

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - DR. E. W. BETH, AMERSFOORT
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - DR. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
DR. J. HAANTJES, AMSTERDAM - DR. C. DE JONG, LEIDEN
DR. J. POPKEN, TER APEL - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. DE VAERE, BRUSSEL
DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM.

18e JAARGANG 1942

Nr. 5

Prijs per Jaargang f 6.30*. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.
--

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6,30*) zijn ingetekend, betalen f 5,25*.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en **Wimecos** (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van **Wimecos** storten hun contributie van f 2,75 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Prof. Dr. O. BOTTEMA, De dienst der Wiskunde	129
J. NOORDHOFF †	147
G. R. VELDKAMP, Deling en reststelling.	148
Uit het verslag van de Commissie voor het Staatsexamen 1941	155

 De aandacht wordt gevestigd op de voordrachten, die gehouden zullen worden aan de Groningse Universiteit. Zie de aankondiging op blz. 3 van het omslag.

De "VLAKKE MEETKUNDE" van DR P. MOLENBROEK, 8e druk is een boek, dat voor de studie L.O. gebruikt wordt en voor K I, maar is tevens een hand- en studieboek; economisch is het niet mogelijk voor elk der verschillende klassen van gebruikers een boek uit te geven. Nu bevat het voor "L.O." iets te veel; het volgende kan zonder bezwaar door studerenden voor deze akte overgeslagen worden.

Par. 6, no. 3, 8.

Par. 34 en 35, no. 11-16.

Par. 93 (het klein gedrukte) en Par. 99, no. 16.

Par. 106 en Par. 107, no. 28-32.

Par. 109 van blz. 255 regel 10 tot en met blz. 256 regel 7.

Par. 110 van blz. 260 regel 23 af.

Par. 114, no. 21-30 en Par. 124, no. 26.

Voorbeeld 50 en Par. 129, no. 36-38.

Par. 130-134 en Par. 135 van stelling 124 af.

Voorbeeld 57 en 58 en Par. 137, no. 13-20.

Par. 141 en Par. 142, no. 11.

Blz. 364 (het klein gedrukte) en voorbeeld 64.

Par. 146 en Par. 147, no. 10, 14, Par. 151, no. 26, 27.

Blz. 402 en 403 (het klein gedrukte).

Par. 155, no. 4, 5, 12-20 en Par. 159, no. 17-21.

Stelling 157 en Par. 163 van stelling 160 af.

Voorbeeld 71 en 72 en Par. 166, no. 13-17, 21-40.

Par. 167 - Par. 171, en Par. 175 en Par. 174 van stelling 176 b af.

Voorbeeld 81 en 82 en Par. 177, no. 20 en 21.

Par. 178 (het klein gedrukte) en stelling 179.

Par. 180 van stelling 181 af en Par. 181.

Par. 182, no. 6, 8, 11-40.

Par. 186 (behalve st. 188a)

Par. 187 no. 21-40.

Par. 188, Par. 189, 1e en 2e oplossing en Par. 190 no. 6-10.

Par. 193 en voorbeeld 93 en 94.

Par. 195 en Par. 196, no. 13, 14, 21-25.

Par. 197, no. 46, 50-60.

Par. 198 - Par. 203.

DE DIENST DER WISKUNDE ¹⁾

DOOR

Prof. Dr. O. BOTTEMA.

Krachtens het gewoonterecht aanvaardt een hoogleraar aan deze hogeschool zijn ambt met een redevoering. In 1877, kort voor het in werking treden der Hoger-Onderwijswet, schreef de toenmalige Minister van Binnenlandse Zaken aan de Curatoren der Hogescholen dat het hem wenselijk scheen de bestaande praktijk van een inaugurele oratie te bestendigen. Hij liet daarbij de betrokkene de keuze tussen een inwijdingsrede en een publieke les. Als ik heden de eerste mogelijkheid kies, lijkt mij dat wederzijdse voordelen te geven: er is geen gevaar dat U aan mijn woorden gedachten verbindt aan iets dat zou kunnen worden overhoord, terwijl omgekeerd op mij geen verplichting rust U in dit uur bepaaldelijk iets te leren.

Het leerplan dezer instelling brengt mede dat, hoewel mathematische problemen in elk leerjaar aan de orde komen, het onderwijs in wiskunde voor een belangrijk deel beperkt blijft tot de propaedeuse en zich daar bepaalt tot aanbrengen van algemene wiskundige methoden en leringen, die voor de toekomstige ingenieur van belang kunnen zijn. Dit propaedeutisch onderwijs staat uiteraard slechts in los verband met de ontwikkeling der wiskundige wetenschap zelf en volgt de resultaten daarvan hoogstens op lange tijdsafstand. Wanneer ik dus thans zou trachten voor U een onderwerp uit de wiskunde zelf te behandelen, dan zou dat allicht geen betrekking hebben op het werk, dat mij aan deze hogeschool wacht. De omstandigheden waarin zich de wiskundige bij zijn ambtsaanvaarding bevindt, zijn in dit opzicht principieel anders dan van den docent in een technisch of natuurwetenschappelijk vak, die veel meer aanleiding zal hebben bij een dergelijke gelegenheid te getuigen van de nieuwste resultaten op zijn gebied en eventueel tot het opstellen van een bepaald werkprogramma.

Nog minder zult gij van mij verwachten een bespreking van

¹⁾ Rede, uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van hoogleraar in de zuivere en toegepaste wiskunde en de theoretische mechanica aan de Technische Hogeschool te Delft op 30 September 1941.

de didactische en onderwijstechnische problemen, die zich bij de wiskundige propaedeuse kunnen voordoen. Voor zover hun existentie reëel is, kunnen zij slechts worden beoordeeld door hen, die de Technische Hogeschool grondig kennen en een poging tot oplossing kan alleen worden ondernomen door samenwerking van allen voor wie de betrokken vraagstukken van belang zijn.

Wilt mij daarom toestaan in dit uur enige opmerkingen te maken over wiskunde en wiskundeonderwijs in het algemeen, over hun betekenis en hun doel. Dat ontnemt U de bekoring, of verlost U van de verplichting of ontheft U van de last, om te luisteren naar een wiskundig betoog. Want spreken *over* wiskunde is ten duidelijkste geen wiskunde, al zou het alleen maar zijn hierom dat ik U geen definitie geef (en ook niet geven kan) van dit begrip, U niet voorstel bepaalde axioma's als grondslag van een redenering met mij te aanvaarden, noch met U afsprek of wij bepaalde logische figuren, zoals bijvoorbeeld het beginsel van het uitgesloten derde, al of niet geldig zullen verklaren. Waaruit U de conclusie kunt trekken, dat de woorden, die een wiskundige spreekt niet *altijd* met een ononderbroken keten van syllogismen corresponderen en dat *dus* de mathematisering of misschien zegt U *vermathematisering* van onze levensbeschouwing ook in zijn oog nog niet bepaald grote vorderingen heeft gemaakt; en *hieruit volgt*, dat ook hij de bekoring kan ondergaan van het woord van van Deyssel, dat het warme beweren beter is dan het kille bewijzen.

De vraag: waarom wiskunde en waarom wiskundeonderwijs? is geen wiskundig, maar een psychologisch en maatschappelijk probleem en het antwoord heeft alle onzekerheid en onnauwkeurigheid, die de antwoorden op dergelijke vragen plegen te hebben. Het is ook niet vatbaar voor een afgerond bewijs, maar kan hoogstens door feiten en gevoelens worden toegelicht en daaraan kracht tot overtuiging ontlelen.

Het antwoord is ook niet eenduidig; er zijn verschillende motieven om wiskunde te onderwijzen en men is niet klaar met elk van deze te aanvaarden of te verwerpen, maar is genooddaakt aan elk van hen een bepaald gewicht te hechten en aangezien wij hier niet met mathematische of fysische, voor berekening of meting vatbare grootheden te doen hebben, kan alleen de op feiten en ervaringen steunende persoonlijke voorkeur beslissen. De motieven moeten niet alleen worden afgewogen tegenover motieven die er bestaan om iets anders dan wiskunde te

onderwijzen, maar ook de betrekkelijke waardering van de motieven zelf is verschillend. En daaruit is naar mijn mening te verklaren, dat in ons land in de laatste decennia binnen de kring van hen, die overtuigd zijn van de buitengewone waarde van wiskundeonderwijs, een aantal meningsverschillen zijn ontstaan, waarop ik nog terug zal komen.

Ik zou vier motieven willen noemen voor onderwijs in wiskunde, twee directe en twee indirecte. Mijn mathematische behoefte aan classificatie en notatie doet mij voorstellen ze met *a*, *b*, *c* en *d* aan te duiden.

Het eerste antwoord op de vraag: waarom wiskunde? is er één dat een kind zou kunnen geven; het luidt: waarom? *dáár*om! Ik bedoel hiermee, dat wiskunde waard is onderwezen te worden om der wille van haarzelve, om haar eigen aantrekkelijkheid, zonder enige bijgedachte. Evenals bij elke andere zuivere wetenschap gevoelt de beschaving ook hier van nature de behoefte om aan een jonger geslacht over te dragen de resultaten van de overdenkingen der meest scherpzinnige geesten, die zich gedurende vele eeuwen met de problemen van getallen en meetkundige figuren hebben bezig gehouden. Ik behoef hier niet uitvoerig in te gaan op de unieke plaats, die de wiskunde krachten haar methode, haar objecten en haar geschiedenis in het systeem der wetenschappen inneemt en die voor een harer grootmeesters aanleiding waren om zonder veel tegenkanting de mathesis tot koningin der wetenschappen te proclameren. De bekoring, die de wiskunde geeft, hangt ongetwijfeld samen met een de menselijke geest aangeboren drang tot het zoeken van absolute waarheden, van het ondubbelzinnige, van het onfeilbare en toch niet geopenbaarde. De vraag is hier niet aan de orde of de wiskundige kennis ten slotte in de ervaring mede haar fundament heeft, een feit is dat haar stoute concepties uitgaan boven elke voorstelbaarheid en een triomf betekenen van het vermogen van de menselijke geest om zich van de werkelijkheid te abstraheren. Van alle wetenschappen is de wiskunde de meest objectieve; terwijl de menselijke ideeën omtrént recht en onrecht, goed en kwaad, staat en maatschappij zich wijzigen, blijft de wiskunde aan zichzelf gelijk. De mathematische belangstelling mag verplaatst zijn, methoden gewijzigd en notaties vereenvoudigd, er mogen in vroegere opvattingen onvolkomenheden zijn aangewezen, in haar geheel genomen biedt ons de wiskunde een beeld van betrekkelijke onvergankelijkheid;

