MODERNE PHYSICA

door

Prof. Dr P. H. VAN LAER.

1. *Wijsgerig causaliteitsbeginsel.*

Door alle eeuwen heen hebben de mensen een begrip van „oorzaak” gehad. Dit begrip werd verkregen door verstandelijke beschouwing van wat een eenvoudige en oppervlakkige, innerlijke zowel als uiterlijke, ervaring leerde over de activiteit en passiviteit van het eigen ik en over de werking tussen de lichamen onderling, en door abstractie van alle niet ter zake doende bijzonderheden. Wijsgeren hebben den inhoud van dit begrip nader onderzocht en geprobeerd den inhoud in een definitie vast te leggen. Zolang niet empirisch-georiënteerde wijsgeren het begrip al te zeer aan de zintuigelijke ervaring koppelden, kwamen deze definities, wat het wezenlijke betreft, sinds Aristoteles vrijwel met elkaar overeen. Als zulk een definitie kan gelden: „Oorzaak is datgene wat door zijn reëlen invloed het worden en zijn van iets anders bepaalt”. In deze definitie zitten de wezenlijke elementen die het verstand ontdekt in wat de ervaring ons op het terrein van oorzaak en veroorzaakt biedt. Het wezenlijke van oorzaak en gevolg ligt dus *niet in een plaatselijk-samenzijn*, want dit kan hoogstens een *voorwaarde*, of-schoon misschien een noodzakelijke voorwaarde, zijn bij een inwerking van stoffelijke lichamen (en waarom het begrip oorzaak beperken tot een stoffelijk agens); *niet in een voorrang in tijd*, want bij het eigenlijk inwerken, bij het eigenlijk veroorzaken, dus op het ogenblik dat de oorzaak als oorzaak werkt, is er geen tijdsverschil tussen het optreden van oorzaak en gevolg maar juist gelijktijdigheid; ook *niet in een onverbrekkelijk en onomkeerbaar verband dat louter bestaat in een opeenvolging*; maar wel in een *noodzakelijk verband, dat zijn grond heeft in een reële afhankelijkheid*, in zoverre nl. het éne (het gevolg) in zijn ontstaan en zijn van het andere (de oorzaak) afhankelijk is. De oorzaak is datgene dat door zijn reëlen invloed het andere tot het bestaan brengt of in stand houdt, dus datgene wat door zijn reëlen invloed het worden of zijn van het andere bepaalt.

Naast de begrippen van oorzaak en gevolg kent de wijsbegeerte het *beginsel van oorzaak en gevolg* of het *causaliteitsbeginsel*. Hiermee wordt bedoeld de uitspraak van het verstand, dat voor het worden, zijn en zó-zijn van de dingen altijd een geëvenredigde oorzaak vereist is. In alle eeuwen zijn, met weinige uitzonderingen, de

mensen ervan overtuigd geweest dat voor de verklaring van de waargenomen verschijnselen oorzaken vereist zijn, al werd deze overtuiging niet altijd uitdrukkelijk uitgesproken. „Nihil turpius quam fieri sine causa quidquam dicere” (niets dwazer dan te beweren dat iets zonder oorzaak zou gebeuren), schrijft Cicero; en soortgelijke uitspraken vindt men bij vele anderen. Het was de taak van de wetenschap naar deze oorzaken te zoeken, en gelukkig werd degene genoemd die in staat was de oorzaken der dingen te kennen. („Felix qui potuit rerum cognoscere causas”, zegt Vergilius in *Georgica* 2,490.)

Kan men de overtuiging, dat het causaliteitsbeginsel universeel geldig is, algemeen noemen, over de gronden waarop deze overtuiging steunt en over de formulering van het beginsel waren de meningen wel zeer verdeeld. In de Aristotelisch-Thomistische filosofie, die de leer der oorzaken van Aristoteles aanneemt, geldt de mening dat wij bij het causaliteitsbeginsel te doen hebben met een z.g. analytisch oordeel waarvan de waarheid evident is uit de verstandelijke beschouwing der termen. De formulering van het beginsel wordt dan liefst zo gekozen dat zij geldt voor de vier soorten van oorzaken die Aristoteles onderscheidt (werk- en doelloorzaak, stof- en vormoorzaak). Een geschikte formulering is: „Voor het worden, zijn en zó-zijn der niet-noodzakelijke dingen is een geëvenredigde oorzaak vereist”. Volgens deze opvatting is het causaliteitsbeginsel dus een metaphysisch beginsel dat moet gelden voor alles wat is (buiten God) en dat nooit door geen enkele ervaring kan worden omvergeworpen.

Een totaal andere opvatting van causaliteit vindt men bij Hume (1711—1776) en de empiristen. Voor dezen is het causaliteitsbeginsel een louter ervaringsoordeel, een oordeel *a posteriori*, dat dus geen conclusie voor alle mogelijke gevallen en voor alle tijden toelaat. Uitzonderingen blijven mogelijk, ofschoon een door vele ervaringen gevestigde denkgewoonte ons dit vaak doet vergeten en de overtuiging in de waarheid van het causaliteitsbeginsel doet worden tot een vast geloof (belief). De formulering van Hume: „Whatever begins to exist must have a cause of existence” wijst op de fundering van het beginsel in de ervaring die ons vooral bij het ontstaan van veranderingen het begrip oorzaak opdringt. Deze formulering is echter zeker te eng, zelfs wanneer men ze wil beperken tot de werk-oorzaken, daar ook dingen, die in een bepaalden opgedrongen toestand zijn gebracht, een oorzaak nodig hebben om in dien toestand te blijven. Behalve het verstandelijk inzicht leert ons dit ook de ervaring. Verder is het standpunt van de empiristen ook te eng in

dien zin dat zij (van hun standpunt consequent) de oorzakelijkheid beperken tot stoffelijke oorzaken, daar deze alleen onder de ervaring vallen. Ook de psychische oorzakelijkheid moet dan tot de physische worden teruggebracht, wat dan voert tot een ontkenning van den vrijen wil. De mogelijkheid van andere dan physische oorzaken wordt door hen als een belachelijk verzinsel verworpen. Het begrip oorzaak maakt echter, zoals boven is uiteengezet, abstractie van den aard der oorzakelijkheid en is evenzeer van toepassing op geestelijke als op stoffelijke oorzaken. De enige, maar ook noodzakelijke, inhoud van het begrip oorzaak is: het uitoefenen van een reëlen invloed op het worden en zijn van iets anders. Daarom is een beperking tot stoffelijke oorzaken willekeurig en niet verantwoord.

Kant (1724—1804) brengt de overtuiging omtrent de algemene geldigheid van het causaliteitsbeginsel terug tot een aangeboren denkwijze, een noodzakelijkheid a priori. Deze is echter niet gebaseerd op verstandelijk inzicht in het noodzakelijk verband der termen, maar het is een niet-anders-kunnen bepaald door de aangeboren structuur van ons denkvermogen.

In de praktijk is er bij de beoefenaars van de natuurwetenschappen (al of niet wijsgerig geschoold, en welk stelsel zij in het laatste geval ook aanhangen) in de opvatting over causaliteit geen verschil. Zij zijn er altijd van overtuigd dat de verschijnselen, die zij waarnemen, bepaald zijn door oorzaken. Zij beschouwen het als hun taak naar die oorzaken te zoeken en ze blijven er naar zoeken, ook als zelfs een lange reeks van onderzoeken zou hebben gefaald. Hierbij steunt men dus blijkbaar op een intuïtief verstandelijk inzicht dat een verschijnsel zonder grond of oorzaak iets zou zijn dat in zich onbegrijpelijk en als zodanig onbestaanbaar is. Een empiristisch georiënteerd physicus zal er niet toe komen te besluiten dat hij eindelijk gestoten is op een uitzondering op den regel der causaliteit, die in zijn systeem, waarbij deze wet gefundeerd is in een op de ervaring steunende „denkgewoonte”, toch mogelijk geacht moet worden. Van den anderen kant zal een Kantiaan zijn onderzoek niet afbreken op grond van de overweging dat hij hier waarschijnlijk te doen heeft met een geval waarbij zijn verstand hem parten speelt, een geval waarop zijn gedwongen causaliteitsopvatting niet van toepassing is. Moet dit algemeen gedrag der physici (en van alle mensen) dan eigenlijk niet als een bewijs gelden voor de stelling dat de menselijke overtuiging, die in het wijsgerig causaliteitsbeginsel is neergelegd, een hechter en dieper fundament heeft dan de ervaring of de structuur van ons verstand, en dat zij berust op

een verstandelijk inzicht in de wereld der dingen, zoals de Aristotelisch-Thomistische wijsbegeerte dit leert? Het is maar een vraag waarop ik hier verder niet zal ingaan, maar waarop het antwoord m.i. duidelijk is. Voor het volgende lijkt het mij voldoende geweest te hebben op de algemene overtuiging aangaande het benodigd zijn van oorzaken voor het worden en zijn der dingen, een overtuiging waarop iedereen, ontwikkeld of onontwikkeld, bewust of onbewust, vertrouwt en waarbij de wijsgeren alleen verschillen in de wijze waarop ze het fundament van deze overtuiging verklaren.

Nu is het echter een bekend feit dat in de laatste decennia, z.g. op grond van gegevens der moderne physica, vaak beweerd is dat de oude causaliteitsopvattingen hebben afgedaan of minstens serieus herzien moeten worden. Het is een krasse uitspraak die tegenstand uitlokt en die, als zij waarheid bevat, van zeer ingrijpende betekenis is. Hiermee zou immers een beginsel komen te vallen dat men met recht als een metaphysisch beginsel meende te mogen beschouwen. Het zou het vertrouwen schokken in en het einde betekenen van iedere metaphysica, daar toch een van de fundamentele beginselen niet gehandhaafd zou kunnen worden. Deze conclusie betreffende den ondergang of de onmogelijkheid van iedere metaphysica is in het verleden dan ook herhaaldelijk getrokken en nog altijd leest men, vooral in z.g. populair-wetenschappelijke boeken, beschouwingen waarin de meest krasse beweringen aangaande de nieuwe physische causaliteitsopvattingen en haar consequenties voor de wijsbegeerte worden ten beste gegeven, vaak helaas zonder de vereiste kennis van zaken. Daarom wil ik hier eens een poging wagen om voor de lezers van dit tijdschrift deze kwestie uiteen te zetten, in de hoop dat het voor velen enige verheldering moge brengen. Het zal dan blijken dat de physici en schrijvers over natuurwetenschap onder den naam van causaliteitsbeginsel of wet der causaliteit vaak een uitspraak laten doorgaan die van het boven beschreven wijsgerig beginsel aanmerkelijk afwijkt en die wij daarom zullen aangeven met den naam „physisch causaliteitsbeginsel”.

De aanvallen der physici tegen de klassieke opvattingen over oorzakelijkheid komen van twee kanten. Op grond van sommige ervaringsgegevens meent men te kunnen besluiten: 1. er zijn in de natuur verschijnselen die geen oorzaak hebben; op grond van andere: 2. de wet der causaliteit geldt niet meer. In verband met het voorafgaande zou iemand kunnen opmerken dat beide beweringen op hetzelfde neerkomen en dit zou inderdaad het geval zijn als men met „wet der causaliteit” het bovengenoemde wijsgerig causaliteitsbeginsel bedoelde. Zoals echter zal blijken, is dit niet het

geval en dus heeft de verdeling in twee groepen wel degelijk zin.

Zoals de titel van dit artikel reeds doet vermoeden, is het mijn bedoeling vooral de tweede opwerping te behandelen. Daarom zal ik hier slechts enkele woorden wijden aan de eerste bewering, die uitspreekt dat er in de natuur verschijnselen zonder oorzaak zijn. Men beroept zich hierbij op de radioactieve processen en op de lichtuitstraling van de atomen. Atomen van een radioactieve stof, b.v. radium, vallen uiteen, zonder dat men hiervoor een oorzaak kan aangeven, sommige atomen nu, andere over honderd jaar, weer andere zullen tientallen eeuwen trotseren voordat hun beurt gekomen is. Iets dergelijks heeft men bij de lichtuitstraling van de atomen. Een atoom gaat van een hoger energieniveau plotseling over op een lager, waarbij licht (of andere straling) wordt uitgestraald, echter weer zonder dat men voor dezen overgang (sprong) een oorzaak kan aangeven. Welk mechanisme deze verschijnselen beheerst, weten we niet en misschien zullen we het nooit weten. Men zegt vaak dat de atomen „spontaan” uiteenvallen of spontaan van den enen in den anderen toestand overgaan. Men is bij het beschrijven van de genoemde atoomprocessen zelfs zó ver gegaan er een analogie in te zien van den vrijen wil in den mens, men heeft durven spreken van een „vrije keuze” in de natuur, niet vermoedend dat men door dergelijke beweringen een schromelijk tekort aan wijsgerig inzicht blootlegde. Van een vrijen wil of vrije keuze immers kan alleen sprake zijn bij een verstandelijk wezen dat in staat is een beperkt goed in het opzicht van zijn beperktheid te kennen. Een dergelijke verklaring kan dus nooit op niet-verstandelijke wezens worden toegepast en het woord „vrije wil” mag derhalve in een boek over de natuurwetenschappen niet voorkomen, tenzij om te zeggen dat het er niet in thuis hoort.

Ofschoon de uitdrukkingen „spontane ontleding”, „spontane sprong” en derg. misleidend zijn, zou men er nog genoeg mee kunnen hebben, als er maar niet de bedoeling achter steekt te suggereren dat deze verschijnselen niet door oorzaken bepaald zijn. Dan gaat men (afgezien van wijsgerige bezwaren) verder dan de ervaringsgegevens toelaten en begaat men dus de logische fout „latius hos”. Al kunnen we de werkelijke oorzaken ook niet aangeven, dan mogen we daaruit nog niet besluiten dat er geen oorzaak is. Dat men trouwens ook in natuurwetenschappelijke kringen er van overtuigd is dat ook deze z.g. „spontane” verschijnselen een oorzaak vereisen, blijkt weer duidelijk uit de hardnekkige pogingen waarmee men naar deze oorzaken zoekt en uit de vele theorieën die over de vermoedelijke oorzaken worden opgesteld.

Voor de verklaring van verschijnselen hebben we in het algemeen de keuze tussen natuurnoodzakelijk-werkende en niet-natuurnoodzakelijk-werkende oorzaken. Deze staan contradictorisch tegenover elkaar en er is dus geen middenterm. Onder natuurnoodzakelijk-werkende oorzaken verstaan we die oorzaken die krachtens haar natuur 1. noodzakelijk werken als de vereiste voorwaarden vervuld zijn (haar werking dus niet kunnen uitstellen) en 2. noodzakelijk werken zoals ze werken (dus niet anders kunnen werken). Dit is de wijze van werken die aan de stof eigen is en o.i. ook de enig mogelijke in de stof. Zowel het tijdstip van de werking bepalen als de wijze van werken en de intensiteit bepalen komt toe aan een niet-noodzakelijk-werkende of vrije oorzaak, en een dergelijke vrije keuze en bepaling veronderstelt met noodzaak een verstandelijke werkoorzaak, die tot op zekere hoogte souverain over de stof kan beschikken.

Is er misschien een vorm van niet-noodzakelijk-werkende oorzaken, die geen verstandelijke kennis vereist, een oorzaak die misschien wel in haar uitwerking, in haar intensiteit, bepaald is, maar niet door iets anders tot werken hoeft gebracht te worden, of niet noodzakelijk hoeft te werken als de voorwaarden voor werking vervuld zijn? Het zouden dus stoffelijke oorzaken zijn die door niets tot haar werking worden bepaald, niet door haar eigen wezen en niet door iets anders, door niets gedetermineerd. Als dergelijke oorzaken zouden bestaan, dan zou inderdaad de mogelijkheid van z.g. „spontane” processen gegeven zijn. Maar vooreerst is, zoals verstandelijk inzicht ons leert, het aannemen van een dergelijke wijze van werken in de stof absurd. Vervolgens zou uit een dergelijke door niets bepaalde wijze van werken nooit enige regelmaat kunnen volgen, zelfs niet bij grote getallen van deelnemers. Ik moet er kortheidshalve van afzien hier deze zienswijze verder te ontwikkelen en te verdedigen. Den belangstellenden lezer verwijs ik naar een boek van Prof. van Melsen, getiteld: „Natuurwetenschap en wijsbegeerte” (Uitg. Het Spectrum, Utrecht, b. 148 e.v.). In dit artikel wil ik hoofdzakelijk de tweede moeilijkheid bespreken.

