

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOOT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - DR. E. W. BETH, AMERSFOORT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OOSTERWIJK - DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - DR. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
DR. J. HAANTJES, AMSTERDAM - DR. C. DE JONG, LEIDEN
DR. J. POPKEN, TER APEL - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. DE VAERE, BRUSSEL
DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM.

18e JAARGANG 1942

Nr. 6

Prijs per Jaargang f 6.30*. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.
--

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6,30*) zijn ingetekend, betalen f 5,25*.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en **Wimecos** (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van **Wimecos** storten hun contributie van f 2,75 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Dr. J. F. DE VRIES, Het nut van kinematische beschouwingen in de kosmografielessen	161
Dr. J. H. WANSINK, Afhankelijkheid van getallenrijen	164
Normaalblad met de symbolen voor wiskunde	176
Dr. J. P. VAN ROOIJEN, De waarschijnlijkheidsrekening en het theorema van Bayes	177

OUDE JAARGANGEN van

CHRISTIAAN HUYGENS

zijn, voor zover voorradig, verkrijgbaar geb. à f 10.50

UITGAVE P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN - BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

HET NUT VAN KINEMATISCHE BESCHOUWINGEN IN DE KOSMOGRAFIELESSEN

DOOR

Dr. J. F. DE VRIES.

Hieronder worden enige opmerkingen gegeven, vnl. van kinematischen aard, betreffende het onderwijs in Kosmografie.

In zijn bekende leerboek: „Beginnelsen der theoretische Mechanica (Eerste deel, blz. 106) dringt Sch o g t er op aan (niet met zoveel woorden, maar door middel van enige vraagstukken over Kinematica) dat men zich in de kosmografie-lessen zal bezinnen op de coördinatenstelsels ten opzichte van welke de verschillende aldaar ter sprake komende bewegingen zich afspelen. Hij vraagt naar het coördinatenstelsel t.o. waarvan de aarde in 24 uren om haar as draait. En naar dat t.o. waarvan de maan 'n omloop volbrengt in een siderischen omloopstijd; evenzo in een synodischen.

Men moet m.i. dergelijke vragen over deze materie zeer hoog aanslaan. Zo ergens, dan heeft men in de lessen over Kosmografie (of Wiskundige aardrijkskunde) gelegenheid enige uitspraken toe te lichten (en de noodzakelijkheid er van te doen inzien), die in elk leerboek der Mechanica te vinden zijn. De uitspraken nl. dat rust en beweging relatieve begrippen zijn en dat het slechts zin heeft over die begrippen te spreken, indien tevens de omgeving — liever het coördinatenstelsel — wordt vermeld, t.o. waarvan die rust of die beweging bedoeld is. Een noodzakelijkheid, die bij de genoemde en bij soortgelijke bewegingstoestanden in de hemelruimte veel meer wordt gevoeld en geapprecieerd dan gewoonlijk het geval is bij bewegingen van lichamen op de aarde. Immers bij eerstgenoemde bewegingen missen de leerlingen het vertrouwde karakter van de laatstgenoemde. De bewegingen der hemellichamen, de vorm der banen enz. geven hun gewoonlijk vrij wat moeite. Dat men eigenlijk niet mag zeggen: de trein beweegt zich, maar wel de trein beweegt zich t.o.v. den spoordijk (de aarde) of nog beter t.o.v. een coördinatenstelsel daar vast mee verbonden, wil iedere leerling wel toegeven. Maar hij beschouwt zo'n voorbeeld als vrij triviaal en de

noodzakelijke toevoeging als 'n schoolmeesterachtig preciesheidje, dat deze of gene leraar nu eenmaal zo wil en dat hij — leerling — goed zal doen bij dien leraar te pas te brengen, als 't hem gevraagd wordt. De voorbeelden uit zijn mechanica-leerboek bepalen zich, naar ik meen, in vele gevallen slechts tot „aardse bewegingen”; de hemellichamen komen hierbij minder vaak aan de orde.

Merkwaardig, juist bij de veel moeilijker bewegingsverschijnselen in de hemelruimte worden de coördinatenstelsels minder systematisch ingeschakeld en weinig doelbewust naar voren gebracht. Het beschrijvingsraam komt hierbij dikwijls niet voldoende tot zijn recht. O ja, coördinatenstelsels worden in de kosmografieboeken steeds behandeld (wordt wel voldoende gewezen op de „grondfiguur”, waaruit ze voortvloeien?), maar m.i. is hun toepassing juist daar waar ze groten steun zouden kunnen en moeten geven om bewegingen, banen, omloopstijden betekenis te geven en ondubbelzinnig vast te leggen niet voldoende in den leergang vastgelegd. Het gebruik er van is niet organisch met de er voor in aanmerking komende leerstof verbonden. En toch is dat dringend nodig. In welk leervak wordt b.v. zo dikwijls gesproken over *schijnbare* en *ware* bewegingen van hemellichamen en zijn betrekkelijk vage uitdrukkingen als „t.o.v. de zon” of „t.o.v. de vaste sterren” zo ingeburgerd als in de Kosmografie?

Voor al die uitdrukkingen „waar” en „schijnbaar” kunnen in dit verband funest werken en een juist inzicht voor altijd weren. Voert men echter het passende coördinatenstelsel in, t.o. waarvan de een of andere baan zó is en niet anders, dan verdwijnt bij goede zorg van den docent een eventueel opkomend wanbegrip als bij toverslag.

Als de bewegingen etc., hier bedoeld, in het raam der juiste coördinatenstelsels worden teruggebracht, dan zijn de moeilijkheden van „waar” en „schijnbaar” verdwenen en zal ook het — in de historie wortelend — gebruik van die namen geen verwarring meer wekken. Immers dan zal de leerling inzien, dat van kinematisch standpunt beschouwd, al deze bewegingen, banen enz. evenveel recht van bestaan hebben, even „waar” zijn. Ik denk hier aan de voorbeelden in 't begin van dit artikeltje genoemd en voorts aan de z.g. schijnbare jaarlijkse beweging van de zon in de ecliptica, losgemaakt van de schijnbare dagelijkse beweging van den sterrenhemel. En, voor wat betreft omloopstijd, aan 't siderisch en aan 't tropisch jaar; eveneens aan de banen met „lussen”, waarin de

planeten zich nu eens recht- en dan weer teruglopend bewegen en onmiddellijk daarnaast aan de ellipsvormige (bijna cirkelvormige) banen der planeten, waarvan *Kepler* spreekt. Is bij 'n vage bespreking dezer zaken een door 'n leerling gestelde vraag als: „Hoe beweegt een planeet zich nu eigenlijk? Met lussen of in 'n cirkel?” niet zeer begrijpelijk? Is de bespreking niet vaag geweest, in dien zin, dat de bijbehorende coördinatenstelsels precies zijn opgespoord, dan ziet hij, het zij nog eens gezegd, de aequivalentie van beide banen elk t.o.v. van 't eigen assenstelsel. En *nu* kan, maar mij dunkt, niet voordat het genoemde begrepen is, de stap gedaan worden naar het „vaste assenstelsel” t.o. waarvan *Keplers* wetten uit die van *Newton* kunnen worden afgeleid. En aldus zal *Copernicus'* stelsel tot zijn recht komen en de appreciatie er van zal op steviger bodem staan, dan wanneer dit alles *à priori* als „waar” is ingevoerd. Of men hierbij het genoemde vaste assenstelsel als „axiomatisch” opvat of als stelsel met oorsprong in de zon¹⁾ en de assen naar vaste sterren¹⁾, is voor dit doel vrij onverschillig. Hoofdzaak is het gescheiden houden van kinematische en dynamische beschouwingen.

Naar mijn mening zullen de lessen aan dergelijke kwesties gewijd de leerlingen op een hoger plan van ontwikkeling brengen. In dien zin gegeven, kan men 't onderwijs in dit gedeelte der Kosmografie epistemisch noemen. Men kan gerust, als tijdgebrek nijpt, sommige andere, overigens wellicht interessante onderwerpen, zoals men ze in bijna elk leerboek der Kosmografie vindt, maar die wat meer los van elkaar staan, bij zijn onderwijs achterwege laten, als men de in dit artikel bedoelde verheldering aan de leerlingen heeft kunnen geven.

Wordt het onderwijs in Kosmografie dan nimmer in bovenbedoelden zin gegeven? Natuurlijk wel! Maar gesprekken met collega's, 't bijwonen van examens over deze stof en de lectuur van een leerboek der Kosmografie van recenten datum hebben mij de (wellicht iets te subjectief gekleurde) overtuiging geschonken, dat in het algemeen het onderwijs in de Kosmografie toch nog meer *doelbewust* in de hierboven geschetste richting kan gegeven worden.

¹⁾. Zon en sterren als stoffelijke punten beschouwd.

AFHANKELIJKHEID VAN GETALLENRIJEN

DOOR

Dr. J. H. WANSINK.

1. Doel van dit artikeltje is:

1^o. er op te wijzen, dat in de theorie der rekenkunde de eigenschappen der *onbenoemde getallen* worden behandeld en dat we goed doen het werken met benoemde getallen in de toegepaste rekenkunde onder te brengen;

2^o. tegen een onjuist (ev. ongewenst) gebruik van het woord *grootheid* te waarschuwen;

3^o. aan te raden, zich bij de behandeling van de recht en van de omgekeerd evenredige afhankelijkheid te beperken tot *getallenrijen* (a) en (b), die recht evenredig genoemd zullen worden, als $a_n : b_n$ constant is en omgekeerd evenredig, als $a_n \cdot b_n$ constant is.

2. In het theoretisch gedeelte van rekenkunde en algebra hebben we bij voortduring te maken met onbenoemde getallen. Bij de toepassingen der theorie op vraagstukken van meetkundige of natuurkundige aard en bij de vraagstukken, die in onze verzamelingen van weleer als oefeningen in het „practisch rekenen” pleegden te worden aangeduid, kunnen ook benoemde getallen optreden. We hebben het in die toepassingen b.v. over natuurkundige grootheden (snelheden, krachten, warmtehoeveelheden, hoeveelheden electriciteit, e.d.), over meetkundige grootheden (lengten van lijnen, oppervlakten van figuren, inhouden en lichamen, grootten van hoeken e.d.) en over prijzen, lonen, leeftijden, regencijfers, bevolkingsdichtheden, enz.

De optredende grootheden worden gekarakteriseerd:

1^o. door een getal, dat door meting, telling of berekening is verkregen: het *maatgetal* van de grootheid;

2^o. door de *naam* van de eenheid.

Voorbeelden: 4 gulden, 20 stuiver, 1,235 kilometer, $\sqrt{2}$ centimeter, $2\frac{1}{2}$ radiaal, 0,589 micron, enz.

Voor het uitvoeren van *tellingen* heeft men uitsluitend de rij der

natuurlijke getallen nodig, of, indien men ook lege verzamelingen wenst te beschouwen (b.v. nul eieren), de rij der aantallen.

Voor *metingen* kan men volstaan met het stelsel der rationale getallen; nergens blijkt, zolang men zich tot praktische metingen beperkt, behoefte te bestaan aan uitbreiding van onze getallenvoorraad met irrationale getallen. Dit is ons onmiddellijk duidelijk, als we bedenken, dat geen enkele meting met absolute nauwkeurigheid kan worden uitgevoerd, en we dus voor de meting van lijnstukken, die in de theorie de lengte $\sqrt{2}$ centimeter zouden krijgen, kunnen beschikken over één der rationale benaderingen, die minder dan de waarnemingsfout van de exacte waarde verschillen.

Trouwens, in de meetpraktijk is er nooit een diagonaal van een mathematisch vierkant te meten, daar immers lijnen, punten en vlakken idealiteiten zijn, die in de realiteit, waarin we de meting uitvoeren, niet worden aangetroffen.

Irrationale maatgetallen van grootheden zijn steeds rekenuitkomsten. Ze worden door ons ingevoerd om op meetuitkomsten allerlei rekenoperaties te kunnen toepassen. Ze worden geboren uit een theoretische behoefte, niet uit een behoefte van de meetpraktijk.

Het maatgetal wordt in het spraakgebruik vaak aangeduid als het aantal eenheden der desbetreffende grootte. Men bekommert er zich dan meestal niet om, dat zo'n getal, als het niet door telling is verkregen, dikwijls volstrekt geen „aantal”, d.w.z. geen niet-negatief geheel getal voorstelt.

Een fout, die we in elke eerste klasse wel eens te bestrijden zullen krijgen, is deze, dat sommige leerlingen in de formules en in de vergelijkingen, waarmee ze moeten werken, telkens weer de namen der eenheden willen vermelden. De leerlingen dienen ervan te worden doordrongen, dat in elke formule elke letter een onbenoemd en geen benoemd getal voorstelt. Essentiële moeilijkheden behoeft dit niet op te leveren: het abstraheren van de aard der eenheden is een proces, waarmee onze leerlingen op de lagere school vertrouwd zijn gemaakt. En dit abstractieproces zetten wij voort, waar het lettergetallen betreft. Door de theorie der rekenkunde te funderen op het onbenoemde getal in plaats van op het benoemde getal zijn we in staat aan die theorie een bescheiden mate van strengheid te geven; we kunnen de theorie dan geheel formeel ontwikkelen. Dit betekent niet een prijs geven der aanschouwelijkheid: we gaan telkens weer van concrete voorbeelden uit en passen het gevondene

steeds weer op grootheden toe; deden we dit niet, dan zou ons onderwijs zijn aanschouwelijk karakter verliezen en tot mislukking zijn gedoemd.

3. Ook in de toegepaste rekenkunde treedt het onbenoemde getal in formules, vergelijkingen en berekeningen steeds weer op de voorgrond. Gaarne wil ik in dit verband wijzen op een artikel van Dr. J. J. M. Reesinck in „*Faraday*” (elfde jaargang, blz. 69 e.v.), waarin deze er de nadruk op legt, dat in de natuurkunde-formules de letters getallen voorstellen en geen grootheden. Hij schrijft:

„In de schoolnatuurkunde rekenen we bijna uitsluitend met onbenoemde getallen. De letters in een formule stellen geen grootheden voor, maar maatgetallen van grootheden; in de formule $V = i \cdot r$ van de wet van Ohm zijn V , i en r niet een spanningsverschil, een stroomsterkte en een weerstand, maar aantallen Volts, Ampères en Ohms.”

Naast dit citaat uit Faraday zet ik nu het volgende:

„In de schoolwiskunde rekenen we bijna uitsluitend met onbenoemde getallen. De letters in een formule stellen geen grootheden voor, maar maatgetallen van grootheden; in de formule $O = b \cdot h$ voor de oppervlakte van een rechthoek zijn O , b en h niet een oppervlakte, een basis en een hoogte, maar aantallen oppervlakte-eenheden en lengte-eenheden.”

Er wordt echter in de schoolwiskunde niet uitsluitend met onbenoemde getallen gewerkt. Voorbeelden van bewerkingen met grootheden zijn:

- 1°. het rekenen met lijnstukken;
- 2°. het rekenen met hoeken;
- 3°. het rekenen met vectoren.

Bij de behandeling van deze onderwerpen dienen we uitdrukkelijk de gelijkheid van twee lijnstukken, van twee hoeken, van twee vectoren te definiëren; eveneens de som en het verschil van twee lijnstukken, van twee hoeken, van twee vectoren. Voor de definitie van verschil van twee grootheden kan de definitie voor het verschil van twee getallen uit de rekenkunde zonder wezenlijke verandering worden overgenomen.

Verder plegen we niet te gaan: producten van lijnstukken, producten van vectoren definiëren we niet, en dit sluit de onmogelijkheid

in om in de formule $O = b \times h$ met de letters de grootheden zelf aan te duiden in plaats van enkel hun maatgetallen.

We dienen de leerlingen van onze tweede klassen dus te leren inzien, dat de formulering „oppervlakte = basis $\times$ hoogte” aanvechtbaar is, zolang ze niet kunnen zeggen, wat er met het product van twee lijnstukken wordt bedoeld. In de regel zullen we de formule interpreteren in de volgende geest: „het aantal vlakte-eenheden van de oppervlakte van een rechthoek = het product van de aantallen lengte-eenheden van basis en hoogte.” Maar dit betekent dan de aanvaarding van het principe, dat de letters in de formule maatgetallen voorstellen en geen grootheden.

Een volledig onderzoek van de grootheden V en O , waarvoor geldt

$$V = i \cdot r \text{ en } O = h \cdot b,$$

kan zeker tot meer leiden, dan alleen tot het aangegeven verband der maatgetallen: de eenheden, waarin spanningsverschil en oppervlakte zijn uitgedrukt staan in verband met de eenheden, waarin stroomsterkte en weerstand, dan wel basis en hoogte zijn uitgedrukt. Dit verband kan worden uitgedrukt door *dimensieformules*, die o.a. bij het onderwijs in de Mechanica uitdrukkelijk aan de orde komen. Ik laat deze materie hier rusten. Slechts wil ik er op wijzen, dat zij die mochten vrezen, dat het standpunt van den Heer Reesinck zou kunnen leiden tot een denatureren van de natuurkundige begrippen, omdat zij in de letters V , i en r (en analoog in de letters O , h en b) meer willen leggen dan alleen getalwaarden en zij dit meerdere niet wensen prijs te geven, hun doel volledig kunnen bereiken door het instellen van een apart dimensie-onderzoek.

4. Een bijzondere plaats in onze formules nemen de goniometrische in, waar we de naam der eenheden wel plegen aan te geven, wanneer de graad de eenheid van hoekmaat is, en niet als we in radialen werken. We schrijven dan het teken voor graad wel bij de cijfergetallen en niet bij de lettergetallen; voorbeelden:

$$\sin (\alpha + 90^\circ) = \cos \alpha;$$

$$\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) = \cos \alpha.$$

Men kan hier verdedigen, dat de letters α hier grootheden voorstellen, nl. hoeken, maar consequent is de notatie toch zeker niet.

5. Ik heb de indruk gekregen, dat enkele van de moeilijkheden, die er aan het werken met grootheden verbonden zijn, in vele van onze leerboeken onvoldoende naar voren komen. Mijn bezwaren gelden soms de wijze van behandeling, soms het feit van de niet-behandeling.

Speciaal bij het onderwerp, dat meestal onder de naam „*Afhankelijkheid van grootheden*” aan de orde wordt gesteld, wordt m.i. doorgaans niet scherp genoeg tussen het begrip grootheid en dat van maatgetal van die grootheid onderscheiden.

Reeds de geciteerde titel is opvallend. Hier komt (soms voor de eerste en laatste maal in het gehele leerboek!) het woord grootheid opduiken. Dit moet, dunkt me, op rekening worden geschreven van traditie en sleur. Er is een tijd geweest, dat men algemeen de rekenkunde fundeerde op hoeveelheden en dus steeds werkte met onbenoemde getallen. Waar was er nu meer aanleiding om aan die benoemde getallen te blijven vasthouden dan bij de evenredige afhankelijkheid, een onderwerp, dat vooral van belang is om zijn toepassingen, waarin bijna steeds van grootheden sprake is? Toepassingen, waartoe men ook de in ouderwetse rekenboekjes zo'n grote rol spelende „regel van drieën” kan rekenen, maar waarbij we toch in de eerste plaats denken aan die van meetkundige, natuurkundige, werktuigkundige en scheikundige aard.

Als voorbeeld van de wijze, waarop men de recht evenredige afhankelijkheid pleegt te definiëren, citeer ik de volgende veel gebruikte definitie:

„Twee grootheden zijn recht evenredig afhankelijk of kortweg recht evenredig, als het enige malen groter of kleiner worden van de ene grootheid het evenveel malen groter of kleiner worden van de andere grootheid tengevolge heeft”. (Jager Bruining en Pijl, Theorie der Rekenkunde, blz. 63; zie ook: Wijdenes, Beknopte Rekenkunde, blz. 91).

Mijn eerste bezwaar tegen deze definitie is, dat men hier spreekt van een grootheid, die enige malen groter of kleiner wordt. In feite heeft men hier dus niet te maken met één enkele grootheid, maar met meer grootheden. „Met een veranderlijke grootheid” zegt men met een niet bijster gelukkige uitdrukking, waarover men den leraar echter geen te zwaar verwijt mag maken, als men bedenkt, dat hij ze gebruikt op een ogenblik, dat het functiebegrip bij de leerlingen

nog niet is aangebracht. Het onderwerp in kwestie dient o.m. juist om het begrip functie te helpen voorbereiden.

Beter zou het zijn, indien men van twee rijen grootheden sprak, tussen wier maatgetallen een nader aan te geven verband bestaat.

Een tweede bezwaar tegen deze definitie is, dat ze wat langademig is. Ze heeft weliswaar de verdienste de aard der afhankelijkheid goed te laten uitkomen. Het is echter, zoals in de volgende paragraaf zal blijken, mogelijk een kort en bondige definitie te geven, waarin onextact woordgebruik wordt vermeden.

Als tweede voorbeeld citeer ik de volgende definitie:

„Als twee grootheden steeds dezelfde verhouding hebben, dan zeggen we, dat ze evenredig met elkaar zijn.” (Vredenduin en van Haselen, Algebra I, blz. 124).

Bezwaar: Twee grootheden hebben maar één verhouding! Volgens deze definitie zou dus elk tweetal grootheden evenredig met elkaar zijn. Ook hier heeft men echter niet het oog op twee grootheden, maar op twee „veranderlijke grootheden”, of in betere bewoordingen, op „twee rijen van grootheden.”

Het woord grootheid blijkt, vooral als men het begrip niet definiëert, voor velerlei gebruik geschikt, zelfs tot camouflage van het begrip functie.

In de tekst, die op de geciteerde definitie volgt, wordt uitsluitend over de maatgetallen van grootheden gesproken (de namen van alle eenheden worden zelfs weggelaten!), zodat het m.i. beter ware geweest een theorie over de afhankelijkheid van getallenrijen te geven in plaats van een theorie over de afhankelijkheid van grootheden.

6. Het blijkt mogelijk, vele moeilijkheden te vermijden en bovendien de theorie een exactere vorm te geven, indien we te werk gaan volgens een methode, die we in principe reeds vinden in Gravelaar's Theorie der Rekenkunde (deel II, blz. 112; 1907).

We noemen de getallenrij (a) afhankelijk van de getallenrij (b), als bij elk getal van de rij

$$b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

een getal behoort van de rij

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Is $a_n : b_n =$ een constante, d.w.z. is dit quotient onafhankelijk

van het rangnummer n , dan noemt men de rijen (a) en (b) *recht evenredig*; is $a_n \cdot b_n =$ een constante, dan noemt men de rijen *omgekeerd evenredig*.

Schrijfwijze opv.:

$$a \div b \text{ en } a \propto b.$$

De notatie $a \propto b$, zal, zodra de hieronder volgende eigenschap III is besproken, bijna steeds vermeden kunnen worden.

Van didactisch standpunt spreekt het wel haast vanzelf, dat deze definities eerst gegeven worden, nadat de begrippen door concrete voorbeelden (geïllustreerd door maatgetallen van rijen van grootheden) zijn voorbereid.

Uit de gegeven definities kan men op eenvoudige wijze de volgende eigenschappen afleiden.

Eig. I. Als $a \div b$, is $a_p : a_q = b_p : b_q$.

Eig. II. Als $a \propto b$, is $a_p : a_q = b_q : b_p$.

Eig. III. Als $a \propto b$, is $a \div \frac{1}{b}$.

Uit $a \div b$ volgt $a = f.b$. De factor f , die onafhankelijk is van n , noemen we de *evenredigheidsfactor*.