er zijn geen overwonnen standpunten, geen hypothesen die na hun plicht te hebben vervuld worden bijgezet in het pantheon der geschiedenis. De vragen, die de Aegyptenaren, de Grieken, de Arabieren zich zelf stelden zijn in wezen dezelfde, die de wiskundige van heden zich stelt. Veel minder subjectief dan de wijsbegeerte, ondergaat zij ook vrijwel nauwelijks de invloed der wisselende wereldbeschouwingen en ook omgekeerd is zij uiteraard voor het ontstaan van levensopvattingen van slechts geringe betekenis, zulks in tegenstelling met de natuurwetenschap, waarbij ik slechts de namen van een Galileï of Darwin behoef te noemen om U aan de geschiedenis van een reeks tragische conflicten en misverstanden te herinneren. En het wonderlijke is, dat deze wiskunde geen afgerond geheel van menselijk weten doet zien, geen voltooid en dus star systeem, dat alleen maar gereproduceerd of op zijn best door elk nieuw geslacht opnieuw ervaren wordt, maar een fel levende wetenschap, waarin hartstochtelijke onderzoekers met al hun vernuft, hun fantasie en hun geduld werkzaam zijn, hetzij om nieuwe ongedachte mogelijkheden van onderzoek aan te wijzen, hetzij om de grondslagen te onderwerpen aan onbarmhartig-scherpzinnige kritiek, hetzij om verhelderende samenhang te ontdekken tussen schijnbaar verschillende gebieden, hetzij — en dit geldt uiteraard voor de meesten — om de kleinere problemen aan te vatten, waartoe de concepties der meesters zo veelvuldig aanleiding geven.

De grote culturele waarde der wiskunde zou ons nog niet mogen leiden tot de conclusie, dat zij als ons eerste motief voor wiskundeonderwijs mag worden geboekt, indien niet vaststond, dat dit onderwijs mogelijk wordt gemaakt door de eenvoud der wiskunde en door ons vermogen haar te doseren. De eenvoud der mathematische problemen is buiten discussie: zij worden scherp gesteld, de gegevens zijn weinig talrijk, de vraag nauwkeurig bekend, er zijn geen wrijvingskrachten, die de beweging verbergen, geen onzuivere stoffen die de reacties wijzigen, geen waarnemingsfouten, geen bronnen die vervalst zijn of verloren gegaan, geen uitzonderingen welke regelmaat moeten bevestigen, geen opvattingen of grillen van mens en natuur, die het resultaat geweld aan doen. Men doet slechts een beroep op enige elementaire functies van de menselijke geest en zulks in zodanige omvang en combinatie als de docent zelf kan kiezen. Vooral dit laatste maakt de wiskunde toegankelijk voor elke leeftijd. Zo kan men b.v. aan een ambachtsschool, een gymnasium en een universiteit wat genoemd wordt „de beginselen der algebra”

onderwijzen. Onderwijs in wiskunde betekent voor de leerling het in zich opnemen van die begrippen, theorema's en methoden, welke de belangrijke steunpunten van het complex der eigenschappen van de wiskundige objecten uitmaken. Het nagaan, doorgronden en reproducere van een wiskundig betoog, het kennisnemen en zich zelf kunnen overtuigen van de onverbiddelijke juistheid van bepaalde uitspraken over figuren en getallen en van de onderlinge samenhang dezer uitspraken schenkt ontegenzeggelijk een intellectueel genot van hoge orde. Maar daarnaast zal men trachten hem het erfdeel der vaderen te laten *verwerven* om het te bezitten, men zal hem soms tot zijn teleurstelling, altijd tot heil van zijn bescheidenheid, zelfstandig de moeilijkheden laten ervaren aan een betoog verbonden waarvan slechts de gegevens en het gestelde expliciet voor hem liggen, men zal hem in kleiner formaat de voldoening en zelfbevrediging schenken aan wetenschappelijke werkzaamheid eigen. En tot dat doel vond het menselijk vernuft het vraagstuk uit, niet het vraagstuk dat men zich zelf stelt, niet het vraagstuk voortkomend uit een concreet probleem der werkelijkheid, maar het vraagstuk dat men een ander voorlegt, de oplossing achterhoudend. Enige eeuwen geleden, ten tijde van een Huygens of Leibniz onderwerp van mathematische briefwisseling, waarbij de oplossing soms listig verborgen was ingesloten, bezitten wij thans in het vraagstuk een didactisch hulpmiddel van onschatbare waarde.

Het tweede motief tot onderwijs in wiskunde is het onlosmakelijk verband tussen haar en de natuurwetenschappen en de techniek. Als men de wiskunde een hulpwetenschap noemt van deze, dan miskent men de bijzondere relatie, die tussen deze gebieden van menselijk weten bestaat. Naar een woord van Galileï kan slechts hij de natuur verstaan, die de taal heeft geleerd, waarin zij tot ons spreekt en die taal is de wiskunde. En inderdaad, zodra de natuurwetenschap de stadia van speculatieve beschouwing en van toevallige, louter kwalitatieve waarneming te boven is, de feiten gaat groeieren en analyseren en van feit komt tot wet, dan kan zij dat slechts doen in wiskundige formuleringen. Dan maakt zij zich vrij van de subjectiviteit der waarneming en zoekt in de chaos der verschijnselen de primaire qualiteiten getal en vorm. Dan worden warmte-indrukken, kleuren, geluidsindrukken en electrische spanningen afgebeeld op getallenverzamelingen en met geconstateerde regel-

maat en wetmatigheid correspondeert een wiskundig object nl. een functie of een grafiek. En dan maakt deze concrete wetenschap, die beschrijvingen geeft van en voorspellingen doet omtrent de verschijnselen der werkelijkheid, tijdelijk of blijvend gebruik van abstracte begrippen als stoffelijk punt en puntlading, die niets anders zijn dan met een coëfficiënt behangen wiskundige punten, van snaren en vliezen met de eigenschappen der lijnen en vlakken van de wiskundigen, en van begrippen als snelheid en versnelling, die niet rechtstreeks voor waarneming vatbaar zijn, maar ontstaan door het abstracte differentiatieprocédé der mathematici. De natuurwetenschap is slechts dan tevreden als zij de mathematische formulering heeft opgespoord die van het verloop der verschijnselen rekenschap geeft. Ik moge hier het dikwijls geciteerde woord van Kant aanhalen: „Ich behaupte dasz in jeder besonderen Naturwissenschaft nur so viel *eigentliche* Wissenschaft angetroffen werden könne, als darin Mathematik anzutreffen ist”. Hoogtepunten in de geschiedenis der exacte wetenschappen zijn dan ook, meer nog dan opzienbarende experimentele resultaten, het opstellen van bepaalde *vergelijkingen*, waarvan men gewoon is te zeggen dat zij de verschijnselen beheersen: de gravitatieformule van Newton, de bewegingsvergelijkingen van Lagrange, de vergelijkingen van Maxwell, de toestandsvergelijking, de golfvergelijking. Maar lijkt het soms of de toenemende mathematisering der natuurwetenschap er toe zal leiden alle verschijnselen „terug te brengen” tot wiskundige begrippen, dus tot getallen, dus naar het legendarisch ideaal der Pythagoreërs tot gehele getallen, zo moeten wij bedenken dat de verwiskundiging der wetenschap deze nog niet tot wiskunde maakt. Hoewel men er soms in de moderne physica aan zou twifelen, een natuurwet is méér dan haar wiskundige formulering. Terwijl de wiskundige slechts vragen stelt aan zichzelf, stellen de physici en de chemici steeds dringender, steeds onbescheidener vragen aan de natuur en de antwoorden dwingen hen tot voortdurende wijziging van hun opvattingen aangaande het verband tussen de verschijnselen en dus ook van de wiskundige formulering daarvan. In de vergelijkingen treden nieuwe termen op, functies worden vervangen door andere, die alleen in de eerste termen van hun reeksontwikkeling met de oude overeenstemmen, soms wordt het wiskundige beeld zonder pieteit door een ander vervangen. Niet omdat de wiskunde feilbaar was gebleken, maar omdat de natuurkundige een andere wiskunde nodig heeft.

Merkwaardige wisselwerking tussen de wetenschap der abstractie en de wetenschap der werkelijkheid! Te zeggen dat de wiskunde bij de natuurwetenschap en de daarop steunende techniek wordt „toegepast” geeft de stand van zaken wel zeer onnauwkeurig weer. De laatste geven de leiding; weliswaar gaat de theorie dikwijls aan experimentele verificatie vooraf, maar wiskundige deductie geeft geen theorie als zij niet natuurwetenschappelijk geïnterpreteerd wordt. Maar omgekeerd is natuurwetenschap zonder wiskunde even onmogelijk als letterkunde voor een volk zonder taal. Geen wonder dat de ontwikkeling der moderne natuurwetenschap van groot belang is gebleken voor de wiskunde, die aan haar verlangens het ontstaan van vele van de belangrijkste hoofdstukken, bijv. de infinitesimaalrekening dankt. Wij mogen verder niet voorbijzien, dat ook in Oudheid en Middeleeuwen de groei der wiskunde nauw heeft samengehangen met de eisen, die het praktische en gevoelsleven stelde in de vorm van problemen uit handel en zeevaartkunde, landmeetkunde en astronomie en dat zij, hoewel reeds bij de Grieken de idee der wiskunde als zuivere wetenschap volledig aanwezig is, vermoedelijk wel in dergelijke problemen haar oorsprong heeft. Merkwaardig is hoe dikwijls abstracte theoriën, slechts opgebouwd om hun intrinsieke, zuiver wiskundige betekenis, na kortere of langere tijd voor de natuurwetenschap van waarde zijn; „imaginaire” en hypercomplexe getallen bleken de eenvoudigste taal om bepaalde verschijnselen weer te geven, de geniale gedachtenconstructie's der niet-Euclidische en meerdimensionale meetkunden, door de Kantiaansche filosofen der negentiende eeuw met afkeer bejegend, werden een halve eeuw later door de relativiteitstheorie volgestort met concrete zin.