2. *Physisch causaliteitsbeginsel.*

De aangehaalde tweede uitspraak, die op de resultaten van de moderne physica schijnt te steunen, zegt niets meer of minder dan dat de wet der causaliteit in de wereld van het atoom niet meer geldt, en dat de klassieke causaliteitsopvattingen herzien moeten worden. Om deze bewering te adstrueren wijst men dan steeds op een ontdekte eigenaardigheid in de stoffelijke natuur, die haar uit-

drukking gevonden heeft in de z.g. „onzekerheidsrelatie van Heisenberg”. Voor de lezers van dit tijdschrift hoef ik de betekenis hiervan wel niet nader toe te lichten. Het komt hier op neer dat het principeel onmogelijk is (met fysische methodes en hulpmiddelen, wel te verstaan; dit wordt vaak over het hoofd gezien) tegelijkertijd alle grootheden te kennen die den een of anderen toestand bepalen. Zo is het b.v. principeel onmogelijk tegelijkertijd plaats en impuls van een deeltje precies te kennen. Hoe nauwkeuriger de ene grootheid bekend is, des te onnauwkeuriger de andere complementaire grootheid. Door deze fundamentele onzekerheid in de kennis der bepalende grootheden is het dus principeel onmogelijk een bepaalden begintoestand nauwkeurig te kennen. Onmogelijk is het dus ook het toekomstig verloop van het beschouwde proces te voorspellen. Op grond van dit inzicht kwam men tot de uitspraak dat de causaliteitswet in de wereld van het atoom niet meer geldt of dat het causaliteitsbeginsel zinloos is geworden. Voor iemand, die alleen bekend is met de boven gegeven formulering van het wijsgerig causaliteitsbeginsel, mag deze uitspraak vreemd klinken, want de juist genoemde gegevens van de moderne physica kunnen toch geen afbreuk doen aan dit beginsel, dat alleen zegt dat ieder verschijnsel in zijn worden en zijn door oorzaken wordt bepaald. Over de mogelijkheid van voorspellen bevat dit beginsel niets. Voor een goed begrip van de aangehaalde uitspraken der physici is het nodig te weten dat de causaliteitswet bij de physici een heel andere formulering had gekregen, die wel iets met het wijsgerig causaliteitsbeginsel te maken had, maar er toch genoeg van verschilde om aanleiding te worden tot een diepgaand misverstand. Ik wil afzien van beschouwingen van physici, die oorzaak vereenzelvigen met energie en de wet der causaliteit identiek verklaren met de wet van omzetting en behoud van energie, zoals Ostwald deed. In dergelijke en andere opvattingen blijft van de gebruikelijke betekenis van het woord oorzaak al heel weinig over. Ik wil mij hier beperken tot die beschouwingen over causaliteit die in het begin dezer eeuw bij de physici vrij algemeen waren en die aanleiding hebben gegeven tot de bekende moeilijkheden.

Heisenberg zelf, wiens naam in dit verband altijd genoemd wordt, geeft als formulering van de wet der causaliteit: „Wenn wir die Gegenwart kennen, können wir die Zukunft berechnen” (Z. Phys. 43, 197, 1927) of iets uitvoeriger elders (Erkenntnis 2, 172, 1931): „Wenn der gegenwärtige Zustand eines isolierten Systems in allen Bestimmungsstücken genau bekannt ist, so lässt sich der zukünftige Zustand des Systems daraus berechnen”. Ongeveer gelijklopende

formuleringen vindt men bij vele anderen. Ter onderscheiding van het boven beschouwde metaphysisch of *wijsgerig causaliteitsbeginsel*, zullen we de causale wet in de formulering der physici het *physisch causaliteitsbeginsel* (of -wet) noemen. We zullen de betekenis van dit beginsel en zijn verband met het wijsgerige eens nader onderzoeken.

Laten we beginnen met een nauwkeuriger beschouwing van de formulering van het physisch causaliteitsbeginsel: „Als wij een begintoestand kennen, kunnen wij de toekomst berekenen (of voorspellen)”. Deze formulering heeft de gedaante van een voorwaardelijk oordeel. Als aan de voorwaarde in het eerste lid voldaan is, dan kan het tweede lid gerealiseerd worden. Nu blijkt al dadelijk dat voor de verwezenlijking van het tweede lid aan meer voorwaarden voldaan moet zijn dan in het eerste lid worden genoemd. Nemen we als voorbeeld het billiardspel en nemen we aan dat we van de ballen op een gegeven ogenblik nauwkeurig plaats en snelheid kennen (we kennen dus den begintoestand). We kunnen dan het verdere verloop voorspellen, mits we daarenboven nauwkeurig den aard der oorzaken kennen die mede dit verloop beïnvloeden. In dit geval moeten we dus weten hoe de ballen reageren bij onderlinge botsing, wat er gebeurt bij botsing tegen de banden, hoe groot de wrijving is met het laken en met de lucht, etc. Dit zijn allemaal factoren die het toekomstig verloop mede bepalen. Voor een voorspelling van dit toekomstig verloop van een systeem is dus vooreerst nodig dat men den toestand op het ogenblik van de voorspelling kent, en niet alleen statisch (plaats en ligging) zoals een momentopname hem ons zou doen kennen, maar ook in zijn dynamisch vermogen (snelheid, impuls, energie, etc.) in zoverre deze toestand de verdere ontwikkeling in zich draagt. Daarenboven moet men weten welke oorzaken bij het verdere verloop zullen optreden en ook of de voorwaarden voor een normale werking dier oorzaken aanwezig zullen zijn. Zo men wil, kan men dit alles nog wel rekenen tot den begintoestand in uitgebreiden zin (alle Bestimmungsstücke), daar immers de nodige gegevens van te voren zouden kunnen verkregen worden en dus tot de kennis van den „begintoestand” gerekend kunnen worden. Maar hoe uitgebreid men de kennis van den begintoestand ook opvat, in ieder geval (en dit is zeker niet in de formulering vervat) moet men te doen hebben met een gedetermineerd verloop, dus met oorzaken die natuurnoodzakelijk werken in de boven omschreven betekenis, dus oorzaken die noodzakelijk werken als de voorwaarden voor werking aanwezig zijn (haar werking dus niet kunnen uitstellen) en vervolgens noodzakelijk

werken op een wijze en met die intensiteit welke door haar wezen zijn bepaald (dus niet anders kunnen werken). Zou men te doen hebben met vrije oorzaken, die haar werking wat tijdstip, wijze en intensiteit betreft vrij kunnen regelen, dan is iedere voorspelling uitgesloten, zelfs al zou een begintoestand nauwkeurig bekend zijn. Een volledige formulering van het fysisch causaliteitsbeginsel zou dus moeten luiden: Als men 1. van een gedetermineerd systeem 2. een begintoestand nauwkeurig kent, kan men het toekomstig verloop berekenen of voorspellen. Het kennen van den begintoestand moet dan bovendien in de zo juist aangegeven uitgebreide betekenis worden verstaan.

Het zal duidelijk zijn dat deze fysische causaliteitswet het vroeger genoemde wijsgerig causaliteitsbeginsel veronderstelt. Immers als veranderingen of verschijnselen „spontaan” zouden kunnen optreden, zonder door het wezen der dingen of door voorafgaande verschijnselen bepaald te zijn, dus veranderingen en verschijnselen zonder oorzaak, dan zou het toekomstig verloop zeker niet uit een tegenwoordigen toestand kunnen worden voorspeld. Ook is het uit het voorafgaande evident dat de formulering der physici alleen geldt voor een bepaald soort oorzaken, nl. de natuurnoodzakelijk werkende, terwijl het metaphysisch causaliteitsbeginsel ruimer is en ook geldt voor niet-noodzakelijk werkende of vrije oorzaken. Deze beperking tot de eerste soort van oorzaken is voor een physicus, die zich alleen bezighoudt met de werking van stoffelijke lichamen, vanzelfsprekend, en kan dus niet als een bezwaar tegen de fysische formulering worden aangevoerd.

Het kan niet ontkend worden dat de fysische formulering van de causaliteitswet een aspect naar voren brengt dat voor den physicus zijn nut heeft. In de (niet uitgesproken) veronderstelling nl. dat ieder verschijnsel zijn oorzaak heeft en dat hij te doen heeft met oorzaken die natuurnoodzakelijk werken, heeft hij bij zijn speuren naar de oorzaken der verschijnselen in de voorspelbaarheid een mogelijkheid om na te gaan of hij de juiste oorzaken op het spoor is. Zou een voorspelling, gebaseerd op veronderstelde oorzaken, niet uitkomen, dan weet hij zeker dat zijn veronderstelling geheel of gedeeltelijk onjuist is, en dat er in plaats van of naast de veronderstelde oorzaken andere in het spel zijn.

Na deze korte uiteenzetting over het karakter en nut van de fysische causaliteitswet wil ik nu spreken over de moeilijkheden waartoe dit beginsel aanleiding heeft gegeven en over de veel besproken consequenties hiervan.

Volgens het voorgaande veronderstelt voorspelbaarheid: 1. een

gedetermineerd systeem, waarin dus alleen natuurnoodzakelijk werkende oorzaken optreden (determinisme), 2. de nauwkeurige kennis van een begintoestand in de aangegeven zeer uitgebreide betekenis. Deze twee voorwaarden zijn van elkaar onafhankelijk. Ieder van beide kan aanwezig zijn zonder de andere, maar beide (determinisme en gekende begintoestand) zijn nodig om voorspelbaarheid mogelijk te maken. Het is dus evident dat voorspelbaarheid en determinisme niet vereenzelvigd mogen worden, wat helaas zo vaak gebeurt; en uit de onmogelijkheid van voorspellen de conclusie trekken dat het betrokken systeem niet gedetermineerd is, zou een ernstige fout zijn tegen de logica. De onvoorspelbaarheid kan immers haar grond hebben uitsluitend in de gebrekkige wijze waarop het systeem bekend is. Bij die processen nu, waarover de z.g. onzekerheidsrelatie van Heisenberg een uitspraak doet, is het principieel onmogelijk met fysische methodes den toestand van een bepaald systeem nauwkeurig te onderzoeken. Iedere ingreep, die de meting van een of andere grootheid zou vereisen, stoort het systeem en wel met een onbekend bedrag, zodat het onmogelijk is den oorspronkelijken toestand uit deze meting precies te reconstrueren. Men kan aantonen dat deze storing door de meting inherent is aan welke meetmethode ook, zodat men niet mag hopen nog eens een methode te ontdekken die niet aan dit euvel lijdt. De moeilijkheid is principieel, daar ze haar grond heeft in de structuur van de stof. Principieel is het onmogelijk de nauwkeurige gegevens aangaande een bepaalden begintoestand van een systeem te verkrijgen, die dit systeem exact zouden vastleggen en voorspelling mogelijk zouden maken. Het fysisch causaliteitsbeginsel „als wij een begintoestand kennen, kunnen wij de toekomst voorspellen” heeft dus in de wereld van het atoom geen mogelijkheid van toepassing meer, daar aan de in het eerste lid genoemde voorwaarde niet voldaan kan worden. Men kan dus zeggen met Born: „the law of causation is therefore empty” (Atomic physics, 1935, b. 90), maar niet met Heisenberg: „... so wird durch die Quantenmechanik die Ungültigkeit des Kausalgesetzes definitiv festgestellt” (Z. Phys. 43, 197, 1927). Het hier bedoelde fysische causaliteitsbeginsel blijft in zijn boven aangegeven formulering zeker geldig; als aan de voorwaarden voldaan is, dan is voorspelling mogelijk. Alleen vindt het voor deze gevallen geen toepassing meer, het is leeg van inhoud geworden, voor een physicus onbruikbaar. Zou het mogelijk zijn met andere dan fysische methodes een systeem in zijn samenstellende elementen te kennen, dan zou voorspelling weer mogelijk zijn, mits natuurlijk weer aan andere genoemde

voorwaarden voldaan is, nl. mits het systeem gedetermineerd is.

Als we het in dit artikel behandelde kort samenvatten, dan komen we tot het volgende resultaat:

1. Het wijsgerig of metaphysisch causaliteitsbeginsel drukt uit dat voor het worden en zijn van de niet-noodzakelijke dingen een oorzaak is vereist. Dit beginsel berust niet op waarneming, niet op een denknoodzakelijkheid, maar op inzicht. Het kan nooit door welke ervaring ook weersproken worden.

2. Het fysisch causaliteitsbeginsel in zijn formulering „Als wij een begintoestand kennen, kunnen wij de toekomst berekenen” veronderstelt het wijsgerig causaliteitsbeginsel en legt op grond van een nauwkeurige kennis der oorzaken, die in het spel zijn, een verband tussen heden en toekomst. Het heeft voor den physicus een bepaalde bruikbaarheid.

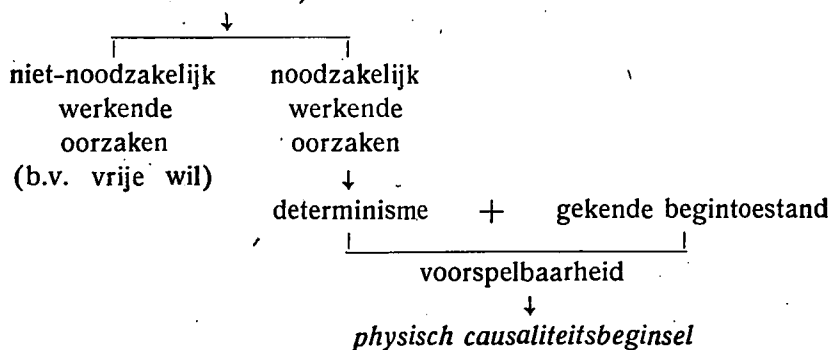
3. De voorspelbaarheid veronderstelt, behalve de nauwkeurige kennis van een begintoestand in uitgebreiden zin, ook nog natuur-noodzakelijk-werkende oorzaken (determinisme).

4. Als het onmogelijk is een begintoestand nauwkeurig te kennen, dan vervalt de mogelijkheid tot voorspellen en kan het fysisch causaliteitsbeginsel dus niet toegepast worden. Hieruit kan echter nooit geconcludeerd worden dat de natuur niet gedetermineerd zou zijn of dat niet ieder verschijnsel volkomen door oorzaken zou zijn bepaald. Deze vaak getrokken conclusies zijn logisch uit deze premissen niet gerechtvaardigd.

5. Door de genoemde gegevens der moderne physica wordt het wijsgerig causaliteitsbeginsel niet in het minst aangetast, ook als de „fysische wet der causaliteit” leeg en onbruikbaar zou zijn. Om het verschil tussen het wijsgerig en het fysisch causaliteitsbeginsel duidelijk te maken kan het volgende schema dienen:

Wijsgerig causaliteitsbeginsel

(Ieder verschijnsel wordt bepaald door oorzaken)



Opm. 1. Dat de physici de termen oorzaak, oorzakelijkheidsbeginsel, wet der oorzakelijkheid en derg. vaak in andere betekenissen hebben gebruikt dan de wijsgeren en ook dan de gewone gebruikers der taal, heeft aanleiding gegeven tot veel misverstand. Al kan men den physici het recht niet ontzeggen een eigen, afwijkende, betekenis te geven aan bestaande woorden — mits deze betekenis van te voren nauwkeurig wordt vastgelegd—het blijft zeer gevaarlijk. Vaak wordt in het verdere betoog de speciale betekenis vergeten en worden de woorden dan weer gebruikt in de algemeen gangbare betekenis, of worden ze door de hoorders of lezers in deze betekenis opgevat met noodlottige gevolgen van misverstand.

