

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, LEEUWARDEN
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND - DR. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

22e JAARGANG 1946/47

Nr. 5, 6

ZIE BLZ. 265; OOK BLZ. 285 VOOR DE MEDEDELING
VAN HET MATHEMATISCH CENTRUM

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 8.00*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 8.00*) zijn ingetekend, betalen f 6.75*.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmo-graphie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 2,— op de postgirorekening no. 59172 van Dr. H. Ph. Baudet te 's Gravenhage. De leden van **Wimecos** storten hun contributie voor het verenigingsjaar van 1 September 1946 t/m 31 Augustus 1947 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 6,75 per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
M. G. BEUMER. Het theorema van Pythagoras; slot	257
Van de personen	264
Officiële mededelingen van Wimecos	265
Prof. Dr H. D. KLOOSTERMAN, Waarde en waardeering der wiskunde	266
Boekaankondiging	279
Korrels LXXVII—LXXX	280
Vacantiecursus van het Mathematisch Centrum	285
G. H. FREDERIK, De rekenliniaal	286
Prof. Dr H. DE VRIES, Herinneringen en overpeinzingen van een oud man	292
Prof. Dr B. L. v. d. WAERDEN, Ontwakende wetenschap	300
Dr K. CUYPERS, Over de dynamisch-intuïtieve ontwikkeling van de theoretische rekenkunde	310
Inhoud van de 22e Jaargang 1946/1947	318

de „Pythagoreërs” en zodoende is het absoluut onmogelijk ook maar bij benadering te onderscheiden tussen de werkelijke verdiensten van den leider van de bond en die van zijn gezellen.

Dit geldt ook voor het geval van het theorema. Doch zonder bovenstaande feiten te kennen zal het eveneens reeds duidelijk zijn, dat de stelling die het verband tussen de rechthoekszijden en de hypotenusa in de rechthoekige driehoek aangeeft de naam van Pythagoras hoogstens nog draagt als een gemakkelijk distinctief, waarover wij hieronder nog zullen vermelden in hoeverre dit gerechtvaardigd is, en niet als een uitdrukking van het feit, dat dit theorema van origineel Pythagorees origine is. Want reeds in de empirische Egyptische meetkunde van 2000 jaren vóór onze jaartelling gebruikte men voor de constructie van rechte hoeken een draaddriehoek met zijden in de verhouding $3 : 4 : 5$ en in de pyramiden vindt men deze afmetingen voortdurend terug¹⁾, terwijl ook uit Babylonië en de andere oosterse landen overblijfselen daarvan bekend zijn. Over de kwestie aan welken onderzoeker de formulering van deze eigenschap, zoals wij die op het huidige ogenblik kennen, moet worden toegeschreven, is een interessant probleem, dat zich steeds in een grote belangstelling der historici mocht verheugen. Velen hunner hebben getracht een enigszins aannemelijke verklaring te creëren doch slechts weinigen slaagden er in hypothesen naar voren te brengen die werkelijk pasten in een geleidelijke

harmonische ontwikkeling der meetkundige begrippen van de oudste tijden tot op Euclides; in de Elementen vindt men een vrij gecompliceerd bewijs voor het theorema²⁾, en dit duidt op een langdurige ontwikkelingsgang eer men tot een dergelijke hoogte der bewijsvoering was gekomen.

Een tweetal concepties mogen hier bespreking ondervinden, die van Tannery en van Naber. Tannery neemt aan, dat het inzicht in het theorema zou zijn ontstaan uit de beschouwing van de gelijkvormigheid der beide driehoeken, waarin een rechthoekige driehoek wordt verdeeld door de lood-

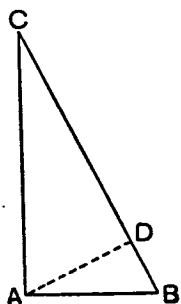


Fig. 1.

lijn op de hypotenusa, met de gehele driehoek. (Fig. 1). Uit de gelijkvormigheid volgt, dat de vierkanten opgericht op de zijden AB

¹⁾ Vgl. b.v. de resultaten der opmetingen van den „Astronomer Royal for Scotland” Charles Piazzi Smyth (1819—'90), vermeld bij H. A. Naber, Van theorema naar sectio divina (Den Haag 1939), blz. 81 e.v.

²⁾ Boek I, prop. 47; zie: E. J. Dijksterhuis, De elementen van Euclides I (Groningen 1929), blz. 203.

en AC opv. gelijk zijn aan de rechthoeken gevormd door BC, BD en BC, CD. Dit bewijs nu levert Euclides op geheel andere en meer exacte wijze, in overeenstemming met het stadium, dat de wiskunde in zijn tijd had bereikt¹⁾. Deze hypothese van Tannery vult de kloof tussen de oudere geometrie en die der elementen op aannemelijke wijze op, en dit is reden dat zij op het ogenblik wel wordt aanvaard als zijnde het meest in overeenstemming met de bekende feiten. Toch mogen wij niet verzuimen op deze plaats ook

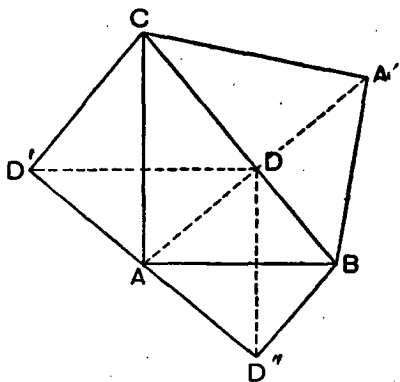


Fig. 2.

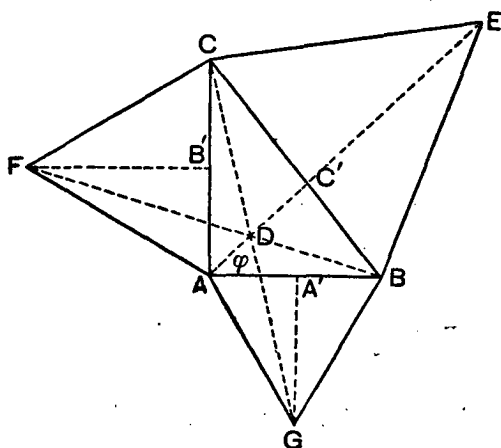


Fig. 3.

de andere hypothese, die van H. A. Naber²⁾ te vermelden. Naber wijst er eerst op, dat bij Euclides³⁾ de gelijkvormigheid, waarvan Tannery spreekt, wordt vermeld. Dit zou eigenlijk het theorema van Pythagoras in de kern bevatten: immers slaat men de beide driehoekjes naar buiten om, en ook de gehele driehoek, (Fig. 2), dan heeft men het theorema vóór zich, en wel in veel algemener vorm dan in het geval met de vierkanten. De stelling toch geldt voor alle gelijkvormige figuren, zoals een figuurtje

¹⁾ Vgl. Tannery, I, p. 105.

²⁾ Henri Adrien Naber (overleden in 1945) promoveerde in 1901 tot doctor in de wis- en natuurkunde op een dissertatie over de stereometer; hij bestudeerde verschillende historische kwesties, o.a. het theorema van Pythagoras, het perpetuum mobile en de duikboot van Drebbel. In Hoorn stichtte hij een Drebbelmuseum en polemiseerde jarenlang o.a. met Prof. F. M. Jaeger (overl. in 1945) en de Kon. Acad. der Wetensch. Hij schreef vele studies in een merkwaardige trant en zijn werk steunt op een schier onbeperkte belesenheid en een grote verbeeldingskracht. Een lijst van zijn verhandelingen vindt men in zijn „Van theorema naar sectio divina” van 1939 (blz. 205—216); dit boek mag wel de bekroning van de geestelijke arbeid van dezen veel miskenden geleerde genoemd worden.

³⁾ Bk. VI, prop. 8; zie Dijksterhuis II (Groningen 1930), blz. 90.

dat wij aan Naber ontleen (Fig. 3) aantoon¹⁾. Ook de z.g.n. stelling van Pappos (3e eeuw na. Chr.), waarbij op de zijden

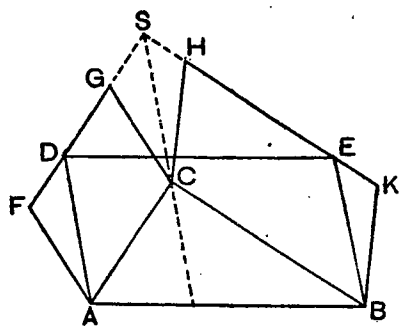


Fig. 4.

parallellograms worden beschreven²⁾ is welbekend (Fig. 4). Algemeen: richt men op de rechthoekszijden en op de schuine zijde van een rechthoekige driehoek gelijkvormige figuren F_a , F_b en F_c op, waarin de rechthoekszijden en de hypotenusa homologe lijnstukken zijn, dan geldt: $F_a + F_b = F_c$.

Een interessante toepassing hiervan vindt men in de kwadraturen van Hippocrates (5e eeuw v. Chr.). Deze Atheense geleerde, die wij hebben te onderscheiden van zijn beroemden medjschen naamgenoot, zocht de kwadratuur van de cirkel, en hierbij wordt het theorema gebruikt met cirkelvormige figuren op rechthoekszijden en schuine zijde. Een uitbreiding hiervan gaf later de Arabische mathematicus Ibn Alhaitam (gestorven 1039), en de figuurtjes

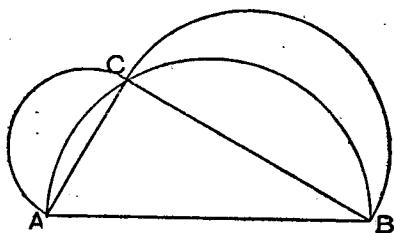


Fig. 5.

op de rechthoekszijden genieten tegenwoordig grote bekendheid als de maantjes of meniscen van Hippocrates (Fig. 5.) Ook de

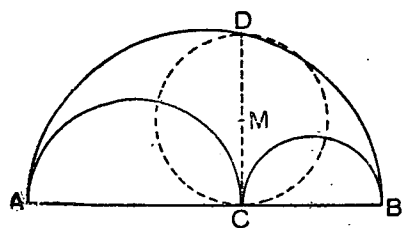


Fig. 6.

sikkel van Archimedes (287—212 v. Chr.) (arbelos, of in een speciaal geval salinon) is een uitbreiding van het theorema van Pythagoras op cirkelvormige figuren³⁾ (Fig. 6). En juist de wijze waarop Hippocrates het theorema onbevange uitbreidt op cirkelvormige figuren, hetgeen

vermeld wordt in een historiografisch controleerbare overlevering,

¹⁾ Naber, blz. 17; een korte samenvatting in gemakkelijk leesbare vorm geeft W. Lietzmann, Der pythagoreische Lehrsatz (Leipzig—Berlin 1926), S. 26—40.

²⁾ Bk. IV, prop. 1; zie: Pappi Alexandrini, Collectionis quae supersunt... edidit... Fr. Hultsch I (Berlin 1876), S. 176. Vgl. Euclides Bk. VI, prop. 31; zie Dijksterhuis II, blz. 114.

³⁾ Zie b.v. D. J. E. Schrek, De sikkel van Archimedes. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 30 (1942—'43), 2; 9 e.v.

nl. de commentaar van Simplicios op de Physica van Aristoteles ¹⁾, geldt als een sterk argument in bevestigende zin voor Naber's opvatting.

Uit dit bericht trekt Naber overigens nog een conclusie, die in dit verband zeker de vermelding waard is. Allereerst dan, dat de Grieken vóór of in ieder geval ten tijde van Hippocrates er blijkbaar geen bezwaar in zagen met kromlijnige figuren te werken, hoewel in de Elementen daarvan niets tot uiting komt ²⁾; Hippocrates bezigt het theorema in de modificatie, die gewoonlijk „de uitbreiding van Euclides” wordt genoemd. Hieruit meent hij te kunnen concluderen, dat men voor de uitbreiding van de stelling in het geheel niet behoefde te wachten op Euclides, maar dat de Pythagoreërs (of liever: de wiskundigen uit het tijdperk vóór 350 v. Chr.) en misschien Pythagoras zelf de meest typische toepassingen van het theorema reeds bekend geweest moeten zijn. Uit de omstandigheid, dat zij met kromlijnige figuren werkten meent hij te kunnen besluiten, dat deze wiskundigen het theorema als iets zeer eenvoudig beschouwden en dat zij geen bewijs nodig achtten; dat dit dus aanvaard zou zijn als iets vanzelfsprekends.

Een ander argument ziet Naber in de ontwikkeling van het begrip gnomon ³⁾. De gnomon, later ook Jacobstaff is een apparaat bestaande uit twee of meer loodrechte staafjes met kijkgleufjes en het werd ten tijde van Newton nog voor hoekmetingen op zee gebruikt. De betekenis echter heeft zich gewijzigd; bij Aristoteles is het de rand om een vierkant en bij

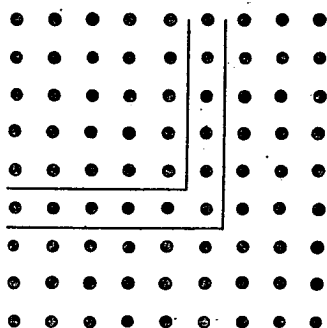


Fig. 7.

Euclides een figuur in de vorm van een scheve winkelhaak. Bij Heroon van Alexandrië (± 100 v. Chr.) is het alles wat een figuur of ook een getal maakt, dat gelijkvormig is aan het oorspronkelijke; de oneven getallen zijn gnomon-getallen, omdat $1^2 + 3 = 2^2$; $3^2 + 7 = 4^2$; $5^2 + 11 = 6^2$, enz. (Fig. 7).

Nu bezit alleen de rechthoekige driehoek (afgezien van de rechthoek met als zijden 1 en $\sqrt{2}$) de eigenschap dat de gnomon dezelfde

¹⁾ Zie F. Rudio, Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippocrates. Bibliotheca Mathematica [3] 3 (1902), 7—62 en Dijksterhuis I, blz. 25 e.v.

²⁾ Bk. VI, prop. 31; zie Dijksterhuis II, blz. 114; vgl. Naber, blz. 28—29.

³⁾ Naber, blz. 19—21.

vorm heeft als begin- en eindfiguur, en dit, aldus oordeelt Naber zal veel hebben bijgedragen tot een spontaan begrip van het theorema. Door dit inzicht wordt het theorema van Pythagoras weer een echt theorema, dat is: iets, wat door zuivere beschouwing wordt gekend; de latere wiskundigen echter hebben door hun arithmetisering der meetkunde het begrip verduisterd en deze simpele oplossing over het hoofd gezien.

Men moge het ons niet ten kwade duiden, dat wij naar aanleiding van Naber's opvattingen, die ongeveer uit 1894 dateren en voor het eerst uitvoerig in 1908 werden geponeerd¹⁾ wellicht meer geschreven hebben dan de actualiteit van deze beschouwingen toelaat. Wij willen evenwel niet nalaten te wijzen op de verfrissende werking, die zijn gedachten kunnen uitoefenen bij de behandeling van het theorema. Vooreerst zou men van de huidige behandelingswijze der meetkunde in de leerboeken kunnen opmerken, dat in de geometrische begrippen al te veel de namen van getalgroepen en de bewerkingen op deze gezien wordt. Met het neerschrijven van a^2 , b^2 of c^2 wordt bijna onmiddellijk verbonden de gedachte aan een vierkantsfiguur. Ook van historisch oogpunt zou men bezwaren kunnen inbrengen tegen de wijze, waarop de stelling van Pythagoras in de leerboeken wordt ingevoerd²⁾. Gewoonlijk vindt, naar aanleiding van de gelijkvormigheid der driehoeken waarin de loodlijn op de schuine zijde een rechthoekige driehoek verdeelt, met de gehele driehoek, de afleiding plaats van de algebraïsche uitdrukking der stelling. De meetkundige lengten der zijden vindt men door middel van algebraïsche getallen uitgedrukt in (overigens willekeurige) lengte-eenheden. Is men gekomen bij de behandeling van de oppervlakken, dan volgt de opmerking dat a^2 beschouwd kan worden als het oppervlak van een vierkant met een zijde van a lengte-eenheden, en dit wordt dan op andere wijze geformuleerd dan de eerste maal. Deze behandelingswijze nu is nog de meest gangbare in de schoolboeken³⁾, hoewel representatieve leerboeken

¹⁾ Naber schreef over het theorema van Pythagoras in het studententijdschrift *Propria Cures* (1892 en '94), en poneerde het bewijs met behulp van de uitslaande driehoeken en het gnomon in een stelling van zijn dissertatie „De stereometer” (1901); voorts uitvoerig in de boeken *Das Theorem des Pythagoras* (Haarlem 1908), *Meetkunde en mystiek* (A'dam 1915) en *Van theorema naar sectio divina* (Den Haag 1939).

²⁾ Vgl. b.v. Derksen en De Laive, *Leerboek der vlakke meetkunde*, dl. 2 (11e druk, Zutphen 1937), blz. 31; 80.

³⁾ In P. Molenbroek, *Leerboek der vlakke meetkunde* (Groningen 1924), blz. 167; 185 wordt dit standpunt gehuldigd; in latere uitgaven van dit werk is hierin verandering gebracht; zie b.v. de 9e druk, bewerkt door P. Wijdenes (Groningen 1943), blz. 176; 205.

der meetkunde langzamerhand een andere opvatting gaan huldigen, die meer in overeenstemming is met de methode, waarvan de loop der historische ontwikkeling in vele punten is opgehelderd. Eenheid in behandelingswijze is niet te bespeuren en men kan zich de vraag stellen of niet met evenveel recht andere opvattingen, als b.v. die van N a b e r opgeld zouden kunnen doen. Wel is waar is zijn mening over de historische ontwikkeling van de stelling van P y t h a g o r a s niet ver verwijderd van het hypotetische, maar men kan zeggen dat bepaalde argumenten en bewezen feiten een zekere stevigheid van fundering aan deze gedachtengang verlenen, en omstandigheden, die op een totale of ook maar gedeeltelijke absurditeit van deze mening duiden zijn niet aanwezig. Maar welk nut heeft de meer exacte kennis van een historische groei, zoals b.v. van de Elementen van E u c l i d e s, indien men deze niet respecteert of dienstbaar maakt aan de didactiek. Het bewijs voor de stelling van P y t h a g o r a s volgens E u c l i d e s moge interessant zijn uit geometrisch oogpunt (en er zijn nog veel meer mooie bewijzen), maar deze zijn niet de meest geschikte om het inzicht te bevorderen. Een historisch voorbeeld: een der meest vooraanstaande mathematici uit onze eeuw, A l b e r t E i n s t e i n bracht in zijn jeugd twee weken door met „angestremgtem Nachdenken” voor hij het bewijs begreep. Maar wij kunnen ons de vraag stellen of dat nodig is; steeds worden er bewijzen gevonden maar geen enkele dezer oplossingen draagt het kenmerk dat onze grote landgenoot B o e r h a v e aan het ware inhaerent achtte, nl. de eenvoud. Als wij de argumenten van N a b e r aanvaarden — en wij kunnen dit met evenveel recht doen als dat wij de huidige kennis van de ontwikkeling van het Euclidisch systeem als acceptabel aannemen — dan heeft de Griekse mathematicus met deze zaak weinig moeite gehad.

Bij de behandeling van het theorema behoeven dan niet eens de uitgezaagde plankjes gebruikt te worden zoals het vroeger wel gedaan werd¹⁾. De gelijkvormigheid van de driehoek kan toegepast worden op de driehoekjes, waarin de loodlijn op de hypotenusa een rechthoekige driehoek verdeelt. Klapt men de driehoekjes en ook de gehele driehoek naar buiten om (Fig. 2), dan ziet men het theorema aanschouwelijk voor zich en reeds in een meer algemeen geval dan met de vierkanten. Bij de behandeling van de oppervlakken kan het bewijs van E u c l i d e s gegeven worden, dat zich schitterend leent in het kader van dat hoofdstuk. Daarop kan men een beschouwing laten aansluiten over het uitdrukken van oppervlakken

¹⁾ Vgl. K. V o s, Multatuli en het theorema van P y t h a g o r a s. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 8 (1920—'21), 266.

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOOT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - PROF. DR. E. W. BETH, AMSTERDAM
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - PROF. DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND - DR. B. P. HAALMEIJER, BARNEVELD
DR. W. P. THIJSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM
DR. R. BALLIEU, LEUVEN - DR. G. BOSTEELS, ANTWERPEN
PROF. DR. O. BOTTEMA, RIJSWIJK - DR. L. N. H. BUNT, LEEUWARDEN
DR. R. MINNE, LUIK - PROF. DR. J. POPKEN, UTRECHT
DR. O. VAN DE PUTTE, RONSE - PROF. DR. D. J. VAN ROOY, POTCHEFSTROOM
DR. H. STEFFENS, MECHELEN - IR. J. J. TEKELBURG, ROTTERDAM

22e JAARGANG 1946/47

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

VACANTIECURSUS VOOR LERAREN IN DE WISKUNDE.

Gezien de grote belangstelling, die er is geweest voor de leergang, die in 1946 werd gehouden, heeft het Mathematisch Centrum besloten, ook voor het jaar 1947 een vacatiecursus te organiseren.

Ter voorbereiding daarvan is een commissie gevormd door het Mathematisch Centrum en de verenigingen Liwenagel en Wimecos. Deze commissie heeft nu uitgeschreven een cursus in topologie, die in de laatste week van Augustus gegeven zal worden in Amsterdam; het is de bedoeling, dat in de toekomst ook elders dergelijke cursussen gehouden zullen worden, zo mogelijk in een of ander vacatieoord.

Het schema voor de cursus van dit jaar is opgesteld in overleg met prof. dr. H. Freudenthal. Het programma luidt als volgt:

Donderdag 28 Augustus

15 uur. prof. dr. H. Freudenthal: Inleiding.

Voorbeelden van topologisch onderzoek.

Vrijdag 29 Augustus

9 u. 30. dr. J. de Groot: De nulde dimensie.

prof. dr. D. van Dantzig: Universele getallen.

dr. G. Hirsch: Projectieve meetkunden.

14 uur. dr. A. van Heemert: Pathologische krommen.

Zaterdag 30 Augustus

9 u. 30. prof. dr. B. L. van der Waerden: De stelling van Jordan-Brouwer.

prof. dr. J. C. H. Gerretsen: Een hoofdstuk uit de topologie der drie-dimensionale gesloten ruimten.

prof. dr. H. Freudenthal: Samenvatting.

De sprekers zullen een inleiding geven over de problemen én methoden der topologie en daarbij zoveel mogelijk aanknopen bij de elementaire en projectieve meetkunde en bij de elementaire algebra.

De voordrachten worden gehouden in de laboratoria der Vrije Universiteit, de Lairesestraat 174 (van het C.S. te bereiken met lijn 16, halte Valeriusplein):

De kosten zijn vastgesteld op f 2,50 voor de gehele cursus. Dit bedrag kan gestort worden op Postgiro no. 13500 van het Gemeente Giro Kantoor Amsterdam met de toevoeging: „Bestemd voor rekening B 2250 van M. G. H. Birkenhäger” of rechtstreeks per postwissel aan M. G. H. Birkenhäger, van Breestraat 153 huis, Amsterdam (Z).

Namens de commissie:

M. G. H. BIRKENHÄGER.



• Maart 1947.

Prof. Dr H. D. KLOOSTERMAN.

Geb: 9 April 1900 te Rottevalle.

1924 Promotie in Leiden.

1928—1930 Assistent in Münster.

1930—1947 Lector in Leiden.

1947 Hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Leiden.

in algebraïsche grootheden; als uitbreidingen van het theorema volgen daarna de stelling van Pappos, de maantjes van Hippocrates e.d.

De invoering van de z.g. Pythagoreïsche drietallen is gemakkelijk mogelijk met behulp van het gnomon. Immers, volgens de hierboven gegeven definitie is een gnomon een oneven getal, indien men een kwadraat b^2 wil vormen uit een kwadraat a^2 , als $b - a = 1$ is (Fig. 7). Indien men nu slechts de gnomons zoekt, die zelf vierkanten zijn, dan kan men deze als volgt in uitdrukking brengen:

$$4a + (a - 1)^2 = (a + 1)^2$$

waarin $a > 1$ een natuurlijk getal is.

Immers, vergelijkt men het vierkant van een getal met de vierkanten van de getallen, die opv. $+ 1$ en $- 1$ van het oorspronkelijke getal verschillen, dan is het verschil met elk van beide een gnomon, die ontstaat door het tweevoud van het eerste getal opv. te vermeerderen of te verminderen met 1. Het verschil der beide vierkanten, die het eerst beschouwde vierkant omgeven, is dus een veelvoud van 4. Is $4a$ zelf een vierkant, dan is het drietal getallen een Pythagoreïsch drietal. Algemener kan men het nog uitdrukken door $4a$ te vervangen door $(2n)^2$; een viervoud toch kan alleen het kwadraat zijn van een tweevoud. De betrekking tussen de zijden van een Pythagoreïsche driehoek luidt dus:

$$(2n)^2 + (n^2 - 1)^2 = (n^2 + 1)^2,$$

waarin n een natuurlijk getal is.

Een omstandigheid is er nog, die wij hier in het kort willen vermelden. Als men uit de oorspronkelijke verhandelingen van Naber de beschouwingen put, die in het bovenstaande zijn weergegeven, dan kan men zich de vraag voorleggen of deze opvattingen niet getuigen van een zekere eenzijdigheid, een sterk, soms ietwat geforceerd drijven van de gedachten in een bepaalde richting. Wij zullen zeker de laatste zijn om dit, hetzij uit piëteit of gevoëlsoverwegingen te ontkennen. Want wij willen hier de mening uitspreken dat een dergelijke eenzijdigheid in velerlei opzicht een verfrissende en stimulerende werking kan uitoefenen in de wetenschap, en door de eenzijdigheid van andere opvattingen (een eigenschap, die elke mening aankleeft) zal dit toch nooit al te sterk worden doorgevoerd. Wij behoeven ter illustratie hiervan geen voorbeelden te vermelden uit de geschiedenis der wijsbegeerte of der sociale wetenschappen, maar een aandachtig toeschouwer zal, wat dit betreft, in de gebeurtenissen der laatste jaren wel voldoende stof ter overpeinzing hebben gevonden.

Utrecht, Juli 1946.

VAN DE PERSONEN.

Prof. Dr. H. D. KLOOSTERMAN.

Geboren 9 April 1900 te Rottevalle (gemeente Achtkarspelen, provincie Friesland).

H.B.S. in Den Haag; eindexamen 1918.

Daarna studie wis- en natuurkunde in Leiden; candidaatsexamen in 1919; doctoraal examen in 1922.

Oct. 1922—Dec. 1923 studie in Kopenhagen (onder leiding van Prof. Dr. Harald Bohr) en Oxford (onder leiding van Prof. G. H. Hardy).

1924. Promotie tot doctor in de wis- en natuurkunde aan de Universiteit te Leiden op een dissertatie, getiteld: „Over het splitsen van geheele positieve getallen in een som van kwadraten” (promotor: Prof. Dr. J. C. Kluyver).

Sept. 1924—Sept. 1925 in militairen dienst.

Verdere studie te Göttingen (Jan.—Nov. 1926) onder leiding van Prof. Dr. E. Landau en te Hamburg (Nov. 1926—April 1928) onder leiding van Prof. Dr. E. Hecke.

1928—1930. Assistent voor wiskunde aan de Universiteit te Münster (Westfalen).

1930—1947. Lector aan de Rijksuniversiteit te Leiden (colleges differentiaal- en integraalrekening en analyse, alsmede vele bijzondere onderwerpen, zooals elementaire getallentheorie, algebraïsche getallen, ideaaltheorie en polynoomidealen, analytische getallentheorie, theorie van Galois, groepentheorie, hypercomplexe systemen, topologie, getallentheorie der kwadratische vormen, lineaire operatoren in de Hilbert-ruimte, wiskundige hulpmiddelen der quantenmechanica, additieve getallentheorie).

1947. Hoogleraar te Leiden.

Publicaties hoofdzakelijk over analytische getallentheorie en modulaire functies.

OFFICIELE MEDEDELINGEN VAN WIMECOS.

Naar aanleiding van zijn verzoek om inlichtingen over de Wiskunde op het Lyceum C, bedoeld in het Rapport-Bolkestein, ontving het Bestuur van de Faculteit der Economische Wetenschappen van de Gemeentelijke Universiteit te Amsterdam bijgaand antwoord:

Mijne Heren,

In antwoord op Uw tot onze Faculteit gericht schrijven van 30 December 1946 berichtte ik indertijd U voorlopig, dat de Faculteit het vraagstuk van het onderwijs in de wiskunde op het Lyceum C (vergeleken met de huidige H.B.S. 4-A) nader zou bestuderen. Als resultaat van de nu gevoerde besprekingen kan ik U thans medelen, dat wij mede op grond van de in de practijk opgedane ervaringen wederom tot de conclusie gekomen zijn, dat ook de H.B.S.-A een geschikte opleiding voor de studie in de economische wetenschappen geeft, hoewel de abiturienten van deze school, wat de wiskunde betreft uiteraard ten achter staan bij die van H.B.S.-B en Gymnasium B, zodat naar onze mening voor eerstgenoemden enige uitbreiding van het wiskunde-onderwijs zal moeten gegeven worden. Dit zelfde zal en in nog sterkere mate gelden voor de in het plan-Bolkestein ontworpen Lycea A en C, waar de leerlingen van deze scholen de laatste twee jaren van hun schoolopleiding in 't geheel geen wiskunde-onderwijs zullen ontvangen, hetgeen wij als een zeer ernstig bezwaar beschouwen voor hen, die het economisch hoger onderwijs willen gaan volgen. Een uitbreiding van het wiskunde-onderwijs achten wij dan ook voor hen met het oog op het volgen van de universitaire economische studie onmisbaar.

Hoogachtend,

wg. J. VALKHOFF

*wnd. Secretaris van de Faculteit
der Economische Wetenschappen.*

De Penningmeester verzoekt de leden dringend, om hun contributie, voor het jaar 1946/1947 ten bedrage van f 3,50 en voor 1947/1948 van f 4,50 op de girorekening ten name van de Vereniging no. 143917, Amsterdam, te willen storten, teneinde onnodige kosten voor inning te vermijden.

De Penningmeester
G. A. JANSSEN.

WAARDE EN WAARDEERING DER WISKUNDE.¹⁾

door

Dr H. D. KLOOSTERMAN.

In een in 1940 verschenen boek van E. T. Bell¹⁾ komt een citaat voor uit een boekbespreking van C. H. Chapman, dat als volgt luidt: "There is probably no science which presents such different appearances to one who cultivates it and one who does not, as mathematics". En inderdaad zeer verschillend zijn dan ook de antwoorden, die op verschillende tijden en door verschillende personen zijn gegeven op de vraag, die ons heden voor enkele oogenblikken zal bezig houden: „Wat is de waarde der wiskunde?". Het belang van deze vraag in al zijn verschillende aspecten is evident als men denkt aan de rol, die de wiskunde speelt b.v. in de natuurwetenschappen en bij het onderwijs.

Het zijn niet alleen wiskundigen, zelfs zijn het wel in hoofdzaak niet-wiskundigen, die een antwoord zoeken, of gedwongen zijn te zoeken. Het lijkt echter redelijk om te verlangen, dat hij, die zich aan een beantwoording waagt, eenig begrip heeft, van wat wiskunde is. Dit is een eisch, waaraan niet zoo heel gemakkelijk kan worden voldaan. Want een ernstige en langdurige studie en vooral ook belangstelling zijn noodig, om een inzicht in het wezen der wiskunde te krijgen. Vandaar dan ook, dat niet ieder, die een oordeel over de waarde der wiskunde heeft durven uitspreken, aan de gestelde eisch heeft kunnen voldoen en dat vele dezer oordeelen min of meer aanvechtbaar zijn:

Verständige Leute kannst du irren sehn

In Sachen nämlich, die sie nicht verstehn,

zegt Goethe.

Laten wij hier echter aan den zooeven gestelden redelijken eisch eenigszins trachten tegemoet te komen en ons vooraf bezig houden met de vraag „Wat is wiskunde?". Het is moeilijk om een afdoend antwoord op deze vraag te geven en hem, die een afdoend antwoord eischt, kan slechts de raad worden gegeven om wiskunde te gaan studeeren, d.w.z. die wetenschap, die beoefend wordt door hen, die zich wiskundigen noemen. Hiermee hebben we meteen al

¹⁾ Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar aan de Rijksuniversiteit te Leiden op 2 Mei 1947.

een definitie van wiskunde gegeven, een variant op de bekende definitie, die Veblen en Whitehead²⁾ geven van „een meetkunde”, nl. “a branch of mathematics is called a geometry because the name seems good, on emotional and traditional grounds, to a sufficient number of competent people”. En alhoewel deze definitie ongetwijfeld de meest juiste is, die men met behulp van een beperkt aantal woorden kan uitspreken, is ze ook de minst zeggende en de het minst aan ons doel beantwoordende. Eerder moet het onze bedoeling zijn, om een omschrijving te geven van datgene, wat karakteristiek is voor het wiskundige denken en om aan te geven, wat de verschillende onderdeelen der wiskunde voor gemeenschappelijks hebben. Het is dan ook niet onze bedoeling, om in enkele zinnen een definitie van wiskunde te geven, al zullen eenige van deze definities, die in den loop der tijden zijn gegeven, wel voor ons doel van nut kunnen zijn.

Allereerst zij opgemerkt, dat een antwoord op de vraag „Wat is wiskunde?” afhankelijk is van het tijdstip van beantwoording. Misschien zou het honderd jaar geleden nog min of meer juist geweest zijn, om te antwoorden: „Wiskunde is die wetenschap, die zich bezig houdt met *getallen* en met *ruimte*, waarbij meer speciaal de getallen het domein der getallenleer, algebra en analyse en de ruimte meer speciaal het domein der meetkunde is”.

Ieder wiskundige zal het er echter mee eens zijn, dat een dergelijk antwoord voor den tegenwoordigen tijd op zijn minst als zeer onvolledig moet worden gekwalificeerd. Men kan wel zeggen, dat iedere omschrijving, die de wiskunde tracht te karakteriseeren door middel van de objecten, die in de wiskunde onderwerp van beschouwing uitmaken, onvolledig is. Toch is dit nog in 1894 geprobeerd door K e m p e³⁾. Deze geeft ongeveer de volgende definitie: „Wiskunde is de wetenschap, waarmee we die bijzonderheden van eenig denkobject onderzoeken, die voortvloeien uit de opvatting, dat dit bestaat uit een aantal verschillende en niet-verschillende elementen⁴⁾”. Ik verwacht niet, dat een niet-wiskundige na het aanhooren van deze definitie nu precies zal begrijpen, wat wiskunde is. De auteur ervan is daar zelf ook wel van overtuigd. Zijn bedoeling is echter om de objecten, die in de wiskunde onderwerp van beschouwing uitmaken, “The subject-matter of exact thought” te karakteriseeren. Zijn opvattingen daaromtrent heeft hij in verschillende publicaties nader uiteengezet⁵⁾. In eenigszins gewijzigden vorm zijn deze samengevat door B ô c h e r⁶⁾. Door dezen worden de opvattingen van K e m p e ongeveer als volgt omschreven. Aan iedere wiskundige beschouwing ligt ten grondslag een „mathema-

tisch systeem", bestaande uit ten eerste een bepaalde verzameling van objecten en ten tweede een bepaalde verzameling van relaties tusschen geordende verzamelingen van deze objecten. Als objecten kunnen we ons bijvoorbeeld om de gedachten te bepalen getallen voorstellen, of punten en rechte lijnen. Als voorbeeld van relaties kunnen we ons denken, dat een getal de som of het product van twee andere is, of dat een punt op een rechte lijn ligt, of een rechte lijn door een punt gaat. Indien we ons nu uitsluitend interesseeren voor de vraag of gegeven geordende verzamelingen dezer gegeven objecten aan de gegeven relaties voldoen, dan zijn de resultaten van deze onderzoeken datgene, wat wiskunde wordt genoemd. Het valt hier onmiddellijk op, dat ook deze definitie van wiskunde wel zeer onvolledig is. Want er wordt met geen woord gerept over de hulpmiddelen, waarmede de resultaten moeten worden verkregen. Zoo is b.v. het experiment als hulpmiddel in de definitie niet uitgesloten. In ieder geval moet dus aan de definitie nog worden toegevoegd, dat de resultaten *langs deductieven weg* moeten worden verkregen.

Daarmee komen we bij een andere definitie van wiskunde, die juist dit hulpmiddel der deductieve redeneering als uitsluitend criterium op den voorgrond stelt. Het is de definitie van Benjamin Peirce⁷⁾, luidende: "Mathematics is the science which draws necessary conclusions". De aard der objecten speelt hierbij dus in het geheel geen rol. Iedere deductieve redeneering, ongeacht de objecten, waarop deze redeneering wordt toegepast, is wiskunde. Dan en slechts dan is wiskunde mogelijk, indien men uitgangspunten of gegevens bezit, waaruit noodzakelijke conclusies kunnen worden getrokken. Waar deze gegevens vandaan komen, is voor de wiskunde onverschillig. Of de uitgangspunten waar of niet waar zijn en of er werkelijk realiteiten bestaan, die aan de praemissen voldoen, is volgens Peirce voor de wiskunde van geen belang of beter gezegd: deze vragen zijn geen wiskundige vragen. Een wiskundige weet dus niet, waarover hij spreekt en evenmin of hetgeen hij zegt, waar is.

Een verdere uitwerking van de definitie van Peirce zou zich natuurlijk in de eerste plaats moeten bezig houden met een beantwoording van de vraag, wat precies onder "necessary conclusions" moet worden verstaan. Zoolang deze vraag niet op bevredigende wijze is beantwoord, is de definitie van Peirce niet volledig. De geschiedenis der wiskunde en der moderne logica heeft ons wel geleerd, dat een beantwoording van deze vraag geenszins gemakkelijk is. Ook echter dan, wanneer we in het bezit zouden zijn van een

volledig antwoord op deze vraag en indien dus volledig vast zou staan, wat de „spelregels” zijn, moet toch, zooals we nog zullen zien, ook de definitie van P e i r c e, zelfs in combinatie met die van K e m p e, nog als onvolledig worden gekenmerkt. De opvatting van S c h r ö d e r⁸⁾ als zou de wiskunde slechts een onderdeel der logica zijn, kan dan ook niet door ons worden aanvaard. Er zijn andere en zeker niet minder belangrijke elementen, die bij het wiskundig denken een rol spelen.

Voor een korte bespreking van eenige dezer elementen kunnen we uitgaan van het eenigszins simplistische beeld, dat ons door de definitie van P e i r c e wordt gegeven van een wiskundige redeneering, nl. een keten van logische conclusies, die, uitgaande van een stelsel gegevens, die we kortweg *axioma's* zullen noemen, leidt tot het *resultaat* van de redeneering. De keten van logische conclusies noemen we *bewijs*. Zoowel in de *axioma's*, als in het *bewijs* en het *resultaat* ligt nu een groote mate van *vrijheid* opgesloten. Ik spreek hier niet van *willekeur*. Dit laatste zou men moeten doen, indien men de opvatting zou huldigen, dat de wiskunde slechts een onderdeel der logica is. Want dan zou iedere willekeurige keten van logische conclusies, uitgaande van ieder willekeurig stelsel van *axioma's* tot een *resultaat* leiden, dat een wiskundig *resultaat* zou moeten worden genoemd. Dit kunnen we echter niet aanvaarden. Er is iets, dat den wiskundige leidt, zoowel bij de keuze van zijn resultaten, alsook bij de keuze van zijn *bewijs* en bij de keuze van zijn *axioma's*. Met opzet heb ik hier drie maal het woord *keuze* gebruikt en met opzet heb ik hier ook de volgorde *resultaat-bewijs-axioma's* in plaats van *axioma's-bewijs-resultaat* gebruikt. De bedoeling hiervan is om die elementen van het wiskundige denken naar voren te brengen, die we het *aesthetische element* en het *intuïtieve element* zouden kunnen noemen. In tegenstelling tot het logische element, dat een objectieve strekking heeft, zijn ze in hoofdzaak subjectief van aard en ze komen dan ook niet bij iederen wiskundige in dezelfde mate of in denzelfden vorm tot uiting.

Talloos zijn de uitspraken van wiskundigen, die het *aesthetische element* naar voren brengen. P o i n c a r é zegt⁹⁾, dat de wiskundige in verband met zijn werk dezelfde emoties ondervindt, als de kunstenaar. Zelfs W e i e r s t r a s s, in wiens werk toch het logische element zoo sterk overheerscht, schrijft in een brief aan S o p h i e K o v a l e v s k i¹⁰⁾, dat een wiskundige, die niet ook een klein beetje dichter is, geen volkomen wiskundige kan zijn en K r o n e c k e r zegt¹¹⁾ dat wiskundigen dichters zijn, die bovendien ook nog bewijzen leveren voor hun gedichten. Deze laatste uitspraak van

Kronecker is misschien minder gelukkig. Want het aesthetische element heeft in de wiskunde toch wel in hoofdzaak zijn ontstaan te danken aan de combinatie van vrijheid in de keuze van problemen (phantasie) met de gebondenheid aan de „spelregels”, die door de logica worden bepaald. Mocht men dus een stuk wiskunde met een gedicht willen vergelijken, dan correspondeert het bewijs, de gebondenheid door de logica, met de gebondenheid door rythme en rijm.

De rol, die de intuïtie in de wiskunde speelt, hebben we zooeven aangeduid door de volgorde axioma's-bewijs-resultaat om te keeren tot de volgorde resultaat-bewijs-axioma's. Want wiskundige resultaten *ontstaan* niet op die wijze, dat de wiskundige van een stelsel axioma's uitgaat. Meestal is het resultaat het uitgangspunt en bij de wijze, waarop de wiskundige zijn resultaten vindt, speelt de aanschouwing de hoofdrol, zoowel de zuivere, alsook de empirische aanschouwing. Dit geldt zoowel, als men de wiskunde in zijn historische ontwikkeling vervolgt, alsook, wanneer men het vinden van nieuwe resultaten bij den enkelen wiskundige nagaat. Niet altijd blijken de op deze wijze verkregen resultaten, vooral als het de empirische aanschouwing betreft, den toets van een logische analyse te kunnen doorstaan. Deze logische analyse leidt dan echter tot een stelsel van axioma's, waaruit het intuïtief gevonden resultaat, eventueel met eenige beperking van zijn algemeenheid, door een deductieve redeneering kan worden afgeleid. Door Poincaré is opgemerkt¹²⁾, dat men bij het bestudeeren van de werken van groote (en zelfs ook wel van de minder groote) wiskundigen duidelijk twee typen kan onderscheiden. Eenerzijds zij, bij wie het intuïtieve element de hoofdrol speelt en anderzijds zij, bij wie het logische element meer overheerscht. Voor het eerste type zou Riemann en voor het tweede type zou Weierstrass als representant kunnen gelden. Als voorbeeld zij hier de functietheorie van Riemann vermeld. De wijze, waarop deze door Riemann zelf is weergegeven is wel zeer ver van een deductieve theorie verwijderd, zooals wel blijkt uit de vele moeite, die het kost, om een strenge behandeling ervan te geven¹³⁾. De opmerking van Poincaré mag echter geenszins in dien zin worden opgevat, als zou ieder wiskundige of tot het intuïtieve of tot het logische type behooren. Hier mogen we wel wijzen op Gauss, die op de meest gelukkige wijze alle verschillende elementen in zich vereenigt.