De grote successen der met de wiskunde innig verwèven natuurwetenschappelijke methoden hebben ook andere wetenschappen verleid deze op haar objecten toe te passen; ik noem U de psychologie en de economie. Dat deze pogingen teleurstelling hebben gegeven, wil nog niet zeggen, dat deze methoden daar per se moeten falen; de verklaring kan schuilen in de omstandigheid, dat deze zeer gecompliceerde wetenschappen nog niet het stadium van ontwikkeling hebben bereikt, waarbij vruchtbare toepassing der wiskundige denkwijze mogelijk is. Maar wij kunnen de *humaniora* geheel buiten beschouwing laten: het β -gebied onzer cultuur is zonder wiskunde niet mogelijk en samen met voortdurend verfijnde waarneming heeft zij een groot deel van menselijk weten opgebouwd. Bij de ontdekking

van de planeet Neptunus, bij het voorspellen van het verloop der getijden na drooglegging van de Zuiderzee, bij het ontstaan der moderne opvattingen omtrent de bouw der stof heeft zij een belangrijke rol gespeeld, zij is onmisbaar bij het maken van een kaart, bij het tot standbrengen van radiotelephonisch contact, bij het berekenen van een levensverzekeringspremie. Zonder Aeschylus, zegt Russell zou onze cultuur ongeveer zijn zoals ze is, zonder Euclides zou ze niet bestaan.

Twee motieven noemde ik U, wiskunde ter wille van haar zelve en wiskunde als voorwaarde voor natuurwetenschap en techniek. Ik moge hier in dubbele zin spreken van *de dienst der wiskunde*, *passief* en *actief*, gediend wordend en dienend. Voor de zuivere wiskundige een cultus, waarbij de vrijwillige offerandes ruimschoots vergolden worden door de merkwaardige intellectuele voldoening die het vinden en vooral het zoeken geeft welks drang wel een deel van het wezen van de bewuste mens schijnt uit te maken; hij stelt zich in dienst der wiskunde, dienst in de zin van de vrouwendienst der middeleeuwse ridders, van godendienst, misschien van afgodsdienst. En daarnaast stelt zich de wiskunde in dienst van de mens, bij zijn doorvorsing van aarde en heelal, bij zijn streven de natuurkrachten zijn wil op te leggen, bij de ontdekkingen die tot de verbijsterende en soms beangstigende technische vooruitgang leiden.

Een derde en indirect motief voor wiskundeonderwijs is gelegen in de vormende waarde die haar wordt toegeschreven. Het berust op de stelling of als U wilt op de fictie, dat de verstandelijke tucht zonder welke geen wiskundige werkzaamheid mogelijk is, gunstig blijft nawerken als de geest zich richt op een ander gebied van het denken. Er zijn mij geen betrouwbare psychologische experimenten bekend, die de juistheid van deze uitspraak of van haar tegengestelde bevestigen en zij, die overtuigd zijn van de existentie van de „overdracht”, grondvesten deze overtuiging op intuïtieve gevoelens en op het argument der historie: de overlevering van overeenkomstige opvattingen van vorige geslachten. Een feit is zeker, dat ieder van wie in welke omvang dan ook, zelfstandig handelen en dus ook zelfstandig nadenken wordt verwacht, bewust of onbewust gebruik maakt van begrippen en denkwijzen, die in zuiverder en meer elementaire vorm, de kern van een wiskundig betoog uitmaken. Hij zal zich rekenschap geven van de betekenis

der door hem en door anderen gebruikte woorden, hij zal op elk gewenst moment moeten kunnen „substituer les définitions à la place des définis”, trachten de vraag zo scherp mogelijk te redigeren en ervaren, dat hij daarmee reeds een eindweegs gevorderd is in de richting van de oplossing, leren de essentiële gegevens te scheiden van de onbelangrijke, de waarde beseffen van een analogie zonder er blindelings op te vertrouwen, zich bewust zijn dat een stelling niet identiek is met haar omgekeerde, zich kritisch plaatsen tegenover wat zich op het eerste gezicht als oplossing aandient. Als deze dingen in het algemeen te leren zijn, als men zich de noodzakelijke verstandelijke discipline kan eigen maken buiten de sfeer waar zij ten slotte wordt geëist, dan moet hierbij toch wel in de eerste plaats aan wiskunde-onderwijs worden gedacht. Hier kan geen onkunde of gebrekkig inzicht achter phraseologie worden verstopt, hier wordt geen genoegen genomen met wat oppervlakkige aanschouwing suggereert, hier wordt niet gewerkt met woorden, die in de loop van het betoog van betekenis veranderen, hier worden geen voorschriften gegeven, die in bepaalde omstandigheden toegepast moeten worden, maar blijft nog steeds de vrijheid voor de leerling zelf zijn weg te kiezen, hier wordt voortdurend een beroep gedaan op zijn zelfwerkzaamheid en van de rechtmatigheid van een werkwijze kan hij zich steeds persoonlijk overtuigen. „Hij mag” de termen van een absoluut convergente reeks in andere volgorde nemen, niet omdat wet of verordening dit vermeldt, niet omdat de docent het hem toestaat, niet omdat het twee keer of tien keer goed afloopt, maar omdat hij rechtstreeks kennis heeft kunnen nemen van het bewijs voor dit theorema.

Ik noem dit derde motief voor wiskundeonderwijs een indirect motief, omdat het in beginsel niet is uitgesloten, dat de wiskunde voor het genoemde doel vervangen kan worden door andere onderwerpen: klassieke of moderne talen, schaak- of bridgelessen of kritisch verslonden detectiveromans.

Een vierde, eveneens indirect motief wil ik nog noemen, niet als elk der drie vorige gewichtig genoeg om afzonderlijk als argument te dienen, maar praktisch niet zonder belang. Ik doel op het selecterend karakter van wiskundeonderwijs. De resultaten van dit onderwijs geven in den regel een behoorlijke spreiding te zien en er is altijd een betrekkelijk hoog percentage leerlingen wie de wiskunde moeilijk valt of zelfs te moeilijk om er mee verder te kunnen gaan. De schoolorganisatie brengt automatisch selectie met zich mede en de wiskunde speelt daarbij

een belangrijke rol. Men kan deze omstandigheden toejuichen of betreuren, maar haar bestaan niet ontkennen. Resultaten van wiskundeonderwijs krijgen dan het karakter van oordelen over algemene intelligentie of wat men daarvoor houdt. Voorbeelden voor deze opvatting zijn er veelvuldig; het komt herhaaldelijk voor, dat men niet allereerst waardeert dat iemand wiskunde heeft geleerd, maar dat hij wiskunde heeft kunnen leren, omdat men daaruit de gevolgtrekking maakt, dat hij tot andere geestelijke arbeid in staat is.

Als U mij thans toestaat de vier genoemde motieven nog eens samen te vatten: *a.* de wiskunde om haarzelve; *b.* de wiskunde voor natuurwetenschap en techniek; *c.* de vormende, *d.* de selecterende waarde, dan dringt zich de opmerking naar voren, dat deze vier als regel gezamenlijk voorkomen en door den docent uiteraard niet afzonderlijk worden onderkend. Eenvoudige voorbeelden zijn dikwijls het meest instructief: bij de behandeling van de figuur van een driehoek met zijn middelloodlijnen, zal men *a.* de eigenschap dat zij door één punt gaan als een merkwaardigheid erkennen die om haarzelve van waarde is; *b.* zij zal aanleiding geven tot de praktische constructie van een cirkel, die door drie gegeven punten gaat; *c.* zij zal er toe bijdragen de juistheid te beseffen van het volgende procédé: zoekt men een object, dat aan verschillende voorwaarden voldoet, zonder dan voorlopig al die objecten af die aan één dezer voorwaarden voldoen; *d.* de mate waarin het den leerling gelukt zelfstandig te besluiten, dat de gevolgde gedachtengang al of niet toepasbaar is op de figuur der zwaartelijnen of der bissectrices, kan een aanwijzing zijn voor zijn verstandelijk vermogen.

Als wij ons afvragen welke motieven kunnen leiden tot het geven van wiskundeonderwijs aan een technische hogeschool, dan komen ongetwijfeld alle vier in aanmerking. De grote betekenis van motief *b.* is te in het oog vallend om er veel woorden aan te wijden; zonder wiskunde is natuurwetenschap en wetenschappelijke techniek nu eenmaal niet mogelijk. Dat ook motief *a.* van belang is, moge allereerst al blijken uit een formele aangelegenheid als de aan de betrokken hoogleraren gegeven leeropdracht, welke hun verplicht de *zuivere* en de toegepaste wiskunde te onderwijzen; het blijkt ook uit de omstandigheid, dat aan afgestudeerden dezer technische hogeschool bepaalde onderwijsbevoegdheden voor wiskunde aan algemeen ontwikkelende scholen werden en worden toegekend. Men zou dit

niet doen, men zou dit niet mogen doen als zij niet in hun leertijd de wiskunde, ook om haar zelve beoefend hadden. En ligt er ook geen aanwijzing in de omstandigheid, dat onder de wiskundedocenten, aan deze zowel als aan buitenlandse technische hogescholen, in verleden en heden werkzaam, namen worden aangetroffen, waarmee men wetenschappelijke prestaties van de allereerste rang op zuiver wiskundig gebied verbindt? Ik moge van deze plaats en bij deze gelegenheid slechts één zo'n naam noemen: van Dantzig.

Het motief c., de vormende waarde der wiskunde inhoudende, is eveneens voor een technische hogeschool van groot belang. De toekomstige ingenieur immers zal bij zijn voortgezette studie vrijwel alleen takken van wetenschap ontmoeten, die met de wiskundige methode worden beoefend of waarbij naar een dergelijke methode wordt gestreefd en waarbij alle voordelen van door wiskundeonderwijs aan te kweken denk- en gewoonten dankbaar en volledig kunnen worden gewaardeerd.

Is ten slotte het vierde motief, de selecterende kracht van wiskundeonderwijs, niet van eminent belang voor een hogeschool als deze? Is het niet van bijzondere betekenis, zowel voor het wetenschappelijke peil van de instelling als voor den student zelf, dat hij alvorens tot de hogere technische studie te worden toegelaten, het filter van de wiskundige propaedeuse moet passeren? Is het niet heilzaam, dat de school zich voor latere teleurstelling behoedt door een nauwlettende controle bij de volgende toegangsdeur, nadat zij aan de entree de grote drommen van gegadigden naar binnen heeft moeten laten gaan op een elders verkregen toegangsbewijs? En er is in deze selectie bovendien een element, dat ons gevoel voor billijkheid bevredigt. Deze selectie is namelijk maar ten dele een selectie naar intelligentie, het is er ook een naar karakter, het is er een naar werkkraft, zelfstandigheid en doorzetttingsvermogen, het is er een waarbij mede antwoord wordt gegeven op de vraag of de student de weelde van een veel grotere vrijheid kan verdragen dan hem ooit op enige school werd geboden en die voor voortgezette wetenschappelijke opleiding in beginsel onmisbaar is. Men kan zich de vraag voorleggen of de selectie, die ik noem, niet door een minder oneconomische kan worden vervangen, of psycho-techniek hier uitkomst kan geven, of het toegangsbewijs geverifieerd moet worden — belangrijke vragen, die onze gehele onderwijsorganisatie raken, maar het feit niet weg kunnen nemen, dat bij de bestaande constellatie het selectief karakter van de

mathematische propaedeuse niet licht te hoog kan worden geschat.

Het is duidelijk, dat ieder die de waarde van de vier motieven, die ik U noemde onderschrijft, ook de consequenties aanvaardt, welke er voor het onderwijs uit voortvloeien. Hij zal er niet spoedig voor te vinden zijn de voor de wiskunde te stellen eisen te verlichten, hij zal in het bijzonder de vraag of een bepaald onderwerp der wiskunde op de technische hogeschool onderwezen zal worden, niet identiek achten met de vraag of de toekomstige ingenieur het voor zijn studie „nodig” heeft.

De vier motieven, waarvan bij herhaling sprake is, gelden voor een groot aantal der scholen, waar wiskunde onderwezen wordt, zij gelden ook voor het schooltype dat voor de Technische Hogeschool van buitengewone betekenis is doordat het merendeel van haar leerlingen het zijn vooropleiding dankt: de Hogere Burgerschool B. Wanneer nu omtrent het gewicht, dat aan elk der motieven wordt gehecht geen eenstemmigheid heerst, dan kan men zien gebeuren dat er meningsverschillen ontstaan zelfs in de kring van hen die overtuigd zijn van de grote en onvergankelijke waarde van onderwijs in wiskunde. En in een tijd, dat gezocht wordt naar een nieuw evenwicht tussen de verschillende doelstellingen, maakt dat onderwijs een crisis door. In zo'n tijd van onzekerheid bevindt zich de H.B.S. thans reeds twintig jaren. Een beweging ontstond tot vernieuwing van het wiskundeonderwijs aan middelbare scholen: ik doe niemand te kort als ik daaraan de namen van Beth en Dijksterhuis verbind. Ik ben mij bewust, dat ik de zaak wat te simplistisch voorstel, maar de tendenz van deze stroming is een wijziging der verhoudingsgetallen, waarbij aan de motieven a. en c. een grotere waarde wordt toegekend ten opzichte van b. En aangezien voor een technische hogeschool dit laatste motief het belangrijkste is, lag in de natuur der zaak een mogelijkheid van conflict. En zo kon het gebeuren, dat in 1934 op de jaardag dezer hogeschool, de toenmalige rector-magnificus, hoogleraar in de wiskunde en oud-leraar aan de H.B.S. over deze aangelegenheid een rede hield, die alle kenmerken had van een philippica. Voor zover zij stromingen aanwees en bestreed, welke van een antiwiskundige gezindheid getuigen was zij reeds belangrijk genoeg, merkwaardig en piquant werd zij door de omstandigheid dat zich hier wiskundige tegenover wiskundige stelde; duidelijk werd te verstaan gegeven dat de stemming van

den spreker ten opzichte van het voorgestelde nieuwe leerplan voor wiskunde, allerminst was van geestdriftige bewondering. Dit nieuwe leerplan, of wat er van over is gebleven, is inmiddels ingevoerd en heeft aan de stof toegevoegd onderwerpen als differentiaal- en integraalrekening, meetkunde der kegelsneden, formele ontwikkeling van het getalbegrip. Wie menen zou dat de invoering van deze onderwerpen, waarvan de beide eerste op de technische hogeschool worden onderwezen, met gejuich door deze instelling werd begroet, zou zich zeer vergissen. En de reden is naast twijfel aan de uitvoerbaarheid van het plan, de overtuiging dat andere onderwerpen te zeer in het gedrang komen dan dat de wiskundige vaardigheid, zoals die door het werken met wortelvormen en logaritmische vergelijkingen wordt verkregen, er niet ernstig onder zou lijden. Ik meen in dit verband te mogen uitspreken, dat aan de H.B.S. als autonome, algemeen-ontwikkkelende instelling het recht toekomt zelfstandig te beslissen welke motieven als richtsnoer bij haar wiskunde-onderwijs zullen dienen en dat zij niet in de eerste plaats het oog behoeft te richten op de scholen waartoe haar einddiploma toegang geeft. Ook staat het voor mij vast, dat op de „oude” H.B.S. van het begin dezer eeuw de wiskundige techniek al te zeer overheerste, dat de leerstof niet ontkomen was aan sleur en slechte traditie, dat de door herinnering gekleurde, soms zowaar idyllisch aandoende schilderijen van die periode, van de werkelijke toestand een onjuist beeld geven, dat leerstof is opgeruimd, waarmee op grond van geen der vier genoemde motieven wiskunde-onderwijs kon worden gegeven en dat nieuwe onderwerpen, zoals bijvoorbeeld het functiebegrip een goede ruil betekenen. Het is geen vormelijke uiting van trouw aan het onderwijs, dat ik heden na zeventienjarige dienst verlaat, maar oprechte overtuiging dat aan de tegenwoordige H.B.S. misschien geen beter wiskunde-onderwijs, maar onderwijs in een betere wiskunde wordt gegeven dan aan die van veertig jaar geleden.

Intussen moge ik er aan toevoegen — en ik mag het hier zeggen, omdat ik het ook vroeger heb gezegd — dat de voorstellen van de Commissie-B e t h in mij geenszins een voorstander vinden; de uitvoering van haar denkbeelden heeft mij steeds nog niet eens onwenselijk, maar rechtuit onmogelijk geleken, en het is mij nog altijd onbegrijpelijk, dat de ervaringen van anderen omtrent het bevattingsvermogen van leerlingen van twaalf tot achttien jaar zo zeer verschillen van de mijne. Daar komt bij,

dat de omvang van de leerstof die zij voorstelt dusdanig is, dat de gebruikelijke didactiek algehele verandering zou moeten ondergaan door wat ik maar eenvoudigheidshalve wil noemen een verschuiving van „vraagstuk” naar „theorie”. En ieder, die overtuigd is dat de theorie eerst door de toepassing begrepen wordt en dat de begrippen niet verworven worden door het memoriseren der definitie, maar door langdurige omgang met concrete voorbeelden, zal de H.B.S. gelukkig prijzen dat het nog niet tot integrale doorvoering van het nieuwe leerplan is gekomen, maar dat de nieuwe onderwerpen voorlopig aan de scholen in studie zijn gegeven. A quelque chose malheur est bon: de tijdsomstandigheden doen definitieve uitwerking uitstellen tot een tijdstip waarop praktische ervaring met de nieuwe stof groter zekerheid kan geven omtrent het mogelijke en wenselijke. Moge ten slotte een oplossing worden gevonden tot heil der hogere burgerschool en tot bevrediging ook van de instelling waaraan ik mij heden verbind. Door overleg en openhartige uiteenzetting is veel, is alles te bereiken; door de rede van B r e m e k a m p op de laatste jaarvergadering der vereniging „Wimecos” is reeds een begin van gedachtenuitwisseling verkregen, waarvan ik mij ook voor de toekomst veel goeds voorstel.

De openhartige mededelingen omtrent verschil van inzicht onder de wiskundigen, zelfs waar het de betekenis van hun eigen vak betreft, hebt U na de dithyramben waarmede ik deze rede opende, allicht met enige teleurstelling, misschien wel met enig leedvermaak aangehoord en Uw mogelijk toch al wankel geloof in het dogma der „overdracht” is geschokt. Maar het feit is niet langer te verbergen, dat een wiskundige altijd nog heel veel meer is dan wiskundige, dat zijn opvattingen en handelingen niet in de eerste plaats door logische, maar door psychologische factoren worden beïnvloed, dat men rekening moet houden met zijn temperament, met zijn optimisme of pessimisme, zijn conservatisme of radicalisme, dat hij kortom een mens is als ieder ander en dat men hem daarom vergeven moet, dat hij in het dagelijkse leven woorden gebruikt van vage en variabele betekenis, ingaat op slecht geredigeerde vragen, zich tevreden stelt met halfslachtige antwoorden en zich bij voortduring bezondigt aan onvolledige inductie.

En zo komen wij van de dienst der wiskunde van zelve tot de vraag: wie zijn deze wiskundigen? Wie zijn deze hogepriesters in de cultus der logica, wie zijn de werkgevers van deze

dienstmaagd der techniek? Vermeldt hun persoonsbewijs bijzondere kenmerken, vertoont hun schedelveld een merkwaardige anatomische verhevenheid en kan men hen evenals misdadigers op grond van physiognomieke criteria determineren?

Het is mijn ervaring, dat de wiskundigen zelf deze belangrijke vraag naar het bestaan van een specifieke wiskundige aanleg ontkennend plegen te beantwoorden. Het streven naar zelfbehoud is mogelijk aan dit antwoord niet vreemd: indien een bepaalde eenzijdige begaafdheid voorwaarde zou zijn voor wiskundige werkzaamheid, dan zou dit vak in het onderwijssysteem niet de belangrijke plaats mogen innemen, die haar is toegekend.

De speciale psychologie heeft zich voor zover mij bekend niet met de wiskundige beziggehouden; het zou interessant zijn kennis te nemen van een dergelijk onderzoek, gegrond hetzij op een enquête, hetzij op bewerking van biographisch materiaal. In een oud leerboek der trigonometrie, waaraan de Deventer wiskundige Gravelaar een studie heeft gewijd, spreekt de schrijver Pitiscus in zijn opdracht aan keurvorst Frederik IV de wens uit, dat de theologen van zijn tijd mogen zijn gelijk de wiskundigen, namelijk: inschikkelijke en zachtzinnige mensen; maar dat was in 1595.

Een feit is, dat men onder de wiskundigen de grootst mogelijke verscheidenheid van karakter aantreft en dit laatste zal, naast hun scholing, hun voorkeur voor bepaalde onderwerpen verklaren. Het zal ook wel, naast de mathematische conjunctuur van het tijdperk, beslissen of zij worden aangetrokken door wat Bremekamp genoemd heeft de kritische of de practische richting in de wiskunde, een onderscheiding die in veel opzicht overeensteemt met de later door van der Waerden gegeven verdeling der wiskundigen in *abstracisten* en *concretisten*. Hoewel het misschien de buitenstaander vreemd schijnt, is voorts wiskundige strengheid een betrekkelijk begrip en daardoor is het mogelijk een onderscheiding te maken waarbij men de oudvaderlandse benaming *preciezen* en *rekkelijken* zou kunnen gebruiken. De laatste zijn geen wiskundigen van lagere soort, maar zulke die de neiging hebben over details heen te glijden, niet alle bijzondere gevallen te bespreken en zich niet al te bezorgd maken over de nodige en voldoende voorwaarden waaronder hun stellingen gelden. Grote mathematici als Jacob Steiner of Felix Klein zullen door niemand tot de preciezen worden gerekend. Door verschil in karakter ontstaat bij alle aan het vak inhaerente overeenstemming van beginsel,

een verschil in de vorm van mededeling, een individuele wiskundige stijl. Typerend is b.v. het onderscheid tussen franse en duitse leerboeken, waarbij de *clarté* van de eerste en de *Gründlichkeit* van de laatste hun voor- en nadelen hebben.

Men kan dus onder de wiskundigen een grote variatie van geaardheid vaststellen, ja het komt mij zelfs voor dat het wiskundige type in het geheel niet bestaat. De mens kan op wiskunde verschillend reageren, zelden neutraal, soms met afkeer, met vrees, dikwijls met belangstelling, hetzij wetenschappelijk, dilettantisch of platonisch. Maar het schijnt wel, dat geen dezer reacties bepaalde karaktertrekken, een bepaalde levensbeschouwing of occupatie op ander gebied insluit of uitsluit. Er schijnt geen correlatie te zijn tussen afkeer of voorkeur voor wiskunde en enige andere geesteswerkzaamheid. Gij vindt een sterk positieve reactie bij de zachtzinnige en bescheiden brillenslijpende wijsgeer, die zijn *ethica more geometrico* demonstreert en bij den man van de daad generaal Bonaparte, die zich tijdens de italiaanse veldtocht interesseert voor de cirkelconstructies van Mascheroni. Een der voorlopers van de ontdekking der infinitesimaalrekening Johannes Hudde, is burgemeester van Amsterdam, de wiskundige werkzaamheid van den staatsman Jan de Witt is welbekend, de grote Fermat was raadsheer in het gerechtshof van Toulouse, de eminente wiskundige aan wie de reeksen van Fourier hun naam danken, was vele jaren prefect van het departement Isère, één der grondleggers van de projectieve meetkunde in Frankrijk, Chasles, tot op middelbare leeftijd bankier te Chartres, Cayley twintig jaar lang advocaat in de City, Salmon hoogleraar in de godgeleerdheid te Dublin, Painlevé in een latere tijd minister-president van Frankrijk, uiteraard kortstondig.

Deze overigens merkwaardige voorbeelden betreffen alleen nog de sociale positie van de genoemden, die nu eenmaal niet geheel door innerlijke factoren wordt bepaald. Is er misschien een algemene tendenz aan te wijzen in de houding der wiskundigen ten opzichte van vraagstukken van politieke of godsdienstige aard? Klein, gewag makend van de mogelijkheid dat het zelfstandige, kritische en ondogmatische standpunt dat de mathematicus tegenover zijn objecten inneemt, zich zou kunnen uiten door radicale of liberale gezindheid, beantwoordt de vraag op historische gronden ontkennend. Monge is Jacobijn en speelt een belangrijke rol in de jaren van en na de franse revolutie, maar zijn tijdgenoot, baron de Cauchy, die de moderne richting

in de analyse inluit en als zodanig onbarmhartig kritisch staat tegenover de door voorafgaande generaties verkregen resultaten, is reactionnair en royalist en gaat in 1830 met de Bourbons in ballingschap. Ook is het een misvatting te veronderstellen, dat geestesstromingen zoals het rationalisme der achttiende of het filosofisch materialisme der negentiende eeuw een bepaalde aantrekkelijkheid voor de wiskundige zouden hebben. Naast elk voorbeeld kan men hier een tegenvoorbeeld plaatsen.

Men hoort soms de bewering, dat er een natuurlijke tegenstelling zou bestaan tussen de kille, onaandoenlijke mathesis en de kunst. De grote betekenis welke in de wiskundige wetenschap toekomt aan fantasie en scheppingskracht doet deze uitspraak reeds betwijfelen en is ook niet omgekeerd betoogd dat er een correlatie zou bestaan tussen wiskunde en muziek? *Brewster* deelt in zijn biographie van *Newton* mede, dat deze artistieke gaven had en verzen schreef. Van de wiskundige en natuurkundige *Ampère* is een omvangrijke dichterlijke productie bekend en *Sainte-Beuve*, die een der brillant geschreven *Portraits littéraires* aan hem wijdt, deelt mede, dat de dichtregels soms plotseling afbreken en het manuscript met voor de criticus onbegrijpelijke formules wordt voortgezet. *Hamilton*, een der grondleggers der klassieke mechanica en schepper van het quaternion, was eveneens als dichter werkzaam en als zodanig met *Wordsworth* bevriend. Ook van de andere kant komt de toenadering. Ik noem U slechts de namen *Dürer* en *Leonardo* ter illustratie van het feit, dat van een tegenstelling tussen wiskunde en beeldende kunst geen sprake is. *Park* schijnt een tegenzin in wiskunde te hebben gehad, *Goethe* houdt zich, in verband met zijn standpunt ten opzichte van de moderne natuurwetenschap, afzijdig en *Faust* noemt bij de wetenschappen die hij zonder zelfbevrediging gestudeerd heeft, de wiskunde niet. Daarentegen gevoelde naar mededelingen in een bekende rede van *Pringsheim*, de romantische duitse dichter *Novalis* een dusdanige geestdrift voor de mathesis, dat de wiskundige er verlegen en wantrouwend onder wordt. Een der fijnzinnigste onzer friese dichters, vertaler van *Rilke*, die men op het eerste gezicht moeilijk met wiskunde in verband brengt, was in een vroeger stadium van zijn leven wiskundeleraar en een zijner jongere collega's heeft alle aanleiding zich dit feit met dankbaarheid te herinneren. *Victor Hugo* schijnt veel belangstelling in wiskunde te hebben getoond en de duistere *Valéry* heeft zich er daad-

werkelijk mee ingelaten. Het komt zelfs voor dat een wiskundig object tot een dichterlijk beeld inspireert, zoals het orthogonaal assenstelsel in een gedicht van de merkwaardige *Adwaita* in zijn boek *Brahman*, dat als volgt inzet:

Maar 'k danste liefst volgens de wiskundige wet
 Door 't $x-y$ vlak zwierde ik horizontaal
 En dan met lucht'ge sprongen verticaal,
 Zweefde als een mug ik op en af langs z .

Van de dienst der wiskunde sprak ik U en van haar dienaren.
 Mogen wij in het besef van haar eeuwige waarde ons ook bewust zijn van haar grenzen. Veel kan met wiskunde begrepen worden, er is meer tussen hemel en aarde voor haar onaantastbaar. Wij kunnen de wiskunde dienen met toewijding en overgave in de zekerheid, dat zij ons blijft toestaan er naar te streven, dat niets menselijks ons vreemds zij.

J. NOORDHOFF †.

Op 8 Maart is plotseling overleden in de leeftijd van 71 jaar
de Heer

JAKOB NOORDHOFF,

tot voor weinige jaren Directeur van de N.V. P. Noordhoff's
Uitgeverszaak te Groningen.

Het past ons hier hulde te brengen aan den man, die gedurende een lange reeks van jaren, meer dan 40 jaar, al zijn werkkraft en energie en doorzicht gegeven heeft aan zijn steeds groeiend bedrijf.

In brede kring werd zijn levensarbeid gewaardeerd, getuige mede de onderscheiding hem verleend door Hare Majesteit Koningin Wilhelmina door zijn verheffing tot officier in de orde van Oranje Nassau bij gelegenheid van het 75-jarig bestaan van de uitgeverszaak.

Schrijver van deze regelen heeft het voorrecht gehad met den overledene sinds 1907 samen te mogen werken; een van zin en streven was onze verhouding steeds de beste, die men zich kan voorstellen. Niet genoeg kunnen de wiskundigen in ons land en allen buiten de grenzen, die onze taal spreken, dankbaar zijn, dat Noordhoff belangrijke werken uitgaf, waarvan te voren vaststond, dat ze de kosten en de moeite niet zouden dekken. Het is aan hem te danken, dat een tijdperk van opbloei van de Nederlandse wiskundige literatuur werd geopend.

We weten, dat het levenswerk van den overledene door twee van zijn zoons met hetzelfde brede inzicht reeds gedurende enkele jaren is en ook verder zal worden voortgezet.

Straks, als wij weer ons zelf zijn, volkomen en in alles, zal het werk, door Jakob Noordhoff begonnen, door zo velen gesteund met hun wetenschap en werkkraft, door ontelbaren met hun blijvende belangstelling, in dezelfde geest worden voortgezet.

Den arbeider aan het welzijn van ons schone vak zijn de werktuigen ontvallen. Hij ruste in vrede. Wij gedenken hem in eerbiedige stilte.

Amsterdam.

P. WIJDENES.

10 Maart 1942.

DELING EN RESTSTELLING

DOOR

G. R. VELDKAMP.

1. In de nummers 36, 41, 42, 43 en 45 van het Weekblad voor het Gymnasiaal en Middelbaar Onderwijs Jrg. 37 komt een polemiëk voor over de reststelling tussen de Heren dr. Joh. H. Wansink, dr. L. Crijns en dr. W. Burgers. Zonder dat het in mijn bedoeling ligt, daaraan in een of ander opzicht deel te willen nemen, is toch deze polemiëk de directe aanleiding geweest tot het maken van onderstaande opmerkingen. Het is nl. opvallend, dat in de meeste algebra-leerboeken slechts weinig aandacht wordt besteed aan de theorie over de deling van veeltermen. Voor een goed begrip van de reststelling is het echter mijns inziens juist gewenst, aan de theoretische kant van de deling meer aandacht te schenken. In elk schoolboek vindt men wel vermeld, dat men bij het delen van twee veeltermen in x deler en deeltal moet rangschikken naar afdalende machten van x ; het „waarom” van deze handelwijze wordt evenwel doorgaans niet verklaard. Merkwaardig genoeg kan men echter bij een opgaande deling even goed rangschikken naar opklimmende machten van x ; doet men hetzelfde bij een niet-opgaande deling, dan vindt men een ander quotient en een andere rest. Blijkbaar hangt dus de wijze, waarop de deling wordt uitgevoerd, samen met de rest, welke men vindt. Zo zijn er dus verschillende resten mogelijk en het is dan ook geboden, bij de behandeling van de reststelling van te voren vast te leggen, op welke rest zij betrekking heeft. Een definitie van deze strekking treft men in onze schoolboeken over algebra (voorzover ik ze althans ken) niet aan. Nu is het natuurlijk zo, dat de reststelling aan de orde komt, als de leerlingen de gewone delings-algorithmus reeds herhaalde malen hebben uitgevoerd, zodat zij wellicht wel zowat verwachten, dat de reststelling slaat op „die rest”. Toch is het dunkt mij niet overbodig, iets dieper op een en ander in te gaan, waardoor aan de ene kant de bovengenoemde algorithmus op een stevig fundament komt te staan, terwijl anderzijds een beter inzicht in het bewijs van de reststelling wordt verkregen. In het volgende is in het kort weergegeven, hoe ik mij een

dergelijke behandeling ongeveer voorstel. Opgemerkt zij, dat men een en ander niet bij de eerste kennismaking met de deling aan de leerlingen kan voorzetten; een zekere mate van rijpheid is noodzakelijk.

2. Elke uitdrukking van de gedaante:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n \quad (A)$$

heet een veelterm in x . Voorbeelden van veeltermen in x zijn dus: $0x^2 - 2x + 3$; -5 ; 0 . Zijn alle in (A) voorkomende cofactoren nul, dan en alleen dan zeggen we, dat de veelterm identiek gelijk is aan nul. Zijn niet alle cofactoren nul en is a_{n-k} de eerste van nul verschillende cofactor, dan zeggen we, dat de veelterm van de k -de graad in x is. Is $k = 0$, dan wordt de veelterm blijkbaar eenvoudig a_n ; in dat geval zeggen we, dat de veelterm een constante is. Voor het formuleren van stellingen levert het dikwijls gemak op, ook aan een veelterm, die identiek gelijk is aan nul, de graad nul toe te kennen. We kunnen dan zeggen:

Een veelterm van de nulde graad in x is een constante; omgekeerd kan elke constante (d.w.z. elk van x onafhankelijk getal) worden opgevat als een veelterm van de nulde graad in x .

Men kan nu voor veeltermen in x de bewerkingen: optelling, aftrekking en vermenigvuldiging definiëren en de grondeigenschappen dier bewerkingen bewijzen; daarop gaan we hier niet in. Wel vermelden we het belangrijke resultaat: *Bij optelling, aftrekking en vermenigvuldiging van enige veeltermen in x is de uitkomst steeds weer een veelterm in x .*

Deze eigenschap geeft ons het recht, om vormen als $(x - 3)$ $(x^2 + 5x - 1)$; $6(x^2 + 2)$; $(x - a)P(x)$, waarin $P(x)$ de gedaante (A) heeft, ook veeltermen in x te noemen.

We definiëren nu:

Twee veeltermen $V_1(x)$ en $V_2(x)$ in x heten dan en slechts dan identiek gelijk, symbolisch: $V_1(x) \equiv V_2(x)$, indien de cofactoren van de gelijknamige machten van x gelijk zijn.

Uit deze definitie volgt direct, dat twee identieke veeltermen voor elke waarde van x dezelfde waarde aannemen. Omgekeerd mag natuurlijk nog niet worden geconcludeerd, dat uit het gelijk zijn van twee veeltermen in x voor elke waarde van x de overeenstemming in de cofactoren volgt. Dit is een eigenschap, die gewoonlijk met behulp van de reststelling wordt bewezen (welk bewijs in het onderstaande echter niet is weergegeven).

Dat dit stelsel een oplossing heeft, ziet men onmiddellijk: immers, de eerste vergelijking levert ons de waarde van b_0 , daarna vindt men de waarde van b_1 uit de tweede vergelijking, enz. Desgewenst kan men dit bewijs volkomen streng maken door volledige inductie.

Uit a en b volgt de juistheid van de stelling.

4. Het verband met de deling blijkt het duidelijkst, wanneer men (2) vervangt door het daarmee gelijkwaardige stelsel:

$$\begin{aligned} b_0 &= p_0, \quad b_k = p_k + ab_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \\ r &= p_n + ab_{n-1} \end{aligned} \quad (3).$$

Men ziet dan zonder moeite, dat $b_0, b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ en r ook bepaald kunnen worden door toepassing van de bekende algorithmus van Horner, of, wat op hetzelfde neerkomt, door de algorithmus, die men onder de naam „deling” reeds herhaaldelijk heeft uitgevoerd. Voorts blijkt nu ook, dat de eisen, welke aan $Q(x)$ en r zijn gesteld, de algorithmus (o.a. de wijze van rangschikken) bepalen. Het is dus eigenlijk zo, dat de betrekking (1) primair is, de algorithmus secundair.

Men kan nu het volgende vaststellen:

Definitie 1: *Het in Stelling 1 genoemde getal r heet de rest bij deling van $V(x)$ door $x - a$; $Q(x)$ heet het quotient der deling.*

Definitie 2: *Is de zo juist gedefinieerde rest nul, dan zegt men, dat $V(x)$ deelbaar is door $x - a$; is $r \neq 0$, dan is $V(x)$ niet deelbaar door $x - a$.*

Vervolgens kan men bewijzen de:

Reststelling: *De rest, welke de veelterm $V(x)$ laat bij deling door $x - a$, is gelijk aan $V(a)$.*

Bewijs: Volgens **Stelling 1** is er één en slechts één getal r en één en slechts één veelterm $Q(x)$ zodanig, dat (1) geldt. Neemt men hierin $x = a$, dan komt er: $r = V(a)$. q.e.d.

Bij deze behandeling heeft de enigszins beruchte vraag, of men in (1) wel zonder bedenking $x - a$ mag nemen, hoewel men toch door $x - a$ gedeeld heeft, vrijwel alle zin verloren.

Gevolg: *$V(x)$ is dan en slechts dan deelbaar door $x - a$, als $V(a) = 0$.*

5. Het spreekt vanzelf, dat het bovenstaande, altijd met behoud van de hoofdzak, nl. het bewijs van **Stelling 1**, nog wel enigszins

naar eigen smaak te wijzigen is. Dat bv. het stelsel (2) of (3) een oplossing bezit, kan men ook aantonen door die oplossing expliciet aan te geven. Uit (3) volgt nl.

$b_0 = p_0$, $b_1 = p_0 a + p_1$, $b_2 = p_0 a^2 + p_1 a + p_2$ en algemeen:
 $b_k = p_0 a^k + p_1 a^{k-1} + \dots + p_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots, n-1)$,
 hetgeen weer door volledige inductie te bevestigen is.

Dan is dus:

$$b_{n-1} = p_0 a^{n-1} + p_1 a^{n-2} + \dots + p_{n-1},$$

waaruit volgt:

$$r = ab_{n-1} + p_n = p_0 a^n + p_1 a^{n-1} + \dots + p_{n-1} a + p_n = V(a).$$

Het bewijs van de reststelling is dan meteen geleverd.

Het volgende bewijs van **Stelling 1** is wat moeilijker te begrijpen, omdat het iets abstracter is. Op dezelfde wijze als in **2** toont men aan dat aan (1) hoogstens een veelterm $Q(x)$ en een constante r kunnen voldoen. Dat er een veelterm en een constante zijn, die aan (1) voldoen, vindt men nu aldus: indien een getal r aan (1) moet voldoen, dan vindt men door $x = a$ te nemen, dat dit getal slechts gelijk kan zijn aan $V(a)$. *De stelling zal nu bewezen zijn, als aangetoond kan worden, dat er inderdaad een veelterm $Q(x)$ is, die aan $V(x) \equiv (x - a) Q(x) + V(a)$ voldoet.* Dit komt daarop neer, dat aangetoond moet worden, dat $V(x) - V(a)$ geschreven kan worden in de vorm: $(x - a)$ maal een veelterm in x . Blijkbaar is:

$$V(x) - V(a) \equiv p_0 (x^n - a^n) + p_1 (x^{n-1} - a^{n-1}) + \dots + p_{n-1} (x - a).$$

Volgens het geleerde bij de merkwaardige quotienten is elke term hiervan te schrijven als $(x - a)$ maal een veelterm in x . Derhalve is dit ook met $V(x) - V(a)$ het geval.

Hierbij moet de behandeling van de merkwaardige quotienten aan die van de reststelling zijn vooraf gegaan. Gebruikt men het eerste of tweede bewijs, dan kan bij de merkwaardige quotienten gebruik maken van de reststelling.

6. Het is wel leerzaam in dit verband ook eens iets te zeggen over de deling, waarbij gerangschikt is naar opklimmende machten van x . Men komt dan al gauw tot de ontdekking, dat deze steunt op een eigenschap als:

Stelling 2: Is $a \neq 0$, dan is er een en slechts een veelterm $\Phi(x)$ en één en slechts één van x onafhankelijk getal ϱ , zodanig, dat:

$$V(x) \equiv (-a + x)\Phi + \varrho x^n \quad (4)$$

Het bewijs kan geleverd worden volkomen analoog aan dat van **Stelling 1**.

De tweede stelling kan echter ook aldus uit de eerste worden afgeleid: Zij:

$$V_1(y) \equiv p_n y^n + p_{n-1} y^{n-1} + \dots + p_0.$$

Volgens de eerste stelling is er één en slechts één veelterm $\Phi_1(y)$ en één en slechts één constante ϱ , zodanig, dat:

$$V_1(y) \equiv \left(y - \frac{1}{a}\right) \Phi_1(y) + \varrho \quad (5)$$

waarin:

$$\Phi_1(y) \equiv \alpha_{n-1} y^{n-1} + \alpha_{n-2} y^{n-2} + \dots + \alpha_0$$

Stelt men hierin $y = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) en vermenigvuldigt men beide leden met x^n , dan ontstaat de identiteit:

$$V(x) \equiv \left(1 - \frac{x}{a}\right) \Phi_2(x) + \varrho x^n \quad (6)$$

waarin:

$$\Phi_2(x) \equiv \alpha_{n-1} + \alpha_{n-2} x + \dots + \alpha_0 x^{n-1}$$

Blijkens de afleiding geldt (6) voor alle van nul verschillende waarden van x . De juistheid voor $x = 0$ blijkt als volgt: uit (5) volgt: $p_n = \alpha_{n-1}$ en dit is ook juist de betrekking waarin (6) overgaat voor $x = 0$.

Door:

$$-\frac{\Phi_2(x)}{a} \equiv \Phi(x) \equiv \beta_{n-1} + \beta_{n-2}(x) + \dots + \beta_0 x^{n-1}$$

te noemen ontstaat hieruit (4).

7. Men kan nu de vraag stellen, of bij beide wijzen van rangschikken hetzelfde quotient kan optreden. Is $n = 0$, dan blijkt (1) en (4) direct: $Q(x) \equiv \Phi(x) \equiv 0$. Is $n \geq 1$ en $Q(x) \equiv \Phi(x)$, dan volgt uit (1) en (4):

$$V(x) \equiv (x - a)Q(x) + r \equiv (x - a)Q(x) + \varrho x^n,$$

zodat:

$$\varrho x^n \equiv r \quad (7)$$

Wegens $n \geq 1$ is dit slechts mogelijk, als $r = \varrho = 0$, dus als de

UIT HET VERSLAG VAN DE COMMISSIE, DIE IN 1941 BELAST WAS MET HET AFNEMEN VAN HET STAATSEXAMEN TOT TOELATING AAN DE UNIVERSITEIT.

De subcommissie voor de *wiskunde* kan tot haar voldoening vaststellen, dat de examenresultaten der A-candidaten meer moedgevend zijn dan in de naast voorafgaande jaren. De gemiddelde cijfers voor stel- en meetkunde zijn nl. 5,77 en 5,55. In 1939 waren deze 5,33 en 5,38; in 1940 5,41 en 5,25. Terwijl in 1940 nog 30 van de 212 in de stekunde geëxamineerde A-candidaten het zelfs niet tot een 4 konden brengen, was dit nu het geval met 22 van de 198. Voor de meetkunde zijn de overeenkomstige aantallen 27 van de 213 en 25 van de 199 kandidaten.

Hoewel de subcommissie met genoegen bemerkt heeft, dat de op- en aanmerkingen, in vorige verslagen geuit, door een grooter aantal A-candidaten ter harte genomen zijn, blijft zij toch ernstig aandringen op verdergaande verbetering. Er wordt nu eenmaal geen examendressuur geëischt, gelijk nog menig candidaat schijnt te denken. Het toonen van inzicht en het stelselmatig werken met fundamenteele begrippen en stellingen wordt veel hoger aangeslagen. Het is b.v. niet noodig de uiterste waarden der functie $y = ax^2 + bx + c$ uit het hoofd te kennen. Verlangd wordt, dat men deze uiterste waarde uit den vorm der gegeven functie kan afleiden. En juist daaraan haperde het wel eens. Het is voorgekomen, dat men den discriminant eener vierkantsvergelijking van buiten kende, maar dan op de vraag „wanneer zijn nu de wortels reëel?” het antwoord schuldig bleef of slechts met hulp van den examinerator het verband tusschen discriminant en het al of niet reëel zijn der wortels kon vinden. Zoo behoeft men niet uit het hoofd te weten, dat het verschil tusschen de wortels eener vierkantsvergelijking gelijk is aan plus of min tweemaal den wortel uit den discriminant. Het wordt pas erg, als men dit verschil niet zonder hulp met de coëfficiënten der vergelijking in verband kan brengen, of niet kan aantonen, dat, wanneer het verschil der wortels reëel is,

ook de wortels reëel zijn, vooropgesteld, dat de coëfficiënten dit ook zijn.

Daarbij komt nog de veelal slordige formuleering van hetgeen uit het hoofd is geleerd. Menigmaal hebben daarbij de reststelling, de voorwaarde, die noodig en voldoende is voor het deelbaar zijn van een geheelen veelterm in x door $x - a$, en de verklaring van de wijze, waarop men de uiterste waarden van een gebroken rationale functie, als b.v. $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$, bepaalt, het zwaar te verantwoorden gehad.

De wijze, waarop gereageerd werd op vragen naar de waarden van x , die aan een ongelijkheid als b.v. $x > \frac{2}{x-1}$ voldoen, gaf in het algemeen blijk van behoorlijke voorbereiding. Wanneer echter gevraagd werd naar de waarden van x , die aan $x > \frac{-1}{x+1}$ voldoen, dan was bij het bepalen van het teken van de functie $x^2 + x + 1$ soms weer de tusschenkomst van den examinerator noodig. Bij het bepalen van het teken van een functie als $x^3 - x^2 - 4$ werd wel is waar naar een factorenontbinding dezer functie gezocht en werd daartoe deze functie gelijk nul gesteld met de min of meer gelukte verklaring van het waarom, maar dan was het oplossen der aldus verkregen vergelijking weer een hindernis, die de candidaat niet kon nemen, tenzij de examinerator het voorstel aan de hand deed om eens naar een geheel getal te zoeken dat aan de vergelijking voldeed. Hierbij bleek dan meteen, dat dit zoeken niet door de overweging geleid werd, dat een geheel getal dan alleen wortel kan zijn van een vergelijking als $x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \dots = 0$, waarin de coëfficiënten a , b , enz. geheele getallen zijn, wanneer het een deeler is van den bekenden term, dus van den coëfficiënt van x^0 .

Ten aanzien van de getalsoorten bleek vaak onkunde of begripsverwarring. De vraag naar het onderscheid tusschen meetbare en onmeetbare getallen werd in vele gevallen tevergeefs gesteld. Ook bleken soms imaginaire getallen onbekend te zijn. De vraag, of $\sqrt{a} = i \sqrt{-a}$ kon zijn, bleef onbeantwoord. Het antwoord op de vraag, wanneer $\sqrt{a}$ reëel is, luidde wel eens: als $\sqrt{a}$ positief is". Daarmede werd dan weer de vraag uitgelokt, wanneer $\sqrt{a}$ positief is, welke vraag den candidaat in verlegenheid bracht.

Wat de door de A-candidaten afgelegde examens in de meetkunde

betreft, ziet de subcommissie zich wederom genoodzaakt er op aan te dringen, dat definities en stellingen beter geformuleerd worden. Slordige formulering daarvan is menigmaal de oorzaak van ernstige fouten bij het maken van vraagstukken. Ook kan het herleiden van het gestelde vraagstuk tot eenvoudiger vraagstukken daardoor ten eenenmale verhinderd worden. Zelfs de definities van begrippen als: de hoek tusschen twee kruisende lijnen, de afstand van twee kruisende lijnen, de hoek tusschen een lijn en een vlak, bleken dikwijls slechts vaag of in het geheel niet bekend te zijn. Zoo ook de voorwaarden voor het evenwijdig zijn van een lijn met een vlak, het evenwijdig zijn van twee vlakken en het loodrecht staan van een lijn op een vlak.

Hoewel de subcommissie het noodzakelijk acht nogmaals op deze ernstige tekortkomingen te wijzen, kan zij niettemin opmerken, dat zich in dit opzicht een hoopgevende verbetering afteekent.

Bij doorsnedeconstructies echter kwam het al te vaak voor, dat niet bewust genoeg naar snijlijnen gezocht werd van het doorsnedevlak met de begrenzendende vlakken van het veelvlak. Dat het er daarbij op aankomt lijnen, die tot het doorsnedevlak behooren, tot snijding te brengen met die begrenzendende vlakken, of ribben van het veelvlak met het doorsnedevlak, moest nog wel eens door den examiner in de herinnering teruggeroepen worden. Daarbij bleek dan tevens, dat sommige candidaten niet wisten, dat het aanbeveling verdient in een tekening het snijpunt van een gegeven lijn met een gegeven vlak te bepalen door een geschikt vlak door de gegeven lijn aan te brengen en daarvan de snijlijn te bepalen met het gegeven vlak.

Het bewijs, dat een gegeven lijn loodrecht op een gegeven vlak stond, wilde soms niet gelukken, doordat de candidaat zich niet voldoende de daarvoor gebruikelijke bewijsmethode had eigen gemaakt, nl. het zoeken naar twee snijdende lijnen, in of evenwijdig aan het gegeven vlak, waarvan aangetoond kan worden, dat zij loodrecht op de gegeven lijn staan. Zoo stonden ook sommige candidaten min of meer hulpeloos tegenover het bewijs, dat twee in een figuur aangewezen lijnen loodrecht op elkaar staan. Zij dachten er niet aan, naar een vlak door de eene lijn te zoeken, waarvan bewezen kan worden, dat het loodrecht op de andere staat. Gelukkig worden deze ervaringen meer en meer uitzonderingen.

Ook bij het construeeren van lijnstukken en hoeken op ware

grootte werd in het algemeen meer begrip getoond dan in vorige jaren. Welbewust werd menigmaal naar driehoeken gezocht, waarin het gevraagde lijnstuk of de gevraagde hoek voorkwam en die onafhankelijk daarvan te construeeren waren.

Hetzelfde geldt voor het berekenen van verhoudingen in ruimtefiguren. Uit eigen initiatief werd daarbij gezocht naar gelijkvormige driehoeken en naar een combinatie van vlakken, waarin de voor het doel geschikte gelijkvormige driehoeken voorkwamen of nog door het trekken van een hulplijn verkregen konden worden.

Nogmaals wijst de subcommissie er op, dat men bij het berekenen van lijnstukken meer vertrouwen dient te stellen in de hulp, die de stelling van Pythagoras, de gelijkvormigheid van driehoeken en de stelskunde daarbij bieden.

Naar aanleiding van de veelal onbevredigende wijze waarop ruimteconstructies verliepen, zij er op gewezen, dat er te weinig aan gedacht werd, hierbij gebruik te maken van meetkundige plaatsen van punten of lijnen, die men verkrijgt door nu eens met de eene combinatie van gegevens, dan weer met een andere rekening te houden.

Bij het construeeren van lijnstukken, die aan gegeven of nog af te leiden vergelijkingen voldoen, kwam men soms niet op de gedachte deze vergelijkingen op te lossen en door middel van de verkregen oplossingen de gevraagde lijnstukken te construeeren. En bij een voorbeeld als $x^2 + ax - b^2 = 0$ werd de mogelijkheid om het gevraagde lijnstuk x zonder oplossing der vergelijking te construeeren ook niet aangegrepen.

Als voorbeeld van flagrant gebrek aan kennis zij het geval vermeld, waarin de oppervlakte van een driehoek gelijkgesteld werd aan $a^2 + b^2 + c^2$ en, na een vriendelijke vermaning van den examiner, aan $(a + b + c)$ gedeeld door „iets”. Een dergelijk voorbeeld was bij een examen in stelskunde het verzoek om „liefst in het uitwerken van haakjes geëxamineerd te worden”.

Overgaande tot de examenresultaten der B-candidaten, kan de subcommissie in de eerste plaats mededeelen, dat deze, wat de stelskunde en de trigonometrie en analytische meetkunde aangaat, beter zijn dan die van 1939 en 1940. De gemiddelden zijn thans 5,65 en 5,23, tegenover 5,16 en 5,00 in 1939 en 4,80 en 4,50 in 1940. Het gemiddelde cijfer van de meetkunde toont echter een belangrijken

achteruitgang: het is 4,77, tegenover 5,20 in 1939 en 5,60 in 1940.

Van de 34 B-candidaten, die in de stelkunde zijn geëxamineerd, kregen 6 een cijfer lager dan 4, tegenover 6 van de 38 in 1940; voor de meetkunde was dit het geval bij 7 van de 19, tegenover 4 van de 34 in 1940; voor trigonometrie en analytische meetkunde bij 8 van de 34, tegenover 9 van de 38 in 1940.

Ook voor de B-candidaten gelden de op- en aanmerkingen, in het bovenstaande gemaakt ten aanzien van de examens der A-candidaten in stelkunde en meetkunde.

Wat betreft het gedeelte der stelkunde, waarin alleen B-candidaten examen afleggen, moet, evenals in vorige verslagen, opgemerkt worden, dat men er met routine alleen niet is. Het mag niet voorkomen, dat iemand, die volgens de gangbare methoden exponentieele en logarithmische vergelijkingen kan oplossen, dan toch niet in staat is om een behoorlijke definitie van het begrip logarithme te geven, niet weet, wanneer men zeggen mag, dat $a > b$ is als $\log a > \log b$ is, of de graphiek van $y = \log x$, laat staan van een functie als $y = \log \frac{x^2 + 1}{1 - x^2}$ niet kan teekenen zonder het herhaaldelijk ingrijpen van den examinerator.

Bij vragen over rekenkundige en meetkundige reeksen kwam het voor, dat het afleiden van de formule voor de som van n termen van een meetkundige reeks de grootste moeite kostte, dat de noodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van een limiet voor de som van n termen eener meetkundige reeks, indien n oneindig groot wordt, gebrekkig werd geformuleerd, en dat men meende, dat $\frac{a}{1-r}$ „ongeveer” deze limiet was.

Bij de trigonometrie ging soms een overdaad van formulekennis gepaard met een minimum van begrip. Nogmaals zij er op gewezen, dat de definities der goniometrische getallen, de fundamenteele goniometrische formules, de sinusregel en, zoo noodig, de cosinusregel voldoende zijn om aangewezen lijnstukken en goniometrische getallen van aangewezen hoeken in een driehoek in elementen er van uit te drukken. Door zich daarin te bekwamen komt men sterk te staan tegenover de eischen van het examen. Het is onnoodig het geheugen te belasten met de resultaten van zulke oefening.

Met het gedrag der goniometrische functies in de verschillende

kwadranten waren sommige examinandi zeer onvoldoende bekend. Ook de graphische voorstelling van een goniometrische functie, zelfs van $y = \sin x$, bracht meer dan één candidaat in groote verlegenheid, vooral wanneer naar de eenheden gevraagd werd, waarmede x en y gemeten worden. Dat de ordinaat y , behoorende bij een abscis x , die met een rechten hoek overeenkomt, in ieder geval de eenheid zijn moet, waarmede y gemeten moet worden, en dat dan de vorm der graphiek afhankelijk is van deze eenheid, scheen een openbaring van de zijde van den examinerator te zijn. De radiaal als eenheid van hoekmeting bleek een enkelen keer zelfs geheel onbekend. Als curiositeit zij in dit verband nog vermeld, dat het mogelijk geacht werd de eenheden voor de coördinaten x en y zóó te kiezen, dat $\sin 30''$ gelijk aan 30 wordt.

Het bewijs van gonio- en trigonometrische identiteiten ziet de subcommissie bij voorkeur zóó gegeven, dat het eene lid uit het andere wordt afgeleid. Oefening hierin bevordert het initiatief in het herleiden van gonio- en trigonometrische vormen.

Ten slotte nog enkele opmerkingen naar aanleiding van de examens in de analytische meetkunde.

Bij het oplossen van vraagstukken over meetkundige plaatsen bleek nog herhaaldelijk, dat de daarin verkregen routine niet gedragen werd door degelijk begrip. Toch meent de subcommissie ook in dit opzicht verbeteringen op te merken.

Het onderzoek naar hetgeen de verkregen vergelijking van een meetkundige plaats voorstelde en het in teekening brengen van het resultaat verliepen al te vaak zoo, dat de candidaat daarbij weinig initiatief toonde. Zoo is het voorgekomen, dat hetgeen $ay = b^2 - x^2$ voorstelt pas herkend werd als de examinerator zeide: „denk eens aan de algebra”. Men vergenoegde zich te veel met de sleur: een ellips, als $B^2 - AC < 0$ is, een parabool als $B^2 - AC = 0$ is, een hyperbool als $B^2 - AC > 0$ is. Men kwam niet op het denkbeeld om daarna met behulp van zonder veel moeite aan te wijzen punten der meetkundige plaats tot een teekening er van te komen. Hierbij zij nog opgemerkt, dat oplossing van een der coördinaten als functie van de andere uit de verkregen vergelijking een goed en leerzaam middel aan de hand doet om aard en ligging der meetkundige plaats te bepalen. Dit middel komt vooral in aanmerking, als men met een tweedegraadsvergelijking te doen krijgt, waarin de term met xy aanwezig is.

TWEEDE VACANTIECURSUS WISKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE GRONINGEN

Op **Vrijdag 3 April 1942** zal aan de Rijks-Universiteit te Groningen wederom een **vacantiecursus** worden gehouden voor leraren in de wiskunde en andere belangstellenden. Het deelnemen aan de cursus zal kosteloos zijn.

PROGRAMMA:

- 9.15 uur. Prof. Dr. J. G. van der Corput, *Meetkundige plaatsen in de analytische meetkunde.*
10.30 uur. Dr. J. C. H. Gerretsen, *Niet-Archimedische meetkunde.*
13.45 uur. Prof. Dr. G. Schaake, *De stelling van Pappus.*
15.— uur. Prof. Dr. F. Zernike, *Machines als hulpmiddelen bij de wiskunde.*

Alle aanvangstijden zijn precies opgegeven. De voordrachten hebben plaats in het **Natuurkundig Laboratorium** (Westersingel 26).

Verschenen:

- Dr. B. P. HAALMEIJER, Leerboek der Vlakke Meetkunde I 4e druk
Dr. D. J. E. SCHREK, Analytische Meetkunde 6e druk
P. WIJDENES, Algebra voor Middelbare Handelsscholen 6e druk
" , Grafiekenschrift 9e druk
NOORDHOFF's Tafel in 4 decimalen 6e druk
Dr. BETH, Tafels in 4 decimalen 2e druk
P. WIJDENES, Algebra voor M.U.L.O. I 32e druk
" , Planimetrie I 3e druk
" , Lagere Algebra I 4e druk
WIJDENES en DE LANGE, Vlakke Meetkunde I 12e druk
" " " " , Vraagstukken uit Rekenboek I 9e druk
WIJDENES en BETH, Nieuwe Schoolalgebra I 12e druk
" " " " " " II 11e druk
MOLENBROEK en WIJDENES, Stereometrie 6e druk
VERSLUYS, Log. Tafel (5 dec.) 20e druk

Tot onze spijt zijn we gedwongen wegens de papiernood de algemene rondzending van pres.-ex. deze keer niet te doen plaats hebben. Voor leraren, die deze boeken op hun school gebruiken, en voor hen, die invoering in overweging nemen, zijn natuurlijk pres.-ex. beschikbaar; men gelieve deze aan te vragen aan

P. NOORDHOFF N.V. - Uitgevers GRONINGEN-BATAVIA

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH

DIRECTEUR VAN DE R.H.B.S. TE AMERSFOORT

- I. Twaalfde druk. 156 blz. 21 fig. f 2,25*.
- II. Elfde druk. 204 blz. 50 fig. f 2,25*.
- III. Zevende druk. 198 blz. 60 fig. geb. f 2,35*.

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Derde druk. 164 blz. 20 fig. f 2,10*.

Uit het prospectus:

Wezenlijke veranderingen in behandeling bracht de invoering van het nieuwe program niet mee, immers de Nieuwe School-algebra (en de Algebra voor H.H.S.) behandelde reeds in aard en uitgebreidheid of beperktheid, wat in het Koninklijk besluit is neergelegd.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

V α en VI α Nieuwe Schoolalgebra III α

V β en VI β Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Leraren, die deze werken niet kennen, kunnen pres. ex. bekomen op aanvraag aan den uitgever of aan de schrijvers.

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

Voor leraren, die deze boeken gebruiken, antwoorden gratis en franco; de uitgewerkte log. vraagstukken in vier en vijf dec. gratis alleen bij P. Wijdenes, Amsterdam Z.O.; deze uitwerkingen zijn niet in de handel.

Verantwoordelijk voor de gehele inhoud: P. Wijdenes te Amsterdam, Jacob Obrechtstraat 88.

Uitgever: P. Noordhoff N.V. te Groningen.

Drukker: Drukkerij Gebroeders Hoitsema N.V. te Groningen. K.1219.