2. Of de natuur gedetermineerd is of niet, is een vraag die in het bovenstaande wel ter sprake is gekomen, maar niet definitief beantwoord. De meesten, wijsgeren en physici, zijn het er over eens dat de stof niet anders dan gedetermineerd kan zijn, dat ieder verschijnsel noodzakelijk verloopt zoals het verloopt, dat een vrije keuze of iets als een vrije wil in de stof absurd is. Dat dit ook de mening is van den schijver, zal uit het voorgaande zonder meer duidelijk zijn. Een nadere argumentatie van deze zienswijze en een behandeling van de moeilijkheden zou echter een uitvoerige uiteenzetting eisen. In dit artikel hebben we ons alleen ten doel gesteld te wijzen op het verschil tussen het wijsgerig en het fysisch causaliteitsbeginsel en te onderzoeken of en in hoeverre de gegevens der moderne physica consequenties hebben voor de al of niet geldigheid van deze beginselen. Wij menen duidelijk te hebben gemaakt dat deze ervaringsgegevens, die de toepassing van het fysisch causaliteitsbeginsel onmogelijk maken, niet in het minst afbreuk doen aan de geldigheid van het wijsgerig causaliteitsbeginsel en als zódanig evenmin kunnen aangehaald worden als een bewijs voor de onmogelijkheid van een metaphysica van blijvende waarde.

Leiden, Juni 1947.

TOESPRAAK

GERICHT TOT PROF. DR. G. MANNOURY,
TER GELEGENHEID VAN ZIJN TACHTIGSTE
VERJAARDAG OP 17 MEI 1947, DOOR PROF. DR.
D. VAN DANTZIG.

Waarde Mannoury, dierbare vriend,

Het is een groot voorrecht voor mij, dat ik het zijn mag, die U namens het te Uwer ere opgerichte Huldigingscomité zal toespreken. Laat mij daarom beginnen, uit aller naam U, benevens Uw echtgenote en zuster, Uw kinderen en kleinkinderen van harte geluk te wensen met Uw tachtigste verjaardag en de innige wens te uiten, dat Gij nog lange tijd voor hen en voor ons behouden moogt blijven, en zij voor U, en dat Gij tot in lengte van dagen in het bezit van Uwe gezondheid en Uw geesteskracht zult mogen blijven teneinde het geluk te kunnen genieten, Uw leven en werken met waardering en succes bekroond te zien en voort te kunnen gaan met de arbeid die U lief is, Uw omgeving, de wetenschap en de mensheid tot zegen.

Het is, vrees ik, met enigszins gemengde gevoelens, dat Gij, die wars zijt van alle persoonlijk eerbetoon, deze huldiging over U laat gaan, en het verheugt ons, dat Gij na aanvankelijke aarzeling tenslotte toch Uw toestemming daartoe gegeven hebt, in de overtuiging dat Gij ditmaal door het lijdzaam aanvaarden van lofspreuken, die, hoe welgemeend ook, niet stroken met Uw afkeer van persoonsverering, een zaak van wijder strekking kondt dienen. Sta mij toe dit nader toe te lichten.

Toen, enkele maanden geleden, de Amsterdamse Universiteit het gelukkige besluit nam, U tot doctor honoris causa te benoemen, werd voor velen duidelijk wat aan enkele ingewijden reeds lang bekend was, namelijk dat Gij over een voor Uw leeftijd ongewone werkkracht en helderheid van geest beschikt. Immers wel zelden zal het voorgekomen zijn, dat het emeritaat van een geleerde het begin is, niet van een „otium cum dignitate”, maar van een nieuwe periode van wetenschappelijke werkzaamheid, die naar omvang en inhoud alle vroegere verre overtreft. Na Uw zeventigste verjaardag hebt Gij behalve een tiental artikelen en een brochure niet minder dan vijf boeken geschreven. Vooreerst voltooidet Gij in 1939 Uw Signifische Varia onder de titel „Nu en Morgen”, waarvan nog slechts enkele fragmenten, helaas geheel uit hun verband gerukt, verschenen zijn. Ik meen, dat dit werkje, waarvan de sprankelende humor die van Mathesis en Mystiek (1925) evenaart, als een

tegenhanger gezien moet worden tot Huizinga's „In de schaduwen van morgen”, waaraan Gij onder de benaming „In de schaduwen van gisteren” indertijd een bespreking gewijd hebt.

In dit boek hebt Gij een voorbije levensperiode afgesloten en een nieuwe geopend. Het terugblikkend karakter komt wel het sterkste uit in Varium 5, waarin Gij met een zekere weemoed de vervlogen illusies van de Signifische Kring herdenkt. Ik zou dit wel in zijn geheel willen voorlezen, maar kan niet nalaten, althans één passage te citeren.

Grootse plannen, zij zijn alle tijden door gesmeed, wereld-hervormende idealen, zij zijn alle tijden door gekoesterd, en de plannenmakers en idealisten zijn verstorven en verstoven . . . rust zacht, mijn dichtertlike vrienden, Jacob Israël, wreedge-schonden dromer, en Free van Eeden, rusteloze zoekter naar het wezenlike dat ongrijpbaar en het ware dat onbegrijpelijk blijft, en de heugenis van hen is kort. „Vanitas vanitatum.”

Plannen zijn woorden, en woorden zijn ijdel, zolang zij niet in denkdaden zijn omgezet, in denkdaden, die krachtig genoeg zijn om ogen te doen stralen en armen ten doen strekken. Krachtig genoeg om een in verbitterde zelfstrijd hijgende en worstelende mensheid haar zelf gesmede ketens te doen verbreken en juichend te doen voortschrijden op een nieuwe weg. En zülke woorden hebben wij niet gesproken, en zülke daden hebben wij niet volvoerd. Geenszins. Geenszins.

En toch is geen woord zo ijdel en vergankelijk, of het hééft betekenis. Betekenis niet slechts voor wie het sprak of voor wie het vernam, maar betekenis ook voor wie het nooit zullen horen en er niettemin door zullen zijn bewogen in hun gedachteleven.

En trouwens, wie durft zeggen, dat hij een woord gesproken heeft, ook al is het in zijn geest opgekomen uit de duisternis van zijn onderbewustzijn? Niet de spreker spreekt het woord, maar zij die het hem hebben toegefluisterd, die het hem hebben overgeleverd van geslacht op geslacht, en die er hun ziel en hun gedachte in hebben gelegd.

Een woord is oorzaak en symptoom beide en heeft als beide zijn betekenis. Was de signifische vriendenkring van zoveel jaar her zulk een symptoom? En had hij als teken zijns tijds wellicht een betekenis die hem als levenwekkend agens heeft ontbroken? Wel vreemde vraag voor wie zelf aan die kring heeft deelgenomen, want wie vermag zich zelf te zien als louter gevolg en maaksel van zijn tijd? Maar kom, het is te

proberen: "It can be done, it's lots of fun, you'll say so when you've once begun", heb ik eens op een doosje gelezen, waar een andere moeilijke puzzle in zat. Die ik trouwens óók niet heb kunnen oplossen.

In „Nu en Morgen” hebt Gij de periode der signfica-als-taalwetenschap afgesloten om over te gaan tot de wijdere doelstelling der signfica, door middel van massapsychologie en massapsychiatrie te komen tot hetgeen Gij noemt „massa-zelfkennis” en „massa-educatie”. Deze gedachten beheersen al Uw verdere werk.

Inmiddels waart Gij reeds begonnen met de voorbereiding van Uw hoofdwerk, het groots geconcipeerde Handboek der Significa, waarop ik aanstonds nog terugkom. Het eerste deel daarvan werd in 1943, het tweede in 1945 voltooid.

Was het door gebrek aan vooruitzichten, Uw hoofdwerk gedrukt te zien, dan wel wildet Gij, vreemde wellicht niet meer in de gelegenheid te zijn, Uw handboek te voltooien, althans de hoofdgedachten van het laatste deel samenvatten, na de bevrijding schreeft Gij in stede van het derde deel eerst een brochure, getiteld „Massa-educatieve bestrijding van massa-agressieve groepstendenties”, waarin een programma geschetst wordt voor een systematische studie der massapsychiatrie. Een studiegenootschap met dit doel is verleden jaar op Uw initiatief opgericht. Vervolgens schreeft Gij een boekje, getiteld „Relativisme en Dialektiek. Schema ener filosofisch-sociologische grondslagenleer” dat beschouwd moet worden als een uiterst beknopte samenvatting van Uw handboek, en, in tegenstelling tot dit laatste, dat een zuiver wetenschappelijk karakter draagt, als een volmaakt persoonlijke geloofsbelijdenis.

Na de voltooiing van „Relativisme en Dialektiek” hebt Gij een beknopte en populaire Inleiding in de Significa geschreven; die in de Servire-reeks zal verschijnen.

Tenslotte mag ik hier wel mededelen, dat Gij tot onze grote vreugde het werk aan Uw handboek hervat hebt en enige weken gelden met het schrijven van het derde deel zijt begonnen.

Van al deze werken heeft behalve de genoemde brochure nog slechts „Relativisme en Dialektiek” het licht gezien, en de naoorlogs-omstandigheden: gebrek aan arbeidskrachten, papier en persen, maakten het onwaarschijnlijk, dat een uitgever het risico op zich zou nemen, dit wijsgerige werk, waarvan uiteraard slechts een beperkte afzet verwacht mag worden, te doen verschijnen.

Wij hebben daarom gemeend, dat het een erezaak is voor de Nederlandse uitgeverstand en voor de Nederlandse geleerden, zorg te dragen, dat Gij Uw wetenschappelijk hoofdwerk zelf nog in druk

zoudt kunnen zien verschijnen. Uw toen op handen zijnde tachtigste verjaardag scheen daarvoor een mogelijkheid te bieden, daar wij vertrouwden, dat vele van Uw oud-collega's, oud-leerlingen en andere vrienden en bewonderaars bereid zouden zijn, U als verjaardagsgeschenk hun medewerking aan het tot stand komen van deze uitgave aan te bieden, een vertrouwen, dat ten volle gerechtsvaardigd bleek. Het heeft ons in hoge mate verheugd, dat Gij de U eigen schroom hebt kunnen overwinnen, Uw werk aan Uw persoon te koppelen, en ons hebt toegestaan, ons voornemen te verwezenlijken.

Tot dit doel werd door enige collega's een Comité van Initiatief opgericht, dat na langdurige besprekingen moest constateren, dat uitgave van Uw werk in de naaste toekomst alleen mogelijk zou zijn, indien tot dit doel een garantiefonds werd gevormd. Wij hebben daarom gemeend het Comité van Initiatief te moeten uitbreiden tot een Huldigingscomité en hebben een vijftigtal vooraanstaande personen op verschillende gebieden bereid gevonden, daarin een Comité van Aanbeveling te vormen. Namens het Comité van Initiatief betuig ik hen allen van deze plaats onze warme dank, want eerst hun bereidwillige medewerking heeft het slagen van ons plan mogelijk gemaakt. Ik beschouw het als een der hoopgevendste symptomen voor de toekomst, dat zo vele personen van de meest uiteenlopende wereldbeschouwingen en politieke inzichten, waaronder slechts zeer weinigen voorkomen, die Uw wijsgerige of politieke opvattingen in hoge mate delen, zich bereid verklaard hebben, hun medewerking te verlenen. Eensdeels immers is dit een bewijs van de sympathie die men voor U koestert, en het vertrouwen in Uw menselijkheid, oprechtheid en integriteit, dat Uw ongebroken persoonlijkheid inboezemt, maar anderdeels is hiermede ten duidelijkste gebleken, dat ook onder hen, die directe tegenstanders zijn of menen te zijn van Uw filosofische of maatschappelijke inzichten het besef levend is geworden van de diepe geestelijke achtergrond en het eminente belang van Uw werk.

Vervolgens hebben wij ons in een circulaire tot Uw oud-collega's, en, voorzover wij hen bereiken konden, Uw oud-leerlingen en verdere vrienden en bewonderaars gewend, benevens tot de leden van een aantal verenigingen, bij wie wellicht belangstelling voor Uw werk kon worden verwacht. Zij werden in de gelegenheid gesteld, een bijdrage voor het garantiefonds te geven, en hen, die daartoe een bepaald bedrag ter beschikking stelden werd de toezegging gedaan, dat zij na het verschijnen een exemplaar van deel 1 en deel 2 van Uw handboek zouden ontvangen.

Ook nu werd ons vertrouwen niet beschaamd, en ik wil dan ook van deze plaats allen die een bijdrage, groot of klein, gegeven hebben, de warme dank van ons Comité overbrengen. In het bijzonder geldt dit voor enkelen, die door een waarlijk genereuze bijdrage onze taak aanzienlijk hebben verlicht. Tevens verzoek ik Prof. Clay, onze welgemeende dank over te brengen aan het bestuur der Amsterdamse Universiteitsvereniging, die door hare toezegging van een zeer aanzienlijke bijdrage het uiteindelijk succes verzekerd heeft. Door de toezegging van het Ministerie van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen, dat aan het Comité van Initiatief het voor Uw boek benodigde papier zal worden toegewezen, is ook dit probleem opgelost. Tenslotte wil ik niet verzuimen, de dank van het Comité over te brengen aan den Heer F. G. Kroonder voor zijn bereidheid, het overblijvende risico van de uitgave te dragen, alsmede voor het doen drukken en verzenden der circulaires, aan de Heren J. J. de Jongh en J. Hemelrijk voor hun hulp bij verschillende voorbereidende werkzaamheden, aan Prof. H. A. Brouwer voor de ons in zijn laboratorium verleende gastvrijheid, en aan de dames Mej. Jongejan, Mevr. Bruins en Mevr. Beth voor de organisatie van deze bijeenkomst.

Gij zult mij wel willen toestaan, waarde jubilaris, de hier aanwezigen enige bijzonderheden over Uw handboek mede te delen.

Evenals bij „Nu en Morgen” en bij „Relativisme en Dialektiek” treft onmiddellijk de strenge gesloten en symmetrische bouw, de volkomen beheersing dus van de uiterlijke vorm, die uit Mannoury's wijze van werken voortvloeit. Terwijl velen van ons van het eerste tot het laatste woord worstelen met vorm en inhoud, regel voor regel schrijven, doorhalen, herzien, overschrijven, weer doorhalen, enz. en telkens weer stukken van de tekst veranderen, vernietigen of tussenvoegen, gaat Mannoury heel anders te werk. Voordat hij een boek begint, is schema, inhoudsopgave en overzicht klaar. Hij koopt de benodigde hoeveelheid papier en maakt een map, waarin hij dit opbergt. Dan begint hij te schrijven; geleidelijk aan is een steeds dikkere papierlaag beschreven, terwijl het onderste deel nog blanco is. Als het papier op is, is het boek ook af, in strikte overeenstemming met het schema. Om deze werkwijze te begrijpen moet men weten, hoe hij ons indertijd analytische en beschrijvende meetkunde leerde. Wanneer hij ons een bijzonder lastige constructie of berekening moest uitleggen begon hij niet, zoals gebruikelijk is, een ruw schets op het bord te maken, maar ging hij rustig aan de tafel zitten. Hij liet langzamerhand, stukje voor beetje, de gehele figuur voor ons geestesoog ontstaan, totdat wij deze geheel doorzagen en de

oplossing gevonden hadden. Dan pas ging hij naar het bord met de woorden: „Nu zullen we het eens eerlijk narekenen”, of „tekenen”, selon le cas. Zo gaat het ook met zijn boeken. Zijn voorafgaand doordenken van de stof is zo intensief, dat het boek voor zijn geestes oog reeds even levendig aanwezig is als voor ons destijds die bolconoïde was, en dan pas gaat hij aan het werk, denkende „En nu zullen we het ook eens eerlijk opschrijven”. En dat dit „eerlijk opschrijven” een moeizame en langdurige werkzaamheid is, is iederen auteur bekend, en wordt in casu wel geïllustreerd door het feit, dat het Handboek der Significa in Mannoury's huiselijke kring bekend stond onder de oneerbiedige benaming van „Vaders spreij”.

