

GRONINGEN-NUMMER 1942

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOOT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - DR. E. W. BETH, AMERSFOORT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - DR. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
DR. J. HAANTJES, AMSTERDAM - DR. C. DE JONG, LEIDEN
DR. J. POPKEN, TER APEL - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. DE VAERE, BRUSSEL
DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM.

19e JAARGANG 1942

Nr. 1, 2

Prijs per Jaargang f 6.30*. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.
--

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6,30*) zijn ingetekend, betalen f 5,25*.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en **Wimecos** (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van **Wimecos** storten hun contributie van f 1,00 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Tweede vacatiecursus wiskunde aan de Rijks-Universiteit te Groningen	1
Prof. Dr. J. G. VAN DER CORPUT, Over meetkundige plaatsen in de analytische meetkunde	2
Dr. J. C. H. GERRETSEN, Niet-Archimedische meetkunde	14
Prof. Dr. G. SCHAAKE, Over de stelling van Pappus	27
Prof. Dr. F. ZERNIKE, Machines als hulpmiddelen in de wiskunde	40
Boekbespreking	58
Ingekomen boeken	60
Ontwerp Normaalblad voor de Beschrijvende meetkunde . . .	61
Dr. E. W. BETH, Hoofdstukken uit de moderne formele logica .	63

 In deze aflevering vinden de intekenaars een exemplaar van normaalblad 1267 met de **SYMBOLEN VOOR DE WISKUNDE**. Wegens te late levering kon dit blad niet meer ingelegd worden in de aflevering van de vorige jaargang, waarin een bericht over dit normaalblad werd opgenomen.

TWEEDE VACANTIECURSUS WISKUNDE AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE GRONINGEN.

Op 15 April 1942 werd aan de Rijks-Universiteit te Groningen de tweede vacatiecursus Wiskunde gehouden. Het programma was als volgt samengesteld:

1. Prof. Dr. J. G. van der Corput, *Meetkundige plaatsen in de analytische meetkunde.*
2. Dr. J. C. H. Gerretsen, *Niet-Archimedische meetkunde.*
3. Prof. Dr. G. Schaake, *De stelling van Pappus.*
4. Prof. Dr. F. Zernike, *Machines als hulpmiddelen in de wiskunde.*

De belangstelling overtrof verre de verwachting, het aantal hoorders bedroeg ruim 80. Hieruit mag dus wel de gevolgtrekking gemaakt worden, dat door de vacatiecursussen in een behoefte wordt voorzien.

Voor wensen aangaande te behandelen onderwerpen wende men zich tot ondergetekende.

J. G. van der Corput.

EERSTE VOORDRACHT.

OVER MEETKUNDIGE PLAATSEN IN DE ANALYTISCHE MEETKUNDE

DOOR

J. G. VAN DER CORPUT.

Enige jaren geleden, op een examentournee door Nederland zwerfend, heb ik een artikeltje geschreven over de methode van eliminatie van parameters in de analytische meetkunde. Daarna deed ik iets verdienstelijks: het manuscript heb ik verscheurd. Ik dacht: waarom moet ik het nu juist zijn, die deze voor de hand liggende opmerkingen maak? Binnenkort zal er wel iemand anders komen, die dit zaakje opknapt.

Met dat al zijn we nu tien of twaalf jaren verder en werpen bij het gymnasiale eindexamen de kandidaten zich nog steeds, zoal niet met geestdrift, dan toch met grote gretigheid op deze door hen braaf geleerde methode. Ik waardeer dat, ook al wordt de methode toegepast in gevallen, waar ze omslachtig, onoverzichtelijk en onvolledig is. Dat daarbij vaak ongelukken gebeuren, moeten we op de koop toenemen. Jaren geleden werd eens bij het eindexamen der gymnasia een meetkundige plaats gevraagd, die uit een rechte lijn en nog wat bestond. Dat nog wat, hetwelk de hoofdzaak was, ben ik intussen weer vergeten. Een knaap, veroordeeld in dat jaar eindexamen te doen, voerde veranderlijke parameters in. Al eliminerende verloor hij onderweg per ongeluk de rechte lijn, hetgeen hem nauwelijks kwalijk te nemen was. Toch had hij blijkbaar het gevoel, dat hij ons — den leraar en den gecommitteerde — iets te kort deed; althans, een andere lijn gaf hij ons gratis. Maar wat nu? Wat hij vond, was geen deel van de gezochte meetkundige plaats, en de meetkundige plaats was geen deel van wat hij vond. Wat moesten wij doen? Natuurlijk kreeg het slachtoffer voor dit vraagstuk van ons een hoog cijfer. Dat nog wat, waar het om ging en dat ik intussen vergeten ben, had hij; de methode van de eliminatie der parameters had hij toegepast, zoals hij die geleerd had en de rechte lijnen, waarmede hij had zitten haspelen, waren

van die buitenbeentjes, waarvan je eigenlijk nooit weet, of ze meegeteld moeten worden of niet.

Hoe zit dat? Laat ik ter toelichting het tweede vraagstuk behandelen, dat in 1941 bij het gymnasiale eindexamen voor trigonometrie en analytische meetkunde opgegeven is. Het eerste gedeelte van die opgave luidt als volgt:

Op de rechte $x + y = 0$ ligt een veranderlijk punt P . De projectie van P op de vaste rechte $y = k$ heet Q . Bepaal de meetkundige plaats van het snijpunt van OQ en AP , als O de oorsprong, A het punt $(0, a)$ voorstelt.

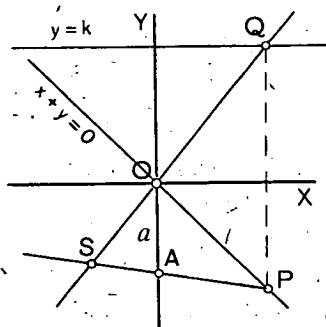


Fig. 1.

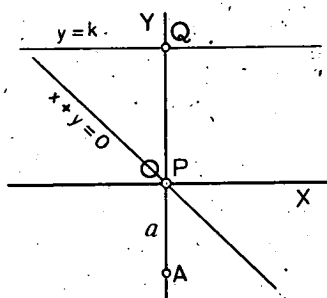


Fig. 2.

De vraag, die ik me nu stel, is deze: is de y -as een stuk van de gevraagde meetkundige plaats of niet?

Waarom m.i. van den candidaat geen volledig antwoord op deze vraag verlangd kan worden, blijkt uit het volgende betoog.

Laten we eerst het geval behandelen, dat a en k beide van nul verschillen. Valt P met de oorsprong samen, dan zijn Q en A twee op de y -as gelegen punten, die wegens $k \neq 0$ en $a \neq 0$ geen van beide met de oorsprong samenvallen; zowel OQ als AP valt dan langs de y -as. Wat is nu „het” snijpunt van OQ en AP ? Er staat „het”, we hebben te maken met het bepalend lidwoord. Volgens mij verdient het aanbeveling, dat de leraar bij zijn onderwijs er de aandacht op vestigt, dat in zulk een geval het bepalend lidwoord, in strijd met het taalgebruik, iets aanduidt, dat *niet* bepaald is. Onder „het” snijpunt van twee samenvallende lijnen versta ik elk punt van die gemeenschappelijke lijn. Volgens die afspraak vind

ik, als k en a beide ongelijk nul zijn, dat de y -as deel uitmaakt van de gezochte meetkundige plaats.

Maar ik kan me voorstellen, dat een leraar die zienswijze niet deelt. Hij kan als volgt redeneren: wordt in een opgave gesproken over „het” snijpunt, dan moet dat punt ondubbelzinnig gedefinieerd kunnen worden. Het geval, dat OQ en AP langs elkaar vallen, moet ik dus buiten beschouwing laten of ik moet in zo'n geval het snijpunt op de een of andere manier, bijvoorbeeld door grensovergang, vastleggen. Het is duidelijk, dat deze laatste opvatting twee zeer ernstige bezwaren heeft: vooreerst baart ze den leerlingen vele moeilijkheden en bovendien is het lastig het algemene principe scherp te formuleren. Praktisch zou dit standpunt dus daarop neerkomen, dat het geval, waarin OQ en AP langs elkaar vallen, buiten beschouwing gelaten wordt, maar ook deze opvatting heeft een bezwaar; op dat bezwaar kom ik straks terug. Hoe het ook zij, eisen we bepaaldheid bij gebruik van het bepalend lidwoord, dan is bij het hierboven geformuleerd vraagstuk in het geval $k \neq 0$ en $a \neq 0$ de y -as geen deel van de gezochte meetkundige plaats.

Doch we zijn er nog niet. Hoe zit het met het geval $a = 0$ en $k \neq 0$? Valt P met de oorsprong samen, dan is „de” lijn AP onbepaald; iedere door de oorsprong gaande rechte kan de lijn AP voorstellen. OQ is weer de y -as. Wat is nu „het” snijpunt van OQ

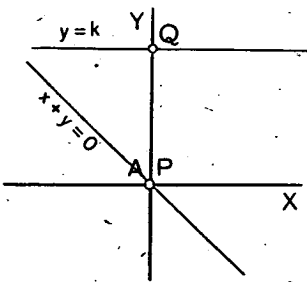


Fig. 3.

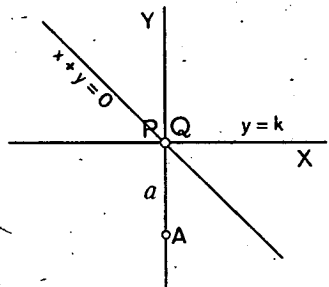


Fig. 4.

met „de” onbepaalde lijn AP ? Om consequent te blijven, redeneer ik als volgt: de onbepaalde rechte AP kan langs de y -as vallen en „het” snijpunt van die as met de lijn OQ is een willekeurig op de y -as gelegen punt. Volgens onze afspraak is dus ook in het geval $a = 0$ en $k \neq 0$ de y -as een deel van de gezochte meetkundige plaats. Hetzelfde resultaat vinden we, als $a \neq 0$ en $k = 0$ is.

Met het geval $a = k = 0$ is het nog gekker gesteld. In dat geval heeft, als P met de oorsprong samenvalt, iedere door de oorsprong gaande rechte de pretentie zowel „de” rechte OQ als „de” rechte AP voor te stellen. Willen we consequent blijven, dan moeten we dus zeggen: in het geval $a = k = 0$ behoren alle punten van het platte vlak tot de gezochte meetkundige plaats.

Ik ben geen beul en eis niet van de examinandi, dat ze deze wijsheid verkondigen, maar waar blijft de grens? Beter ware het geweest, als het geval $k = 0$ en ook het geval $a = 0$ uitdrukkelijk buitengesloten waren, te meer waar aan het slot van de opgave nog afzonderlijk gevraagd wordt, wat de meetkundige plaats voor $a = -k$ wordt.

Na deze uitweiding, even overbodig als de rest van het artikel, kom ik op het bezwaar, dat ik in vele gevallen koester tegen de eliminatiemethode.

Stel onze zwoegende examinandus voert twee veranderlijke parameters p en q in. Hij kent zijn lesje: hij weet, dat hij dan drie betrekkingen moet hebben, waarin behalve de parameters p en q ook nog voorkomen de coördinaten ξ en η van het punt, waarvan de meetkundige plaats wordt gevraagd. Stel, hij is er in geslaagd die drie relaties te vinden. Laten we aannemen, dat die betrekkingen een voldoende en noodzakelijk stel vormen, m.a.w.: voldoen de vier grootheden ξ , η , p en q aan deze drie relaties, dan behoort het punt (ξ, η) tot de gezochte meetkundige plaats en omgekeerd: bij elk punt (ξ, η) van de meetkundige plaats zijn twee parameters p en q te vinden zódanig, dat de drie relaties gelden. Maar wat nu? Ijverig gaat de leerling met deze drie betrekkingen jongleren. In zijn overmaat van ijver loopt hij gevaar ξ en η in de parameters p en q uit te drukken, maar ik wil aannemen, dat hij een behoorlijk leraar gehad heeft, die hem ernstig tegen deze geheel onnodige stap heeft gewaarschuwd. Hoe het ook zij, ten slotte vindt hij — U ziet, dat ik het goed met hem meen — een betrekking $T = 0$, waarin de parameters p en q niet voorkomen. Natuurlijk krijgen we dan triomfantelijk te horen: aha, de kromme met de vergelijking $T = 0$ is de gevraagde meetkundige plaats. Wie waarborgt ons echter, dat dit het geval is? We weten alleen: is (ξ, η) een punt van de gezochte meetkundige plaats, dan is het mogelijk de parameters p en q zó te kiezen, dat de drie relaties gelden, zodat dan ook aan de betrekking $T = 0$ voldaan is, m.a.w. elk punt van de meetkundige plaats voldoet aan de betrekking $T = 0$. De gezochte

meetkundige plaats is dus zeker een deel van de kromme $T=0$. Wie geeft ons nu de waarborg, dat omgekeerd elk punt van deze kromme tot de gezochte meetkundige plaats behoort? Die waarborg kan ons niemand geven, want in vele gevallen is het ook niet zo. In ieder speciaal geval zou de leerling moeten onderzoeken of bij elk punt (ξ, η) van de kromme $T=0$ twee parameters p en q bepaald kunnen worden zo, dat de drie relaties werkelijk vervuld zijn. Ik verzeker U, die taak is geen prettig karweitje; vooral niet, als men drie opgaven vóór zich heeft, die binnen twee uur af moeten zijn. Te Uwer geruststelling kan ik U mededelen, dat ik nog nooit een examinandus ontmoet heb, die neigingen in die richting vertoonde of die door zijn leraar die kant uit gedreven werd.

Tot zover de afbrekende critiek, maar nu ga ik opbouwen. Hoe moet het dan wel?

Was ik leraar, dan zou ik de theorie der meetkundige plaatsen in de analytische meetkunde als volgt geven. Met ξ en η duid ik de coördinaten van het punt aan, waarvan de meetkundige plaats gevraagd wordt. Die meetkundige plaats wordt door een zekere eigenschap gedefinieerd. Alle in die eigenschap voorkomende grootheden druk ik uit in de parameters ξ en η . Door substitutie van die waarden in de genoemde eigenschap vind ik een betrekking tussen de parameters ξ en η en die betrekking is een noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat het punt (ξ, η) tot de beschouwde meetkundige plaats behoort. Zo vinden we direct de vergelijking van de meetkundige plaats.

Wat is het verschil tussen deze methode en die van onzen ijverigen candidaat? Laatstgenoemde drukt eerst alles, voor zover nodig, uit in de parameters p en q en daarna smijt hij, hoogst ondankbaar, zijn helpers de deur uit. Ik heb hun hulp niet nodig; ik doe het met de parameters ξ en η af, maar die mogen en moeten zelfs in de apotheose optreden. Het kan gebeuren, dat een van die twee op het laatste nippertje stilletjes wegsliipt (hetgeen dan in de regel consternatie bij den leerling veroorzaakt), maar dan kan de andere in het slottableau niet worden gemist.

Nu de praktijk. Vooreerst behandel ik het hierboven geformuleerde vraagstuk, dat in 1941 bij de gymnasia is opgegeven.

Is (ξ, η) een punt S van OQ, dan is de abscis van Q (en dus ook die van P) gelijk aan $\frac{k\xi}{\eta}$, tenminste als $\eta \neq 0$ is. De ordinaat van

P is dan $-\frac{k\xi}{\eta}$. Het punt S behoort dan en alleen dan tot de gevraagde meetkundige plaats, indien het aldus gevonden punt P met de punten A en S op één rechte lijn ligt. Deze eigenschap luidt in formule:

$$(1) \dots \xi\{k\xi + (a + k)\eta - ak\} = 0.$$

Deze vergelijking geeft dus de meetkundige plaats aan van de snijpunten (ξ, η) met $\eta \neq 0$.

Bepalen wij nu verder de tot de gezochte meetkundige plaats behorende punten met $\eta = 0$. Is (ξ, η) een op OQ liggend, doch

niet met de oorsprong samenvallend punt met $\eta = 0$, dan is $\xi \neq 0$ en dan valt OQ langs de x-as; het punt Q ligt in het oneindige, als $k \neq 0$ is en Q is onbepaald, als $k = 0$ is. Is $k \neq 0$, dan behoort S dan en alleen dan tot de gevraagde meetkundige plaats, indien de door A evenwijdig aan de rechte $x + y = 0$ getrokken lijn door S gaat; d.w.z. dan en alleen dan, als $\xi = a$ is; deze relatie is wegens $\xi \neq 0$, $\eta = 0$ en $k \neq 0$ equivalent met (1).

Is daarentegen $k = 0$, dan kan men het onbepaalde punt P steeds zo kiezen, dat A, S en P op een rechte lijn liggen, zodat het punt S dan automatisch tot de meetkundige plaats behoort; men merke op, dat in dit geval formule (1) geldt wegens $\eta = k = 0$.

Ten slotte moeten wij onze aandacht aan de oorsprong wijden. Zoals we hierboven gezien hebben, bevat de gezochte meetkundige plaats de gehele y-as, in het bijzonder de oorsprong en de coördinaten van de oorsprong voldoen aan formule (1).

Aldus komen we tot het volgende besluit:

Formule (1) is de vergelijking van de meetkundige plaats van het snijpunt (ξ, η) van OQ en AP.

Hieruit volgt:

De bedoelde meetkundige plaats bevat vooreerst de y-as. Verder bestaat ze uit de rechte

$$(2) \quad k\xi + (a + k)\eta - ak = 0,$$

behalve als k en a beide nul zijn. In het geval, dat k en a beide nul

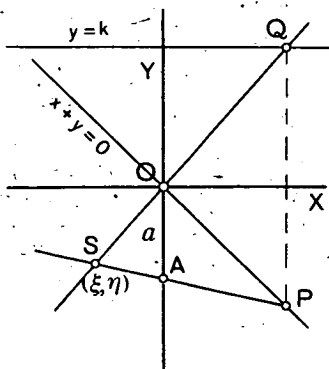


Fig. 5.

zijn, behoort elk punt van het platte vlak tot de gevraagde meetkundige plaats.

Hiermede is dit vraagstuk afgehandeld op een kleinigheid na. Men kan de vraag stellen: welk bezwaar is er nu tegen, om de gevallen, waarin het bepalend lidwoord iets onbepaalds aanduidt, buiten beschouwing te laten? Men zou zo zeggen: het antwoord wordt dan veel eenvoudiger. Immers hierboven hebben we gezien, dat het geval $\xi = 0$ dan niet beschouwd behoeft te worden, zodat de gezochte meetkundige plaats dan uitsluitend uit de rechte (2) bestaat. Ja, op één punt na, namelijk op het snijpunt met de y -as na. Bij die zienswijze lopen we voortdurend gevaar als meetkundige plaats een rechte of kromme lijn te vinden, waarvan een of meer punten niet mogen worden gebruikt. Dat is onaangenaam, omdat we die punten dan ook moeten aangeven en daarom verdient deze zienswijze geen aanbeveling.

Nu het derde vraagstuk, verleden jaar bij de gymnasiale examens voor trigonometrie en analytische meetkunde opgegeven. Dit probleem luidt als volgt:

Gegeven zijn de parabolen $y^2 = 2px$ en $y^2 = -2px$. Men neemt een willekeurig punt P op de parabool $y^2 = -2px$ en bepaalt de de raakkoorde AB van P ten opzichte van de parabool $y^2 = 2px$. Gevraagd de meetkundige plaats van het zwaartepunt van $\triangle ABO$ (O is de oorsprong), als P de parabool $y^2 = -2px$ doorloopt:

Met ξ en η duid ik de coördinaten van het zwaartepunt van $\triangle ABO$ aan. Het midden M van de koorde AB heeft dan tot coördinaten $\frac{3\xi}{2}$ en $\frac{3\eta}{2}$. De door M gaande horizontale rechte snijdt de parabool $y^2 = 2px$ in een punt, waarvan de ordinaat gelijk is aan $\frac{3\eta}{2}$. De raaklijn, in dat punt aan de parabool aangebracht, heeft derhalve tot richtingscoëfficiënt $\frac{2p}{3\eta}$. De koorde AB , die evenwijdig aan deze raaklijn loopt, bezit dezelfde richtingscoëfficiënt, zodat de vergelijking van deze koorde AB luidt:

$$y = \frac{2p}{3\eta}x + \frac{3\eta}{2} - \frac{p\xi}{\eta}.$$

Natuurlijk hadden we deze vergelijking ook kunnen vinden, door

een onbepaalde richtingscoëfficiënt in te voeren en die zo te kiezen, dat het midden van de koorde een ordinaat $= \frac{3\eta}{2}$ bezit.

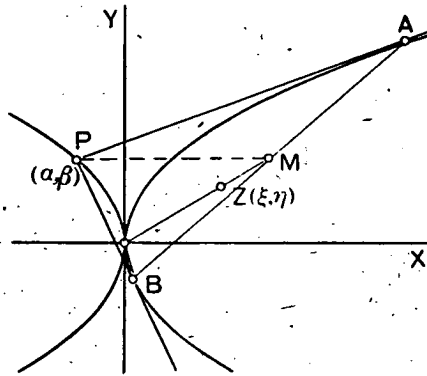


Fig. 6.

De coördinaten α en β van de pool van deze koorde worden dus bepaald door de betrekkingen

$$\frac{p}{\beta} = \frac{2p}{3\eta} \text{ en } \frac{p\alpha}{\beta} = \frac{3\eta}{2} - \frac{p\xi}{\eta},$$

derhalve

$$\beta = \frac{3\eta}{2} \text{ en } \alpha = \frac{9\eta^2}{4p} - \frac{3}{2} \xi.$$

Nu eerst komt de parabool $y^2 = -2px$ op de proppen. Het punt (ξ, η) behoort dan en alleen dan tot de gezochte meetkundige plaats als (α, β) op deze parabool ligt. Dit geeft $\beta^2 = -2p\alpha$. Substitutie van de voor α en β gevonden waarden levert

$$\eta^2 = \frac{4}{9}p\xi.$$

Deze parabool is dus de meetkundige plaats van het zwaartepunt (ξ, η) van $\triangle ABO$.

Ten slotte nog een waarschuwing. Bij sommige problemen is de methode, waarbij veranderlijke parameters geëlimineerd worden toch te verkiezen en het zou gemakkelijk vallen zodanige opgaven aan de kandidaten bij het gymnasiale examen voor te leggen.

Was ik wiskunde-leraar, dan zou ik eerst de methode behandelen, waaraan dit artikel gewijd is. Daarna pas zou ik de eliminatiemethode bespreken en daarbij zou ik de aandacht van mijn leerlingen op enkele dingen vestigen. Vooreerst zou ik er hen op wijzen, dat ze groot gevaar lopen onderweg hele stukken te verliezen, als

ze er zich geen rekenschap van geven, dat bepaalde uitdrukkingen nul kunnen zijn. Ik zou hen waarschuwen, dat ze het noodlot over zich afroepen, indien ze werken met noemers, die zich de weelde kunnen veroorloven af en toe de waarde nul aan te nemen. Ten slotte zou ik hun niet verhelten, dat ze alleen bewezen hebben, dat de gezochte meetkundige plaats deel uitmaakt van de door hen gevonden kromme $T=0$, maar de angstvalligen onder hen zou ik geruststellen met de mededeling, dat van hen niet meer verlangd wordt. Dat omgekeerd elk punt van die kromme tot de meetkundige plaats behoort, behoeven zij niet aan te tonen, ook niet als ze het ongeluk zouden hebben bij hun eindexamen als gecommiteerde den Groningsen hoogleraar voor analyse te krijgen.

Bovenstaande beschouwingen schreef ik vóór de aanvang van mijn examentournee in 1941. Nu de eindexamens der gymnasia afgelopen zijn, wil ik aan mijn betoog nog enkele opmerkingen toevoegen en wel naar aanleiding van de volgende opgave:

Gegeven twee niet-samenvallende punten A en B. Gevraagd wordt de meetkundige plaats van de toppen C der driehoeken CAB met de eigenschap, dat $\angle B$ tweemaal zo groot is als $\angle A$.

Ik geef de voorkeur aan de volgende redenering. Indien de hoeken A en B in de coördinaten ξ en η van het punt C uitgedrukt zijn, levert de noodzakelijke en voldoende voorwaarde, dat $B=2A$ is, de vergelijking van de gevraagde meetkundige plaats.

Voordat ik het resultaat neerschrijf, wil ik eerst nog enkele opmerkingen maken.

Men kan de hoeken A en B parameters noemen; die hulpgrootheden komen wel in de redenering, maar niet in het antwoord voor en zijn dus geëlimineerd. Welnu, zo kan men zeggen, we hebben hier dus toch de methode van de eliminatie van parameters toegepast. Ik ga niet strijden om een woord. Mijn bezwaar gaat tegen de algemene eliminiatiemethode, die uit het volgende bestaat: voer een of meer veranderlijke parameters in; schrijf van enkele rechte of kromme lijnen de vergelijkingen op (waarin die parameters mogen optreden); leid daaruit een voldoende aantal betrekkingen af, waarin die parameters en de coördinaten ξ en η voorkomen en elimineer ten slotte de parameters. Als alles goed loopt (niemand weet, wat dat

betekent), dan vindt men op die manier de vergelijking van de gevraagde meetkundige plaats. Zoals gezegd, tegen toepassing van dergelijke vage beschouwingen is mijn bezwaar gericht. Ik verbied natuurflijk niet het gebruik van veranderlijke grootheden, die niet in het eindantwoord voorkomen. Trouwens, hoe zou ik die kunnen verbieden, als ze, zoals in bovenstaand vraagstuk, in de formulering van de opgave zelve optreden?

Nu een tweede, belangrijker kwestie: wat is de vergelijking van de gevraagde meetkundige plaats? Ik kies het assenstelsel zo, dat de oorsprong met A samenvalt en dat het punt B op de positieve x -as ligt; ik duid de afstand AB met c aan.

Voert men η en ξ als parameters in, dan krijgt men

$$\eta = (c - \xi) \operatorname{tg} B; \quad \eta = \xi \operatorname{tg} A$$

en
$$\operatorname{tg} B = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$$

Door eliminatie der parameters krijgt men

$$\eta = 0 \text{ en } 3\xi^2 - \eta^2 - 2c\xi = 0.$$

Welke waarborg heeft men nu, dat de gevraagde meetkundige plaats uit de y -as en de genoemde hyperbool bestaat? Mijn antwoord is: niet de minste waarborg. Nog sterker: als men mij vraagt, welke de bedoelde meetkundige plaats is, dan antwoord ik: ik weet het niet en ik kan het ook niet weten, omdat de opgave dubbelzinnig is. In de formulering van het vraagstuk wordt gesproken over driehoeken. Worden daarbij alleen driehoeken met positieve hoeken beschouwd of worden ook driehoeken toegelaten, waarin een of meer hoeken gelijk aan nul zijn? Of mogen we misschien zelfs met negatieve hoeken en met hoeken $> 180^\circ$ werken? Zolang hieromtrent geen afspraak gemaakt is, is de opgave dubbelzinnig en behoeft het ons ook niet te verwonderen, dat de gevraagde meetkundige plaats niet vastgelegd is.

Laat ik eerst het geval behandelen, dat alleen driehoeken met positieve hoeken toegelaten worden. In dat geval ligt de top C van $\triangle CAB$ zeker niet op de x -as. Ik zoek eerst de meetkundige plaats der boven de x -as gelegen toppen. A en B, twee in een driehoek voorkomende hoeken, zijn volgens onze afspraak positief met een som kleiner dan 180° . Men heeft

$$\operatorname{tg} A = \frac{\eta}{\xi} \text{ en } \operatorname{tg} B = \frac{\eta}{c - \xi}$$

(deze laatste betrekking betekent voor $\xi = c$, dat $B = 90^\circ$ is).

Maar nu oppassen: de betrekking $B = 2A$ is niet equivalent met

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{tg} 2A. \quad (3)$$

Immers, de laatste betrekking geldt ook, indien $B = 2A - 180^\circ$ is en dat is best mogelijk bij twee hoeken A en B van een driehoek. Formule (3) is wel een noodzakelijke, maar geen voldoende voorwaarde, opdat $B = 2A$ zij. Er moet nog iets bij. Indien een driehoek een hoek $B = 2A$ bevat, dan is $A < 90^\circ$, en omgekeerd, zijn A en B twee hoeken van een driehoek met $A < 90^\circ$, dan is het geval $B = 2A - 180^\circ$ buitengesloten. De voorwaarde $B = 2A$ is dus equivalent met het stel

$$\operatorname{tg} B = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}; \quad A < 90^\circ;$$

hier hebben we nu de noodzakelijke en voldoende voorwaarde.

Substitutie van de hierboven voor $\operatorname{tg} A$ en $\operatorname{tg} B$ gevonden antwoorden, levert voor de meetkundige plaats der boven de x -as gelegen punten C de betrekkingen

$$3\xi^2 - \eta^2 - 2c\xi = 0; \quad \xi > 0;$$

deze meetkundige plaats bestaat dus uit het in het eerste kwadrant gelegen deel van genoemde hyperbool. Door spiegeling ten opzichte van de x -as vindt men de meetkundige plaats der beneden de x -as gelegen toppen C .

Aldus komen we tot het besluit: de meetkundige plaats der punten C bestaat uit de rechters tak van de hyperbool

$$3\xi^2 - \eta^2 - 2c\xi = 0,$$

uitgezonderd de op de x -as gelegen top $\left(\frac{2c}{3}, 0\right)$.

Conclusie: de algemene eliminatiemethode is veel te royaal. Ze geeft niet alleen de x -as cadeau, maar ook nog de linkertak van de hyperbool. Dit parasitische deel correspondeert met de driehoeken, waarin $2A - B = 180^\circ$ is, maar over die driehoeken wordt in de opgave niet gerept.

Het zal wel in niemands bol opkomen, die linkertak nog te willen redden, maar over de top $\left(\frac{2c}{3}, 0\right)$ en de overige punten van de x -as valt te praten.

Indien we niet alleen driehoeken met positieve hoeken beschouwen, maar ook driehoeken toelaten, waarbij een of twee hoeken nul

zijn, dan behoren alle op de x -as tussen A en B gelegen punten C tot de gevraagde meetkundige plaats, want voor die punten C zijn de basishoeken in $\triangle CAB$ gelijk aan nul. De op de x -as links van A of rechts van B gelegen punten C behoren dan echter niet tot de meetkundige plaats, omdat voor die punten C in $\triangle CAB$ de ene basishoek gelijk aan nul en de andere gelijk aan 180° is. En het antwoord op de vraag, of de punten A en B voldoen, hangt af van de afspraak betreffende de grootte van de hoeken van een driehoek, waarvan twee hoekpunten samenvallen. Op die manier raken we verstrikt in een warwet van afspraken, en de hele x -as op die manier redden kunnen we toch niet, hoogstens een stukje.

De zaak ligt weer anders, als we negatieve hoeken en hoeken $> 180^\circ$ toelaten. Indien C op het verlengde van het lijnstuk BA ligt, kunnen we afspreken, dat in $\triangle CAB$

$$A = 180^\circ; B = 360^\circ; C = -360^\circ$$

is; volgens die afspraak zou ook het gedeelte van de x -as links van het punt A tot de gevraagde meetkundige plaats behoren. Maar het het gedeelte van de x -as rechts van het punt B is zelfs op die manier niet te redden, want voor de op de x -as rechts van B gelegen punten C is A een veelvoud van 360° en is B een oneven veelvoud van 180° , zodat B zeker niet $2A$ is.

Het besluit is: hoe ingewikkeld ook ons afsprakensysteem, de hele x -as redden, dat gaat toch niet.

Om bovenstaande moeilijkheden te ontgaan, late de leraar alleen driehoeken met positieve hoeken toe, ook al treedt dan ook het bezwaar op, dat de top $\left(\frac{2c}{3}, 0\right)$ van de gevonden hyperbooltak niet tot de gevraagde meetkundige plaats behoort.

TWEEDE VOORDRACHT.

NIET-ARCHIMEDISCHE MEETKUNDE

DOOR

J. C. H. GERRETSEN.

Wat is wiskunde? Deze vraag kan menig beoefenaar van de wiskunde in verlegenheid brengen en in de loop der tijden zijn daarop zeer uiteenlopende antwoorden gegeven. Het ligt niet in mijn bedoeling hier de problemen te bespreken, welke op het wezen van de wiskunde betrekking hebben, maar een enkele opmerking wil ik er toch over maken. In de laatste tijd wint de opvatting meer en meer veld, dat iedere deductieve wetenschap als onderdeel van de wiskunde beschouwd moet worden. De *deductieve methode* neemt als uitgangspunt het factum van de wetenschap, dus het geheel van oordelen, welke op historische gronden of krachtens een zekere traditie als tot die wetenschap behorend aangemerkt worden. Ten behoeve van de grondlegging van die wetenschap — die we in het vervolg gemakshalve met **W** zullen aanduiden — wordt een klein aantal uitdrukkingen apart genomen; als criterium geldt daarbij in de regel, dat ze ons zonder meer als volkomen duidelijk voorkomen. Dit zijn de ongedefiniëerde begrippen, de *grondbegrippen*, zoals bijvoorbeeld het punt en de rechte in de vlakke meetkunde. Alle overige in **W** voorkomende begrippen, de *afgeleide begrippen* zijn slechts dan toegelaten, wanneer ze *gedefiniëerd* zijn, d.w.z. wanneer hun betekenis behoorlijk verklaard is met behulp van de grondbegrippen en eventueel met enige reeds gedefiniëerde afgeleide begrippen.

In een analoge situatie verkeren de in de betreffende wetenschap **W** uitgesproken beweringen, de stellingen. Sommige van die stellingen worden als volkomen evident beschouwd en worden zonder nadere motivering als waar aanvaard. Het zijn de *grondstellingen* of *axioma's*, ook vaak *postulaten* genoemd. Alle overige beweringen zullen slechts dan als ware beweringen of *theoremata's* aangemerkt mogen worden, wanneer ze bewezen zijn, wanneer dus hun waarheidskarakter langs logische weg uit de axioma's blijkt, via reeds als waar erkende stellingen en eventueel met gebruikmaking van de

definities der afgeleide begrippen. De geldigheid van de stellingen wordt blijkbaar niet bepaald door de aanschouwelijke inhoud van de axioma's, maar slechts door het feit, dat ze logisch uit de axioma's voortvloeien. Daaraan ontleent de wetenschap zijn objectiviteit. Achteraf blijkt dus de eis van evidentie van de axioma's voor de grondlegging van **W** van geen belang te zijn; men behoort er echter naar te streven, dat de axioma's niet met elkaar in strijd zijn, d.w.z. het mag niet voorkomen, dat een bewering en eveneens de ontkenning van die bewering in **W** gelden.

Nu kan er een eigenaardige moeilijkheid rijzen. We willen namelijk eens veronderstellen, dat het bewijs van een bepaalde bewering over in de wetenschap **W** toegelaten begrippen niet wil gelukken, waardoor het vermoeden rijst, dat de bewering onbewijsbaar is. Hoe verkrijgen we daaromtrent zekerheid? In een dergelijk geval tracht men een antwoord te vinden met behulp van een model van **W**. Zij $\mathcal{S}$ een verzameling van dingen, welke betekenis hebben in een tweede wetenschap **V**; we zullen veronderstellen, dat ook **V** een deductieve wetenschap is. De verzameling $\mathcal{S}$ zal een *model* van **W**, of een *interpretatie* van **W** in **V** genoemd worden, wanneer het mogelijk is voor de grondbegrippen van **W** de dingen van $\mathcal{S}$ te nemen en wel zodanig, dat de axioma's van **W** tot geldige uitspraken worden in **V**. Het gevolg is dan, dat iedere in **W** bewijsbare bewering ook in **V** geldt. Blijkt nu de te onderzoeken bewering, in **V** geïnterpreteerd, onjuist te zijn, dan is daarmee aangetoond, dat die bewering in **W** onbewijsbaar is.

Ik zal deze algemene methodologische beschouwingen toelichten aan de hand van de niet-Euklidische meetkunde. Zoals bekend, dankt deze zijn ontstaan aan de pogingen, die men heeft ondernomen om het beroemde 5e postulaat in Boek I van de „Elementen” van Euklides te bewijzen. Reeds Euklides liet het afwijkende karakter van dat axioma tegenover de overige postulaten uitkomen, doordat hij de eerste 28 stellingen van Boek I bewees zonder een beroep te doen op het 5e postulaat. Vooral ook wegens het feit, dat de aanschouwelijke evidentie in vergelijking tot de overige door Euklides uitgesproken postulaten minder in het oog springt, beschouwde men de opneming ervan onder de grondstellingen als een onvolkomenheid in het werk van Euklides. Daarbij komt ook nog, dat het 5e postulaat in zijn formulering zeer sterk aan een theorema doet herinneren. Ik wil daarbij nog even stilstaan.

Een in de planimetrie van Euklides zeer belangrijke stelling — die overigens in de schoolwiskunde erg op de achtergrond is geschoven als gevolg van de gewijzigde leergang — is de 16e stelling van Boek I, die aldus luidt: *Van een willekeurige driehoek is elke buitenhoek groter dan ieder der niet aanliggende binnenhoeken.* Euklides bewijst deze stelling zonder gebruikmaking van het 5e postulaat. Een direct gevolg van deze stelling is, *dat in iedere driehoek twee hoeken tezamen kleiner zijn dan twee rechte hoeken* (Euklides I, 17). Het ligt voor de hand als omgekeerde hiervan te formuleren: *Er bestaat steeds een driehoek met een voorgeschreven zijde en voorgeschreven aan deze zijde grenzende hoeken; mits die hoeken tezamen kleiner zijn dan twee rechte hoeken.* Deze bewering zou natuurlijk triviaal zijn, wanneer alle rechten in het vlak elkaar snijden, maar uit Euklides I, 16 volgt echter, *dat er rechten bestaan, die geen punt gemeen hebben*, bijvoorbeeld twee loodlijnen op een zelfde rechte. De zoëven genoemde omkering van Euklides I, 17 is in wezen het 5e postulaat. In de schoolmeetkunde vervangt men het in de regel door de daarmee volkomen gelijkwaardige bewering, *dat door een gegeven punt, dat niet tot een gegeven rechte behoort, niet meer dan één rechte gaat, welke met de eerstgenoemde parallel is*, dus niet snijdt. Als zodanig wordt het gewoonlijk het *parallelenaxioma* genoemd.

Euklides is tot de overtuiging gekomen, dat de in het 5e postulaat uitgesproken bewering onbewijsbaar is en dus als postulaat bij de overige gevoegd moet worden. We willen nu nagaan of de handelwijze van Euklides gerechtvaardigd is. We moeten echter eerst even duidelijk afspreken, wat we onder bewijsbaar willen verstaan. De zaak is namelijk, dat de door Euklides uitdrukkelijk uitgesproken postulaten niet toereikend zijn om de eerste 28 stellingen te bewijzen. Bij zijn congruentiestellingen maakt hij bijvoorbeeld gebruik van het bewegingsbegrip, zonder daarvan in de postulaten rekenschap te geven. We kunnen evenwel de eerste 28 stellingen als axioma's vooropstellen, zonder er ons aan te storen, dat in het aldus aangewezen axiomastelsel sterke afhankelijkheid bestaat. We stellen nu de vraag — en dat is ook de historische probleemstelling — of het 5e postulaat uit de eerste 28 stellingen gededuceerd kan worden. Ter beantwoording van die vraag construeren we een model. Onder **W** verstaan we het geheel van gevolgtrekkingen uit de eerste 28 stellingen en onder **V** de Euklidische

planimetrie. Ik veronderstél daarbij, dat we reeds weten, dat V vrij is van tegenspraken. Hoe we dat kunnen nagaan, zullen we straks zien.

In het platte vlak denken we ons aangenomen een rechte x en noemen punt* een punt van een

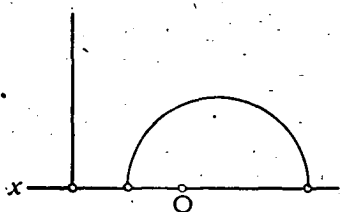


Fig. 1.

vooraf aangewezen door x in het vlak bepaald half vlak. Onder rechte* verstaan we een tot het halve vlak behorende halve cirkel met eindpunten op x , of wel een tot het halve vlak behorende halve rechte met eindpunt op x en loodrecht op x , (fig. 1). Verder worden de bewegingen* gedefinieerd als bepaalde transformaties, welke het halve vlak in zich zelf overvoeren.

We kunnen die transformaties op de volgende wijze beschrijven.

Zij punt O een punt op de rechte x . Onder een beweging* verstaan we een transformatie, die verkregen wordt uit de volgende transformaties, eindig vaak na elkaar toegepast:

- Verschuiving van het vlak langs de rechte x .
- Spiegeling van het vlak in een rechte door O loodrecht op x .
- Homothetie met centrum O , en positieve factor.
- Inversie met centrum O .

Men kan nu inderdaad bewijzen, dat de eerste 28 stellingen van Boek I op de beschreven wijze in V geïnterpreteerd, geldige beweringen zijn. Het 5e postulaat geldt evenwel niet, want het is direct

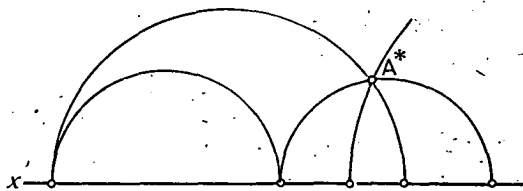


Fig. 2.

in te zien, dat door een gegeven punt*, dat niet tot een gegeven rechte* behoort, meer dan één rechte* mogelijk zijn, die met de eerstgenoemde rechte* geen punt* gemeen hebben, (fig. 2).

Er zijn in de loop der tijden tal van voorstellen gedaan om het 5e postulaat te vervangen door een ander, dat meer evident is. Men

heeft het bijvoorbeeld als een bezwaar gevoeld, dat het 5e postulaat niet binnen een beperkt gebied van het platte vlak verifiëerbaar is. Dit bezwaar kan worden ondervangen door de opstelling van het volgende postulaat: *Wanneer van een vierhoek drie hoeken recht zijn, dan is ook de vierde hoek recht.* Het is interessant, dat dit postulaat slechts voor een enkele vierhoek met drie rechte hoeken vervuld behoeft te zijn en dan op grond van de eerste 28 stellingen van Boek I vanzelf voor alle vierhoeken met drie rechte hoeken geldt. Voor onze verdere beschouwingen behoeven we van dit resultaat geen gebruik te maken, maar we wijzen er op om te laten uitkomen, dat aan de eis van verifiëerbaarheid binnen een beperkt deel van het platte vlak ten volle voldaan kan worden. Daar dit postulaat vooral in de onderzoekingen van Lambert betreffende de parallelentheorie een belangrijke plaats inneemt, zal ik het in het vervolg het postulaat van Lambert noemen. We denken ons dit aan de eerste 28 stellingen van Boek I toegevoegd.

Er volgt gemakkelijk, dat de beide scherpe hoeken van een rechthoekige driehoek samen een rechte hoek vormen. Beschouwen we

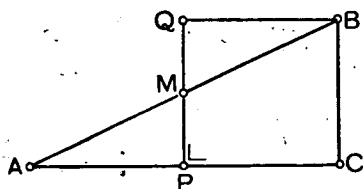


Fig. 3.

daartoe $\triangle ABC$, welke bij C rechthoekig is, (fig. 3). Zij M het midden van de zijde AB en P het voetpunt van de loodlijn door M op AC ; P ligt blijkbaar tussen A en C . We verlengen PM met $MQ = PM$. Dan is $\triangle MPA \cong \triangle MQB$, (ZHZ), en dus $\angle PQB$ recht, terwijl bovendien $\angle MBQ = \angle CAB$. Daar volgens

het postulaat van Lambert ook $\angle CBQ$ recht is, hebben we daarmee het gestelde reeds aangetoond. Het is nu direct duidelijk, dat in iedere driehoek de hoeken tezamen gelijk zijn aan twee rechte hoeken.

Want volgens Euklides I, 17 zijn ten minste twee hoeken van een willekeurig gegeven driehoek ABC scherp, laat dit de hoeken bij A en bij B zijn, zodat we de driehoek door de hoogtelijn uit het derde hoekpunt, hier dus C , in twee rechthoekige kunnen verdelen en dan de vorige stelling toepassen. We zien daarmee, dat ten aanzien van deze stelling het postulaat van Lambert hetzelfde presteert als het 5e postulaat. Het postulaat van Lambert is met behulp van het 5e postulaat bewijsbaar en er is reden om te

vermoeden, dat de beide postulaten gelijkwaardig zijn, d.w.z. dat ook het 5e postulaat uit het postulaat van Lambert volgt. We zullen dit vermoeden aan een nader onderzoek onderwerpen. Daartoe bewijzen we eerst een hulpstelling. We gaan uit van een driehoek ABC , welke bij C rechthoekig is en verlengen $\overline{AB}$ met $\overline{BB'} = \overline{AB}$ en $\overline{AC}$ met $\overline{CC'} = \overline{AC}$, (fig 4). De bewering luidt, dat

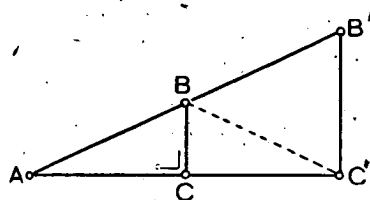


Fig. 4.

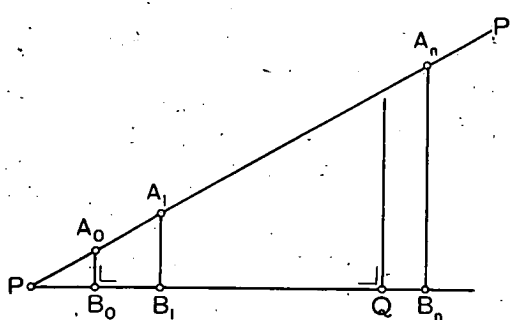
ook $\angle AC'B'$ recht is. Immers, $\overline{AB} = \overline{C'B}$, want BC is de middelloodlijn van $\overline{AC'}$ en dus is ook $\overline{C'B} = \overline{B'B}$. Daaruit volgt:

$$\begin{aligned}\angle C'AB' + \angle C'B'A \\ &= \angle AC'B + \angle B'C'B \\ &= \angle AC'B'.\end{aligned}$$

De hoeken van $\triangle AB'C'$ vormen tezamen twee rechte hoeken, dus moet $\angle AC'B'$ recht zijn.

Deze stelling gebruiken we voor het bewijs van de volgende stelling, welke door een der voorlopers van de niet-Euklidische meetkunde, pater G. Saccheri als Stelling XI in zijn beroemde werk „Euclides ab omni naevo vindicatus” is uitgesproken. Laat PP' en QQ' twee halve rechten zijn aan dezelfde kant van de rechte PQ , (fig. 5). Als nu $\angle P'PQ$ scherp en $\angle Q'QP$ recht is, dan hebben de halve rechten PP' en QQ' een snijpunt.

Ten einde deze bewering waar te maken denken we ons op de halve rechte PP' het punt A_0 willekeurig aangenomen. De projectie

Fig. 5. ¹⁾

van A_0 op PQ zij B_0 . Blijkbaar liggen B_0 en Q aan dezelfde kant van P . Wanneer we $\overline{RA_0}$ verlengen met $\overline{A_0A_1} = \overline{PA_0}$ en $\overline{PB_0}$ met

¹⁾ De lezer gelieve bij een punt op de loodlijn door Q op PQ de letter Q' te plaatsen.

$\overline{B_0B_1} = \overline{PB_0}$, dan is, zoals we reeds zagen, B_1 de projectie van A_1 op PQ . Wanneer we verder $\overline{PA_1}$ met $\overline{A_1A_2} = \overline{PA_1}$ en $\overline{PB_1}$ met $\overline{B_1B_2} = \overline{PB_1}$ verlengen, dan is wederom B_2 de projectie van A_2 op PQ . Hebben we op deze wijze reeds een punt A_{n-1} op de halve rechte PP' en een punt B_{n-1} op de halve rechte PQ gevonden, waarbij dan B_{n-1} de projectie is van A_{n-1} op PQ , dan zal, als we $\overline{PA_{n-1}}$ met $\overline{A_{n-1}A_n} = \overline{PA_{n-1}}$ en $\overline{PB_{n-1}}$ met $\overline{B_{n-1}B_n} = \overline{PB_{n-1}}$ verlengen, B_n de projectie zijn van A_n op PQ . Bovendien is $\overline{PB_n} = 2^n \overline{PB_0}$. We bepalen nu het natuurlijke getal n zo, dat $n \cdot \overline{PB_0} > \overline{PQ}$. Daar $2^n \geq n$, zal dan Q tussen P en B_n moeten liggen. De rechten B_nA_n en QQ' zijn beide loodrecht op PQ en als gevolg daarvan kan de rechte QQ' geen punt van het segment $\overline{A_nB_n}$ bevatten. Dan zal de rechte QQ' , die bij Q de driehoek PB_nA_n binnentreedt deze driehoek via een punt op de zijde $\overline{PA_n}$ moeten verlaten en daarmee is het gestelde aangetoond.

Het is nu niet moeilijk meer het 5e postulaat te bewijzen. Laaf AA' en BB' twee halve rechten zijn, die aan dezelfde kant van AB liggen, terwijl de hoeken $A'AB$ en $B'BA$ te samen kleiner zijn dan twee rechte hoeken. Eén van deze hoeken is dan stellig scherp, laat de eerste dit zijn, (fig. 6). De projectie B_1 van B op AA' ligt dus

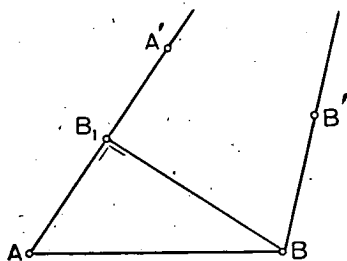


Fig. 6.

op de halve rechte AA' en we kunnen gerust aannemen, dat B_1 tussen A en A' ligt. De hoeken $A'AB$ en ABB_1 zijn samen gelijk aan een rechte hoek, zodat $\angle B'BB_1$ scherp moet zijn. Maar we hebben zoeven gezien, dat deze voorwaarde voldoende is om de aanwezigheid van een snijpunt van B_1A' en BB' te waarborgen.

Een nauwkeurige analyse van het betoog, waarmee de juistheid van het 5e postulaat uit het postulaat van Lambert afgeleid wordt, brengt aan het licht, dat er iets niet in de haak is. We hebben namelijk ook nog op de volgende bewering gesteund: *Zijn $\overline{AB}$ en $\overline{CD}$ twee gegeven lijnsegmenten, dan is er steeds een natuurlijk getal n met $n \cdot \overline{CD} > \overline{AB}$.* Op welke gronden rust deze bewering? In Boek I van de „Elementen” komt de bewering niet voor en wordt daar ook nergens gebruikt, maar wel in Boek V als grondslag voor de redentheorie. Daar wordt namelijk als Definitie IV vermeld, dat

van twee grootheden gezegd zal worden, dat ze een reden tot elkaar hebben, als ze vermenigvuldigd elkaar kunnen overtreffen. Daarmee is bedoeld dat bij ieder van de grootheden een natuurlijk getal is te vinden, zodat het door dat getal bepaalde veelvoud van de bijbehorende grootheid groter is dan de andere grootheid. Euclides beschouwt deze definitie van toepassing op lijnsegmenten, zonder daarvoor een bewijs te geven; daarmee verkrijgt de definitie dus het karakter van een postulaat. De redentheorie wordt aan Eudoxos toegeschreven en men zou daarom het postulaat naar Eudoxos behoren te noemen. Archimedes bedient zich in zijn werk herhaaldelijk van het postulaat en in navolging van O. Stolz¹⁾ noemt men het postulaat meestal naar Archimedes.

We kunnen dus zeggen, dat het 5e postulaat uit het postulaat van Lambert is af te leiden, zodra het axioma van Archimedes gebruikt mag worden. Men rekent evenwel het axioma, hoe evident het ook mag zijn, niet tot de elementaire axioma's. Men kan de vraag stellen of het axioma van Archimedes bij het probleem, dat ons bezig houdt, ontbeerd kan worden. Deze vraag zou veel van zijn betekenis verliezen, wanneer het axioma bewijsbaar zou zijn op grond van de eerste 28 stellingen van Boek I. Het is aan Hilbert²⁾ gelukt aan te tonen, dat het axioma inderdaad onbewijsbaar is, zelfs wanneer men ook het 5e postulaat aan de redeneringen ten grondslag legt. Verder is voortbouwende op het werk van Hilbert door Dehn³⁾ gevonden, *dat het 5e postulaat niet uit het postulaat van Lambert afgeleid kan worden, zonder gebruikmaking van een aanvullend axioma.*

Ik zal nu de methode schetsen, waarmee men deze resultaten heeft kunnen verkrijgen. We zullen modellen construeren van de *niet-Archimedische meetkunde*, dus meetkunde, waarin een bewering geldt, dat met het axioma van Archimedes in tegenspraak is. We beginnen met enige algebraïsche voorbereidingen.

Laat $\mathfrak{S}$ het kleinste systeem zijn van algebraïsche functies van de variabele t , welke de volgende eigenschappen bezit:

¹⁾ O. Stolz, *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes*, Math. Ann. 22 (1883), 504—519.

²⁾ D. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, 7. Auflage (Leipzig-Berlin 1930), § 12.

³⁾ M. Dehn, *Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck*, Math. Ann. 53 (1900), 404—439.

1^o: t behoort tot $\mathfrak{S}$;

2^o: wanneer u en v tot $\mathfrak{S}$ behoren, dan behoort $u - v$, en, indien $v \neq 0$, ook u/v tot $\mathfrak{S}$;

3^o: wanneer u tot $\mathfrak{S}$ behoort, dan behoort ook $\sqrt{1+u^2}$ tot $\mathfrak{S}$.

De functies van $\mathfrak{S}$, die we gemakshalve *grootheden* zullen noemen, zijn blijkbaar éénduidige en reële functies van t en vormen een lichaam. Uit de eis 3^o leiden we direct af, *dat de wortel uit de som der quadraten van twee grootheden wederom een grootheid is*. Immers, zijn u en v grootheden, dan is $\sqrt{u^2 + v^2} = |v| \sqrt{1 + (u/v)^2}$, mits $v \neq 0$, hetgeen we mogen onderstellen. Zoals bekend bezit een van nul verschillende algebraïsche functie slechts eindig vele nulpunten. Van deze omstandigheid heeft Hilbert gebruik gemaakt om voor de grootheden een groter-relatie te definiëren. Voor een grootheid u geldt: of wel de waarden van u zijn steeds positief voor voldoende grote (reële) waarden van t , of wel $u = 0$ voor alle waarden van t , of wel de waarden van u zijn steeds negatief voor alle voldoende grote waarden van t , en voor een gegeven grootheid kan slechts één van deze mogelijkheden gerealiseerd zijn. We zeggen, dat u in het eerste geval *positief* is, in het tweede geval heet u gelijk aan nul, terwijl u in het derde geval *negatief* heet. Blijkbaar is u negatief dan en slechts dan wanneer $-u$ positief is. Zonder moeite kan worden ingezien, *dat met u en v ook $u + v$ en uv positief zijn*. Bij definitie heet u *groter dan v* (v kleiner dan u) dan en slechts dan wanneer $u - v$ positief is. We kunnen daarvoor de gewone notatie gebruiken. Men kan nu gemakkelijk bewijzen, dat de bekende eigenschappen van de volgorde gelden; men zegt dat $\mathfrak{S}$ een geordend lichaam is. De ordening van $\mathfrak{S}$ is evenwel in een bepaald opzicht bijzonder merkwaardig; er komen namelijk in $\mathfrak{S}$ oneindig grote en oneindig kleine grootheden voor. Een grootheid u heet *oneindig groot*, wanneer u groter is dan ieder natuurlijk getal; een grootheid u heet *oneindig klein*, wanneer ieder natuurlijk veelvoud van u kleiner dan 1 is. Blijkbaar is t oneindig groot, want men kan aan t waarden geven, die een vooraf aangewezen natuurlijk getal overtreffen; om dezelfde reden is t^{-1} oneindig klein.

Het lichaam $\mathfrak{S}$ kunnen we gebruiken om een model te construeren voor de eerste 28 stellingen van Boek I van de „Elementen”. Onder een punt verstaan we een groothedenpaar (x, y) , waarbij we op de rangschikking moeten letten, d.w.z. de punten (x, y) en (y, x) zijn in het algemeen verschillend; x en y heten de coördinaten van

het punt. Alle punten vormen tezamen het platte vlak. Onder een rechte wordt verstaan de verzameling van alle punten, waarvan de coördinaten aan een lineaire vergelijking:

$$ax + by = c$$

voldoen; hierin stellen a , b en c grootheden voor, terwijl we veronderstellen, dat a en b niet gelijktijdig nul zijn. Over de volgorde van de punten op een rechte kunnen we de bekende afspraken van de analytische meetkunde maken. Onder een beweging verstaan we elke transformatie van de vorm:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} x - \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} y + x_0, \\ \bar{y} &= \frac{\pm u}{\sqrt{u^2 + v^2}} x \pm \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} y + y_0,\end{aligned}$$

waarin u , v , x_0 en y_0 grootheden zijn, terwijl $u^2 + v^2 \neq 0$; in de tweede regel moeten we of wel de beide plustekens of wel de beide mintekens nemen. Door een dergelijke transformatie wordt aan een willekeurig punt (x, y) een punt $(\bar{x}, \bar{y})$ omkeerbaar éénduidig toegevoegd. Segmenten, resp. hoeken, resp. driehoeken heten onderling congruent, wanneer ze door een beweging in elkaar overgevoerd kunnen worden.

Op de uit de analytische meetkunde bekende wijze kunnen de eerste 28 stellingen van Boek I op hun juistheid in het model geverifieerd worden. Behalve de genoemde 28 stellingen *geldt ook het parallelenaxioma in het model*. Voor het bewijs daarvan merken we op, dat we de figuur van een rechte en een niet tot die rechte behorend punt door een beweging steeds kunnen overvoeren in de figuur bestaande uit het punt O $(0, 0)$ en de rechte met vergelijking $y = y_0$ ($\neq 0$). De vergelijking van een willekeurige rechte door O luidt:

$$ax + by = 0,$$

en voor de abscis van het snijpunt van deze rechte met de zoeven genoemde rechte moet gelden:

$$ax + by_0 = 0.$$

Alleen in het geval, dat $a = 0$ is hebben we te doen met een valse vergelijking, zodat de rechte met vergelijking $y = 0$ de enige rechte door O is, die geen punt met de rechte met vergelijking $y = y_0$ gemeen heeft. Dit resultaat heeft principiële betekenis. Immers nu

blijkt, dat de Euklidische meetkunde vrij is van tegenspraken. Want zou in de Euklidische meetkunde een bewering bewijsbaar zijn en tevens de ontkenning van die bewering, dan zou deze, in het model geïnterpreteerd, een bewering voor de functies van $\mathfrak{H}$ opleveren, die tegelijk met zijn ontkenning zou gelden. De algebra leert evenwel, dat in $\mathfrak{H}$ geen tegenspraak kan voorkomen. In het model geldt evenwel niet het axioma van Archimedes. Immers, uit het segment $\overline{OE}$ met E het punt $(1, 0)$ ontstaat het segment $\overline{OA} = n \cdot \overline{OE}$, wanneer we n maal na elkaar de transformatie:

$$\bar{x} = x + 1,$$

$$\bar{y} = y,$$

toepassen; uit E verkrijgen we dan het punt $A(n, 0)$. Is P het eveneens op de rechte met vergelijking $y = 0$ gelegen punt $(t, 0)$, dan is wegens $0 < n < t$ het punt A steeds tussen O en P gelegen, welk natuurlijk getal men voor n ook neemt. Daarmee is de zekerheid verkregen, dat het axioma van Archimedes niet uit de eerste 28 stellingen van Boek I is af te leiden en ook niet als men daaraan nog het 5e postulaat toevoegt.

Om het resultaat van Dehn te vinden gaan we een nieuw model construeren. We zullen een groothedenpaar (x, y) dan en slechts dan punt noemen, wanneer er twee passende natuurlijke getallen m en n te vinden zijn met

$$|x| < m, |y| < n.$$

Een rechte is weer de verzameling van alle punten, waarvan de coördinaten aan een lineaire vergelijking voldoen, met coëfficiënten, die grootheden zijn; er moet echter ondersteld worden, dat de verzameling niet leeg is. De bewegingen definiëren we als zoëven, evenwel met de beperking, dat de grootheden x_0 en y_0 absoluut genomen ook door geschikt gekozen natuurlijke getallen overtroffen kunnen worden. Het is gemakkelijk te bewijzen, dat door een beweging aan een willekeurig punt wederom een punt toegevoegd wordt. Want is $|x| < m$, $|y| < n$, $|x_0| < m_0$ en $|y| < n_0$, waarbij m , n , m_0 en n_0 natuurlijke getallen zijn, dan is

$$|\bar{x}| \leq |x| + |y| + |x_0| < m + n + m_0,$$

$$|\bar{y}| \leq |x| + |y| + |y_0| < m + n + n_0,$$

wegens

$$\frac{|u|}{\sqrt{u^2 + v^2}} \leq 1, \frac{|v|}{\sqrt{u^2 + v^2}} \leq 1.$$

In dit model geldt het postulaat van L a m b e r t. Ten einde deze bewering aan te tonen merken we op, dat een vierhoek met drie rechte hoeken door een beweging overgevoerd kan worden in een vierhoek met hoekpunt $O (0, 0)$, waarvan verder een hoekpunt, dat we A noemen, op de rechte $y = 0$ ligt en de coördinaten $(a, 0)$ heeft en een tweede hoekpunt, dat we B noemen, op de rechte $x = 0$ ligt en de coördinaten $(0, b)$ heeft. Het vierde hoekpunt noemen we C en we onderstellen, dat de hoeken CAO en CBO recht zijn. De transformatie:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + a, \\ \bar{y} &= y,\end{aligned}$$

voert de rechte $x = 0$ over in de rechte $x = a$, en de transformatie:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x, \\ \bar{y} &= y + b,\end{aligned}$$

voert de rechte $y = 0$ over in de rechte $y = b$. Het punt C is het snijpunt van die rechten en heeft dus de coördinaten (a, b) . De transformatie:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= -x + a \\ \bar{y} &= -y + b\end{aligned}$$

verwisselt de punten O en C , alsmede de punten A en B . Daaruit volgt, dat $\angle ACB = \angle BOA$, dus recht is, q.e.d.

In het model geldt echter het 5e postulaat niet. Beschouwen we namelijk de rechte met vergelijking $y = 1$. Door de oorsprong denken we ons een rechte met vergelijking $y = at^{-1}x$, waarbij a een van nul verschillende rationaal getal is. Daar de coördinaten van O aan de vergelijking voldoen hebben we dus te doen met een rechte in het model. Het enige groothedenpaar, dat aan beide vergelijkingen voldoet, is het paar $(a^{-1}t, 1)$; hierdoor wordt evenwel geen punt voorgesteld, want $|a^{-1}t|$ is oneindig groot, zodat we tot de conclusie komen, dat de rechten geen punt gemeen hebben. Het gevonden resultaat kunnen we aldus onder woorden brengen: *Er bestaat een niet-Archimedische meetkunde, waarin het postulaat van L a m b e r t wel, maar het 5e postulaat niet geldt.* Door D e h n is een dergelijke meetkunde *semi-Euklidische meetkunde* genoemd. We zien hieruit, dat het postulaat van L a m b e r t alleen, natuurlijk

gevoegd bij de eerste 28 stellingen van Boek I, niet het 5e postulaat kan vervangen.

Ik wil met een opmerking besluiten. De semi-Euklidische meetkunde stemt met de meetkunde van Bolyai-Lobatschewskij hierin overeen, dat door een niet op een gegeven rechte gegeven punt oneindig veel rechten mogelijk zijn, die de gegeven rechte niet snijden. Maar er is een onderscheid. In de laatstgenoemde meetkunde zijn er twee *grensparallelen*, die de snijdende rechten van de niet-snijdende rechten scheiden. Dat betekent, dat door het punt twee rechten gaan, die met de gegeven rechte geen punt gemeen hebben en die twee paar overstaande hoeken vormen zodanig, dat de rechten door het punt binnen het ene paar overstaande hoeken de gegeven rechte wel en de rechten binnen het andere paar overstaande hoeken de gegeven rechte niet snijden. Deze bijzonderheid treedt in de semi-Euklidische meetkunde niet op. Men kan namelijk bewijzen, dat uit het bestaan van de beide grensparallelen door een punt aan een gegeven rechte volgt, dat de vierde hoek van een vierhoek met drie rechte hoeken noodzakelijk scherp is, terwijl juist in de semi-Euklidische meetkunde die vierde hoek, zoals we zagen, eveneens recht is.

DERDE VOORDRACHT.

OVER DE STELLING VAN PAPPUS

DOOR

G. SCHAAKE.

In het volgende zal, met behulp van een meetkundige afbeelding, het antwoord gezocht worden op een vraag, waartoe de figuur, die bij de stelling van Pappus beschouwd wordt, aanleiding geeft. Het zal blijken, dat de toepassing van de genoemde meetkundige afbeelding het opsporen van het genoemde antwoord in hooge mate vereenvoudigt, doordat deze afbeelding hierbij den weg wijst.

Met de stelling van Pappus bedoelen wij hier de volgende stelling der projectieve meetkunde.

Wanneer l en l' twee elkaar snijdende rechten zijn, de punten A, B en C op l en de punten A', B' en C' op l' liggen, terwijl de zes punten A, B, C, A', B' en C' twee aan twee van elkaar verschillen, liggen de snijpunten van BC' en $B'C$, van CA' en $C'A$ en van AB' en $A'B$ op één rechte lijn.

Deze stelling is van grootte beteekenis gebleken bij het onderzoek van de grondslagen der meetkunde. Ze is equivalent met de commutativiteit van de vermenigvuldiging in het getallenlichaam, waaraan de coördinaten ontleend worden.

De vraag, die we in het begin van dit opstel bedoelden, komt nu op, als men de stelling van Pappus op de beide zelfde punten-drietallen toepast, maar daarbij de punten van één of van beide drietallen in een andere volgorde neemt. Noemen we de rechte, waarvan het bestaan in de bovengenoemde stelling beweerd wordt, de rechte van Pappus $\left(\begin{smallmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{smallmatrix} \right)$, dan is er bijv. ook een rechte van Pappus $\left(\begin{smallmatrix} BAC \\ C'B'A' \end{smallmatrix} \right)$, waarop de snijpunten van AA' en CB' , van CC' en BA' en van BB' en AC' gelegen zijn. Dezelfde rechte wordt aangeduid door het symbool $\left(\begin{smallmatrix} ABC \\ B'C'A' \end{smallmatrix} \right)$, waarin de punten van het eerste drietal in alphabetische volgorde voorkomen.

Om de voorstellingen van alle rechten van Pappus te verkrijgen, die bij de aangeduide permutaties ontstaan, behoeven we in het symbool $\begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{pmatrix}$ dus slechts de punten van het tweede drietal te permuteren; we komen zodoende tot zes rechten.

Nu stellen we ons de vraag, of er onder deze zes rechten ook op een of andere manier drie te vinden zijn, die door één punt gaan. Over deze vraag heeft Julius Plücker geschreven („*Analytisch-geometrische Entwicklungen*“, II pag. 18 ff. Essen 1831). Bij zijn beschouwingen maakt hij gebruik van de analytische meetkunde van het platte vlak; hij past daarbij de door hem voor het eerst gebruikte lijncoördinaten toe. Ook beantwoordt hij de gestelde vraag met behulp van de stelling van Desargues.

In het vervolg zullen we nu aantoonen, dat de figuur van de stelling van Pappus zeer geschikt bestudeerd kan worden met behulp van de stralenmeetkunde der projectieve driedimensionale ruimte.

Hierin wordt een rechte l bepaald door zes homogene coördinaten van Plücker. Deze verkrijgen we op de volgende wijze. We denken ons twee verschillende op l gelegen punten Y en Z. Een projectief coördinatenstelsel zij gegeven door de vier fundamenteelpunten, dat zijn de hoekpunten van het coördinatenenvierlak en door het eenheidspunt. Ten opzichte van dit coördinatenstelsel mogen y_1, y_2, y_3 en y_4 homogene coördinaten van het punt Y en z_1, z_2, z_3 en z_4 homogene coördinaten van het punt Z zijn. We stellen:

$$p_{23} = y_2 z_3 - y_3 z_2; p_{31} = y_3 z_1 - y_1 z_3; p_{12} = y_1 z_2 - y_2 z_1$$

$$p_{14} = y_1 z_4 - y_4 z_1; p_{24} = y_2 z_4 - y_4 z_2; p_{34} = y_3 z_4 - y_4 z_3.$$

Deze zes determinanten van de tweede orde, die gevormd kunnen worden uit de matrix:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

zijn niet alle nul, daar de punten Y en Z *verschillende* punten van l zijn. Ze zijn door l op een gemeenschappelijken van nul verschillende factor na bepaald m.a.w. slechts de verhouding dezer getallen is door de rechte l vastgelegd.

Worden immers de coördinaten van Y met hetzelfde van nul verschillende getal λ_y en de coördinaten van Z met hetzelfde van nul verschillende getal λ_z vermenigvuldigd, waardoor de beide punten

Y en Z niet veranderen, zoodat ook l hetzelfde blijft, dan worden de zes aangegeven getallen p_{ik} alle met hetzelfde van nul verschillende getal, namelijk met $\lambda_1 \lambda_2$ vermenigvuldigd. En vervangen we Y en Z door de twee verschillende punten $Y'(y_1', y_2', y_3', y_4')$ en $Z'(z_1', z_2', z_3', z_4')$ van l , dan geldt:

$$\begin{aligned} y_i' &= \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i & (i = 1, 2, 3, 4) \\ z_i' &= \mu_1 y_i + \mu_2 z_i \end{aligned}$$

met

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

en dus

$$\begin{aligned} p'_{ik} &= \begin{vmatrix} y_i' & y_k' \\ z_i' & z_k' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 y_i + \lambda_2 z_i & \lambda_1 y_k + \lambda_2 z_k \\ \mu_1 y_i + \mu_2 z_i & \mu_1 y_k + \mu_2 z_k \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_i & y_k \\ z_i & z_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} p_{ik}. \end{aligned}$$

Tusschen de zes grootheden p_{ik} bestaat een geheele rationale homogene quadratische betrekking. Ontwikkelen we namelijk de determinant:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix},$$

die $= 0$ is, naar de eerste twee rijen, dan vinden we:

$$p_{12} p_{34} + p_{31} p_{24} + p_{14} p_{23} + p_{23} p_{14} + p_{24} p_{31} + p_{34} p_{12} = 0.$$

of:

$$p_{23} p_{14} + p_{31} p_{24} + p_{12} p_{34} = 0 \quad (1)$$

De zes op een van nul verschillende gemeenschappelijken factor na bepaalde getallen p_{23} , p_{31} , p_{12} , p_{14} , p_{24} en p_{34} , die niet alle nul zijn, heeten homogene lijncoördinaten van l of coördinaten van P l ü c k e r dezer rechte.

Zes getallen p_{23} , p_{31} , p_{12} , p_{14} , p_{24} en p_{34} , die niet alle nul zijn, en aan de betrekking (1) voldoen, vormen omgekeerd een stel homogene coördinaten van één en slechts één rechte l .

Onderstellen we, om onze gedachten te bepalen, bijv. dat van deze getallen het getal p_{23} van nul verschilt.

Dat er niet meer dan één rechte l kan zijn, die de zes genoemde

getallen tot homogene coördinaten heeft, blijkt als volgt. Op een dergelijke rechte moeten twee verschillende punten $Y (y_1, y_2, y_3, y_4)$ en $Z (z_1, z_2, z_3, z_4)$ gelegen zijn, zoodanig dat geldt

$$p_{23} = y_2 z_3 - y_3 z_2, p_{31} = y_3 z_1 - y_1 z_3, p_{12} = y_1 z_2 - y_2 z_1,$$

$$p_{14} = y_1 z_4 - y_4 z_1, p_{24} = y_2 z_4 - y_4 z_2, p_{34} = y_3 z_4 - y_4 z_3.$$

Een dergelijke rechte kan niet in het vlak $x_2 = 0$ of in het vlak $x_3 = 0$ gelegen zijn, daar dan resp. y_2 en z_2 of y_3 en z_3 nul zouden zijn, waaruit $p_{23} = 0$ volgen zou. Onder de punten $(\lambda y_1 + \mu z_1, \lambda y_2 + \mu z_2, \lambda y_3 + \mu z_3, \lambda y_4 + \mu z_4)$ van l vinden we het snijpunt met het vlak $x_2 = 0$ en het snijpunt met het vlak $x_3 = 0$ resp. door $\lambda = z_2, \mu = -y_2$ en door $\lambda = z_3, \mu = -y_3$ te nemen. Deze punten zijn dan resp. de punten:

$$(y_1 z_2 - y_2 z_1 = p_{12}, 0, y_3 z_2 - y_2 z_3 = -p_{23}, y_4 z_2 - y_2 z_4 = -p_{24})$$

en

$$(y_1 z_3 - y_3 z_1 = -p_{31}, y_2 z_3 - y_3 z_2 = p_{23}, 0, y_4 z_3 - y_3 z_4 = -p_{34})$$

en vallen bijgevolg wegens $p_{23} \neq 0$ niet samen. Hieruit zien we, dat hoogstens één rechte l de zes gegeven getallen p_{ik} tot homogene coördinaten hebben kan.

Dat er zeker één rechte l is, die de zes gegeven getallen p_{ik} tot homogene coördinaten heeft, blijkt, als we die coördinaten berekenen voor de verbindingslijn van de twee verschillende punten $(p_{12}, 0, -p_{23}, -p_{24})$ en $(-p_{31}, p_{23}, 0, -p_{34})$. We vinden dan resp.:

$$p_{23}^2, p_{23} p_{31}, p_{23} p_{12}, -p_{12} p_{34} - p_{31} p_{24}, p_{23} p_{24}, p_{23} p_{34},$$

of, daar de zes gegeven getallen aan de betrekking (1) voldoen,

$$p_{23}^2, p_{23} p_{31}, p_{23} p_{12}, p_{23} p_{14}, p_{23} p_{24}, p_{23} p_{34}.$$

Daar ondersteld is, dat p_{23} van nul verschilt, vinden we inderdaad, dat de zes getallen:

$$p_{23}, p_{31}, p_{12}, p_{14}, p_{24}, p_{34}$$

een stel homogene coördinaten voor de genoemde verbindingsrechte vormen.

Wanneer een rechte l de zes getallen $p_{ik} = y_i z_k - y_k z_i$ en een rechte l' de zes getallen $p'_{ik} = y'_i z'_k - y'_k z'_i$ tot homogene coördinaten heeft, zullen de verschillende rechten l en l' elkaar dan en slechts dan snijden, als de vier punten $(y_i), (z_i), (y'_i)$ en (z'_i) in één vlak liggen, dus als:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' \\ z_1' & z_2' & z_3' & z_4' \end{vmatrix} = 0$$

is. Door den determinant in het linkerlid dezer vergelijking naar de eerste twee rijen te ontwikkelen vinden we, dat voor deze voorwaarde geschreven kan worden:

$$p_{12} p_{34}' + p_{31} p_{24}' + p_{14} p_{23}' + p_{23} p_{14}' + p_{24} p_{31}' + p_{34} p_{12}' = 0 \quad (2)$$

De verzameling der rechten l , die aan een vergelijking voldoen, welke lineair en homogeen is in de coördinaten p_{ik} van l , heet een lineair complex. De vergelijking van een lineair complex is dus van de gedaante

$$a_{14} p_{23} + a_{24} p_{31} + a_{34} p_{12} + a_{23} p_{14} + a_{31} p_{24} + a_{12} p_{34} = 0 \quad (3),$$

waarin de coëfficiënten a_{ik} constanten zijn.

Wanneer de coëfficiënten a_{ik} resp. de lijncoördinaten p_{ik} van een rechte l' zijn, zijn de rechten, die aan de vergelijking (3) voldoen l' , en degene, die l' snijden. In dit geval noemt men het stelsel der rechten, die aan de vergelijking (3) voldoen, een speciaal lineair complex met richtlijn l' . Uit de afgeleide beteekenis van de vergelijking (1) volgt, dat de rechten, die aan de vergelijking (3) voldoen, dan en slechts dan een speciaal lineair complex vormen, als:

$$a_{23} a_{14} + a_{31} a_{24} + a_{12} a_{34} = 0$$

is.

De rechten van het door de vergelijking (3) voorgestelde lineaire complex, die door een gegeven punt $Y (y_1, y_2, y_3, y_4)$ der ruimte gaan, zijn diegene, welke Y verbinden met de van Y verschillende punten $X (x_1, x_2, x_3, x_4)$, die voldoen aan:

$$\begin{aligned} & a_{14} (y_2 x_3 - y_3 x_2) + a_{24} (y_3 x_1 - y_1 x_3) + a_{34} (y_1 x_2 - y_2 x_1) \\ & + a_{23} (y_1 x_4 - y_4 x_1) + a_{31} (y_2 x_4 - y_4 x_2) + a_{12} (y_3 x_4 - y_4 x_3) = 0 \end{aligned}$$

of aan:

$$\begin{aligned} & (-a_{34} y_2 + a_{24} y_3 - a_{23} y_4) x_1 + (a_{34} y_1 - a_{14} y_3 - a_{31} y_4) x_2 \\ & + (-a_{24} y_1 + a_{14} y_2 - a_{12} y_4) x_3 + (a_{23} y_1 + a_{31} y_2 + a_{12} y_3) x_4 = 0. \end{aligned}$$

Wanneer de coëfficiënten dezer vergelijking niet alle nul zijn, stelt de vergelijking een door Y gaand vlak voor. Het punt Y kan dan en slechts dan zoo gekozen worden, dat de coëfficiënten alle verdwijnen, als de determinant

$$\begin{vmatrix} 0 & -a_{34} & a_{24} & -a_{23} \\ a_{34} & 0 & -a_{14} & -a_{31} \\ -a_{24} & a_{14} & 0 & -a_{12} \\ a_{23} & a_{31} & a_{12} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

is, dat is dus als:

$$a_{34}^2 a_{12}^2 + a_{34} a_{24} a_{12} a_{31} + a_{23} a_{34} a_{14} a_{12} + a_{34} a_{14} a_{12} a_{23} \\ + a_{34} a_{31} a_{24} a_{12} + (a_{24} a_{31} + a_{23} a_{14})^2 = 0$$

is, of als:

$$(a_{23} a_{14} + a_{31} a_{24} + a_{12} a_{34})^2 = 0$$

is, dat is, als het lineaire complex, dat door de vergelijking (3) voorgesteld wordt, speciaal is. Inderdaad vormen dan de punten der rechten, die door een punt Y van de richtlijn gaan, de geheele ruimte; voor een niet op de richtlijn gelegen punt Y vormen ze een plat vlak. Daarentegen vormen, zooals nu gebleken is, voor ieder punt Y der ruimte de punten der rechten van een niet speciaal lineair complex, die door Y gaan, een plat vlak.

We beschouwen nu een niet speciaal lineair complex Γ en een rechte l , die niet tot Γ behoort. De door een punt P van l gaande rechten van Γ vormen een l niet bevattenden stralenwaaier; zij π het vlak van dezen waaier. Evenzoo behoort bij een van P verschillend punt Q van l een l niet bevattend vlak κ . De beide vlakken π en κ snijden elkaar volgens een rechte m , die l kruist. Tot den waaier der rechten van Γ , die door een punt M van m gaan, behooren de rechten MP en MQ ; het vlak, dat de door M gaande rechten van Γ bevat, is dus het vlak ML . Hieruit volgt, dat de m snijdende rechten van Γ die rechten zijn, die behalve m ook l snijden. Het lineaire complex Γ bevat dus het stelsel der rechten, die l en m snijden; de vlakken der waaiers van Γ , die hun toppen op l hebben, gaan door m en de vlakken der waaiers van Γ , die hun toppen op m hebben, zijn de door l gaande vlakken. De rechte m heet t.o.v. Γ aan l toegevoegd; blijkbaar is nu ook de rechte l t.o.v. Γ aan m toegevoegd, zoodat we zeggen kunnen, dat l en m t.o.v. Γ aan elkaar toegevoegd zijn. Evenals l behoort m niet tot Γ ; immers gaan de vlakken der waaiers van Γ met toppen op m door de m kruisende rechte l , zoodat geen dezer waaiers m kan bevatten. De rechten van Γ , die in een willekeurig vlak door m gelegen zijn en bijgevolg m en dus ook l snijden, vormen een waaier met top op l ; evenzoo vor-

men de rechten van Γ , die in een willekeurig vlak door l liggen, een waaier met top op m .

Gemakkelijk zien we nu ook in, dat de rechten van Γ , die in een willekeurig vlak α liggen, een waaier vormen. Behoorden immers alle rechten van α tot Γ , dan zou een rechte van Γ , die door een niet in α gelegen punt P gaat, α in een punt S snijden, dat niet slechts de top zou zijn van een waaier, maar van een schoof van tot Γ behorende rechten, zoodat Γ dan een speciaal lineair complex zijn zou. Er ligt dus zeker een rechte l in α , die niet tot Γ behoort; volgens het zoeven gevondene, vormen de in α gelegen rechten van Γ nu een waaier, waarvan het snijpunt van α met de aan l t.o.v. Γ toegevoegde rechte m de top is.

We keeren nu terug tot de figuur, die bij de stelling van *Pappus* behoort, en we beginnen met deze stelling te bewijzen door van de uiteengezette eigenschappen der stralenmeetkunde gebruik te maken.

Hiertoe denken we ons een punt O , dat niet in het vlak $(l, l') = \lambda$ gelegen is. (We herinneren er aan, dat de beide elkaar snijdende dragers der puntendrietallen (A, B, C) en (A', B', C') resp. l en l' genoemd werden). We nemen nu in het vlak Ol een rechte m en in het vlak Ol' een rechte m' aan, zoodanig, dat m en m' elkaar kruisen. De rechten l en l' zijn dus resp. de centrale projecties van m en m' vanuit het centrum O op het tafereel λ . De punten A, B en C van l zijn de centrale projecties van de punten P, Q en R van m en de punten A', B' en C' van l' zijn de centrale projecties van de punten P', Q' en R' van m' .

Een lineair complex Γ , dat voorgesteld wordt door de vergelijking (3), gaat dan en slechts dan door de vijf rechten m, m', PP', QQ' en RR' , als de coëfficiënten dezer vergelijking voldoen aan de vijf betrekkingen, die men verkrijgt door voor de onbepaalden p_{ik} achtereenvolgens de lijncoördinaten der genoemde vijf rechten te substitueeren. Men komt zoo tot vijf lineaire homogene vergelijkingen in de coëfficiënten a_{ik} . Deze vergelijkingen zijn onderling onafhankelijk. Immers wordt bijv. aan de tweede, derde, vierde en vijfde, maar niet aan de eerste vergelijking voldaan door het speciale lineaire complex, dat de rechte m' tot richtlijn heeft. Ook wordt aan de eerste, tweede, vierde en vijfde vergelijking, maar niet aan de derde vergelijking voldaan door het speciale lineaire complex, dat de rechte QR' tot richtlijn heeft. Zoo is er bij iedere der aangegeven

vijf vergelijkingen een lineair complex aan te geven, dat niet aan deze vergelijking, maar wel aan de andere vier voldoet.

Deze vijf onderling onafhankelijke homogene lineaire vergelijkingen met zes onbekenden hebben één lineair onafhankelijke oplossing, d.w.z. er is een oplossing

$$a_{ik} = {}_1a_{ik},$$

die van de nuloplossing verschilt, terwijl alle oplossingen door de formules

$$a_{ik} = \lambda_1 a_{1k}$$

gegeven worden, waarin λ een van i en k onafhankelijke willekeurige constante voorstelt. Elk der van de nuloplossing verschillende oplossingen dezer vijf vergelijkingen geeft hetzelfde lineaire complex Γ . Er is dus één en slechts één lineair complex, dat de vijf rechten m , m' , PP' , QQ' en RR' bevat.

Dit lineaire complex is niet speciaal. Immers zijn er twee en slechts twee lineaire complexen, die de rechten m , m' , QQ' en RR' bevatten, namelijk die, welke de rechten QR' en $Q'R$ tot richtlijnen hebben, en deze beide rechten kruisen PP' . Ook is er één en slechts één speciaal lineair complex, dat m' , PP' , QQ' en RR' bevat, namelijk dat, hetwelk m' tot richtlijn heeft, terwijl deze richtlijn de rechte m niet snijdt.

Er is dus één en slechts één lineair complex Γ , dat de vijf rechten m , m' , PP' , QQ' en RR' bevat; dit complex is niet speciaal.

Geen der zes rechten QR' , $Q'R$, PR' , $P'R$, PQ' en $P'Q$ behoort tot Γ . Immers vormen bijv. de tot Γ behorende rechten, die van Q uitgaan, den waaier, die QQ' en m bevat en deze bevat QR' niet; anders zou namelijk de rechte m' twee verschillende punten Q' en R' met het vlak van den waaier gemeen hebben en dus met m in dit vlak liggen, terwijl m en m' elkaar kruisen.

De aan QR' t.o.v. Γ toegevoegde rechte is de snijlijn van de vlakken der beide waaiers van Γ , die Q en R' tot toppen hebben, dat zijn de vlakken $QQ'R$ en $Q'RR'$, de aan QR' t.o.v. Γ toegevoegde rechte is dus $Q'R$. Evenzoo blijkt, dat aan PR' de rechte $P'R$ en aan PQ' de rechte $P'Q$ t.o.v. Γ toegevoegd is. We herinneren er nu aan, dat alle transversalen van twee niet tot Γ behorende, aan elkaar toegevoegde rechten, tot Γ behooren. De door O gaande transversaal van QR' en $Q'R$, de O bevattende transversaal van PR' en $P'R$ en de uit O getrokken transversaal van PQ' en $P'Q$ behooren

dus tot één waaier, namelijk den waaier van Γ , die O tot top heeft. De snijpunten dezer drie transversalen met het vlak $l' = \lambda$ liggen bijgevolg op één rechte. De eerstgenoemde transversaal snijdt het vlak λ in het snijpunt der centrale projecties (uit O op λ) van QR' en $Q'R$, dat is in het snijpunt van BC' en $B'C$; de tweede transversaal treft λ in het snijpunt van AC' en $A'C$ en de laatstgenoemde transversaal heeft met λ het snijpunt van AB' en $A'B$ gemeen. De snijpunten van BC' en $B'C$, van AC' en $A'C$ en van AB' en $A'B$ liggen dus op één rechte. Hiermede is de in het begin genoemde stelling van Pappus bewezen.

Met behulp van beschouwingen uit de stralenmeetkunde hebben we zoo de rechte $\left(\begin{smallmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{smallmatrix} \right)$ verkregen. Op analoge wijze kunnen we de rechte $\left(\begin{smallmatrix} ABC \\ B'C'A' \end{smallmatrix} \right)$ voor den dag brengen. Hiertoe denken we ons het niet speciale lineaire complex Γ_1 , dat de rechten PQ' , QR' , RP' , m en m' bevat; het vlak van den waaier van rechten van Γ_1 , die O tot top heeft, snijdt λ volgens de rechte $\left(\begin{smallmatrix} ABC \\ B'C'A' \end{smallmatrix} \right)$. Verder geeft het lineaire complex Γ_2 , dat PR' , QP' , RQ' , m en m' bevat, op dezelfde wijze de rechte $\left(\begin{smallmatrix} ABC \\ C'A'B' \end{smallmatrix} \right)$.

De vlakken der waaiers van Γ , die twee verschillende punten Y en Z van m tot toppen hebben, verschillen van elkaar. Immers bevat ieder vlak slechts één stralenwaaier van Γ .

Wanneer de punten Y en Z resp. de punten (y_1, y_2, y_3, y_4) en (z_1, z_2, z_3, z_4) zijn, dan zijn de vergelijkingen dezer vlakken resp.:

$$\Sigma a_{ik} (y_i x_k - y_k x_i) = 0$$

en

$$\Sigma a_{ik} (z_i x_k - z_k x_i) = 0.$$

Het vlak van den waaier van Γ , die het punt P

$$(\lambda y_1 + \mu z_1, \lambda y_2 + \mu z_2, \lambda y_3 + \mu z_3, \lambda y_4 + \mu z_4)$$

van m tot top heeft, wordt gegeven door de vergelijking:

$$\Sigma a_{ik} \{ (\lambda y_i + \mu z_i) x_k - (\lambda y_k + \mu z_k) x_i \} = 0$$

of

$$\lambda \Sigma a_{ik} (y_i x_k - y_k x_i) + \mu \Sigma a_{ik} (z_i x_k - z_k x_i) = 0.$$

Op deze wijze verkrijgen we een één-éénverwantschap tusschen de punten P van m en de vlakken π door m , die projectief is, d.w.z. zoodanig is, dat de dubbelverhouding van vier punten P van m gelijk

is aan de dubbelverhouding der vier bijbehorende vlakken door m . Wanneer het bij het punt P van m behorende vlak π de rechte m' in het punt P' snijdt, is PP' de van P uitgaande rechte van Γ , die m' treft. We zien dus, dat we door aan het punt P , waarin een m en m' snijdende rechte van Γ de rechte m snijdt, steeds het punt P' toe te voegen, waarin dezelfde rechte van Γ de rechte m' snijdt, een één-éénverwantschap verkrijgen tusschen de puntenreeksen op m en m' , die projectief is, omdat de bij de punten P_1, P_2, P_3, P_4 van m behorende punten P'_1, P'_2, P'_3, P'_4 uit m' gesneden worden door de vier vlakken $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$, die bij P_1, P_2, P_3, P_4 behoren en de dubbelverhouding $(\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4)$ zooals we zooeven vonden, gelijk is aan de dubbelverhouding (P_1, P_2, P_3, P_4) . Hieruit volgt, dat de rechten van Γ , die m en m' snijden, een regelschaar van den tweeden graad vormen.

In de zoo gevonden verwantschap tusschen de puntenreeksen op m en m' zijn aan de punten P, Q en R van m resp. de punten P', Q' en R' van m' toegevoegd. Het bij een willekeurig punt M van m behorende punt M' van m' wordt door de gelijkheid

$$(M, P, Q, R) = (M', P', Q', R')$$

bepaald.

Evenzoo wordt het punt M' , dat aan M toegevoegd wordt door de één-éénverwantschap tusschen de puntenreeksen op m en m' , die op analoge wijze door Γ_1 bepaald wordt, gevonden uit de gelijkheid:

$$(M, P, Q, R) = (M', Q', R', P').$$

De rechte MM' is bijgevolg dan en slechts dan een gemeenschappelijke rechte van Γ en Γ_1 , als voldaan is aan de gelijkheid:

$$(M', P', Q', R') = (M', Q', R', P').$$

Wanneer nu $(M', P', Q', R') = \lambda$ is, dan geldt voor elke ligging van M' op m'

$$(M', Q', R', P') = \frac{1}{\lambda} \quad \text{of} \quad (M', Q', R', P') = \frac{1}{1 - (M', P', Q', R')} = \frac{1}{1 - \lambda}.$$

De rechte MM' is dus dan en slechts dan een gemeenschappelijke rechte van Γ en Γ_1 , als voldaan is aan:

$$\lambda = \frac{1}{1 - \lambda} \quad \text{of} \quad \lambda^2 = \frac{1}{1 - \lambda} \quad \text{of} \quad \lambda^2(1 - \lambda) = 1$$

of aan: $\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

Deze vergelijking levert ons twee toegevoegd imaginaire punten M_1' en M_2' op m' en daarmee ook twee toegevoegd imaginaire punten M_1 en M_2 op m (bepaald door $(M_1, P, Q, R) = (M_1', P', Q', R') = \lambda_1$ en $(M_2, P, Q, R) = (M_2', P', Q', R') = \lambda_2$, als λ_1 en λ_2 de toegevoegd imaginaire wortels dezer vierkantsvergelijking zijn); zóódanig, dat de toegevoegd imaginaire rechten M_1M_1' en M_2M_2' zoowel tot Γ , als tot Γ_1 behooren.

De punten M' , waarvoor geldt:

$$(M', Q', R', P') = (M', R', P', Q')$$

zijn nu, wat evenzoo blijkt, de punten M' , die voldoen aan:

$$(M', Q', R', P') = \lambda_1 \text{ of } \lambda_2,$$

dus weer de punten M_1' en M_2' . Immers is:

$$(M_1', Q', R', P') = (M_1', P', Q', R') = \lambda_1$$

en

$$(M_2', Q', R', P') = (M_2', P', Q', R') = \lambda_2.$$

Daar tevens

$$(M_1, P, Q, R) = \lambda_1 \text{ en } (M_2, P, Q, R) = \lambda_2$$

geldt, behooren de rechten M_1M_1' en M_2M_2' ook tegelijk tot Γ_1 en Γ_2 . Deze rechten zijn dus gemeen aan Γ , Γ_1 en Γ_2 .

Hieruit volgt, dat de beide toegevoegd imaginaire, elkaar kruisende rechten M_1M_2' en M_2M_1' t.o.v. Γ , Γ_1 en Γ_2 aan elkaar toegevoegd zijn. De door O gaande transversaal t van M_1M_2' en $M_1'M_2$ behoort dus tot Γ , Γ_1 en Γ_2 en ligt bijgevolg in de vlakken der waaiers van Γ , Γ_1 en Γ_2 , die O tot top hebben.

Het snijpunt van t met het vlak $\lambda = ll'$ ligt op de drie snijlijnen der genoemde vlakken met λ , dat zijn de rechten

$$\begin{pmatrix} A, B, C \\ A', B', C' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A, B, C \\ B', C', A' \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} A, B, C \\ C', A', B' \end{pmatrix}.$$

De drie rechten $\begin{pmatrix} A, B, C \\ A', B', C' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A, B, C \\ B', C', A' \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} A, B, C \\ C', A', B' \end{pmatrix}$ gaan bijgevolg door één punt.

Hieruit volgt onmiddellijk, dat ook de rechten $\begin{pmatrix} A, B, C \\ A', C', B' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} A, B, C \\ C', B', A' \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} A, B, C \\ B', A', C' \end{pmatrix}$ door één punt gaan; dit blijkt namelijk, als we de punten C' en B' resp. B' en C' noemen, en de namen der andere punten onveranderd laten.

Dit punt is het snijpunt van λ met de door O gaande transversaal der beide rechten, die m , m' en de twee m en m' treffende gemeenschappelijke beschrijvende van Γ_3 , Γ_4 en Γ_5 snijden, als Γ_3 , Γ_4 en Γ_5 de lineaire complexen zijn, die resp. bepaald zijn door m , m' , PP' , QR' en RQ' , door m , m' , PR' , QQ' en RP' en door m , m' , PQ' , QP' en RR' .

Deze twee gemeenschappelijke beschrijvende zijn de beide rechten, die m en m' resp. snijden in punten N en N', waarvoor geldt:

$$(N, P, Q, R) = (N', P', R', Q') \\ = (N', R', Q', P') = (N', Q', P', R').$$

Dit geeft, als $(N', P', Q', R') = \mu$ is, de voorwaarde:

$$\frac{1}{\mu} = \frac{\mu}{\mu - 1} = 1 - \mu$$

of

$$\mu^2 - \mu + 1 = 0.$$

De punten N' zijn dus de zooeven gevonden punten M_1' en M_2' . Om echter de nu gezochte gemeenschappelijke rechten van Γ_3 , Γ_4 en Γ_5 te verkrijgen, moeten we M_1' en M_2' resp. met M_2 en M_1 verbinden. Immers is:

$$(M_2, P, Q, R) = \mu_2 = \frac{1}{\mu_1} = \frac{1}{(M_1', P', Q', R')} = (M_1', P', R', Q'),$$

en

$$(M_1', P, Q, R) = \mu_1 = \frac{1}{\mu_2} = \frac{1}{(M_2', P', Q', R')} = (M_2', P', R', Q').$$

De rechten M_1M_1' en M_2M_2' zijn dus t.o.v. Γ_3 , Γ_4 en Γ_5 aan elkaar toegevoegd en het punt, waardoor de rechten $\begin{pmatrix} ABC \\ A'C'B' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ABC \\ C'B'A' \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} ABC \\ B'A'C' \end{pmatrix}$ gaan, is het snijpunt van λ , met de door O gaande transversaal van M_1M_1' en M_2M_2' .

Daar m en m' de eenige transversalen zijn van M_1M_2' , M_2M_1' , M_1M_1' en M_2M_2' , zien we, dat de twee punten van λ , waardoor telkens drie der rechten $\begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ABC \\ B'C'A' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ABC \\ C'A'B' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ABC \\ A'C'B' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ABC \\ C'B'A' \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} ABC \\ B'A'C' \end{pmatrix}$ gaan, steeds van elkaar verschillen. Ook blijkt, dat deze punten twee diagonaalpunten zijn van een volledige

vierhoek (met imaginaire hoekpunten), waarvan l en l' de twee overstaande zijden zijn, die door geen der genoemde diagonaalpunten gaan. Hieruit volgt, dat de beide punten, waardoor telkens twee der drie rechten $\begin{pmatrix} ABC \\ A'B'C' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ABC \\ B'C'A' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ABC \\ C'A'B' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ABC \\ A'C'B' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} ABC \\ C'B'A' \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} ABC \\ B'A'C' \end{pmatrix}$ gaan, door de rechten l en l' harmonisch gescheiden worden.

Plücker vat het door hem gevondene in de volgende uitspraak samen:

„Als twee rechte lijnen en op elke daarvan drie punten gegeven zijn, dan kunnen wij deze punten door negen rechten verbinden. Deze negen rechten snijden elkaar in achttien nieuwe punten. Van deze achttien punten liggen zesmaal drie op een rechte lijn. Van deze zes rechte lijnen gaan er telkens drie door hetzelfde punt.¹⁾“

We hebben bovendien gevonden, dat de twee punten, waardoor telkens drie der aangewezen zes rechten gaan, door de twee gegeven rechte lijnen harmonisch gescheiden worden.

¹⁾ „Analytisch-geometrische Entwicklungen“ II pag. 20.

VIERDE VOORDRACHT.

MACHINES ALS HULPMIDDELEN IN DE WISKUNDE

DOOR

F. ZERNIKE.

Mechanische hulpmiddelen voor de wiskunde kan men in de volgende groote groepen indeelen:

- A. voor geheele getallen $\left\{ \begin{array}{ll} A\ 1 & \text{rekentafels.} \\ A\ 2 & \text{rekenmachines.} \end{array} \right.$
- B. voor continue veranderlijken $\left\{ \begin{array}{ll} B\ 1 & \text{grafische hulpmiddelen.} \\ B\ 2 & \text{machines.} \end{array} \right.$

Liever dan een overzicht te geven over het geheele uitgestrekte gebied, waarbij allés slechts oppervlakkig besproken zou kunnen worden, wil ik enkele belangrijke gevallen uitzoeken om daarop uitvoeriger te kunnen ingaan. Na eenige opmerkingen over tafels zal ik langer stilstaan bij de eigenlijke rekenmachines (vermenigvuldigmachines) en daarvan in het bijzonder de Mercedes-Euklid machine behandelen, om daarna van de groep B 2 alleen de integratoren, speciaal de machine van Bush voor het integreeren van gewone differentiaalvergelijkingen, te bespreken.

1. *Tafels.* Vermenigvuldigingen en deelingen met groote getallen kunnen, vergeleken met de bewerking „uit de hand”, belangrijk bekort worden door het gebruik van *rekentafels*, die niet anders zijn dan groote tafels van vermenigvuldiging. Zoo bevat de bekende tafel van Crelle de millioen producten van alle getallen van drie cijfers onderling, waarbij alleen de twee laatste cijfers voor de tien producten op één regel gelijk zijn en dus niet herhaald worden. Om hiermee bijv. een product te berekenen van twee getallen van 6 cijfers (wat in veel gevallen een voldoende nauwkeurigheid geeft) verdeelt men beide in groepen van 3 en ontleent de 4 gedeeltelijke producten aan de tafel, die daarvoor slechts op 2 plaatsen opgeslagen behoeft te worden. Het verschil met een logarithmentafel is ten eerste, dat geen terugzoeken noodig is, ten tweede, dat de nauwkeurigheid onbeperkt is.

Hoe belangrijk dit eenvoudige hulpmiddel kan zijn, blijkt wel uit het werk van de Fransche astronoom Andoyer, die alleen met behulp van „Crelle” in enkele jaren zijn nieuwe fundamenteele

goniometrische tafels in 14 decimalen met opklimming van $10''$ berekend heeft.

Over logarithmentafels zij alleen vermeld, dat ze niet slechts in 4 en 5 decimalen bestaan, maar ook in 6, 7, 8 en 10. Een tafel in 20 decimalen, tot 100000, die de laatste tijd is uitgegeven, behoort niet meer tot de rekenhulpmiddelen: om daarin te interpoleren is een vrij lange berekening met een flinke rekenmachine noodig.

Terwijl de 4 dec.tafel de log. van alle getallen van 3 cijfers geeft (tot 1000 gaat) en één blad beslaat, gaat de 6 dec.tafel tot 100000 en beslaat 180 bladzijden. Voor 7 en nog meer voor 8 dec. zou men eigenlijk tot één miljoen moeten gaan; maar een plan daarvoor is op de groote kosten afgestuit. Men gaat nu hoogstens tot 200000, 360 bladzijden, en geeft de goniometrische log. dienovereenkomstig voor elke seconde.

2. *Rekenmachines.* ¹⁾ Men onderscheidt *telmachines* en *rekenmachines*, de eerste eigenlijk alleen voor optellen en aftrekken inge-

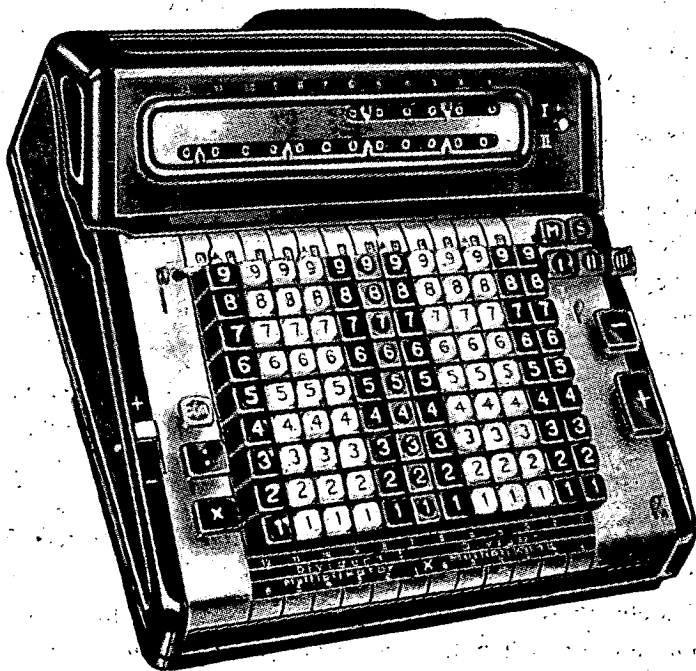


Fig. 1. Moderne vol-automatische rekenmachine. De wagen met hoofdtelwerk en quotientwerk zit bovenaan, het instelwerk wordt bediend door het rechterdeel van het toetsenbord, in het linkerdeel wordt de vermenigvuldiger ingesteld.

richt (al zal de handelaar u precies voordoen hoe men daarop vermenigvuldigen kan), de tweede voor vermenigvuldigen en meestal ook deelen. We bespreken alleen de rekenmachines. Ze bestaan steeds uit de volgende deelen (zie fig. 1):

- A. het *instelwerk*, uiterlijk kenbaar aan de van boven naar beneden verschuifbare knopjes, bij moderne machines vervangen door verticale rijen toetsen 1 9, waarmee het vermenigvuldigtal ingesteld wordt. Belangrijk is verder het *controlevenster*, waarin de ingestelde cijfers in één horizontale rij verschijnen. Dit ontbreekt slechts bij de eenvoudigste uitvoeringen.
- B. het *hoofdtelwerk* of producttelwerk, dat een horizontale rij van telwieltsjes met de cijfers 0—9 bevat, één voor elk cijfer van het product. Bij elke omwenteling van de aandrijvende as van de machine worden deze wieltsjes zooveel cijfers verder gedraaid als het instelwerk aangeeft, het ingestelde getal dus bij dat in het hoofdtelwerk opgeteld.
- C. het omwentelings- of *quotienttelwerk*, een gewoonlijk eenvoudiger telwerk, dat bij elke omwenteling één verspringt.

Essentieel is verder, dat A met het bijbehorende aandrijvende mechanisme ten opzichte van B en C horizontaal verstelbaar is, zoodat het ingestelde getal in allerlei decimale rangen bij het hoofdtelwerk kan worden opgeteld, terwijl dan ook in het quotienttelwerk telkens het overeenkomstige cijfer verspringt. Meestal zijn B en C aangebracht in een *wagen* of slede, die verschuifbaar is in het vaste deel, dat A bevat. Alleen bij de Facit is dit andersom, wat zekere voordeelen geeft.

Hoe is nu het mechanisme van een dergelijke machine? Om dit nader te kunnen bespreken, moeten we een bepaald voorbeeld kiezen. Liever dan het oudste reeds van Leibniz afkomstige type, dat vaak behandeld is, kies ik daarvoor een moderne machine, die ik hier kan demonstereen, de Mercedes-Euklid. Fig. 2 geeft zeer schematisch de belangrijkste onderdeelen weer.

Het instelwerk A is het gedeelte boven de stippellijn, de wagen met hoofdtelwerk B het deel daaronder. Draait men de boven de machine uitstekende kruk K een halve slag om, dan wordt door een krukas en krukstang binnen in de machine de hefboom H naar rechts bewogen. Deze grijpt over tien pennen, die aan de met

0 9 aangeduide tandstrooken zitten. De hefboom zal om de bovenste pen draaien, omdat de langere tandstrook 0 door de grensel met uitstekende knop G vastgehouden wordt. Blijkbaar zullen

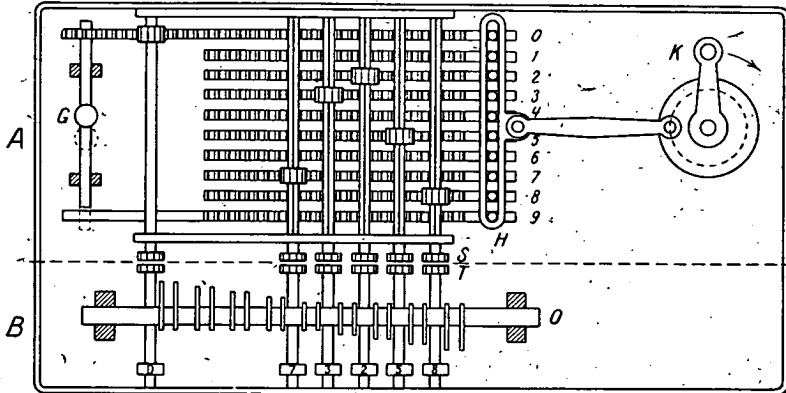


Fig. 2. Mechanisme van de Mercedes-Euklid machine (schematisch).

de andere tandstrooken zich nu naar rechts verplaatsen over afstanden, die zich verhouden als de bijgeschreven cijfers. Het *instellen* van een getal geschiedt door het verschuiven van tandwieltjes met 10 tanden langs de vierkante assen, die loodrecht boven de tandstrooken liggen. In de figuur zijn er 5 geteekend en is het getal 73258 ingesteld. De tandstrook 7 bijv. zal zodoende alle op 7 ingestelde wieltjes met hun vierkante assen en de daaraan bevestigde tandwieltjes S meenemen, waarbij de afmetingen zoo gekozen zijn, dat deze 7 tiende omwenteling maken.

Het *hoofdtelwerk* B bevat een aantal assen in het verlengde van de vierkante assen, die bovenaan eindigen in tandwieltjes T, geheel gelijk aan S. In de ruststand zijn S en T vrij van elkaar en kan de wagen vrij verschoven worden. Door een veer wordt hij steeds naar links getrokken, terwijl een pal zorgt, dat hij alleen kan blijven staan in de verschillende standen waarin de assen tegenover elkaar liggen. Begint men echter de kruk te draaien, dan gaat onmiddellijk een metalen strook onder S en T omhoog, waaraan los draaibare tandwieltjes zitten, die zoo breed zijn dat elk tegelijk in een wieltje S en T grijpt. De telwerkassen worden dus meegenomen en de daarop bevestigde cijferschijven over de ingestelde bedragen gedraaid. Gedurende de tweede helft van de omwenteling van K is de koppeling tusschen S en T verbroken, zoodat de wieltjes S dan terugdraaien maar het telwerk niet meenemen. Een belangrijk voor-

deel van dit aandrijfmechanisme is, dat het telwerk losgelaten wordt in het omkeerpunt van de beweging van H, dus op een oogenblik dat het zelf een snelheid nul heeft. Daardoor is het uitgesloten dat het telwerk bij snel werken tengevolge van zijn traagheid doorschiet. Bij andere systemen moet men speciale inrichtingen aanbrengen om het telwerk met een stoot vast te houden, terwijl het ook met een stoot in beweging komt.

3. *Tientallen-overbrenging.* In fig. 2 is de stand van het hoofdtelwerk aangegeven als de kruk éénmaal rondgedraaid is. Draait men nu een tweede slag om, dan zou er volgens de gegeven beschrijving 46406 komen in plaats van 146516. Er moet blijkbaar nog een inrichting gemaakt worden waardoor bij het draaien van een cijferschijf van 9 naar 0 tevens de links gelegen schijf één verder gedraaid wordt. Deze „tientallen-overbrenging” kan in beginsel op verschillende manieren ingericht worden. Een eerste methode is de *continue*: men koppelt de telwerkassen door tandwielen zóó, dat elke volgende tienmaal langzamer door de rechts gelegene meegenomen wordt, zooals dat in onze gasmeters het geval is. Het zal tegenwoordig wel algemeen bekend zijn, dat de aflezing daardoor bemoeilijkt wordt, omdat de cijfers meestal in tussenstanden staan. Men kan dit zóó formuleeren: een deel van de tientallen-overbrenging moet door de gebruiker, die het getal afleest, plaats vinden. Het is verder constructief niet zoo eenvoudig het zoo in te richten, dat elke as ook onafhankelijk van de rechts gelegene gedraaid kan worden. De toch eigenlijk zeer mooie continue tientallen-overbrenging komt dan ook alleen voor bij twee slechts in weinige exemplaren uitgevoerde machines, die door mathematici geconstrueerd zijn (Tchebicheff, Seling).

Een tweede methode noemt men de *directe* overbrenging. In haar beste vorm wordt daarbij door het draaien van elke cijferschijf een veer gespannen, die bij de overgang $9 \rightarrow 0$ plotseling weer lospringt en een klap geeft aan de volgende schijf, zóó snel dat het niet hindert dat die schijf zelf onderwijl in beweging is. Een voordeel van deze niet veel gebruikte methode is, dat de tientallen-overbrenging geheel bij het telwerk ondergebracht is en dus met de wagen mee verschuift.

Dit is n.l. niet het geval bij de derde, meest gebruikte methode, de *uitgestelde* tientallen-overbrenging. Bij deze wordt door elke

overgang $9 \rightarrow 0$ alleen een overbrenging *voorbereid*. Bij de Mercedes-Euklid bijv. schuift een huls op de telwerkas naar een nieuwe stand (in fig. 2 niet weergegeven). Gedurende de tweede helft van de omwenteling wordt dan de voorbereide overbrenging uitgevoerd. Daarvoor dient de as O, die met de krukas gekoppeld is en die voor elke plaats in het product twee nokken draagt. De eene, die het eerst komt, duwt tusschen de telwerkassen een bewegelijk stuk omhoog, dat daarna onverrichterzake terugvalt. Is echter de huls op de rechter as verschoven, dan wijkt daardoor het stuk naar links uit, waardoor een daaraan uitstekende tand in een palwielje van de linker as grijpt en deze een cijfer verder duwt. Dit is mogelijk omdat de telwerkassen niet meer aan het instelwerk gekoppeld zijn. De tweede nok drukt daarna de huls in zijn oude stand terug.

In het bijzondere geval dat de linker schijf al op 9 staat, wordt door de overbrenging een nieuwe voorbereid. Ook deze moet nog uitgevoerd worden, daarom zijn de nokken spiraalsgewijze op de as O geplaatst, zoodat de uitvoering trapsgewijze van rechts naar links plaats vindt. Dit is de noodzakelijke laatste rest van ons van rechts naar links werken bij de gewone optelling. De groote snelheid der rekenmachines ligt dus daaraan, dat zij het grootste deel van het werk op alle decimale plaatsen *tegelijk* uitvoeren, alleen de tientallen-overbrenging stap voor stap. Zoodoende is voor de laatste toch nog evenveel tijd (halve omwenteling) noodig als voor het eerste deel.

Over het *vermenigvuldigen* kan ik nu kort zijn. Bij iedere slag van de kruk wordt het ingestelde getal, het vermenigvuldigtal, bij het hoofdtelwerk gevoegd. Wil ik dus met 673219 vermenigvuldigen, dan zet ik de wagen geheel rechts en doe 6 slagen, druk dan met de linkerhand op een knop waardoor de wagen één verschuift en draai 7 keer, enz. Door de eerste bewerking is het meest linksche wielje van het quotienttelwerk op 6 gekomen, door de tweede het volgende op 7 enz., zoodat ik na afloop daar de vermenigvuldiger kan aflezen, in het hoofdtelwerk het product.

4. *Aftrekken en deelen*. Er zijn allerlei machines, die aftrekken als men eenvoudig de kruk andersom draait. Daarvoor is blijkbaar een afzonderlijk tientaloverbrenging vereischt, die ook weer van rechts naar links werkt. Het terugdraaien, bijv. ook ter correctie als men bij het vermenigvuldigen een keer te veel gedraaid heeft, is een

voordeel dat evenwel vervalt als de machine electrisch gedraaid wordt. Bij andere machines draait de kruk steeds in dezelfde richting en moet alleen een knop verzet worden om af te trekken. Bij de Mercedes-Euklid is dit de grendel G. Zet men deze in de gestippelde stand, dan wordt de bovenste tandstrook vrijgelaten en de onderste vastgezet. Dan zal de hefboom H om de onderste pen draaien en elke tandstrook zich verplaatsen over de aanvulling tot 9 van het bijgeschreven cijfer. Daar al het overige gelijk blijft, zal de machine het arithmetisch complement van het ingestelde getal optellen, mits nog voor twee dingen gezorgd wordt. Het laatste cijfer moet 1 verhoogd worden, hiervoor dient een (niet geteekende) inrichting waardoor altijd een tientaloverbrenging op de laatste as plaats vindt. Ten tweede moeten we bedenken, dat als de machine bijv. 8 cijfers in instelwerk en quotientwerk heeft, er 16 in het productwerk moeten zijn. In de meest linksche stand van de wagen zou het hoofdtelwerk dus links 8 plaatsen buiten het instelwerk uitsteken, terwijl toch op al deze plaatsen 9 moet worden opgeteld. Hiervoor dienen assen met niet verstelbare tandwielletjes, die in de verlengde nulstrook grijpen. Eén daarvan is in de figuur aangegeven. Trekt men dus met deze machine 1 af van $00 \dots 0$, dan is niet zooals bij andere machines een doorgaande overbrenging noodig, maar worden alle cijferschijven tot 9 gedraaid, behalve de laatste tot 8, die bij de tweede halve-slag op 9 komt. Veel moeilijker heeft de machine het, als men 0 aftrekt, want dan krijgt men eerst $99 \dots 9$, daarna van rechts naar links de doorgaande overbrenging (demonstratie).

Juist omdat de gewone rekenmachines het vermenigvuldigen door herhaald optellen uitvoeren, kunnen ze ook gemakkelijk *deelen*. Daartoe zet men het deeltal in het hoofdtelwerk, de deeler in het instelwerk; zet de wagen geheel rechts en trekt zoo vaak af als het gaat. Het eerste cijfer van het quotient staat dan in het quotienttelwerk. Vervolgens verschuift men de wagen één plaats, trekt weer af, enz. Nu is het typeerend voor het machine-rekenwerk, dat deze kortste methode gewoonlijk niet gevolgd wordt, en wel omdat ze voortdurende oplettendheid eischt. Liever dan het hoofdtelwerk aldoor in het oog te houden om dadelijk te kunnen ophouden, zoodra het daardoor aangegeven getal kleiner dan de deeler is geworden, laat men dit door de machine zelf uitmaken. Daartoe moet men nog een keer aftrekken, het hoofdtelwerk gaat dan door nul

en dit wordt bij vele machines door een belsignaal aangegeven (dat dus in de plaats komt van de tientaloverbrenging van de meest link-sche as). Men draait dus eenvoudig door totdat de bel klinkt, draait één terug, verzet de wagen, draait weer, enz. Zoodoende heeft men voor elk cijfer twee omwentelingen meer noodig, maar bereikt daar-door, dat het deelen veel meer automatisch gaat (demonstratie met electrische „Monroe”).

In plaats van het belsignaal wordt bij de Mercedes-Euklid de kruk gegrendeld. Zoodra men daarna op optellen omschakelt, verspringt ook de wagen en is de kruk weer vrij. Draait men dan verder, dan telt de machine dus op en maakt zoo de negatief geworden rest weer grooter, totdat opnieuw grendeling optreedt, zoodra deze positief is, enz. Bij deze manier is *gemiddeld* per cijfer slechts één omwen-teling te veel noodig (demonstratie).

5. *Verdere mogelijkheden.* De gewone rekenmachines kennen dus niet de tafel van vermenigvuldiging, ze moeten dit vervangen door domweg herhaalde optelling. Nu is reeds meer dan vijftig jaar geleden door een Franschen uitvinder een machine geconstrueerd, die deze tafel gebruikt. Het principe is vooral bekend geworden door de Zwitsersche machine „Millionär”, die nog altijd in de handel is. De werking kan schematisch als volgt aangegeven worden. Het instelwerk is geheel als bij de Mercedes-Euklid, behalve dat de tandstrooken niet door een proportionaal-hefboom, maar door een schablone bewogen worden en door veeren daarna teruggaan. Men denke in fig. 2 de nulde tandstrook weg. Om nu bijv. met 7 te vermenigvuldigen, is er een trapvormig uitgesneden plaat, waarvan de treden achtereenvolgens hoogten hebben evenredig met

071421283542495663

terwijl hun breedte half zoo groot is als de afstand van de tand-strooken. Bij de eerste halve slag wordt deze plaat van links naar rechts tegen de linkeruiteinden van de tandstrooken gedrukt zóó dat deze resp. 0, 1, 6, dus de tientallen-cijfers van de tafel van 7 verschuiven, bij de tweede halve slag gaat een en ander terug en heeft de tientallen-overbrenging plaats. Maar nu moet men nog een slag doen, daarbij verspringt de wagen eerst één naar links en gaat de schablone één tree opzij, zoodat de tandstrooken 7, 4, 3, de eenheden-cijfers van de tafel van 7, verschuiven. Natuurlijk is een

kruk aangebracht, die tweemaal langzamer draait, zoodat men maar één slag behoeft te doen voor elk cijfer van de vermenigvuldiger. Door een wijzer op 1, 2, 9 te zetten, wordt de vereischte schakelnaaf naar voren gedraaid. Opmerkelijk is, dat het noodige verspringen van de wagen dus niet aan het eind van elke slag, maar midden in elke bewerking plaats vindt.

Een dergelijke machine *kan niet deelen*, d.w.z. het beschreven mechanisme is daarvoor niet geschikt, wel kan men de wijzer op 1 zetten en herhaald aftrekken evenals bij de andere machines.

Dit type geeft een belangrijke vereenvoudiging en tijdsparing bij het vermenigvuldigen, zolang men de machines met de hand draait. De laatste 25 jaar worden de andere soorten echter steeds meer electrisch aangedreven, gewoonlijk met 6—7 omwentelingen per seconde. Voor de zgn. *half-automatische* vermenigvuldiging brengt men verder 9 toetsen aan, bij het neerdrukken waarvan de motor ingeschakeld wordt en de machine zooveel slagen doet als het nummer van de toets aangeeft. Zulke machines vermenigvuldigen even eenvoudig en snel als de Millionär, zelfs overtreffen ze deze bij de nieuwste inrichting, waarbij de wagen automatisch verspringt na elk cijfer en men bovendien het volgende cijfer kan aanslaan zoodra de machine aan het werk is met het vorige. De *vol-automatische* vermenigvuldiging (fig. 1), waarbij men de geheele vermenigvuldiger eerst in de machine zet, voordat deze begint te werken, beteekent tegenover de vorige eerder een iets kleinere snelheid. Het voordeel kan echter daarin liggen, dat het aanslaan van de vermenigvuldiger te voren gecontroleerd en zoo noodig verbeterd kan worden. Veel belangrijker zou het uit controle oogpunt zijn, als men de rekenmachine van een druk-inrichting voorzagt, zooals dat tegenwoordig voor telmachines regel is. Eenvoudige inrichtingen daarvoor, die vroeger geconstrueerd zijn, schijnen in de bureau-practijk weinig ingang gevonden te hebben. Op grootscheepsche wijze geschiedt het drukken van alle getallen bij de nieuwste *boekhoudmachines*. Daarbij is bijv. een volledige schrijfmachine gekoppeld aan een electrische rekenmachine. Schrijft men met de eerste twee getallen naast elkaar in de daarvoor bestemde kolommen, dan begint daarna de rekenmachine te werken, en na eenige seconden stelt deze automatisch de schrijfmachine in beweging, die in een derde kolom het product schrijft.

Het belang van dergelijke inrichtingen zal duidelijk zijn. De moderne niet drukkende rekenmachines werken zóó snel, dat de meeste tijd heengaat met het inbrengen van de gegevens en het afschrijven van het resultaat, vooral als men beide nog wil controleeren. Op eigenaardige wijze worden ook deze bewerkingen gemechaniseerd en daardoor zeer versneld bij het *Hollerith* systeem. Het is hier niet de plaats uitvoeriger in te gaan op het daarbij gebruikte aggregaat van machines, die in de eerste plaats voor statistiek bedoeld zijn. Ik wil dus bekend veronderstellen, dat daarbij allerlei gegevens in de vorm van getallen op kaarten aangeteekend worden door daarin gaatjes te ponsen. Elk gaatje geeft door zijn verticale plaats de waarde van het ermee corresponderende cijfer aan. De-zoo „beschreven” kaarten kunnen voor allerlei doeleinden telkens weer gebruikt worden. Wat ons hier interesseert is de vermenigvuldig-machine (multiplying punch). Loopen de kaarten door deze machine, dan tasten elektrische contactveeren op elke kaart twee getallen af. De plaats waar deze op de kaart staan kan willekeurig ingesteld worden. De machine rekt vervolgens het product van deze twee getallen uit, en wel door middel van elektrische schakelrollen, die geheel analoog zijn aan de schablonen van Millionär. Het vormen van de resulterende gedeeltelijke producten geschiedt echter niet in twee étappes na elkaar, maar de tientallencijfers worden in één telwerk, de eenhedencijfers in een tweede tegelijkertijd opgeteld. Na afwerking van alle cijfers van de vermenigvuldiger worden beide resultaten samengegeld en vervolgens het product in een nog vrij gebleven deel van de kaart geponst. Het is daarmee gereed om voor volgende bewerkingen gebruikt te worden. Voor twee factoren van 4 cijfers heeft de machine per kaart 3,4 sec., voor twee van 8 cijfers 5,0 sec. noodig.

Hier volgt tenslotte een globale opgaaf van de tijd noodig voor het vermenigvuldigen van twee getallen van zes cijfers met inbegrip van instellen en afschrijven van het resultaat:

uit de hand	3,5 min.	electrische rekenmachine	15 sec.
met Crelle	1,5 „	id. half-automatisch	9 „
met 6 dec.log.	1,5 „	Hollerith	4,2 „
handrekenmachine	30 sec.		

6. *Integratoren.* Op allerlei manieren kan men machinaal een integraal uitrekenen. Men neemt bijv. als integrand een variabele elektrische stroom en stuurt die door een electriciteitsmeter. De aan-

wijzing daarvan is dan $\int i dt$. Algemeen komt het er slechts op aan, een continu instelbare snelheid te hebben en de afgelegde weg af te lezen. Om een groote nauwkeurigheid te bereiken is een mechanische methode het geschiktst. In het eenvoudigste geval gebruikt men een *meetwiel* met scherpe rand, dat met zijn as horizontaal op een horizontaal vlak afrolt, of ook schuift, het laatste als het in de richting van zijn as bewogen wordt. In het hier niet nader te bespreken geval, dat men alleen een bepaalde integraal wil vinden, kan men verder met een zeer eenvoudige geleiding van het wieltje volstaan (planimeters).

Een continu veranderlijke snelheidsoverbrenging tusschen twee assen krijgen we (fig. 3) door bovenaan de eerste, verticale as A

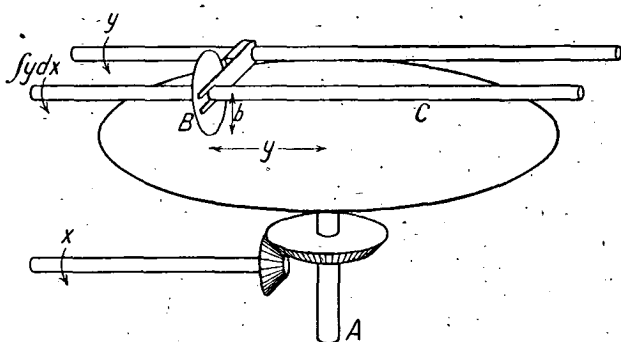


Fig. 3. Integrator.

een groote horizontale schijf te bevestigen en het meetwiel B dat op het bovenzvlak daarvan rolt, langs zijn as C verstelbaar te maken over een middellijn van de schijf. De verhouding van de hoeksnelheden van C en A zal dan $y : b$ zijn. Noemen we de hoek waarover de as A op de tijd t gedraaid is, x en die waarover C gedraaid is, z , dan is dus steeds

$$\frac{dz}{dt} = \frac{y}{b} \cdot \frac{dx}{dt},$$

en dus

$$z = \frac{1}{b} \int y dx.$$

Natuurlijk is het beschreven mechanisme slechts daarom een *integrator*, omdat y gedurende het draaien willekeurig versteld kan

worden, het wielkje schuift daarbij in radiale richting over de schijf.

Na eenige, in de figuur schematisch aangegeven, completeeringen krijgt men de volledige integrator, zooals er in de machine van Bush een aantal aanwezig zijn. Uit elke integrator komen drie horizontale assen, de eerste, voor de integratie variabele, brengt de schijf in beweging, de tweede, voor de integrand, verschuift door een schroef het wielkje (of omgekeerd bij Bush de schijf met toebehooren onder het vaststaande wielkje), de derde, uitgaande as, voor de integraal, wordt door tusschenkomst van een merkwaardige mechanische *versterker* door het meetwielkje gedreven. Het blijkt dat bij zorgvuldige uitvoering een dergelijke integrator een nauwkeurigheid van 1 : 5000 geeft. Het zal verder duidelijk zijn, dat men door achter elkaar koppelen van n integratoren uit een gegeven n^{de} afgeleide van y naast elkaar $y^{(n-1)} \dots y', y$ verkrijgt.

7. *Integreeren van differentiaalvergelijkingen.* Reeds in 1876 gaf Kelvin aan, dat men met een dergelijk samenstel van n integratoren automatisch een differentiaalvergelijking van de n^{de} orde zal kunnen integreeren, n.l. door *bovendien* de verschillende assen zoo te koppelen, dat de geeischte betrekking tusschen $y^{(n)}, \dots, y$ voortdurend vervuld is.

Dit belangrijke punt wil ik door enkele voorbeelden verduidelijken. Stel de vergelijking is

$$y^{(n)} = a y^2,$$

dan worden dus ten eerste n integraties uitgevoerd, verder het resultaat, y , in het kwadraat gebracht, — waarover straks nader — en met a vermenigvuldigd. De zoo als draaiing van een as verkregen grootheid wordt nu teruggevoerd naar de eerste integrator, zoodat dus een kringloop ontstaat. Blijkbaar kan men nog willekeurige beginwaarden voor $y^{(n)}, y^{(n-1)} \dots y$ kiezen, terwijl de verdere loop van het geheele samenstel dan bepaald is.

Het volgende haast te eenvoudige geval laat zich gemakkelijk demonstreeren. Om de eerste orde vergelijking

$$y' = a y$$

te integreeren, heb ik een lange schroef, waarop een moer draait, die tevens de naaf van het integreerwielkje is. Dit eenvoudige hulpmiddel houd ik met de hand op een met teekpapier beplakte ijzeren schijf, die op een gramfoon gelegd is. Aan de rand van de schijf begin-

nend draait de moer eerst zeer snel en gaat daarbij snel naar het midden. Maar de snelheid neemt evenredig met de afstand tot het midden af, zoodat het midden nooit bereikt wordt. Het aanrakingspunt beschrijft daardoor op de schijf een logarithmische spiraal. Door tusschenleggen van een vel carbonpapier wordt deze zichtbaar. De terugkoppeling tusschen y , de draaiing van het wielkje en y' , de verschuiving ervan, wordt hier door de schroef geleverd. Door de speed over de lengte van de schroef variabel te maken, zou men, binnen grenzen, een willekeurig functionaal verband tusschen y' en y tot stand kunnen brengen en dus de vergelijking

$$y' = f(y)$$

kunnen integreren.

Om iets meer van de eigenaardige kringloop te zien te krijgen, heb ik het volgende apparaat laten maken, dat de tweede orde vergelijking

$$y'' = \pm a^2 y$$

integreert (fig. 4). Twee integreerwieljes zijn op twee evenwijdige

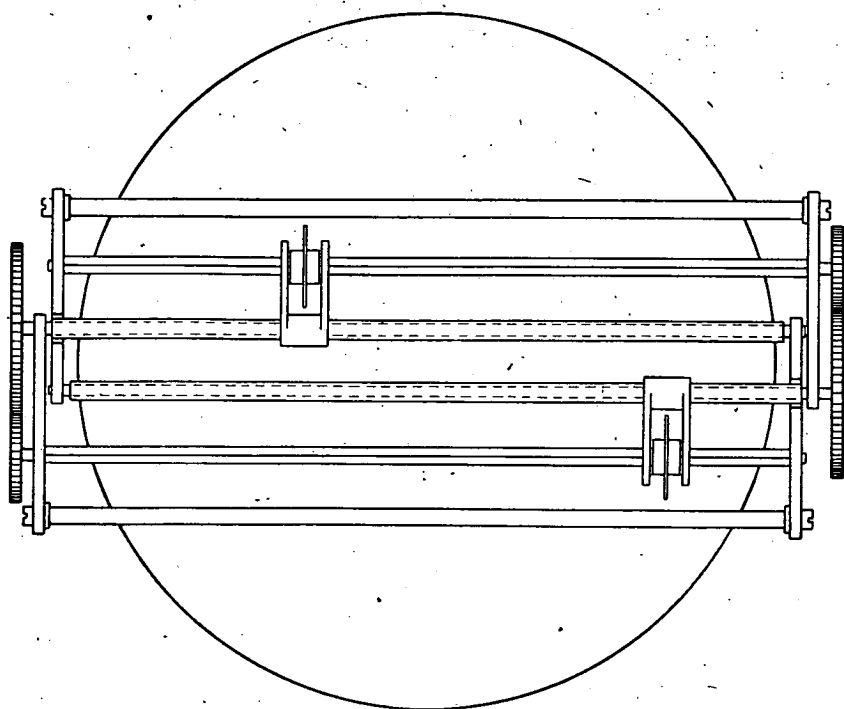


Fig. 4. Model voor integreren van een 2de orde vergelijking.

vierkante assen verschuifbaar. Beide wieltjes loopen ter vereenvoudiging op dezelfde schijf. De draaiing van het eerste wieltje brengt door twee tandraadjes de bij het tweede wieltje behorende schroef in beweging. Noemt men de verschuiving uit het midden bij het eerste wieltje y'' , dan wordt die van het tweede dus evenredig met y' (stel $= ay'$) de draaiing van het tweede dus met y . Maar nu is de tweede as op volkomen symmetrische wijze gekoppeld met de eerste schroef, dus wordt de verschuiving van het eerste wieltje $= a^2y = y''$. Inderdaad ziet men bij geschikte beginstand het eene wieltje door het midden gaan, terwijl het andere dan omkeert, waarna beide steeds sneller naar buiten gaan (hyperbolische sinus en cosinus). Wordt nu door een tussenraadge de koppeling van teeken omgekeerd, dan gaan beide wieltjes afwisselend heen en weer (sin en cos). (Demonstratie).

Ik heb hier als voorbeelden binomische differentiaalvergelijkingen genomen. Voor trinomische enz. heeft men een of meer *optel-koppelingen* nodig. Fig. 5 geeft het principe daarvan aan. Het middelste

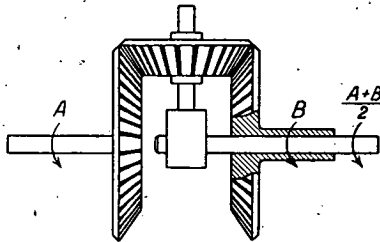


Fig. 5. Optel-koppeling.

zgn. planetenwieltje zit los op zijn as. Die as wentelt dan blijkbaar over een hoek, die de halve som van de draaiingen van assen A en B is.

8. *De machine van Bush*²⁾. Hier kunnen nog slechts enkele algemeene trekken behandeld worden van de „differential analyzer”, die V. B u s h aan het Massachusetts Inst. of Technology geconstrueerd heeft. Voor de zeer interessante verdere mechanische bijzonderheden raadplege men de uitstekende beschrijving, die de maker zelf gegeven heeft.

Het midden van de machine, die een heele kamer beslaat (fig. 6), wordt gevormd door de schakelinrichting: twee groepen van elkaar

loodrecht kruisende horizontale assen. Elke as bestaat uit eenige losse stukken, die willekeurig gekoppeld en gemakkelijk uitgenomen kunnen worden. Een groot aantal kruiskoppelingen is beschikbaar, die in elk kruispunt ingezet kunnen worden, waardoor twee loodrechte assen zonder snelheidsverandering verbonden worden, verder tandraderen om evenwijdige assen in allerlei verhoudingen te kunnen koppelen, en optelkoppelingen, die drie naast elkaar gelegen assen verbinden kunnen. (fig. 6).

Aan de eene zijde van de schakelinrichting bevinden zich zes integratoren, aan de andere zijde de input tables en de output tables, dat zijn teekenplanken, waarover door lange schroeven een teekenstift in twee coördinaten bewogen kan worden. Bij de eerste soort, die men *coëfficiënten-tafels* kan noemen, geschiedt de beweging in één coördinaat door de machine, in de andere door een waarnemer, die moet zorgen dat de stift een te voren geteekende kromme volgt. De schroef waaraan de waarnemer draait, is aan zijn andere einde met een as van de machine verbonden, die zodoende een draaiing uitvoert, die een willekeurige grafisch gegeven functie van x , of van y , enz. is. De tweede soort is de *resultaat-tafel*, waarop de machine bijv. y als functie van x teekent. Bush voorziet deze van twee stiften, die bijv. y en y' op hetzelfde blad papier opteekenen.

Fig. 7 geeft schematisch de schakeling voor de vergelijking van Legendre

$$(1 - x^2) y'' - 2 x y' + \lambda y = 0$$

De verticale strepen stellen de dwarse assen voor, die in het verlengde van de assen der verschillende hulpmiddelen liggen. De horizontale strepen zijn de lengte-assen, waarvan de draaiingen achtereenvolgens x , y'' , y' , y enz. voorstellen. De as voor x wordt door een motor aangedreven. Door stippen op de kruispunten zijn de koppelingen aangegeven. Men leest uit de figuur af, dat de vergelijking gebracht is in de vorm

$$y' = - \lambda \int y \, dx : (1 - x^2).$$

Eén van de integreerschijven is hier gebruikt om de willekeurig instelbare constante λ in te voeren. Fig. 8 geeft het resultaat, als men van $y' = 0$ bij $x = 0$ uitgaat, voor λ dicht bij 6. Men ziet hoe nauwkeurig de machine aangeeft, dat $\lambda = 6$ een eigenwaarde is.

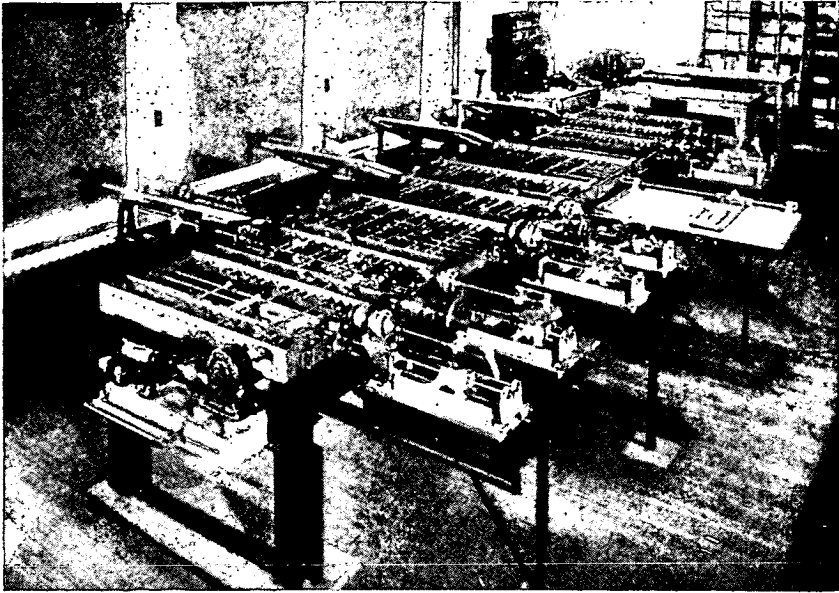


Fig. 6. Differential analyzer van Bush.
Links: achter de schuin geplaatste input tables, rechts vooraan vier integratoren, rechts achter de output table.

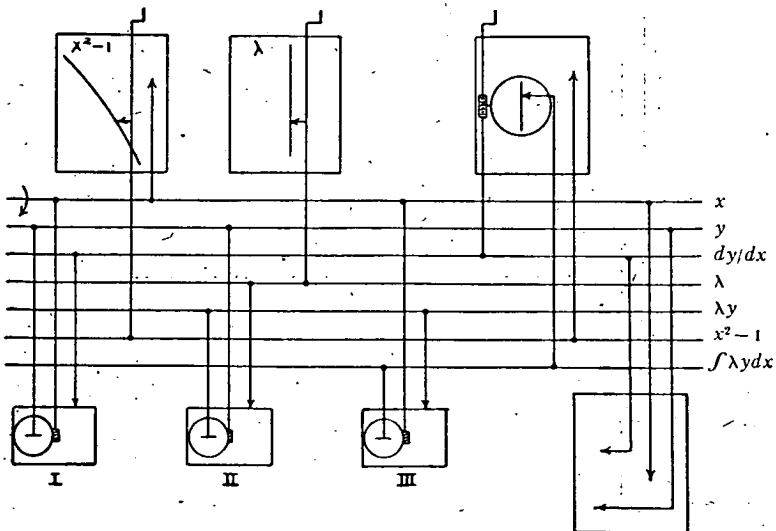


Fig. 7. Schakeling voor Legendre vergelijking.

Hoeveel men reeds met een kleine Bush-machine kan bereiken, blijkt wel uit het volgende voorbeeld. De vergelijking

$$y'' = f(y)$$

laat zich volgens de leerboeken algemeen integreren en levert

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{2 \int f(y) dy + c}}$$

Is nu de functie f een polynoom van de tweede of derde graad, dan wordt x een elliptische integraal van y , waarvan de omkeering noodig is om de gezochte oplossing, y als functie van x , te vinden. De machine echter behandelt het probleem veel directer. Slechts twee integratoren, één coefficienten-tafel en een resultaat-tafel zijn noodig en er is geen sprake van de praktisch lastige omkeering. Het eenige is, dat de coefficienten-tafel niet met de x maar met de y gekoppeld

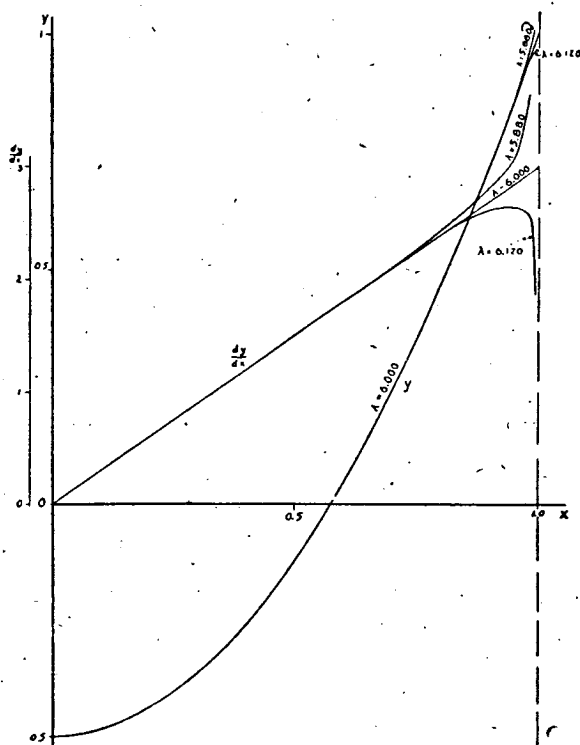


Fig. 8. Door de machine geteekende oplossingen van de Legendre vergelijking.

moet worden. Let men nu op de werking van de machine, dan ziet men gemakkelijk dat y een periodieke functie van x wordt, waarbij de periode van de beginvoorwaarden afhangt. Zoo kan de machine dus ook belangrijk bijdragen tot het wiskundige inzicht.

Men lette er nu verder op, dat y^2 door de machine kan worden uitgerekend als $2 \int y dy$, aangezien men zonder bezwaar een integratorschijf aan de as voor y kan koppelen, zoodat y integratievariabele wordt en dat men evenzoo met twee integratoren elke derdegraadsfunctie van y kan verkrijgen. Voor het zooeven besproken geval van de elliptische functie kan de machine met twee integratoren dus te voren zelf de vereischte kromme op de coëfficiënten-tafel teekenen.

Maar dat beteekent, dat men ook zonder coëfficiënten-tafel kan werken, door de machine de benoodigde functie onder de hand te laten uitrekenen, indien men over vier integratoren beschikt. Overwegingen van deze aard brachten den astrophysicus Rosseland³⁾ er toe, in Oslo de tot dusver grootste machine met 12 integratoren te construeeren. Hij geeft aan, dat een dergelijke machine voor 70.000 Mark gemaakt kan worden, wat naar Amerikaansch oordeel een zeer lage prijs is.⁴⁾

LITERATUUR.

¹⁾ Voor een gedetailleerde beschrijving, die hier uiteraard niet gegeven kan worden, verwijzen we in de eerste plaats naar

G. J. D. Mounier, De rekenmachine van Thomas van Colmar, de Natuur 1892, 129, 183 en

O. Sust, Die Hamannsche Rechenmaschine „Mercedes-Euklid“, Z. Instrumentenk. 30, 283 (1910)

voor een uitvoeriger overzicht van de verschillende typen naar

W. Meyer zur Capellen, Mathematische Instrumente, Leipzig 1941 en

F. A. Willers, Mathematische Instrumente, Samml. Götschen 922 (1926)

Niet het mechanisme, maar uitvoerige aanwijzingen voor het gebruik ook van tafels, vindt men in F. Harkink, Inleiding tot het practisch rekenen, bl. 107—167, Noordhoff 1941.

²⁾ V. Bush, J. Franklin Inst. 212, 447 (1931).

³⁾ S. Rosseland, Naturwiss. 27, 729 (1939).

⁴⁾ Math. Reviews 1, 127 (1940).

BOEKBESPREKING.

Mr. J. van IJzeren, math. cand. *Moderne Vlakke Meetkunde*. W. J. Thieme & Cie, Zutphen. 1941. 126 blz., 89 fig., prijs f 2,50, geb. f 3,25.

Dit boek geeft een moderne behandeling van de vlakke meetkunde, waarbij, zooals de schrijver in het voorbericht zegt, „de volle nadruk ligt op het *in praktijk brengen* van de moderne algebraïsch-meetkundige opvattingen, speciaal op het rubriceeren van de stellingen naar de vereischte getallensoort.” Bij vergelijking met andere werken, die hetzelfde onderwerp behandelen, blijkt, dat de schrijver veel oorspronkelijks geeft.

Ofschoon het boek niet voor beginners bestemd is, immers is eenige vertrouwdheid met de school-planimetrie en met de grondslagen van de analytische meetkunde ondersteld, is het toch voor zoo ruim mogelijken kring geschreven. Door het bestudeeren van de concrete voorbeelden, die de schrijver geeft, en door het uitwerken van de talrijke opgaven, die in het algemeen geen deel van de tekst uitmaken, kan de in de hier gegeven beschouwingen minder ervaren lezer zich de stof beter eigen maken.

De inleiding brengt de „grondgedachten”, waarin de existentie der grondbegrippen en het bestaan van „een voldoende aantal” punten op elke rechte en van „een voldoende aantal” rechten door elk punt geëischt wordt, en de axioma's 1 (door twee verschillende punten gaat één rechte) en 2 (door een punt buiten een rechte gaat één evenwijdige rechte).

Op de inleiding volgt een bespreking van de *Desargues*-meetkunde, waarvoor een derde axioma, het axioma D (als bij twee driehoeken $A_1B_1C_1$ en $A_2B_2C_2$ A_1A_2 , B_1B_2 en C_1C_2 door één punt gaan en twee paar corresponderende zijden evenwijdige zijn, dan is ook het derde paar evenwijdig) noodig is. Hier wordt het hulpbegrip „brugfiguur” ingevoerd, dat den grondslag vormt voor de begrippen „gelijkheid” en „verhouding” van lijnstukken op evenwijdige rechten. Met den naam van „deelris” wordt de figuur van drie collineaire in een bepaalde volgorde genomen punten aangeduid; onmiddellijk volgt dan de definitie en een beschouwing van het begrip „gelijkwaardigheid” van deelrissen. Voor de zoo optredende deelriswaarden kan men een „optelling”, een „aftrekking” en een „vermenigvuldiging” definieeren. Uit de tot nu toe ingevoerde axioma's kan niet afgeleid worden, dat de genoemde vermenigvuldiging de commutatieve eigenschap bezit. Niettemin blijkt, dat het reeds nu mogelijk is belangrijke stellingen te bewijzen, zooals de stellingen van *Menelaos* en de *Ceva* en de algemeene stelling van *Desargues*. Ten slotte vindt men hier een en ander, dat, bij aannahme van de vermelde axioma's, over de analytische meetkunde van het punt en de rechte lijn medegedeeld worden kan.

In het volgende hoofdstuk wordt het verband met de algebra beschouwd. Er wordt uitgegaan van een „verzameling grootheden” en van twee voorschriften, die aan elk gerangschikt tweetal een „som” en een „product” toevoegen, zoodat aan alle elementaire rekenregels

(behalve $a \cdot b = b \cdot a$) voldaan is. Met behulp hiervan wordt een „punt” (als een paar grootheden (x, y) en een „rechte” gedefinieerd; verder wordt aangetoond, dat dan aan de axioma's 1, 2 en D voldaan is. Er is een éénéénduidige verwantschap aan te geven tusschen de grootheden der verzameling en de deelriswaarden van het opgebouwde stelsel, die bij de optelling en de vermenigvuldiging intact blijft; de deelriswaarden vormen dus, evenals de aangenomen grootheden een „lichaam”. Gesproken wordt over de meetkundige stelsels behoorende bij het niet-commutatieve lichaam der quaternionen, het lichaam der rationale getallen en dat der complexe getallen (van de *karateristiek nul*) en over de eindige meetkundige stelsels, die door het lichaam der restklassen modulo het priemgetal p en een daaruit door uitbreiding ontstaand lichaam (van de *karakteristiek p*) bepaald zijn.

Nu worden er in onderaxioma's speciale eischen t.a.v. de genoemde karakteristiek vermeld, namelijk in het onderaxioma $k \neq 2$ (existentie van het midden van twee punten) en in het onderaxioma $k \neq 3$ (existentie van het zwaartepunt van een driehoek).

Men komt tot een commutatieve meetkunde, als men het axioma D vervangt door het (D omvattende) axioma P: Als twee rechten beurtelings een hoekpunt van een zeshoek dragen en twee paar overstaande zijden van dien zeshoek evenwijdig zijn, dan is ook het derde paar evenwijdig. Voor deze meetkunde worden verschillende stellingen, waaronder zeer interessante, afgeleid en in de vraagstukken aangegeven. Men vindt hier beschouwingen over eenheidslijnstukken („lengte” van een lijnstuk gemeten met een daaraan evenwijdig „eenheidslijnstuk”) en evenredigheden en eigenschappen van de oppervlakten van driehoeken en n -hoeken en van „wisselriswaarden” (dubbelverhoudingen). Hierbij worden ook enkele eigenschappen van de meetkunde met karakteristiek 2 gegeven.

Nadat zoo over de affiene meetkunde met haar begrippen „lengte” en „oppervlakte” gesproken is, geeft het volgende hoofdstuk een behandeling van de metriek. Met behulp van twee willekeurig gekozen richtingen, de „isotrope richtingen”, die voor de nu eerst behandelde niet-ontaarde metriek van elkaar verschillen, wordt in de eerste plaats de „quadraatafstand” van twee punten gedefinieerd en verder de „hoekwaarde” van twee rechten. Eigenschappen van deze begrippen worden behandeld. Men ontmoet hier verder beschouwingen over gelijkvormige driehoeken (de hoofdstelling van de metriek), gelijkvormige n -hoeken, congruente n -hoeken, spiegeling en loodlijn, concyclische punten, cirkel, macht t.o.v. een cirkel, de stelling van Steewart met toepassingen en uitbreidingen, inversie, poolverwantschap, isogonale en „orthocentrische” toevoeging, meetkunde van den driehoek (symmediaanpunt, punten van Brocard, cirkels van Brocard en van Lemoine), bissectrix, halfrechte (verg. de „hoekmeting modulo 2π ”) en halfcirkel (stelling van Ptolemaeus voor een halfkoordenvierhoek enz.).

Terwijl er tot nu toe voortdurend ook beschouwingen gegeven zijn, die gelden voor de meetkunde met karakteristiek twee, wordt in het volgende „speciale metriek” genoemde hoofdstuk de gezichtskring in

het algemeen beperkt tot het geval, dat de karakteristiek niet twee is. Bij deze aanname wordt o.a. de poolverwantschap t.o.v. een cirkel beschouwd. Ingevoerd wordt een nieuw axioma $1\frac{1}{2}$ (Er bestaat een driehoek met drie gelijke hoeken); dit geeft aanleiding tot de beschouwing van de punten van Torricelli en de isodynamische punten, van het begrip derderechte (hierbij behoort een hoekmeting modulo 3π) en van de stelling van Morley (ook voor het geval, dat de karakteristiek twee of drie is). Vervolgens wordt na aanname van het onderaxioma $1\frac{1}{2}$ (Er bestaat een gelijkbeenige driehoek, waarvan de tophoek recht is) de figuur van Malfatti behandeld en de mogelijkheid aangetoond om den geheelen kern der gonio- en trigonometrie (zelfs in eindige meetkunden) af te leiden. Tenslotte wordt gewezen op het onderaxioma $1\frac{1}{2}$ (existentie van een regelmatigen vijfhoek), waarop de verdeling in „uiterste en middelste reden” berust.

Het laatste hoofdstuk geeft een analytische behandeling van de ontaarde metriek, waarvoor de beide „isotrope richtingen” samenvallen.

Stellingen over ordening en continuïteit zijn in dit boek niet behandeld.

Bij de onderwerpen, waarin het werk eenig parallelisme vertoont met het boek: „*De elementaire meetkunde van het platte vlak*” van Prof. Bottema heeft de schrijver verbeteringen aangebracht.

Zooals uit het bovenstaande blijkt, geeft dit belangrijke en interessante boek niet alleen beschouwingen over de beginselen der meetkunde, maar ook over niet algemeen bekende zaken, die daar ver boven uitgaan.

G. S c h a a k e.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van den schrijver:

Ir. W. J. VOLLEWENS c.i. Repetitie-dictaat Analytische Meetkunde.

A. Het platte vlak. 207 blz., 75 figuren, 162 vraagstukken met de antwoorden.

Inhoud:

- I. Coördinaten en vergelijkingen.
- II. De rechte lijn.
- III. De cirkel.
- IV. De kegelsneden: ellips, hyperbool, parabool.
- V. De algemene vergelijking van de tweede graad.
- VI. Homogene coördinaten; pool en poollijn.
- VII. Bundels en netten van kegelsneden.
- VIII. Enige algemene eigenschappen van kegelsneden.

Een geschikt boek ter herhaling voor studenten in Delft en voor hen, die opgaan voor de akte Middelbaar Wiskunde K I.

Van P. Noordhoff, Groningen.

Dr. B. GONGGRIJP, Log. en gon. tafels. Tafel D. 7e druk . . . f 2,60*

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, Nieuwe Schoolalgebra II
12e, onveranderde, druk f 2,25*

P. WIJDENES, Beknopte Driehoeksmeting A 9e druk f 0,80*

P. WIJDENES, Beknopte Algebra 8e druk, gecartonneerd . . . f 1,80*

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

De hoofdcommissie, voor de normalisatie in Nederland, die haar kantoor te 's-Gravenhage heeft, Willem Witsenplein 6, zendt aan de redactie van Euclides een brief, waarin staat, dat het onderstaande gepubliceerd wordt ter critiek; gelijk zulks gewoonte is. Pas nadat enige tijd verstreken is, wordt, zoals men weet, overgegaan tot vaststelling, nadat mogelijke bezwaren van deskundige zijde zijn overwogen.

SYMBOLEN VOOR DE WISKUNDE V 1420¹⁾

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

1. *Regels voor het aanduiden van punten, lijnen en vlakken in rechte projectie.*
 1. Het horizontale projectievlak wordt aangeduid met V_1 , het verticale met V_2 en het sluitvlak met V_3 .
 2. De snijlijn van V_1 en V_2 heet X-as; de snijlijn van V_1 en V_3 heet Y-as en de snijlijn van V_2 en V_3 heet Z-as.
 3. De tweevlakshoeken, gevormd door V_1 en V_2 , worden achtereenvolgens aangeduid met I, II, III en IV.
 4. Punten worden aangeduid met hoofdletters, de oorsprong met O. Voorbeelden: P, Q.
 5. Lijnen worden aangeduid met kleine letters, bij voorkeur l en volgende letters, of met twee hoofdletters als verbinding van twee punten. Voorbeelden: l, m, AB, CD.
 6. Projecties op de projectievlakken worden achtereenvolgens aangeduid met de aanwijzers 1, 2 en 3. Voorbeelden: $P_1, P_2, P_3; l_1, l_2, l_3$.
 7. Punten en lijnen, welke in de projectievlakken liggen, behoeven niet van aanwijzers te worden voorzien.
 8. Vlakken worden aangeduid met drie hoofdletters. Voorbeeld: A_1AA_2 . A is het snijpunt met de X-as, AA_1 is de doorgang met V_1 , AA_2 met V_2 . Indien geen verwarring mogelijk is, kan worden volstaan met de letter bij het snijpunt van de X-as met het vlak.
 9. Elementen, welke zijn neergeslagen in V_1 of V_2 , worden aangeduid door bijvoeging van den aanwijzer n. Voorbeelden: P_n, l_n, U_{2n} .
 10. Elementen, welke zijn gewenteld om een as, loodrecht op V_1 of V_2 , worden aangeduid door bijvoeging van den aanwijzer o. Voorbeelden: A_o, l_o, U_{1o} .
 11. Hoeken worden aangeduid met Grieksche letters.

¹⁾ Het blad is door commissie Bo (Algemeene aanwijzingen voor technische geschriften) onder voorzitterschap van prof. dr. M. de Haas, Oud-Hoogleraar aan de Technische Hoogeschool te Delft, ontworpen om tegemoet te komen aan de gebleken behoefte aan eenheid in het aanduiden van punten, lijnen, vlakken, enz. bij de Beschrijvende Meetkunde.

II. Regels voor het aanduiden van punten, lijnen en vlakken in scheeve en axonometrische projectie en in perspectief.

1. *Scheeve projectie.* Het tafereel wordt aangeduid door T, het grondvlak door G.

Axonometrische projectie. Het horizontale projectievlak wordt aangeduid met V_1 en de beide verticale met V_2 en V_3 .

Perspectief. De horizon wordt aangeduid met HZ, de grondlijn met GL.

2. Rechthoekige projecties van punten en lijnen op het grondvlak worden na wenteling in het tafereel voorzien van den index 1.

Voorbeeld: P_1, l_1 .

De scheeve en de axonometrische projectie en de perspectief van de rechthoekige projectie op het grondvlak worden voorzien van een accent.

Voorbeeld: P', l' .

De scheeve en de axonometrische projectie en de perspectief van het punt, respectievelijk de lijn zelf worden met een hoofdletter, respectievelijk kleine letter aangeduid, zonder index.

III. Lijnsoorten voor het aanduiden van punten, lijnen en vlakken.

1. Assen (eventueel de positieve deelen der assen), zichtbare lijnen en doorgangen worden aangeduid met een 'dikke' getrokken lijn.

Voorbeeld: 

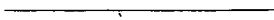
2. Onzichtbare lijnen worden aangeduid met een kort-gestreepte lijn, waarvan de dikte ongeveer de helft bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.

Voorbeeld: 

3. Projectielijnen worden aangeduid met een lang-gestreepte lijn, waarvan de dikte ongeveer een vierde bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.

Voorbeeld: 

4. Constructielijnen worden aangeduid met een dun-getrokken lijn, waarvan de dikte ongeveer een vierde bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.

Voorbeeld: 

5. Neergeslagen en omgeslagen lijnen worden aangeduid met een streep-stiplijn, waarvan de dikte ongeveer een vierde bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.

Voorbeeld: 

6. Uitslagen worden aangeduid met dun-getrokken lijnen, waarvan de dikte ongeveer de helft bedraagt van de onder III 1 genoemde lijn.

Voorbeeld: 

Opmerking 1: Projectielijnen behoeven desgewenscht niet te worden aangegeven.

Opmerking 2: Projectielijnen kunnen ook met roode, neergeslagen en omgeslagen lijnen met groene en uitslagen met blauwe getrokken lijnen worden aangegeven.

Opmerking 3: Doorsneden en projecties van doorsneden mogen met zwarte of groene getrokken lijnen worden gearceerd.

HOOFDSTUKKEN UIT DE MODERNE FORMELE LOGICA

DOOR

E. W. BETH.

(Vervolg van aflevering 4 Jg. XVIII).

III. DE LOGICA DER EIGENSCHAPPEN.

§ 8. Oordelen als: „*Plato is diepzinnig; alle logistici zijn oppervlakkig; sommige filosofen zijn scherpzinnig*”, zijn voor de logica der proposities niet meer te ontleden. Toch bevatten ze vervangbare elementen, zoals we in § 1 hebben vastgesteld.

We gaan eerst de oordelen van de vorm *Plato is diepzinnig* nader onderzoeken; hierin zijn *Plato* en *diepzinnig* de vervangbare elementen. Het eerste is een bepaald *wezen*, het tweede een bepaalde *eigenschap*. De vorm van dit oordeel kunnen we in woorden als volgt omschrijven: *dit of dat wezen heeft die en die eigenschap*; de symbolische voorstelling van deze oordeelsvorm is $a(x)$, waarin a de *eigenschap* vertegenwoordigt („eigenschapsvariabele”), x het *wezen* („individuele variabele”). Substitueert men voor a een bepaalde eigenschap, b.v. *oud*, voor x een bepaald wezen, b.v. *Socrates*, dan ontstaat een oordeel, nl. *Socrates is oud*. Oordelen van de vorm $a(x)$ heten *singuliere oordelen*. We zullen $a(x)$, $a(y)$, $a(z)$, ... $b(x)$, $b(y)$, $b(z)$... opvatten als oordeelsvariabelen, zodat de in hoofdstuk II ontwikkelde theorie erop van toepassing is.

Het oordeel: *alle logistici zijn oppervlakkig*, kan ook zó worden uitgedrukt: *elk wezen, dat logicus is, is oppervlakkig*, of: *voor elk wezen geldt: is het logicus, dan is het oppervlakkig*.

Het beschouwde algemene oordeel bevat dus, behalve een generalisatie („voor elk wezen geldt”), ook nog een implicatie („dan”). We beschouwen daarom eerst oordelen van een minder gecompliceerde vorm, b.v.: *elk wezen is oppervlakkig* (cf. *Aristoteles*, de int. c. 10).

Men kan tegenwerpen, dat dit oordeel dezelfde vorm heeft als het

eerste, daar alleen *logisticus* door *wezen* is vervangen; maar dan verwisselt men logische en grammaticale vorm. Het woord „wezen” bedoelt geen enkele eigenschap uit te drukken, is tegenstelling tot „logisticus”.

De vorm van het oordeel: elk wezen is oppervlakkig, wordt nu aangeduid door het symbool:

$$(x) a(x).$$

Definitie 6. Substitueert men voor a een bepaalde eigenschap, dan heet $(x) a(x)$ waar, wanneer elk wezen, waarvoor die eigenschap zin heeft, haar bezit, onwaar, wanneer er minstens één wezen is, waarvoor de eigenschap zin heeft, maar dat haar niet bezit.

(Door deze definitie is de betekenis van de *generalisatie* vastgelegd.)

We lezen gemakshalve $a(x)$ als: het wezen x heeft de eigenschap a ; $(x) a(x)$ als: elk wezen x heeft de eigenschap a .

We beschouwen ook $(x) a(x)$ als propositionele variabele, die dus in de tautologieën der propositie-logica kan worden gesubstitueerd en waarop de propositie-logica in haar geheel van toepassing is.

Het zal weinig nadere toelichting behoeven, dat we in plaats van het oordeel: sommige filosofen zijn scherpzinnig, voorlopig het eenvoudiger oordeel: sommige wezens zijn scherpzinnig — beter geformuleerd: het een of andere wezen is scherpzinnig —, zullen beschouwen.

De vorm van dit oordeel wordt aangeduid door het symbool:

$$(Ex) a(x),$$

gemakshalve te lezen als: er is een wezen x met de eigenschap a .

Definitie 7. Sustitueert men voor a een bepaalde eigenschap, dan heet $(Ex) a(x)$ waar, wanneer een of ander wezen, waarvoor die eigenschap zin heeft, die eigenschap bezit, onwaar, als geen enkel wezen, waarvoor ze zin heeft, haar bezit.

(Door deze definitie is de betekenis van de *particularisatie* vastgelegd.)

Ook $(Ex) a(x)$ wordt opgevat als een propositionele variabele in de zin van hoofdstuk II.

In hoofdstuk II hebben we kennis gemaakt met negatie, disjunctie, conjunctie, implicatie, die, toegepast op bepaalde oordeelsvormen, nieuwe oordeelsvormen opleveren. Zo kunnen we b.v., uitgaande van

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING.

BETH, Dr. H. J. E., Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening, met toepassingen op verschillende gebieden, geb.	f 12,05*
Antwoorden	- 1,05*
BREMEKAMP, Prof. Dr. H., Partiële Differentiaalvergelijkingen met toepassingen geb.	- 6,05*
LANDAU, Prof. Dr. EDMUND, Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung geb.	- 14,15*
VAN OS, Prof. Dr. C. H., Inleiding tot de Functietheorie, geb.	- 6,05*
VAN OS, Prof. Dr. C. H., Moderne Integraalrekening, Inleiding tot de leer der puntverzamelingen en der integralen van Lebesgue, geb.	- 5,75*
RUTGERS, Prof. Dr. J. G. en Prof. Dr. F. SCHUH, Compendium der Hogere Wiskunde III, geb.	- 9,45*
Deel IV geb.	- 16,25*
SCHOUTEN, Prof. Dr. G., Inleiding tot de studie der elliptische functies, in slap linnen bandje	- 1,70*
SCHUH, Prof. Dr. F., Vraagstukken over Diff. en Int. rek. en over Anal. en Beschr. Meetkunde. Met volledige aanwijzingen ter oplossing. Deel I A, Vraagstukken over Differentiaalrekening gec.	- 8,40*
Deel II, Schriftelijke vraagstukken van het examen K V gec.	- 7,85*
Supplementen van 1923 tot heden à	- 0,80*
Deel III, Vraagstukken over Diff. en Int. rekening gec.	- 15,20*
SCHUH, Prof. Dr. F., Oneindige producten (met aanhangsel over gelijkmatige convergentie en gammafuncties) geb.	- 5,50*
SCHUH, Prof. Dr. F., Het Getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal, met toepassingen op algebra, differentiaal- en integraalrekening geb.	- 7,85*
STIELTJES, TH. J., Oeuvres complètes I, II samen	- 36,75*
in leer gebonden	- 49,85*
VERRIEST, GUSTAVE, Cours de Mathématiques générales, 1e partie, Calcul différentiel, Géométrie Analytique à deux dimensions, 2e druk geb.	- 6,30*
2e partie, Géométrie Analytique à trois dimensions, Calcul intégral geb.	- 6,30*
VRIES, Prof. Dr. Hk. DE, Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening en van de theorie der Differentiaalvergelijkingen. I. De differentiaal- en elementaire integraalrekening, 2e dr. geb.	- 20,15*
III. Differentiaalvergelijkingen geb.	- 20,15*
VRIES, Prof. Dr. Hk. DE, Beknopt Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening met 73 figuren geb.	- 15,75*
WEITZENBÖCK, Prof. Dr. R., Invariantentheorie f 5,25*, geb.	- 6,30*
WOLFF, Prof. Dr. J., Fouriersche Reihen mit Aufgaben geb.	- 2,50*

SCHOOLBOEKEN OVER DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING.

VOOREN, Dr. W. L. VAN DE, Grenswaarden, 2e druk geb.	f 2,60*
WIJDENES, P. en Dr. H. J. E. BETH, Nieuwe Schoolalgebra IV, geb.	- 2,35*
" " " Nieuwe Schoolalgebra IVβ	- 0,85*
VISSER, K. H. W., Analytische Meetkunde, Differentiaal- en Integraalrekening, vooral voor Midd. Techn. Scholen, 2e druk	- 2,00*

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH

DIRECTEUR VAN DE R.H.B.S. TE AMERSFOORT

- | | | |
|--------------------|-----------------------|----------|
| I. Twaalfde druk. | 156 blz. 21 fig. | f 2,25*. |
| II. Twaalfde druk. | 204 blz. 50 fig. | f 2,25*. |
| III. Zevende druk. | 198 blz. 60 fig. geb. | f 2,35*. |

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Vierde druk ter perse. 164 blz. 20 fig. f 2,10*.

Uit het prospectus:

Wezenlijke veranderingen in behandeling bracht de invoering van het nieuwe program niet mee, immers de Nieuwe School-algebra (en de Algebra voor H.B.S.) behandelde reeds in aard en uitgebreidheid of beperktheid, wat in het Koninklijk besluit is neergelegd.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen $V\alpha$ en $VI\alpha$ Nieuwe Schoolalgebra III α
 $V\beta$ en $VI\beta$ Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen:

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Leraren, die deze werken niet kennen, kunnen pres. ex. bekomen op aanvraag aan den uitgever of aan de schrijvers.

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Voor leraren, die deze boeken gebruiken, antwoorden gratis en franco; de uitgewerkte log. vraagstukken in vier en vijf dec. gratis alleen bij P. Wijdenes, Amsterdam Z.; deze uitwerkingen zijn niet in de handel.

Verantwoordelijk voor de gehele inhoud: P. Wijdenes te Amsterdam, Jacob Obrechtstraat 88.

Uitgever: P. Noordhoff N.V. te Groningen.

Drukker: Drukkerij Gebroeders Hoitsema te Groningen. K 1219.

P 1037/4.