7. Willen we de evenredige afhankelijkheid door grafische voorstelling illustreren, dan stuiten we op enige moeilijkheden. In de eerste plaats brengt de volgorde, waarin we de leerstof op onze scholen behandelen, mee, dat we de grafieken gewoonlijk pas in de tweede helft van de tweede klassen van de H.B.S. aan de orde stellen, terwijl de toepassingen der evenredige afhankelijkheid het wenselijk maken, dit onderwerp zo vroeg mogelijk, dat wil zeggen in het *begin* der tweede klasse te bespreken. Gaan we later toch tot grafische voorstelling over, dan lijkt het me gewenst er de aandacht op te vestigen, dat de rechte evenredigheid van (a) en (b) niet wordt voorgesteld door een rechte lijn, die door de oorsprong gaat, maar door een reeks punten op zo'n rechte. Evenzo de omgekeerde evenredigheid niet door een orthogonale hyberbool, maar door een reeks punten erop.

Wil men zich niet tot de evenredigheid van getallenrijen beperken, dan kan men, nadat het functiebegrip algemeen is aangebracht, en het begrip reëel getal is onderwezen, er op wijzen dat alle punten, waarvoor geldt $y \div x$, wel een rechte vullen.

Moet men het als een bezwaar beschouwen, dat we de evenredige afhankelijkheid niet onmiddellijk definiëren voor continue veranderlijkheid in het reële gebied? In de eerste plaats moge ik er op wijzen, dat de leerlingen als ze met dit onderwerp kennis maken, nog slechts met rationale getallen bekend plegen te zijn. In de tweede plaats is van continue veranderlijkheid in vele concrete voorbeelden, die we geven, geen sprake. De maatgetallen zijn dan uiteraard vaak òf gehele òf gebroken getallen. Het behoeft natuurlijk geen betoog, dat, als men later in de theorie ook irrationale getallen wenst te beschouwen, men zonder enig bezwaar voor (a) en (b) rijen irrationale getallen mag kiezen.

8. Het begrip samengesteld evenredig afhankelijk stelt de leerlingen voor aanmerkelijk zwaardere moeilijkheden dan de gewone evenredige afhankelijkheid. Feitelijk hebben we hier ook te maken met een functie $x = F(a, b, c, \dots)$ van meer dan één onafhankelijk veranderlijke.

De grotere moeilijkheden stellen ons voor de vraag, of dit onderwerp misschien niet tè moeilijk is voor onze tweede-klassers, en of we niet beter doen het onderwerp te schrappen dan wel tot later uit te stellen.

Er zijn inderdaad leerboeken, die van de samengesteld evenredige afhankelijkheid niet reppen; er zijn er zelfs (zie b.v. Van Thijn's Rekenkundige Hoofdstukken), die ook de recht en de omgekeerd evenredige afhankelijkheid buiten beschouwing laten. Dit lijkt me een grove miskenning van de betekenis, die de desbetreffende begrippen voor het onderwijs in de natuurwetenschappelijke vakken hebben.

Om niet slechts op eigen indrukken af te gaan heb ik me tot enkele collega's gewend met enige vragen, waarin er naar geïnformeerd werd, *waar, wanneer en in welke vorm bij het onderwijs in de Scheikunde en in de Natuurkunde voor het eerst de begrippen ter sprake komen*. Verder de vraag, *of het gewenst, overbodig of noodzakelijk geacht wordt de begrippen van te voren op de Wiskundeles aan te brengen*. Wat deze laatste vraag betreft blijkt het oordeel te zijn: niet overbodig, niet noodzakelijk, maar wel gewenst (en t.o.v. de eerste beide begrippen: gewenst, zo niet noodzakelijk).

Wat de verkregen inlichtingen op de eerste vraag betreft: *in de tweede klasse komen alle drie begrippen reeds ter sprake*.

Het begrip recht evenredig bij de afhankelijkheid van de uitrekking van een veer en de uittrekkende kracht, het begrip omgekeerd evenredig bij de Wet van Boyle (afhankelijkheid van druk en volume van een bepaalde gewichtshoeveelheid gas bij een bepaalde temperatuur), het begrip samengesteld evenredig bij de hydrostatische kracht op de bodem van een vat (evenredigheid van die kracht met de oppervlakte van de bodem, de hoogte van de vloeistof en het soortelijk gewicht), of wel bij de uitzetting door verwarming van een staaf (evenredigheid van de uitzetting met de lengte van de staaf en met de temperatuursverhoging).

Dit zijn de *eerste* kennismakingen met de begrippen op de Natuurkundeles. Bij de Scheikundelessen vind ik voor klasse IV het begrip samengesteld evenredig in optima forma bij de Wet van Goldberg en Waage, welke wet o.a. aldus geformuleerd wordt, dat de reactiesnelheden op ieder ogenblik evenredig zijn met de concentratie van elk der reagerende stoffen, en *dus* met het product van die concentraties. In dat woordje „dus” zit voor vele leerlingen een grote moeilijkheid, die voorafgaande behandeling op de Wiskundeles vereist.

Ook het Mechanicaonderwijs kan van die voorafgaande behandeling veel profijt hebben.

Indien men het Wiskundeonderwijs alleen geeft terwille van de wiskunde zelf of om haar vormende waarde, behoeft het weinig bezwaar op te leveren, als men zonder diepgaande behandeling langs deze materie heenglijdt. Wanneer men zich echter bij zijn onderwijs mede laat leiden door het nut, dat andere vakken van de behandelde wiskunde kunnen hebben, zal men niet gaarne deze begrippen onbesproken laten. Het is de coördinatie van de verschillende schoolvakken, — die wel is waar nog steeds niet ideaal is, maar die we toch stellig zoveel mogelijk tot haar recht willen laten komen, — welke ons hier bij de vraag „wel behandelen of niet” een beslissing kan vergemakkelijken.

9. De behandeling van de *samengesteld evenredige afhankelijkheid* kan ingeleid worden met enige eenvoudige voorbeelden.

a. De rente r van een kapitaal k is recht evenredig met k , met het procent p en met de tijd t , telkens in de onderstelling, dat de overige grootheden dezelfde blijven;

b. het gewicht G van een balk is recht evenredig met de lengte l , met de breedte b en met de hoogte h ;

c. de oppervlakte O van een rechthoek is recht evenredig met de basis a en met de hoogte b .

In deze voorbeelden wordt gemakshalve over grootheden gesproken, ook als de maatgetallen van die grootheden zijn bedoeld!

We leiden nu de volgende eigenschappen af:

Eig. IV. Uit $x \div a$, $x \div b$ en $x \div c$ volgt: $x \div abc$, in de onderstelling, dat a , b , en c onderling onafhankelijk zijn.

Eig. V. Uit $x \div a$, $x \div b$ en $x \propto c$ volgt: $x \div \frac{ab}{c}$, in de onderstelling, dat a , b en c onderling onafhankelijk zijn.

Voor het meetkundeonderwijs van klasse II en van klasse IV kan eigenschap IV van betekenis zijn voor een bepaalde behandelingswijze van de oppervlakte van rechthoeken en van de inhouden van balken.

Met het oog op de zojuist bedoelde toepassingen en van vele andere toepassingen uit Natuurkunde en Mechanica lijkt het me gewenst de leerlingen door middel van eenvoudige toepassingen de betekenis van de in een formule optredende *evenredigheidsfactor* bij te brengen.

Ik geef het volgende voorbeeld.

In het onder a genoemde renteprobleem hebben we:

$$r \div kpt, \text{ dus } r = fkpt.$$

Drukken we het kapitaal uit in guldens en de tijd in jaren, dan vindt men door $k = 1$ en $p = 1$ en $t = 1$ te nemen:

$$r = f.$$

De evenredigheidsfactor f is dus gelijk aan het maatgetal van de rente, die 1 gulden in 1 jaar à 1 procent opbrengt, dus

$$f = 0,01.$$

10. Wat de vraagstukken betreft heeft men een ruime keuze.

Ik noem de volgende typen.

a. Eenvoudige opgaven over getallenrijen ter vastlegging van de begrippen recht evenredig en omgekeerd evenredig.

- Voorbeelden.* 1. Gegeven: $a_n \doteq b_n$; $a_1 = 6$, $b_1 = 9$; $a_2 = 15$.
 Gevraagd: b_2 .
2. Gegeven: $a_n \times b_n$; $a_1 = 12$, $b_1 = 45$; $a_2 = 27$.
 Gevraagd: b_2 .
3. Gegeven: $a_n \doteq b_n$ (voor constante c);
 $a_n \doteq c_n$ (voor constante b);
 $a_1=4$; $b_1=3$; $c_1=9$; $b_2=5$; $c_2=24$.
 Gevraagd: a_2 .
4. Gegeven: $a \doteq b$, $b \times c$; b en c zijn onderling onafhankelijk.
 Gevraagd: Hoe is de betrekking tussen a en c ?
5. Welke fout zit er in de volgende redenering:
 Uit $a \doteq b$ en $b \doteq c$ volgt $a \doteq bc$, dus in verband met $b \doteq c$ ook $a \doteq b^2$?

b. Vraagstukjes, die dienen om uitgegeven formules afhankelijkheden te leren aflezen.

- Voorbeelden:* 1. Hoe hangt x van y af, als gegeven wordt:
 $3x = 4y$; $15xy = ab$; $ax + by = 0$;
 $ax + by = cx + dy$; $ax = by^2$?
2. Hoe hangt x van a af, hoe van b , van c , van p , van q en van r , als gegeven wordt:

$$x = \frac{3abc^2}{pq^2\sqrt{r}}?$$

c. Vraagstukjes over het begrip evenredigheidsfactor.

- Voorbeelden:* 1. Voor een vrijvallend lichaam geldt: $s \doteq t^2$.
 Wat is de betekenis van de evenredigheidsfactor?
2. Bereken de evenredigheidsfactor in de eerste opgave van a.
3. Gegeven: $x + y \doteq x - y$ (evenredigheidsfactor f).
 Te bewijzen: $x \doteq y$.
 Druk de optredende evenredigheidsfactor in f uit.
4. Van het gewicht G van een balk wordt ondersteld:
 $G \doteq l$, $G \doteq b$, $G \doteq h$.
 Wat is de betekenis van de evenredigheidsfactor, die optreedt, als men G in l , b en h uitdrukt?

d. Vraagstukjes over de „regel van drieën”, de samengestelde regel van drieën, de mengingsrekening en de gezelschapsrekening.

- Voorbeelden:* 1. Gegeven: 74 kg koffie kosten 118,40 gld.
 Gevraagd: Wat kosten $28\frac{1}{2}$ kg?
2. Gegeven: 12 arbeiders graven in 15 dagen van 8 uren een sloot van a meter lengte.
 Gevraagd: Hoe lang is de sloot, die 20 arbeiders in 18 dagen van 6 uren kunnen graven, als de grond 2 maal zo moeilijk te bewerken is?

3. Bewijs, dat bij menging van twee partijen de prijsveranderingen per kg omgekeerd evenredig zijn met de aantallen kg, waaruit de partijen bestaan.
4. Drie mensen moeten s gld. verdelen in verhouding van a_1 , a_2 en a_3 .
Hoeveel krijgt elk?

Voor meer voorbeelden moge ik verwijzen naar § 116 van het eerste deel van mijn Reken- en Stelkunde.

De onder a genoemde typen spelen in ons tegenwoordig onderwijs een geringere rol dan in dat van een kwart eeuw geleden. Misschien ten onrechte!

Dr. Reesinck schrijft in zijn genoemde artikel in Faraday:

„Er bestaat tegenwoordig een streven om de ingeklede vergelijkingen te beperken tot vraagstukken over getallen. Dit verdient geen aanbeveling. Als voorbereiding tot de natuurkunde zijn vraagstukjes over oppervlakken, gewichtshoeveelheden, geldsommen, enz. onmisbaar.”

Dat de onder a , b en c genoemde opgaven echter de belangrijkste zijn, lijkt me boven alle twijfel verheven.

Arnhem, 15 November 1941.

NORMAALBLAD MET DE SYMBOLEN VOOR WISKUNDE.¹⁾

Door de Hoofdkommissie voor de Normalisatie in Nederland is het normaalblad voor symbolen voor de wiskunde definitief vastgesteld. Dit normaalblad N 1267 is door commissie Bo (Algemeene aanwijzingen voor technische geschriften) onder voorzitterschap van prof. dr. M. de Haas, Oud-Hoogleraar der Technische Hoogeschool te Delft, ontworpen om tegemoet te komen aan de gebleken behoefte aan eenheid in de notatie van de meest voorkomende begrippen. Zooals van zelf spreekt is aangesloten aan de in ons land gebruikelijke notaties, terwijl echter eveneens rekening is gehouden met de ook in andere landen gebruikte dan wel genormaliseerde notaties. In het blad zijn opgenomen algemeene symbolen en symbolen, die in het bijzonder worden gebruikt voor rekenkunde, algebra, meetkunde, goniometrie en analyse.

Met betrekking tot deze symbolen zijn regels gegeven voor de notatie van vectoren en lange getallen. Opgemerkt moet worden, dat de commissie uitsluitend de komma als decimaalteeken heeft aanvaard. Overwogen is, om naast het symbool voor den vierkantswortel ook een symbool voor de hoogere machtswortel op te nemen.

Na overleg met de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde werd besloten het laatstgenoemde symbool niet op te nemen, doch aan te bevelen, dat de betrokken grootheden als machten met gebroken exponent worden geschreven. Bij de drie op het blad vermelde notaties voor het deelteeken moge worden vermeld, dat de commissie in het algemeen de voorkeur geeft aan de horizontale streep, terwijl de dubbele punt meer in het bijzonder wordt gebruikt voor het aangeven van verhoudingen.

Het blad is gedrukt op eenheidsformaat A4 (210×297 mm) en is verkrijgbaar bij het Centraal Normalisatie-Bureau, Willem Witsenplein 6, 's-Gravenhage. De prijs bedraagt f 0,16 per stuk, verhoogd met f 0,05 verzendingskosten voor ten hoogste 10 exemplaren.

¹⁾ Zie het ontwerp normaalblad 1267 in Euclides Jg. XVI blz. 241.

DE WAARSCHIJNLIJKHEIDSREKENING EN HET THEOREMA VAN BAYES ¹⁾

DOOR

DR. J. P. VAN ROOIJEN.

Onder de velerlei bedenkingen, die door de school van Von Mises tegen de klassieke kanstheorie worden ingebracht, neemt het bezwaar, dat de door Laplace geformuleerde definitie van mathematische waarschijnlijkheid slechts in zeer beperkte mate rechtstreeks kan worden toegepast, stellig niet de minst belangrijke plaats in. Afgezien immers van de geluksspelen met ballen, kaarten en dobbelsteenen, waarbij de gelijksoortige gevallen zich doorgaans met weinig moeite laten vaststellen, vindt men nauwelijks een ander terrein, hetwelk toegankelijk is voor de klassieke kansdefinitie met haar onderscheiding in gunstige en ongunstige gevallen. Zelfs vraagstukken van meetkundige waarschijnlijkheid kunnen eerst na een niet terstond voor de hand liggende uitbreiding van de oorspronkelijke definitie behandeld worden, doch wil men zijn vleugels wijder uitslaan en bij voorbeeld de foutentheorie of de statistiek in een zuiver kansrekenkundigen zin opbouwen, dan stuit men op moeilijkheden, die reeds menigen trouwen navolger van Laplace het spoor deden verliezen. De eigenaardige, ietwat komische omstandigheid doet zich dan niet zelden voor, dat een leerboek met het klassieke waarschijnlijkheidsbegrip van wal steekt om later min of meer bewust in de richting van een, uiteraard onvolledig geformuleerde en deswege hoogst aanvechtbare frequentietheorie af te buigen.

Intusschen is zulk een tweeslachtigheid alleszins verklaarbaar. Een kansrekening immers, die in den meest strikten zin van het woord aan de oorspronkelijke definitie gebonden wordt, omvat feitelijk niets anders dan een theorie van het geluksspel, waarin

¹⁾ Openbare les ter gelegenheid van de toelating als privaatsdocent in de mathematische statistiek en haar toepassing op het verzekeringswezen aan de Vrije Universiteit te Amsterdam op 12 December 1941.

de fundamenteele theorema's van Bernoulli en Bayes hoogstens de rol vervullen van een geschikt hulpmiddel om tot het uit mathematisch oogpunt interessante, doch in praktisch opzicht betrekkelijk onbeduidende speculatieprobleem door te dringen. De beide genoemde stellingen kunnen namelijk slechts worden afgeleid door toepassing van de regels der totale en samengestelde waarschijnlijkheid en aangezien het bewijs voor deze regels ten volle steunt op een splitsing van de gelijksoortige in gunstige en ongunstige gevallen, is het niet geoorloofd om de theorema's van Bernoulli en Bayes geldig te verklaren voor toevallige evenementen, die zich aan een rechtstreeksche kansberekening onttrekken.

Zulk een enge begrenzing van het toegankelijke terrein nemen de handboeken der waarschijnlijkheidsrekening echter nimmer in acht; wel is waar worden zeer speciale evenementen aan de spits gesteld, doch later overschrijdt men spelenderwijs de aanvankelijk getrokken grenslijnen en de argeloze lezer wordt bekoord door den schijn van een allesomvattende theorie. En wanneer naderhand nogmaals mocht blijken, dat het toeval zich menigmaal buiten het raam van de klassieke kansdefinitie beweegt, dan ligt het redmiddel gereed, want door een speciale interpretatie van het theorema van Bayes gelukt het om zelfs de meest weerspannige evenementen in het net te vangen.

Het behoeft wel geen betoog, dat zulk een gewrongen ontwikkeling van de waarschijnlijkheidsrekening den mathematicus geen bevrediging kan schenken. Sedert de baanbrekende studiën van Laplace zijn dan ook reeds vele pogingen in het werk gesteld om tot een axiomatiseëring van de kansrekening te geraken; voornamelijk door Von Mises c.s. werd de klassieke opvatting fel bestreden, hoewel aanstonds moet worden gezegd, dat hun tot in onderdeelen uitgewerkte frequentietheorie geen hechten grondslag bleek te bezitten en deswege op den duur den toets der critiek niet kon doorstaan. Daarnaast komt in de literatuur van den laatsten tijd nog een geheel andere gedachtengang tot uiting, waarbij de kansrekening wordt beschouwd als een typisch onderdeel van de leer der additieve verzamelingenfuncties. In hoeverre op dit standpunt een logisch sluitend geheel kan worden verkregen, moet vooralsnog worden afgewacht, aangezien het desbetreffend onderzoek nog in een beginstadium verkeert en de critiek zich reeds heeft doen gelden.

Ook de klassieke theorie mag zich echter in een blijvende belangstelling verheugen, en met name de functie, die daarin door het theorema van Bayes wordt vervuld, biedt dan ook eigenaardige aspecten. Deswege stellen wij het ons thans tot taak om de kans-theoretische beteekenis van dit theorema te bezien, en wel in zoo volledig mogelijken omvang met het oog op de talrijke bezwaren, die tegen deze grondstelling van de klassieke theorie zijn te berde gebracht.

Volgens de opvatting van Laplace is de mathematische waarschijnlijkheid van een kansevenement gelijk aan een breuk, waarvan de teller het aantal gunstige en de noemer het aantal mogelijke gevallen omvat; hieraan dient dan nog uitdrukkelijk te worden toegevoegd, dat alle gevallen volstrekt gelijkwaardig moeten zijn. Tegen deze definitie heeft men menigmaal de bedenking geopperd, dat het begrip „gelijkwaardig” identiek moet worden geacht met „even waarschijnlijk”, zoodat men in de omschrijving van Laplace feitelijk met een vicieusen cirkelgang te doen heeft. Hierbij valt evenwel op te merken, dat „gelijkwaardigheid” allermint een conceptie van de klassieke kansrekening is; het is veeleer een principe, dat reeds van oude tijden af in bijna iedere wetenschap met practischen inslag wordt gebruikt en nimmer moeilijkheden heeft opgeleverd. Gelijkwaardig of aequivalent noemt men objecten, grootheden of welke elementen dan ook, indien zij eenzelfde positie ten opzichte van een ander element innemen en dus te dien aanzien verwisselbaar kunnen worden geacht. Wanneer in de theoretische waarschijnlijkheidsrekening van dit beginsel gebruik wordt gemaakt, dan is het zeker niet noodzakelijk om het centrum der gelijkwaardigheid nader te preciseeren; het bestaan ervan kan zonder meer worden gepostuleerd en men opereert dan met verzamelingen van onderling gelijkwaardige elementen, waarvoor de regels van de totale en de samengestelde waarschijnlijkheid gemakkelijk bewezen kunnen worden. Trouwens, het geheele bouwwerk van de kansrekening kan zonder de geringste stoornis worden opgetrokken, mits men er nauwlettend voor zorgt, dat in geen deele een beroep op de practische zijde van de problemen wordt gedaan. De aan de hand van het geschetste gelijkwaardigheidsbeginsel ontwikkelde kanstheorie is immers een zuivere gedachtenconstructie, zoodat een confrontatie met aan de practijk ontleende

voorbeelden zinloos zoude zijn; nog minder beteekenis zou men mogen toekennen aan een toetsing van de formeel af te leiden wet der groote getallen door middel van veelvuldig herhaalde waarnemingen met een kansobject.

Hoewel een aldus ontwikkelde waarschijnlijkheidsrekening uit mathematisch oogpunt ongetwijfeld aantrekkelijk mag worden genoemd, het is nochtans te begrijpen, dat de volkomen abstractie van de door de practijk gestelde vraagstukken op den duur een onbevredigende situatie moet scheppen. In de natuur behooren de wisselvällige evenementen waarlijk niet tot de uitzonderingen en de menschelijke geest kan onmogelijk rusten, alvorens ook daaromtrent een door den aard der materie bepaalde oplossing is gevonden.

Zoodra men zich evenwel door de practische zijde van de kansrekening laat inspireeren, heeft het gelijkwaardigheidsbeginsel als uitgangspunt voor de theorie ten volle afgedaan. Beschouwen wij daartoe het klassieke voorbeeld van den volmaakt homogenen dobbelsteen. De zes zijvlakken zijn volstrekt gelijkwaardig ten opzichte van het zwaartepunt; voegen wij derhalve aan elk zijvlak het kansgetal $\frac{1}{6}$ toe, dan kan daartegen geen enkel bezwaar worden ingebracht en in de bovenbedoelde formeele theorie zou de dobbelsteen zelfs ter illustratie uitnemende diensten kunnen verrichten, zoolang men zich althans van experimenten onthoudt. Wanneer men echter met den dobbelsteen als kansobject waarnemingen gaat doen, dan moet men vragen naar de positie van de zijvlakken ten opzichte van een worp en het is zonder meer duidelijk, dat alsdan van gelijkwaardigheid niet meer gesproken kan worden. Bij het begin van den worp zijn de standen van de zijvlakken reeds verschillend en ook tijdens de daarna volgende rotaties en translaties zijn de bewegingen verre van identiek.

Op dit moment nu moet het noodzakelijke offer aan de practijk worden gebracht. Moge de gelijkwaardigheid ten opzichte van een worp dan al ontbreken, hierin stemmen de zijvlakken van den dobbelsteen met elkander overeen, dat eenzelfde vermoeden voor de min of meer bevoorrechte positie voor en tijdens den worp voor alle gelijkelijk geldt. Men drukt zich in dier voege uit, dat de zes zijvlakken even waarschijnlijk zijn, waarbij dan de moeilijkheid blijft bestaan, hoe dit begrip van „even groote waarschijnlijkheid” mathematisch gedefinieerd zal moeten worden. Alle pogingen om

hiertoe te geraken hebben gefaald en deze leemte in de klassieke kanstheorie behoort men bewust te aanvaarden als uitvloeisel van de vereischte instelling op het werkelijke natuurgebeuren. In ieder geval is de genoemde leemte blijkbaar een ernstiger euvel dan de zoogenaamde vicieuse cirkelgang, dien men in de traditioneele definitie van mathematische waarschijnlijkheid aanwezig acht.

Terwijl het begrip „even groote waarschijnlijkheid” dus voor een exact-mathematische ontleding geen aanknooppingspunten biedt, leidt zijn toepassing op practische vraagstukken weer tot andere bezwaren, aangezien een afdoend criterium nopens de verwisselbaarheid van alle mogelijke gevallen ten opzichte van een waarneming meestal ontbreekt. Het is alleszins verklaarbaar, dat men ook dit probleem onder de loupe heeft genomen, doch de langdurige en door velen met élan gevoerde pennestrijd over de vraag, of de beslissing nopens de even groote waarschijnlijkheid van de diverse mogelijkheden door dwingende motieven moest worden beheerscht, dan wel op grond van totale onkunde kon worden genomen, doet bij rustige bezinning ietwat komisch aan. Tenslotte heeft deze kwestie uitsluitend een practisch belang en zij mag dan ook alleen vanuit dit licht worden gezien. Wegens het ontbreken van een objectieven maatstaf zal de decisie over de mogelijkheden van een kansevenement zelden met zijn innerlijke structuur harmonieeren, doch een aanwijzing omtrent de gemaakte fout zal alsdan kunnen worden afgeleid uit de mate, waarin de theoretische en de proefondervindelijke resultaten divergeeren. Overigens mag men zich met het bezit van dezen toetssteen slechts tot op zekere hoogte gelukkig prijzen, want de drang om de grillen van het toeval aan banden te leggen heeft velen tot een onjuiste vertolking van de geheimzinnige wet der groote getallen verleid.

Alvorens in dit opzicht tot klaarheid te kunnen komen, moeten wij de werking van het toeval in het juiste licht trachten te bezien. Beschouwen wij daartoe een zoo volmaakt geldstuk, dat de kansen op kruis en munt beide gelijk zijn aan $\frac{1}{2}$. Indien men nu met dit object tienmaal achter elkaar werpt en telkens kruis waarneemt, dan zal menigeen zich over dit resultaat verwonderen en inderdaad is de waarschijnlijkheid à priori van het geobserveerde verschijnsel nog iets kleiner dan één duizendste. Laten wij evenwel aannemen, dat in een tweede serie van tien worpen een bonte opeenvolging van kruis en munt wordt waargenomen; er zou dan geen reden

tot verbazing zijn, hoewel ook deze uitslag *à priori* dezelfde zeer geringe kans had. Hieruit blijkt, dat men zich over het resultaat van een proevenreeks, hoe dit tenslotte moge uitvallen, niet in het minst verwonderen mag; en aangezien het getal tien in deze interpretatie nopens de mogelijkheden van het toeval volstrekt niet wezenlijk is, dient iedere uitslag van een serie waarnemingen met een kansobject van tevoren denkbaar te worden geacht en achteraf als de normale werking van het toeval te worden aangemerkt.

Wanneer zulk een rigoureuus standpunt binnen het raam van de kansrekening past, dan rijst aanstonds de vraag, hoe nochtans van een wet der groote getallen kan worden gesproken. De gebruikelijke omschrijving hiervan luidt immers, dat het toeval in voortdurende werkzaamheid tot het neutraliseeren van zijn eigen capriolen kan worden gedwongen.

Het spreekt intusschen vanzelf, dat niet de populaire exegese, doch enkel en alleen de mathematische formuleering van de wet der groote getallen tot richtsnoer mag dienen. Daarom is het ten zeerste gewenscht om aan ons eigenlijk onderzoek betreffende het theorema van Bayes te doen voorafgaan een nauwkeurige ontleding van de resultaten, waartoe de directe kansrekenkundige analyse op het terrein van de meervoudige waarnemingen heeft gevoerd.

Onderstel, dat de gebeurtenis E de kans p en het tegen-evenement F de complementaire kans q heeft, zoodat p en q tezamen de eenheid vormen. Wanneer nu s proeven worden genomen, dan zijn er ten aanzien van het successieve optreden van E en F blijkbaar 2^s mogelijkheden. Al deze mogelijkheden moeten, zooals reeds tevoren werd betoogd, *à priori* gelijkwaardig worden beoordeeld. Letten wij echter uitsluitend op het aantal malen, dat E en F in s proeven optreden en dus niet op de volgorde, dan heeft er een verdeeling plaats van de aanvankelijk aequivalente mogelijkheden: er is slechts één geval, waarin zonder onderbreking E optreedt; voorts s gevallen, waarin het evenement F de gedurige herhaling van E juist eenmaal verstoort; dan $\binom{s}{2}$ gevallen, waarin F precies tweemaal interrumpeert, enz. Aldus resteeren niet meer dan $s + 1$ mogelijkheden, die andermaal ingeperkt kunnen worden, zoodra zelfs de absolute frequentie, waarmee E en F in de waarnemingsreeks optreden, minder gewicht in de schaal legt.

Men moet dan bij voorbeeld de gevallen samennemen, waarin E minstens m en hoogstens n maal te voorschijn komt.

Dusdoende geraakt men tot het befaamde theorema van Bernoulli en wel in den aan Laplace te danken vorm. Kiezen wij namelijk de getallen m en n als volgt:

$$m = sp - \gamma \sqrt{2spq} \qquad n = sp + \gamma \sqrt{2spq}$$

en noemen wij P de kans à priori, dat de absolute frequentie van het optreden van het evenement E tusschen m en n begrepen zal zijn, dan geldt de fundamenteele betrekking:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt = \Phi(\gamma)$$

Wanneer wij derhalve het aantal malen, dat E in s proeven te voorschijn komt, aanduiden door den letter μ , dan geldt voor de ongelijkheid:

$$|sp - \mu| < \gamma \sqrt{2spq}$$

of, in betrekking tot de relatieve frequentie $\frac{\mu}{s}$, voor de ongelijkheid:

$$\left| p - \frac{\mu}{s} \right| < \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

de waarschijnlijkheid à priori:

$$P = \Phi(\gamma)$$

Preganter en met het oog op de mathematische vertolking meer geëigend is nog de volgende inkleeding:

$$\left| p - \frac{\mu}{s} \right| < \varepsilon \text{ indien } s > 2pq \left(\frac{\gamma}{\varepsilon} \right)^2$$

gaat gepaard met de waarschijnlijkheid:

$$P = \Phi(\gamma).$$

Uit deze formuleering van het theorema van Bernoulli blijkt, dat men niet gerechtigd is tot de conclusie: de relatieve frequentie

$\frac{\mu}{s}$ heeft bij het voortzetten der waarnemingen de elementaire kans p tot limiet; dan toch zouden de genoteerde ongelijkheden met zekerheid moeten gelden, terwijl nu de kans P als nevenvoorwaarde optreedt. De merkwaardige, hoewel tegelijkertijd de preciese interpretatie van het Bernoulliaansche theorema vertroebelende, omstandigheid doet zich evenwel voor, dat de waarschijnlijkheid P

bij gegeven ε op haar beurt tot de eenheid nadert, naarmate de proevenserie wordt uitgestrekt. Deze onbepaalde nadering laat echter niet toe om op een zeker moment de kans P met de eenheid te vereenzelvigen, want dan geraakt men in beslist strijd met de geaardheid van het toeval. Zij namelijk een ε gekozen en worde vervolgens een reeks van s waarnemingen verricht, waarbij:

$$s = \left[\frac{8pq}{\varepsilon^2} \right]$$

A priori hebben alle 2^s mogelijkheden een zekere, zij het dan ook zeer geringe waarschijnlijkheid, en wanneer daarvan juist een dergenen, welker relatieve frequentie $\frac{\mu}{s}$ buiten de ε -omgeving van p is gelegen, zich zou manifesteren, dan behoefde men aan het toeval nog geen wangedrag toe te schrijven.

Zuiver theoretisch bezien nadert de relatieve frequentie volgens de klassieke methodiek dus niet tot een limiet, zoodat met buitensporige waarnemingsreeksen van groote afmeting ten allen tijde rekening zou moeten worden gehouden. Op dit punt nu komt men in lijnrechte tegenspraak met de theorie van Von Mises, die het bestaan van de limiet der relatieve frequenties postuleert en daarop voorts de definitie van mathematische waarschijnlijkheid baseert. Wel is waar wordt door Von Mises zulk een contradictie tusschen zijn limietaxioma en de klassieke vertolking van het Bernoulliaansche theorema ten stelligste ontkend, maar het is in het licht van de voorgaande beschouwing niet voor bestrijding vatbaar, dat de tegenstelling fundamenteel is en op geenerlei wijze geëlimineerd kan worden.

Men zou de vraag kunnen opwerpen, of mogelijk in dit twist-geding aan het experiment een beslissende uitspraak kan worden ontleend. Tot het wezen van de mathematische limiet behoort evenwel, dat zij nimmer bereikt wordt, zoodat een confrontatie van Von Mises' uitgangspunt met de waarneming reeds bij voorbaat op een mislukking moet uitloopen. De qualiteit van een proevenserie kan heel bedenkelijk zijn, terwijl een trouwe discipel van Von Mises nochtans met klem kan beweren, dat aan de nadering tot de limiet niet getwijfeld behoeft te worden, omdat immers het beginstuk van de reeks naar luid van het mathematische grensbegrip onverschillig is. Anderzijds zal ook de klassieke kansreke-

naar zich nimmer gewonnen mogen geven; vertoont een serie van waarnemingen een regelmatig karakter, dan zal hij daarop aldus moeten reageeren, dat de verwezenlijking van het *à priori* waarschijnlijkste resultaat hem geenszins mag verbazen en stellig niet de verplichting oplegt om aan de nadering tot een limiet te gelooven.

Overigens kan volmondig worden toegestemd, dat het experiment zich in den loop der tijden van markante grillen onthouden heeft. Met andere woorden: hoewel de theorie uitzonderlijke waarnemingsreeksen toelaat, nochtans heeft een uitgebreide ervaring ze niet of nauwelijks doen ontstaan en men kan dus zeggen, dat het toeval zich in het algemeen rustiger schijnt te gedragen dan volgens zijn recalcitranten aard te verwachten valt. Door Von Mises wordt dan ook ten behoeve van zijn limietaxioma niet tevergeefs een beroep op de practijk gedaan, want inderdaad vertoonen relatieve frequenties doorgaans een zeer duidelijke neiging tot limietovergang. De populaire opvatting gaat zelfs nog iets verder; volgens haar vindt reeds in matig uitgebreide waarnemingsreeksen een genoegzame nivelleering plaats en zij spreekt ook dan van de wet der groote getallen, wanneer in kans theoretischen zin nauwelijks aanknopingspunten te ontdekken zijn.

Zooals reeds eerder werd opgemerkt behoort het theorema van Bernoulli tot de directe kansanalyse en het mag deswege slechts worden toegepast op zulke evenementen, waarbij volgens het klassieke voorschrift een onderverdeeling van alle even waarschijnlijke gevallen in gunstige en ongunstige ter hand kan worden genomen. Deze beperking hangt voornamelijk daarmede samen, dat de afleiding van de Bernoulliaansche stelling op de regels van de totale en de samengestelde waarschijnlijkheid berust en het bewijs voor deze regels impliceert op zijn beurt wederom het gelijkmogelijkheidsprincipe.

Thans dringt zich uiteraard de vraag naar voren, of de klassieke theorie ook ruimte biedt voor een indirecte analyse, waardoor wij bij voorbeeld in staat zouden zijn om de mathematische waarschijnlijkheid van een object, welks innerlijke structuur zich tegen een rechtstreeksche kansbecijfering verzet, langs experimenteelen weg te benaderen.

Om de gedachten te bepalen vatten wij een zoogenaamden valschen dobbelsteen in het oog. Ofschoon de zes even waarschijnlijke

gevallen nu ontbreken, blijft de uitslag van een worp niettemin onzeker en er is dus alle aanleiding om ook aan de zijkanen van dezen dobbelsteen een kansgetal toegevoegd te denken. De numerieke waarden daarvan zijn vooralsnog onbekend; slechts zooveel staat vast, dat de som dier getallen gelijk is aan de eenheid.

Wij kunnen echter dieper tot de kern van het onderhavige vraagstuk doordringen. Wanneer de zich in een beker bevindende dobbelsteen na enkele schudbewegingen op den grond wordt geworpen, dan hangt het resultaat van een zeer groot aantal physische factoren af, die elk binnen een zeker interval kunnen varieeren. Deze factoren zijn van uiteenloopenden aard, ten deele van elkander afhankelijk en bovendien vallen zij met ongelijke gewichten in de schaal. Wij moeten ons nu voorstellen, dat alle mogelijke factoren f_i , die tijdens een bepaalden worp in het spel zijn, na de toekenning van passende gewichten w_i in een verzameling m van eenheidsfactoren oplossen, zoodat:

$$m = w_1 f_1 + w_2 f_2 + w_3 f_3 + \dots + w_n f_n$$

De elementen van deze verzameling kunnen nu in een zestal groepen worden ondergebracht, al naarmate zij voor een der zijvlakken van den dobbelsteen gunstig zijn. Beschouwen wij het vlak z_k , dan kan dus worden geschreven:

$$g_k = w_{k_1} f_{k_1} + w_{k_2} f_{k_2} + \dots + w_{k_n} f_{k_n}$$

en de met het genoemde vlak corresponderende mathematische kans p_k laat zich dan voorstellen door het quotient van de grootheden g_k en m . Hierbij valt op te merken, dat krachtens deze definitie de kans van worp tot worp varieert, omdat ook de som der eenheidsfactoren in teller en noemer veranderlijk zal zijn. Blijkens de ervaring wordt deze variabiliteit evenwel geringer, naarmate de omstandigheden, waaronder de worp geschiedt, tot een hooger en complicatiegraad worden opgevoerd. Indien men dus met den dobbelsteen op zoodanige wijze experimenteert, dat de volle ontplooiing van het toeval is gewaarborgd, dan zullen de met de zijvlakken corresponderende kansen tijdens een reeks van waarnemingen constant geacht mogen worden.

De afleiding van de regels der totale en samengestelde waarschijnlijkheid baart aan de hand van het bovenomschreven principe niet de minste moeite, zoodat wij hierop niet nader behoeven in te gaan.

Het spreekt wel vanzelf, dat de tevoren geformuleerde definitie geen kansbecijfering toelaat; zij werd dan ook slechts in dezen vorm ontwikkeld, omdat de kansrekenkundige behandeling van objecten, waarop het elementaire voorschrift van Laplace geen toepassing kan vinden, de bediening van het in de aprioristische waarschijnlijkheidstheorie gebruikelijke apparaat vordert en deswege genoegzaam voorbereid moest worden. Nu aan dezen eisch is voldaan, kunnen ook zulke objecten zonder bedenking in het normale schema worden gevoegd.

Natuurlijk kan het bovengenoemde fysisch georiënteerde principe ook op den idealen dobbelsteen worden toegepast. Men geraakt dan tot het bekende quotient van gunstige en mogelijke gevallen, zoodat geen nieuw gezichtspunt geopend wordt. In zooverre is zulk een probleemstelling betreffende den homogenen dobbelsteen evenwel nuttig, dat zij de bezwaren, die tegen de ontleding van de fysische factoren in een complex van eenheden kunnen worden ingebracht, doeltreffend elimineert. Want in het geval van den idealen dobbelsteen blijkt geen tegenstelling te bestaan tusschen de theoretische suppositie, volgens welke de mathematische kansen van worp tot worp constant blijven, en het proefondervindelijke resultaat van een waarnemingsreeks. Evenzoo is men gerechtigd tot de onderstelling, dat ook het kansensysteem van den valschen dobbelsteen en in het algemeen van zulke objecten, waarbij aan de werking van het toeval de vrije hand wordt gelaten, tijdens een serie van experimenten onveranderlijk blijft.

Het probleem, dat thans aan de orde wordt gesteld en een diepgaande bespreking vordert, luidt aldus: in s proeven is het evenement E in totaal μ maal opgetreden; aannemende, dat E door een vaste kans p wordt gekarakteriseerd, welke conclusie kan dan ten aanzien van die onbekende waarschijnlijkheid aan het waarnemingsmateriaal worden ontleend? Afgezien van den eisch, dat aan E tijdens het experiment een onveranderlijke kans ten grondslag moet liggen, laat ons de hoedanigheid van het beschouwde evenement volstrekt onverschillig; wel is waar biedt de probleemstelling de belangrijkste perspectieven, indien zij bij voorbeeld een worpen-serie met een valschen dobbelsteen betreft, doch ook waarnemingen met een idealen steen komen in aanmerking ter toetsing van de theoretische resultaten.

Het ligt wel zeer voor de hand, dat wij allereerst zullen nagaan,

in hoeverre het theorema van Bernoulli uitsluitel kan geven. Volgens dit theorema bleek het nagenoeg zeker te zijn, dat de relatieve frequenties van een evenement E binnen het raam van een uitgebreide proevenserie zich op den duur zullen ophoopen in de onmiddellijke omgeving van de met E corresponderende kans p . Nu omgekeerd: wanneer uit langdurige waarnemingen een verzameling van relatieve frequenties resulteert, die zich op den duur in een zeker interval verdringen, dan is het vrijwel uitgesloten, dat de onbekende kans p zich buiten dit interval bevindt.

De exact-mathematische formuleering kan voorts gemakkelijk worden afgeleid. Volgens het theorema van Bernoulli geldt ten aanzien van de *à priori* gegeven kans p , dat met de ongelijkheid:

$$\left| p - \frac{\mu}{s} \right| < \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

correspondeert de waarschijnlijkheid:

$$P = \Phi(\gamma)$$

Nu is p niet bekend, doch wij beschikken wel over een (eventueel laatste) relatieve frequentie $\frac{\mu}{s}$, die uiteraard de waarschijnlijkste waarde van p voorstelt. De juiste grootte van p kan door invoering van het bedrag ε als dus worden geschreven:

$$p = \frac{\mu}{s} + \varepsilon$$

en de complementaire kans q op haar beurt:

$$q = \frac{\nu}{s} - \varepsilon$$

waarbij dan:

$$\mu + \nu = s$$

De bovengenoemde ongelijkheid levert nu in eerste instantie:

$$|\varepsilon| < \gamma \sqrt{\frac{2pq}{s}}$$

Wanneer de waarnemingsreeks echter een genoegzame uitbreiding bezit en s dus zeer groot is, dan kan het product pq met hoogen graad van precisie worden vervangen door $\frac{\mu\nu}{s^2}$, zoodat de omkeering

van het Bernoulliaansche theorema luidt: de onbekende kans p voldoet aan de ongelijkheid:

$$\frac{\mu}{s} - \gamma \sqrt{\frac{2\mu\nu}{s^3}} < p < \frac{\mu}{s} + \gamma \sqrt{\frac{2\mu\nu}{s^3}}$$

met de waarschijnlijkheid:

$$P = \Phi(\gamma)$$

Het is duidelijk, dat de eenige bedenking tegen dezen gedachten-gang, namelijk de verwisseling van pq met $\frac{\mu\nu}{s^2}$, geen gewicht in de schaal legt. Immers, blijkens het theorema van Bernoulli is het nagenoeg zeker, dat de relatieve frequenties zich op den duur rondom de kans p zullen verdringen, zoodat eveneens met groote stelligheid kan worden beweerd, dat de afstand ε tusschen p en de frequentie met de hoogste rangorde uiterst gering zal zijn. En mocht iemand de opmerking willen maken, dat de zoo noodzakelijke volstrekte zekerheid omtrent het gedrag van ε blijkt te ontbreken, dan luidt het antwoord, dat deze beperking reeds in de allesomvat-tende waarschijnlijkheid P besloten ligt.

De omkeering van het theorema van Bernoulli is uitermate belangrijk. Zij toch verschaft het middel om, met inachtneming van de door de waarschijnlijkheidsrekening zelve te stellen grenzen, de analyse van evenementen ter hand te nemen, die door vaste kansen worden gekarakteriseerd, doch vanwege hun samengestelde struc-tuur voor een rechtstreeksche becijfering ontoegankelijk zijn. Een-zelfde resultaat kan eveneens uit het theorema van Bayes worden afgeleid, doch de supposities, die men dan moet invoeren, worden door velen dermate aanvechtbaar geacht, dat de zekerheid van een hechten grondslag ten eenen male ontbreekt. Zulk een pessimisme ten aanzien van het zoo waardevolle theorema van Bayes is volstrekt niet geoorloofd; wij zullen veeleer onderzoeken, hoe ook deze stelling tot een steunpilaar van de klassieke theorie kan worden gemaakt. Maar de omkeering van het theorema van Bernoulli verdient, na de zorgvuldige overweging nopens het physische of biologische factorencomplex, hetwelk de te observeeren evenemen-ten beheerscht, op den voorgrond te worden geplaatst, opdat geen sprake zij van het verwijt, dat de waarschijnlijkheidsrekening de mathematische precisie opoffert aan haar streven om het terrein, waarop zij haar scepter wenscht te hanteeren, zoo ver mogelijk uit te breiden.

Het veelomstreden theorema van Bayes luidt volgens de meest eenvoudige formulering aldus: een waargenomen gebeurtenis E kan worden toegeschreven aan verschillende, elkander uitsluitende oorzaken c_i ; wanneer p_i de kansen zijn, dat deze oorzaken optreden, en q_i de kansen op E , als de oorzaken c_i werken, dan is de waarschijnlijkheid à posteriori W_k , dat c_k zich heeft doen gelden, gelijk aan:

$$W_k = \frac{p_k q_k}{p_1 q_1 + p_2 q_2 + \dots + p_n q_n}$$

In de bewoordingen van deze stelling is wel is waar sprake van oorzaken, waaraan het geobserveerde evenement E zijn ontstaan heeft te danken, doch in de mathematische inkleeding spelen zij blijkbaar geen rol. Slechts een gemakkelijke spreekwijze heeft tot de introductie van het begrip „oorzaken” in de kansrekening geleid en men bedoelt daarmee niets anders dan de onderscheidene mogelijkheden, die bij de waarnemingen met een kansobject functioneeren. Uit dien hoofde moeten de werkende oorzaken dus worden opgevat als de verschillende waarschijnlijkheden, die aan het beschouwde evenement ten grondslag liggen, zoodat zij met de kansen à priori q_i geïdentificeerd kunnen worden.

Moelijker is de situatie doorgaans in betrekking tot het kansenstelsel p_i . Wanneer omtrent de numerieke waarden daarvan geen twijfel bestaat, dan is de waarschijnlijkheid W_k een concrete grootheid, die aan de wet der groote getallen voldoet en deswege aan de hand van uitgebreide waarnemingsreeksen kan worden geverifieerd. Tast men evenwel ten aanzien van de kansen p_i in het duister, dan kan men desnoods het eindresultaat der berekening forceeren door een min of meer verantwoorde onderstelling in te voegen, maar het is duidelijk, dat alsdan een nauwgezet onderzoek zal moeten uitwijzen, in hoeverre de gekozen suppositie met de aan de berekening te ontleenen conclusie samenhangt.

Aan een bekend voorbeeld kan deze gedachtengang worden getoetst. In een bak bevinden zich witte en zwarte ballen, N in totaal. Men neemt er achtereenvolgens s uit, waarbij na elken greep de getrokken bal teruggeworpen en onder de andere wordt geschud. Wanneer de groep van s ballen uit m witte en $s-m$ zwarte bestaat, dan vraagt men naar de kans, dat er in de bak μ witte en $N-\mu$ zwarte ballen aanwezig zijn.

In zulk een vorm nu is het vraagstuk voor een eenduidige oplossing niet vatbaar. De aan het evenement ten grondslag liggende

oorzaken, *casu quo* de mogelijke samenstellingen van den bak leveren geen enkele moeilijkheid; wanneer het reservoir μ witte en $N-\mu$ zwarte ballen bevat, dan is de kans *a priori* op het beschouwde evenement:

$$q = \binom{s}{m} \left(\frac{\mu}{N} \right)^m \left(\frac{N-\mu}{N} \right)^{s-m}$$

Zoolang men echter niets weet omtrent de wijze, waarop het vat werd gevuld, kan de hoegrootheid van de kansen p_i niet worden vastgesteld. Een denkbare onderstelling houdt bij voorbeeld in, dat alle mogelijke samenstellingen *a priori* even waarschijnlijk zijn; in dat geval is p_i constant, zoodat hij uit teller en noemer kan worden weggedeeld en de gevraagde waarschijnlijkheid *a posteriori* luidt:

$$W = \frac{\binom{s}{m} \left(\frac{\mu}{N} \right)^m \left(\frac{N-\mu}{N} \right)^{s-m}}{\sum_{\mu=1}^N \binom{s}{m} \left(\frac{\mu}{N} \right)^m \left(\frac{N-\mu}{N} \right)^{s-m}}$$

of:

$$W = \frac{\mu^m (N-\mu)^{s-m}}{\sum_{\mu=1}^N \mu^m (N-\mu)^{s-m}}$$

Het behoeft intusschen nauwelijks te worden gezegd, dat dit resultaat proefondervindelijk geen aanknoopingspunten biedt. Neemt men dus een zeer groot aantal bakken, en verricht men met elk de bovenomschreven waarneming, dan mag men niet verwachten, dat W maal dit aantal μ witte en $N-\mu$ zwarte ballen zal bevatten.

Natuurlijk kan men het daarheen leiden, dat inderdaad aan alle mogelijke samenstellingen *a priori* een even groote waarschijnlijkheid beantwoordt; daartoe vult men een tweeden bak met N ballen, genummerd van 1 tot N , waarbij dan het getrokken nummer zal aangeven, hoeveel witte en zwarte ballen in het eigenlijke waarnemingsreservoir gestort zullen worden. Dusdoende kan men in het kansensysteem p_i blijkbaar tal van variaties aanbrengen en tegelijkertijd ondergaat de corresponderende waarschijnlijkheid *a posteriori* W een reeks van min of meer uiteenlopende gedaante-
verwisselingen.

Het loont de moeite om het gedrag van W als functie van μ in de grafische voorstelling te onderzoeken. Vooraf kan te dien aanzien wel een vermoeden worden uitgesproken. Indien de bak

een zeer groot aantal ballen bevat, terwijl de waargenomen hoeveelheid s slechts matig is, dan zal de W -kromme in hoofdzaak worden beheerscht door de nopens het kansensysteem p_i gemaakte onderstelling. Bevinden zich daarentegen in het vat een gering aantal ballen, doch is de proevenserie rijkelijk lang, dan zal de hypothese omtrent de kansen p_i nauwelijks gewicht in de schaal leggen, zoodat de W -kromme bij het resultaat der waarneming zal aanpassen en zulks brengt mede, dat in de buurt van het punt $\frac{m}{s}$ een maximum moet optreden.

Een bevestiging van dit vermoeden kan uiteraard gemakkelijk verkregen worden, indien men de aan de hand van verschillende hypothesen afgeleide formules voor de waarschijnlijkheid W onderzoekt. Het blijkt dan, dat de betreffende krommen bij toenemende waarden van s en m een maximum vertoonen, hetwelk zich steeds hoger verheft; en aangezien de totale oppervlakte, begrepen tusschen de ordinaten in de punten 1 en N , gelijk moet zijn aan de eenheid, worden de W -krommen op den duur links en rechts van het maximum door een zeer steile helling gekarakteriseerd.

De beteekenis van dit aanvankelijke resultaat is niet gering. De maximale waarde van W levert de kans op de waarschijnlijkste samenstelling van den bak, zijnde $N \frac{m}{s}$ witte en $N \left(1 - \frac{m}{s}\right)$ zwarte ballen. Naarmate de waarnemingsreeks zich uitbreidt, resteeren alleen de kanswaarden W in de onmiddellijke omgeving van het maximum, zoodat men tot op zekere hoogte kan beweren, dat de experimenteel gevonden relatieve frequentie gelijk is aan de met het beschouwde evenement corresponderende kans.

Teneinde hieromtrent meer zekerheid te verkrijgen, zullen wij ons van het zoogenaamde urnenschema vrij moeten maken. In het algemeen dienen wij dus aan te nemen, dat een gebeurtenis E in s waarnemingen m keer is opgetreden en de vraag rijst, welke conclusies uit dit experiment ten aanzien van de aan E ten grondslag liggende waarschijnlijkheid getrokken kunnen worden. Blijkbaar impliceert de probleemstelling slechts, dat de kans op E tijdens de waarneming een onveranderlijke grootheid is.

Allereerst vestigen wij onze aandacht op de oorzaken. Zooals in het voorgaande genoegzaam is gebleken, moeten wij hieronder verstaan de kansen à priori op het evenement E . Omtrent de ge-

aardheid van het beschouwde evenement is niets bekend en daarom komt voor de waarschijnlijkheid à priori een willekeurige waarde uit het interval $(0,1)$ in aanmerking. Aangezien de verzameling der reële getallen binnen een zeker interval echter de machtigheid van het continuüm bezit, moet de probleemstelling een wijziging ondergaan; niet „de waarde x ”, waarmee uiteraard altoos een waarschijnlijkheid nul correspondeert, doch alle waarden binnen een subinterval (θ, θ') dienen in oogenschouw te worden genomen, en wij vinden dus voor de waarschijnlijkheid à posteriori, dat aan de waarneming een kans x uit het interval (θ, θ') beantwoordt:

$$W = \frac{\int_{\theta}^{\theta'} x^m (1-x)^{s-m} dx}{\int_0^1 x^m (1-x)^{s-m} dx}$$

Hiermede zijn wij evenwel nog niet gereed, want deze formule is gebaseerd op de onderstelling, dat alle oorzaken à priori even waarschijnlijk zijn; indien wij het onderhavige probleem echter zoo ruim mogelijk willen behandelen, dan moeten wij ons voorstellen, dat de kans à priori x een gewicht heeft in den vorm van een zekere functie $w(x)$ en alsdan vinden wij voor de gezochte waarschijnlijkheid de algemeene betrekking:

$$W = \frac{\int_{\theta}^{\theta'} w(x) x^m (1-x)^{s-m} dx}{\int_0^1 w(x) x^m (1-x)^{s-m} dx}$$

Zonder overdrijving kan men staande houden, dat de proefondervindelijke kansrekening volledig wordt beheerscht door deze fundamenteele functie, welke analyse deswege in het centrum der belangstelling behoorde te staan. De eigenaardige omstandigheid doet zich intusschen voor, dat in de literatuur de vorengenoemde betrekking wel wordt afgeleid, maar in de analyse neemt men ter vereenvoudiging voor de gewichtsfunctie $w(x)$ steeds een constante, afgezien van enkele voorbeelden ter demonstratie van den geringen invloed, dien deze functie bij toenemende vergrooting der waarnemingsreeks blijkt te bezitten.

Vooreerst bezien wij het gedrag der functie:

$$f(x) = x^m (1-x)^{s-m}$$

binnen het gesloten interval $(0,1)$. Zij heeft een maximum in het

punt $x = \frac{m}{s}$, waarmede de waarde $\frac{m^m n^n}{s^s}$ (met $n = s - m$) correspondeert, en een tweetal buigpunten in $x = \frac{m}{s} \pm \sqrt{\frac{mn}{s^2(s-1)}}$. Voorts is de oppervlakte, begrepen tusschen de kromme en de abscissenas, gelijk aan $\frac{m!n!}{(s+1)!}$. Van belang is in het bijzonder de navolgende eigenschap: voor iederen $\eta > 0$ geldt de limietbetrekking:

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \frac{(s+1)!}{m!n!} \int_{\frac{m}{s}-\eta}^{\frac{m}{s}+\eta} x^m (1-x)^n dx = 1$$

Men kan deze stelling aldus weergeven, dat de beschouwde oppervlakte zich bij toenemende m en n samentrekt rondom het maximum der functie.

Een soortgelijk gedrag nu vertoont eveneens de functie:

$$\varphi(x) = w(x)x^m(1-x)^{s-m}$$

indien althans de gewichtsfactor binnen de perken wordt gehouden. De kansrekenkundige beteekenis van $w(x)$ brengt mede, dat zij op het geheele interval $(0,1)$ positief en begrensd is; wij voegen daaraan nog de voorwaarde toe, dat haar afgeleide overal bestaat en eveneens begrensd is. Hiermede wordt niet bedoeld, dat zulk een veelomvattende eisch inderdaad noodzakelijk is om tot het doel te geraken, doch de herkomst van de functie $w(x)$ laat de genoemde voorwaarde stellig toe, zoodat wij daarvan een dankbaar gebruik willen maken.

Welnu, de functie $\varphi(x)$ heeft voor genoegzaam groote waarden van m en n een maximum in de buurt van het punt $x = \frac{m}{s}$. De overige extrema verdwijnen op den duur. Bovendien geldt ook thans de stelling, dat voor een gegeven $\eta > 0$ voldaan wordt aan de limietbetrekking:

$$\lim_{\substack{m=\infty \\ n=\infty}} \int_{\frac{m}{s}-\eta}^{\frac{m}{s}+\eta} w(x)x^m(1-x)^n dx : \int_0^1 w(x)x^m(1-x)^n dx = 1$$

hetgeen weer aldus onder woorden kan worden gebracht, dat de oppervlakte der figuur zich op den duur samentrekt rondom het maximum. Uit dit alles blijkt genoegzaam, dat de invloed van den

gewichtsfactor $w(x)$ op de functie $\varphi(x)$ bij vergrooting van de waarnemingsreeks voortdurend afneemt.

Uit het voorgaande kan nu een zeer belangrijke conclusie worden getrokken. Wanneer een suite van proeven met een evenement E , waaraan een onveranderlijke kans p ten grondslag ligt, een rij van relatieve frequenties $\frac{m}{s}$ heeft opgeleverd, dan correspondeert met de ongelijkheid:

$$\left| p - \frac{m}{s} \right| < \eta$$

een waarschijnlijkheid W , die tot de eenheid nadert. Hierbij kan η willekeurig dicht bij nul worden gekozen, zoodat de verdichting van de relatieve frequenties rondom p zich met een steeds toeneemende kans zal voltrekken.

Anderzijds kan eveneens bewezen worden, dat aan een voorgeschreven waarschijnlijkheid W een suite van tot nul convergeerende intervallen beantwoordt. Men vindt dan wederom het resultaat, dat tevoren reeds door omkeering van het Bernoulliaansche theorema kon worden verkregen, luidende: de onbekende kans p voldoet aan de ongelijkheid:

$$\left| p - \frac{m}{s} \right| < \gamma \sqrt{\frac{2mn}{s^3}}$$

met de waarschijnlijkheid:

$$W = \Phi(\gamma)$$

Het is niet voor bestrijding vatbaar, dat het theorema van Bayes krachtens de voorgaande analyse op een exact-mathematischen grondslag steunt en dienovereenkomstig met hetzelfde vertrouwen kan worden gehanteerd, zooals men dit steeds zonder de geringste aarzeling in betrekking tot het theorema van Bernoulli heeft gedaan. Overigens zal het aanstonds duidelijk zijn, dat de eerstgenoemde stelling een bredere strekking heeft dan de andere; het is ongetwijfeld van groote beteekenis, dat men den uitslag van een waarnemingsreeks met een evenement, waaraan een gegeven onveranderlijke kans ten grondslag ligt, met een tot de eenheid naderende waarschijnlijkheid kan beschrijven, doch meer voldoening schenkt het opklimmen tot de oorzaken, die het resultaat van een waarnemingssuite hebben bewerkt, en juist daartoe verschaft de stelling

van Bayes het noodzakelijke en blijkens het voorgaande evenzeer ondubbelzinnige hulpmiddel.

Intusschen zal de toepassing van dit merkwaardige theorema met oordeel des onderscheids dienen te geschieden. Een dergelijke opmerking zal op mathematici geen indruk kunnen maken, omdat zij geleerd hebben, de geldigheid hunner stellingen steeds in het licht der voorwaarden te bezien, doch het valt niet te ontkennen, dat vele beoefenaren der kansrekening daaraan met een onbegrijpelijke luchthartigheid zijn voorbijgegaan. Zulks zal wel hieruit verklaard moeten worden, dat een schijnbaar voor de hand liggende, hoewel nochtans ontoelaatbare interpretatie van het theorema van Bayes de mogelijkheid schept om de numerieke waarde van allerlei kansen en statistische factoren met een hoogen graad van precisie te berekenen of eventueel te benaderen.

Het theorema van Bayes impliceert, dat het waarnemingsmateriaal op een onveranderlijke kans berust, terwijl de opeenvolgende observaties volstrekt onafhankelijk van elkander zijn. Het is duidelijk, dat aan deze voorwaarden slechts in zeldzame gevallen zal worden voldaan; het reeds ter sprake gebrachte urnenschema levert het klassieke voorbeeld. Ook dan echter heeft men zich te beraden over de gewichtsfunctie $w(x)$, die in het theorema van Bayes zulk een eigenaardige rol vervult. Het is zeker waar, dat blijkens het bovenstaande de hoedanigheid van deze functie aan de algemeene formuleering van het theorema niet in den weg staat, doch de situatie wordt natuurlijk minder gunstig, zoodra numerieke vraagstukken in een voortgezette analyse worden betrokken. Dan zal, indien overigens aan de gestelde voorwaarden is voldaan, het resultaat der berekening volkomen worden beheerscht door de suppositie omtrent de gewichtsfunctie, zoodat men allermint kan spreken over „de” oplossing van het beschouwde probleem; veeleer dient te worden erkend, dat het vraagstuk onbepaald is, waarbij natuurlijk het onderzoek nopens het verband tusschen de gekozen gewichtsfunctie en de daarmede corresponderende oplossing mogelijk blijft en uit mathematisch oogpunt zelfs de aantrekkelijkste zijde van de geheele probleemstelling biedt.

In dit verband dient met name de gebruikelijke afleiding van de foutenwet ter sprake te worden gebracht, aangezien ook hierbij het theorema van Bayes toepassing vindt. Door Bertrand is namelijk op de contradictie gewezen, dat men op grond van het Bernoulli-

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. F. BETH, AMERSFOORT - Dr. E. W. BETH, AMERSFOORT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

Dr. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - Dr. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM

Dr. J. HAANTJES, AMSTERDAM - Dr. C. DE JONG, LEIDEN

Dr. J. POPKEN, TER APEL - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. DE VAERE, BRUSSEL

Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM.

18e JAARGANG 1941/42

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

aansche theorema door limietovergang tot dezelfde foutenwet geraakt, die rechtstreeks zonder eenige benadering kan worden afgeleid. Het behoeft wel geen betoog, dat deze bedenking reeds voldoende is om de boven bedoelde afleiding te veroordeelen; want de gezochte foutenwet draagt alleen dan een universeel karakter, indien zij mede ter beschrijving van het primitieve urnenschema kan worden aangewend.

Inderdaad stuit men met het theorema van Bayes als grondslag voor de ontwikkeling van de foutenwet op bezwaren, die alleen dan licht geteld zullen worden, wanneer men zijn analyse misbruikt ter bereiking van een tevoren vaststaand resultaat.

Tegen de toepassing van het theorema der samengestelde waarschijnlijkheid kan men uiteraard geen bedenking inbrengen, omdat slechts de toevallige fouten in het onderzoek worden betrokken, en te dien opzichte is de onderstelling, dat de opeenvolgende fouten volstrekt onafhankelijk van elkander zijn, stellig gemotiveerd. Ook tegen de aanvaarding van het arithmetisch gemiddelde als meest waarschijnlijke waarde van de geobserveerde grootte bestaat in dit verband geen bezwaar, doch wel is het principe van Gauss, dat op grond daarvan uitsluitend het maximum van de samengestelde kans op de foutensuite in aanmerking komt, voor bestrijding vatbaar. De beide hypothesen: het arithmetisch gemiddelde is de waarschijnlijkste waarde van het waargenomen object, en: van alle denkbare samengestelde kansen op de foutenreeks is de maximale waarschijnlijkheid de meest aannemelijke, behoeven elkander geenszins te dekken. Neemt men voorts in aanmerking, dat een essentieel element in de afleiding van de foutenwet wordt gevormd door de onderstelling, dat de gewichtsfunctie van de beschouwde kansen *à priori* een constante is, dan zal men zich niet kunnen onttrekken aan den indruk, dat van benaderingen slechts schijnbaar geen gebruik wordt gemaakt; in werkelijkheid zijn zij op kunstige wijze door de analyse heengeweven, zoodat het resultaat daarvan in den vorm van een exponentieele functie als een benadering van de eigenlijke foutenwet dient te worden beschouwd.

Hiermede is natuurlijk niet bedoeld, dat de ontwikkeling op het voetspoor van Gauss waardeloos zou zijn. Wel echter klemmt de eisch, waaraan trouwens ruimschoots is voldaan, dat de theoretische wet aan de practijk der waarnemingen wordt getoetst, hetgeen in betrekking tot het theorema van Bernoulli allerminst noodzakelijk

moet worden geacht. Het blijkt dan, dat de elementaire foutenwet een correctieterm behoeft en het is ongetwijfeld een gelukkige omstandigheid, dat nieuwere onderzoekingen volgens uiteenloopende analytische methoden de juistheid daarvan hebben bevestigd.

Het theorema van Bernoulli is wel eens de spil genoemd, waarom de geheele kansrekening zich beweegt. Strikt genomen is de praktische beteekenis van dit theorema echter uiterst gering, want het kan slechts dan worden toegepast, wanneer aan het waarnemingsmateriaal een systeem van *a priori* gegeven kansen ten grondslag ligt en zulks is vrijwel nimmer het geval, afgezien dan van min of meer gekunstelde spelproblemen. Zoodra men evenwel de breede terreinen betreedt, waarop de waarschijnlijkheidsrekening een vaste positie heeft verworven, dan is bij voorbaat niets of zeer weinig bekend, zoodat alleen de observaties uitsluitsel kunnen geven en het is duidelijk, dat alsdan het theorema van Bayes tot richtsnoer dient te worden genomen.

Tusschen twee uitersten zal men nu den gulden middenweg moeten kiezen. Het is mogelijk om de analyse te baseeren op de voorafgaande hypothese, dat het beschouwde materiaal nauwkeurig voldoet aan de voorwaarden, waarop het theorema van Bayes steunt; zulke onderzoekingen kunnen uit den aard der zaak geen bijdrage van beteekenis ter beschrijving van het werkelijke natuurgebeuren leveren, doch vertoonen veeleer het karakter van nutteloos schablonenwerk. Anderzijds laat het zich denken, dat men door een veelzijdige ontleding van de waarnemingen een zoo volledig mogelijke kennis tracht te verkrijgen omtrent de factoren, die direct of indirect van invloed zijn geweest. Het behoeft wel geen betoog, dat een dergelijk minitieuus onderzoek, hoe verdienstelijk en in beginsel onontbeerlijk zelfs, te weinig rekening houdt met complicerende omstandigheden in de levende natuur, die zich doorgaans aan de observatie zullen blijven onttrekken; de groote schroomvalligheid ten deze leidt dan ook tot mislukking, tenzij tijdig het stuur wordt omgewend.

Zooals gezegd zal men dus zorg moeten dragen om tusschen Scylla en Charybdis heen te varen. En deze eisch geldt voornamelijk op het terrein van de statistiek, waar de voetangels voor het grijpen liggen. Wie daartusschen zijn weg wil zoeken, moet niet beginnen zichzelf te intimideeren met den klaagzang van Coolidge, dat wij

van het theorema van Bayes slechts met een zucht gebruik kunnen maken wegens gebrek aan betere hulpmiddelen. Het onderhavige theorema verdient ongetwijfeld meer waardeering, want het verschaft alles, waarop onder zoo onzekere omstandigheden slechts gehoopt mag worden. Beter is daarom de waarschuwing, dat men in geval van groote onkunde geen ijdele nieuwsgierigheid aan den dag behoort te leggen. Wie zich aan dezen regel houdt, zal van het theorema van Bayes niet alleen een dankbaar, doch ook een met de sterk varierende voorwaarden wisselend gebruik weten te maken.

De overmatige en veelszins tegenstrijdige factoren, die het statistische waarnemingsmateriaal beïnvloeden, dwingen den beoefenaar van deze subtiële wetenschap tot het in acht nemen van de grootste voorzichtigheid. Niet de onmiddellijke theoretische resultaten zijn van het hoogste belang, doch het juiste onderscheidingsvermogen en de voortdurende zelfcritiek, waarmede de onderzoeker zijn nasporingen behoort te verrichten. Onder dit voorbehoud zullen de uitkomsten van de mathematische statistiek kunnen voldoen aan de eischen van wetenschappelijke precisie, die men ook daaraan onvoorwaardelijk zal moeten stellen.

INHOUD VAN DE 18e JAARGANG 1941/42.

Jr. J. J. TEKELENBURG, Officiële mededeling van „Wimecos” 1,	108
Prof. Dr. J. G. VAN DER CORPUT, Vacantiecursus Wiskunde aan de Rijks-Universiteit te Groningen	6
Dr. J. POPKEN, Over het getal π	7
Dr. J. C. H. GERRETSEN, Eenvoudige begrippen en resultaten uit de topologie	15
Prof. Dr. P. J. VAN RHIJN, De rotatie van het Melkwegstelsel	39
Prof. Dr. J. G. VAN DER CORPUT, A Remarkable Family	50
Dr. J. RIDDER, Over de additieve functionaalvergelijking en een additieve functionaalkongruentie	84
Dr. E. W. BETH, Hoofdstukken uit de formele logica	93
J. VAN ANDEL, Verslag van de beantwoording der vragen over het eindexamen 1942	109
Dr. Ir. A. J. STARING, Doel en middelen bij het onderwijs in de mechanica	115
Dr. H. H. BUZEMAN, Over de behandeling der kwadratische functie	125
Prof. Dr. O. BOTTEMA, De dienst der wiskunde	129
G. R. VELDKAMP, Deling en reststelling	148
Dr. J. F. DE VRIES, Het nut van kinematische beschouwingen in de kosmografielessen	161
Dr. J. H. WANSINK, Afhankelijkheid van getallenrijen	164
Dr. J. P. VAN ROOIJEN, De waarschijnlijkheidsrekening en het theorema van Bayes	177
J. Noordhoff † In memoriam	147
Uit het verslag van de commissie voor het Staatsexamen in 1941	155
Normaalblad met de symbolen voor Wiskunde	176

Boekbesprekingen:

Dr. H. J. E. BETH, Tafels in vier decimalen	79
Prof. Dr. A. D. FOKKER, Hoepels en tollens	79
F. HARKINK, Inleiding tot het practisch rekenen	80
Dr. W. VAN DER WIELEN, De ideegetallen van Plato	127
Prof. Dr. F. SCHUH, Leerboek der differentiaal- en integraal- rekening, deel I	128

<i>Ingekomen boeken</i>	83, 128
-----------------------------------	---------

Portret van Prof. Dr. O. BOTTEMA.

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH

DIRECTEUR VAN DE R.H.B.S. TE AMERSFOORT

- I. Twaa lfde druk. 156 blz. 21 fig. f 2,25*.
II. Twaalfde druk ter perse. 204 blz. 50 fig. f 2,25*.
III. Zevende druk. 198 blz. 60 fig. geb. f 2,35*.

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Derde druk. 164 blz. 20 fig. f 2,10*.

Uit het prospectus:

Wezenlijke veranderingen in behandeling bracht de invoering van het nieuwe program niet mee, immers de Nieuwe School-algebra (en de Algebra voor H.B.S.) behandelde reeds in aard en uitgebreidheid of beperktheid, wat in het Koninklijk besluit is neergelegd.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

V α en VI α Nieuwe Schoolalgebra III α

V β en VI β Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Leraren, die deze werken niet kennen, kunnen pres. ex.
bekomen op aanvraag aan den uitgever of aan de schrijvers.

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATÀVIA

Voor leraren, die deze boeken gebruiken, antwoorden gratis en franco; de uitgewerkte log. vraagstukken in vier en vijf dec. gratis alleen bij P. Wijdenes, Amsterdam Z.; deze uitwerkingen zijn niet in de handel.

Verantwoordelijk voor de gehele inhoud: P. Wijdenes te Amsterdam,
Jacob Obrechtstraat 88.

Uitgever: P. Noordhoff N.V. te Groningen.

Drukker: Drukkerij Gebroeders Hoitsema N.V. te Groningen. K 1219.