Het eerste hoofdstuk van deel I bestaat uit drie gedeelten, getiteld „Gedachten”, „Woorden”, „Begrippen”, het bevat het allernoodzakelijkste materiaal aan signifische methoden en begrippen, die voor de rest benodigd zijn. De laatste drie hoofdstukken vormen eigenlijk een (uiteraard uiterst gecomprimeerde) cultuurgeschiedenis. En wel wordt hier de geschiedenis van de belangrijkste religieuze, filosofische en politieke leerstelsels beschouwd met het oog gericht op het wisselend karakter der daarbij optredende begripsvormingen. Als speciale aspecten keren telkens weer: de onderscheiding van de meer axiomatische en de meer speculatieve vormen van begrips-critiek, van de individuele en de massale strevingen, van de afzondering van verschillende bevolkingsgroepen of hun wisselwerking of nivellering, van absolutisme en relativisme, van expliciete en impliciete moraal, enz. Voor al deze telkens weer in de cultuurgeschiedenis te herkennen tegengestelde strevingen worden zorgvuldig gekozen termen ingevoerd.

Het behoeft zelfs na deze, slechts uiterlijkheden opsommende schets, wel geen nader betoog, dat alleen al een werk als dit voldoende zou zijn om zijn auteur een wereldnaam te bezorgen en hem een plaats onder de grote filosofen te verschaffen, zo hij deze niet reeds bezat.

Nog minder dan van deel I is het mogelijk, van deel II zelfs maar een ruwe schets te geven. Het geeft voor het eerst een systematische ontwikkeling van het gehele begrips- en methodencomplex der significa en gaat ver uit boven het toch reeds vele, dat de schrijver in vroegere publicaties daartoe had bijgedragen. De inleiding behandelt analytische en synthetische begripsomschrijvingen, betrekkelijkheid en gradualiteit van het juistheidsbegrip, gevoels-, onderscheidings- en wilselementen, enz.

Slechts noemen kan ik de beschouwingen over hergroeperings- en

voorspelbaarheidswet, over aandachtspulsering, en over de signifi-
fische werkwijze. Dit alles is hoogst eigen en volkomen nieuw werk
van grote draagwijdte. Het is duidelijk, dat een overzicht in dit
bestek niet eens kan duidelijk maken, waarover het boek eigenlijk
handelt, nog veel minder een beeld kan geven van de rijke gedachten-
inhoud.

Het geheel draagt het veelzeggende motto: „Nekonscie la homaro
gvidas siajn gvidantojn”: — „Onbewust leidt de mensheid hare
leiders”.

In tegenstelling tot de soms zeer geestige, soms gepassioneerde
toon van vele van zijn vroegere geschriften is dit werk zuiver
wetenschappelijk geschreven. Hen die dit wellicht betreuren moet ik
bekennen, daaraan enigszins schuldig te zijn. Begin 1928 schreef
ik Mannoury een lange brief, waarin ik hem verzocht, in plaats
van talrijke korte samenvattingen of artikelen, die moeilijk te be-
grijpen waren en in plaats van de geestige, maar vaak eveneens
moeilijk te begrijpen, popularisatie „Mathesis en Mystiek”, een
synthese te geven van het geheel zijner opvattingen in een groot,
rustig en zuiver wetenschappelijk werk. Prompt kwam 's anderen-
daags zijn antwoord in de vorm van een telegram. Het luidde:
„Filippika dubbel verdiend. Waardering maar half. Hartelijk dank.
Mannoury”. Ik heb me later echter wel eens afgevraagd, of
Mannoury mijn verzoek, de moeilijkheden nu eens niet in grapjes
te verbergen, niet al te zeer ter harte heeft genomen.

In dit werk is naar mijn mening een werkelijke „Unity of Science”
bereikt, in die zin, dat de grondslagen van wiskunde, natuurweten-
schappen, geesteswetenschappen en sociale wetenschappen vanuit
eenzelfde gezichtspunt, met gebruik maken van een zelfde termino-
logie en methodologie worden behandeld, en wat meer zegt, tot
een volkomen innerlijke eenheid worden verenigd. Voor Mannoury
zijn Godsdienst, Wijsbegeerte en Politiek; Rechtspraak, Wiskunde
en Economie vormen en wijzen, waarop mensen elkaar beïnvloeden.
Vandaar dat ze alle volgens de wijze der Significa, dat is de leer
der menselijke verstandhoudingsverschijnselen in het algemeen,
bestudeerd kunnen worden.

In de eerste plaats moeten hier de begripskritische methoden ge-
noemd worden. Want wel het beste motto, dat men voor Mannoury's
wetenschappelijke werkzaamheid in het algemeen zou kunnen kiezen
is zijn uitspraak: „*Een weten, dat het vragen verleerd heeft, is het
weten niet waard*”. Naast een groot analytisch-kritisch bevat
Mannoury's werk een belangrijk synthetisch-creatief bestanddeel.
Dit bestaat vooral in het opsporen, aanwijzen en beknopt formuleren

van talrijke verschijnselen op introspectief-psychologisch, taalkundig en massa-psychologisch gebied, die hij met zijn voor deze verschijnselen ongemeen scherp waarnemings- en onderscheidingsvermogen heeft opgemerkt, of als ze reeds door anderen waren ontdekt, nader bestudeerd en in nieuw licht gesteld. Dat zijn formuleringen, zoals door Mannoury zelf steeds weer betoogd wordt, nog te vaag en sommige waargenomen verschijnselen nog te subjectief en te onzeker zijn, vergeeft men hem daarom gaarne. Men moet dit soort werk niet vergelijken met dat van een mathematicus, die constructie- of beschrijvingselementen combineert, omtrent welker herkenbaarheid geen twijfel aanwezig is, noch ook met dat van een experimentator, die in veelal zeer moeilijk te realiseren omstandigheden, dan echter gemakkelijk waarneembare verschijnselen teweeg brengt. Wil men een vergelijking, dan denke men veeleer aan een zeeman, die, met zeer scherpe blik begiftigd, in een verre kustlijn voor een ander nog niet waarneembare details ontdekt, en deze zo goed mogelijk tracht te beschrijven, waardoor ze langzamerhand ook voor zijn toehoorders zichtbaar worden.

Hoe dit ook zij, in ieder geval kan men zeggen, dat Mannoury meer dan wie ook heeft bijgedragen tot de vervulling van de taak, toegedacht aan de Internationale Akademie voor Wijsbegeerte, zoals die door L. E. J. Brouwer was geformuleerd, en waarvan het eerste punt luidde: „Woorden van spirituële waarde te creëren voor de talen der Westerse volken, en aldus die spirituële waarden een plaats te geven in de onderlinge verstandhouding der Westelingen”.

Het zij mij thans vergund aan deze woorden enige meer persoonlijke toe te voegen.

Het is nu op enkele maanden na dertig jaar geleden, dat ik U leerde kennen. Gij waart zojuist benoemd tot hoogleraar aan deze universiteit, ik was pas aangekomen als student. Uw eerste college was tevens mijn eerste college, zij het aan de andere zijde van de kathedra. Reeds tijdens het aanhoren van Uw brillante inaugurale rede „Over de maatschappelijke betekenis van de wiskundige denkvorm”, had zich een nieuwe wereld voor mij geopend. In Uw collegezaal en later tijdens talloze gesprekken, die Gij mij toestondt, openden zich telkens weer nieuwe en veelal verbijsterende perspectieven en vergezichten. Het waren dan ook Uw lessen, die mij tot het inzicht brachten, dat mijn na lange aarzeling voltrokken keuze van de scheikunde als studievak toch een onjuiste geweest was en die mij enige jaren later definitief tot het besef brachten, dat in de wiskunde en in de signifiica mijn roeping lag. Sinds de eerste dag, dat ik U hoorde, sloot namelijk mijn hoorbetekenis van Uw

woorden op verwonderlijke wijze bij Uw spreekbetekenis aan. Dit blijkt wel uit mijn eerste brief aan U, gedateerd 23 October 1917, waarop prompt de volgende dag Uw briefkaart kwam met de toezegging, in het volgende college op de door mij ondervonden moeilijkheid in te gaan. Ik vermeld dit, omdat het zo karakteristiek is voor Uw persoonlijkheid. Want ik geloof niet, dat, behalve als gij ziek of afwezig waart, ooit iemand een vraag of een verzoek tot U gericht heeft, zonder per omgaande een antwoord van U te ontvangen.

Hoe zich in de loop der jaren onze verhouding verder ontwikkelde, hoe Gij altijd weer bereid waart mij te helpen en mijn eerste pogingen op het gebied der wiskunde en der Significa hebt aangemoedigd, mag ik hier niet uitvoerig beschrijven, maar één klein voorval is er toch, dat ik wil vermelden, omdat het zo typerend is voor Uw spreekwoordelijke bescheidenheid, zich o.a. uitend in het feit, dat Gij vermoedelijk wel nooit zelf van Uw professors-titel enig gebruik hebt gemaakt. Er werd namelijk eens een brief bij U bezorgd. Uw dochttertje nam deze in ontvangst en spelde enigszins moeizaam het adres: „Den. Weledel. Hooggeleerden. Heer. Professor. G. Mannoury” en riep toen naar boven: „Ben j ij dat, vader?”.

Lange tijd is de verhouding dezelfde gebleven. Gij als spreker, ik als hoorder, en vaak ook als tegenspreker. Ondanks het feit, dat ik U op vele punten kon volgen, bleven er toch telkens nog uitspraken van U, ook op het gebied van de wijsbegeerte der wiskunde, die ik niet kon aanvaarden. Bij voorbeeld heb ik Uw uitspraak, dat het verschil tussen eindig en oneindig in de wiskunde uitsluitend emotionele betekenis heeft en dat het daardoor kan voorkomen, dat twee personen in hun uitspraken volkomen met elkaar overeenstemmen, terwijl toch de ene een eindige en de andere een oneindige getallenrij in gedachten heeft (of meent te hebben), gedurende tientallen jaren voor onjuist gehouden. Eerst verleden jaar, toen ik mij opnieuw in de grondslagen der wiskunde verdiept heb, ben ik tot de overtuiging gekomen, dat ik ongelijk gehad had en dat Uw mening de juiste was.

Vergeef mij, zo ik wellicht te lang bij persoonlijke zaken blijf staan, maar reeds sinds vele jaren heb ik verlangd, U in de positie te zien, waarin Gij niet kunt verhinderen, dat ik U zeg, hoe onnoemelijk veel ik aan U te danken heb, hoèzeer Gij mijn werk en mijn persoonlijkheid tot in de diepste kern hebt verrijkt, en mijn perspectieven op wetenschap, maatschappij en mensheid hebt verbreed en verdiept. En dat ik dit doe, al maak ik op deze wijze wellicht

misbruik van Uw dwangpositie, is, omdat ik de stellige overtuiging bezit, daarmee niet alleen mijn eigen gevoelens weer te geven, maar tevens die van velen, die Uw lessen gevolgd of op andere wijze Uw invloed ondergaan of Uw vriendschap genoten hebben.

En nog iets verder wil ik gaan, en U verzoeken desnoods Uwe oren te sluiten of Uw aandacht af te wenden, opdat ik coram populo kan verklaren; hoe ik Uw plaats in de wijsbegeerte en de wereld zie. Juist omdat ik mij sinds dertig jaar met grote aandacht in Uw werk verdiept heb en met sommige van Uw uitspraken in de letterlijke zin des woords gevochten heb, en ook omdat ik meen geenszins als een onkritisch man bekend te staan, meen ik daartoe het recht te hebben, en ik verzoek U dan ook mijn woorden niet als een ter gelegenheid van een feestelijke huldiging overdreven lofspraak, maar als een uiting van mijn sinds jaren gevestigde en voortdurend versterkte overtuiging te willen opvatten.

In Mannoury bezitten wij een wijsgeer van een formaat, dat niet slechts in deze tijd, maar gedurende vele eeuwen slechts zelden is voorgekomen. Niet omdat hij ons nieuwe, als onaantastbaar geldende uitspraken zou hebben verkondigd, maar omdat hij ons een geheel nieuwe *wijze* van denken heeft geleerd en ons bevrijd heeft van talloze vooroordelen en denkgewoonten, die de vrijheid van ons denken belemmerden. Zijn werk is niet het klassieke meesterwerk, dat in feilloze vorm de resultaten ener voorbijge periode samenvat, maar het is pionierswerk, dat in zoekende en tastende, soms onbeholpen, maar vaak ook magistrale vorm nieuwe gebieden opent, veeleer dan oude afsluit. Zijn meesterschap uit zich in het feit, dat hij zich telkens weer tot de moeilijkste en diepste, haast ongrijpbare problemen wendt en, worstelende met formuleringen, er toch telkens weer in slaagt ons tot de kern dezer problemen te doen doordringen, al is het daartoe veelal nodig, dat wij bereid zijn, over sommige vooralsnog niet vermijdbare onexactheden heen te stappen en een soms vluchtig aangeduide gedachte zelfstandig door te denken en na eenmaal verworven taalkritische scholing en signifi- fische bezinning aan onze eigen inwendige en uitwendige ervaring te toetsen. Wie mocht verwachten in Mannoury's werk een complex van definitief vaststaande wetenschappelijke resultaten aan te treffen, of een pasklare wereld- en levensbeschouwing, al dan niet begeleid door een bijbehorende moraal of politieke richtlijn, zal teleurgesteld uitkomen. Maar toch bevat zijn werk, zij het impliciet, zulke resultaten en beschouwingen. Bovenal echter is het gekenmerkt door de zeldzame denkmoed en door de volkomen eenheid van begrips- vorming, terminologie en methode, waarmee natuurwetenschap,

geesteswetenschap en sociale wetenschap behandeld worden. Zoals ook de mens Mannoury gekenmerkt is door een innerlijke eenheid van levensleer en levenshouding, zo volmaakt als wij die voor zover ik weet in de geschiedenis der wijsbegeerte nauwelijks meer hebben aangetroffen na Sokrates, met wien hij de geneigdheid zich tot de ongeletterde mens te wenden en de bereidheid, in zijn daden de uiterste consequenties van zijn gedachten te aanvaaren, gemeen heeft, maar van wien hij zich in ander opzicht al is het slechts door zijn volkomen harmonisch huwelijksleven, onderscheidt. Wij mogen ons gelukkig prijzen, deze man in ons midden te hebben, en na een lange periode van miskenning en aarzeling al dan niet door het intermedium van liefde voor zijn persoon ook de waardering voor zijn werk en het begrip voor zijn denkbeelden geleidelijk aan te zien toenemen. Door het verder doordringen van deze denkbeelden en daardoor alleen kan onze verscheurde mensheid er in slagen tot een evenwichtige en harmonische levensvorm te komen.

Vergeef mij, Waarde Mannoury, vergeef mij, geachte aanwezigen, zo ik mij te zeer heb laten gaan en teveel persoonlijke en uiteraard subjectieve gedachten en gevoelens geuit heb, maar deze woorden *moesten* éénmaal in het openbaar gezegd worden en een betere gelegenheid dan deze is er niet voor te vinden.

Sta mij thans toe, mijn taak als woordvoerder van het Huldigingscomité te hervatten. Tengevolge van de korte tijd van voorbereiding is het natuurlijk niet mogelijk, U thans reeds een exemplaar van Uw handboek in druk aan te bieden. Slechts in symbolische vorm kan dit geschieden. Vergun mij daarom U namens het Huldigingscomité een zogenaamde dummy van Uw boek te overhandigen, die de heer Kroonder zo vriendelijk was voor deze gelegenheid te doen vervaardigen. Deze bevat een 200-tal blanco en enkele bedrukte pagina's, ingebonden op dezelfde wijze als dit bij de definitieve uitgave zal geschieden, die, naar wij hopen, over enkele maanden het licht zal kunnen zien. Tevens bied ik U, eveneens namens het Comité, een album aan, bevattende de handtekeningen van hen, die tot het tot stand komen van de uitgave hebben bijgedragen of anderszins hun belangstelling hebben getoond. Gij zult ons wel toestaan de handtekeningen, die daarin thans nog niet konden worden opgenomen binnenkort aan te vullen. Tot slot wil ik uit aller naam de wens herhalen, dat U nog vele jaren van ongestoorde lichamelijke en geestelijke gezondheid temidden der Uwen gegeven mogen zijn.

Ik heb gezegd.

VAN DE PERSONEN.

Dr L. Kuipers te Dordrecht is op 11 Juli 1947 gepromoveerd tot Doctor in de Wis- en Natuurkunde aan de Vrije Universiteit te Amsterdam; promotor Prof. Dr Koksma. Dr Kuipers is voortgekomen uit het lager onderwijs; na het behalen van de akten KI en KV heeft hij de studie voortgezet met bovengenoemd einddoel.

De titel van het proefschrift is:

De asymptotische verdeling modulo 1 van de waarden van meetbare functies.

Onder de stellingen treffen we aan:

VI. Het vraagstuk: „Als twee driehoeken ABC en PQR met elkaar corresponderen in een centrale collineatie, waarbij het centrum van collineatie identiek is met het hoogtepunt van $\triangle ABC$ en het zwaartepunt van $\triangle PQR$, dan staat de collineatie-as loodrecht op de rechte van Euler van $\triangle ABC$ ”, bezit een eenvoudige planimetrische oplossing.

VIII. Het theorema van Desargues kan worden opgevat als een speciaal geval van een algemene stelling uit de grafostatica betreffende de eigenschappen van twee stangenveelhoeken.

Mogen we Dr Kuipers verzoeken deze stellingen in een van de tijdschriften uit te werken, b.v. VI in het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en VIII in „Simon Stevin”?

W.

Ir J. J. Tekelenburg is benoemd tot directeur van de nieuw opgerichte Vijfde Gemeente H.B.S. te Rotterdam; dit is de tweede H.B.S. aan de Linker Maasoever, mettertijd aan het Nachtegaalplein; thans nog Zwederstraat.

BOEKBESPREKINGEN.

Dr. T. P. Sevensma, Nederlandsche Helden der Wetenschap, N.V. Kosmos 1946. 351 bldz., prijs geb. f 9,50.

Dit zeer fraai uitgevoerde boek bevat, na eene inleiding van Dr. T. P. Sevensma, negen opstellen van verschillende schrijvers, elk gewijd aan het leven en het werk van een Nederlandschen Nobelprijs-winnaar. Met uitzondering van den beroemden rechtsgeleerde T. M. C. Asser zijn al deze winnaars werkzaam geweest op het gebied der natuurkunde of van eene daaraan verwante wetenschap, vandaar dat er aanleiding is tot bespreking van het boek in dit tijdschrift.

Men vindt in den bundel een opstel van Dr. J. van Alphen over Van 't Hoff, van Prof. Fokker over Lorentz, van Dr. W. de Groot en Prof. Dr. C. J. Bakker over Zeeman, van Dr. G. C. Gerrits over Van der Waals, van H. Ch. G. J. van der Manderè over Asser, van Dr. C. A. Crommelin over Kamerlingh Onnes, van Dr. S. Hoogewerff over Einthoven, van Prof. Dr. J. M. Baart de la Faille over Eykman en van Prof. Dr. H. A. Kramers over Prof. Debye.

Vele portretten en andere photo's (o.a. van het inwendige van laboratoria) versieren den tekst, die overal aangenaam leesbaar is; de uiteenzettingen zijn populair in den goeden zin. De lezer krijgt een indruk van de moeite en volharding, die het den „helden der wetenschap” gekost heeft hun onsterfelijke ontdekkingen te doen. Op jeugdige lezers kan lectuur als deze stimuleerend werken, vandaar dat dit boek mij *bijzonder geschikt lijkt voor schoolbibliotheken*.

Een mededeeling van den uitgever doet zien, dat het boek reeds in 1941 gereed was, maar dat de verschijning door de bezettende macht is verboden. Dat het pas anderhalf jaar na de bevrijding het licht ziet, is een gevolg van gebrek aan papier.

Deze fraaie bundel wordt ten zeerste in aller aandacht aanbevolen.

J. H. S.

J. K. Timmer, Nieuwe Schooltafel, Zutphen,
W. J. Thieme & Cie, 1947, 62 bldz.

Deze tafels in vier decimalen zijn zeer net uitgevoerd, en alles is gedaan om door duidelijke typographie vergissingen en fouten bij het gebruik onmogelijk te maken.

De tafels voor kwadraten, vierkantswortels en omgekeerden zijn hier niet als een soort toegift bijgevoegd. De bedoeling van den

schrijver is, dat deze tafels zoo spoedig mogelijk gebruikt worden, en op deze manier het gebruik van de logarithmentafels wordt voorbereid.

Verder is bij elke tafel ¹⁾ een antitafel voor het terugzoeken gevoegd; interpolatietafeltjes komen niet ter zijde van de tafels voor, maar zijn op een stevig inlegvel samengevat. Aan meer dan 60 voorbeelden wordt het gebruik der tafels verduidelijkt.

Het belangrijkste onderscheid met de tot nu toe hier te lande verschenen tafels vindt men bij de goniometrische functies en haar logarithmen.

Deze worden op de gebruikelijke wijze behandeld, met een opklimming van $10^{\circ 2)}$, maar *bovendien* in de decimale verdeeling (1 rechte hoek in 100 graden), met een opklimming van 10 centigraden. Het ontbreken van een tafel is dus niet langer een belemmering van de invoering der decimale verdeeling bij het schoolonderwijs ³⁾.

De practijk zal moeten uitwijzen, of de docenten deze tafels op prijs stellen; door den bewerker zijn zij blijkbaar met veel zorg en toewijding samengesteld. J. H. S.

P. Wijdenes, Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie, 6e druk, Groningen, Noordhoff, 1947. 371 bladzijden, geb. f 12,50.

Het voorbericht vermeldt, dat het boek weer grondig is nagezien, maar dat dit slechts tot weinig talrijke veranderingen heeft geleid. De bespreking, die onze betreurde collega Dr. C. de Jong aan den vijfden druk gewijd heeft ⁴⁾ is ook op dezen zesden van toepassing, en ik mag dan ook hopen, dat de zesde druk evenveel waardeering zal ondervinden als zijn voorganger genoten heeft.

Rekening houdende met de mogelijkheid, dat eerlang een zevende zal moeten verschijnen, wil ik enkele wijzigingen in overweging geven, die m.i. verbeteringen zouden zijn. Het lijkt mij in een boek, dat voor volwassen studeerenden bestemd is, zeker niet noodzakelijk, de goniometrie te beginnen met de behandeling van scherpe hoeken, en de definities der goniometrische functies dan geleidelijk over een algemeener hoekbegrip uit te breiden; de hoofdstukken 1 tot en met 4 zouden door bekorting aan overzichtelijkheid kunnen winnen. — Verder zou het m.i. aanbeveling verdienen, de decimale

¹⁾ Behalve natuurlijk bij die der omgekeerden.

²⁾ vgl. Euclides 21, blz. 227 en 15, blz. 14.

³⁾ Zie de eerste noot op blz. 41.

⁴⁾ Euclides 17, bldz. 76.

verdeeling van het kwadrant ¹⁾), die nu slechts in het hoofdstuk XIII over landmeetkunde voorkomt, reeds eerder in te voeren, afgewisseld met berekeningen in graden, minuten en seconden, en in radialen. ²⁾ De hiervoor noodige tafels bestaan immers ¹⁾). Vooral echter kan m.i. zonder eenig bezwaar de notatie der negatieve wijzers, die in hoofdstuk XIII gebruikt wordt, van het begin af worden ingevoerd.

J. H. S.

R. Deaux. *Introduction à la Géométrie des nombres complexes*. 163 blz., A. de Boeck, Brussel 1947.

Met de meetkunde der complexe getallen bedoelt de schrijver een vlakke analytische meetkunde, die aangepast is aan de meetkundige voorstelling van de complexe getallen. Deze meetkunde is van groot belang gebleken bij de behandeling van de karakteristieke diagrammen der elektrische machines. Als gebruikers van zijn leerboek denkt de schrijver in de eerste plaats aan de aanstaande electrotechnici; daar hij echter voortdurend op zuiver wiskundig gebied gebleven is, kan de bestudering ook voor wiskundigen van groot nut zijn.

De voorkennis, nodig voor de lezing van het boek is niet groot: de schrijver acht bekend de eerste beginselen van de gewone analytische meetkunde van het platte vlak; ook worden eenvoudige kinematische begrippen bekend ondersteld. Hij gaat niet in op het rekenen met complexe getallen, maar gaat dadelijk over tot de meetkundige voorstelling, en gebruikt zonder toelichting de schrijfwijze $re^{\theta i}$. Het eerste hoofdstuk bevat voorts de fundamentele transformaties.

Hierop volgt de eigenlijke analytische meetkunde in complexe getallen, waarin vooreerst de rechte lijn en de cirkel behandeld worden; de gebruikte vergelijkingen hebben nu eens de parameter-vorm, dan weer de niet-parameter-vorm. De ellips wordt vervolgens voortgebracht met behulp van twee draaiende vectoren; hieruit wordt de ontstaanswijze afgeleid, waarbij een cirkel rolt aan de binnenzijde van een andere cirkel met de dubbele straal.

Het laatste geeft aanleiding tot de beschouwing van de cycloidale vlakke krommen in het algemeen. Na een inleiding omtrent unicursale krommen in het algemeen en circulaire in het bijzonder, waarbij ook de gewone en buitengewone brandpunten ter sprake komen,

¹⁾ Zie P. Wijdenes, *Five place tables in the decimal system*. P. Noordhoff.

²⁾ Zie J. Versluys, *Tafel H*.

worden, uitgaande van de parametervorm, achtereenvolgens de kegelsneden, de bicirculaire bikwadratische en de circulaire kubische krommen behandeld, waarbij blijkt, dat ze door inversie uit kegelsneden kunnen ontstaan.

Hiermee is het voor de technicus voornaamste deel van het boek genoemd. Het derde hoofdstuk, dat de cirkeltransformaties als onderwerp heeft, is vooral voor de wiskundige van belang. De voornaamste eigenschappen van de homographie worden afgeleid, in het bijzonder de eigenschappen, die het groepenkarakter bepalen; de bekendste ondergroepen worden besproken. In het bijzonder mag nog gewezen worden op de behandeling van het geval van de involutorische homographie.

Ik vind dit boek uitstekend. Dezelfde auteurseigenschappen, die me het vorige jaar de lezing van „*Compléments de Géométrie plane*” tot een groot genoegen maakten, komen hier voortdurend aan het licht. Ik noem in het bijzonder de nauwkeurigheid en de helderheid. Alles is wel overdacht; men gevoelt, dat het boek gegroeid is uit het onderwijs van de schrijver.

Toch zou ik nog twee bezwaren willen maken. Ik lees in het Avant-Propos: „*Aucune difficulté sérieuse ne doit être surmontée.*” Dit is ongetwijfeld juist voor de gebruikers van de eerste der twee boven genoemde categorieën; immers zullen zij reeds vroeger met de meetkundige voorstelling van de complexe getallen kennis gemaakt hebben. Ik ben er niet zo zeker van voor de tweede categorie. Mijn ervaring is, dat de eerste kennismaking in de regel niet zonder bezwaren verloopt, en dat er vrij veel oefening voor nodig is om te bereiken, dat de leerling er met zekerheid mee omgaat. De schrijver had zijn pad kunnen effenen, door het opnemen van geschikte oefenstof, zoals hij ook in zijn „*Compléments*” deed; wellicht had hij kunnen volstaan met te wijzen op de noodzakelijkheid voor de beginner, zich te oefenen, en op te geven, waar zulke oefenstof te vinden is. Met de voorbeelden, die de schrijver zelf uitwerkt, kan de eerstbeginnende niet volstaan. In de tweede plaats betreur ik het, dat de schrijver zo uitsluitend op zuiver wiskundig terrein gebleven is. Ook hierbij heb ik het oog op de tweede categorie. Juist voor hen zou het van belang zijn, dat ze aan de hand van een, zij het nog zo eenvoudig, vraagstuk, dat opgekomen is in het electrotechnisch laboratorium, de doelmatigheid van de theorie konden beoordelen.

Dat er naar mijn bescheiden mening nog iets te wensen over gebleven is doet niets af aan mijn gunstig oordeel over dit werk.

Amersfoort.

H. J. E. BETH.

Wiskunde Dr. E. J. E. Huffer S.J. verschenen in de Berchmanianum-Serie (J. J. Romen en Zonen, Roermond-Maaseik) beantwoordt aan een dubbele noodzakelijkheid.

10. aan onze studerende jeugd nog iets anders voor ogen te leggen dan de handboeken over Wiskunde, waarin ze lijdelijk de ene stelling na de andere te verwerken krijgen, zonder zich ooit de vraag te stellen: „wie is de Vader van dit alles?”

Dr. Huffer geeft een antwoord op deze vraag in het eerste deel van zijn werk: „Grepn uit de Geschiedenis der Wiskunde” en geeft aan Pythagoras, Zeno, Eudoxus, Hippocrates en Euclides wat ieder toekomt.

20. aan iedereen, die de studie verlaten heeft, een juister begrip te geven van wat we aan de Oudheid, de Griekse in 't bijzonder, verschuldigd zijn. Velen hebben daarvan een heel vaag, ja zelfs een vals idee en zullen na het lezen van Dr. Huffer's Wiskunde, eindelijk aanvoelen dat de mens van heden, als mens met minder superioriteit moet terugblikken op de „oude barbaren” van 3000 jaar geleden.

Het tweede deel behandelt de Methodiek der Wiskunde, o.a. de methodiek der grensprocessen.

Om te besluiten: Dr. Huffer's Wiskunde kan en moet gelezen worden door elkeen, die beweren wil dat hij tot zijn 18e jaar met vrucht Wiskunde heeft bestudeerd.

- bl. 29. in de franse tekst moet zijn „distinct” in plaats van „distincte”.
- bl. 29. het uittreksel uit Kant is onverstaanbaar voor oningewijden.
- bl. 47. in Delisch Probleem moet zijn $\sqrt{2}$ in plaats van $\sqrt[2]{2}$.
- bl. 53. π = verhouding van het vierkant van de straal tot het oppervlak van de cirkel, moet omgekeerd zijn.
- bl. 56. moet zijn $\sqrt[3]{3}$ in plaats van $\sqrt{3}$.
- bl. 56. 10. l_n alg. getal = transcendent getal?
- bl. 78. moet zijn $N = a_0 \cdot 10^n + a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots$
in plaats van $N = a_0 \cdot 10^n - a_1 \cdot 10^{n-1} + \dots$
- bl. 107. moet zijn $ABC - 1_n < \Delta$
in plaats van $ABC - 1_n \Delta$

Me dunkt, dat de auteur ook goed zou doen zijn citaten (Grieks, Duits, Engels) te vertalen.

DR. H. STEFFENS.

A. J. Mulder S. J. Natuurkunde. De weg der wetenschap naar het atoom. Berchmanianum-Serie. J. J. Romen & Zonen, Roermond-Maaseik, 1947. 197 blz.

Dit boek is een inleiding in de filosofische physica en bevat een gedeelte van de lessen, door schr. gegeven aan de studenten van de filosofische faculteit der Societas Jesu van het „Berchmanianum” te Nijmegen.

Een uitvoerige inleiding geeft een schets van de werkwijze der natuurkunde, waarbij niet alleen natuurphilosophische inzichten, maar ook waarneming en proef, wiskundige methoden en technische hulpmiddelen, uitvoerig en nauwkeurig worden besproken. Daarna wordt een en ander uitvoerig toegelicht aan de hand van een overzicht van de ontwikkeling, die, uitgaande van de mechanische warmteleer, heeft geleid tot de hedendaagse atomistiek.

Op deze wijze is een zeer aantrekkelijk boek ontstaan, dat zeer geschikt is, om beoefenaars van de wijsbegeerte een juist inzicht te geven, niet alleen van enkele fundamentele resultaten van het moderne natuuronderzoek, maar ook van de werkwijze, die tot deze resultaten heeft geleid. Het verdient zonder twijfel mede de aandacht van leraren in de natuurkunde en van allen, die zich voor de wijsgerige achtergrond van het natuuronderzoek interesseren. Hun allen kan de aandachtige lezing ervan met warmte worden aanbevolen.

In het belang zowel van de lezer als van de schrijver moge ik echter de aandacht vragen voor enkele bedenkingen.

Op blz. 99 wordt plotseling het aantal moleculen in 1 gram waterstof van 0° en 1 atm. druk ingevoerd. Op dat ogenblik zijn echter de onderzoekingen, die tot een bepaling van dit aantal kunnen leiden, nog niet besproken. Het ware gewenst geweest, daarop even de aandacht te vestigen.

blz. 105. Bij de critiek der temperatuurmeting had dienen te worden gewezen op de transitiviteit van het warmteevenwicht: zijn twee lichamen A en B tegelijk in warmteevenwicht met een derde lichaam C, dan zijn ze ook met elkaar in warmteevenwicht (cf E. Mach, „Die Prinzipien der Wärmelehre”, 3 Aufl., Leipzig 1919, Ss 39—57). Ook had hier met voordeel het onderscheid tussen intensieve grootheden ter sprake kunnen worden gebracht.

blz. 143. De qualificatie van de huidige atomistiek als een „knoei-boel” lijkt me minder passend. De verdiensten van Hoenen worden m.i. te hoog aangeslagen. Enerzijds heeft reeds Tilmann

Pesch S.J. („Die grossen Welträthsel", 2. Aufl., Freiburg 1892) de aandacht gevestigd op de peripatetisch-scholastieke leer der minima naturalia, anderzijds is het door Hoenen ontworpen beeld van de ontwikkeling der atomistiek in hoge mate tendentius (cf. R. Hooykaas, „Het ontstaan van de chemische atoomleer", Tijdschrift voor Philosophie 9, 1947).

blz. 185. Volgens schr. moet de theorie van Einstein over de aequivalentie van massa en energie vooralsnog als hypothese worden beschouwd. Hij ziet hier voorbij, dat deze theorie niet uit de atomistiek stamt, maar een gevolgtrekking is uit Einstein's relativiteitstheorie, die harerzijds in tal van feiten steun vindt.

De beschouwingen van blz. 188—191, tenslotte, zijn volkomen onhoudbaar.

E. W. BETH.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van *J. B. Wolters*

W. Reindersma, Beknopt leerboek der vlakke meetkunde, **9e druk** f 4,40, geb. f 4,80.

Dr P. G. J. Vredenduin en Dr A. van Haselen, Algebra I, **3e druk** f 2,75, geb. f 3,25.

—Dr A. van Thijn, Stereometrische Vraagstukken, **6e druk** f 1,70, geb. f 2,—.

Van de schrijver:

Prof. Dr E. W. Beth, Metaphysica en wetenschap. Overdruk uit „De Gids”.

Van *J. Muusses*

P. M. van Hiele en Mevr. Van Hiele—Geldof, Werkboek der Algebra I, 156 blz. f 3,75.

Met bespreking wordt gewacht op de verschijning van de beide andere delen; in de voorrede wordt gezegd, dat in de „herhaling en uitbreiding” (in deel III?) zullen voorkomen:

Grepen uit de geschiedenis van de algebra.

Onderwerpen uit de rekenkunde, zoals deelbaarheid, benaderde getallen, repeterende breuken, getallencongruenties. Verder onbepaalde vergelijkingen, assenverschuivingen en assendraaiingen, permutaties en combinaties, de oplossingsmethoden voor derde- en vierdegraadsvergelijkingen; eindige getallensystemen.

Van *P. Noordhoff*

Wijdenes en De Lange, Vlakke Meetkunde I, **13e druk**, met gradenboog en formules f 2,40, gec. f 2,75.

Dr B. Gonggrijp, Logarithmische en goniometrische tafels en bijtafels; tafel **D. 8e druk** f 3,40.

Dr P. Molenbroek, Leerboek der Stereometrie, **10e druk**, 368 blz., 239 fig., geb. f 9,50.

P. Wijdenes, Beknopte Driehoeksmeting, **10e druk**

A (voor de 3e klas) 50 blz. f 1,05.

B (voor de 4e en 5e klas) blz. 51—148 f 1,85.

A en B in één deel f 2,85.

Noordhoff's Tafel in 4 decimalen, **10e druk** f 1,35.

Noordhoff's Schooltafel (5 dec.), **7e druk** f 2,—.

P. Wijdenes en Dr P. G. van de Vliet, Logarithmen- en rentetafels **G, 2e druk** f 2,20.

Deze tafel is voor de H.B.S. A in klasse 4 en 5.

P. Wijdenes, Practische driehoeksmeting, 4e druk f 2,75.

P. Wijdenes en Dr H. J. E. Beth, Nieuwe Schoolalgebra I, 17e druk f 3,—.

Mathematica, tijdschrift voor allen, die de hogere wiskunde beoefenen, in het bijzonder voor K V-candidaten.

Onder leiding van:

K. Harlaar, Drs Th. C. L. Kok en Dr M. Scheffer, 14e jaargang nr. 1.

Prof. Dr O. Bottema, Een stelling van Appell over de cylindroïde.

K. Harlaar, Schriftelijk examen Wiskunde K V 1946.

Vragen van mondelinge examens K V:

Dr M. Scheffer, Het begrip totale differentieerbaarheid.

Dr J. H. Tummers, Over een transformatie.

Oplossingen en vraagstukken.

Dit tijdschrift is onmisbaar voor kandidaten K V; het wordt echter zeer in het bijzonder ook aanbevolen voor studenten in de Wis- en Natuurkunde; men vindt er bv. vraagstukken in, die op de tentamens worden gesteld. Ook voor leraren is het van groot belang.

Prijs f 6,— per jaargang; voor hen, die ingetekend zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs slechts f 4,—.

Men tekent in bij Noordhoff en in België bij „De Sikkel” Antwerpen.

EEN INTERESSANTE TOEPASSING VAN HET BINOMIUM VAN NEWTON

door

M. DIJKSHOORN.

§ 1. Het „water—wijn” vraagstuk.

Een aardige strikvraag is de volgende:

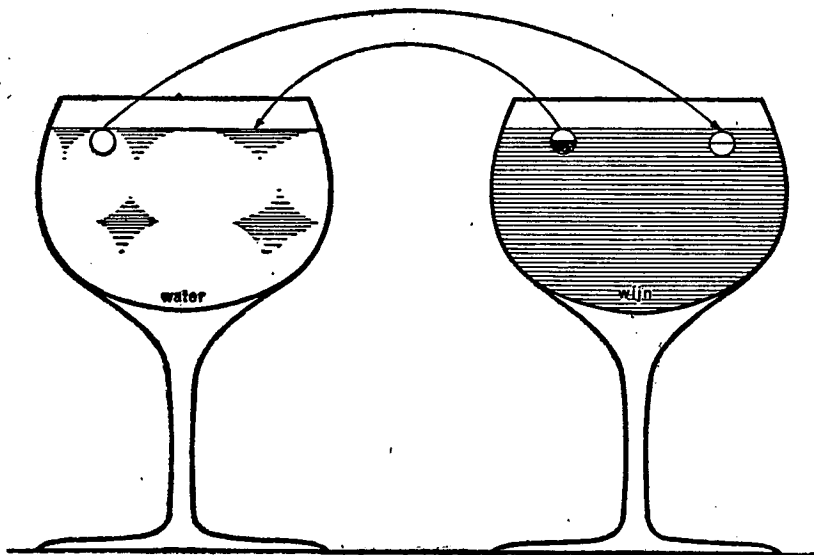
Iemand heeft twee glazen; in het ene glas bevindt zich water, in het andere glas evenveel wijn. Hij neemt een schepje water uit het ene glas en doet dat in het glas met wijn, roert dit goed om en neemt nu een even groot schepje van dit mengsel en doet dit in het glas met water.

Is er nu meer water in de wijn of wijn in het water?

De beste oplossing is die, waarbij men zich goed indenkt hoe de samenstelling van het tweede schepje is.

Het is duidelijk, dat de hoeveelheid water daarin, afkomstig is van het water, dat door het eerste schepje in het glas met wijn gebracht is. De hoeveelheid wijn in dit tweede schepje is dus even groot als de hoeveelheid water, die er van het eerste schepje in het glas met wijn achterblijft m.a.w. er gaat evenveel wijn naar het glas met water als er water in het glas met wijn achterblijft.

De onderstaande tekening kan deze redenering misschien verduidelijken.



In de tweede plaats kan men het algebraïsch narekenen.

Stellen we de hoeveelheid vloeistof, die zich bij het begin van het experiment in elk glas bevindt v en de inhoud van het schepje s volume-eenheden (v en s stellen positieve reële getallen voor) en spreken we kortheidshalve van het *waterglass* en het *wijnglas*, waarmee we dus de glazen bedoelen, waarin zich oorspronkelijk resp. alleen water of wijn bevond, dan verloopt de berekening als volgt.

Als men het schepje water in het wijnglas gedaan heeft, bevindt zich in het wijnglas s water en v wijn.

In het schepje, dat men hieruit neemt, is de verhouding van water tot wijn als $s : v$, zodat de hoeveelheid water hierin is $\frac{s^2}{v+s}$

en wijn $\frac{vs}{v+s}$. Dit laatste is dus tevens de hoeveelheid wijn, die zich ten slotte in het waterglass bevindt.

De hoeveelheid water, die in het wijnglas achterblijft, is dus $s - \frac{s^2}{v+s} = \frac{vs}{v+s}$, zodat er inderdaad evenveel wijn in het waterglass als water in het wijnglas is.

Opmerking. Vele leerlingen willen het onderzoeken met een getallenvoorbeeld.

Dat hieraan geen bewijskracht mag worden toegekend, kan men altijd met een paar goed gekozen getallenvoorbeelden illustreren.

Uit het feit dat:

$$\frac{18}{84} = \frac{1}{4}; \frac{18}{85} = \frac{1}{5}; \frac{28}{85} = \frac{2}{5}; \frac{87}{288} = \frac{7}{28}; \frac{34}{238} = \frac{4}{28}$$

volgt nog niet, dat men dus in de teller en de noemer van een breuk hetzelfde cijfer mag weglaten!

§ 2. Eerste uitbreiding.

We breiden nu in de eerste plaats het vraagstuk uit door de volgende stelling te bewijzen.

Zet men bovenstaande handelingen voort, dan zal er aan het einde van elke proef steeds evenveel water in het wijnglas als wijn in het waterglass zijn.

We noemen het vullen van het waterglass en het wijnglas de eerste handeling.

Verder noemen we de 2de handeling h_1 en de 3de handeling t_1 (dus resp. de heen- en teruggaande handeling); samen vormen ze de eerste proef.

Bij deze eerste drie handelingen was de situatie aldus:

Tabel 1.

	WATERGLAS			WIJNGLAS	
	Water	Wijn		Water	Wijn
1^0	v	0		0	v
h_1	$v - s$	0	$\rightarrow$	s	v
t_1	$\frac{v^2}{v + s}$	$\frac{v s}{v + s}$	$\leftarrow$	$\frac{v s}{v + s}$	$\frac{v^2}{v + s}$
	I	II		III	IV

Wij vonden immers in § 1, dat de hoeveelheid wijn in het waterglas was $\frac{v s}{v + s}$; de hoeveelheid water in dat glas is dus $v - \frac{v s}{v + s} = \frac{v^2}{v + s}$. (De totale hoeveelheid vloeistof per glas is immers weer v .)

Dit is dus tevens de hoeveelheid wijn in het wijnglas.

We nummeren de kolommen met Romeinse cijfers zoals de tabel aangeeft.

We zullen nu bovenstaande stelling bewijzen door volledige inductie. We veronderstellen dus, dat aan het einde van de handeling t_n de hoeveelheden I en IV en eveneens II en III gelijk zijn en zullen aantonen, dat dit ook bij t_{n+1} het geval is.

Stel, dat aan het einde van de handeling t_n de verhouding van water tot wijn in het waterglas is $p : q$ (beide letters stellen positieve reële getallen voor), dan is die in het wijnglas $q : p$.

De hoeveelheden water en wijn zijn dus in het waterglas resp.

$\frac{p v}{p + q}$ en $\frac{q v}{p + q}$ en in het wijnglas omgekeerd (zie tabel 2).

Bij de handeling h_{n+1} zit er in het heengaande schepje s dus $\frac{p s}{p + q}$ water en $\frac{q s}{p + q}$ wijn. Er blijft dus in het waterglas $\frac{p(v-s)}{p + q}$ water en $\frac{q(v-s)}{p + q}$ wijn; er komt in het wijnglas $\frac{q v + p s}{p + q}$ water en $\frac{p v + q s}{p + q}$ wijn.

Bij de teruggaande handeling t_{n+1} is de verhouding water tot wijn in het schepje als $(q v + p s) : (p v + q s)$.

In dit teruggaande schepje zit dus

$$\frac{qv + ps}{qv + ps + pv + qs} \cdot s = \frac{(qv + ps) s}{(p + q)(v + s)} \text{ water en}$$

$$\frac{pv + qs}{qv + ps + pv + qs} \cdot s = \frac{(pv + qs) s}{(p + q)(v + s)} \text{ wijn.}$$

In het wijnglas blijft dus aan water achter

$$\frac{qv + ps}{p + q} - \frac{(qv + ps) s}{(p + q)(v + s)} = \frac{(qv + ps) v}{(p + q)(v + s)}$$

In het waterglas is de hoeveelheid wijn

$$\frac{qv - qs}{p + q} + \frac{(pv + qs) s}{(p + q)(v + s)} = \frac{(qv + ps) v}{(p + q)(v + s)}$$

Deze beide hoeveelheden zijn gelijk. Dit is ook het geval met I en IV, daar de totale hoeveelheid vloeistof per glas immers weer v is.

Nu is inderdaad bij t_1 de hoeveelheid I gelijk aan IV en II gelijk aan III (zie tabel 1), waarmee het gestelde bewezen is.

Het onderstaande overzicht geeft het resultaat nog eens weer.

Tabel 2.

	WATERGLAS			WIJNGLAS	
	Water	Wijn		Water	Wijn
t_n	$\frac{pv}{p + q}$	$\frac{qv}{p + q}$	←	$\frac{qv}{p + q}$	$\frac{pv}{p + q}$
t_{n+1}	$\frac{p(v - s)}{p + q}$	$\frac{q(v - s)}{p + q}$	→	$\frac{qv + ps}{p + q}$	$\frac{pv + qs}{p + q}$
t_{n+1}	$\frac{(pv + qs) v}{(p + q)(v + s)}$	$\frac{(qv + ps) v}{(p + q)(v + s)}$	←	$\frac{(qv + ps) v}{(p + q)(v + s)}$	$\frac{(pv + qs) v}{(p + q)(v + s)}$
	I	II		III	IV

Opmerking.

Ook als de hoeveelheden vloeistof in waterglas en wijnglas ongelijk zijn (en de mengingsverhoudingen juist omgekeerd) gaat er bij elke proef evenveel water naar het wijnglas als wijn naar het waterglas.

Noemen we (bij dezelfde veronderstellingen als boven) de hoeveelheid vloeistof in het waterglas v en in het wijnglas w (bij het begin van een proef), dan gaat er bij elke proef:

$$\text{water naar wijnglas: } \frac{ps}{p + q} - \frac{(qw + ps)s}{(p + q)(w + s)} = \frac{(p - q)ws}{(p + q)(w + s)}$$

en

$$\text{wijn naar waterglas: } \frac{(pw + qs)s}{(p + q)(w + s)} - \frac{qs}{p + q} = \frac{(p - q)ws}{(p + q)(w + s)}$$

Deze beide hoeveelheden zijn gelijk. Hieruit volgt (wat ook direct in te zien is), dat bij een proef geen verplaatsing van water en wijn plaats heeft als de mengingsverhouding in beide glazen 1 : 1 is, dan is immers $p - q = 0$.

§ 3. Enige formules en notaties.

Alvorens tot de tweede uitbreiding van dit vraagstuk over te gaan, herinneren we aan het bekende binomium van Newton

$$(v + s)^n = \sum_{k=0}^n c_n^k v^{n-k} s^k \text{ waarin}$$

$$c_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \text{ terwijl}$$

$$c_n^k + c_n^{k+1} = c_{n+1}^{k+1} \text{ is.}$$

In dit artikel stelt n steeds een natuurlijk getal voor.

Wij voeren nu de volgende notatie in. In de ontwikkeling van $(v + s)^n$ is

$[(v + s)^n]$ = de som van de termen met oneven rangnummers,

$[[(v + s)^n]]$ = de som van de termen met even rangnummers,

$$\text{b.y. } [(v + s)^3] = v^3 + 3vs^2$$

$$[[(v + s)^3]] = 3v^2s + s^3.$$

Daar in ons vraagstuk alleen machten van $(v + s)$ optreden, zou men deze notatie nog kunnen vereenvoudigen, door alleen de exponent te vermelden, dus

$$[(v + s)^3] = [3] \text{ en } [[(v + s)^3]] = [[3]].$$

We hebben dit echter niet gedaan, omdat dit misschien wat onduidelijk is.

§ 4. Tweede uitbreiding.

We zullen nu het vraagstuk als volgt uitbreiden.

Hoe is de samenstelling van de vloeistof in het waterglas en het wijnglas na een willekeurig aantal malen deze proeven herhaald te hebben?

Hoewel we deze vraag langs een kortere weg kunnen beantwoorden door eerst de verhouding van de hoeveelheden water en wijn per glas te bepalen (zie § 7 en § 8), zullen we in deze paragraaf deze hoeveelheden zelf berekenen door gebruik te maken van het binomium van Newton. We hebben hierbij een aardige toepassing van de inductieve methode om zo'n vraagstuk op te lossen.

Om echter niet te veel plaatsruimte in beslag te nemen, zullen we bij de teruggaande handeling t_{n+1} gebruik maken van de in § 2 gevonden betrekkingen.

We zetten daartoe onze berekeningen van tabel 1 nog enige malen voort en zullen dan nagaan of er regelmaat te ontdekken is.

Nemen we nu weer een schepje s uit het waterglas, dan verhouden zich hierin water tot wijn als $\frac{v^2}{v+s} : \frac{vs}{v+s} = v : s$, zodat van dit schepje weer $\frac{vs}{v+s}$ water is en $\frac{s^2}{v+s}$ wijn.

Er blijft dus in het waterglas:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{water: } \frac{v^2}{v+s} - \frac{vs}{v+s} = \frac{v^2 - vs}{v+s} \\ \text{wijn: } \frac{vs}{v+s} - \frac{s^2}{v+s} = \frac{vs - s^2}{v+s} \end{array} \right\} \text{ totaal: } v - s.$$

In het wijnglas komt dus:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{water: } \frac{vs}{v+s} + \frac{vs}{v+s} = \frac{2vs}{v+s} \\ \text{wijn: } \frac{v^2}{v+s} + \frac{s^2}{v+s} = \frac{v^2 + s^2}{v+s} \end{array} \right\} \text{ totaal: } v + s.$$

Doet men dit nog tweemaal, dan krijgt men het volgende overzicht:

Tabel 3.

	WATERGLAS				WIJNGLAS		
	Water		Wijn		Water		Wijn
1°	v	v	0		0	v	v
h_1	$v - s$	$v - s$	0	$\rightarrow$	s	$v + s$	v
t_1	$\frac{v^2}{v+s}$	v	$\frac{vs}{v+s}$	$\leftarrow$	$\frac{vs}{v+s}$	v	$\frac{v^2}{v+s}$
h_2	$\frac{v^2 - vs}{v+s}$	$v - s$	$\frac{vs - s^2}{v+s}$	$\rightarrow$	$\frac{2vs}{v+s}$	$v + s$	$\frac{v^2 + s^2}{v+s}$
t_2	$\frac{v^3 + vs^2}{(v+s)^2}$	v	$\frac{2v^2s}{(v+s)^2}$	$\leftarrow$	$\frac{2v^2s}{(v+s)^2}$	v	$\frac{v^3 + vs^2}{(v+s)^2}$
h_3	$\frac{v^3 + vs^2 - v^2s - s^3}{(v+s)^2}$	$v - s$	$\frac{2v^2s - 2vs^2}{(v+s)^2}$	$\rightarrow$	$\frac{3v^2s + s^3}{(v+s)^2}$	$v + s$	$\frac{v^3 + 3vs^2}{(v+s)^2}$
t_3	$\frac{v^4 + 3v^2s^2}{(v+s)^3}$	v	$\frac{3v^3s + vs^3}{(v+s)^3}$	$\leftarrow$	$\frac{3v^3s + vs^3}{(v+s)^3}$	v	$\frac{v^4 + 3v^2s^2}{(v+s)^3}$
	I		II		III		IV

Hierbij geeft de omlijste lettergroep de totale hoeveelheid vloeistof aan, die het glas bevat. We zien nog eens, dat na elke teruggaande handeling er steeds evenveel water in het wijnglas als wijn in het waterglas is.

Bij beschouwing van bovenstaande tabel komen we tot het vermoeden, dat de volgende mengingsformules de toestand zullen weergeven.

Tabel 4.

	WATERGLAS			WIJNGLAS	
	Water	Wijn		Water	Wijn
h_n	$\frac{(v-s)[(v+s)^{n-1}]}{(v+s)^{n-1}}$	$\frac{(v-s)[[(v+s)^{n-1}]]}{(v+s)^{n-1}}$	$\rightarrow$	$\frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^{n-1}}$	$\frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^{n-1}}$
t_n	$\frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n}$	$\frac{v[[(v+s)^n]]}{(v+s)^n}$	$\leftarrow$	$\frac{v[[(v+s)^n]]}{(v+s)^n}$	$\frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n}$
	I	II		III	IV

We zullen deze formules bewijzen door volledige inductie.

Stel, dat deze formules gelden voor de n^{de} proef, dan zullen we aantonen, dat ze ook gelden voor de $(n+1)^{\text{ste}}$ proef.

We moeten dus bewijzen, dat geldt:

Tabel 5.

	WATERGLAS			WIJNGLAS	
	Water	Wijn		Water	Wijn
h_{n+1}	$\frac{(v-s)[(v+s)^n]}{(v+s)^n}$	$\frac{(v-s)[[(v+s)^n]]}{(v+s)^n}$	$\rightarrow$	$\frac{[(v+s)^{n+1}]}{(v+s)^n}$	$\frac{[(v+s)^{n+1}]}{(v+s)^n}$
t_{n+1}	$\frac{v[(v+s)^{n+1}]}{(v+s)^{n+1}}$	$\frac{v[[(v+s)^{n+1}]]}{(v+s)^{n+1}}$	$\leftarrow$	$\frac{v[[(v+s)^{n+1}]]}{(v+s)^{n+1}}$	$\frac{v[(v+s)^{n+1}]}{(v+s)^{n+1}}$
	I	II		III	IV

h_{n+1} . Bij de handeling h_{n+1} gaat er vloeistof van het waterglas naar het wijnglas.

De verhouding van water tot wijn in dit schepje is als (zie t_n)

$$\frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n} : \frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n} = [(v+s)^n] : [(v+s)^n]$$

Hierin is dus de hoeveelheid water $\frac{[(v+s)^n]s}{(v+s)^n}$ en de hoeveelheid wijn $\frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^n}$.

Nummeren we de kolommen weer met I, II, III en IV, dan verlopen de berekeningen als volgt:

I. Water in waterglas =

$$\frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n} - \frac{[(v+s)^n]s}{(v+s)^n} = \frac{(v-s)[(v+s)^n]}{(v+s)^n}$$

dus juist wat de tabel geeft; zie h_{n+1} ; I.

II. Wijn in waterglas =

$$\frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n} - \frac{[(v+s)^n]s}{(v+s)^n} = \frac{(v-s)[(v+s)^n]}{(v+s)^n}$$

dus juist wat de tabel geeft; zie h_{n+1} ; II.

We hadden dit natuurlijk ook kunnen vinden door de uitkomst onder I af te trekken van $v - s$.

III. Water in wijnglas =

$$\frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n} + \frac{[(v+s)^n]s}{(v+s)^n} = \frac{v[(v+s)^n] + s[(v+s)^n]}{(v+s)^n} \dots (1)$$

Stel $n = \text{even}$.

$$[(v+s)^n] = c_n^1 v^{n-1} s + c_n^3 v^{n-3} s^3 + \dots + c_n^{n-1} v s^{n-1} \\ = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} c_n^{2k+1} v^{n-2k-1} s^{2k+1} \dots (2)$$

$$[(v+s)^n] = c_n^0 v^n + c_n^2 v^{n-2} s^2 + \dots + c_n^n s^n \\ = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} c_n^{2k} v^{n-2k} s^{2k} \dots (3)$$

Dus is:

$$v[(v+s)^n] = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} c_n^{2k+1} v^{n-2k} s^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} c_n^{2k+1} v^{n-2k} s^{2k+1}.$$

Bij deze laatste herleiding is toegevoegd de term $c_n^{n+1} v^0 s^{n+1}$ welke nul is, omdat immers $c_n^{n+1} = 0$.

$$s[(v+s)^n] = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} c_n^{2k} v^{n-2k} s^{2k+1}.$$

De teller van (1) was:

$$\begin{aligned} v[(v+s)^n] + s[(v+s)^n] &= \sum_{k=0}^{n/2} (c_n^{2k+1} + c_n^{2k}) v^{n-2k} s^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} c_{n+1}^{2k+1} v^{n-2k} s^{2k+1} \\ &= c_{n+1}^1 v^n s + c_{n+1}^3 v^{n-2} s^3 + \dots + c_{n+1}^{n+1} s^{n+1} \\ &= [(v+s)^{n+1}]. \end{aligned}$$

Dus gaat (1) over in $\frac{[(v+s)^{n+1}]}{(v+s)^n}$, wat de tabel geeft, zie h_{n+1} ; III.

Stel $n = \text{oneven}$.

$$\begin{aligned} [(v+s)^n] &= c_n^1 v^{n-1} s + c_n^3 v^{n-3} s^3 + \dots + c_n^n s^n \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} c_n^{2k+1} v^{n-2k-1} s^{2k+1} \dots \dots \dots (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [(v+s)^n] &= c_n^0 v^n + c_n^2 v^{n-2} s^2 + \dots + c_n^{n-1} v s^{n-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} c_n^{2k} v^{n-2k} s^{2k} \dots \dots \dots (5) \end{aligned}$$

Dus is:

$$\begin{aligned} v[(v+s)^n] &= \sum_{k=0}^{n/2} c_n^{2k+1} v^{n-2k} s^{2k+1} \\ s[(v+s)^n] &= \sum_{k=0}^{n/2} c_n^{2k} v^{n-2k} s^{2k+1} \end{aligned}$$

De teller van (1) was:

$$\begin{aligned} v[(v+s)^n] + s[(v+s)^n] &= \sum_{k=0}^{n/2} (c_n^{2k+1} + c_n^{2k}) v^{n-2k} s^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n/2} c_{n+1}^{2k+1} v^{n-2k} s^{2k+1} \\ &= c_{n+1}^1 v^n s + c_{n+1}^3 v^{n-2} s^3 + \dots + c_{n+1}^n v s^n \\ &= [(v+s)^{n+1}]. \end{aligned}$$

Dus gaat (1) over in $\frac{[(v+s)^{n+1}]}{(v+s)^n}$, wat de tabel ook geeft, zie h_{n+1} ; III.

IV. Bij de handeling h_{n+1} is de totale hoeveelheid vloeistof in het wijnglas $v + s$.

We vinden dus

$$\begin{aligned}
 \text{wijn in wijnglas} &= (v + s) - \frac{[(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^n} = \\
 &= \frac{(v + s)^{n+1} - [(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^n} = \\
 &= \frac{[(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^n},
 \end{aligned}$$

dus juist wat de tabel geeft, zie h_{n+1} ; IV.

Hiermede is bewezen dat, als de formules juist zijn voor h_n , ze ook gelden voor h_{n+1} .

Nu zijn de formules juist voor $n = 1$, want dan vinden we (zie h_n en h_1):

$$\begin{aligned}
 \text{I.} \quad & \frac{(v - s) [(v + s)^{n-1}]}{(v + s)^{n-1}} \rightarrow \frac{(v - s) \cdot 1}{1} = v - s \\
 \text{II.} \quad & \frac{(v - s) [(v + s)^{n-1}]}{(v + s)^{n-1}} \rightarrow \frac{(v - s) \cdot 0}{1} = 0 \\
 \text{III.} \quad & \frac{[(v + s)^n]}{(v + s)^{n-1}} \rightarrow \frac{s}{1} = s \\
 \text{IV.} \quad & \frac{[(v + s)^n]}{(v + s)^{n-1}} \rightarrow \frac{v}{1} = v.
 \end{aligned}$$

Dus zijn de formules voor h_n algemeen geldig.

t_{n+1} . We behoeven hier slechts één der hoeveelheden I, II, III of IV rechtstreeks te berekenen b.v. III.

We kunnen dan door aftrekking van v de waarde voor IV vinden en hebben dan ook II en I (zie § 2). De waarde voor IV laat zich echter even eenvoudig rechtstreeks berekenen.

III. De verhouding van water tot wijn in dit teruggaande schepje is (zie h_{n+1})

$$\frac{[(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^n} : \frac{[(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^n} = \frac{[(v + s)^{n+1}]}{[(v + s)^{n+1}]}.$$

Hierin is dus de hoeveelheid water $\frac{[(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^{n+1}} s$ en de hoeveelheid wijn $\frac{[(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^{n+1}} v$.

Water in wijnglas =

$$\frac{[(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^n} - \frac{[(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^{n+1}} s = \frac{v [(v + s)^{n+1}]}{(v + s)^{n+1}}$$

dus juist wat de tabel geeft, zie t_{n+1} ; III.

IV. Wijn in wijnglas =

$$= \frac{[(v+s)^{n+1}]}{(v+s)^n} - \frac{[(v+s)^{n+1}]s}{(v+s)^{n+1}} = \frac{v[(v+s)^{n+1}]}{(v+s)^{n+1}}$$

dus juist wat de tabel geeft, zie t_{n+1} ; IV.

Hiermede is bewezen dat, als de formules juist zijn voor t_n , ze ook gelden voor t_{n+1} .

Nu zijn de formules juist voor $n = 1$, want dan vinden we (zie t_n en t_1)

$$\text{I. } \frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n} \rightarrow \frac{v \cdot v}{v+s} = \frac{v^2}{v+s}$$

$$\text{II. } \frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n} \rightarrow \frac{vs}{v+s}$$

III. Zie II.

IV. Zie I.

Dus zijn de formules voor t_n algemeen geldig.

Opmerking I.

Het is natuurlijk duidelijk, dat de formules voor h_n en t_n niet onafhankelijk van elkaar zijn. De formules voor t_n kunnen op dezelfde wijze uit h_n worden afgeleid, als we die voor t_{n+1} uit h_{n+1} berekend hebben.

Ook kunnen de vier formules voor t_n rechtstreeks uit die voor h_n worden afgeleid (dus zonder gebruik te maken van de in § 2 bewezen stelling), wat een zeer goede oefening voor het rekenen met deze reeksen is; vooral de berekeningen bij I en II!

Opmerking II.

In tabel 3 vallen ons nog de volgende betrekkingen op.

We schrijven daartoe de tabel schematisch over.

Tabel 6.

	WATERGLAS			WIJNGLAS	
	Water	Wijn		Water	Wijn
1°	a_1	b_1		c_1	d_1
h_1	a_2	b_2	$\rightarrow$	c_2	d_2
t_1	a_3	b_3	$\leftarrow$	c_3	d_3
h_2	a_4	b_4	$\rightarrow$	c_4	d_4
t_2	a_5	b_5	$\leftarrow$	c_5	d_5
h_3	a_6	b_6	$\rightarrow$	c_6	d_6
t_3	a_7	b_7	$\leftarrow$	c_7	d_7
	I	II		III	IV

a. In de eerste plaats merken we op:

$$d_2 : c_2 = d_3 : c_3 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4$$

$$d_4 : c_4 = d_5 : c_5 = a_5 : b_5 = a_6 : b_6$$

In het algemeen:

$$d_{2n} : c_{2n} = d_{2n+1} : c_{2n+1} = a_{2n+1} : b_{2n+1} = a_{2n+2} : b_{2n+2}$$

Het bewijs volgt direct door substitutie van de voor deze letters gevonden waarden.

Zie de tabellen 4 en 5: $d_{2n} = \frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^{n-1}}$ enz.

Het volgt echter ook direct uit § 2. Daar zagen we (zie tabel 2), dat de verhouding van de hoeveelheden water en wijn in een schepje gelijk is aan die in het glas, waaruit het schepje genomen is en eveneens gelijk aan de verhouding van de hoeveelheden water en wijn, die in dat glas achterblijven.

Op grond hiervan geldt (zie tabel 2):

$$d_{2n+2} : c_{2n+2} = d_{2n+3} : c_{2n+3}$$

$$\text{dus ook } d_{2n} : c_{2n} = d_{2n+1} : c_{2n+1}$$

$$\text{en } a_{2n+1} : b_{2n+1} = a_{2n+2} : b_{2n+2}.$$

Bovendien was daar:

$$a_{2n+1} = d_{2n+1} \text{ en } b_{2n+1} = c_{2n+1}.$$

Dus geldt weer:

$$d_{2n} : c_{2n} = d_{2n+1} : c_{2n+1} = a_{2n+1} : b_{2n+1} = a_{2n+2} : b_{2n+2}.$$

b. In de tweede plaats merken we op:

$$a_4 = d_2 \cdot \frac{v-s}{v+s}$$

$$b_4 = c_2 \cdot \frac{v-s}{v+s}$$

$$a_6 = d_4 \cdot \frac{v-s}{v+s}$$

$$b_6 = c_4 \cdot \frac{v-s}{v+s}$$

In het algemeen:

$$a_{2n+2} = d_{2n} \cdot \frac{v-s}{v+s}$$

$$b_{2n+2} = c_{2n} \cdot \frac{v-s}{v+s}$$

Het bewijs volgt weer direct door substitutie van de voor deze letters gevonden waarden (zie de tabellen 4 en 5).

Het volgt ook direct uit de onder a. afgeleide aaneengeschakelde evenredigheid. Immels blijkt daar

$$d_{2n} : c_{2n} = a_{2n+2} : b_{2n+2}$$

$$\text{of } (d_{2n} + c_{2n}) : (a_{2n+2} + b_{2n+2}) = d_{2n} : a_{2n+2} = c_{2n} : b_{2n+2}$$

$$\text{of } (v+s) : (v-s) = d_{2n} : a_{2n+2} = c_{2n} : b_{2n+2}$$

$$\text{dus } a_{2n+2} = d_{2n} \cdot \frac{v-s}{v+s} \text{ en } b_{2n+2} = c_{2n} \cdot \frac{v-s}{v+s}.$$

Opmerking III.

Wil men b.v. in gehelen nauwkeurig de toestand bepalen aan het einde van de zesde proef als $v = 100$ en $s = 10$, dan kan men als volgt te werk gaan.

$$\begin{aligned}\text{Water in. waterglas} &= \frac{v[(v+s)^6]}{(v+s)^6} \\ &= \frac{v(v^6 + 15v^4s^2 + 15v^2s^4 + s^6)}{v^6 + 6v^5s + 15v^4s^2 + 20v^3s^3 + 15v^2s^4 + 6vs^5 + s^6}\end{aligned}$$

Deel teller en noemer door v^6 , dan vindt men bij benadering

$$\begin{aligned}100 \times \frac{1 + 15 \cdot (1/10)^2 + 15 \cdot (1/10)^4 + \dots}{1 + 6 \cdot (1/10) + 15 \cdot (1/10)^2 + 20 \cdot (1/10)^3 + \dots} \\ = 100 \times \frac{1 + 0,15 + 0,0015}{1 + 0,6 + 0,15 + 0,02} = \frac{115,15}{1,77} \approx 65\end{aligned}$$

(Exact berekend, vindt men $64 \frac{1769196}{1771561}$.)

Dit is dus tevens de hoeveelheid wijn in het wijnglas; door aftrekking van 100 vindt men de hoeveelheid wijn in het waterglas en tevens het water in het wijnglas. (Zie ook toepassing I van § 5.)

§ 5. Een andere vorm van de mengingsformules.

In § 4 hebben we berekend de hoeveelheden water en wijn aan het einde van de n^{de} proef (zie tabel 4). We zullen nu hieruit een eenvoudige formule afleiden, waarin de verhouding van water tot wijn voorkomt.

Stel dat de verhouding van water tot wijn in het waterglas aan het einde van de n^{de} proef is $p : q$ ($p > q$; beide reëel en positief).

Volgens tabel 4 geldt dus:

$$\begin{aligned}\frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n} : \frac{v[(v+s)^n]}{(v+s)^n} &= p : q \\ \text{of } [(v+s)^n] : [(v+s)^n] &= p : q \\ \text{of } \frac{[(v+s)^n] - [(v+s)^n]}{[(v+s)^n] + [(v+s)^n]} &= \frac{p - q}{p + q} \\ \text{of } \frac{(v-s)^n}{(v+s)^n} &= \frac{p - q}{p + q} \\ \text{of } \boxed{\left(\frac{v-s}{v+s}\right)^n = \frac{p-q}{p+q}} &\dots\dots\dots (6)\end{aligned}$$

Toepassingen.

I. *Berekening van de hoeveelheden water en wijn in elk der glazen aan het einde van de zesde proef als $v = 100$ en $s = 10$.*

Substitutie in onze formule geeft

$$\left(\frac{90}{110}\right)^6 = \frac{p-q}{p+q}.$$

Met behulp van een 4-decimalige logarithmentafel vinden we

$$\frac{p-q}{p+q} = 0,2998.$$

Nemen we $p + q = 100$, dan is $p - q = 29,98$. Afgerond op gehelen is $p = 65$ en $q = 35$ m.a.w. de hoeveelheden water en wijn aan het einde van de zesde proef zijn resp. 65 en 35 in het waterglas en in het wijnglas dus omgekeerd. (Zie opmerking III. van § 4).

II. *Berekening van de grootte van het schepje om na een bepaald aantal proeven een bepaalde mengingsverhouding te bereiken.*

Nemen we $v = 100$, $n = 6$ en $p : q = 13 : 7$, dan krijgen we:

$$\left(\frac{100-s}{100+s}\right)^6 = \frac{6}{20}.$$

Met behulp van een 4-decimalige logarithmentafel vinden we:

$$\frac{100-s}{100+s} = 0,8182 \therefore s = \frac{18,18}{1,8182}$$

Afgerond op gehelen bevat het schepje dus 10 volume-eenheden.

III. Daar vergelijking (6) van § 5 homogeen is in s en v , kunnen we ook de verhouding van het schepje tot de totale hoeveelheid vloeistof per glas bepalen om een bepaalde mengingsverhouding te bereiken na een bepaald aantal proeven (mits deze verhouding kleiner dan 1 is). De berekening verloopt analoog aan die van II.

IV. *Berekening van het aantal proeven om bij gegeven (gelijke) hoeveelheden water en wijn en gegeven grootte van het schepje een bepaalde mengingsverhouding in elk der glazen te bereiken.*

Nemen we $v = 100$, $s = 10$ en $p : q = 13 : 7$, dan vinden we

$$\left(\frac{90}{110}\right)^n = \frac{6}{20}$$

waaruit volgt, dat we 6 proeven moeten doen.

§ 6. De volledige menging.

Onder de volledige menging van water en wijn verstaan we, dat er evenveel volume-eenheden water als wijn in het mengsel aanwezig zijn.

De vraag is nu:

Na hoeveel proeven wordt de volledige menging bereikt?

In § 5 vonden we, dat aan het einde van de n^{de} proef geldt:

$$\left(\frac{v-s}{v+s}\right)^n = \frac{p-q}{p+q}.$$

Er is een volledige menging als $p - q = 0$, dus als $\left(\frac{v-s}{v+s}\right)^n = 0$.

Hieraan wordt voldaan:

10. door $s = v$, onafhankelijk van n .

Dit spreekt natuurlijk vanzelf. Hierbij gaat immers bij de eerste heengaande handeling de hele inhoud van het waterglas naar het wijnglas, waarin dan evenveel water als wijn is.

Dit laatste is dan ook het geval in de teruggaande schep en dus ook aan het einde van de eerste proef in beide glazen. We merkten reeds op (zie de opmerking van § 2), dat dit dan ook zo blijft bij alle volgende proeven.

20. als $s \neq v$ is, door $n \rightarrow \infty$ (bedenk dat $0 < \frac{v-s}{v+s} < 1$ is).

Dit wil dus zeggen, dat we bij onze proeven wel steeds meer en meer tot een volledige menging naderen, maar die nooit geheel bereiken.

Een volledige menging is dus alleen mogelijk als men twee even grote hoeveelheden water en wijn direct bij elkaar voegt.

§ 7. Rechtstreekse afleiding van vergelijking (6) van § 5.

Hoewel het doel van dit artikel was om zoveel mogelijk het binomium van Newton te gebruiken, willen we toch niet nalaten ook de rechtstreekse afleiding van vergelijking (6) van § 5 te vermelden, berustend op verhoudingen.

We noemen de verhouding van water tot wijn in het waterglas bij t_n nu $p_n : q_n$, dus bij t_{n+1} noteren we $p_{n+1} : q_{n+1}$.

Volgens § 2 geldt dus (zie tabel 2)

$$\frac{(p_nv + q_ns)v}{(p_n + q_n)(v + s)} : \frac{(q_nv + p_ns)v}{(p_n + q_n)(v + s)} = p_{n+1} : q_{n+1}$$

$$\text{of } (p_nv + q_ns) : (q_nv + p_ns) = p_{n+1} : q_{n+1}$$

$$\text{of } \frac{(p_nv + q_ns) - (q_nv + p_ns)}{(p_nv + q_ns) + (q_nv + p_ns)} = \frac{p_{n+1} - q_{n+1}}{p_{n+1} + q_{n+1}}$$

$$\text{of } \frac{(v-s)(p_n - q_n)}{(v+s)(p_n + q_n)} = \frac{p_{n+1} - q_{n+1}}{p_{n+1} + q_{n+1}}.$$

Zo geldt dus ook

$$\frac{(v-s)(p_{n-1} - q_{n-1})}{(v+s)(p_{n-1} + q_{n-1})} = \frac{p_n - q_n}{p_n + q_n}.$$

Uit deze recurrente betrekking volgt

$$\frac{p_n - q_n}{p_n + q_n} = \frac{(v - s)^{n-1} (p_1 - q_1)}{(v + s)^{n-1} (p_1 + q_1)}.$$

Nu geldt bij t_1 (zie tabel 1)

$$p_1 : q_1 = \frac{v^2}{v + s} : \frac{v s}{v + s}$$

of
$$p_1 : q_1 = v : s$$

of
$$\frac{p_1 - q_1}{p_1 + q_1} = \frac{v - s}{v + s}.$$

Dus

$$\frac{p_n - q_n}{p_n + q_n} = \left(\frac{v - s}{v + s} \right)^n.$$

Hiermede is vergelijking (6) van § 5 bewezen; we noemden daar p_n en q_n resp. p en q .

§ 8. Afleiding van de mengingsformules van § 4 uit die van § 5 (of § 7).

Het is natuurlijk duidelijk, dat we nu weer omgekeerd de formules van § 4 (zie tabel 4) uit die van § 5 kunnen afleiden. We hebben dan een tweede bewijs voor deze formules; nu echter uitsluitend met behulp van eigenschappen van evenredigheden.

Volgens § 5 geldt dus, zie (6):

$$\frac{(v + s)^n}{(v - s)^n} = \frac{p + q}{p - q}$$

of
$$\frac{(v + s)^n + (v - s)^n}{(v + s)^n - (v - s)^n} = \frac{p}{q}$$

of
$$\frac{[(v + s)^n]}{[(v + s)^n]} = \frac{p}{q}$$

Daar de totale hoeveelheid vloeistof bij t_n in het waterglas v is, vinden we voor de hoeveelheid

$$\text{water} = \frac{[(v + s)^n]v}{(v + s)^n}$$

en
$$\text{wijn} = \frac{[(v + s)^n]v}{(v + s)^n}$$

In § 2 is reeds aangetoond, dat de hoeveelheden water en wijn in het wijnglas dan juist verwisseld zijn.

Verder volgt uit § 2, dat de hoeveelheden water en wijn bij h_n en t_n in het wijnglas evenredig zijn (zie h_{n+1} en t_{n+1} in tabel 2 of ook opmerking IIa van § 4).

Volgens het bovenstaande is deze verhouding als

$$[(v+s)^n] : [(v+s)^n].$$

Daar de som van die hoeveelheden $v + s$ is, bevindt zich dus in het wijnglas bij h_n :

$$\text{water} = \frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^n} \cdot (v+s) = \frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^{n-1}}$$

$$\text{en wijn} = \frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^n} \cdot (v+s) = \frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^{n-1}}.$$

Eveneens volgt uit § 2, dat de hoeveelheden water en wijn bij t_n en h_{n+1} in het waterglas evenredig zijn (zie tabel 2 of ook weer opmerking IIa van § 4). Deze verhouding is als (zie boven)

$$[(v+s)^n] : [(v+s)^n].$$

Daar de som van die hoeveelheden $v - s$ is, bevindt zich dus in het waterglas bij h_{n+1} :

$$\text{water} = \frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^n} \cdot (v-s)$$

$$\text{en wijn} = \frac{[(v+s)^n]}{(v+s)^n} \cdot (v-s).$$

Deze hoeveelheden worden dus bij h_n :

$$\text{water} = \frac{[(v+s)^{n-1}]}{(v+s)^{n-1}} \cdot (v-s)$$

$$\text{en wijn} = \frac{[(v+s)^{n-1}]}{(v+s)^{n-1}} \cdot (v-s).$$

Hiermede zijn de formules van § 4 (zie tabel 4) afgeleid uit die van § 5 (§ 7) met behulp van die van § 2 (zie tabel 2).

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH

AMERSFOORT

- | | |
|------------------------------|--------------------------|
| I. Zeventiende druk | 156 blz. 21 fig. f 3.—* |
| II. Zestiende druk ter perse | 204 blz. 50 fig. f 3.00* |
| III. Elfde druk ter perse | 198 blz. 60 fig. f 3.00* |

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Vijfde druk. 164 blz. 20 fig. f 2,00*.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

$V\alpha$ en $VI\alpha$ Nieuwe Schoolalgebra III α

$V\beta$ en $VI\beta$ Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Verschenen: nieuwe drukken van alle drie antwoordenboekjes.

Voor leraren zijn antwoorden verkrijgbaar; bovendien bij
P. W i j d e n e s de volledige uitwerkingen van de logaritmen-
vraagstukken in 4 en in 5 decimalen.

Uitgave P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Verschenen:

BEKNOPT LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

door Prof. H. J. VAN VEEN

- A. Projectiemethoden
- B. Oppervlakken en Ruimtekrommen
- C. Aanhangel (Kegelsneden)

Derde druk geb. f 15,—*

BEKNOPT ANALYTISCHE MEETKUNDE

door Prof. Dr J. G. RUTGERS

- A. Het platte vlak - 99 figuren en 256 vraagst. met antw.
- B. De ruimte - 40 figuren en 146 vraagst. met antw.

Vierde druk geb. f 13.50*

INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

Met toepassingen op verschillende gebieden

door Dr H. J. E. BETH

Derde druk. Prijs f 14.50*, geb. f 15.75*

LEERBOEK DER GONIOMETRIE EN TRIGONOMETRIE

door P. WIJDENES

Zesde druk geb. f 12.50*

Verschenen:

Dr P. MOLENBROEK

LEERBOEK DER STEREOMETRIE, 10e druk
Geb. f 9.50*

P. WIJDENES

BEKNOPT DRIEHOEKSMETING, 10e druk
A f 1.05*; B f 1.80*; A en B f 2.85*

Dr B. GONGGRIJP

TAFEL D, 8e druk, geb. f 3.40*

P. WIJDENES en Dr D. DE LANGE

VLAKKE MEETKUNDE I, 13e druk
f 2.40*

P. WIJDENES

ALGEBRA VOOR MULO I, 38e druk, f 1.80*

ALGEBRA VOOR MULO IIB, 16e druk, f 3.00*

MEETKUNDE VOOR MULO II, 9e dr., gec. f 2.00*

NOORDHOFF's TAFEL IN VIER DECIMALEN, 10e druk,
f 1.35*

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel