

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOOT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - DR. E. W. BETH, AMERSFOORT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - DR. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
DR. J. HAANTJES, AMSTERDAM - DR. C. DE JONG, LEIDEN
DR. J. POPKEN, TER APEL - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM

20e JAARGANG 1943/44

Nr. 1, 2

Prijs per Jaargang f 6.30*. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.
--

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 6,30*, Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6,30*) zijn ingetekend, betalen f 5,25*.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en van **Wimecos** (Vereniging van leeraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie aan Hoogere Burgerscholen en Lycea) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van **Wimecos** storten hun contributie van f 2,50 voor het verenigingsjaar van 1 September 1943 t/m 31 Augustus 1944 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

blz.

Officieele mededeelingen van Wimecos en van Liwenagel	1
In memoriam Dr Paul de Vaere	2
Dr E. M. BRUINS, Mathematici en physici	3
Boekbespreking	23
Ingekomen boeken	26
Prof. Dr G. REVESZ, Wiskundige aanleg bij musici	27
Dr E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes	31

OFFICIEELE MEDEDEELINGEN VAN WIMECOS.

De Penningmeester herinnert de leden er aan, dat het nieuwe Verenigingsjaar van 1 September 1943 tot en met 31 Augustus 1944 loopt. In verband daarmee wordt de betaling der contributie, die voor dit jaar f 2,50 bedraagt, gaarne *zo spoedig mogelijk* tegemoet gezien. Deze betaling kan geschieden door storting op de girorekening van de Vereeniging van Wiskundeleeraren, Amsterdam, no. 143917.

De Penningmeester:
H. H. BUZEMAN.

OFFICIEELE MEDEDEELINGEN VAN LIWENAGEL.

Lid van Liwenagel, groep van het ~~Genootschap~~ Genootschap van Leeraren aan Nederlandsche Gymnasiën, zijn alle leden van het Genootschap (en slechts deze leden), die les geven in de wis- en natuurkundige vakken. Voor het lidmaatschap van de groep is geen extra-contributie verschuldigd.

C. DE JONG,
Voorzitter.

DR PAUL DE VAERE. †

Op 16 Juni van dit jaar is tengevolge van een fietsongeluk tussen Leuven en Brussel op tragische wijze omgekomen de Heer

PAUL DE VAERE,

jaren lang medewerker aan Euclides; mede aan het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde.

De Heer De Vaere was op 1 Juni 1893 geboren te Gent; hij promoveerde reeds in Juli 1914 en was leraar aan het Atheneum van Schaarbeek, bovendien aan 's Rijks Middelbare Normalschool te Brussel II.

Dr De Vaere heeft zeer veel gedaan voor het onderwijs in de Wiskunde in zijn land, in het bijzonder in het Vlaamse gedeelte, waar nog zoveel te doen was en nog is. Hij in het bijzonder vormde de band tussen ons, hier in het Noorden en hen, die invoering van het Nederlands als voertaal in de Wiskunde voorstonden, in het Zuiden. Vele voortreffelijke schoolboeken zijn er van zijn hand verschenen, als ook menig artikel in onze tijdschriften.

Vrouwe Mathematica verliest in den ontijdig gevallen een trouwen dienaar, ons volk een edelen zoon.

Persoonlijk was ik zeer bevriend met den overledene; gaarne mocht ik een avond of langer doorbrengen in zijn woning (Mimosastraat 63 Brussel III), hartelijk ontvangen door zijn vrouw; de kinderen, een dochter en een zoon, heb ik zien opgroeien; tot voor vier jaar; beiden, hij en ik, snakten naar de tijd, dat de benauwenis over ons beider landen zou zijn geweken om de vriendschapsbanden te hernieuwen en onze gedachten uit te wisselen. Het heeft niet mogen zijn. Als de tijd daar is, zal ik, bij leven en wel zijn, in het gastvrije huis in Brussel een grote leegte aantreffen.

Dr Paul de Vaere ruste in vrede; ieder, die hem gekend heeft, gedenkt hem in liefde.

Amsterdam, Augustus 1943.

P. WIJDENES.

MATHEMATICI EN PHYSICI ¹⁾

DOOR

DR E. M. BRUINS.

Jeder sei auf seine Art ein Grieche,
aber er sei's. (GOETHE).

Πάνυ καλῶς οἱ γνησίως φιλοσοφῆσαντες, ὧ Σύρε, δοκοῦσί μοι κεχωρικέναι τὸ θεωρητικὸν τῆς φιλοσοφίας ἀπὸ τοῦ πρακτικοῦ. καὶ γὰρ εἰ συμβέβηκε καὶ τῷ πρακτικῷ πρότερον αὐτοῦ τοῦτου θεωρητικῷ τυγχάνειν, οὐδὲν ἦττον ἂν τις εὖροι μεγάλην οὔσαν ἐν αὐτοῖς διαφοράν, . . .

Volkomen juist hebben naar het mij voorkomt, Syrus, diegenen, die de wetenschap op de juiste wijze beoefenen, het theoretische deel der wetenschap van het practische gescheiden. Want al gingen ook voor deze splitsing het practische en het theoretische precies samen, desalniettemin zou men een groot verschil tusschen beide kunnen vinden. . . .

Met deze woorden begint Claudius Ptolemaeus de inleiding van zijn *Μαθηματικῆς Συντάξεως βιβλία ιγ*, die tot den tijd van Copernicus de geheele astronomie beheerschten. Even verder, na aangegeven te hebben, dat volgens Aristoteles de theoretische wetenschappen verdeeld worden in de theologie, de physica en de mathesis, geeft Ptolemaeus zijn voorkeur voor het laatste deel te kennen. Hij merkt op, dat theologie en physica meer op gissingen, dan op het wetenschappelijk begripen neerkomen, de theologie eenerzijds wegens het geheel onzichtbare [*παντελῶς ἀφανής*] en oncontroleerbare [*ἀνεπίληπτος*] en de physica anderzijds, *διὰ τὸ τῆς ὕλης ἄστατον καὶ ἄδηλον, ὥς διὰ τοῦτο μηδέποτε ἂν ἐλπίσαι περὶ αὐτῶν ὁμονοῆσαι, τοὺς φιλοσοφοῦντας . . .* wegens het onbestendige en onduidelijke in de materie, zoodat men daardoor niet kan hopen, dat de beoefenaren der wetenschap ooit over deze quaesties tot overeenstemming zullen geraken. Daartegenover levert dan de mathesis voor dengene, die nauwkeurig te werk gaat, betrouwbare [*βέβαιος*] en onomstootelijke [*ἀμετάπειστος*] resultaten, omdat de bewijzen de ondubbelzinnig bepaalde [*ἀναμφισβήτητος*] wegen der arithmetica en der geometrie volgen.

¹⁾ Openbare les, gehouden op Woensdag 7 Juli 1943 bij de aanvaarding van het lectoraat in de Analyse aan de Gemeente-universiteit van Amsterdam.

Het moge dan zijn, dat de tegenwoordige scheiding in theoretische en experimenteele wetenschappen niet overeenstemt met de door Ptolemaeus bedoelde, ik wil door het aangeven van enkele bijzonderheden de juistheid van zijn opmerkingen ook bij de thans geldende criteria doen uitkomen.

Wie zich photographieën herinnert als die van Guldberg en Waage, Mendelejeff en Lothar Meyer en verdere groepsafbeeldingen, waarop physici voorkomen, kennelijk verheugd over het tezamen bereikte resultaat, zal overhellen tot de meening, dat Claudius Ptolemaeus het in elk geval met de physica wat al te bar maakt, al verwacht men tusschen mathematici een nog grooter harmonie. Laten wij daarom eerst eens nagaan, hoe het met de mathematici staat.

Cauchy en Abel noemt men tegenwoordig in één adem als de grondleggers der modernere Analyse. Beiden waren in de hoogste mate ontevreden over de wijze, waarop men in hun tijd rekende met de oneindige reeksen. Vaak kwam men in vroeger tijden tot de meest vreemde resultaten en met een enkel woord wil ik herinneren aan de wijze waarop Guido Grandi de mogelijkheid van de schepping van het heelal uit niets „mathematisch” bewees:

$$0 = 0 + 0 + 0 + \dots = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 1-1 + 1-1 + 1-1 \dots = \\ = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \dots = 1 - 0 - 0 - 0 \dots = 1.$$

Tegenwoordig is ons volkomen duidelijk, dat een bewerking, zooals hier het weglaten der haakjes, waarvan de juistheid slechts voor eindig vele herhalingen vaststaat, niet zonder meer een oneindig aantal malen mag geschieden. Het helder inzicht in deze quaesties is vooral te danken aan Cauchy en Abel, die een nauwkeuriger theorie van de oneindige reeksen begonnen en aanvankelijk divergente reeksen geheel uit de mathesis wilden verbannen. Men zou dus groote sympathie tusschen beide mathematici verwachten. Een photographie van Abel en Cauchy in den trant van Guldberg en Waage bestaat voor zoover ik weet niet; ik kan dus slechts laten hooren, hoe Abel zich over Cauchy uitlaat in zijn brief aan Holmboe op 24 October 1826:

„Cauchy est fou, et avec lui il n'y a pas moyen de s'entendre; bien que pour le moment il soit celui qui sait comment les mathématiques doivent être traitées. Ce qu'il fait est excellent, mais très brouillé. D'abord je n'y compris presque rien; maintenant j'y vois plus clair.”

Men zou nu tenminste toch verwachten, dat Cauchy, omgekeerd,

ook belangstelling voor het werk van Abel heeft gehad. Even verder lezen wij echter in denzelfden brief:

„Je viens de faire un grand traité sur une certaine classe de fonctions transcendentes pour le présenter à l'Institut, ce qui aura lieu lundi prochain. Je l'ai montré à M. Cauchy mais il deigna à peine y jeter les yeux. Et j'ose dire sans me vanter, que c'est un bon travail.”

Wanneer wij met Ptolemaeus de betrouwbaarheid en ondubbelzinnige bepaaldheid van de wegen der mathesis voor een oogenblik aannemen, worden dan dergelijke verschillen tusschen mathematici dus niet veroorzaakt door onnauwkeurigheid van de werkwijze doch door onvoldoende bepaald zijn van het onderwerp der discussie?

Shanks berekende in 1872/73 de waarde van het getal π op 707 decimalen nauwkeurig. Wat beteekent een nauwkeurigheid van 708 cijfers?

Archimedes betoogde destijds in zijn beroemde voordracht voor Koning Geloon, dat er in de physica geen getal voorkomt, dat niet door den mathematicus kan worden benoemd en aangegeven. Hij toonde ter illustratie aan, dat het aantal zandkorrels, dat in het heelal volgens de voorstelling van dien tijd bevat kon zijn, zeker kleiner dan 10^{63} was, of zooals Archimedes zijn berekening besluit: *δῆλον, ὅτι ὁ γενόμενος ἔσσεῖται τέταρτος καὶ ἐξηκοστὸς ἀπὸ μονάδος ἐκ τᾶς αὐτᾶς ἀναλογίας...*

Het is duidelijk, dat het verkregen getal, (dat grooter is dan het gevraagde aantal) het vierenzestigste zal zijn vanaf de eenheid gerekend in de meetkundige reeks (met reden tien).

Ik bevind mij thans in het omgekeerde geval. Ik kan geen grootheid uit de physica noemen, die een getal van 708 cijfers in het decimale stelsel ter beschrijving noodig heeft. Neemt men het electron met een straal van $2,8 \times 10^{-13}$ cm als kleinste deeltje aan, pakt men het heelal, de interstellare en internebulare ruimte medegerekend tot op de zeer ver verwijderde nevelvlekken (ongeveer een half milliard lichtjaar ver) vol met electronen, zóó, dat geen ruimtedeel onbezet blijft, dan is het aantal te beschrijven met een decimaal getal van 118 cijfers: $6,8 \times 10^{117}$. Vervangt men in deze voorstelling elk electron door een „heelal vol electronen” dan haalt men nog slechts 236 cijfers. Eerst na vijfmaal herhalen van dit proces komt men tot een aantal waarbij een Shanks-nauwkeurigheid onmiddellijk het gemis van één electron zou voelen!

De mathematicus pleegt vol te houden, dat hij van het getal π maar bitter weinig weet, bijvoorbeeld niet eens of in de decimale ontwikkeling wel eens drie zevens of vier negens elkaar opvolgen.

Genoeg, hierdoor is voldoende duidelijk, dat door mathematici andere eischen gesteld worden, dan de meet- en telnaauwkeurigheden, waarnaar de physicus streeft en dat zij, indien zij het al oneens zijn, dan toch wel zeer precies weten, waarover het gaat.

Hoe staat het met de nauwkeurigheid der uitspraken van physici? Ook hier een enkel voorbeeld: wanneer de physicus op een Wilsonkamerphoto een nevelspoor ter dikte van 1 mm aanwijst en zegt: „Daar liep het electron”, is „elkeen” met deze uitspraak tevreden. Stelt men zich echter, alles evenredig vergrootende, het electron voor als een bol met een straal van 42 cm dan komt de onnauwkeurigheid in de plaatsbepaling van het middelpunt van het electron neer op 150.000.000 km, de afstand van de aarde tot de zon.

Men mag wel zeggen: wanneer physici verklaren het over een feit eens te zijn, weten zij vaak ternauwernood, waarover zij spreken! Misschien zou men mij willen tegenwerpen, dat den physici met het laatste voorbeeld niet geheel recht wordt gedaan, omdat hier een mengsel van directe waarneming, — de baan —, en van theoretische physica, — de straal van het electron —, werd verwerkt. Laat ik niet verder stilstaan bij de opmerking, dat bij de meest directe waarneming toch zeer veel „theorie” te pas komt en slechts nog duidelijker aangeven, hoe onduidelijk de antwoorden der Natuur op de haar in de tegenwoordig genomen experimenten gestelde vragen is.

In 1937, tijdens het Congrès du Palais de la Découverte, wees Blackett er op, hoe in de moderne physica aanvankelijk steeds nieuwe eigenschappen werden toegekend aan de algemeen als existerend aangenomen deeltjes, hoe daarna nieuwe deeltjes met analoge eigenschappen werden gevonden en hij hekelde de neiging der physici om de existentie van steeds weer nieuwe deeltjessoorten aan te nemen met de volgende woorden:

Up till six years or so ago, I think that there is no doubt that the instinct of physicists would have favoured new properties for already known particles, but now habit seems to point the other way. Perhaps this may be due to the number of new particles which have recently be discovered; the neutron, the positron and the deuteron, the neutrino and the anti-neutrino, but in the last two cases the particles were given names without waiting for the formality of letting them be discovered.

Deze uitlating was voornamelijk gericht tegen de hypothese van het meson, het „electron met grootere massa”, — die men desgewenscht nog kan varieeren óók —, en waarvan men het

bestaan onderstelde, omdat nòch de gebruikelijke theorie van het electron, nòch die van het proton ver genoeg waren uitgewerkt om de resultaten der verschillende experimenten volgens de gangbare verklaringswijzen te kunnen interpreteren.

Tijdens de besprekingen op het Congrès was men het er algemeen over eens, dat het niet mogelijk was uit de eigenschappen van de baan in de Wilsonkamer tot een beslissing te komen aangaande het al dan niet voorkomen van mesonen. Men kan zich dus mijn verbazing voorstellen, toen de existentie van mesonen óók op grond van Wilsonkamerphoto's kort daarna vrijwel algemeen aanvaard werd, hoewel de interpretatie van de photo's geenszins dwingend was. In 1938 had ik gelegenheid Blackett tijdens diens bezoek aan Amsterdam de vraag te stellen of hij begreep, hoe zooiets mogelijk was, afgezien van het feit, dat het meson ter verklaring van vele experimenten goede diensten bewees. Hierop antwoordde Blackett op de hem eigen laconieke wijze: „Our conclusions seem to be wrong, our experiments are perfect; their conclusions seem to be right, their experiments are absolutely wrong.”

Uit dit voorval moge voldoende blijken, dat de experimenteele physica tenslotte toch ook niet de verwachte uiterst betrouwbare resultaten levert en dat het in vele gevallen niet mogelijk is geweest, de vraag aan de Natuur voldoende scherp te stellen om haar een ondubbelzinnig antwoord mogelijk te maken, zelfs wanneer de vraag slechts luidde: „Zijn dit deeltjes met dezelfde of met verschillende eigenschappen?”

Ook met de theoretische natuurkunde is het alledroeyigst gesteld. Laat ik de laatste ontwikkeling vluchtig en dus onvolledig schetsen. Tot kort voor het begin van deze eeuw geleek de theoretische physica in haar bouw en methoden zeer veel op mathesis. Men ging uit van eenige *nowai érvotai*, algemeene uitspraken; door een elk als juist aanvaard en verkreeg uit deze volgens mathematische methoden resultaten, waarvan men zich, juist als in de wiskunde, aanvankelijk niet bewust is, dat deze een direct gevolg zijn van het als juist aanvaarden der algemeene begrippen en der toegepaste mathematische methoden. Door de consequente toepassing der drie principes van Newton had zich de klassieke mechanica ontwikkeld, de physica der veeldeeltjessystemen had men door statistische methoden bevredigend leeren beschrijven, de electromagnetische lichttheorie was ontstaan en het scheen wel alsof de opvatting van Laplace: „Geef mij slechts de plaats en snelheid der deeltjes uit het heelal op één oogenblik en het is mogelijk het geheele verdere verloop van het wereldgebeuren te berekenen”, in alle opzichten

juist was. De theorie was in één woord „af”; alleen, zooals tot nu toe nog steeds het geval is geweest, het verschijnsel, de Natuur bleek zich niet meer volgens de theorie te gedragen, toen alles tot de uiterste consequenties doorgedacht was. De spectraalanalyse onder meer, de zóó nauwkeurige fysische methode, dat men haar fundamenteele constante van Rydberg tot op acht cijfers kan bepalen, leidde tot onoverkomelijke moeilijkheden. De magnetische splitsing der spectraallijnen, die door de klassieke theorie werd geleyerd, was door Zeeman reeds in 1896 waarschijnlijk gemaakt, doch, toen de splitsing door hem inderdaad werd verkregen, verliep deze in het geheel niet volgens de theorie. De klassieke theorie bleek onhoudbaar! De tegenspraken in de atoomtheorie, die hiervan het gevolg waren, werden door Bohr in 1913 op de meest radicale manier opgeheven, door namelijk nieuwe beginselen op te stellen, welke in staat waren de verschijnselen nauwkeuriger te beschrijven en, zooals steeds in de fysische wetenschappen, wanneer men ten einde raad is, die verschijnselen, die men niet theoretisch kon benaderen, werden op grond van een ad hoc ingevoerd „correspondentiebeginsel” uit de klassieke theorie overgenomen. Men kan niet zeggen, dat in de „naieve atoommechanica” van Bohr uitgegaan werd van *καὶ εἰς ἁπλοῦς* al moge het rekenprocedé eenvoudig zijn. Bij nauwkeuriger uitwerking bleek toch weer, dat de quantitative relaties iets afweken van de uit de theorie van Bohr volgende. Ik herinner slechts aan de bekende vervanging van n^2 door $n(n+1)$ in de uitdrukking der energieniveaux. Nu bleek opnieuw, hoe de physici niet zonder den voortdurenden steun van de mathematici kunnen werken. Hilbert heeft ons voorgelicht, dat het onjuist is te trachten de natuurverschijnselen met behulp van differentiaalvergelijkingen te beschrijven, daar men slechts over de integralen daarvan iets zou kunnen meten en ons erop gewezen, hoe de door hem uitgewerkte theorie der integraalvergelijkingen in vele gevallen uitkomst brengt. Met voorbijzien van Hilberts belangrijkste resultaat, dat men zich bepaalde functies kan voorstellen als punten eener ruimte, de Hilbertruimte, — als het ware een Euclidische ruimte met aftelbaar oneindig veel dimensies, — werd den physici wél duidelijk, dat men de energie der stationnaire toestanden kon berekenen uit wat Hilbert noemde de eigenwaarden van een differentiaalvergelijking, die ontstond door in de klassieke uitdrukking van de energie den impuls p_k te vervangen door $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x_k}$, toe te passen op een functie ψ .

Wat is ψ ? Toen Schroedinger zijn beroemde voordrachten te Londen hield, waarin hij de schitterende beschrijvingsmogelijkheden van deze opvatting aantoonde, besloot hij met een laatste beschouwing over de vraag, die een mathematicus zich zeker vooraf gesteld zou hebben: „Was bedeutet ψ ?” Na verloop van tijd werd deze vraag beantwoord in dien zin, dat met elke meetbare grootheid o een operator O correspondeert zóó, dat het waarschijnlijke meetresultaat kan worden berekend uit een integraal van $\bar{\psi} O \psi$. Daar nu bovendien de identiteit van de naar eersten indruk geheel afwijkende opvattingen als de zoogenaamde „matrixmechanica” van Heisenberg met deze „golfmecanica” werd aangetoond en derhalve óók Heisenbergs belangrijkste ontdekking, de onnauwkeurighedsrelatie, die onder meer inhoudt, dat de nauwkeurigheid van de bepaling van plaats en impuls van een deeltje niet gelijktijdig willekeurig hoog opgevoerd kan worden, overgenomen kon worden, was de theoretische physica, na dertig jaren van ijverigen arbeid precies daar . . . waar zij had moeten beginnen!

Men had niet slechts het idee der atomen over behooren te nemen van de Grieken, doch óók de opvatting, dat de materie steeds *ἀστατος* en *ἀδελος* is nader moeten preciseeren om te komen tot de volgende opvatting:

Een fysisch realiseerbaren toestand kan men afbeelden door een punt in een ruimte; een waarneming is een ingrijpen in dezen toestand, waarmede dus een transformatie van de ruimte correspondeert. De vraag is-nu: welke ruimte is de meest geschikte afbeeldingsruimte, welke bewerkingen komen dan met de fysische waarnemingen overeen? Allereerst wordt dan duidelijk, dat men van een waarde van een meetbare grootheid slechts spreken kan, als voor en na de waarneming ter bepaling van deze grootheid de toestand ongewijzigd is, dat is, als men dekpunten der transformatie beschouwt, eigentoestanden der grootheid, waarmede een bepaalde waarde, de eigenwaarde van dien toestand voor die grootheid correspondeert. Voor niet-eigentoestanden heeft het geen zin om van de waarde van die grootheid te spreken. Verschillende grootheden kunnen slechts „gelijktijdig” of „na elkaar” gemeten worden in een voor de corresponderende operatoren gemeenschappelijke eigentoestand.

Men ziet tevens in, dat behoudens in enkele gevallen de afbeeldingsruimte niet eindig-dimensionaal kan zijn en het antwoord op de vraag: „Was bedeutet ψ ?” is dan ook niet: materiegolven, tweeledig karakter deeltje-straling . . . enz. doch: Het invoeren van de ψ beteekent, dat de theoretische natuurkunde reeds bij het

N -deeltjesprobleem, voor $N > 0$, uit de $6N + 1$ dimensionale fasenruimte gevlucht is naar een niet-eindig-dimensionale ruimte, teneinde contradictoire resultaten te vermijden, en daarbij allereerst is terechtgekomen in de ruimte der tweemaal continu differentieerbare functies. De opvatting, dat men in het waarnemingsproces wel zoo weinig storend zou kunnen werken, dat de operator in de afbeeldingsruimte, — die lineair zou kunnen worden ondersteld —, door een lineairen operator zou kunnen worden beschreven, leidde allereerst tot de brillante nonsens van Dirac, — nonsens, omdat de begrippen door Dirac ingevoerd in zich contradictoir zijn, brilliant, omdat hij met een weergaloos gevoel voor het fysisch juiste steeds diè wending aan het betoog weet te geven, die uit het experiment bekende quantitative relaties oplevert, juist zooals de grootsten onder de mathematici op wiskundig niet verantwoorde wijze met divergente reeksen werkende, hieruit het juiste resultaat wisten te krijgen in afwachting van een exacten opbouw der theorie, — en verder is de langs dezen weg gezochte exacte theorie voor een deel reeds bekend geworden, vooral door het werk van J. von Neumann. Het blijft vooralsnog slechts bij enkele gevallen en de geleverde prestatie staat tot het te stellen doel, als de theoretisch exacte, nauwkeurig en bewonderenswaardig uitgevoerde berekening van den omtrek van een cirkel uit den straal en de bepaling van de oppervlakte van een paraboolsegment door Archimedes staat tot de tegenwoordige algemeene theorie der lengten van vlakke krommen en daardoor omsloten oppervlakten.

Met de theorie der wisselwerking van straling en materie is het echter zeer slecht gesteld. Wellicht worden hier moeilijkheden veroorzaakt, doordat men hierbij stuit op ruimten van functies van niet-eindig-veel variabelen, in tegenstelling tot het N -deeltjesprobleem, waar het aantal variabelen der functies eindig blijft. Hoe het zij, de toepassing van de quantentheorie levert hier meestal een resultaat, dat in eerste benadering juist lijkt, dat in de volgende benaderingen echter tot onaanvaardbare conclusies leidt. Het resultaat moet worden afgelezen uit een divergente reeks van den vorm

$$0 + 0 + \dots + a + \infty + \dots$$

Zeër verheugd over een resultaat $a \neq 0$ aanvaardt men dit als juist. Ik behoef echter niet nader te betoogen, dat de overtuigingskracht en de inhoud van deze resultaten even groot zijn als die van het reeds besproken „bewijs” van Guido Grandi, namelijk nul en nihil.

Het is nu de taak van den mathematicus den physici die ruimte

te verschaffen, waarschijnlijk een uitbreiding van de Hilbert-ruimte, en voor hen die transformaties op te sporen, waarmee de quantentheorie zich tot een zinvolle exacte theorie laat opbouwen.

Ik twijfel er niet aan of dan zullen ook de operatoren, die thans op duistere wijze uit een correspondentiebeginsel worden verkregen voor ons even helder en doorzichtig worden als destijds de overeenstemming der projectieve eigenschappen van ellips, parabool en hyperbool in het Euclidische vlak, waarvan men een eeuw geleden slechts door een „principe de continuité” rekenschap kon geven, door de uitbreiding van het Euclidische vlak met de oneindig verre rechte ons glashelder voor oogen kwam te staan.

Een tweetal opmerkingen wil ik nog toevoegen. Allereerst: de mathematici waren reeds begonnen met het dringend verlangde onderzoek — als steeds gaan ook nu de mathematici de physici vóór — en het is juist diegene, die zelfs andere mathematici, omdat zij hem niet onmiddellijk begrepen, op zijn minst genomen kregel maakte met de opmerkingen als die over „het niets weten van π ”, die het onderdeel der wiskunde heeft gemaakt, waarvan men voor de physica veel zoo niet alles moet verwachten. En ten tweede: men mag niet verwachten, dat de opgave zeer spoedig zal zijn volbracht. Het moge dan klinken alsof een eenvoudige vraag wordt gesteld, de vraag is er een van de soort, die ter oplossing waarschijnlijk een geheele beschavingsperiode noodig heeft. Dit wil ik op grond van de historische ontwikkeling der mathesis aantoonen.

De groote moeilijkheid bij het historisch onderzoek is steeds de neiging van den historicus om alles van het eigen standpunt uit te zien. Het is nu eenmaal zoo, dat datgene wat men vroeger reeds als van buitengewone waarde beschouwde uit een oogpunt van wetenschap en kunst hetzij gedurende oorlogen met pijnlijke nauwkeurigheid door een vijand werd vernield, hetzij per ongeluk verbrandde, terwijl in het algemeen bij het vervoeren naar steeds veiliger plaatsen telkens weer beschadigingen optraden, zoodat tenslotte de stukken overal verspreid liggen en bijna steeds een reconstructie noodzakelijk wordt. In deze reconstructie met hoeveel zorg en goede bedoeling ook uitgevoerd schuilt een groot gevaar.

Om U duidelijk te maken, dat de afspraken betreffende het negatieve getal omstreeks het jaar 1700 nog niet werden aanvaard, was het mijn bedoeling een uiterst eenvoudig fragment uit de Pensées van Pascal aan te halen, dat ik in mijn Gymnasiumtijd maar niet kon verwerken. Toen ik dit fragment probeerde terug te vinden bleek het in verschillende uitgaven zonder meer te zijn

weggelaten; in een Duitsche vertaling vond ik wat ik niet verwachtte „zu hohe Wahrheiten können wir nicht fassen, wie die ersten Sätze der Logik uns zu einfach erscheinen,” hetgeen niet veel meer dan een onzinnigheid is, terwijl ik tenslotte toch den tekst vond, welken ik zocht: „trop de vérité nous étonne: j'en sais, qui ne peuvent comprendre, que qui de zéro ôte quatre reste zéro!”

De oorzaak van deze tekstvervorming is duidelijk. Wanneer de filosoof, die thans de Pensées bewerkt, bijvoorbeeld in de eerste klasse van het Gymnasium er niet in was geslaagd zich de techniek der negatieve getallen volkomen eigen te maken, zou men hem ongetwijfeld naar de H.B.S. hebben gestuurd, omdat het onbegonnen werk zou zijn geweest hem iets van wiskunde te doen begrijpen. Pascal was een wiskundige van vermaardheid, men verandert dus de genoemde passage of laat haar weg, want zóo dom kan Pascal niet geweest zijn. Pascal kon echter in zijn tijd, waarin het begrip negatief getal niet aanvaard werd, zijn denkbeeld niet scherper steunen, dan door erop te wijzen, dat er menschen waren, die maar niet konden inzien, dat nul min vier, nul is en blijft!

Pascal overleed omstreeks 280 jaar geleden. Zijn werk werd op tenminste één plaats reeds onherkenbaar gemaakt door den ijver van o zoo goed willende en wetenschappelijk te werk gaande filosofen. Ik bracht dit naar voren eenerzijds om te doen uitkomen, dat bij oudere teksten de invloed van den „restaurateur” nog wel duidelijker merkbaar zal kunnen zijn en anderzijds ter aanduiding van een mogelijkheid van ontstaan van een misvatting, die reeds ten tijde van Heroon (± 150 n. Chr.) schijnt te hebben bestaan en tegenwoordig algemeen verbreid is, namelijk, dat Archimedes naast de schatting $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ een nauwkeuriger

schatting zou hebben uitgewerkt. De breuken in verband hiermede door Heroon opgegeven werden omgerekend in tiendeelige breuken, op philologische gronden werden schrijffouten aangenomen en een ontzettend nauwkeurige benadering van π werd aan Archimedes toegeschreven. Ik meen met aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid te kunnen aantonen, dat de ongecorrigeerde tekst de juiste is en dat de bewuste benadering een ruwere en oudere is, dan die uit de κύκλου μέτροις.

De tekst van Heroon luidt:

‘Ο δὲ αὐτὸς Ἀρχιμήδης δείκνυσιν ἐν τῷ Περί πλινθίδων καὶ κυλίνδρων, ὅτι παντὸς κύκλου ἡ περίμετρος πρὸς τὴν διάμετρον μείζονα μὲν λόγον ἔχει, ἢ ὃν ἔχει $M_{\alpha\omega\epsilon}$ πρὸς $M_{\zeta\upsilon\mu\acute{\alpha}}$, ἐλάσσονα δὲ, ἢ ὃν ἔχει $M_{\zeta\omega\pi\eta}$ πρὸς $M_{\beta\tau\nu\alpha}$.

Archimedes zelf toont in de verhandeling „Over blokken en cilindren” aan, dat van elk cirkel de omtrek tot den diameter een grootere verhouding heeft dan 211875 tot 67441 en een kleinere dan 197888 tot 62351.

Nu is de eerste verhouding 3,1416 en de tweede 3,17... dus beide verhoudingen zijn grooter dan π , de laatste óók grooter dan $3\frac{1}{7} = 3,142...$! Daarom volgt men algemeen het voorstel van Heiberg om te corrigeren $\overline{\zeta\nu\mu\alpha} \rightarrow \overline{\zeta\nu\mu\delta}$ en $\overline{\zeta\omega\pi\eta} \rightarrow \overline{\epsilon\omega\pi\eta}$, waardoor de breuken $\frac{211875}{674444} = 3,14149$ en $\frac{195888}{62351} = 3,14169$ ont-

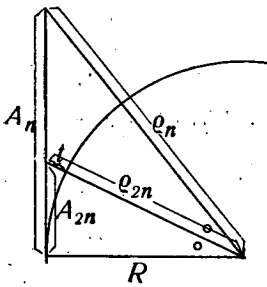


Fig. 1.

staan, hetgeen wel zeer goed om de juiste waarde $\pi = 3,14159...$ heen ligt. Het moge dan zijn, dat de correcties van klassiek philologisch standpunt aanvaardbaar zijn, juist een der te corrigeren getallen 197888 is het uitgangspunt van mijn eigen verklaringswijze.

In de cirkelmeting benadert Archimedes den omtrek van den cirkel als het ware met een oneindig product (fig 1).

$$A_{2n} : A_n = R : (R + \varrho_n), \text{ bissectrix-stelling,}$$

$$\varrho_n^2 = R^2 + A_n^2, \text{ stelling van Pythagoras.}$$

Deze bewerking wordt nu steeds herhaald en er ontstaat:

$$\pi < 2^n A_n : (R + \varrho_n) \cdot \frac{R + \varrho_{2n}}{R} \cdot \frac{R + \varrho_{4n}}{R} \dots$$

De teller van de breuk, die te groot is, moet dus zijn van den vorm $2^n \cdot A_n \cdot f$. En nu is $197888 = 256 \times 773$!

Uit het feit, dat de schatting voorkomt in een artikel over blokken en cilindren trek ik de conclusie, dat het hier gaat over de reeks van den vierhoek.

Rekent men nu op geheele getallen de methode van Archimedes door, dan vindt men achtereenvolgens, als N_p de noemer is, voor den omtrek van den regelmatig p -hoek, behoorende bij den teller 197888:

$$A_4 : R = 773 \quad 1093 < \varrho_4 < 1094 \quad N_4 = 64 \times 773 = 49472,$$

$$A_8 : R = A_4 : (R + \varrho_4) = 773 : 1866 \quad R = 1866, \quad 2019 < \varrho_8 < 2020$$

$$N_8 = 32 \times 1866 = 59712,$$

$$A_{16} : R = A_8 : (R + \varrho_8) = 773 : 3885 \quad R = 3885, \quad 3961 < \varrho_{16} < 3962$$

$$N_{16} = 16 \times 3885 = 62160,$$

$$A_{32} : R = A_{16} : (R + \varrho_{16}) = 773 : 7846$$

$$N_{32} = 8 \times 7846 = 62768,$$

zoodat Archimedes zeker niet verder kan zijn gegaan, dan tot een iets te scherpe schatting van den *zestienhoek*.

Nu levert deeling van 62351 door 1866 de rest 773! Dus

$$62351 = 1866 \left(33 + \frac{773}{1866} \right).$$

En hieruit wordt de reconstructie duidelijk. Het stukje $t = \varrho_8 - R$ is op $\frac{1}{16}(R + A_8)$ gesteld. Dit levert de volgende *reconstructie*:

$$\begin{aligned} A_4 = R = 773 \quad A_8 : R = 773 : 1866 \quad \varrho_8 : R = 2019 : 1866 \\ t = \varrho_8 - R = 153 \quad R + A_8 = 2639 \quad (R + A_8) : t = 16 + \text{iets (17 was „beter”)} \end{aligned}$$

$$R : (R + \varrho_8) = 16R : (33R + A_8) = 16 \times 1866 : 62351$$

$$16A_{16} : A_8 = 256 \times 1866 : 62351 \quad A_8 : R = 773 : 1866$$

$$\pi < 16A_{16} : R = 256 \times 773 : 62351 = 197888 : 62351.$$

De vraag wordt nu: hoe komt Archimedes aan de „basis” 773? Ook hierop is een antwoord te geven.

$$\varrho_4^2 = 2R^2 \quad \varrho_4 : R = p : q = \text{benadering voor } \sqrt{2}.$$

Voor getallen met „eencijfernoemer” leest men onmiddellijk af uit de rij

$$\begin{aligned} 1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad 36, \quad 49, \quad 64, \quad 81, \quad 100 \\ 2, \quad 8, \quad 18, \quad 32, \quad 50, \quad 72, \quad 98, \dots \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} < \frac{10}{7}$$

$$\text{dus gecorrigeerd } \frac{10}{8} < \frac{11}{8} < \sqrt{2} < \frac{10}{7}.$$

Overgang op „tweecijfernoemer” levert

$$\frac{110}{80} < \sqrt{2} < \frac{100}{70}.$$

Correctie van de onderste grens levert

$$\frac{110}{80} < \frac{110}{78} < \sqrt{2} < \frac{110}{77}$$

en tenslotte

$$\frac{110}{78} < \sqrt{2} < \frac{109}{77}.$$

Analoog vindt men voor „driecijfernoemers” nu

$$\frac{1103}{780} < \sqrt{2} < \frac{1104}{780}; \quad \frac{1093}{773} < \sqrt{2} < \frac{1094}{773}$$

Als basiswaarden komen dus in aanmerking 773 en 780.

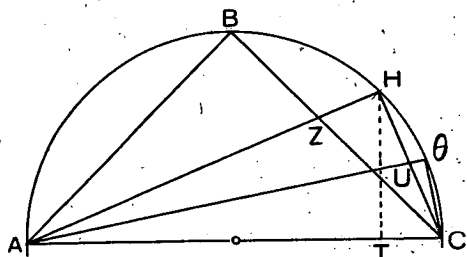


Fig. 2.

Op grond van deze benadering van $\sqrt{2}$ gelukt het inderdaad de onderste grens te verkrijgen. Archimedes zal hebben opgemerkt, dat de driehoek AHC (fig. 2) de verhouding der zijden heeft:

$$HC : AH : AC = 773 : 1866 : 2019.$$

Evident is, dat

$$2HC = AZ$$

$$AB : AH = AZ : AC$$

$$\theta C : \frac{1}{2}AU = HC : AH = BZ : AB = AB : (AB + AC)$$

dus

$$\theta C : AC = AB : (AB + AC)$$

$$f = 2AC : AU.$$

Nu is

$$HU : AH = HC : (AH + AC)$$

$$AU^2 : AH^2 = 2AC : (AH + AC)$$

$$AH^2 = AT \times AC = \frac{1}{2}AC(AC + AB)$$

dus

$$AU^2 : AC^2 = (AC + AB) : (AC + AH).$$

Door omrekening volgt nu voor $AC = 1560$.

$$HC = 597$$

$$AB = 2 \times 597 \times \frac{1866}{2019} = 1103\frac{1}{2} \frac{1}{64} = \frac{211875}{192}$$

$$AU : 2AC = \sqrt{3447} : 2\sqrt{3885} =$$

$$= 58\frac{1}{2} \frac{1}{4} : 124\frac{1}{2} = 1 : 2\frac{1}{10} \frac{1}{100} \dots$$

derhalve is

$$\pi > 16 \times 1103\frac{1}{2} \frac{1}{64} : 2663\frac{1}{2} \frac{1}{64} \times 2\frac{1}{10} \frac{1}{100} = \mathbf{211875 : 67441}.$$

Ik merk hierbij op, dat zonder verder groote worteltrekkingen uit te voeren de schatting $1103 < AB < 1104$ wordt verbeterd. De worteltrekking zelf zou echter hoogstens $1103\frac{1}{19}$ hebben geleverd. Deze iets te ruwe schatting veroorzaakt het te groot worden van de onderste grens, terwijl de „vervanging” van $(R + A_8) : t$ door 16 tolerabel is.

Mijn onderstelling, dat de schatting uit den vierhoek een oudere is dan die uit de κύκλου μέτροσις vindt misschien steun in den ontwikkelingsgang der exhaustiemethode ¹⁾.

Antiphon, zoo zegt men, heeft beweerd, dat men de oppervlakte van den cirkel kon vinden door, uitgaande van een vierkant, de zijden van een ingeschreven veelhoek steeds weer te verdubbelen enz. Dit proces werd scherp bestreden door Zeno van Elea en eerst door Eudoxus werd het exhaustieproces tot een mathematische methode. Het ligt voor de hand, dat Archimedes eerst door een ruwe schatting aangaf, dat dit proces tot resultaten leidt om vervolgens, in alle scherpste, zonder ook maar ergens een niet verantwoord verwaarloozing te maken, uitgaande van de scherpste benadering, die noodig was

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780},$$

gevonden volgens de uit de Babylonische mathesis afkomstige methode, die ook in Plato's Timaeus teruggevonden kan worden, uit den omgeschreven zesennegentig hoek te vinden $\pi < 3\frac{1}{7}$, om dit met den ingeschreven veelhoek aan te vullen met $\pi > 3\frac{10}{71}$.

Het moge zijn, dat deze beschouwing ter reconstructie van de wijze, waarop Archimedes de beroemde schatting heeft verkregen ten opzichte van ons onderwerp een ietwat ruime plaats inneemt, het leek mij toch niet ondienstig erop te wijzen, hoe de indruk, dat groote getallen ook een groote nauwkeurigheid aangeven — wat bij de rekenwijze der Grieken geenszins het geval behoefde te zijn — aanleiding heeft gegeven tot onnoodige en zelfs misplaatste restauratiepogingen, waardoor de reconstructie van Archimedes' werk vele eeuwen verhinderd werd.

Men houde hierbij vooral in het oog, dat de grenzen voor π door Archimedes aangegeven van belang zijn, omdat zij systematisch, met bewijs, werden afgeleid. Reeds lang te voren beschikten de Aegyptenaren over een benadering $\frac{\pi}{4} = \frac{64}{81}$, hetgeen overeenkomt met $\pi = 3,16, \dots$, een fout van minder dan 1 %.

Laat ik U slechts toonen, hoe de Aegyptenaar het oppervlak van een halven bol berekende, als de diameter gegeven was. Vooraf moet ik dan opmerken, dat zij de getallen schreven volgens een vrijwel regelloos additief systeem, waarin

¹⁾ Dat de bovengrens grooter is dan $3\frac{1}{7}$, werd reeds opgemerkt.

de eenheid door een (vertikale) streep		,
het tiental door een boog	∩	,
het honderdtal door een meetlint	⊙	,
het duizendtal door een lotusbloem	⊗	, enz.,

terwijl een getal van een miljoen of grooter door den rekenaar met ten hemel geheven handen, uit verbazing of ontsteltenis over het ontzagwekkende getal, werd aangegeven. Een breuk werd geschreven door vóór of boven het getal een streep, het teeken γ , te zetten. Vergeleken met ons tegenwoordig systeem, schreef men alleen den teller niet. Deze ongelukkige keuze van symbolen heeft een verstrekkend gevolg gehad. Alles moest in stambreuken worden uitgedrukt. De eenvoudige vraag naar de oppervlakte van een halven bol met straal $4\frac{1}{2}$ vindt men als volgt opgelost in den Papyrus van Moskou, kolom XVIII—XX.

	Bereken jij $\frac{1}{9}$ van 9; er komt 1;
	Bereken jij het verschil als 8;
	Bereken jij $\frac{1}{9}$ van 8;
	Er komt $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{18}$;
	Bereken jij het verschil van deze 8
	met deze $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{18}$; er komt $7\frac{1}{9}$;
	Bereken jij $7\frac{1}{9}$ maal $4\frac{1}{2}$;
	Er komt 32. Zie, het oppervlak is dit.
	Je hebt het goed gevonden.

Het is duidelijk, dat de laatste opmerking geschreven werd door den leeraar van den Aegyptenaar, wiens collegedictaat in den papyrus bewaard is gebleven. Men kan niet anders dan bewondering hebben voor de wijze, waarop het resultaat met dergelijke gebrek-kige symbolen werd bereikt. Maar sterker, de Aegyptenaren zijn met het onhandige symbool verder gegaan. Zij hebben in den loop der eeuwen een $\frac{2}{n}$ -tabel opgesteld, die hen in staat stelde om

$\frac{1}{n} + \frac{1}{n}$ in stambreuken te splitsen, die de grootte duidelijker doen uitkomen. Zij slaagden er in splitsingen als

$$\frac{2}{29} = \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{174} + \frac{1}{232}$$

$$\frac{2}{83} = \frac{1}{60} + \frac{1}{332} + \frac{1}{415} + \frac{1}{498}$$

te vinden;

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{46} + \frac{1}{138} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{230} = 1$$

werd voor hen „evident”.

Veniet tempus quo posteri nos tam aperta nescisse mirentur,¹⁾ staat in de collegezaal van het Organisch Chemisch Laboratorium te Amsterdam, en inderdaad: hadden de Aegyptenaren niet slechts de „breukstreep”, maar ook den teller geschreven, een werk van eeuwen, het geleidelijk aan, tastende opstellen der $\frac{2}{n}$ -tabel ware overbodig geweest.

De Babyloniërs ordenden de getalsymbolen tot een positie-systeem, waarbij de eenheid, al naar de plaats, waarop zij stond 1, 60, 3600, ... of $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{3600}$, ... kon beteekenen.

De Grieken bouwden de theorie der verhouding, van het rationale getal uit en zij zagen op geometrische gronden de irrationale getallen. De afsluiting van de theorie der verhoudingsgetallen stelde Archimedes in staat met een *Εὑρημα* de toepassing daarvan op de physica in te luiden, door de ontdekking van het begrip soortelijk gewicht, dat hem aanleiding gaf tot een tweetal verhandelingen, *Περὶ ὀγκομένων*, Over drijvende lichamen, waarin de grondslagen der hydrostatica worden behandeld op een wijze, waarbij die van Blaise Pascal en 's Gravezande, van omstreeks 1800 jaar later, ver en ver achterstaat.

Ik heb er reeds op gewezen, dat Archimedes in de practijk met oneindige producten werkte en de waarde daarvan schatte door een voldoende groot aantal factoren in rekening te brengen. Bij de inhoudsbepaling van het paraboolsegment berekent Archimedes de som van een oneindige reeks en zijn limietdefinitie, van de oppervlakte, is, wanneer men rekening houdt met het feit, dat Grieken een willekeurig reëel getal slechts door lijnsegmenten of oppervlakten konden beheerschen, door een Cauchy niet verbeterbaar:

¹⁾ Er zal een tijd komen, waarin het nageslacht zich er over zal verbazen, dat wij zoo voor de handliggende dingen niet hebben geweten.

Wij lezen in den *τετραγωνισμὸς παραβολῆς*:

Δεδειγμένον δὲ τούτου δῆλον, ὅτι ὡς ἐξ τούτου τὸ τμήμα δυνατόν ἐστι πολύγωνον ἐγγράφαι, ὥστε εἶμεν τὰ περιλειπόμενα τμήματα παντὸς ἐλάσσονα τοῦ προτεθέντος χωρίου...

Het is hieruit duidelijk, dat een polygoon in dit segment beschreven kan worden zóó, dat de rondom overblijvende segmenten kleiner zijn dan een van te voren gegeven oppervlakje.

Het invoeren van het reële getal heeft nog veel moeilijkheden opgeleverd. Het invoeren van de logarithme werd door Archimedes „gemist”, omdat hij de nul, die bij mijn weten het eerst ter aanduiding van de „leege plaats” in de koordentafel van Ptolemaeus voorkomt, niet kende.

Hij geeft de „plaats” van het getal aan in de rij 1, 10, 100, ... en kreeg zoodoende inplaats van onze eenvoudige exponentenregel de ingewikkelde stelling: getal op de p -de plaats maal getal op de q -de plaats is het getal op de plaats voorafgaande aan de $p + q$ -de, die door hem in de zandkorrelrekening wordt afgeleid.

Het continuïteitsaxioma van Dedekind wordt bij de Grieken haast tastbaar; men vindt uitspraken als *οὐδὲ ἔστι μείζον καὶ ἔλαττον, τούτου ἔστι καὶ ἴσον*, ten opzichte waarvan sprake is van grooter en kleiner daar is ook sprake van gelijk, doch eerst ongeveer zeventig jaren geleden is een zekere afsluiting van de theorie der reële getallen bereikt.

Dit neemt niet weg, dat de techniek van het reële getal, door de ontdekking van de decimaalbreuk buitengewoon ontwikkeld werd. Ik herinner er aan, hoe door Briggs en Joost Burgi het begrip van Archimedes, vergelijken met een meetkundige reeks met reden tien, uitgebouwd werd tot het begrip logarithme; ik herinner aan de nek aan nek race van Briggs en Ezechiel de Decker bij de samenstelling der tafels van Briggs en die van Vlacq, en ook het volhardend uitgevoerde werk van John Napier is aan ieder bekend. Het is daarom interessant om op te merken, dat zooals de $\frac{2}{n}$ -tabel reeds vergeten was, de logarithmentafel, de tafel der exponentiaalfunctie en waarschijnlijk functietafels in het algemeen voorbestemd zijn om reeds spoedig vergeten te worden.

Nadat de reële getallen een stevig en vlot hanteeringsmiddel hadden verkregen, kon het begrip „functie” worden onderzocht. De logarithme leerde men toen voor voldoende dicht bij 1 gelegen waarden berekenen door middel van de convergente reeks

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$$

en evenzoo leerde men de reeksontwikkeling

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

kennen, waarmede men logarithmen en exponentiaalfunctie recht op het doel af, zonder tastend probeeren en interpoleeren leerde berekenen.

Wanneer men nu de quadraatworteltrekking, die de constructeurs der rekenmachines aangeven, beschouwt, blijkt deze zeer omslachtig en onbruikbaar te zijn. Het leek mij echter voor elkeen duidelijk, dat men op de machine het normale procedé zonder meer kan uitvoeren, en ik zou dit niet verder vermelden, ware het niet, dat Störmer, die bijna een kwart eeuw met de Brunsviga (13Z) gerekend heeft, in 1937 publiceerde (*Astrophysica Norvegica* II, 4, pg. 219), dat men op deze machine volgens het gewone procedé de wortel op vijf decimalen kan trekken, zooals hij opmerkt, veel sneller dan dit met logarithmentafels kan. Ik heb dit met eenige verbazing gezien, omdat men met deze machine de worteltrekking uit een getal van 14 cijfers op 14 cijfers in het algemeen binnen 45" kan uitvoeren: door vooraan op de machine te beginnen vindt men met het telwerk vanaf de zevende plaats onmiddellijk den quadraatwortel op 7 cijfers volgens het gewone procedé, in het resultaatwerk blijft over het verschil van gegeven getal en quadraat van den benaderden wortel. Door een gewone deeling van deze „rest" vindt men de volgende zeven cijfers, zooals onmiddellijk duidelijk is uit:

$$\sqrt{a^2} = a + \varepsilon \quad \varepsilon = a - \alpha \quad \varepsilon_1 = \frac{a^2 - \alpha^2}{2\alpha} \quad \varepsilon - \varepsilon_1 = -\frac{(a - \alpha)^2}{2\alpha}$$

Natuurlijke logarithmen berekent men nu als volgt: door worteltrekking verkrijgt men een getal voldoende dicht bij 1. Van dit getal berekent men de logarithme met behulp van de eerste termen uit de reeks. (Voor elke drie worteltrekkingen verliest men ongeveer één cijfer). Voor $\ln 10$ dus bij voorbeeld als volgt

$$\begin{aligned} \sqrt{10} &= 3,162277660168_4 \\ &1,778279410038_9 \quad 1,004507364254_6 \\ &1,333521432163_4 \quad 1,002251148292_9 \\ &1,154781984689_8 \quad 1,001124941400_3 \\ &1,074607828321_7 \quad 1,000562312602_3 \\ &1,036632928428_3 \quad \ln 1,000562312602_3 = 0,000562154563_8 \\ &1,018151721718_7 \\ &1,009035044841_7 \quad \ln 10 = 4096 \times 0,000562154563 = \\ &\quad = 2,302585093_3. \end{aligned}$$

Zelfs in dit ongunstige geval neemt de berekening niet meer dan 10 minuten in beslag!

Het is duidelijk, dat elke berekening met logarithmen kan worden uitgevoerd met dit rekenvoorschrift voor logarithmen en men heeft naast $\ln 10$ slechts een „gewichtendoos” van e -machten van 0,01 tot 1 noodig om ook den numerus bij de logarithme terug te kunnen vinden.

Voor berekeningen met hoogstens vier cijfers gebruikt men geen logarithmentafel, de rekenschuif is afdoende! Voor nauwkeuriger berekeningen zullen de tafels niet meer noodig zijn; evenals de $\frac{2}{n}$ -tabel is ook dit werk van jaren en jaren geheel achterhaald door de beter wordende theorie en techniek.

Enkele functies heeft men nu leeren overzien, de aanval op de functieruimte is begonnen. Verschillende symbolische methoden werden ontwikkeld om de essentieele eigenschappen van functiesystemen zoo goed mogelijk te isoleeren. Men denkt reeds bij een functie aan een punt in een ruimte, zooals de Grieken bij een reëel getal dachten aan een punt, een segment op een rechte. Deze functieruimte moet worden „uitgebreid en gladgestreken” zóó, dat men niet telkens de noodzaak voelt om buiten de gekozen functieruimte te treden. Zoodra dit zal zijn geschied zal óók den physicus de gelegenheid worden geboden om een exacte quantentheorie op te bouwen . . . en waarschijnlijk ook niet eerder!

Ik heb U hiermede geschetst de rechte lijn, die in de ontwikkeling der mathesis is te zien. Veel van het werk, dat werd gedaan leidde op dood spoor, lijkt haast overbodig, doch alles was ongetwijfeld noodig om de groote lijn stukje voor stukje kaarsrecht door te trekken. Steeds weer konden tenminste de resultaten van den eenen beschavingscyclus op den anderen worden overgedragen, — al vergat men vaak, dat dit gebeurd was, — doordat het contact tusschen de beoefenaren der wetenschappen van opvolgenden cyclen bestond, vóórdat het contact der volkeren op staatkundig gebied de vernietiging der voorgaande cyclen ten gevolge had.

Het moge waar zijn, wat de astronoom Schiaparelli uitsprak, dat men bij de Ouden weliswaar op gebrekkige waarnemingen én volkomen bezijden de waarheid voerende speculaties stuiten kan, maar nooit iets belachelijks, absurds of iets tegen het gezonde verstand indruischende vindt. Wanneer wij, zoo zegt hij, tegenwoordig als kleinkinderen van deze beroemde meesters met hun dwalingen en ontdekkingen ons voordeel doen en tot den top van

het door hen gefundeerde gebouw opklimmend met onzen blik een verderen horizon omvatten, dan zou het dwaze hoogmoed zijn, erin te gelooven, dat wij een verderstrekking en scherper gezichtsvermogen hebben dan zij. Onze eenige verdienste bestaat daarin, dat wij later op de wereld gekomen zijn! Hij vergeet daarbij op te merken, dat het een plicht is het werk voort te zetten, zij het ook, dat het einde is: ontevredenheid met het resultaat van het werk van zich zelf en anderen en met het hoogst bereikbare, dat door hen, die na ons komen eens zal worden gezegd, dat onder de omstandigheden, waaronder wij leefden en met de hulpmiddelen, waarover wij beschikten, het werkelijk niet beter had gekund.

En ten slotte nog dit: het eenige feit, waarbij het oorlogsgebeuren een stuitenden invloed kan hebben gehad op de werkzaamheid van een mathematicus, wordt juist weer geleverd door de verhalen over Archimedes.

Het is bekend, dat tijdens het beleg van Syracuse de wonderen van techniek aan Archimedes toegeschreven, de Romeinen tot wanhoop brachten. Er behoefde slechts een balk, een stuk touw over de muren geworpen te worden of de Romeinsche soldaten riepen: „Daar heb je het weer!” en ze maakten, dat ze wegwamen. Tenslotte viel, zooals alle omsingelde vestingen, Syracuse in 212 voor Chr. De stad werd geplunderd, hetgeen in dien tijd niet geluidloos of zachtzinnig gebeurde. Archimedes was toen in zijn werkkamer. Het huis naast hem is bezocht. Tum tua res agitur paries cum proximus ardet!¹⁾ Archimedes werkt door. De soldaat komt in zijn studeervertrek . . . en nu gaat het verhaal op twee wijzen verder. De eene levert het onbegrijpelijke vervolg, dat Archimedes met den plunderenden soldaat over het niet verstoren van zijn cirkels is gaan discussieeren, met het gevolg, dat er een einde aan zijn leven werd gemaakt, tegen het uitdrukkelijk bevel van den veldheer Marcellus in! De andere leert, dat het den soldaat niet mogelijk bleek de aandacht van Archimedes te trekken, hetgeen verkeerd werd uitgelegd met hetzelfde resultaat. De laatste lezing is mij sympathieker, omdat zij illustreert, hoe de mathematicus, zonder wie het geestelijk leven in zijn eenvoudigsten vorm niet mogelijk is, zich gedraagt, te midden van het wereldtummult, als de onverstoorbare werker, die voor het lichamelijk leven onmisbaar is en over wie het Nederlandsche gedicht, óók ietwat overdreven, zegt:

De boer, hij had zijn naam niet gehoord,
De boer, hij ploegde voort!

¹⁾ Dan eerst staat Uw belang op het spel, wanneer de dichtsbijzijnde wand in brand staat.

BOEKBESPREKING.

Dr J. C. H. Gerretsen, *Niet-euklidische meetkunde*, Gorinchem, J. Noorduyt & Zn, N.V., 1942.
205 bladzijden, prijs f 3,60.

Doordat de niet-euclidische meetkunde niet voorkomt op de programma's der examens voor lagere en middelbare acten wiskunde, is dit deel der elementaire wiskunde betrekkelijk weinig beoefend. In de elementaire tijdschriften, die zich met hunne groote vraagstukkenverzamelingen richten naar de acte-examens, zijn de artikelen en vraagstukken over dit onderwerp schaarsch; hierdoor wordt de beoefening der niet-euclidische meetkunde niet bevorderd. Dit is te betreuren, want voor wie middelbaar onderwijs te geven hebben is eenige kennis der niet-euclidische meetkunde wel zoo nuttig als b.v. de theorie der tweede-graadsoppervlakken, waaraan zooveel tijd en moeite ten koste gelegd wordt. De verschijning van een leerboek, dat althans een deel dezer meetkunde gemakkelijk toegankelijk maakt, is dan ook eene gebeurtenis, die ik met vreugde begroet.

Het boek van Dr Gerretsen is geschreven voor lezers, die niet meer dan de leerstof der middelbare scholen onder de knie hebben, maar zal ongetwijfeld ook gewaardeerd worden door wie wat meer aan wiskunde gedaan hebben. De exactheid en strengheid der formuleering en bewijsvoering zijn die van een goed schoolboek: beweringen over volgorde en continuïteit worden veelal aan de aanschouwing ontleend.

Na eene historische inleiding over het parallelenprobleem behandelt de schrijver eerst de planimetrie en daarna de stereometrie. Dit is een belangrijk voordeel van het boek, daar men bij schrijvers over dit onderwerp vaak de neiging waarneemt, de hyperbolische stereometrie te verwaarloozen. Na een hoofdstuk over logaritmen en hyperbolische functies volgt de behandeling der trigonometrie. Zooals de lezer uit dit korte inhoudsoverzicht bemerkt zal hebben, behandelt de schrijver uitsluitend de hyperbolische meetkunde; de elliptische geometrieën worden niet besproken.

De heldere schrijffrant maakt dit boek geschikt voor een uitgebreiden lezerskring; mij dunkt dat goede leerlingen der hoogste klasse van hogere burgerscholen en gymnasia er van kunnen genieten, zoodat het werkje ook kan worden aanbevolen voor opneming in schoolbibliotheken.

J. H. S.

Inleiding tot de Analytische Meetkunde, door Dr J. G. Rutgers. Eerste deel: Het Platte Vlak. 3e druk. 1943. 366 pag., 120 fig., geb. f 7,—. P. Noordhoff N.V., Groningen.

Een uitvoerige bespreking van deze derde druk van de „Inleiding tot de Analytische Meetkunde” lijkt ons overbodig, waar deze druk slechts zeer weinig verschilt van de tweede en dit werk reeds algemeen in gebruik is bij degenen, die zich voorbereiden voor de Middelebare Akten Wiskunde K I en K V en bij welke studie het uitstekende diensten verleent.

Als eerste kennismaking met de Analytische Meetkunde heeft dit werk ook beteekenis voor studenten aan de Universiteiten, vooral uit het oogpunt om spoedig te komen tot het oplossen van vraagstukken; wat hun wetenschappelijke opleiding in dit vak betreft, komt o.i. alleen de „Analytische Meetkunde” van Prof. J. A. Barrau in aanmerking.

Voor K I en K V is het werk van Prof. Rutgers onmisbaar, grondig van opzet en door de heldere betoogtrant uitstekend geschikt voor zelfstudie. Het aantal vraagstukken dat in de vorige druk ruim 250 bedroeg is nu gestegen tot ruim 280. In zijn voorbericht verwijst de Schrijver naar de bekende verzameling van Van Breen—Wijdenes (uitgave Noordhoff) en acht hij het opnemen van examen-opgaven overbodig. Dit is wat die examen-vraagstukken betreft inderdaad juist. Toch is het voor ons een ervaringsfeit, dat de vraagstukken in het onderhavige werk juist iets liggen beneden het peil van die der examens K I der latere jaren, zoodat een nog verdere aanvulling van de vraagstukken ons niet geheel overbodig lijkt.

Verskillende vraagstukken van de soort als voorkomend onder de hoogere nummers van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde komen hiervoor in aanmerking, of de schrijver zou in zijn voorbericht ook hier naar hebben kunnen verwijzen, al achten wij dit voor een afgerond werk voor een akte-studie minder juist.

Een gelukkige aanvulling t.o.v. de vorige druk vinden wij op pag. 302 (176), handelend over de vergelijking van het net van kegelsneden, t.o. waarvan een driehoek, waarvan de zijden door vergelijkingen gegeven zijn, pooldriehoek is en wordt dus niet meer volstaan met het vermelden van het feit dat het geven van een pooldriehoek t.o.v. K beschouwd moet worden als een drievoudige voorwaarde.

Het probleem van osculatie van kegelsneden wordt aangesneden op de pag. 255, 256, 273 en 301. Het geheel hiervan komt ons te beknopt voor. Wij zien hier gaarne behandeld het snijpuntenstelsel van de parabool $y^2 = 4fx$ met de cirkel $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, daarbij gebruik makende van de eigenschappen van de wortels van een hoogere machtsvergelijking. Naar aanleiding van het stelsel osculatie-koorden, als het osculatie-punt de parabool doorloopt, zou gesproken kunnen worden over lijnenstelsels van bepaalde index en het bepalen van de omhullende van een lijnenstelsel van index

2 en de beteekenis hiervan. De gevolgde methode zou dan nog kunnen worden toegepast op de parabool, die in elk van haar punten geosculeerd wordt door een orthogonale hyperbool, waarvan een der asymptoten evenwijdig is aan de as van de parabool. Verg.: K I. 1931, 1936).

Het bepalen van de brandpunten van een kegelsnede wordt behandeld in het Aanhangsel en wel in § 1 (pag. 304) zonder klassecoördinaten en in § 4 (189, 190, pag. 326 e.v.) met behulp van klassecoördinaten, door te scharen met het isotrope puntenpaar. In of na § 4 ware het wellicht op zijn plaats geweest nog een andere methode te vermelden, uitgaande van de volgende algemeene definitie: Indien I en J de isotrope punten zijn en de lijnen FI en FJ, F in het eindige, raken aan een gegeven algebraïsche kromme, dan wordt F een „gewoon” brandpunt van de kromme genoemd; gaat de kromme door I en J, dan snijden de tangenten in I en J elkaar in punten die wij niet tot de „gewone” brandpunten rekenen, maar „singuliere” brandpunten worden genoemd.

De brandpunten van de kromme $f(x, y, z) = 0$ worden nu bepaald door in de tangentiaalvergelijking $\varphi(u, v, w) = 0$ te substitueeren $(-1, -i, z)$, waarbij $z = x + iy$ en (x, y) de coördinaten van het brandpunt zijn. Voor het geval van de kegelsnede, vinden wij, na het nul stellen van het reëel en imaginair gedeelte, de brandpunten als de snijpunten van twee orthogonale hyperbolen.

Naar aanleiding van genoemde definitie zou verder kunnen worden opgemerkt, dat een kromme van de klasse γ in het algemeen γ reële en $\gamma^2 - \gamma$ complexe brandpunten heeft, terwijl aan het middelpunt van een cirkel het verband tusschen „gewoon” brandpunt, „singulier” brandpunt en inversie kan worden gedemonstreerd.

Papier en omslag van deze nieuwe uitgave zijn nog van goede kwaliteit; de druk is als gebruikelijk door Noordhoff uitstekend verzorgd.

Roermond:

Dr H. A. Grib nau.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van de schrijvers:

Ir W. J. VOLLEWENS c. i. Repetitiedictaat Analyse II. **3e druk**; 216 blz. 70 fig. 288 vraagstukken met de antwoorden. f 3,90. Delft, Waltman.

Inhoud: I. Functies van meer dan één veranderlijke. II. Het invoeren van nieuwe variabelen. III. Reeksen van Taylor en MacLaurin voor functies van meer veranderlijken; maxima en minima. IV. Meetkundige toepassingen in het platte vlak. V. Meetkundige toepassingen in de ruimte. VI. Bepaalde integralen. VII. Oppervlakte van vlakke figuren; booglengte van vlakke krommen. VIII. Booglengte van ruimtekrommen. Inhoud en oppervlakte van omwentelingslichamen. IX. Inhoud en oppervlakte van willekeurige lichamen. X. Bepaling van massa; zwaartepunten en traagheidsmomenten.

In een kort bestek geeft de schrijver, wat in een groot werk over Analyse driemaal zoveel ruimte beslaat; daardoor uiterst geschikt voor hen, die voor K V studeren en voor hen, die repeteren voor hun candidaats.

Dr H. STREEFKERK, Over het aantal oplossingen der diophantische vergelijking
$$U = \sum_{i=1}^s (Ax_i^2 + Bx_i + C).$$

Academisch proefschrift Vrije Universiteit te Amsterdam.

Van de XII stellingen zijn de laatste drie van didactische aard.

Dr W. DE GEUS, Continue intrestrekening. Academisch proefschrift Vrije Universiteit te Amsterdam.

Het werk bedoelt een systematische opbouw te geven van de continue intrestrekening uitsluitend op de grondslagen van de infinitesimaalrekening.

Van P. Noordhoff, Groningen.

Dr E. W. BETH, Summulae logicales. Overdruk van het artikel in Euclides verschenen. 54 blz. f 1,50.

Inhoud: I. Inleiding. II. De logica der proposities. III. De logica der eigenschappen. IV. De logica der relaties. V. Historische aantekeningen. VI. De categorieën.

P. WIJDENES, Practische driehoeksmeting. **3e druk**. 128 blz. 107 fig. f 2,10*.

Dr. H. C. SCHAMHARDT, Mondelinge Staatsexamens A 1942. 25 blz. 100 vragen over Meetkunde, 125 over Algebra. f 0,85*.

P. WIJDENES en Dr H. J. E. BETH, Nieuwe Schoolalgebra I. **13e druk**. 156 blz. f 2,25*.

id. Antwoorden op Nieuwe Schoolalgebra II. **5e druk**. f 1,05*.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET, Algebra voor de H.B.S. A. **4e herziene druk**. 164 blz. 18 fig. f 2,10*.

WISKUNDIGE AANLEG BIJ MUSICI

DOOR

G. RÉVÉSZ.

De vriendelijke ontvangst, die mijn publicatie over den vermeenden samenhang tusschen de wiskundige en de muzikale begaafdheid van de zijde der mathematici en physici ten deel is gevallen, geeft mij den moed, de redactie van „Euclides” wederom te verzoeken, eenige plaatsruimte ter beschikking te stellen, ditmaal voor het verslag van een klein aanvullend onderzoek.

Eenigen tijd geleden werd n.l. door mij in dit tijdschrift (jaargang XIX, afl. II—IV, 1943) mededeeling gedaan van de resultaten van een enquête aangaande de relatie tusschen wiskundige en muzikale begaafdheid. Het is gebleken, dat de mathematici, vergeleken met personen van een gelijk ontwikkelingsniveau, ten aanzien van den muzikalen aanleg geenszins een bevoorrechte positie innemen. In de door ons onderzochte groepen, nl. mathematici, theoretische en experimenteele physici, artsen en literatoren, bevonden zich 18 % totaal onmuzikale en evenveel niet-muzikale personen. Van een nauwen samenhang tusschen mathematischen en muzikalen aanleg, welks bestaan reeds sedert eeuwen met hardnekkigheid werd volgehouden, viel niets te bespeuren. Integendeel, wij vonden onder de niet-mathematici zelfs *meer* muzikalen dan onder de wiskundigen (56 % tegenover 67 %, 59 % en 71 %).

Naar aanleiding van deze enquête werd van den kant onzer medewerkers meermalen de vraag gesteld, hoe het met het pendant van ons probleem stond, m.a.w. welke correlatie er zou bestaan tusschen de *muzikale* begaafdheid en den wiskundigen aanleg. Deze vraag werd — gelijk ik in mijn publicatie vermeldde — door Haecker en Ziehen¹⁾, Heymans en Wiersma²⁾ en

¹⁾ V. Haecker und Th. Ziehen, Zur Vererbung und Entwicklung der musikalischen Begabung. Leipzig, 1932.

²⁾ G. Heymans, Beiträge zur speziellen Psychologie etz. Ges.kl. Schriften, Bd. III, 1927.

verder door Pannenburg¹⁾ in negatieven zin beantwoord. Deze onderzoekers vonden nl. geen noemenswaardige correlatie tusschen muzikalen en wiskundigen aanleg, aangezien zij zoowel bij jeugdige als bij volwassen muzikaal begaafde personen slechts in 15 % der gevallen het voorkomen van mathematischen aanleg konden, constateeren.

Daar deze onderzoekingen geen betrekking hadden op beroepsmusici — met uitzondering van de biographische gegevens van Pannenburg over 21 componisten, — scheen het mij raadzaam, onder deze categorie een enquête te houden.

Tot dit doel werd aan een belangrijk aantal beroepsmusici (componisten, dirigenten, solisten, orkestleden en leeraren) een vragenlijst gezonden, met het verzoek, de gestelde vragen nauwkeurig te beantwoorden. De vragen waren de volgende:

1. Heeft U belangstelling voor de mathematica?

2. Heeft U mathematischen aanleg en, zoo ja, waarin manifesteert deze zich?

3. a. Hoe waren Uw schoolresultaten voor de wiskundevakken?

Antwoord: zeer goed.
goed.
gemiddeld.
onder gem.

b. Welke cijfers behaalde U voor de wiskundevakken in de laatste klasse?

(s.v.p. vermelden: Gymnasium A of B, H.B.S. A of B, Mulo enz.).

4. Houdt U zich nu nog met de mathematica bezig en zoo ja, op welke wijze?

5. Heeft U belangstelling voor den mathematischen grondslag der muziek?

Onder de musici bleek voor onze enquête geen groote belangstelling te bestaan. Van de 170 vragenlijsten, die wij verzonden, ontvingen wij er slechts 44 ingevuld terug, dus 26 %, terwijl aan onze eerste enquête 69 % der geadresseerden deelgenomen hebben. Dit gebrek aan belangstelling laat zich verklaren door de geringe verbreiding van den mathematischen aanleg onder de musici. Men mag nl. aannemen, dat musici met wiskundige belangstelling, resp. aanleg, gaarne bereid zouden zijn geweest, aan onze enquête mede

¹⁾ H. J. en W. A. Pannenburg, Die Psychologie des Musikers, Zeitschr. f. Psych. 73, 1915.

te werken, temeer omdat de vragenlijst hun gelegenheid gaf, mededeelingen te doen over een bekwaamheid, die men in het algemeen niet bij hen vooronderstelt.

De frequentie van den mathematischen aanleg kon vastgesteld worden eenerzijds op grond van de zelfbeoordeeling van de mede-werkenden (vraag 1 en 2), anderzijds op grond van objectieve gegevens, d.w.z. de cijfers, die zij op school voor de wiskundige vakken verkregen (vraag 3).

Volgens beide methoden bleek, dat de wiskundige aanleg bij beroepsmusici niet meer, doch eerder *minder dikwijls* voorkomt dan bij muzikale mensen in het algemeen. Terwijl nl. bij deze laatste groep in ongeveer 15 % der gevallen zich wiskundige aanleg liet vermoeden, was dit slechts bij 9 % der beroepsmusici het geval.

Om het aantal der onderzochte musici te vergrooten, kunnen wij rekening houden met de resultaten van een vroegere enquête, die ik jaren geleden in Budapest hield onder 60 toehoorders bij mijn toonpsychologische colleges (meerendeels leeraren en studenten van de muziekhooogeschool). Volgens deze enquête vertoonden 10,5 % der musici wiskundigen aanleg.

Hiermede is aangetoond, dat de mathematische begaafdheid onder actief werkzame musici slechts zeer zelden voorkomt. In deze richting wijst ook de omstandigheid, dat niemand van de mede-werkenden op vraag 4 een positief antwoord heeft gegeven. Het feit daarentegen, dat van de 44 musici er toch nog 14 (32 %) vraag 5 bevestigend hebben beantwoord, is met onze conclusie niet in tegenspraak, daar dit zonder uitzondering componisten of docenten waren, die reeds wegens hun beroep gedwongen waren, zich met de mathematisch-physische grondslagen der muziek bezig te houden, ongeacht, of zij daarvoor al dan niet aanleg bezaten.¹⁾

Op grond van onze beide onderzoekingen kan men derhalve met stelligheid beweren, dat *tusschen mathematische en muzikale begaafdheid geen noemenswaardige correlatie bestaat*. Wiskundigen zijn in doorsnee niet in hoogere mate muzikaal begaafd dan niet-mathematici, en musici schijnen zelfs nog minder wiskundigen

¹⁾ Over de erfelijkheid van den muzikalen aanleg, zie G. Révész, Inleiding tot de muziekpsychologie. (Ter perse).

aanleg te bezitten dan ontwikkelde mensen in het algemeen. *De opvatting, dat er een bijzonder nauwe samenhang zou bestaan tussen de beide vormen van begaafdheid is dus door onze onderzoekingen definitief weerlegd.* Zooals ik elders heb uiteengezet,¹⁾ zijn beide vormen van begaafdheid ongedeeld en specifiek, van elkaar onafhankelijk en elk aan eigen ontwikkelingswetten onderworpen.²⁾

1) G. Révész, De ongedeeldheid der begaafdheidsvormen. Alg. Ned. Tijdschrift voor Wijsbegeerte en Psychologie, 32e jaarg., 1938 en The indivisibility of mathematical talent. Acta Psychologica. Vol. V. 1940.

2) Op deze plaats wil ik mijn dank uitspreken voor de vele brieven, die ik naar aanleiding van de publicatie van mijn artikel in „Euclides” mocht ontvangen van mathematici en physici. Niet alleen de instemming, waarmede mijn methoden en beschouwingen in dezen kring werden ontvangen, heeft mij ten zeerste verheugd, doch vooral het inzicht, dat men ook met minder exacte en mathematisch niet onberispelijke methoden somtijds tot recht betrouwbare resultaten kan komen.

HOOFDSTUK XIV. ¹⁾

DRIJVENDE LICHAMEN.

1. Zooals we in Hoofdstuk II zagen, is de Grieksche tekst van dit werk eerst sedert 1899 bekend; zij vertoont echter nog aanzienlijke lacunes. Vóór dien tijd heeft men zich steeds moeten behelpen met een Latijnsche vertaling van Willem van Moerbeke; deze wordt thans nog gebruikt om de onontcijferbare of ontbrekende gedeelten van den Griekschen tekst aan te vullen.

2. Boek I van het werk begint met een axioma, waarvan de juiste beteekenis aan twijfel onderhevig kan zijn en dat we daarom ook in het oorspronkelijke meedeelen.

*ὑποκείσθω τὸ ὑγρὸν φύσιν ἔχον
τοιαύταν, ὥστε τῶν μερῶν αὐτοῦ
τῶν ἐξ ἴσου κειμένων καὶ
συνεχέων ἐόντων ἐξωθεῖσθαι τὸ
ἥσσον θλιβόμενον ὑπὸ τοῦ μᾶλλον
θλιβομένου, καὶ ἕκαστον δὲ τῶν
μερῶν αὐτοῦ θλίβεσθαι τῷ
ὑπεράνω αὐτοῦ ὑγρῷ κατὰ κάθετον
ἐόντι, εἴ κα μὴ τὸ ὑγρὸν ἦ
καθειργγμένον ἐν τινι καὶ ὑπὸ
ἄλλον τινὸς θλιβόμενον.*

*Laat ondersteld worden, dat de
vloeistof van zoodanigen aard
is, dat van haar op hetzelfde
niveau liggende en aan elkaar
grenzende deelen het minder
sterk gedrukte wordt wegge-
stooten door het sterker ge-
drukte en dat elk van haar dee-
len wordt gedrukt door de vloeis-
tof die er loodrecht boven ligt,
indien de vloeistof niet ergens
in is opgesloten en niet door iets
anders gedrukt wordt.*

We zullen dit axioma eerst zonder commentaar of kritiek aanvaarden; de beteekenis ervan zal duidelijker zijn geworden, wanneer we het in de bewijzen der proposities zullen hebben zien toepassen en eerst daarna zullen enkele vragen, die het doet rijzen, met vrucht behandeld kunnen worden.

De eerste van de nu volgende proposities is zuiver geometrisch van aard; zij spreekt uit, dat een oppervlak, dat door alle platte vlakken, die een bepaald punt bevatten, gesneden wordt volgens

¹⁾ Vervolg van Jg. 17; blz. 265.

cirkels, die dat punt tot centrum hebben, een bol is. Dit resultaat wordt toegepast in

Propositie 2.

*Het oppervlak van iedere vloeistof, die zoo staat, dat ze onbewe-
gelijk blijft, zal de gedaante hebben van een bol, die hetzelfde
centrum heeft als de aarde.*

De figuur 152 stelt een doorsnede voor met een plat vlak door het aardcentrum K , dat het vloeistofoppervlak snijdt volgens $ABGD$. Is nu $ABGD$ geen cirkel, dan kiest men een voerstraal KB , zoodat

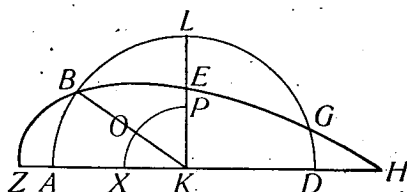


Fig. 152.

er onder de voerstralen van K naar de kromme $ABGD$ zoowel grootere als kleinere dan deze voorkomen en men beschrijft met K als centrum en KB als straal een cirkel $ZBEH$. Maak verder $\angle ZKB = \angle BKL$ en beschrijf om K als middelpunt een cirkel met straal $KX < KE$. Beschouw nu de gelijke oppervlakken XO en OP , die op hetzelfde niveau liggen en aan elkaar grenzen. XO wordt gedrukt door de vloeistof in $ABOX$, OP door de vloeistof in $OBLP$. Blijkbaar is de laatste hoeveelheid groter dan de eerste; zoodat de vloeistof blijkens het axioma niet in rust kan zijn. Is ze dus wel in rust, dan moet $ABGD$ een cirkel zijn met centrum K . Daar het snijvlak door K willekeurig is, volgt hieruit volgens Prop. 1, dat het oppervlak van een rustende vloeistof een boloppervlak is, waarvan het middelpunt met het aardcentrum samenvalt.

Propositie 3.

Van ruimtelijke lichamen zullen diegene, die evenzwaar zijn als de vloeistof, zoover in de vloeistof naar beneden gaan, dat de oppervlakken niet meer uitsteken boven dat der vloeistof en ze zullen niet verder naar beneden worden gevoerd.

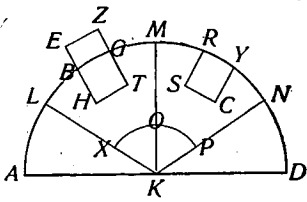


Fig. 153.

De figuur 153 stelt voor een doorsnede van vloeistof (AMD) en lichaam ($EZTH$) met een vlak door het aardcentrum K . Stel, dat het stuk $EZGB$ van het lichaam buiten de vloeistof uitsteekt. KLM is (de doorsnede van) een pyramide, waarvan de basis LM in het vloeistofoppervlak ligt, KMN is een hiermee congruente pyramide, XOP een deel van een boloppervlak met centrum K . $RYSC$ is een stuk vloeistof, congruent met $BGTH$. Nu wordt XO gedrukt door de vloeistof tusschen XO , LK en MK en buiten $BGTH$, alsmede door het lichaam $EZTH$; OP wordt gedrukt door de vloeistof $MNPO$, waarvan het deel buiten $RYCS$ evenzwaar is als het deel van $XOML$ buiten $BGTH$, terwijl $RYCS$ evenveel weegt als $BGTH$. XO wordt dus sterker gedrukt dan OP , nl. ook nog door $EZGB$, dus kan de vloeistof niet in rust zijn, in strijd met het onderstelde. Deze tegenstrijdigheid is op te heffen, door te onderstellen, dat EZ in LM valt. Er is echter geen reden, waarom het lichaam verder zal dalen; immers nu reeds is gelijkheid op even groote aangrenzende oppervlakken op gelijk niveau bereikt.

Propositie 4.

Van ruimtelijke lichamen zal een, dat lichter is dan de vloeistof, in de vloeistof geworpen, niet geheel inzinken, maar een deel ervan zal buiten het oppervlak der vloeistof uitsteken.

Met dezelfde beschouwingen als in Prop. 3 bewijst men (fig. 154), dat XO en OP ongelijk gedrukt zouden worden, als Z een lichaam was, congruent met een vloeistofdeel H , maar lichter dan dit.

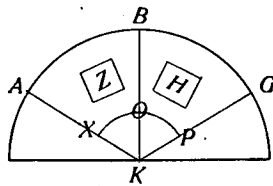


Fig. 154.

Propositie 5.

Van ruimtelijke lichamen zal een, dat lichter dan de vloeistof is, in de vloeistof geworpen, zoover inzinken, dat een volume der vloeistof, evengroot als het volume van het ondergedompelde deel, evenveel zwaarte heeft als het geheele lichaam.

Zij thans in fig. 153 $EZTH$ het gegeven lichaam, dat soortelijk lichter is dan de vloeistof, $RYCS$ een vloeistofdeel, congruent met

het ondergedompelde deel $BGTH$. Is de vloeistof nu in rust, dan moet de zwaarte van $EZTH$ gelijk zijn aan die van $RYCS$.

Propositie 6.

Lichamen, lichter dan de vloeistof, gedwongen in de vloeistof gebracht, worden omhoog gedreven met een zoodanige kracht, als de zwaarte bedraagt, waarmee een volume vloeistof, dat evengroot is als het lichaam, dat lichaam overtreft.

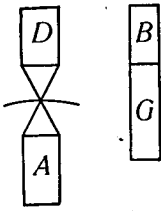


Fig. 155.

Zij (fig. 155) A het gegeven lichaam met gewicht B , terwijl $B + G$ het gewicht is van een hoeveelheid vloeistof, waarvan het volume gelijk is aan dat van A . D is een lichaam met gewicht G . Het samengestelde lichaam $A + D$ weegt minder dan een even groot volume vloeistof, omdat zijn gewicht, nl. $B + G$, gelijk is aan dat van een kleiner volume vloeistof, nl. dat van A . Het zal volgens

Prop. 4 zoover inzinken, dat A juist ondergedompeld is, omdat het evenveel weegt als een vloeistof, waarvan het volume gelijk is aan dat van A . De kracht, waarmee A omhoog wordt gedreven, is dus gelijk aan het gewicht van D , d.i. G , d.i. het verschil van de gewichten van een vloeistofvolume, gelijk aan dat van A en van A zelf.

Propositie 7.

Lichamen, zwaarder dan de vloeistof, in de vloeistof geworpen, zullen omlaag worden gevoerd, zoover ze kunnen dalen en ze zullen in de vloeistof zooveel lichter zijn als een deel van de vloeistof, van hetzelfde volume als het lichaam, zwaarte heeft.

Zij (fig. 156) A het gegeven lichaam met gewicht $B + G$, terwijl een evengroot volume vloeistof B weegt. Neem een lichaam D met gewicht B , zoodat een evengroot volume vloeistof een gewicht $B + G$ heeft. Vereenig nu A en D tot één lichaam met gewicht $2B + G$. Een even groot volume vloeistof weegt ook $2B + G$. A en D

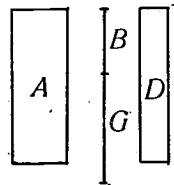


Fig. 156.

zullen dus samen zweven; D alleen zou volgens Prop. 6 omhoog worden gedreven met een kracht, gelijk aan G . G stelt dus ook de kracht voor, waarmee A alleen omlaag zou worden gevoerd, dus het gewicht van A in de vloeistof. A is dus in de vloeistof een bedrag B lichter dan daarbuiten.

Het is thans tijd, om de vraag naar de eigenlijke beteekenis van de door Archimedes gehouden hydrostatische redeneering aan de orde te stellen. Die vraag is niet onmiddellijk te beantwoorden; daarvoor is het geheele betoog, ondanks den schijn van volkomen gestrengheid, op te vage grondslagen opgebouwd; daarvoor staat het ook te ver af van de physische realiteit, waarop het toch betrekking moet hebben. Er is al dadelijk één moeilijkheid; waar is toch in al de boven vermelde proposities, die handelen over natuurverschijnselen, die zich voortdurend voor onze oogen op aarde afspelen, de aarde zelf gebleven? En het antwoord moet luiden: ze is weggedacht, omdat ze in die natuurverschijnselen geen rol speelt. Het eenige, wat men noodig heeft, is haar centrum, of liever het centrum der wereld, dat met het hare samenvalt. Om dat centrum hoopt zich, bij afwezigheid van aarde, het in zwaarte op haar volgend element, het water, op en in dat water spelen zich de te bestudeeren hydrostatische verschijnselen af.

Dit is alles volkomen Aristotelisch gedacht: zwaarte is een constante neiging van de zware lichamen naar een zeker punt in het heelal, waar de aarde weliswaar haar middelpunt heeft, maar dat doelpunt van het streven van al wat zwaar is blijft, als men de aarde uit haar centrale plaats verwijderd denkt.

Denk dit nu geschied en laat inplaats van de aarde alle water zich in een bol om het wereldcentrum vereenigd hebben. Denk het oppervlak van dezen bol verdeeld in een groot aantal gelijke deelen, die grondvlakken zijn van kegelvormige bolsectoren met het middelpunt als top. In al deze sectoren streeft het water naar beneden en in het centrum is een evenwichtsstand ingetreden onder invloed van al dat tegenstrijdige streven. Wat zal er nu gebeuren, wanneer in een van die sectoren het streven naar omlaag intenser wordt, doordat men er een ander lichaam bijbrengt? Het antwoord is met voldoende duidelijkheid uit de boven in de proposities gehouden redeneeringen af te leiden: als in één sector de druk toeneemt, moet de vloeistof in een anderen sector wijken.

Maar waarom in één, waarom niet in alle? En, zoo het slechts in één geschiedt, in welken dan? Archimedes vermijdt het op deze pijnlijke vragen rechtstreeks te antwoorden, doordat hij, eenigszins terugkeerend tot de in het bovenstaande zoo volkomen verloochende realiteit, niet de drukkingen in het centrum zelf beschouwt, maar op een boloppervlak om het centrum als middelpunt beschreven en

waarvan een horizontaal vlak in een vloeistof, die een vat vult, geacht kan worden deel uit te maken. Op dit boloppervlak nu neemt hij twee aan elkaar grenzende gelijke oppervlakken a en b aan en hij stelt zich nu blijkbaar voor, dat als de druk op a grooter is dan de druk op b , de vloeistof in den sector, die a als doorsnede heeft, die in den sector, waarin b ligt, via het wereldcentrum omhoog drukt. Wat er met de vloeistof in de andere sectoren gebeurt, of deze onbewegelijk wordt geacht, of dat ze ook wordt verplaatst, vernemen we niet; het axioma beperkt zich uitdrukkelijk tot aan elkaar grenzende oppervlakken op gelijk niveau.

De hier gegeven interpretatie van het hydrostatisch axioma van Archimedes wordt nog gesteund door de volgende overweging: In alle andere onderzoekingen, waarin statische beschouwingen een rol spelen (met name in de *Methode*, in *Evenwichten van vlakke figuren* en in *Quadratuur van de Parabool*) wordt, zooals voor de hand ligt, aangenomen, dat de verticalen, waarlangs de zware lichamen naar beneden streven, parallel zijn: het centrum der wereld wordt daardoor oneigenlijk en het wordt dan ook in geen van de genoemde werken vermeld. Nu echter, in Boek I van het werk *Drijvende Lichamen*, is dat plotseling anders: de verticalen zijn convergent en komen samen in het centrum der aarde; deze onderstelling wordt echter uitsluitend gemaakt in Boek I, waarin de fundamentele stellingen worden afgeleid; in Boek II, waarin zij worden toegepast, zijn de verticalen weer parallel. Wat zou den schrijver nu tot deze afwijking (die tevens een complicatie beduidt) hebben kunnen bewegen, als het niet de wensch was, begrijpelijk te maken, hoe verschijnselen, die in een vloeistofkolom plaats hebben, kunnen werken op een kolom, die naast de eerste ligt? Men bedenke wel, dat alle zwaarte verticaal omlaag streeft; als men

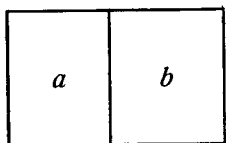


Fig. 157.

dat alleen weet en als men alle verticalen als parallel beschouwt, is het niet wel in te zien, hoe (fig. 157) een drukverschil op gelijk niveau in a en b beweging kan veroorzaken, ook niet, als men beide kolommen beneden den bodem van het vat voortgezet denkt.

Beschouwt men daarentegen de verticalen als convergent, dan is het ontstaan van beweging door drukverschil weliswaar evenmin onmiddellijk duidelijk, maar het wordt ineens begrijpelijk, als men, beide kolommen naar beneden voortzettend, ze ziet samenhangen

in het centrum van de wereld. Hoe dan datzelfde verschijnsel veroorzaakt wordt, als ze niet in dat punt samenhangen, maar door den bodem van een vat worden begrensd, blijft raadselachtig, maar een zoodanige begrenzing is dan ook door de in het axioma geformuleerde voorwaarde uitdrukkelijk uitgesloten. Zoolang het axioma wordt toegepast (dus in de Prop. 2—5) wordt de vloeistof geacht, zich tot het centrum van de wereld uit te strekken. In latere proposities worden dan slechts de verkregen resultaten over het gedrag van lichamen van verschillend soortelijk gewicht in een vloeistof toegepast. Archimedes had hierbij alleen nog moeten postuleeren, dat de hydrostatische verschijnselen in een vat met bodem dezelfde zijn als in een waterbol om het wereldcentrum.

Door de bovenstaande beschouwingen kan wellicht het axioma, waarop het werk *Drijvende Lichamen* steunt, eenigszins verhelderd zijn. Het eerste deel is weliswaar altijd begrijpelijk geweest, al was dan ook in de eerste editie van Heiberg de tekst ervan blijkbaar corrupt. Het tweede deel echter was in die editie geheel onbegrijpelijk: men las er, dat elk vloeistofdeel werd gedrukt door de vloeistof erboven, *indien* de vloeistof in een vat was opgesloten en door iets anders werd gedrukt. Voor dit *indien* is echter in de tweede editie op grond van den tekst van het palimpsest van Jeruzalem in de plaats gekomen *indien . . . niet*, een merkwaardig voorbeeld, hoezeer de beoefening van de geschiedenis van de wis- en natuurkunde afhankelijk is van het werk van de philologen, die ons de bronnen van het onderzoek moeten verschaffen.

Dit *indien . . . niet* moet blijkbaar niet zoo worden opgevat, dat het ontbreken van de genoemde omstandigheid noodig zou zijn voor de juistheid van de uitspraak; om dit te doen uitkomen, hebben we in de vertaling *tenzij* vermeden; er wordt alleen gepostuleerd, dat de voorwaarde voldoende is.

We merken ten slotte nog op, dat blijkens de geheele bovenstaande beschouwingen het begrip van den hydrostatischen druk, die in een bepaald punt van een vloeistof in constante grootte werkt, loodrecht op elk vlakje door dat punt, hoe ook geplaatst, aan Archimedes volkomen vreemd is; a fortiori is hem de hydrostatische paradox, waarvan men hem de kennis vroeger wel toeschreef, onbekend¹⁾.

¹⁾ Hierop is reeds de aandacht gevestigd door P. Duhem, *Archimède connaissait-il le paradoxe hydrostatique?* Bibl. Math. (3) I (1900), 15—19.

3. Wij zijn thans genaderd tot dat deel van het werk van Archimedes, dat, zoowel om het peil der verkregen resultaten, die schijnbaar geheel buiten het bereik der klassieke wiskunde liggen, als om het vernuft der toegepaste redeneeringen wel in de hoogste mate de bewondering van den modernen wiskundige verdienen. Het zijn de onderzoekingen over de verschillende standen, waarin een recht segment van een orthoconoïde in een vloeistof kan drijven en die het onderwerp vormen van tien proposities in het tweede boek van het werk *Drijvende Lichamen*.

We zullen in het volgende de in het origineel toegepaste wijze van uiteenzetting, die vaak zeer gecompliceerd en onoverzichtelijk is, vervangen door een korteren, meer analytisch geaarden betoogtrant en bovendien den samenhang der verschillende proposities beter in het licht stellen door eenheid in de notatie te brengen. Een nadeelig gevolg hiervan is, dat niet alle figuren lettertrouw zijn overgenomen, wat vergelijking met het oorspronkelijke bemoeilijkt.

We noemen dan in de volgende figuren, die steeds een asdoorsnede van het lichaam voorstellen:

van het lichaam zelf: den top O , den diameter van het grondvlak in het vlak van teekening AB , het midden daarvan Γ , het zwaartecentrum Z (waarbij dus $OZ = 2 Z\Gamma$).

van het onder de vloeistof gedompelde deel, voorzoover dit zelf een segment van een orthoconoïde is: den top (d.w.z. het punt met horizontaal raakvlak) T , de doorsnede van het grondvlak met het vlak van teekening ΔE , het midden daarvan N , het zwaartecentrum M (waarbij dus $TM = 2 MN$).

de halve orthia van de orthotome AOB , volgens welke het vlak van teekening het lichaam snijdt: Π .

de verhouding van de gewichten van het lichaam en van een even groot volume vloeistof (dus de verhouding der soortelijke gewichten): s ; steeds wordt ondersteld $s < 1$.

K : een punt op het lijnstuk OZ , zoodat $ZK = \Pi$.

H : het punt van TN , waarvan de projectie op de as K is.

I : de projectie van T op de as.

A : het punt, waarin de lijn, welke de orthotome AOB in T raakt, het verlengde van de as ontmoet (zoodat dus $OI = OA$; III; 2,2).

We stellen verder $O\Gamma = h$, $TN = k$.

4. De weer te geven theorie steunt in hoofdzaak op twee grondstellingen, waarvan de eene in Boek I als axioma wordt uitgesproken, terwijl de andere het onderwerp vormt van de eerste propositie van Boek II.

Het axioma, dat op Prop. 7 van Boek I volgt, zegt:

ὁποκείσθω, τῶν ἐν τῷ ὕγρῳ ἄνω φερομένων ἕκαστον ἀνα- φέρεσθαι κατὰ τὰν κάθετον τὰν διὰ τοῦ κέντρου τοῦ βάρους αὐτοῦ ἀγμέναν.	Laat ondersteld worden, dat ieder lichaam, dat in de vloeistof omhoog wordt gedreven, omhoog gedreven wordt langs de verticaal door zijn centrum der zwaarte getrokken.
---	--

Bedoeld wordt het zwaartecentrum van het onder de vloeistof gedompelde deel.

De propositie handelt over een lichaam, dat in een vloeistof drijft:

Propositie 1.

Indien een lichaam, lichter dan de vloeistof, in de vloeistof wordt geworpen, zal het tot de vloeistof de verhouding in zwaarte hebben, die het ondergedompelde deel tot het geheel heeft.

Bewijs (fig. 158): Zij, van het lichaam met volume $A + F$, A het volume van het ondergedompelde deel. Beschouw een hoeveelheid vloeistof, waarvan het volume $N + I$ gelijk is aan dat van het lichaam en wel zoo, dat $N = F$, $I = A$. Zij B het gewicht van het lichaam, O dat van de vloeistof N , R dat van I . Dan geldt

$$[\text{gewicht } (F + A), \text{ gewicht } (N + I)] = (B, O + R)$$

Wegens Prop. 5 van Boek I

$$R = B.$$

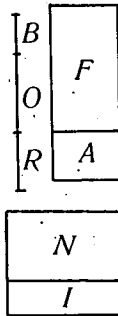


Fig. 158.

Dus

$$[\text{gewicht } (F + A), \text{ gewicht } (N + I)] = (R, O + R) = (I, N + I) \\ = (A, F + A)$$

5. Om nu de standen te zoeken, waarin het lichaam stabiel kan drijven, wordt eerst als noodige voorwaarde gesteld, dat de zwaartecentra Z en M in eenzelfde verticaal moeten liggen; bovendien moet het lichaam zoover ondergedompeld zijn, dat het gewicht van de verplaatste vloeistof gelijk is aan dat van het lichaam.

6. In de eerste plaats kan nu worden nagegaan, in welk geval het lichaam voor iedere waarde van s (mits natuurlijk steeds < 1) met verticale as stabiel kan drijven. Z en M liggen dan reeds in dezelfde verticaal. Laat men nu de as aan den bovenkant naar links hellen en kiest men de bovenomschreven diepte van indompeling (waarbij dus de diameter van het ondergedompelde segment k bedraagt), dan is voor stabiliteit noodig en voldoende, dat M nu links van de verticaal door Z ligt. Dit is zeker het geval, wanneer de top T van het ondergedompelde scheeve segment al links van die verticaal ligt. Deze stand is in fig. 159 afgebeeld. Volgens een bekende eigenschap van de subnormaal van een orthotome (III; 2,24) is nu

$$I\Omega = II$$

Opdat nu T links van de verticaal door Z ligt, is noodig en voldoende

$$O\Omega > OZ$$

Hiervoor is voldoende

$$I\Omega \geq OZ$$

of

$$II \geq \frac{2}{3}h$$

of

$$h \leq \frac{3}{2}II$$

Hierdoor is nu begrijpelijk gemaakt, hoe Archimedes tot de eerste stelling over het drijvende orthoconoidsegment kan zijn gekomen, die hij in Boek II als volgt uitspreekt:

Propositie 2.

Wanneer een recht segment van een orthoconoïde een as heeft, die niet grooter is dan anderhalf maal het stuk-tot-de-as²⁾, dan zal het, zoo in de vloeistof geplaatst, dat zijn basis de vloeistof niet raakt, als het hellend gezet wordt, niet hellend blijven, maar zich rechtop plaatsen, welke verhouding het in zwaarte ook tot de vloeistof heeft³⁾.

²⁾ Dit beduidt de halve orthia; zie III; I, 4.

³⁾ Natuurlijk is hier bedoeld, dat het lichaam soortelijk lichter moet zijn dan de vloeistof.

Bewijs (fig. 159): Laat de koorde ΔE in het vloeistofniveau liggen. De lijn door T parallel met de as gaat door het midden N van ΔE (III; 2,33). De zwaartecentra Z en M zijn bepaald door de betrekkingen

$$OZ = 2 ZI \quad TM = 2 MN$$

Het zwaartecentrum Φ van het boven de vloeistofspiegel uitstekende deel ligt op het verlengde van MZ .

Nu is

$$\frac{3}{2}OZ = OI \leq \frac{3}{2}II \quad \text{dus } OZ \leq II$$

Wegens $I\Omega = II$ is $OZ \leq I\Omega < O\Omega$

dus de hoek van ZT met de horizontale raaklijn T is scherp. De verticaal door Z treft dus de horizontale raaklijn van T in een punt tusschen T en A . Denk nu ook de verticalen door M en Φ getrokken.

Het buiten de vloeistof gelegen deel zal nu naar beneden worden gedreven langs de verticaal door Φ . Ondersteld is namelijk, dat ieder zwaar lichaam naar beneden wordt gevoerd langs de verticaal door het centrum. Het deel binnen de vloeistof echter zal, daar het lichter is dan de vloeistof, omhoog worden gedreven, langs de verticaal door M . Daar de deelen van het lichaam nu niet langs dezelfde verticaal tegen elkaar in worden gedrukt, zal de figuur niet blijven staan, maar het deel aan den kant van A zal omhoog worden gedreven, dat aan den kant van B naar beneden en dit zal steeds door gebeuren, totdat het lichaam rechtop staat.

Door de in de propositie uitgesproken voorwaarde, dat het grondvlak van het segment den vloeistofspiegel niet mag raken, wordt gewaarborgd, dat het ondergedompelde deel ook een (scheef) segment der orthoconoïde is. De voorwaarde is steeds te vervullen, door de helling van OI ten opzichte van de verticaal klein genoeg te nemen.

In Prop. 3 wordt de stelling nogmaals bewezen, nu voor het geval, dat het lichaam met den top naar boven drijft en het grondvlak geheel onder de vloeistof is gedompeld.

7. In Prop. 2 was aan de as van het segment de voorwaarde

$$h \leq \frac{3}{2}II.$$

opgelegd. De as mag dus niet te lang zijn, wil het lichaam voor iedere waarde van s (< 1) rechtstandig stabiel drijven. Deze

vloeistof een reden heeft, die niet kleiner is dan de reden, die het vierkant van het bedrag, waarmee de as anderhalfmaal het stuk-tot-de-as overtreft, tot het vierkant van de as heeft, dan zal het, zoo in de vloeistof geplaatst, dat zijn basis de vloeistof niet aanraakt, als het hellend gezet wordt, niet hellend blijven, maar zich rechtop plaatsen.

We zullen het synthetische bewijs hiervan, dat zich naar inhoud van de boven gegeven analytische afleiding niet onderscheidt, weglaten en ook Prop. 5 laten rusten, waarin het analoge geval wordt behandeld, dat het lichaam met den top naar boven drijft en de basis geheel ondergedompeld is. Het resultaat in dit geval is, dat voor stabiel evenwicht met verticale as bij geldigheid der voorwaarde $h > \frac{3}{2}II$ voldoende is, dat

$$s \leq \frac{h^2 - (h - \frac{3}{2}II)^2}{h^2}.$$

8. We bespreken nu eerst Prop. 8. Hierin wordt de voorwaarde

$$s \geq \frac{(h - \frac{3}{2}II)^2}{h^2}$$

die in Prop. 4 was gesteld, losgelaten. De onderstellingen zijn nu dus

$$h > \frac{3}{2}II \text{ en } s < \frac{(h - \frac{3}{2}II)^2}{h^2}$$

Het blijkt nu, dat het soortelijk lichter geworden lichaam niet meer stabiel met verticale as kan drijven. Men heeft immers nu de fig. van Prop. 4 (fig. 160) zoo te wijzigen, dat

$$\frac{k^2}{h^2} = s < \frac{(h - \frac{3}{2}II)^2}{h^2} \text{ dus } k < h - \frac{3}{2}II.$$

of

$$\frac{2}{3}k < \frac{2}{3}h - II$$

d.w.z.

$$TM < OZ - II$$

of, wegens $I\Omega = KZ$,

$$TM < OZ - KZ = OK.$$

Wordt nu TM zelfs kleiner dan IK , dan is $TM < TH$, dus ligt M rechts van de verticaal door Z . Dit geschiedt echter reeds bij een

Hierdoor is de waarde van α bepaald, waarbij evenwicht mogelijk is. Nu moet worden nagegaan, of dit evenwicht stabiel is.

Denk hiertoe α (d.i. de hoek van de as met den horizon) vervangen door een hoek $\alpha_1 > \alpha$.

Men heeft nu

$$\cot^2 \alpha_1 < \cot^2 \alpha$$

dus

$$\frac{AI^2}{TI^2} < \frac{\frac{2}{3}(h-k) - \Pi}{\frac{1}{2}\Pi}$$

Het eerste lid is gelijk aan

$$\frac{4OI^2}{2\Pi \cdot OI}, \text{ dus aan } \frac{OI}{\frac{1}{2}\Pi}$$

en men vindt dus

$$OI < \frac{2}{3}(h-k) - \Pi$$

dus

$$IK = OZ - KZ - OI = \frac{2}{3}h - \Pi - OI > \frac{2}{3}h - \Pi - \frac{2}{3}(h-k) + \Pi = \frac{2}{3}k = TM$$

dus is

$$TM < TH.$$

M ligt dus rechts van de verticaal door Z en de as keert dus terug tot den evenwichtsstand. Hetzelfde blijkt het geval te zijn, als men $\alpha_1 < \alpha$ onderstelt, zoodat $TM > TH$ wordt.

Wat we hier door een in moderne symbolen ingekleede analyse hebben gevonden, blijkt geheel overeen te stemmen met wat Archimedes uitspreekt in Prop. 8. Alleen wordt hierin nog aan de lengte van de as een voorwaarde opgelegd, waarop we terug moeten komen.

Propositie 8.

Wanneer een recht segment van een orthoconoïde een as heeft, die grooter is dan anderhalfmaal het stuk-tot-de-as, maar kleiner dan dat zij tot het stuk-tot-de-as de verhouding zou hebben, die vijftien heeft tot vier en wanneer het verder in gewicht tot de vloeistof een kleinere reden heeft dan die het vierkant van het bedrag, waarmee de as anderhalfmaal het stuk-tot-de-as overtreft, tot het vierkant van de as heeft, dan zal het, zoo in de vloeistof geplaatst, dat de basis de vloeistof niet raakt, zich niet rechtop plaatsen en ook niet in hellenden stand blijven, behalve wanneer zijn as met het

oppervlak van de vloeistof een hoek maakt gelijk aan een, die nader omschreven zal worden.

Archimedes begint met den bedoelden hoek te construeeren. Hij neemt een lijnstuk $\beta\delta = h$, verdeelt dit in κ zoo, dat $\beta\kappa = \frac{2}{3}\delta$, maakt $\kappa\rho = \Pi$ en $\beta\tau = \frac{3}{2}\beta\rho$, waardoor dus $\tau\delta = \frac{3}{2}\kappa\rho$. Een tweede lijnstuk $\varphi + \chi$ (waarbij $\varphi = 2\chi$) wordt nu zoo bepaald, dat

$$[\mathbf{T}(\varphi + \chi), \mathbf{T}(\beta\delta)] = s < [\mathbf{T}(h - \frac{3}{2}\Pi), \mathbf{T}(h)]$$

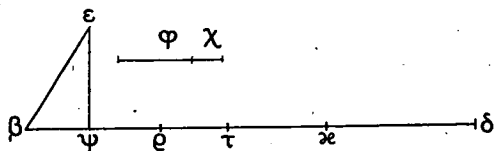


Fig. 162.

waaruit volgt

$$\varphi + \chi < h - \frac{3}{2}\Pi = \beta\delta - \delta\tau = \beta\tau$$

dus

$$\varphi < \frac{2}{3}\beta\tau = \beta\rho.$$

Maak nu $\rho\psi = \varphi$ en construeer $\varepsilon\psi$ loodrecht op $\beta\delta$; zoodat

$$\mathbf{T}(\psi\varepsilon) = \frac{1}{2}\mathbf{O}(\kappa\rho, \beta\psi),$$

dan is $\angle \varepsilon\beta\psi$ de hoek, dien de as van het segment met den horizon moet maken, wil het lichaam stabiel drijven.

Blijkbaar is deze hoek geen andere dan die boven α werd genoemd. Immers men heeft hier

$$\frac{(\varphi + \chi)^2}{h^2} = s = \frac{k^2}{h^2}$$

dus

$$\varphi + \chi = k$$

Dus is

$$\beta\psi = \beta\rho - \frac{2}{3}k = \frac{2}{3}h - \Pi - \frac{2}{3}k = \frac{2}{3}(h - k) - \Pi$$

dus

$$\varepsilon\psi^2 = \frac{1}{2}\Pi[\frac{2}{3}(h - k) - \Pi]$$

en dus

$$\cot^2 \angle \varepsilon\beta\psi = \frac{\frac{2}{3}(h - k) - \Pi}{\frac{1}{2}\Pi}$$

in overeenstemming met de betrekking (3) voor α .

Men ziet, dat Archimedes, op het woord cotangens na, den verlangden hoek geheel langs trigonometrischen weg bepaalt. Het verdere bewijs is nu eenvoudig een omkeering van de boven gegeven analyse.

9. We hebben nu alleen nog na te gaan, welke de beteekenis is, die de voorwaarde

$$h < \frac{15}{4} \Pi$$

bij dit alles heeft; in het bewijs is namelijk van deze betrekking schijnbaar geen gebruik gemaakt. Toch zou het niet van kracht zijn, indien aan deze betrekking niet voldaan was. Immers de redeneering zou spaak loopen, wanneer het ondergedompelde deel eens niet meer een scheef segment der orthoconoïde was, dus wanneer de basis ten deele onder de vloeistof was gedompeld (men zou dan nl. niet meer kunnen schrijven $s = \frac{k^2}{h^2}$ enz.). Er moet dus een voorwaarde worden gesteld, die voldoende is, om dit te verhinderen. Dat geschiedt in Prop. 6, waarin bewezen wordt, dat voor $h < \frac{15}{4} \Pi$ (en steeds $> \frac{3}{2} \Pi$) het lichaam vanuit den stand, waarin de grondcirkel den vloeistofspiegel raakt, zich op zal richten en dat de rand dus geheel buiten de vloeistof uit gaat steken.

We geven weer de analyse van het bewijs (fig. 163).

Laat dus het grondvlak der orthoconoïde in A aan den vloeistofspiegel raken, dan zal het lichaam zich oprichten, wanneer in dezen stand M links van ZH ligt. Dat geschiedt, wanneer $TH < TM$

of m.a.w. $\frac{TN}{TH} > \frac{3}{2}$.

We brengen deze verhouding over op de as. Volgens een hieronder te behandelen lemma is

$$\frac{TN}{TH} \geq \frac{IK}{OK}$$

Aan den gestelden eisch is dus zeker voldaan, als

$$\frac{IK}{OK} > \frac{3}{2} \quad \text{of} \quad \frac{OK}{OI} < \frac{2}{5}.$$

Men heeft dan $OK < \frac{2}{5} h$ en daar $OZ = \frac{2}{3} h$, is $\Pi = ZK > \frac{4}{15} h$.

Het synthetische bewijs geeft, uitgaande van deze voorwaarde, de redeneering in omgekeerde richting.

Andermaal moet de omvang van „Euclides” verminderd worden met 40% van het aantal bladzijden van jaargang 19, zodat er slechts ongeveer 7 vel over blijft.

In deze aflevering wordt het bekende artikel van Dr E. J. Dijksterhuis voortgezet. Er was zoveel copy, die eerst geplaatst moest worden, dat „Archimedes” wat in het gedrang kwam. De redactie biedt hierbij den schrijver en den lezers haar verontschuldiging aan voor de verlate verschijning.

De redactie houdt zich aanbevolen voor artikelen en in het bijzonder voor „Korrels”; de laatste vormden jaren lang een aardig hoekje in Euclides. Laten de tijden van hevige beroeringen, die wij allen beleven, geen reden zijn tot geestelijke inzinking.

Ter perse:

MIDDEL-ALGEBRA

3e druk

De nieuwe druk wordt in twee delen uitgegeven; het eerste verschijnt in October 1943.

De aanvulling bestaat uit hoofdstukken over
Splitsing van breuken.

Reeksen met complexe termen.

Wederkerige reeksen.

Gelijkmatige convergentie.

Afleiding van reeksen.

Kettingbreuken,

zodat beide delen samen de volledige stof voor K I zullen bevatten en tevens alles, wat studenten nodig hebben als voorbereiding tot de Analyse.

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN-BATAVIA

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH

DIRECTEUR VAN DE R.H.B.S. TE AMERSFOORT

- | | |
|--------------------|--------------------------|
| I. Dertiende druk. | 156 blz. 21 fig. f 2,25* |
| II. Twaalfde druk. | 204 blz. 50 fig. f 2,25* |
| III. Achtste druk. | 198 blz. 60 fig. f 2,25* |

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Vierde druk. 164 blz. 20 fig. f 2,00.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

V α en VI α Nieuwe Schoolalgebra III α

V β en VI β Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Voor leraren, die deze boeken gebruiken, antwoorden gratis en franco; de uitgewerkte log. vraagstukken in vier en vijf dec. gratis alleen bij P. Wijdenes, Amsterdam Z.; deze uitwerkingen zijn niet in de handel.



Uitgave P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhande .

Verantwoordelijk voor de gehele inhoud:

P. Wijdenes te Amsterdam, Jacob Obrechtstraat 88.

Uitgever: P. Noordhoff N.V. te Groningen. Verantwoordelijk voor de advertentiën Drs F. C. Noordhoff.

Versijnt ongeregeld. Abonnementsprijs f 6,30* per jaar.

Prijs per nummer f 1,55*.

Drukker: Drukkerij Gebroeders Hoitsema te Groningen. K 1219.