Laten we hier echter niet te ver afdwalen van het doel, dat ons hier voor oogen staat, namelijk een omschrijving te geven, van wat wiskunde is. Behalve de nu vermelde logische, aesthetische en intuïtieve elementen zijn nog wel meer karakteristieke elementen van

de wiskunde op te noemen. Hier zij nog slechts gewezen op de *abstractie* en op de *economie van het denken*, alhoewel deze op zichzelf geenszins voor de wiskunde alleen karakteristiek zijn. Voor het bepalen van de waarde der wiskunde zijn ze echter van groot belang. Alhoewel ze in de geheele ontwikkeling der wiskunde een groote rol hebben gespeeld, treden ze bij de moderne ontwikkeling wel heel sterk naar voren. Hierbij doel ik op datgene, wat men als de *axiomatische methode* betitelt. Men stelt een systematisch onderzoek in naar de consequenties van een beperkt stelsel van axioma's. Vele van dergelijke beperkte stelsels van axioma's zijn reeds onderzocht. Hier zij b.v. gewezen op de groepentheorie, de ideaaltheorie, de topologie, de structuurtheorie van Ore en Garrett Birkhoff en nog vele andere. Herhaaldelijk blijkt nu in den loop van een wiskundig onderzoek, dat men stuit op een situatie, waarbij aan één dezer beperkte stelsels van axioma's is voldaan, waardoor men in staat is, om het geheele stelsel van consequenties uit deze axioma's geldig te verklaren. Van belang is hierbij vooral, dat men bij deze axiomatische theorieën abstraheert van den aard der in deze theorieën voorkomende objecten, tenminste voorzover deze niet door de axioma's zelf tot uitdrukking wordt gebracht.

Na deze opsomming van enkele karakteristieke kenmerken van het wiskundige denken vlei ik me nog geenszins met de hoop, dat daarmee aan een niet-wiskundige volledig zou zijn duidelijk gemaakt, wat wiskunde is. Zooals ik daar straks reeds opmerkte, zou daarvoor alleen een grondige wiskundestudie de aangewezen weg zijn. Maar wel hoop ik tenminste duidelijk te hebben gemaakt, dat wiskunde b.v. niet uitsluitend formalistisch rekenen is. Dit toch is wel de indruk, die vele niet-wiskundigen hebben en waarop zij soms een geringschattend oordeel over de wiskunde meenen te kunnen gronden. „Wo das Rechnen anfängt, hört das Verstehen auf”, zegt Schopenhauer¹⁴⁾. Hierbij is zijn bedoeling, om een geringschattend oordeel over de wiskunde te vellen, maar hoe weinig hij zijn doel bereikt, moge wel blijken uit een door van der Waerden¹⁵⁾ aangehaalde uitspraak van den grooten wiskundige Hilbert, die eens bij zekere gelegenheid opmerkte: „... aber das sind doch eigentlich lauter Rechnungen; das kann man doch nicht verstehen!...” Uit deze (hier natuurlijk uit zijn verband gerukte) opmerking mag men nu ook weer niet concludeeren, dat ieder wiskundige een zeer geringschattend oordeel over alle formalistisch rekenen heeft, al zijn er wel, waarvoor dit het geval is. Dit moge terecht of ten onrechte zijn, maar zooveel zal nu toch wel duidelijk zijn, dat wiskunde niet met rekenen mag worden geïdentificeerd.

Voordat we ons nu met de vraag naar de waarde der wiskunde gaan bezig houden, is het wel interessant en nuttig om nog even in enkele gevallen de positieve of negatieve waardeering te beschouwen, die de wiskunde in de oogen van niet-wiskundigen ten deel valt. Dat er menschen zijn, die een sterken afkeer van wiskunde hebben, is bekend. Veelal is dit wel een gevolg van een gebrek aan wiskundige begaafdheid, het niet in staat zijn, om een keten van logische deducties in zijn geheel te overzien en dus te vergelijken met den afkeer, die een slecht schaker van het schaakspel kan krijgen. Veelal is het ook een gebrek aan appreciatie voor het aesthetische element in de wiskunde. Dikwijls ook is het een misverstand, doordat aan een wiskundige theorie pretenties worden toegeschreven, die zij in het geheel niet heeft. Merkwaardig is, dat veel, wat als kritiek op de wiskunde bedoeld is, dit in het geheel niet is en de instemming van vele wiskundigen kan genieten. Zoo heeft Schopenhauer¹⁶⁾ kritiek uitgeoefend op de methode van Euclides, om van axioma's uitgaande logische bewijzen te willen geven van meetkundige stellingen, die toch, volgens hem, evident zijn, omdat ze op onmiddellijke aanschouwing berusten. Dat datgene, wat Euclides bewijst, waar is, moet hij inderdaad toegeven, doch hij ziet op deze wijze niet in, *waarom* het waar is. Door dergelijke „hinterlistige” bewijzen komt de waarheid door een achterdeurtje binnen, zegt hij. Hij wijst in dit verband op het Euclidische „muizeval”-bewijs van de stelling van Pythagoras¹⁷⁾. Hij „verbetert” het Euclidische bewijs, door voor het geval van den gelijkbeenig-rechthoekigen driehoek een empirisch „bewijs” te geven¹⁶⁾. Iets dergelijks, zegt hij, moet toch voor iedere meetkundige stelling mogelijk zijn, omdat hun ontdekking van een aanschouwelijke noodzakelijkheid uitgaat en het bewijs er achteraf bij verzonnen wordt. Dat dit laatste inderdaad wel eens juist kan zijn, hebben we daarstraks al opgemerkt, toen we de rol van de intuïtie in de wiskunde bespraken en daarbij wezen op de omkeering van de volgorde axioma's-bewijs-resultaat. Niet echter kunnen we met hem meegaan, als hij het logisch bewijs overbodig acht en daarbij de bedriegelijkheid der aanschouwelijke evidentie over het hoofd ziet en tevens (vermoedelijk met kwaadaardig opzet) de zuivere en empirische aanschouwing verwacht. In den grond der zaak is zijn kritiek echter geen kritiek op de wiskunde als zoodanig. Soortgelijke opmerkingen kunnen, en worden ook inderdaad gemaakt op vele moderne wiskundige publicaties. Indien men b.v. een publicatie van Landau leest, en daarbij iedere schakel in den keten van logische conclusies op den voet volgt, dan zal men, aan het slot gekomen, niet steeds kunnen beweren, dat men het

bewijs volledig begrepen heeft, en een soortgelijke kritiek op den „L a n d a u - s t i j l” kunnen uitoefenen, als S c h o p e n h a u e r op E u c l i d e s. De opmerking over het „muizenval-bewijs” van de stelling van P y t h a g o r a s is van denzelfden aard als de opmerking van E m m y N o e t h e r ¹⁸⁾ toen zij eens beweerde, dat het unfair is, om de gelijkheid van twee getallen te willen bewijzen, door eerst aan te toonen, dat het eerste getal niet kleiner en daarna, dat het niet grooter is, dan het tweede, doch dat men den innerlijken grond behoort aan te geven, *waarom* deze twee getallen gelijk zijn. Het betreft hier geen kritiek op de wiskunde als zoodanig, doch wel op de wijze, waarop de wiskunde wordt weergegeven.

Dat G o e t h e een afkeer van wiskunde zou hebben gehad, is een veel verbreide meening. Dat hij de waarde der zuivere wiskunde niet hoog zou hebben aangeslagen, is echter zeker niet in alle opzichten juist. De Euclidische meetkunde beschouwt hij als de beste voorbereiding, zelfs inleiding tot de philosophie ¹⁹⁾ en in „Ueber Mathematik und deren Missbrauch” verweert hij zich tegen de aanklacht, als zou hij een vijand der wiskunde zijn, „. . . die doch niemand höher schätzen kann als ich, da sie gerade das leistet, was mir zu bewirken völlig versagt worden”. Wel keert hij zich tegen het gebruik der wiskunde in de natuurwetenschappen, waar hij van misbruik spreekt en hij richt zich daarbij in de eerste plaats tegen N e w t o n, wiens publicaties hem niet toegankelijk waren door zijn gebrek aan wiskundige kennis. Het is bekend, dat G o e t h e zichzelf als een groot natuuronderzoeker beschouwde en het den mathematici kwalijk nam, dat zij zijn „Farbenlehre” niet au sérieux namen. Daarbij dient opgemerkt te worden, dat zich in G o e t h e's tijd de scheiding tusschen zuivere en toegepaste wiskunde nog niet in zoo sterke mate had voltrokken als thans. Bovendien was het de tijd, waarin de toepassing der wiskunde in de natuurwetenschappen triomfen vierde en waarin men zich misschien ook wel eens al te overdreven voorstellingen maakte van de waarde der wiskunde voor de natuurwetenschappen, zooals zij b.v. tot uiting kwamen in een aantal uitspraken van den dichter N o v a l i s ²⁰⁾.

De bezwaren, die G o e t h e tegen de toepassing der wiskunde in de natuurwetenschappen heeft aangevoerd, en die voor een beoordeeling van de waarde der wiskunde in dit opzicht niet als belangrijk kunnen worden beschouwd, zijn hier vermeld, omdat ze eenige gelijkenis vertoonen met de bezwaren, die in lateren tijd in het bijzonder door beoefenaren der experimenteele natuurwetenschappen te berde zijn gebracht. Zoo vindt men ook bij den Nobelprijs-winnaar L e n a r d de uitlating ²¹⁾, dat het belang der wiskunde bij het

natuuronderzoek sterk wordt overschat, een uitlating, die bijna woordelijk aan G o e t h e herinnert en ook wel op dezelfde wijze zal mogen worden verklaard. Onredelijk wordt L e n a r d echter, wanneer hij de groote verdiensten van H e l m h o l t z bespreekt ²²⁾ ten opzichte van de verklaring der wervelbewegingen in vloeistoffen uit de differentiaalvergelijkingen der hydromechanica en wanneer hij daarna, in het feit, dat H e l m h o l t z als medicus is begonnen en aan de universiteit geen wiskunde heeft gestudeerd, aanleiding vindt, om uit te varen tegen de nutteloosheid van de uitgebreidheid van het wiskunde-onderwijs op scholen en universiteiten. Wel erg steekt hierbij af de groote waarde, die H e l m h o l t z zelf aan de wiskunde heeft toegekend ²³⁾).

Vermelden we hier ook nog de opvatting van een jurist. In 1806 verscheen in Amsterdam van de hand van J o a n n e s v a n d e r L i n d e n een „Regtsgeleerd, practicaal en koopmans handboek”. Dit begint met een „Inleiding, bevattende de noodige onderrigtingen tot den aanleg, zoo van de studie der regtsgeleerheid, . . .”. In paragraaf III spreekt hij over de voorbereidende studiën en noemt in dit verband op p. 33 o.a.: „. . . eene algemeene wijsgeerige kennis, waar toe men zig inzonderheid behoort te bepaalen tot de Logica, of Redeneerkunde, door welke men de waare van de valsche sluitredenen leert onderscheiden: — de Mathesis, of Wiskunde, waar door men juist en bepaald leert denken: — de Ethica, of Zedenkunde, waar door men de algemeene pligten van den Mensch en Burger leert kennen.” — Hier treft ons dus een meer positieve waardeering van de wiskunde.

De verschillende uitlatingen van niet-wiskundigen omtrent de waarde der wiskunde, die ik tot nu toe heb aangehaald, mogen nu wel min of meer fragmentarisch zijn, maar toch meen ik, dat ze in zekeren zin tezamen een juist beeld geven van de positieve of negatieve waardeering, die de wiskunde van niet-wiskundigen ten deel valt.

Keeren we nu terug tot de in het begin gestelde vraag: „Wat is de waarde der wiskunde?”. Welke waarde heeft het, om ons bezig te houden met B a n a c h s c h e ruimtes, met klassenlichamen, met topologische groepen en met nog zooveel andere begrippen van even abstracten of misschien nog veel abstracteren aard? Waarom houden wij ons bezig met problemen omtrent deze abstracte begrippen? — met problemen, die door geen direct aanschouwelijk verband meer gebonden zijn aan de ons omringende realiteit? — met problemen, waarvan we de strekking in het geheel niet meer duidelijk kunnen maken aan niet wiskundig geschoolden? Zeker,

wel kunnen we, wanneer we de geschiedenis der wiskunde bestudeeren, in den regel nog wel ongeveer nagaan, hoe deze begrippen en problemen zich door steeds verder gaande generalisaties ontwikkeld hebben uit eenvoudige, aan de practijk ontleende begrippen en problemen. Nog anderhalve eeuw geleden ontleende de wiskunde zijn problemen bijna uitsluitend aan de natuurwetenschappen en aan *L a g r a n g e* zweefde nog als hoofdprobleem voor oogen om het heele wereldgebeuren door één enkele geweldige differentiaalvergelijking te willen beschrijven. Maar daarna heeft in den loop der vorige eeuw de zuivere wiskunde zich van de toegepaste wiskunde meer en meer los gemaakt en in steeds sneller tempo heeft zich dit proces vooral in de laatste decennia voortgezet, zoodat ieder zichtbaar verband met de werkelijkheid *schijnt* te ontbreken. Waarom houden we hier niet mee op? Waarom keeren we niet tot de meer aanschouwelijke problemen der toegepaste wiskunde terug? Of heeft het zin om er toch mee door te gaan? Wat is dan de waarde van dit alles?

De meeste wiskundigen zullen volstaan met het antwoord: ik houd me met al deze abstracte begrippen en problemen bezig, omdat ik er behagen in schep, omdat ik het mooi vind. En zeer zeker is datgene, wat we daar straks het aesthetische element in de wiskunde hebben genoemd, de motor, die dit alles in beweging houdt. Maar even zeker is, dat niet iedereen met dit simpele antwoord genoegen neemt en dat van ons verlangd wordt, om rekenschap te geven van de waardevolle elementen in onze bedrijvigheid.

Een uitvoerig antwoord op de vraag naar de waarde der wiskunde moet natuurlijk zijn uitgangspunt nemen in de daar straks opgesomde karakteristieke elementen van het wiskundig denken. Hiervan uitgaande moeten alle aspecten van de vraag naar de waarde der wiskunde kunnen worden beantwoord.

Ik zal me hier echter moeten beperken. Van de verschillende aspecten zal ik in hoofdzaak de *practische* waarde beschouwen.

In de eerste plaats dan is het slechts schijn, dat de moderne abstracte wiskunde iedere band met de werkelijkheid heeft verbroken. Het is niet juist, dat de ver doorgevoerde abstracties slechts een ijdel spel der verbeelding zijn. Ze zijn natuurlijk uit de „werkelijkheid” geabstraheerd. We hebben daar straks reeds opgemerkt, dat er iets is, dat den wiskundige leidt bij zijn abstracties en bij het opbouwen van zijn ketens van deducties, nl. de aanschouwing in den meest ruimen zin en hier speelt dus datgene een rol, wat we het intuïtieve element in de wiskunde hebben genoemd. Daarom is het ook niet zoo erg verwonderlijk, dat abstracte mathematische

theorieën kunnen worden *toegepast*, ook al hebben de grondleggers van deze theorieën er dikwijls niet het geringste vermoeden van gehad, dat hun werk toepassingen zou kunnen hebben. Vele voorbeelden kunnen hiervan worden gegeven. Ik wijs b.v. op het gebruik van complexe getallen in de electrotechniek, op de toepassingen van de theorie der functies van een complexe veranderlijke in de aerodynamica, op de toepassing van de representatietheorie voor groepen in de quantenmechanica, op het gebruik van meerdimensionale ruimtes in de relativiteitstheorie en in de statistische mechanica.

Men zou nu de tegenwerping kunnen maken, dat er toch nog genoeg gedeelten der wiskunde overblijven, die niet de geringste toepassing hebben. Wat is b.v. het practische nut van de moderne getallentheorie? Toch kunnen ook hier nog wel directe toepassingen aangegeven worden. Zoo is b.v. de theorie der partities, die zich bezig houdt o.a. met de vraag naar het aantal manieren, waarop een geheel positief getal als een som van geheele positieve getallen is te schrijven, in de statistische mechanica toegepast. Zoo spelen ook de polygonaalgetallen een rol in de waarschijnlijkheidsrekening en in toepassingen daarvan. Maar belangrijker is het om te wijzen op het verband, dat tusschen de verschillende onderdeelen der wiskunde bestaat en op de invloed, die deze onderdeelen op elkaar uitoefenen. Zoo heeft b.v. F e r m a t het bekende vermoeden uitgesproken, dat een som van twee n -de machten van geheele positieve getallen nooit weer een n -de macht van een geheel positief getal kan zijn, als n minstens 3 is. Voor K u m m e r is dit probleem echter aanleiding geweest, om zijn theorie der ideale getallen op te stellen. Deze theorie heeft weer den stoot gegeven tot de moderne algebra, en deze staat weer via de representatietheorie van hypercomplexe systemen in verband met problemen uit de quantenmechanica.

Uit de hier aangehaalde voorbeelden blijkt ook wel het belangrijke feit, dat de daarstraks aangeroerde scheiding tusschen zuivere en toegepaste wiskunde in de eerste decennia der 19e eeuw wel niet zoo volledig en blijvend is geweest, als het op het eerste gezicht schijnt. Ze is wel mede daardoor ontstaan, dat de wiskunde niet meer in staat was om de haar door de natuurwetenschappen voorgelegde problemen op bevredigende wijze op te lossen. Dit is trouwens ook thans nog, en zelfs wel in nog sterkere mate het geval. Maar dit is wel zeker, en juist de aangehaalde voorbeelden zijn er, om het te bewijzen, dat alleen een vrije ontwikkeling van de zuivere wiskunde weer nieuwe toepassingsmogelijkheden kan scheppen. Wie bij de beoefening eener wetenschap direct practisch nut najaagt, zal dikwijls bedrogen uitkomen. De mogelijkheid tot een vrije beoefening

van fundamenteel wetenschappelijk onderzoek is ook voor de eischen der practijk, onontbeerlijk, omdat men in het geheel niet kan voorzien, welke onderdeelen later de gewichtige toepassingen zullen opleveren. Dus wèl B a n a c h s c h e ruimtes, wèl klassenlichamen, wèl topologische groepen en wèl getallentheorie, ook al mogen we weliswaar morgen nog geen directe toepassingen verwachten. Wie had de ontwikkeling kunnen voorzien, die van den kikvorsch van G a l v a n i naar de moderne toepassingen der electriciteit leidt?

Ik heb me thans geheel tot de practische waarde der wiskunde beperkt. De vraag naar de waarde der wiskunde is natuurlijk veel omvattender. Ik zou nog moeten wijzen b.v. op de gewichtige banden, die de grondslagen der wiskunde met de philosophie verbinden. Ik zou nog moeten wijzen op de z.g. vormende waarde der wiskunde, die het belang der wiskunde voor het onderwijs in zoo sterke mate bepaalt en die op het logische, het aesthetische en het intuitieve element in het wiskundige denken berust. Wellicht zijn deze waarden van nog grooter belang. Ik heb echter gemeend, me bij dit schetsmatig betoog tot het meest voor de hand liggende, de practische waarde, te moeten bepalen. Want het komt mij voor, dat juist zij, die de wiskunde het meest toepassen, het eerst geneigd zijn, om de waarde der wiskunde in twijfel te trekken.

AANTEKENINGEN.

- 1) E. T. B e l l. The Development of Mathematics. New York 1940.
- 2) O. V e b l e n and J. H. C. W h i t e h e a d. The foundations of Differential Geometry (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 29), Cambridge 1932.
- 3) A. B. K e m p e. Mathematics, Proc. London Math. Soc. 26 (1895), p. 5—15.
- 4) "Mathematics is the science by which we investigate those characteristics of any subject-matter of thought which are due to the conception that it consists of a number of differing and non-differing individuals and pluralities".
- 5) A. B. K e m p e. Memoir on the Theory of Mathematical Form, Phil. Trans. Roy. Soc. 177 (1886), p. 1; Note, Proc. Roy. Soc. 42, p. 193; On the Relation between the Geometrical Theory of Points and the Logical Theory of Classes, Proc. London Math. Soc. 22 (1890), p. 147; The Subject-matter of exact Thought, Nature 43 (1890), p. 156.
- 6) M. B ô c h e r. The fundamental conceptions and methods of Mathematics, Bull. Amer. Math. Soc. (2) 11 (1904), p. 115—135.
- 7) B. P e i r c e. Linear associative algebra, Amer. Journ. Math. 4 (1881), p. 97-221.
- 8) E. S c h r ö d e r. Ueber Pasigraphie. Verh. d. ersten intern. Math. Congr. Zürich 1897 (Leipzig 1898), p. 149.
- 9) H. P o i n c a r é. Notice sur Halphen, Journ. de l'Ec. polytechn. (1890), p. 143.
- 10) Volgens een mededeeling van G. Mittag-Leffler ter gelegenheid van een

- herdenking van Weierstrass. Zie *Compte rendu du 2me congr. intern. des math.* Paris 1900 (Paris 1902), p. 148.
- 11) L. Kronecker. *Berichte d. Math. Vereins d. Univ. Berlin*, 1890-91, p. 9.
 - 12) H. Poincaré. *La valeur de la science*, Chap. I.
 - 13) H. Weyl. *Die Idee der Riemannschen Fläche*. Leipzig 1913.
 - 14) A. Schopenhauer. *Ueber die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde*, § 21.
 - 15) B. L. van der Waerden. *De strijd om de abstraktie*. Rede, Groningen 1928.
 - 16) *Die Welt als Wille und Vorstellung*. Bd. I, § 15.
 - 17) *Ueber die vierfache Würzel des Satzes vom zureichenden Grunde*, laatste alinea van § 39.
 - 18) Zie H. Weyl. In *Memory of Emmy Noether*. Rede, Princeton N. J. 1935; *Scripta Math.* III, No. 3, p. 18.
 - 19) *Maximen und Reflexionen*, Fünfte Abtheilung.
 - 20) *Mathematische Fragmente*, No. 1666-1699.
 - 21) Ph. Lenard. *Grosse Naturforscher*, München 1929, p. 191.
 - 22) *Ibid.* p. 249.
 - 23) Zie b.v. H. Helmholtz, *Vorträge und Reden* (1897), Bd. 1, p. 176.
-

BOEKAANKONDIGING.

Simon Stevin, wis- en natuurkundig tijdschrift onder redactie Prof. Dr J. Haantjes, M. Soens en Prof. Dr S. C. van Veen; met medewerking van een 20-tal geleerden uit Nederland en België.

25e Jaargang, als voortzetting van het Wis- en Natuurkundig Tijdschrift (24e jg), Chr. Huygens (18e jg) en Mathematica B (13e jg).

Prijs per jaargang f 12,50; voor leden van „Wimecos” en „Liwenagel” f 10,—.

Inhoud van *aflevering 1*.

E. J. Dijksterhuis. Simon Stevin.

J. E. Verschaffelt. Over terminologie en symbolen in de warmteleer.

G. Beerten en V. van Bouchout. Stralencongruenties met een ontwikkelbaar focaalblad.

K. Mahler. A remark on the continued fractions of conjugate algebraic numbers.

Van aflevering 2.

L. Godeaux. Sur un faisceau de surfaces du sixième ordre.

J. Haantjes. Symmetriseren in het hyperbolische vlak.

R. Mertens. On the diffraction of light by standing supersonic waves.

J. Bilo. Merkwaardige kubische krommen in metrisch bijzondere homaloidale netten.

J. Korevaar. Een elementair bewijs van een Tauber-stelling voor reeksen van Lambert.

Zoals de lezers van „Euclides” weten, is het tijdschrift „Simon Stevin” een uiting van wetenschappelijke saamhorigheid van Nederland en België. We hopen en verwachten, dat zij, die tot heden geen teken van hun waardering voor dit streven gaven, alsnog zullen intekenen. De leiding van en de medewerkers aan dit uitstekende tijdschrift verdienen ten volle de steun van alle beoefenaars van de Wiskunde.

In Nederland tekent men in bij Noordhoff, in België bij „De Sikkels” Antwerpen.

P. W.

KORRELS.

LXXVII. *Antwoord op Korrel LXXII.*

De fout in het „bewijs” van den heer Van Lent schuilt, naar het mij toeschijnt, in het uitgangspunt, nl. in de veronderstelling van de één-éénduidige koppeling van de stralen AP aan de stralen BP.

Indien wij ons niet beperken tot lijnen binnen de driehoek, maar de volledige stralenwaaiers A en B beschouwen, is het verband tussen de stralen van die twee waaiers in het algemeen allerm minst één-éénduidig. Neem b.v. eens aan dat $\angle CBA = 2 \times \angle CAB$, dan is voortdurend ook $\angle PBA = 2 \times \angle PAB$. Draait nu AP enige malen over 90° , dan draait dus BP telkens over 180° , zodat bij 2 verschillende standen van AP slechts 1 stand van BP behoort (onder AP en BP hierbij te verstaan de hele lijnen door A en P, resp. door B en P), zodat de koppeling van de stralen in dit geval 1-2-duidig is.

Een 1-1-duidig verband tussen de stralen van de beide waaiers bestaat alleen als $\angle CBA = \angle CAB$, dus $\angle PBA = \angle PAB$. De waaiers zijn nu perspectief, de meetkundige plaats van de snijpunten van overeenkomstige stralen bestaat, zoals dadelijk in te zien is, uit de lijn AB en de middelloodlijn van AB.

Hoe valt nu de meetkundige plaats uit voor van 1 verschillende waarden van de verhouding van de hoeken CAB en CBA of, wat op hetzelfde neerkomt, van $\angle PAB$ en $\angle PBA$?

Kies AB tot X-as en de middelloodlijn van AB tot Y-as van een Cartesiaans coördinatenstelsel. Stel $AB = 2c$, $\angle PAB = A$ en $\angle PBA = B$.

Voor $B = 2A$ geldt nu

$$\operatorname{tg} B = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A},$$

dus, als x en y de coördinaten van P voorstellen,

$$\frac{y}{c-x} = \frac{\frac{2y}{c+x}}{1 - \frac{y^2}{(c+x)^2}},$$

waaruit volgt:

$$y = 0 \text{ of } \frac{(x + \frac{1}{3}c)^2}{\frac{4}{9}c^2} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}c^2} = 1.$$

De meetkundige plaats bestaat dus in dit geval uit de X-as en een hyperbool.

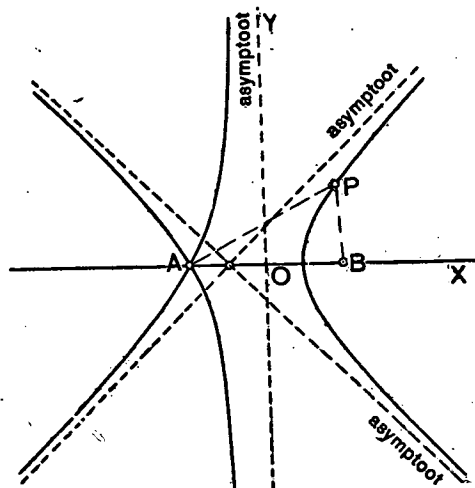
Voor $B = 3A$ wordt $\operatorname{tg} B = \frac{3\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1 - 3\operatorname{tg}^2 A}$,

waaruit volgt

$y = 0$ of $2x^3 - 2xy^2 + 3cx^2 - cy^2 - c^3 = 0$,
dus de X-as en een kromme van de 3e graad.

Deze 3e-gradskromme, die men, uitgaande van $B = 3A$, ge-

makkelijk kan tekenen, heeft een dubbelpunt in A, waar de raaklijnen hoeken van 60° en 120° met de X-as maken, daar voor $A = 60^\circ$ en voor $A = 120^\circ$ de straal BP A passeert.



$$\angle PBA = 3 \times \angle PAB$$

De vert. asymptoot loopt door het snijpunt van de beide andere; de y-as trekken.

Neemt men $B = n \cdot A$ (n geheel en positief), dan ontstaat een kromme van de n^e graad met een $(n - 1)$ -voudig punt in A.

$$B = \frac{p}{q} \cdot A \quad (p \text{ en } q \text{ ge-})$$

heel en onderling ondeelbaar) levert een kromme van de graad $p + q - 1$

met een $(p - 1)$ -voudig punt in A en een $(q - 1)$ -voudig punt in B.

Zijn A en B onderling onmeetbaar, het meest algemene geval dus, dan ontstaat een *transcendente kromme*, die elk punt van het platte vlak oneindig dicht nabij komt, op dezelfde wijze als voor een deel van het vlak het geval is bij de epicycloïde die ontstaat als baan van een punt van een cirkel die over een tweede cirkel rolt, terwijl de stralen van die cirkels onderling onmeetbaar zijn.

Stel, om dit aan te tonen, $B = c \cdot A$ (c onmeetbaar) en neem een willekeurig punt Q van het vlak; stel de tussen 0 en 360° gelegen hoek $QAB = \varphi$, $\angle QBA = \psi$. Voor $A = \varphi$ is $B = c\varphi$. De lijn door B, waarvoor $\angle B = c\varphi$, snijdt de lijn AQ in een punt S. In het algemeen is natuurlijk $c\varphi \neq \psi$, dus $S \neq Q$. Laat men echter $\angle A$ telkens met 180° toenemen, dan neemt $\angle B$ telkens met $c \cdot 180^\circ$ toe en komt, zoals bij nader onderzoek blijkt, op den duur de lijn BS, wegens de onmeetbaarheid van c , elke willekeurige richting oneindig nabij, zodat ook S Q oneindig dicht nadert.

J. W. DEKKER.

LXXVIII. *Formules voor sin na, cos na en tg na.*

Bij het bepalen van de vergelijking van de meetkundige plaats der punten P, ten opzichte van 2 gegeven punten A en B zo gelegen dat $\angle PBA = n \times \angle PAB$, heeft men de formule nodig voor $\text{tg } na$, uitgedrukt in $\text{tg } a$.

Stellen we $\text{tg } a = t$, dan is $\text{tg } 2a = \frac{2t}{1-t^2}$, $\text{tg } 3a = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$,

$$\text{tg } 4a = \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}, \text{ enz.}$$

Zoals men ziet, treden telkens, afwisselend in de noemer en de teller, de binomiaalcoëfficiënten van de met de coëfficiënt van a overeenkomende macht op, terwijl verder de tekens zowel in de teller als in de noemer afwisselend zijn.

Dat dit ook verder zo zijn moet, blijkt vlug als men de formules voor de sinus en cosinus van een veelvoud van a afleidt uit de formule van De Moivre, een afleiding die men ook heel goed met zijn leerlingen kan uitvoeren als men de volledige inductie behandelt en hierbij de formule van De Moivre als voorbeeld gebruikt en die dan *een mooi voorbeeld is van de afleiding van reële resultaten met behulp van imaginaire getallen!*

Zo is b.v.

$$\begin{aligned} \cos 5a + i \sin 5a &= (\cos a + i \sin a)^5 \\ &= \cos^5 a + 5i \cos^4 a \sin a + 10i^2 \cos^3 a \sin^2 a + \\ &\quad 10i^3 \cos^2 a \sin^3 a + 5i^4 \cos a \sin^4 a + i^5 \sin^5 a, \end{aligned}$$

waaruit door gelijkstelling van de reële en de imaginaire delen van de beide leden ogenblikkelijk volgt:

$$\begin{aligned} \cos 5a &= \cos^5 a - 10 \cos^3 a \sin^2 a + 5 \cos a \sin^4 a \text{ en} \\ \sin 5a &= 5 \cos^4 a \sin a - 10 \cos^2 a \sin^3 a + \sin^5 a. \end{aligned}$$

We zien hier de grond van het optreden van de binomiaalcoëfficiënten zowel als die van de afwisselende tekens.

Deling geeft nu:

$$\begin{aligned} \text{tg } 5a &= \frac{5 \cos^4 a \sin a - 10 \cos^2 a \sin^3 a + \sin^5 a}{\cos^5 a - 10 \cos^3 a \sin^2 a + 5 \cos a \sin^4 a} \\ &= \frac{5 \text{tg } a - 10 \text{tg }^3 a + \text{tg }^5 a}{1 - 10 \text{tg }^2 a + 5 \text{tg }^4 a}. \end{aligned}$$

Terloops zij nog opgemerkt dat uit

$$\begin{aligned} \cos na &= \cos^n a - \binom{n}{2} \cos^{n-2} a \sin^2 a + \binom{n}{4} \cos^{n-4} a \sin^4 a - \dots \text{ en} \\ \sin na &= \binom{n}{1} \cos^{n-1} a \sin a - \binom{n}{3} \cos^{n-3} a \sin^3 a + \dots \end{aligned}$$

volgt:

$\cos na$ kan voor iedere gehele positieve waarde van n geheel en

rationaal uitgedrukt worden in $\cos \alpha$, voor even waarden van n ook in $\sin \alpha$, $\sin n\alpha$ kan alleen voor oneven waarden van n geheel en rationaal uitgedrukt worden in $\sin \alpha$ en nooit in $\cos \alpha$.

J. W. DEKKER.

LXXIX. *Naar aanleiding van korrel LXXVI blz. 105.*

De volgende beschouwing wil zijn 'n nadere toelichting van 't geval en aanvulling.

De hoeken PAB en PBA noem ik α en β , 'n rechte door A α , door B β . Nu is 't ongewenst en onnodig, α en β aan 'n afspraak te binden, zoals op blz. 105 gebeurt: we moeten de zaak haar natuurlijk, wiskundig beloop gunnen en ze niet vertroebelen door er 'n pathologisch element in te leggen. We laten dus α en β ongehinderd aangroeien elk in de hem van nature aangepaste richting en beschouwen 't geval

$$\beta = n\alpha.$$

Uit 't schema

$$\begin{aligned} \beta = n\alpha \rightarrow \beta + \pi &= n \left(\alpha + \frac{\pi}{n} \right) \rightarrow \beta + 2\pi = n \left(\alpha + \frac{2\pi}{n} \right) \rightarrow \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \rightarrow \beta + (n-1)\pi &= n \left(\alpha + \frac{n-1}{n} \pi \right) \end{aligned}$$

zien we, dat aan één zelfde lijn b corresponderen n rechten α , dus heerst hier een

$(n, 1)$ verwantschap.

De m.pl. van P is dus van de graad $n + 1$, d.i. — buiten de zich afscheidende rechte AB — een K_n .

Aan $\beta = k\pi$ beantwoorden $n - 1$ rechten door A, bepaald door

$$\alpha = \frac{k\pi}{n}, k = 1, 2, \dots, n - 1,$$

zodat A op K_n een $(n - 1)$ voudig punt is en de klasse van $K_n(n - 1) - (n - 1)(n - 2) = 2n - 2$ bedraagt. ($k = 0$ komt toe aan AB).

De asymptoten worden bepaald door de oplossingen van

$$\alpha + \beta = k\pi,$$

dus zijn alle asymptoten reëel en haar richtingen worden gegeven door

$$\alpha = \frac{k\pi}{n+1}, k = 1, 2, \dots, n$$

($k = 0$ hoort bij AB, die haar eigen asymptoot is).

Met behulp van de figuur vindt men door tweemaal de sinus-regel toe te passen en tot de limiet over te gaan, dat de raaklijn in $P(a, na)$ aan K_n de lijn AB inwendig verdeelt in reden van $\sin^2 na : n \sin^2 a$, d.i. $\leq n$.

Hieruit lezen we, dat alle asymptoten door één punt C gaan, 't welk AB inwendig verdeelt in de verhouding $1 : n$.

De raaklijnen uit C aan K_n worden bepaald door

$$\sin na = \pm \sin a;$$

dat zijn dus vooreerst de n asymptoten en verder de $n - 2$ lijnen, waarvoor

$$a = \frac{k\pi}{n-1}.$$

In totaal dus $2n - 2$ in overeenstemming met 't geslacht. Ingeval n oneven is, bepaalt $a = \frac{\pi}{2}$ 'n dubbele oplossing: die asymptoot is dan ook buigraaklijn.

Omtrent 't geval $\beta = 2a$ kan nog opgemerkt worden, dat we in B herkennen

't Frégierpunt

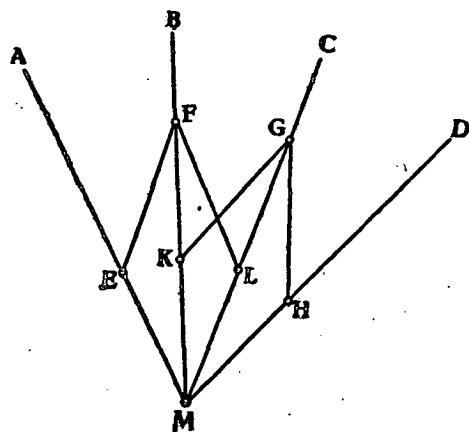
van A t.o.v. de hyperbool.

L. CRIJNS.

LXXX. De driedeling van de hoek.

Het is, gelijk bekend, niet mogelijk, door een constructie een willekeurige hoek in drie gelijke delen te verdelen. Bij de bestudering van dit vraagstuk vond ik echter wel een instrument met behulp waarvan een dergelijke driedeling kan worden verricht. Het instrument kan op de volgende wijze worden vervaardigd, waarbij ik verwijs naar bijgaande figuur.

Men brengt 4 staven A , B , C en D samen in een scharnierend punt M . De staven worden in zodanige stand gebracht, dat de hoe-



ken AMB , BMC en CMD even groot zijn. Op de staven worden

aangenomen punten E, K, L en H, die op gelijke afstand van M liggen. Op de punten E en L worden staven aangebracht ter lengte van EM, die kunnen bewegen om de punten E en L. Deze staven worden samengebracht in het punt F en zodanig bevestigd, dat zij kunnen glijden langs de staaf BM. Op gelijke wijze worden op de punten K en H staven aangebracht, die samenkomen in punt G en kunnen glijden langs de staaf CM. Het instrument is daarmee voltooid.

Wanneer de hoek AMD groter of kleiner wordt gemaakt, zullen BM en CM de dan gevormde hoek in drie gelijke delen verdelen. Dit volgt uit het feit, dat de figuren EMLFE en KMHGK een ruit vormen en door BM en CM in twee gelijke delen worden verdeeld.

Wil men dus een willekeurige hoek in drie gelijke delen verdelen, dan behoeft men slechts de hoek AMD aan die hoek gelijk te maken.

B. L. DE REGT.

VACANTIECURSUS VAN HET MATHEMATISCH CENTRUM.

Voorlopig cursusprogramma.

Er zal getracht worden met een minimum van veronderstellingen een bevattelijke inleiding te geven in de problemen en methoden der topologie. De sprekers zullen zoveel mogelijk aanknopen bij de elementaire en projectieve meetkunde en bij de elementaire algebra. Na de voordrachten zal er gelegenheid tot discussie zijn.

Donderdag 28 Aug. 's middags:

Prof. Dr H. Freudenthal (Amsterdam). Inleiding. Voorbeelden van topologisch onderzoek.

Vrijdag 29 Aug. 's ochtends:

Dr J. de Groot (Amsterdam). De nulde dimensie.

Prof. Dr D. van Dantzig (Amsterdam). Universele getallen.

Vrijdag 29 Aug. 's middags:

Dr A. van Heemert (Amsterdam). Pathologische krommen.

Dr G. Hirsch (Brussel). Projectieve meetkenden.

Zaterdag 30 Aug., 's ochtends:

Prof. Dr B. L. van der Waerden (Laren N.H.). De stelling van Jordan—Brouwer.

Prof. Dr J. C. H. Gerretsen (Groningen). Een hoofdstuk uit de topologie der driedimensionale gesloten ruimten.

Samenvatting door Prof. Dr H. Freudenthal.

Aanmelding bij M. G. H. Birkenhäger, v. Breestraat 153, Amsterdam Zuid.

DE REKENLINIAAL

door

G. H. FREDERIK.

In een artikel, geplaatst in *Euclides* 16, 33, '39, bespreekt H. J. E. Beth, hoe hij zijn leerlingen de behoefte doet gevoelen aan de invoering van een nieuw begrip i.c. het begrip logaritmie. Hij betoogt, dat exacte formuleringen niet kant en klaar voor de leerlingen neergezet moeten worden, maar dat ze onder leiding van den leraar tot stand gebracht moeten worden. Het eindresultaat van de wiskundige activiteit wordt neergelegd in een deductief opgebouwd stuk theorie. Wordt dit zonder voorbereiding aan de klasse voorgelegd, dan is het resultaat verbijstering en ontmoediging. Wordt daarentegen de theorie in samenwerking met de klasse gevonden, dan ontstaat er een gevoel van bevrijding van de spanning, waarin de leerlingen zijn geraakt door de voorbereiding. Het leerboek geeft alleen het resultaat van onze werkzaamheden — niet die werkzaamheden zelve.

Vervolgens geeft hij een schets van de wijze van voorbereiding om tot het begrip logaritmie te komen. Nu zouden, meen ik, vele leraren er bij gebaat zijn, indien dergelijke inleidingen niet blijven behoren tot de mondelinge overleveringen. Zij vertegenwoordigen immers een belangrijk stuk didaktiek. Wordt niet vaak als de voornaamste taak hiervan beschouwd: het uitkiezen van geschikte onderwerpen en het aangeven van de definitieve vorm, waarin de theorie gegoten kan worden? En wordt niet te weinig aandacht geschonken aan de wijze, waarop dit begeerde doel bereikt moet worden?

In het volgende wordt een variant gegeven op de inleiding van Beth om tot het begrip logaritmie te komen. Enkele argumenten voor de behandeling van de rekenliniaal op de Middelbare School mogen voorafgaan.

1. Tijdens het practicum uur zullen vele Natuurkunde-leraren en vooral zij, die de experimentele richting bij hun studie kozen, zo min mogelijk tijd aan cijferwerk laten besteden.

2. De rekenliniaal is hun zeer dierbaar, niet in het minst, omdat de gebruiker zich voortdurend rekenschap moet geven van de orde van grootte van de getallen, waarmee hij werkt.

3. De meeste leerlingen hebben grote belangstelling voor wiskundige instrumenten, maar we kunnen hun op dit gebied maar heel weinig laten zien. De rekenliniaal ligt, wat zijn werking betreft, binnen hun bevattingvermogen.

4. De 5e klasse van het Gymnasium pleegt het onderwijs in de techniek van het op- en terugzoeken nogal vervelend te vinden. Behandelt men echter dit onderwerp in ongeveer dezelfde tijd aan de rekenliniaal zowel als aan de logarithmetafel, dan blijft de belangstelling levendig.

5. Bovendien worden verschillende moeilijkheden van het begrip logarithme beter toegelicht met de rekenliniaal dan met de tafel. Dit geldt vooral voor de visueel aangelegden onder de leerlingen.

6. Te makkelijk wordt het functiebegrip geïdentificeerd met de afbeelding van de functie in het Cartesiaanse vlak. De logarithmische schaalverdeling is een voorbeeld van een andere wijze van afbeelden, die in de Nomographie veel voorkomt.

Hieronder volgt een schets van de inleiding tot het begrip logarithme en de vervaardiging van een eenvoudige rekenliniaal. Het begin is ontleend aan het geciteerde artikel van Beth.

a. Het is gemakkelijk twee getallen met elkaar te vermenigvuldigen, die machten zijn van hetzelfde grondtal.

b. Is het mogelijk om alle getallen te schrijven als machten van een zelfde grondtal, dan zouden zich gouden verschietsen openen! Dan zou iedere vermenigvuldiging herleid kunnen worden tot een optelling, iedere deling tot één aftrekking, iedere machtsverheffing tot een vermenigvuldiging, iedere worteltrekking tot een deling.

c. Kiezen we als grondtal tien dan zijn er al aardig wat getallen als machten van tien te schrijven zoals 1, 10, 100, 1000, $1/10$, $1/100$, $1/1000$ maar ook $\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{10}$, $10\sqrt{10}$, $\sqrt[3]{1000}$, $10\sqrt[3]{1000}$ etc.

Veronderstellen wij, dat de leerlingen gewoon kunnen worteltrekken dan kunnen zij al deze uitkomsten in b.v. twee decimalen nauwkeurig berekenen. Enige voorbeelden worden gemaakt van getallen, die allemaal liggen tussen 1 en 100.

$$10^{1/2} = \sqrt[2]{10} = 3,16$$

$$10^{1/4} = \sqrt[4]{10} = \sqrt{3,16} = 1,77$$

$$10^{11/2} = 10\sqrt{10} = 10 \times 3,16 = 31,6$$

$$10^{13/4} = 10\sqrt[4]{10} = 10 \times 1,77 = 17,7$$

$$10^{1/8} = \sqrt[8]{10} = \sqrt{1,77} = 1,33$$

$$10^{11/8} = 10\sqrt[8]{10} = 10 \times 1,33 = 13,3$$

$$10^{3/4} = \sqrt[4]{10\sqrt{10}} = \sqrt{31,6} = 5,62$$

$$10^{13/4} = 10\sqrt[4]{10\sqrt{10}} = 10 \times 5,62 = 56,2 \quad \text{etc.}$$

Berekening van enkele
bij elkaar behorende
waarden van de functie

$$10^y = x$$

d. We laten nu op gewoon mm papier een grafische voorstelling maken van het verband tussen x en y , als $10^y = x$ is. Van deze functie kan men zoveel punten tekenen, als men wil volgens de zojuist geschetste methode. Het interval van x loopt van 1—100, dat van y van 0—2. Kies voor de eenheid in de x richting b.v. 2 mm en voor die in de y richting 100 mm. De reden hiervoor blijkt in punt g. Met behulp van de kromme is het nu mogelijk om in twee decimalen nauwkeurig de uitkomst van het vraagstuk: wat is y in $10^y = 2$ af te lezen uit de grafiek. We delen mee, dat dit getal de tien logaritmische van 2 genoemd wordt. Aan de wens, geuit in b , is nu voldaan.

e. We trachten nu met behulp van deze grafiek eenvoudige vermenigvuldigingen en delingen uit te voeren. Eerst zo voorzichtig mogelijk bv.: $2 \times 4 = 10^{0,30} \times 10^{0,60} = 10^{0,90} = 8$.

Het is vooral zaak de leerlingen rustig te leren kennismaken met de schalen. Voer vast in de termen „opzoeken” d.i. bij een x -coördinaat de bijbehorende y -coördinaat bepalen of bij een getal zijn logaritmische zoeken en „terugzoeken” d.i. bij een y -coördinaat de bijbehorende x -coördinaat bepalen of bij een zekere logaritmische het bijbehorende getal zoeken. Hierbij vraagstukjes als

Bereken 4^2 ; $70/14$; etc.

f. De bewerkingen worden eenvoudiger als we langs de kromme (zie fig. 1) bij verschillende punten de waarden der x -coördinaten schrijven. Maak, om dit te laten inzien, een eenvoudig voorbeeld. Nog handiger rekenen we, als we voldoende punten van de kromme projecteren op een lijn evenwijdig aan de y -as en bij iedere projectie de waarde van de x -coördinaat van het geprojecteerde punt schrijven. Er ontstaat een z.g. logaritmische schaal.

g. Nu stellen we iedere leerling twee 1 cm brede strookjes enkel-logaritmisch papier ter hand. In de handel is papier verkrijgbaar, dat juist 20 cm lang is. Eén van beide strookjes wordt nu thuis op de grafiek geplakt, opdat de leerlingen steeds het ontstaan van de logaritmische schaal voor ogen hebben. Zij zien, dat een dergelijke schaal, met behulp van de getekende kromme gemaakt zou kunnen worden. Laat nu bij de schaal de waarden van de x -coördinaten schrijven (zie fig. 1). Het strookje is rechts getekend.

h. Stel nu vragen om de klasse te dwingen zich rekenschap te geven van de schaal b.v.: waarom begint de schaal met 1? Waarom is het stuk tussen 1 en 10 even groot als dat tussen 10 en 100?

Waarom is de afstand tussen de punten 3 en 30 even groot als tussen 4 en 40?

Waarom is de verdeling tussen 1 en 10 congruent met die tussen 10 en 100?

Als we de schaal naar boven en onder nog 10 cm doorzetten, welke getallen moeten we dan bij de eindpunten zetten?

Het is moeilijk voor de leerlingen zich te realiseren, dat niet de getallen zelf zijn uitgezet maar hun logaritmen. Daar komt nog

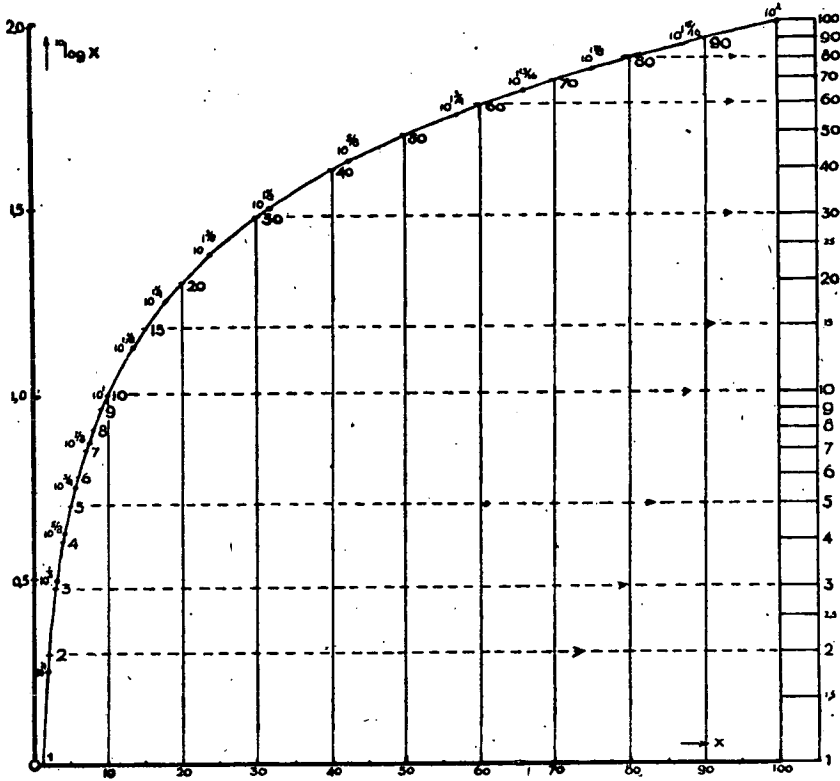


Fig. 1.

Het ontstaan van een logarithmische schaalverdeling. De kromme wordt getekend op gewoon m.m. papier. De kromme is geconstrueerd door de punten, waarbij de x -coördinaat links staat. De punten, waarvan de x -coördinaat rechts staat zijn geprojecteerd door middel van de stippellijnen. Hun projecties vormen de logarithmische schaal. Er zijn slechts enkele stippellijnen getekend om de figuur niet te overladen te maken.

bij, dat als eenheid 10 cm is gekozen. Hierover weer enkele oefeningen.

Combineer de tweede strook met een dubbele decimeter en zoek op:

$\log 7$; $\log 42$; $\log 1,2$; $\log 2,64$; $\log 0,7$; $\log 700$.

Zoek terug: $\log x = 0,60$; etc.

Lastig is ook het gebruik van de schaal tussen 1 en 2.

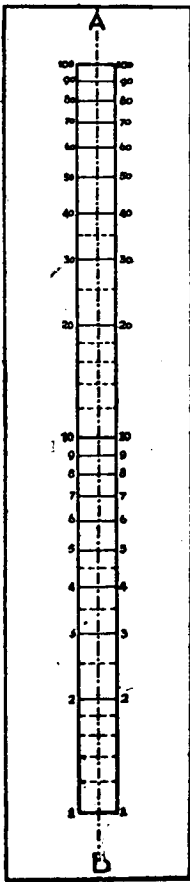


Fig. 2.

Model van een rekenliniaal.

Een strookje enkel-logaritmisch papier ter breedte van 1 cm wordt op een stuk wit karton geplakt. Links en rechts worden de getallen geschreven en vervolgens wordt met een schaar het karton volgens de lijn AB doorgeknijpt.

i. Nu eindelijk de rekenliniaal. Het tweede strookje wordt thuis op een stevig stuk ivoorkarton geplakt. Op het karton worden aan weerszijden van de schaal de getallen geschreven (zie fig. 2). Vervolgens wordt het karton doorgeknijpt volgens de stippellijn. We hebben nu een model van een rekenliniaal. Men kan op de strookjes met potlood dunne streepjes laten zetten, die weer uitgegomd kunnen worden als het vraagstuk af is, aangezien de liniaal maar enkele lessen dienst moet doen.

j. Nu kan de kennismaking met het nieuwe instrument beginnen. Door het gebruik van de twee schaalverdelingen wordt het optellen en aftrekken van de logaritmen zeer eenvoudig, evenals het terugzoeken. Bij machtsverheffen met exponenten groter dan 2 en worteltrekken hebben we de dubbele decimeter nog nodig. Bij de eerste berekeningen is het gewenst op het bord het volgende schema te zetten.

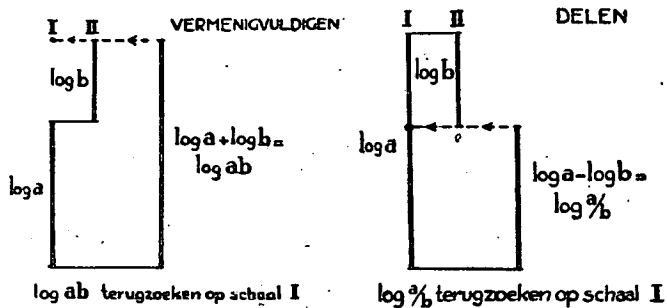


Fig. 3.

Schema van vermenigvuldigen en delen met behulp van de rekenliniaal.

k. Tenslotte kan men als de klasse en de leraar enthousiast genoeg zijn nog verder gaan en allerlei bekende trucjes herontdekken. Laat b.v. eens uitrekenen $4 : 7$ of 23×81 .

Bij het berekenen van een vorm als

$$x = \frac{7,3 \times 1,67 \times 2,32}{6,1 \times 2,75}$$

bespaart men tijd, als men delen en vermenigvuldigen afwisselt.

De partiële uitkomsten worden niet genoteerd, alleen het eindresultaat.

Verder kan men ter oefening alleen de schalen van 1—10 laten gebruiken. De plaats van de komma in de uitkomst wordt door een ruwe schatting bepaald. Men kan de voordelen van een combinatie met een schaal met tweemaal of driemaal zo grote eenheid bespreken. Men kan leren worteltrekken zonder dubbele decimeter etc.

1. Ten slotte nog een belangrijke kwestie. Veel sneller dan bij het gebruik van de tafel komt uit de klas een vraag naar voren over nauwkeurigheid van de berekeningen. Aangezien we hier alleen met afleesfouten te maken hebben, is een schatting van de „practisch grootst mogelijke fout” ¹⁾ eenvoudig te maken. Zeer leerzaam is het te laten zien dat, in tegenstelling met een aflezing op een dubbele decimeter, de „practisch grootst mogelijke procentuele fout” aan het begin en het eind van de schaal even groot is bij terugzoeken (voor een geoefende ongeveer $\frac{1}{2}$ %).

B.v. aldus:

Bepaal x , als $\log x = 0,12$ ook als $\log x = 0,98$.

$\log x = 0,12$. $x = 1,31^5$ à $1,32$ gr. mog. proc. fout 0,5 %.

$\log x = 0,98$ $x = 9,5^5$ à $9,6$ gr. mog. proc. fout 0,5 %.

m. Men laat nu wat vraagstukken uit het leerboek, die ontworpen zijn om met de tafel gemaakt te worden, met de geïmproviseerde liniaal uitrekenen.

Door deze inleiding leren de leerlingen de belangrijkste eigenschappen van de logarithmen langs experimentele weg vinden.

Hierna worden op de bekende manier de bewijzen afgeleid van de gevonden stellingen.

¹⁾ Zie G. H. Frederik en M. W. F. Schregardus: Fouten Theorie, Faraday VI, 137, 1935; Natuurkunde Proeven voor leerlingen. Dl. II.

HERINNERINGEN EN OVERPEINZINGEN VAN EEN OUD MAN

door

Hk. DE VRIES.

Waarde Lezer,

Ik ben een oud man, dat is waar, maar mijn omgeving is zoo welwillend te getuigen, dat mijn geestelijk peil nog niet onrustbarend gedaald is; Ge kunt dus dit opstel gerust beginnen te lezen, kunt het trouwens uit handen leggen, zoodra Ge lont ruikt.

Ik heb den laatsten tijd, sedert ik *Euclides* weer in handen krijg, veel over wiskunde gelezen: interessante en leerrijke oraties, maar ook veel over het onderwijs er van, belicht van alle kanten; over het eigenaardige karakter van dit onderwijs, over de specifieke moeilijkheden, die zich daarbij voordoen, over de vraag of dit onderwijs noodzakelijk is voor allen, in het bijzonder voor de α 's van het Gymnasium, of het karaktervormend werkt, goede, denkgewoonten aankweekt, hoe de scheppende mathematicus, en dus op bescheidener schaal ieder mathematicus, denkt, welke bijzondere moeilijkheden de leerlingen ontmoeten, enz. enz., te veel om op te noemen. En ik ben daarbij vele voor mij moeilijke woorden en uitdrukkingen tegengekomen, als daar zijn destructureeren, epistemisch, transfer, functioneele binding, homogene, heterogene functioneele binding, functioneele binding van formeelen aard, van niet specifieke aard enz., om duizelig van te worden, en ik ben er van overtuigd geraakt, dat hier door al die naartstige denkers en werkers belangrijke onderzoekingen worden verricht op den weg naar het helaas slechts asymptotisch te benaderen antwoord op de vraag: wat is denken? Of ze alle ook even belangrijk zijn voor het onderwijs weet ik nog zoo zeker niet; een groot theoretisch paedagoog is niet altijd ook een groot practisch onderwijzer; ik ken er voorbeelden van. Maar daarover wil ik het nu niet hebben, ik wil integendeel bekennen dat mij onder het lezen de schrik om het hart geslagen is doordien de benauwende vraag bij mij opkwam: wat heb ik dan 50 jaar lang eigenlijk wel voor onderwijs gegeven? Want ik heb van al die dingen waarover ik nu gelezen heb nooit een woord geweten. Toen ik mijn loopbaan begon werden de vragen, naar welke oplossing thans met zooveel toewijding gezocht wordt, nog in het geheel niet gesteld, en weldra was ik zóó overladen dat mij voor rustige be-

zinning geen tijd bleef: 24 tot 28 uren les aan de H.B.S. (en uren van 60 minuten!), en later 12, soms 13 uur college, tentamens, examens, eindelooze en steeds weer opduikende vergaderingen, zorg voor dissertaties, laten een mensch niet veel otium. Nu hoor ik in gedachten een jeugdig lezer al tegen mij zeggen: „nou, als je van al deze dingen dan niets geweten hebt, dan zal het succes van je onderwijs er ook wel naar geweest zijn”, maar deze conclusie is fout. Wie in een college Beschrijvende Meetkunde voor een 100 à 120 toekomstige ingenieurs door een peroratie over *Monges* zijn gehoor zóódanig in vervoering weet te brengen dat bravo-geroep, handgeklap en voetgetrappel het effect zijn, kan over gemis aan succes niet klagen. Toegegeven, dat was niet op de H.B.S.; ook van daar zou ik soortgelijke successen kunnen meedeelen, zij het natuurlijk op bescheidener schaal en minder luidruchtig. Ik wil nog meer toegeven: dergelijke successen zijn geen bewijs voor blijvenden invloed op de leerlingen ook gedurende hun verder leven; maar als ik, misschien na 20 jaar, in de Leidsche Straat een oud-leerling van de H.B.S. ontmoet die een goede positie in Indië bekleedt en in den loop van een hartelijk gesprek tegen mij zegt: „weet U nog wel dat U op de H.B.S. eens dat en dat tegen mij gezegd hebt”? (ik wist het niet meer). „Ik heb er mij altijd naar gedragen en ben er best bij gevaren”, dan kan toch mijn ergste vijand niet in gemoede volhouden dat ik destijds dien jongen niets meegegeven heb.

Hiermede kom ik tot de eigenlijke reden waarom ik dit opstel schrijf: ik mis in al die stukken wat voor *mij* de hoofdzaak is, de spil waarom alles draait, waar de heele zaak mee staat en valt: de leeraar. Dr. Wielenga noemt hem terloops, maar zonder hem die alles overheerschende plaats in te ruimen die ik hem toeken. Ik voel mij eenzaam met mijn overtuiging. Bij mijn debuut had ik van paedagogiek en didactiek nauwelijks gehoord, en ik heb het les geven geleerd als een jongen die wil leeren zwemmen en eenvoudig in het water gegooid wordt. Léért ie zwemmen, des te beter, dan kan hij later misschien als zwemmer carrière maken; verdrinkt ie, dan had hij maar niet moeten willen leeren zwemmen. Het begin was niet gemakkelijk. Ik kreeg een 5e klas, jongens en een paar meisjes, waarvan de meesten nauwelijks 10 jaar jonger waren dan ik zelf, welke klas door mijn voorganger, een tijdelijk aangesteld gewezen officier, niet slechts radicaal bedorven, maar ik mag wel zeggen volkomen ontwricht was; het was geen klas meer, het was een bende bandieten. Zij zetten de drie rijen banken waaruit de klas bestond netjes en met toewijding op pennehouders, zoodat

onder de les de heele klas langzaam doch dreigend op den man toegerold kwam; zij hadden een plank uit den vloer los gewerkt en een wekker er onder gezet, die onder de les afliep, enz.; voor het eindexamen waren zij natuurlijk volslagen onvoorbereid. Zij trachtten bij mij met die spelletjes voort te gaan maar, om kort te gaan, onzichtbaar gerugsteund door den voortreffelijken directeur, heb ik de bende getemd; en toen zij merkten dat ze bij mij wat konden leeren, en gingen beseffen hoe ellendig zij er, wat het eindexamen betreft, voorstonden, werd de vrede geteekend. En ik heb hun na vieren vele extra lessen gegeven, we zijn goede vrienden geworden, en het eindexamen was bevredigend. En de Indischman uit de Leidsche Straat was één van de bende.

Met opzet vermeld ik nog andere voorbeelden. In den eertijds fraaien tuin van het schoolgebouw waren twee klasselokalen uitgebouwd, 1a en 1b, gescheiden door een breede gang. De tuin was er door geruïneerd, maar niet waar, de eischen van den modernen tijd, u kent dat; ter wille van den modernen tijd hebben ze half het oude Amsterdam vermoord, het woonhuis van Joost van den Vondel neergehaald, enz.

In 1a dan mocht ik iederen vrijdagmorgen van 9—11 les in wiskunde geven, twee volle uren wiskunde aan kinderen van 12 jaar! Geen erg gelukkig lesrooster, maar dat scheen nu dat jaar niet anders te gaan. „Directeur”, zei ik, „dat is geen doen. Geef mij 10 minuten pauze, 5 vóór het uur en 5 er over, en ik zal de toer volbrengen.” En de directeur, een man met een wijden blik, stond mij de 10 minuten toe. En in die pauze mochten de kinderen binnen zekeré grenzen doen wat zij wilden; sommigen zaten met elkaar te praten, anderen kwamen bij mij aan het raam staan om met mij te babbelen en naar de kippetjes van den concierge te kijken, weer anderen sprongen haasje over. En de directeur kwam af en toe eens kijken en glimlachte tevreden. En als de 10 minuten om waren verzocht ik om rust en hernieuwde aandacht, en ondergingen de kindertjes gelaten het tweede uur.

Een voorbeeld van geheel anderen aard. Onze leeraar voor Duitsch was maanden en maanden lang ernstig ziek, zoodat er heftig en langdurig waargenomen moest worden en de directeur, ten einde raad, maar een vaste waarnemingsrooster had opgemaakt. Daarin werden mij in een 4de klas die niet de mijne was, maar waarin ik slechts één uur in de week Cosmographie kwam geven omdat ik daarin de eenige bevoegde was, 4 extra uren toebedeeld. „Directeur”, sprak ik opnieuw, „dat is geen doen. Moet ik die jongens iedere week 4 extra uren wiskunde opdringen? Laat mij

Duitsch geven." Groote verbazing, en groote bezwaren. U begrijpt: geen bevoegdheid, enz. Maar ik bleef aanhouden en de directeur, een man waar „muziek in zat" en die wel hield van een buiten-issigheidje, eindigde met toe te geven. En wij lazen 4 uur in de week de trilogie „Wallenstein" van Schiller, met verdeelde rollen, ik natuurlijk óók een, en met toelichtende verklaringen mijnerzijds, zoowel over Wallenstein als over den mensch Schiller, en de directeur kwam af en toe eens zitten luisteren en glimlachte tevreden. En we vonden het allen genotvolle uren, ik niet het minst.

Een laatste voorbeeld. Ik heb ook les gegeven, vrijwillig natuurlijk, in de onschatbare stenographie Groote, die mijn leven lang voor mij een zegen geweest is, en nog is. Tweemaal in de week, 's morgens van ½9—9 uur. De directeur, waarom zou ik eigenlijk verzwijgen dat zijn naam Costerus was, en dat ik spreek over de 1e H.B.S. 5 aan de Keizersgracht tegenover de Westermarkt, gaf natuurlijk weer zijn toestemming. En mijn toehoorders gebruikten de stenographie braaf, en één van hen, Zodij geheeten, is stenograaf bij de Staten-Generaal geworden.

Waar toe nu dit alles? En is dit halen van oude koeien uit de sloot niet een soort seniele ophakkerij? Zij die mij 50 jaar lang hebben kunnen observeeren: Barrau, Brouwer, Kohnstamm, Mannoury, Schrek, Wijdenes zullen willen getuigen dat ik geen ijdeltuit ben; ook heb ik in mijn „Historische Studiën" tē lang en tē intensief met de werkelijk grooten verkeerdt om niet geleerd te hebben mezelf maar doodkoest te houden. Ook had ik heel goed voorbeelden van anderen aan kunnen halen, zoowel finale fiasco's als frappante successen; maar ik wil een overtuiging uitspreken, die als een leid-draad door geheel mijn ambtelijk leven loopt, en waarom zou ik dan, uit misplaatste bescheidenheid of iets dergelijks, juist *die* fundamente in het duister moeten laten waarop die overtuiging het stevigst steunt? Die overtuiging dan is dat men als docent geboren moet worden en dat, als men eenmaal als zoodanig geboren is, het vrij onverschillig is wāt men doceert; men zal altijd succes hebben; en zoo komt voor mij de vraag: wāt moet onderwezen worden, eigenlijk pas ná de vraag: *wie* moet onderwijzen. Men moet als docent geboren worden, even goed als men als schrijver, dichter, beeldhouwer, schilder, componist en dirigent geboren moet worden. Men kan honderd boeken over compositieeler doorwerken en wordt tōch geen componist, en men kan honderd boeken over paedagogiek en didactiek doorwerken en wordt tōch geen goed docent. „Wenn ihr's nicht fühlt, ihr werdet's nicht er-

jagen", maar dit „fühlen" laat zich niet leeren, dat moet men bij zijn geboorte in latenten vorm meebrengen; het kind aan de borst van de moeder is reeds een goed docent! En die drang tot schrijven, dichten, schilderen, beeldhouwen, componeeren, onderwijzen zal zich baan breken dwars door alle obstakels heen. De docent staat het dichtst bij den dirigent. Deze dirigeert en bezielt een heel orkest, de leeraar behoort een heele klas te beheerschen, om het woord „bezielen" nu maar liever niet te gebruiken. Hij moet dit doen niet door dwang, maar door denzelfden geheimzinnigen invloed, die van den dirigent uitgaat als hij zijn muzikanten inspireert en meesleept.

Natuurlijk is de eene gave de andere niet. Toscanini, die op onnavolgbare wijze de symphonieën van Beethoven voor ons open legt, is niet het wereldwonder Beethoven zelf, en Bruno Walter, die van de afgezaagde „Kleine Nachtmusik" een meeslepemde verrukking maakt, is geen Mozart, maar groote kunstenaars zijn zij beiden toch. En nu maakt de aangeboren gave van den docent wel niet zoo'n furore als die van de beide genoemden, maar het is de vraag of zij, wat het nuttig effect aanbelangt, wel zooveel lager staat.

Deze overwegingen zouden ons, goede leeraren, licht hoovaardig kunnen maken en een hooge borst doen opzetten, daarom zet ik er een domper op door als mijn verdere overtuiging uit te spreken, dat de goede docent niet al te begaafd moet zijn, want dan begrijpt hij van zijn leerlingen niets; hij moet zelf de wiskunde zijn leven lang „erg moeilijk" blijven vinden en er onafgebroken mee hebben te worstelen. Ik vermoed dat Pascal, die als kind reeds zeide niet te begrijpen wat de menschen aan die Meetkunde der Grieken toch eigenlijk „aan" vonden, want dat dat toch allemaal van zelf sprak, geen goed onderwijzer geworden zou zijn, en van Riemann weet ik het zeker. Toen die zich als privaatdocent te Göttingen op het glibberige pad van het onderwijs waagde, bleef hij in minder dan geen tijd met één toehoorder zitten, en déze verklaarde ronduit van wat de groote man zeide geen stom woord te begrijpen; hij wilde hem alleen niet heelemáál voor leege banken laten praten, en offerde zich dus op als proefkonijn! Maar Gauss was door Riemann's „openbare les": „Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zum Grunde liegen", diep geschokt, maar had dan ook zelf al 30 jaar lang de niet-euclidische Meetkunde in zijn schrijftafel liggen, lang en lang vóór Lobatschewskij en Bolyai.

Ik herhaal wat ik in den aanvang van dit opstel reeds gezegd heb, nl. dat ik de bijenvlijt, de taaie volharding waarmede de psychologen, paedagogen enz. de oplossing van hun problemen nastreven,

hoog aansla, maar ik geloof dat hunne onderzoekingen meer rechtstreeks leiden tot een ietwat grondiger kennis van het helaas ondoorgrondbare denkproces dan dat ze veel met het onderwijs te maken hebben, met de vraag: wat neemt de leerling van de school voor zijn leven mee, in het bijzonder dan voor mijn part: wat neemt hij uit het wiskunde-onderwijs voor zijn leven mee. Bovendien „het” wiskunde-onderwijs? Er is geen sprake van „het” wiskunde-onderwijs. Op verschillende scholen leeren de leerlingen allerlei verschillende wiskunden. In dit opzicht heb ik als Gecommitteerde bij de eindexamens der Gymnasia de verrassendste ervaringen opgedaan. Ik was aan een school waar de docent, een puikje, in zijn persoonlijke studie leefde in de Getallentheorie, en toen ik op het examen zijn leerlingen met hem hoorde discussieeren wist ik niet beter te doen dan het hoofd te buigen, ootmoedig te gaan zitten luisteren, en blij te zijn dat de jonge examinerator de vragen niet aan mij stelde. Op een ander gymnasium had de docent, een joviale R.K. priester, zich opgewerkt tot specialist in het snijden van de meest onwarschijnlijke stukken uit een bol, en hij had eigenhandig methoden uitgewerkt om deze inderdaad schrikkelijk ingewikkelde vraagstukken onder de knie te krijgen; en het was alweer een lust om te zien hoe de examinandi de methoden van den meester hanteerden. Het is duidelijk dat de leerlingen van den priester bij den ander een nul gekregen zouden hebben, en omgekeerd, maar meegenomen hebben ze allen wat, en wel hetzelfde, wiskundig denken, wat volgens *mijn* overtuiging heel iets anders is dan gewóón denken. Het is waar dat ik óók eens aan een school geweest ben waar de examinerator, bij wien ik kwam koffiedrinken, mij vol trots een groote ronde tafel toonde die hij den vorigen winter, avond aan avond, belegd en daarna beplakt had met knipsels van postzegels, heel fraai en heel smaakvol. *Zijn* leerlingen slaagden ook, maar hebben ongetwijfeld minder mee naar huis genomen dan de anderen.

Het is een veel omstreden vraag of er voor het aanleeren van wiskunde een speciale begaafdheid noodig is; ik meen uit het ongerijmde te kunnen bewijzen van wel, althans wat de Meetkunde aangaat. Het in vergelijking brengen van ingekleede vraagstukken in de Algebra, als van die twee bekende boerinnen die met hun eieren ter markt gaan en in de stoomtram idiote gesprekken voeren van „als Ge mij $\frac{1}{3}$ e van uw aantal eieren geeft plus nog $\frac{1}{3}$ e ei enz.”, het in vergelijking brengen van zulke vraagstukken wordt een handigheid, en het oplossen der vergelijkingen gaat volgens vaste recepten en vereischt niet, zooals Gauss zegt in een brief aan zijn

vriend Schumacher van 15 Mei 1843, „jedesmal neue-Efforts (kleinere oder grössere) des Erfindungsgeistes”; maar het oplossen van meetkundige vraagstukken vereischt die wel, vereischt „die gleichsam unbewussten Inspirationen des Genies, die niemand erzwingen kann”. Nu zijn dit wel vervaarlijk dikke woorden, maar wij behoeven Gauss slechts door een omgekeerden verrekijker te bekijken om heel in de verte onze leerlingen aan het werk te zien. Een feit is het dat deze „unbewusste Inspirationen des Genies” volslagen afwezig kunnen zijn, en wel bij leerlingen die overigens volstrekt niet achterlijk zijn, en als ze dus noodig zijn, dan is er een zekere speciale begaafdheid noodig. Het sterkste voorbeeld van volslagen afwezigheid heb ik gevonden bij het lieve meisje Estella zoo en zoo, wie ik met geen geweld aan het verstand kon brengen dat een driehoek niet per se gelijkzijdig behoeft te zijn. Wát ik ook deed, hoeveel driehoeken ik voor haar op het bord teekende, het was alles vergeefs; als ik haar uitnoodigde nu zelf eens een driehoek te ontwerpen, dan werd hij gelijkzijdig, en ondanks mijn engelengeduld waren wanhopige huilbuien het gevolg. Ik ben toen vertrokken naar Delft, maar Estella heeft niet toegegeven, heeft met verbeterd vastberadenheid doorgezet, van buiten geleerd wat er maar van buiten te leeren viel, en is, gesteund door haar andere cijfers, die heel goed waren, door haar eindexamen gestrompeld, en een wel-gesitueerd tandarts geworden. En toen ik haar na jaren op de Weteringschans eens ontmoette en een eindje met haar opliep om over den ouden tijd te praten, toen stak ze haar arm door den mijnen en zei dat ze het altijd zoo lief van mij gevonden had dat ik zooveel geduld met haar gehad had. Waaruit wij tot onzen troost mogen concluderen dat zelfs de Wiskunde een middel kan zijn om door een beminnelijke jonge dame „lief” gevonden te worden.

Ook zou ik ontkennend willen antwoorden op de vraag of het wiskundig leeren denken het denken in het algemeen bevordert; het wiskundige denken is hiertoe veel te weinig gecompliceerd, gaat veel te veel volgens één lijn, is dus, eigenlijk gezegd, veel te eenvoudig. In de Wiskunde heeft men altijd juist evenveel vergelijkingen als onbekenden, in het dagelijksch leven nooit. Bij het denken in het dagelijksch leven komen factoren te pas die in de Wiskunde ten eenenmale ontbreken. Was de stelling juist, dan moesten de grootste mathematici in het dagelijksch leven óók altijd op de eerste plaats staan, maar daaraan mankeert gewoonlijk nog al het een en ander. Monge, de evenknie van Euler en Lagrange, was toch waarlijk wel een groot mathematicus maar, het spijt mij genoeg het te moeten zeggen, tijdens de Revolutie een prul van een Minister van Marine,

hoewel Napoleon hem later tòch weer zijn „levend lexicon” noemde. Omgekeerd heeft een van mijn vroegere collega's, een groot jurist in den lande, mij eens verteld dat hij af en toe wel eens een benauwden droom had, en dan altijd droomde dat hij voor zijn schriftelijk eindexamen wiskunde gymnasium zat. En wéér omgekeerd heb ik van mijzelf het gevoel dat ik wiskundig wel zoo'n beetje denken kan, maar het in het dagelijksch leven finaal afleg tegen mijn vrouw, die van alle mathematische smetten vrij is.

En ten slotte, en nu spreek ik gansch algemeen, heeft wetenschappelijke ontwikkeling ook eenigen invloed op het karakter van den mensch? Ik heb er nooit iets van geloofd, en geloof het tegenwoordig minder dan ooit, hoewel ik de uitzonderingen met groote vreugde erken; maar globaal genomen is wetenschappelijke ontwikkeling een verfje, dat er aan den buitenkant opgesmeerd wordt, maar den aard, het karakter, volmaakt onveranderd laat. Ik heb menschen leeren kennen, levend en niet meer levend, met een geweldigen wetenschappelijken naam, en wier karakter tòch niet heelemaal gaaf was; gelukkig ook anderen, maar die hun karakter zou óók smetteloos geweest zijn al hadden zij niet den wetenschappelijken doop ontvangen. En onze huiskater is een goedmoedige dikke lobbies, die met zich laat sollen zooveel men maar wil, en liever lui is dan moe. Hij verkeert bij ons, ik zeg het met trots, in een beschaafd milieu, heeft een uitstekende zelfs ietwat weekke, opvoeding genoten, en diverse kundigheden verworven. Hij snoept niet meer, springt niet meer op stoelen en tafels, weet precies op welk sofa-kussen hij wèl mag liggen, op welk niet, eet pap, stampot, gestoofde bietjes zelfs (mits met wijn gestoofd!), kortom, hij is onder de katten een gedistingeerd persoon, fijn beschaafd en wetenschappelijk wèl onderlegd; maar als hij een muis te pakken krijgt verandert met één slag zijn heele wezen, én wordt hij een wreed, pervers, sadistisch monster. En de mensch heeft helaas dezelfde oerinstincten als onze kater.

ONTWAKENDE WETENSCHAP

door

Dr. B. L. v. D. WAERDEN.

Onder deze titel ben ik voor Noordhoff's Historische Bibliotheek voor de Exacte Wetenschappen een boek aan het schrijven, waarin de Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde in hun onderlinge samenhang en in hun verband met de algemene cultuurgeschiedenis besproken worden. De bedoeling is, de uiteenzetting begrijpelijk te maken voor alle ontwikkelde leken, die belang in de wiskunde en haar geschiedenis stellen.

Om nu aan de lezers van Euclides een voorproefje van de inhoud van dit boek te geven, heb ik een stukje uitgelicht over de oudste Griekse wiskunde en de invloed, die deze van de Babylonische wiskunde heeft ondergaan.

Tot beter begrip een enkel woord vooraf over de Babylonische wiskunde, die in de laatste tientallen jaren vooral door Neugebauer en zijn school aan het licht is gebracht. De Babyloniërs hadden reeds ten tijde van Hammurapi (omstreeks 1700 v. Chr.) niet alleen een stelselmatig doorgevoerd zestigtallig stelsel, zestigtallige breuken inbegrepen, maar ook een volledig ontwikkelde lagere algebra, omvattende de oplossing van alle vierkantsvergelijkingen, van speciale derdegraadsvergelijkingen en van stelsels vergelijkingen van de eerste en tweede graad met twee of meer onbekenden. Verder konden zij oppervlakken van rechte lijnige figuren berekenen; zij kenden de evenredigheden, die bij snijding van evenwijdige lijnen met andere lijnen optreden, en zij kenden zelfs de „Stelling van Pythagoras”.

Al deze dingen werpen op de oudste Griekse wiskunde in 't bijzonder op figuren als Thales en Pythagoras, een geheel nieuw licht. Voor Thales zullen wij dit in het volgende uiteenzetten.

Hellas en het Oosten.

Wel zeer treffend schetst Plato in zijn posthume dialoog Epinomis de verhouding der Grieken tot de oude beschavingen van het Oosten aldus: „Wat de Hellenen ook van de barbaren overgenomen hebben, steeds hebben zij het tot hoger volmaaktheid ontwikkeld”.

Dit is ook van toepassing op de exacte wetenschappen. De Grieken zelf verklaren eenstemmig, dat zij de stof voor hun meet-

kunde en sterrekunde in Egypte en Babylon gevonden hebben. Thales en Pythagoras, Demokrites en Eudoxos, allen zouden zij naar Epypte en Babylonië gereisd zijn. Ook als men deze reisverhalen niet als historische waarheden, maar alleen als anekdotische uitdrukkingen opvat voor het feit, dat men Oosterse elementen in hun leer herkende, dan nog bewijzen zij genoeg. Slechts sommige moderne filologen willen er absoluut niets van weten, dat de Grieken iets essentieels uit het Oosten overgenomen zouden hebben. Alsof de Hellenen zo bekrompen waren, niet te zien wat er van waarde was in een vreemde cultuur!

Het is zeker geen toeval, dat juist de Ioniërs de eerste fakkel-dragers der Griekse beschaving zijn geweest. Zij woonden immers vlak aan de rand van de grote rijken van het Oosten, waren zelfs lange tijd onderdanen van de Lydische en Perzische koningen: zij hadden gelegenheid te over, zich met de Orientaalse culturen vertrouwd te maken.

Hoe nauw Ionië en Klein-Azië politiek en economisch verbonden waren is voor een ieder duidelijk, die wel eens in het eerste boek van Herodotos' Historiën gebladerd heeft. Ook de betrekkingen tussen Hellas en Egypte liggen voor het grijpen. Talrijke Grieken woonden in de Nijldelta. De Griekse stad Naukratis, gesticht onder Psammetichos (663—609), verkreeg onder Amasis (569—525) zelfs een handelsmonopolie voor geheel Egypte.

Minder duidelijk, maar toch onmiskenbaar zijn de betrekkingen met het Assyrische rijk. Sargon II, die dit rijk tot Syrië uitbreidde, ontving in 709 geschenken van 7 stadkoningen van het eiland Kypros. Zijn opvolger Sanherib versloeg de Ioniërs in Kilikië, waar zij geland waren. Later lukte het hun toch, er een handelsnederzetting te vestigen.

Het was een zware slag voor de Ionische handel, toen Gyges (680—652) de grondvester van het Lydische rijk, de Ioniërs van het achterland afsloot. Zij probeerden nu langs een andere weg de handelsverbinding met Babylon weer aan te knopen. In het midden van de 7de eeuw stichtten zij aan de Zwarte Zee de handelssteden Sinope en Trapezus, waar oude handelswegen van Mesopotamië uitmondden. Trouwens, nadat de latere Lydische koningen Alyattes en Kroisos de meeste Ionische kuststeden geannexeerd hadden, werd ook de weg door Klein-Azië voor de Ioniërs weer toegankelijk.

Intussen hadden er grote politieke veranderingen plaatsgevonden. De machtige militaire monarchie der Assyriërs, die de volken van het Oosten zolang had onderdrukt (men leze er de Bijbel maar

eens op na!) was ineengestort. Tezamen met de Mediërs had Nabopolassar, koning der Chaldeërs, Babylon van de Assyrische heerschappij bevrijd. In 612 verwoestten de Mediërs Ninive. Toen zij nog verder Westwaarts wilden oprukken, trok Alyattes van Lydië hun met Ionische soldaten tegemoet. Aan de Halys werd een slag geleverd, waaraan plotseling een einde kwam door de zonsverduistering van 585, die Thales van Milete voorspeld had. „De dag werd nacht”, schrijft Herodotos. De soldaten schrokken er zo van, dat ze niet langer wilden vechten. De partijen sloten samen met Kilikië en Babylonië een vredesverdrag.

Sinds die tijd hielden drie grote machten elkaar in evenwicht: Lydië, Medië en het „nieuw-Babylonische rijk”, dat de Chaldese koningen hadden gesticht. De culturele en mercantiele betrekkingen gingen over en weer: het hele achterland lag voor de Grieken open. De machtige Chaldeër Nebukadnezar, Koning van Babel (604—562) was niet alleen een groot veldheer, maar bevorderde ook in ruime mate de cultuur. Onder hem streeden Griekse edelen, zoals de broer van de dichter Alkaios. In een spijkerschrifttekst uit Uruk, gedateerd van 551, is sprake van koper en ijzer uit Ionië.

Dat er ook culturele uitwisseling met Griekenland plaats vond, bewijst een mededeling van Herodotos (II 109): Gnomon en Polos en de 12 uren van de dag hebben de Grieken aan de Babyloniërs ontleend. De Polos was waarschijnlijk een zonnewijzer in de vorm van een halve bol. Het Gnomon is ook een zonnewijzer in de vorm van een verticale staaf, die zijn schaduw op een horizontale plaat werpt. De mededeling over het Gnomon is zeker juist, want er is een spijkerschrifttekst, waarin een tabel voor de lengte van de schaduw van een staaf op verschillende uren van de dag voorkomt ¹⁾. De mededeling over de 12 uren, waarin de Grieken de dag van zonsopgang tot zonsondergang verdeelden, is ook juist, want in een andere tekst uit Kalach in Assyrië staat een tabel voor de duur van $\frac{1}{12}$, $\frac{2}{12}$, $\frac{3}{12}$, . . . , $\frac{12}{12}$ van de lichtdag voor de verschillende tijden van het jaar, in astronomische eenheden van tijd (*bêru* en *UŠ*) omgerekend ²⁾. Ook de namen der tekens van de dierenriem, waar de Grieken door Kleostratos van Tenedos omstreeks 550 mee bekend werden gemaakt, zijn uit Babylonië afkomstig ³⁾.

Een nieuwe schok verstoorde het politieke evenwicht, toen Kyros

¹⁾ Zie E. F. Weidner, Ein babylonisches Kompendium der Himmelskunde, Amer. J. Sem. Lang. 40 (1924) p. 198.

²⁾ Langdon, Babyl. Menologies and Semitic Calendars, p. 55. Vgl. Fotheringham, The Observatory Nr. 703 (1932) p. 338 en Thureau—Dangin, Osiris 7, p. 136.

³⁾ Weidner, l.c. ¹⁾, p. 192.

omstreeks 540 het gehele Oosten aan de Perzen onderwierp. De Ionische steden, die zijn tegenstander Kroisos hadden geholpen, moesten zware tributeën betalen. Vele Ioniërs verlieten hun land, zo b.v. stichtten de Phokaiërs in Italië de stad Elea, die in de geschiedenis van de filosofie een zo grôte rol zou gaan spelen. In deze tijd trok ook Pythagoras van Samos naar Kroton. Het zwaartepunt van wiskunde en filosofie verplaatste zich van Ionië naar Italië.

Het Perzische rijk knoopte intussen al spoedig de economische en culturele betrekkingen met de Grieken weer aan. Ionische handwerkslieden en kunstenaars werkten mee aan de bouw van het paleis van Dareios ¹⁾. De beeldhouwer Telephanes van Phokaia werkte voor Dareios en Xerxes. Aan het hof van Dareios vertoefden, al is het dan niet geheel vrijwillig, de Griekse medicus Demokedes van Kroton en later Histaios, tyran van Milete.

De grote Perzische koningen Kyros en Dareios waren zeer tolerant: zij lieten de cultuur en religie van de onderworpen volken onaangetast (zie alweer de Bijbel). Ook de Babylonische sterredienst bleef bestaan. De maan- en planetenwaarnemingen der Babylonische priester-sterrekundigen werden in Perzische tijd stelselmatig voortgezet. Zonder deze zorgvuldig gedateerde waarnemingen zou de latere bloei van de Babylonische theoretische astronomie onder de Seleukiden, de opvolgers van Alexander de Grote ²⁾, onmogelijk geweest zijn. Ook de Grieken hadden grote belangstelling voor deze waarnemingen: Kallisthenes, een leerling van Aristoteles, die met Alexander de Grote naar Babylon trok, stuurde zijn leermeester op diens verzoek Babylonische waarnemingen toe ³⁾. Hypsikles, een Grieks astronoom in de 3e eeuw, berekent de open ondergangstijden der tekens op Babylonische wijze, omdat de Griekse bolmeetkunde nog niet in staat was dit probleem op te lossen ⁴⁾. Ook Geminos behandelt in zijn *Isagoge* een methode der Chaldeërs ter berekening van de snelheid van de maan. Hipparchos (150 v. Chr.) gebruikt Babylonische waarnemingen en perioden van de maan, waar Ptolemaios 300 jaren later zo goed als niets aan te corrigeren vond.

¹⁾ F. W. König, *der Burgbau zu Susa*, Mitt. Vorderas. Ges. 35 (1930) 1.

²⁾ Zie hierover F. X. Kugler, *Babylonische Mondrechnung* (1900), en *Sternkunde und Sterndienst in Babel*; O. Neugebauer, *Quellen u. Studien Gesch. Math. B 4* (1938) p. 193 en 407, verder A. Pannekoek en B. L. v. d. Waerden in *Eudemus I* (1940).

³⁾ *Simplicii in Arist. De Caelo II 12*, p. 506 (Heiberg).

⁴⁾ Hypsikles, *Anaphorikos*, ed. Manitius, *Programm Gymnasium Heil. Kreuz Dresden 1888*. Vgl. O. Neugebauer, *Trans. Amer. Philos. Soc.* 32 (1942) p. 251.

Zo zien wij, dat de Grieken zelfs in de bloeitijd van hun eigen astronomie graag van de Babyloniërs leerden, als deze in enig opzicht verder waren dan zij zelf. Zou dit niet ook op de begintijd van de Griekse wiskunde van toepassing zijn, toen de Babyloniërs reeds een hoog ontwikkelde algebra en meetkunde hadden, maar de Grieken nog niet?

Het aangewezen punt voor het bevruchtende contact tussen Oost en West aan het begin van de 6e eeuw was de bloeiende handelsstad Milete aan de kust van Klein-Azië, het grootste Ionische cultuurcentrum. En de eerste Ionische natuurfilosoof, de eerste Griekse wiskundige en sterrenkundige tevens, is

Thales van Milete.

Thales was de eerste der „zeven wijzen”. In het algemeen waren deze wijzen geen geleerden, maar staatslieden, wetgevers en moralisten. Spreuken als het beroemde Delphische „Ken U zelf” werden hun toegeschreven. Zij legden, na de liquidatie van het oude feodale stelsel, de grondslag voor de nieuwe politieke organisatie der Griekse steden, die nog wel aristokratisch, maar niet meer feodaal was.

Maar Thales' wijsheid had een universeler, meer filosofisch karakter. Hij was de eerste, die de vraag naar de oorsprong der dingen stelde. Zoals men weet, leerde hij dat alles uit het water voortkomt.

Plato vertelt, dat Thales, naar de sterren kijkend, in een put viel, en dat een aardige Thrakische slavin hem uitlechte: „hij wilde weten wat er in de hemel gebeurde, maar hij bemerkte niet wat er voor zijn eigen voeten was”.

Het zou verkeerd zijn, wilde men uit deze anecdote de conclusie trekken, dat Thales een weltfremde geleerde, een soort verstrooide professor was. Integendeel, hij stond middenin het intensieve Ionische leven van zijn tijd. Men zegt, dat hij met speculatie in olie veel geld verdiende, en dat hij een nieuwe bedding voor een rivier deed graven, om het leger van Kroisos er gemakkelijker over te brengen. In ieder geval gaf hij zijn stadgenoten de wijze raad, geen bondgenootschap met Kroisos tegen Kyros aan te gaan, en later trachtte hij een unie van Ionische steden met Teos als hoofdstad tot stand te brengen. Een ander voorbeeld van practische wijsheid: Hij raadde de zeelieden aan, zich evenals de Phoenikiërs naar de Kleine Beer te richten in plaats van naar de Grote. Hij was dus niet alleen theoreticus en filosoof, maar ook staatsman en praktisch denkend mens: een „wijze” in de oude, volle zin.

Voorspelling van een zoneclips.

Herodotos vertelt, dat tijdens de slag aan de Halys de dag ineens nacht werd en dat Thales dit verschijnsel voor dat jaar aan de Deliërs voorspeld had. En volgens Diogenes Laertius heeft Xenophanes Thales om deze voorspelling bewonderd; we hebben dus behalve Herodotos de nog oudere getuige Xenophanes voor deze prestatie. Men neemt tegenwoordig aan, dat de zoneclips van 585 v. Chr. bedoeld is.

Hoe kon nu Thales, volgens al onze bronnen de eerste Griekse astronoom, een zonsverduistering voorspellen? Hiervoor is, hoe dan ook, de ervaring van vele tientallen of beter nog honderdtallen jaren nodig. Eén man kan deze ervaring niet opdoen. Griekse voorgangers heeft Thales niet gehad. Dus moet hij van de ervaring der Oosterse sterrekundigen gebruik hebben gemaakt.

In de eerste plaats moeten we hier aan de sterrekundigen van Mesopotamië denken. Immers, uit de brieven van de Assyrische hofastrologen van omstreeks 700 weten wij, dat deze (met meer en minder succes) zon- en maaneclipsen voorspeld hebben!¹⁾ In de reeks van deze voorspellingen past die van Thales uitstekend. Dat Thales daarbij van de „Saros”, de periode van 18 jaar, gebruik zou hebben gemaakt, die de Babyloniërs sinds ongeveer 400 v. Chr. kenden, is een modern sprookje waar ik om bepaalde astronomische en historische redenen geen geloof aan hecht²⁾. In denk eerder, dat zowel Thales als de oude Babyloniërs van de benaderde relatie:

51 Draconitische maanperioden = 47 Synodische maanden
zijn uitgegaan. Volgens deze relatie is er 47 maanden na een totale maaneclips weer kans op een maaneclips, en na $23\frac{1}{2}$ maand op een zoneclips. Inderdaad was er $23\frac{1}{2}$ maand vóór de eclips van Thales een flinke maansverduistering te zien. Maar hoe dit ook zij, in elk geval wijst de voorspelling van Thales erop, dat hij met de Babylonische sterrekunde bekend was.

De meetkunde van Thales.

Kende Thales ook de Babylonische wiskunde?

Proklos, de commentator van het eerste boek der Elementen van

¹⁾ Thomson, The reports of the magicians.

²⁾ Zie mijn stukje Voraussage von Finsternissen, Ber. sächs. Akad. Wiss. Leipzig.

Euclides, ontleent aan de Geschiedenis der Wiskunde van Eudemos, die helaas verloren is, de volgende mededelingen omtrent Thales:

1) Hij was de eerste, die bewees, dat een cirkel door zijn middellijn gehalveerd wordt. (Proklos p. 157).

2) Behalve vele andere stellingen vond hij ook de gelijkheid van de basishoeken in een gelijkbenige driehoek; hij noemde deze hoeken naar oude trant niet gelijk, maar gelijkvormig. (Proklos p. 250).

3) Hij ontdekte volgens Eudemos, dat bij snijding van twee rechten de overstaande hoeken gelijk zijn, maar hij gaf er geen wetenschappelijk bewijs van. (Proklos p. 299).

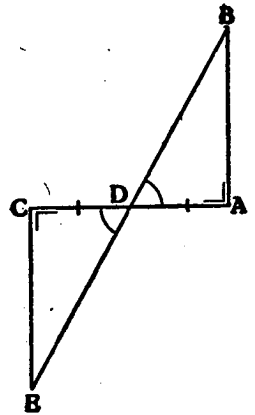
4) De congruentiestelling van twee driehoeken, die een zijde en twee hoeken gelijk hebben, wordt door Eudemos aan Thales toegeschreven, met de toelichting, dat deze voor het bewijs van zijn methode, de afstand van schepen op zee te bepalen, noodzakelijk van deze congruentiestelling gebruik moest maken. (Proklos p. 352).

Hoe zou Thales de afstand van schepen op zee bepaald hebben? Wij kunnen er slechts naar raden. De oudste overgeleverde methode is volgens Tannery die van de Romeinse landmeter Marcus Junius Nipsius. Deze geeft het volgende, wel zeer primitieve voorschrift:

Om de afstand van A tot het onbereikbare punt B te meten, richt men in de vlakke op AB een loodlijn AC van willekeurige lengte op en halveert die in D. In C richt men op CA, in een richting tegengesteld aan AB, een loodlijn CE op en trekt die door tot aan een punt E, dat met D en B op één lijn ligt. Dan is CE gelijk aan de gezochte lengte AB.

Bij het bewijs wordt inderdaad de door Eudemos bedoelde congruentiestelling (4) toegepast en verder stelling (3) over de gelijkheid van overstaande hoeken, die Thales eveneens kende. Het is dus mogelijk dat dit de methode van Thales is geweest.

Pamphilus zegt volgens Diogenes Laertius, dat Thales de eerste was, die een cirkel om een rechthoekige driehoek beschreef en dat hij voor deze ontdekking een stier offerde. Vandaar dat de stelling, dat de hoek in een halve cirkel recht is, aan Thales wordt toegeschreven. Deze stelling nu staat in relatie tot zekere berekeningen over koorden en hun pijlen in de Babylonische wiskunde, maar deze relatie is natuurlijk nog lang niet voldoende om te be-



wijzen, dat Thales de Babylonische wiskunde heeft gekend. Men dient de zaak ruimer te beschouwen en het geheel van de mededelingen van Proklos en Pamphilus nader te onderzoeken.

Men heeft de volstrekte juistheid van de mededelingen (1) en (4), ofschoon ze uit de beste bron komen, in twijfel getrokken. Men meent, zo streng logisch kan de bouw van de wiskunde van de oude Thales nog niet geweest zijn, dat hij zo vanzelfsprekende dingen als de gelijkheid van de delen, waarin een middellijn een cirkel verdeelt, ging *bewijzen*.

Heath ¹⁾, de voortreffelijke Engelse geschiedschrijver der Griekse wiskunde, merkt in dit verband op, dat zelfs bij Euclides deze stelling niet eens wordt bewezen. Men heeft gemeend, de mededelingen van Eudemos zo te moeten verklaren, dat hij de uiterlijke vorm van de wiskunde van zijn tijd (omstreeks 330—300), die elke stelling streng logisch uit voorafgaande stellingen, definities en axioma's afleidde, ten onrechte ook voor de wiskunde van Thales zou hebben aangenomen. Eudemos zou b.v. zo hebben geconcludeerd. Aan de afstandsmeting van schepen op zee ligt zuiver logisch de in (4) genoemde congruentiestelling ten gronde, dus moet Thales die stelling hebben gekend en geformuleerd. In werkelijkheid, zo meent men, heeft Thales deze congruentiestelling misschien wel onbewust toegepast. Sommigen menen zelfs, dat Thales zijn ontdekkingen in genen dele bewezen, maar empirisch gevonden zou hebben: het tegendeel van wat Eudemos in (1) uitdrukkelijk zegt!

Hiertegen valt vooreerst op te merken: Eudemos kent niet alleen de resultaten, maar ook de uiterlijke vorm van de wiskunde van Thales, tot op zekere hoogte: hij kent zelfs de uitdrukking, die Thales voor de gelijkheid van hoeken gebruikte. Hij weet ook het een en ander over de bewijzen, die Thales gaf of niet gaf, want bij (3) verzekert hij ons uitdrukkelijk, dat Thales deze stelling niet of althans niet exact bewezen heeft.

Wanneer hij nu meent, dat de meetkunde van Thales op dezelfde wijze logisch opgebouwd was als die van de latere wiskundigen, — en dat meent hij blijkbaar, want anders had hij de conclusie (4) niet getrokken — en wanneer hij zelfs uitdrukkelijk zegt, dat Thales de stelling (1) bewezen heeft, dan kunnen wij deze mening niet zonder meer opzij schuiven. Men kan een antiek geschiedschrijver alleen corrigeren, als men het werkelijk beter weet. Verder: de gehele critiek op de mededelingen van Eudemos

¹⁾ T. Heath, A History of Greek Mathematics I (Oxford 1921) p. 131.

Proklos, die wij zojuist aan het woord lieten, staat en valt met de opvatting, dat Thales aan het begin van de antieke wiskunde staat. Omdat hij de eerste was, kon hij nog geen logisch opgebouwde meetkunde hebben, maar moest hij zijn stellingen eerst empirisch ontdekken, zo redeneert men. Nu weten wij echter, dat de wiskunde niet met Thales begint, maar minstens 1200 jaar vroeger in Babylon. Hiermee vervalt elke reden om aan Thales de bewijzen en de streng logische opbouw, die Eudemos hem blijkbaar toeschrijft, te onzeggen.

Bekijkt men de stellingen, die aan Thales worden toegeschreven, nader, dan valt het op, dat deze stellingen juist niet aan het begin van de ontdekking van de wiskunde thuis horen, maar wel aan 't begin van een stelselmatige logische uiteenzetting van de wiskunde. In 't begin, in de eerste vreugde van de ontdekking, interesseert men zich voor vragen als: hoe bereken ik het oppervlak van een vierhoek of van een cirkel, de inhoud van een pyramide of de lengte van een koorde, of hoe deel ik een trapezium in twee gelijke delen? Dit zijn juist de vragen, waar de Egyptische en Babylonische teksten zich mee bezig houden. Later komt dan de vraag aan de orde: hoe bewijs ik dit alles?

Actueel wordt deze vraag juist dan, wanneer de resultaten van de oude wiskunde zonder logische samenhang, gedeeltelijk juist en gedeeltelijk onjuist, aan jongere generatie van nieuwsgierige vreemdelingen worden medegedeeld. Ten tijde van Thales waren de Egyptische en Babylonische wiskunde allang dode wijsheid. Men kon de rekenvoorschriften ontcijferen en aan Thales mededelen, maar men kende de gedachtengang niet meer, die er aan ten grondslag lag. Van de Babyloniërs kon hij te horen krijgen, dat het oppervlak van de cirkel $3r^2$ was, maar de Egyptenaren beweerden $(\frac{8}{9} \cdot 2r)^2$.

Hoe moest Thales de exacte en juiste rekenvoorschriften van de benaderde en foutieve onderscheiden? Wel, door ze te bewijzen, door er een logisch sluitend stelsel van te maken! Dit nu heeft hij volgens Eudemos inderdaad gedaan en aan het begin van dit logisch systeem behoren juist zulke „waarheden als koeien”: dat overstaande hoeken of basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn, dat een middellijn een cirkel halveert, enz.

De gebruikelijke opvatting, dat de oudste Griekse wiskundigen de meetkunde geheel en al zelf ontdekt en bijna niets aan andere beschavingen ontleend hebben, moeten wij blijkbaar laten vallen: die opvatting was alleen houdbaar, toen men de Babylonische wiskunde nog niet kende. Maar daardoor wordt het genie van Thales

geenszins gekleineerd; integendeel, hij krijgt nu pas de eer, die hem toekomt: de eer, dat hij de meetkunde logisch heeft opgebouwd, dat hij het bewijs in de meetkunde heeft ingevoerd.

Het karakteristieke en volstrekt nieuwe van de Griekse wiskunde is juist het voortschrijden van stelling tot stelling door het bewijs. Welnu, dit karakter heeft de Griekse wiskunde blijkbaar van 't begin af gehad en dit karakter heeft Thales eraan gegeven.

Het materiaal, waaruit de Griekse meetkunde was opgebouwd, was niet nieuw: de brokstukken kon men uit de ruïnes van de oude beschavingen opdiepen; maar de stijl, waarin het gebouw werd opgetrokken, was nieuw en getuigt van het heldere denken der Grieken, het denken, dat geen donkere plekken, geen schaduw van twijfel aan de juistheid der verworven inzichten wilde laten.

OVER EEN DYNAMISCH-INTUITIEVE ONTWIKKELING VAN DE THEORETISCHE REKENKUNDE

door

KAREL CUYPERS.

Het feit, dat het *getal* zovele eeuwen na de *vorm* moest wachten voor het zijn streng statuut verkreeg en wij thans het gevoel hebben, dat bij dit begrip nagenoeg alles vastgelegd werd, doet ons vaak de moeilijkheden over het hoofd zien, die de paedagogische ontwikkeling van de theoretische rekenkunde nog steeds ontmoet.

Wel hebben wij tijdens de jongste jaren een totale wijziging van de koers in het onderwijs van de meetkunde beleefd, waar, althans voor de lagere klassen, volkomen gebroken werd met de syllogistische Euclidisch-Aristotelische deductieve weg van definitie-axioma naar stelling-gevolg. Thans wordt uitgegaan van de aanschouwing en verder de bewijsweg, gewoonlijk onderzoekend, in omgekeerde zin afgelegd, meestal niet tot het brutale beginpunt der redeneerketen, maar tot een of andere „vanzelfsprekende” aanschouwelijkheid.

Dit proces van verjonging is evenwel nog ver van volledig en onze kinderen blijven in velerlei opzicht nog slachtoffers van de historische overschatting der deductieve logica ¹⁾, die het denken begint waar practisch het eindpunt ligt, tegen alle lessen van de psychologie der uitvinding in ²⁾.

De paedagogiek van de theoretische rekenkunde vindt zeer weinig beoefening.

Men schijnt te geloven, dat de rekenkunde voldoende gemoderniseerd wordt, indien men vertrekt van *numerieke* voorbeelden als aanschouwingsmateriaal, en men zorgvuldig *letters* vermijdt in de bewijzen. Zulks brengt echter niet altijd de beoogde verduidelijking, want men kan dikwijls veel gemakkelijker een letter in een reeks bewerkingen volgen dan een concrete hoeveelheid, die verandert tijdens het gebeuren. Het gebruik van letters vraagt natuurlijk een inspanning, doch het lijkt ons goed deze spoedig te eisen, want, is men eens het procédé der veralgemening meester, dan beschikt men er verder over naar willekeur. Het aankweken er van is trouwens onontbeerlijk voor de studie der algebra.

De lessen in de theoretische rekenkunde zijn weinig geliefd zowel door de leerlingen als door de leraars. Beiden hebben vaak de

indruk, dat deze studie nutteloos is ³⁾, dat men een even goed wiskundige wordt ook zonder dieper in te gaan op commutatieve eigenschap of irrationaal getal, als men de regels maar onfeilbaar kan *toepassen* ⁴⁾.

Waarom dan niet nadruk gelegd op deze toepassing? Een eerste fout van het onderwijs in de theoretische rekenkunde is het gebrek aan handelen. Activiteit betekent geenszins het opstapelen van numerieke oefeningen, maar wel het zelf bewerken, het zelf *uitvinden* van de theorie. De huidige opvatting is te *statisch* en ze leidt te veel naar het versnipperen van de aandacht omdat de grote lijn naar het einddoel onzichtbaar blijft. Het zijn dezelfde oorzaken die het onderwijs in de meetkunde zolang achterlijk hielden. Wij worden trouwens elke dag gewaar, dat onze tijd *handelen* eist, van de techniek tot de filosofie. Ook de wiskunde behoort tot de cultuur en zij kan zich niet aan haar dwang onttrekken. Ze heeft het ook vroeger nooit gedaan ⁵⁾. Daarenboven is het hier een vraag van opvoeding en die leeft zeker met de tijd mee. De praatschool, waar de „meester” de waarheid verkondigt en de leerlingen hun lessen van buiten opdreunen zonder inzicht, heeft voorgoed afgedaan.

Een tweede fout bestaat in het scheiden van rekenkunde en algebra ⁶⁾. Men doet aldus alle werk dubbel, en was het nog maar dat! Soms behandelt men een zelfde bewerking helemaal anders in de rekenkunde dan in de algebra, en zijn de kinderen verplicht uit twee verschillende leerboeken twee verschillende vertolkingen voor een zelfde rekenregel te onthouden, met de onzettende volledigheid van een halve bladzijde tekst. Toch is er maar één „handelen”.

Zeker, het is goed de regels ook in woorden te kunnen stellen ⁷⁾, maar dan voldoet toch de aanhaling van de spil van het gebeuren: bv. *Om een som met een getal te vermenigvuldigen, vermenigvuldig elke term*. Waarom er bijvoegen: *en tel de komende producten op*? Het lijkt ons totaal overbodig omdat, gewapend met het eerste deel, de leerling zijn regel juist zal *toepassen*. Zo ook: *Om een product met een getal te vermenigvuldigen, vermenigvuldig één factor*. Ofwel: *Om gelijksoortige machten te vermenigvuldigen, tel de exponenten op*. Regels geven wij liefst in de gebiedende wijze, kort, krachtig met zorgvuldig gekozen woorden en alleen met het oog op hun practische toepassing. Ze mogen onvolledig zijn, doch nooit dubbelzinnig. Maar al te vaak wordt ook hier de hoofdzaak verdrongen in bijkomstigheden.

Wij trekken uit al het voorgaande enkele besluiten in verband met de ontwikkeling der leerstof.

1) De basis voor de rekenkunde-algebra is de *telrij*⁸⁾ d.w.z. de rhythmische tijdreeks 1, 2, 3, 4, . . . in inf., die verondersteld wordt als *taalverschijnsel* gegeven te zijn, door *klanken en tekens met een vaste volgorde*. Dit is dus een *ordinaalopvatting*, die het getal niet ziet als som van eenheden, doch als zoveelste element in de rij, en niet als statische hoeveelheid, doch als resultaat van een handeling, als groeiend gebeuren.

2) De enige grondbewerking is het tellen, dat de voornaamste hoofdbewerking, de optelling, schept. Door dezelfde psychologische werking als het gebruik van de telrij breiden we de optelling uit tot vermenigvuldiging en machtsverheffing. Aldus ontstaan reeds vele eigenschappen en rekenregels, als combinaties van tellingen.

3) Wij hebben geen vrees voor het werken met letters, aldus de rekenkunde algebraïserend en de algebra arithmetiserend, wat niet uitsluit vóór en na, als uitgangspunt en als contrôle, voorbeelden met getallen te nemen.

4) Bewijzen blijven, zoals bij elke wiskundige wetenschap en trouwens bij alle wetenschappen, gesteund op het vooraf bevestigde, doch elke subtiliteit wordt slechts als definitie of als axioma d.i. onder de vorm van ervaringsfeit vermeld⁹⁾ (bv. de eenvormigheid van de rekenregels voor quotienten, breuken en verhoudingen: door de ordinaalopvatting vervalt de moeilijkheid van het onderscheid tussen benoemd en onbenoemd getal, dus o.a. ook tussen verhoudingsdeling en verdelingsdeling). De techniek van de bewijzen bestaat hoofdzakelijk in het manipuleren van haakjes, d.w.z. in het doelmatig beschouwen van de hoeveelheid daartussen of als resultaat der aangegeven bewerking of als nog niet uitgevoerde bewerking, werkwijze die buitengewoon helder en vruchtbaar blijkt.¹⁰⁾

5) Alle bewerkingen zijn te herleiden tot twee vormen: de rechtstreekse, min of meer gecompliceerde telresultaten en omgekeerde, die het resultaat van een rechtstreekse geven en slechts één van haar componenten. Daaruit volgt o.a. de mogelijkheid, dat de leerling zelf, aan de hand van de optelling, de theorie van vermenigvuldiging en machtsverheffing „uitvindt” evenals de ontwikkeling van deling en worteltrekking uit aftrekking voortvloeit volgens een vanzelfsprekend schema.

6) De beperkingen in de *uitvoerbaarheid* van de omgekeerde bewerkingen leiden tot de uitbreidingen van het getalbegrip, zonder diepzinnige rechtvaardiging, zuiver nominalistisch¹¹⁾. Door de fusie rekenkunde-algebra *ontstaat* het uitgebreide getal uit de bewerking, en, wel door middel van een *vergelijking*, bv.

$a = x + b$ geeft $x = a - b$ ook als $a \leq b$

$a = x \cdot b$ geeft $x = a : b$ ook als a geen veelvoud is van b

$a = x^m$ geeft $x = \sqrt[m]{a}$ ook als a geen volkomen m^{de} macht is of als m even is en a negatief.

We stappen aldus in het laatste voorbeeld luchthartig over de ingewikkelde theorieën van het onmeetbare en het imaginaire getal heen. Wij doen hierbij slechts wat in de geschiedenis gebeurde en niet anders gebeuren kon: eerst de grote lijnen trekken, eerst handelen, intuïtief aanvoelen, slechts daarna doorvorsen tot de oorsprong en scrupuleus detailleren ¹²⁾. Vermits wij weten, dat onze behandeling verantwoord is, mogen wij gerust de verklaring uitstellen, misschien wel definitief. Het is immers in onze tijden onmogelijk alles te weten — zelfs in de wiskunde voor een wiskundige. Men kan thans radio aanhoren en autorijden zonder te weten, hoe de toestellen functionneren en daarom een niet minder stevige cultuur bezitten of daarom zijn intelligentie niet minder nuttig aanwenden.

Op deze manier komt er heel wat tijd vrij en staan we veel vroeger op een hoger niveau. Bedenken wij, dat de jeugd zich weinig interesseert voor de stregheden en haarkloverijen van de grondslagen. Hier ligt immers het einde van de wetenschap. Het *wordende*, het levendige, het intuïtieve bevredigt hier, niet het bespiegelende, dat voor de rijpe leeftijd is weggelegd.

7) De rechtvaardiging van het practische tientallige rekenen is geen gemakkelijk werk en mag ook niet al te zwaartillend behandeld worden. Wat o.i. echter diep inzicht verleent, is een overzichtelijke behandeling van de bewerkingen in andere talstelsels.

We stellen dus in grote trekken volgende ontwikkeling voor:

I. Theorie van de natuurlijke getallen.

A. De rechtstreekse bewerkingen.

Gegeven is de telrij met haar grafische voorstelling: de as der positieve gehele getallen, beginnend met 1 en steeds volgens hetzelfde rythme voortlopend.

Tellen is doen overeenkomen met deze rij. Dit is de volgende voornaamste wiskundige bewerking, die tot haar recht komt: de één-éénduidige correspondentie ¹³⁾, waarvan de betekenis sinds Cantor voldoende duidelijk is.

Het begrip „groter dan” is een volgen in de rij en het voert naar de optelling als bewerking, dus $a + b$ als het b^{de} getal na a in de rij. Met deze ordinaalopvatting kan men de commutatieve en associatieve eigenschappen even aanschouwelijk bewijzen als met de cardinaalopvatting ¹⁴⁾. Onmiddellijk sluiten we handelend aan: Rekenregels som $+$ getal, getal $+$ som, som $+$ som als louter

gevolg van het werken met haakjes. Ten slotte overzien we even wat groter en kleiner brengt bij twee sommen, waarvan we de samenstellende termen vergelijken. Dit alles is rekenkunde en algebra, want geen speciale regels scheiden deze twee.

De vermenigvuldiging en de machtsverheffing kunnen, met geringe hulp voor bepaalde nieuwe verbindingen, door de leerlingen zelf ontwikkeld worden.

B. *De omgekeerde bewerkingen.*

Hier wordt de niet-uitvoerbaarheid in zekere gevallen geconstateerd.

De aftrekking dient als type. Ze steunt op de optelling door een stelsel van twee bepalingformules

$$\begin{cases} a = x + b & (1) \\ x = a - b & (2) \end{cases}$$

waarvan (2) niets anders dan een schrijfwijze definieert. Door substitutie van (1) in (2) en van (2) in (1) bekomt men interessante regels. Wij kunnen dan verder verschillen optellen en sommen aftrekken, verschillen met getallen en verschillen onderling vergelijken, wat een rijke bron van handelende toepassingen biedt in het kader van een logische groei.

De deling wordt uit de aftrekking en uit de vermenigvuldiging ontwikkeld door de leerling zelf.

Wij definiëren

$a : b$ als quotient, breuk en verhouding door slechts twee formules, analoog aan deze van de aftrekking:

$$\begin{aligned} a &= x \cdot b & (1) \\ x &= a : b & (2) \end{aligned}$$

We zondigen aldus met overtuiging tegen de al te fatsoenlijke strengheid van een precieus spel met eenheden. Filosofisch lijkt ons het standpunt onaanvechtbaar: wij *definiëren* immers. Merk wel: het begrip eenheid hoeven wij niet te gebruiken. Er is dan ook geen sprake van verdeelde eenheid en nieuwe eenheid, wat altijd last meebrengt.

Voorlopig worden alle eigenschappen en regels slechts op die omgekeerde bewerkingen bepaald, die als resultaat een natuurlijk getal opleveren. Bijgevolg zijn onze quotienten, breuken en verhoudingen nog altijd gehele getallen en *beginnen wij dus met wat gewoonlijk achteraf als speciaal geval beschouwd, en zelfs vaak met oneigenlijk betiteld wordt*. Wij volgen hierbij weer de historische weg, die steeds loopt van het bijzondere naar het algemene, van het „schoon” uitkomende naar het complexe. Zien wij niet bij de antieken die uitgesproken afkeer en vrees voor het niet-

harmonische? ¹⁵⁾ Wat geen „juiste” resultaten oplevert, wordt met tegenzin behandeld, ook bij onze kinderen. Hier, zoals overal in de wetenschap, gaat de weg van de evolutie naar het gecompliceerde toe. Men denke aan de wet van Boyle-Mariotte en haar moderne vorm, aan de elkaar opvolgende atoommodellen, aan het begrip levend organisme door de tijden heen. De lijn loopt steeds van simplistisch-dogmatische hulpvoorstelling naar een steeds groeiende complexiteit. ¹⁶⁾

Al de regels van de worteltrekking worden eveneens zonder beschouwingen op volkomen n^{de} -machten bewezen, naar het model van de aftrekking.

II. De uitbreidingen van het getalbegrip.

De band tussen rekenkunde en algebra, die reeds door de omgekeerde bewerkingen gelegd werd (en aldaar bv. in de hakenregels voor $+$ en $-$ tot belangwekkende gevolgen voert), wordt onverbreekbaar, door het getalbegrip te verruimen.

Wij vatten deze vermeerdering van het aantal getallen (want al waren er oneindig veel, er komen er toch nog bij!) zuiver op als het toekennen van burgerrecht aan vreemdelingen. Het is ons onverschillig, hoe de vreemdeling er uit ziet, op voorwaarde, dat hij zich schikt naar 's lands wetten. In bepaalde gevallen schenken wij hem, als onbetrouwbaar, geen naturalisatie en verbieden we hem bepaalde functies uit te oefenen. Zo laat de verruimde deling de nul niet toe als operator.

Men kan opwerpen, dat zodanig getalbegrip louter werkt met denkbeeldige, uit formules geschapen vormen, zonder werkelijk concrete tegenwaarde, en men kan vrezen aldus de scholastische controverse nominalisme-realisme in het leven terug te roepen. Het gevaar is niet ernstig, daar de twee richtingen beide steun en tegenspraak krijgen: men denke bv. aan de niet bestaande imaginairen, die in de zo reële techniek (hydromechanica, telegrafie) zulke praktische rol spelen ¹⁷⁾.

Wij *schenken* om te beginnen alle rekenregels en eigenschappen aan al de nieuwbakken getallen, ontstaan bij het uitvoerbaar maken van voorheen slechts tot „natuurlijke” uitkomsten beperkte bewerkingen, en we gaan slechts achteraf *verifiëren* of er aldus geen onregelmatigheden ontstonden, d.w.z. we laten de vreemdelingen wel over de grens, doch onze politie houdt ze scherp in 't oog.

Wil dit zeggen, dat we voor elke uitbreiding alles overdoen, elk bewijs, elke redenering? Moeten wij al de gedragingen van de verdachten volgen?

Geenszins. We hoeven slechts in de vroegere redeneringen bij

de theorie der natuurlijke getallen, op te tekenen, wat we hierbij bezigden. Dit blijkt dan verrassend weinig te zijn.¹⁸⁾ Slechts déze regels moeten dus *geverifieerd* worden.

De strenge wetenschap bewijst, dat voor het getal nul, voor de negatieve en de gebroken getallen de uitbreidingen geen tegenstrijdigheden met zich voeren, zelfs bij ongelijkheden. De boven geschetste weg is bijgevolg de aangewezene en het komt er op aan hem zo spoedig mogelijk in te slaan, aldus in de kortst mogelijke tijd èn rekenkunde èn algebra funderend.

Bij de irrationalen en de imaginairen, kan men, al dan niet voorlopig, kordaat verklaren: „men bewijst” of „men toont aan” of „men verifieert”. Immers, vormen zoals $\sqrt{2}$ zijn in de meetkunde niet te vermijden. Men moet er mee kunnen *werken*, ook al beseft men niet de dieperé betekenis van deze handeling. Opereert ook niet de piepjonge rekenaar met π ? Wie zou het in zijn hoofd halen aan de kleuters de betekenis van π uit te leggen? Of wie is zo sectarisch, om terwille van π , de cirkel uit de lagere school te verbannen? De imaginairen kunnen we daarentegen zonder bezwaar uit de ganse lagere algebra weren, ook uit die van de tweede graad. We kunnen net zo goed zeggen: „geen wortels” als „wortels imaginair”, wat trouwens meestal gebeurt.

Het is wonderlijk in hoe weinig tijd en met hoe weinig middelen men volgens bovenstaande methode de leer der bewerkingen kan ontwikkelen, volledig en voor practisch gebruik gereed in rekenkunde èn algebra, daarbij een logische lijn volgend, die beslist haar bekoring bezit.

Zo gering is zelfs de te gebruiken tekst, dat een leerboek onnodig wordt, daar de leerlingen zelf de stof opbouwen, hierbij steunende op de „veelzijdige eenheid” van de theorie met al haar duidelijke connecties, ingewikkeld als totaliteit, en toch eenvoudig in haar betrekkingen, zoals de ganse natuur is. We denken aan de vertakkingen:

worteltrekking — deling — aftrekking — optelling — telrij,
worteltrekking — deling — vermenigvuldiging — optelling —
telrij,

worteltrekking — machtsverheffing — vermenigvuldiging — optelling — telrij.

Het is voor vele jongeren een openbaring van de schoonheid der wiskunde. In enkele trekken krijgt men aldus een volledig, breed geschetst en toch nauwkeurig beeld. Dit lijkt ons te verkiezen boven een reeks pijnlijk verzorgde miniaturen, waar de grote lijn verdrinkt

in détails. Door de aard van hun constructie, zijn zulke nauwkeurige beelden nooit af en beleeft men er dan ook geen intense scheppingsvreugde aan, wat juist de alvermogenende paedagogische factor uitmaakt.

AANTEKENINGEN.

- 1) cf. onze bijdrage „Onder de dwang der Antieken” in *Persoon en gemeenschap*, tijdschrift voor opvoeding en onderwijs, Antwerpen Nr. 5, Nov. 1946, p. 235.
- 2) Jacques Hadamard: *The psychology of invention in the mathematical field*, Princeton 1945. Henri Poincaré: *La Science et l'hypothèse*, Paris 1908. Gauss zei: „ich habe das Resultat, ich weiss nur noch nicht auf welchen Wege ich es erreichen werde!”
- 3) Stendhal sprak reeds van „la patrie du baillement et du raisonnement triste” en Poincaré vroeg zich af of de jeugd niet dacht dat de wiskunde diende om gemakkelijke dingen moeilijk te maken. Men zie ook Zusatz 1 en 2 van Fr. Seyfarth in F. Klein: „*Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*”, Berlin 1933⁴, I, p. 290—303.
- 4) Over het invoeren van de infinitesimaalrekening in het middelbaar onderwijs, zie de mening van Study in voornoemd werk van F. Klein I, p. 303.
- 5) Ten overvloedige aangetoond door Oswald Spengler in zijn „*Untergang des Abendlandes*”. I.
- 6) Algemene fusionistische strekkingen bestaan ook voor de andere takken der wiskunde. Zie Seyfarth Zusatz II in F. Klein l.c. II, p. 277 vooral p. 292.
- 7) cf. onze studie: *Het aankweken van het wiskundig denken*, Antwerpen 1940, III, 5, p. 114.
- 8) cf. onze bijdrage: „*De paedagogische betekenis der ordinaalopvatting van het natuurlijk getal*” in Pers. en Gem. (in druk).
- 9) Felix Klein l.c. Einführung der Zahlen auf der Schule”, I, p. 6.
- 10) Voor de vertolking van haakjes zie „*Het Aankweken van het wiskundig denken*”, l.c. over vertaling van formules in woorden, I, 4, p. 47.
- 11) cf. onze bijdrage: „*De opbouw van de bewerkingen op nominalistische grondslag*” in Pers. en Gem. (in druk).
- 12) Léon Brunschvicg: *Les Etapes de la Philosophie mathématique*, Paris 1929³. La notion moderne d'intuition. Livre VII, p. 427.
- 13) Marcel Bôll: *Les Etapes des mathématiques*, Paris 1944. L'appariement p. 9 met verwijzing naar Tobias Dantzig: *Le nombre, langage de la science*, Paris 1931.
- 15) cf. Moritz Cantor: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Bd. I.
- 16) cf. onze bijdrage: *De Complexiteit van het huidige wereldbeeld „Debat”*. Antwerpen nr. 6, Juni 1946.
- 17) Léon Brunschvicg l.c. La réaction contre le mathématisme, Chap. XXIV, vooral p. 570.
- 18) Heinr. Burkhardt: *Algebraische Analysis*, Berlin 1920, Erster Abschnitt. Verder Klein l.c. I, p. 9.

INHOUD VAN DE 22e JAARGANG 1946/47.

	Blz.
Officiële mededelingen van Wimecos	49, 265
Verslag van de algemene vergadering op 23 Dec. 1946	200
Mededelingen van het Mathematisch Centrum	204, 285
Wiskundig dispuut „Thomas Stieltjes”	49
Internationale Vereniging voor logica en wijsbegeerte	203
In memoriam:	
W. Reindersma	87
G. L. Jambroes	91
Dr H. Hoek	92
Ir W. Mantel	93
Dr W. Koster	94
Dr E. L. Elte	95
E. A. F. H. Frijda	96
E. Frenkel	97
P. Veninga	98
C. L. Termeulen	100
Van de personen	28, 85, 211, 264

Prof. Dr E. W. Beth, De strekkingen en het bestaansrecht der metaphysica in verband met de toekomst der wijsbegeerte	1
Prof. Dr C. Visser, De leer der getallen	15
Dr Ph. D w i n g e r, Enige opmerkingen over het onderwijs in de meetkunde in deze tijd	38
Prof. Dr O. Bottema, Verscheidenheden.	
VIII. Prismoïde en obelisk	46
IX. Evenwichtsvraagstukken in de ruimte	50
X. Symmetrie	54
XI. Een toepassing van de hoofdstelling der axonometrie	242
XII. Het twijfelachtig geval	245
XIII. Jules Verne en de reis naar de maan	245
XIV. De Vries en Te Winkel en de Wiskunde	253

	Blz.
Prof. Dr J. C. H. Gerretsen, Mathesis en aesthetica	57
Prof. Dr N. G. de Bruyn, Enige beschouwingen over de waarde der wiskunde	72
Dr A. Heyting, Punten in het oneindige	106
Mr J. van IJzeren, Abstracte meetkunde en haar be- tekenis voor de schoolmeetkunde	119
Dr G. Wielenga, Is wiskunde-onderwijs voor de α 's noodzakelijk?	127
Dr J. de Groot, Het scheppend vermogen van den wis- kundige	152
Dr L. N. H. Bunt, Moeilijkheden van leerlingen bij het beginnend onderwijs in de meetkunde	168
Dr A. C. Zaanen, Eenige karakteristieke kenmerken der moderne wiskunde	191
M. Eilander, Caveant consules	212
Prof. Dr H. Freudenthal, 5000 jaren internationale wetenschap	222
M. G. Beumer, Het theorema van Pythagoras	255
Prof. Dr H. D. Kloosterman, Waarde en waar- deering der Wiskunde	266
G. H. Frederik, De rekenliniaal	286
Prof. Dr Hk. de Vries, Herinneringen en overpein- zingen van een oud man	292
Prof. Dr B. L. van der Waerden, Ontwakende wetenschap	300
Dr K. Cuypers, Over een dynamisch-intuitieve ontwikke- ling van de theoretische rekenkunde	310

Korrels.

LXX. De uiterste en middelste reden	33
LXXI en LXXV. Onder dezelfde noemer brengen	34
LXXII, 36, LXXVI, 105, LXXVII, 280, LXXIX	283
alle: Waar zit de fout.	
LXXIII. Euclides iterum a macula vindicatus	36
LXXIVa, b, c. Naschrift op Verscheidenheden VII	101
LXXVIII. Formules voor $\sin na$, $\cos na$ en $\operatorname{tg} na$	282
LXXX. De driedeling van de hoek	284

	Blz.
<i>Boekbesprekingen</i>	43, 254
<i>Ingekomen boeken</i>	278

Portretten van de professoren:

Dr C. Visser, Dr N. G. de Bruyn, Dr J. C. H. Gerretsen,
Dr H. Freudenthal, Dr J. Popken en Dr H. D. Kloosterman.

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES
AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH
AMERSFOORT

- | | |
|----------------------|--------------------------|
| I. Zeventiende druk | 156 blz. 21 fig. f 2,90* |
| II. Vijftiende druk. | 204 blz. 50 fig. f 2,90* |
| III. Tiende druk. | 198 blz. 60 fig. f 2,90* |

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN VLIET
ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Vierde druk. 164 blz. 20 fig. f 2,00*.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

V α en VI α Nieuwe Schoolalgebra III α

V β en VI β Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Voor leraren, die deze boeken op hun school gebruiken, zijn de antwoorden gratis beschikbaar; bovendien bij P. Wijdenes de volledige uitwerkingen van de logaritmenvraagstukken in 4 en in 5 decimalen.

Uitgave P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA
Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Verschenen:

BEKNOPT LEERBOEK DER BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

door Prof. H. J. VAN VEEN

- A. Projectiemethoden
- B. Oppervlakken en Ruimtekrommen
- C. Aanhangsel (Kegelsneden)

Derde druk geb. f 15,—*

BEKNOPT ANALYTISCHE MEETKUNDE

door Prof. Dr J. G. RUTGERS

- A. Het platte vlak - 99 figuren en 256 vraagst. met antw.
- B. De ruimte - 40 figuren en 146 vraagst. met antw.

Vierde druk geb. f 13.50*

INLEIDING TOT DE DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

Met toepassingen op verschillende gebieden

door Dr H. J. E. BETH

Derde druk. Prijs f 14.50*, geb. f 15.75*

LEERBOEK DER GONIOMETRIE EN TRIGONOMETRIE

door P. WIJDENES

Zesde druk geb. f 12.50*

Verschenen:

Dr P. MOLENBROEK

LEERBOEK DER STEREOMETRIE, 10e druk
Geb. f 9.50*

P. WIJDENES

BEKNOPT DRIEHOEKSMETING, 10e druk
A f 1.05*; B f 1.80*; A en B f 2.85*

Dr B. GONGGRIJP

TAFEL D, 8e druk, geb. f 8.40*

P. WIJDENES en Dr D. DE LANGE

VLAKKE MEETKUNDE I, 13e druk
f 2.40*

P. WIJDENES

ALGEBRA VOOR MULO I, 38e druk, f 1.80*
ALGEBRA VOOR MULO II B, 16e druk, f 3.00*
MEETKUNDE VOOR MULO II, 9e dr., gec. f 2.00*

NOORDHOFF's TAFEL IN VIER DECIMALEN, 10e druk,
f 1.35*

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel