

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - Dr. E. W. BETH, AMERSFOORT
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - Dr. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
Dr. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - Dr. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
Dr. J. HAANTJES, AMSTERDAM - Dr. C. DE JONG, LEIDEN
Dr. J. POPKEN, TER APEL - Ir. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
Dr. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - Dr. P. DE VAÈRE, BRUSSEL
Dr. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM.

18e JAARGANG 1942

Nr. 4

Prijs per Jaargang f 6.30*. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.
--

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen. Prijs per jaargang f 6,30*. Zij die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6,30*) zijn ingetekend, betalen f 5,25*.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en **Wimecos** (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 1,85* op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van **Wimecos** storten hun contributie van f 2,75 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 5,25* per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schoft, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Dr. E. W. BETH, Hoofdstukken uit de moderne formele logica	97
Officiële mededelingen van „Wimecos”	108
Verslag van de beantwoording der vragen over het eindexamen 1942 door J. VAN ANDEL, Inspecteur der Lycea	109
Dr. Ir. A. J. STARING, Doel en middelen bij het onderwijs in de Mechanica	115
Dr. H. H. BUZEMAN, Over de behandeling der kwadratische functie	125
Boekbesprekingen	127
Ingekomen boeken	128

formele logica geanalyseerde redeneervormen slechts een zeer klein gedeelte gemeengoed is.

Ik geef Dr. *Nieuwenhuis* gaarne toe, dat de verschillen in intellectuele prestaties niet alleen door verschil in (practische en theoretische) beheersing van de formele logica verklaard moeten worden; daar zijn nog andere factoren, waarover in § 14 nog iets zal worden gezegd. Evenmin als deze is echter de formele logica een onveranderlijk gegeven. Ook zij heeft gedurende de geschiedenis van de menselijke beschaving een voortdurende ontwikkeling doorgeemaakt. Over de ontwikkeling van de theoretische beheersing van de formele logica vindt de lezer in het volgende nog nadere gegevens.

II. DE LOGICA DER PROPOSITIES.

§ 3. *De propositie- of oordeelslogica.* Een oordeel kan een of meer oordelen als inhoud, d.w.z. als vervangbaar element, bevatten; b.v.

- 1) „Ik geloof, dat het regent” („het regent”).
- 2) „Het is niet waar, dat het sneeuwt” („het sneeuwt”).
- 3) „Ik trek mijn jas aan, omdat het koud weer is” („ik trek mijn jas aan”, „het is koud weer”).
- 4) „Als ik op zee ben, word ik zeeziek”.
- 5) „Je doet je plicht, of je krijgt geen beloning”.
- 6) „Hoewel het stormde, voeren de vissers uit”.
- 7) „Hij is een harde werker en hij heeft een helder hoofd”.

Deze z.g. *samengestelde oordelen*, blijken bij nadere beschouwingen onder te brengen in twee scherp onderscheiden groepen.

De oordelen van de eerste groep (hiertoe behoren 2), 4), 5), 7)) hebben de eigenschap, dat hun waarheid of onwaarheid (men zegt korter: hun *waarheidswaarde*) ondubbelzinnig wordt bepaald door de waarheidswaarde van de oordelen, die hun inhoud uitmaken.

Zo is 2) waar, wanneer „het sneeuwt” onwaar is, en onwaar, wanneer „het sneeuwt” waar is. Maar de waarheidswaarde van 1) is volkomen onafhankelijk van de waarheid of onwaarheid van „het regent”; het is mogelijk, dat het regent, terwijl ik het niet geloof, en dat het niet regent, terwijl ik het wel geloof. Tussen de oordelen: „het regent” en: „ik geloof, dat het regent”, bestaat dus géén logisch verband.

Zo is 7) alleen dan waar, wanneer „hij is een harde werker” en „hij heeft een helder hoofd” beide waar zijn. Maar het is mogelijk,

dat „ik trek mijn jas aan” en „het is koud weer” beide waar zijn, terwijl 3) onwaar is; b.v. als ik mijn jas uit ijdelheid aantrek.

Men spreekt ten aanzien van 2), 4), 5), 7) van extensionele, ten aanzien van 1), 3), 6) van intensionele samenstellingen.

Nu blijkt, dat voor de formele logica alleen de extensionele samenstellingen betekenis hebben, daar alleen deze aanleiding geven tot het formuleren van algemeen toepasbare redeneervormen. De voornaamste zijn de *negatie* (vb. 2)), de *disjunctie* (vb. 5)), de *conjunctie* of *copulatie* (vb. 7)) en de *implicatie* (vb. 4)), die we als volgt kunnen definiëren:

Definitie 1. Onder negatie van een oordeel verstaat men die samenstelling van dat oordeel, die waar is, wanneer het oordeel zelf onwaar, en onwaar, wanneer het oordeel zelf waar is.

Definitie 2. Onder disjunctie van twee oordelen verstaat men die samenstelling van die oordelen, die waar is, wanneer minstens één dier oordelen waar is, en onwaar, wanneer ze beide onwaar zijn.

Definitie 3. Onder conjunctie van twee oordelen verstaat men die samenstelling van die oordelen, die waar is, wanneer ze beide waar zijn, en die onwaar is, wanneer minstens één van beide onwaar is.

Definitie 4. Onder implicatie van een oordeel — het implicaat — door een ander — het implicans — verstaat men die samenstelling dier oordelen, die waar is, wanneer implicans en implicaat beide waar of beide onwaar zijn, en ook wanneer het implicans onwaar, het implicaat waar is, en die onwaar is, wanneer het implicans waar, het implicaat onwaar is.¹⁾

Wij willen nu een notatie invoeren voor de vorm van de besproken oordelen. Daartoe voeren we tekens in voor de negatie, de disjunctie, de conjunctie en de implicatie en wel opvolgend

$\sim, \vee, \&, \rightarrow$

De oordelen, die de *inhoud* van het negatief, disjunctief, conjunctief of implicatief oordeel uitmaken, maar waarvan bij overgang

¹⁾ Definitie 4 ontmoet wel eens kritiek. Inderdaad wordt de implicatie in de omgangstaal óók als intensionele verbinding gebruikt en in den zin van dat intensionele gebruik is een oordeel als: „als het niet regent, dan was Napoleon keizer der Fransen” te verwerpen. Wij hebben in de logica echter alleen iets aan extensionele samenstellingen en als extensionele samenstelling is het oordeel: „als het regent, blijf ik thuis” synoniem met: „het regent niet, of ik blijf thuis”. Hiervan uitgaande komt men tot definitie 4.

naar de oordeelsvorm moet worden geabstraheerd, blijven vertegenwoordigd door z.g. *propositionele variabelen*, die men aanduidt door letters $p, q, r, s, \dots$. De oordeelsvormen worden dus als volgt aangeduid:

$$\sim p, p \vee q, p \& q, p \rightarrow q.$$

In $p \rightarrow q$ vertegenwoordigt p het implicans, q het implicaat. Men leze de symbolen gemakshalve als volgt: „niet- p ”, „ p of q ”, „ p en q ”, „als p , dan q ”.

Men spreekt van *propositionele* of *oordeelsvariabelen*, omdat bij vervanging van deze variabelen door oordelen de oordeelsvorm weer inhoud krijgt en dus een oordeel oplevert.

Een samenstelling, die in de omgangstaal zelden of nooit voorkomt, is de *aequivalentie*. De definitie luidt:

Definitie 5. Onder aequivalentie van twee oordelen verstaat men die samenstelling van die oordelen, die waar is, als beide waar of beide onwaar zijn, onwaar, als één waar, één onwaar is.

De notatie van deze oordeelsvorm is:

$$p \equiv q.$$

Het kan voorkomen, dat een of meer van de oordelen, die de inhoud van een samengesteld oordeel vormen, zelf reeds samengesteld zijn:

„Als je je plicht niet doet, dan krijg je geen beloning en moet je extra werk doen”.

We hebben hier een implicatie, waarvan het implicaat een conjunctie is. Hoe zullen we de vorm van dit oordeel noteren? Laten we niet op het samengesteld karakter van het implicaat, dan zou de notatie zijn

$$p \rightarrow x.$$

Maar hierin vertegenwoordigt x een oordeel van de vorm

$$q \& r.$$

Men noteert daarom

$$p \rightarrow (q \& r).$$

De haakjes dienen om de besproken oordeelsvorm te onderscheiden van de oordeelsvorm

$$(p \rightarrow q) \& r.$$

Een oordeel van deze tweede vorm is:

„Als je je plicht niet doet, zal ik je straffen, en nu is mijn geduld uit”.

Onze notatie (in hoofdzaak afkomstig van *Peano, Russell, Hilbert*) staat toe ook zeer gecompliceerde oordeelsvormen duidelijk weer te geven.

Voorbeeld: $(\sim (p \vee q)) \rightarrow (r \& s)$. Dit symbool duidt aan een implicatie, welker implicans de negatie van een disjunctie, en welker implicaat een conjunctie is.

Ook deze gecompliceerde oordeelsvormen zijn extensioneel. Ter demonstratie „bereken” ik de waarde van het oordeel dat men verkrijgt door in $(\sim (p \vee q)) \rightarrow (r \& s)$ voor p een onwaar, voor q een onwaar, voor r een waar, voor s een onwaar oordeel te substitueren: p en q zijn onwaar, dus is $p \vee q$ volgens definitie 2 onwaar; volgens definitie 1 is dan $\sim (p \vee q)$ waar; volgens definitie 3 is verder $(r \& s)$ onwaar; we moeten dus de waarheidswaarde bepalen van een implicatie, waarvan het implicans waar, het implicaat onwaar is; die implicatie is onwaar volgens definitie 4.

Om het aantal haakjes althans enigszins te beperken, spreken we af, dat het teken $\sim$ steeds aanduidt de negatie van de *kortst mogelijke* uitdrukking. Schrijf ik:

$$\sim p \vee q,$$

dan is dus niet bedoeld $\sim (p \vee q)$, maar $(\sim p) \vee q$. Schrijf ik:

$$\sim (p \vee q) \rightarrow (q \vee p),$$

dan is niet bedoeld

$$\sim ((p \vee q) \rightarrow (q \vee p)),$$

maar

$$(\sim (p \vee q)) \rightarrow (q \vee p).$$

Het teken „ $\equiv$ ” duidt de aequivalentie aan van *zo lang mogelijke* uitdrukkingen; zo betekent

$$p \vee q \equiv r \& s$$

hetzelfde als

$$(p \vee q) \equiv (r \& s).$$

Voor de duidelijkheid schrijf ik wel eens meer haakjes dan eigenlijk nodig zijn.

§ 4. *Redeneervormen*. Ik onderstel, dat van twee oordelen $A \rightarrow B$ en A bekend is, dat ze beide waar zijn (men merke op, dat ik niet schrijf „ $p \rightarrow q$ en p ”; ik spreek hier niet over oordeelsvormen, maar over bepaalde oordelen). Volgens definitie 4 is $A \rightarrow B$ slechts in de volgende gevallen waar:

A waar, B waar
 A onwaar, B waar
 A onwaar, B onwaar.

Nu weten we verder, dat A waar is; dan blijft dus alleen de eerste mogelijkheid over en B moet waar zijn.

Uit de waarheid van $A \rightarrow B$ en van A vloeit de waarheid van B voort.

De inhoud van A en B doet blijkbaar niet ter zake; we hebben dus een *redeneervorm* ontdekt, die we als volgt kunnen noteren (boven de horizontale streep staan de praemissen, eronder de conclusie):

$$\frac{p \rightarrow q \quad p}{q} \quad (1)$$

(modus ponendo ponens — *Chrysippus*).

Ik bespreek nog een tweede voorbeeld: zij gegeven, dat $A \rightarrow B$ en $B \rightarrow C$ beide waar zijn; volgens definitie 4 bestaan dan de volgende mogelijkheden

a1 A waar, B waar	b1 B waar, C waar
a2 A onwaar, B waar	b2 B onwaar, C waar
a3 A onwaar, B onwaar	b3 B onwaar, C onwaar.

Van deze mogelijkheden kunnen slechts de volgende combinaties voorkomen

a1, b1 A waar, B waar, C waar
 a2, b1 A onwaar, B waar, C waar
 a3, b2 A onwaar, B onwaar, C waar
 a3, b3 A onwaar, B onwaar, C onwaar.

In al deze gevallen echter is $A \rightarrow C$ waar. *Uit de waarheid van $A \rightarrow B$ en van $B \rightarrow C$ vloeit de waarheid van $A \rightarrow C$ voort.*

We kunnen dus de volgende redeneervorm opstellen

$$\frac{p \rightarrow q \quad q \rightarrow r}{p \rightarrow r} \quad (\textit{Theophrastus})$$

In § 1 werd gezegd, dat de vorm van een redenering ten dele ook van de inhoud van de constituerende oordelen afhangt; dit wordt duidelijk aan de hand van 't laatste voorbeeld. Het is niet voldoende, dat de praemissen en de conclusie de vorm der implicatie bezitten,

bovendien moet het implicaat van één praemisse identiek zijn met het implicans van de andere, terwijl het implicans van de eerste en het implicaat van de tweede opvolgend identiek moeten zijn met implicans en implicaat van de conclusie.

Alvorens nu over te gaan tot de bespreking van andere redeneervormen, wil ik de *tautologieën* der propositie-logica bespreken.

§ 5. *De tautologieën der propositie-logica.* Er zijn oordeelsvormen, die bij elke substitutie voor de propositionele variabelen overgaan in een waar oordeel. Een eenvoudig voorbeeld is

$$p \vee (\sim p).$$

Substitueert men voor p een waar oordeel, dan gaat $\sim p$ over in een onwaar oordeel, zodat er een disjunctie van een waar en een onwaar oordeel ontstaat, die waar is. Evenzo als men voor p een onwaar oordeel substitueert.

Een ander voorbeeld is

$$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p).$$

Het is blijkbaar mogelijk, van elke oordeelsvorm, door achtereenvolgens de verschillende mogelijke combinaties van waarheidswaarden te substitueren, uit te maken, of het een tautologie is of niet.

Men kan het onderzoek vaak bekorten (dit geldt i.h.b. voor oordeelsvormen, die geheel of grotendeels uit implicaties zijn opgebouwd), door zich af te vragen, of er substituties zijn, waarvoor de oordeelsvorm in kwestie onwaar wordt. Ik beschouw als voorbeeld:

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow (q \rightarrow (p \rightarrow r)).$$

Zal deze oordeelsvorm bij substitutie een onwaar oordeel opleveren, dan moet volgens def. 4 van § 3 het implicans $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ wáár, het implicaat $(q \rightarrow (p \rightarrow r))$ onwaar zijn. Op dezelfde wijze moet, opdat $(q \rightarrow (p \rightarrow r))$ onwaar zal zijn, het implicans q waar, het implicaat $p \rightarrow r$ onwaar zijn; zal $p \rightarrow r$ onwaar zijn, dan moet p waar, r onwaar zijn.

Is p waar, q waar, r onwaar, dan is in de te onderzoeken oordeelsvorm het implicaat onwaar, anders niet. Maar in dit geval is $q \rightarrow r$ onwaar, en, daar p waar is, ook $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ onwaar. Ook in dit geval is dus, daar implicans en implicaat beide onwaar zijn, de implicatie in haar geheel waar. We kunnen nu concluderen, dat de beschouwde oordeelsvorm een tautologie is.

We zien, dat we ons in dit geval door het gebruiken van enig overleg tot de beschouwing van slechts één der acht mogelijke substituties kunnen beperken.

De lezer vindt in § 6 voorbeelden ter uitwerking.

§ 6. *Afleiding van redeneervormen.* De betekenis van de tautologieën is nu deze, dat ze ons toestaan, aan een stel praemissen nieuwe praemissen toe te voegen, waarvan we zeker weten, dat ze waar zijn, en die ons vaak toestaan, bepaalde conclusies te trekken.

Onderstel gegeven twee praemissen van de vorm $p \rightarrow q$ en $\sim q$. Ik weet, dat

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

een tautologie is (narekenen!) en kan dus een praemisse van die vorm toevoegen. Nu wordt de volgende herhaalde toepassing van de modus ponendo ponens mogelijk:

$$\begin{array}{r} (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p) \\ p \rightarrow q \\ \hline \sim q \rightarrow \sim p \\ \sim q \\ \hline \sim p. \end{array}$$

Uitgaande van praemissen van de vorm $p \rightarrow q$ en $\sim q$ komen we dus tot een conclusie van de vorm $\sim p$.

We hebben dus ontdekt de redeneervorm:

$$\begin{array}{r} p \rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array} \quad (2)$$

(„modus tollendo tollens” — *Chrysippus*).

Op volkomen analoge wijze leidt men uit de tautologie $\sim (p \& q) \rightarrow (p \rightarrow \sim q)$ af de redeneervorm:

$$\begin{array}{r} \sim (p \& q) \\ p \\ \hline \sim q \end{array} \quad (3)$$

(„modus ponendo tollens” — *Chrysippus*).

en uit de tautologie $(p \vee q) \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$ (narekenen!) de redeneervorm

$$\frac{\begin{array}{c} p \vee q \\ \sim q \\ \hline p \end{array}}{(4)}$$

(„modus disjunctivus” of „modus tollendo ponens” — *Chrysippus*) af.

Uit de tautologieën

$$\begin{aligned} (p \rightarrow q) &\rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)) \\ (p \rightarrow q) &\rightarrow ((\sim p \rightarrow r) \rightarrow (\sim q \rightarrow r)) \\ (p \rightarrow r) &\rightarrow ((q \rightarrow \sim r) \rightarrow (p \rightarrow \sim q)) \end{aligned}$$

vloeien de hypothetische syllogismen van *Theophrastus*:

$$\begin{array}{ccc} \frac{p \rightarrow q}{q \rightarrow r} & \frac{p \rightarrow q}{\sim p \rightarrow r} & \frac{p \rightarrow r}{q \rightarrow \sim r} \\ p \rightarrow r & \sim q \rightarrow r & p \rightarrow \sim r \end{array} \quad (5) \quad (6) \quad (7)$$

voort; de eerste werd reeds genoemd.

De lezer formule de redeneervormen, die voortvloeien uit onderstaande tautologieën

- 8) $(\sim p \rightarrow p) \rightarrow p$
- 9) $(p \rightarrow \sim p) \rightarrow \sim p$
- 10) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((\sim p \rightarrow q) \rightarrow q)$
- 11) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow \sim q) \rightarrow \sim p)$
- 12) $(p \vee q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow r))$
- 13) $((p \& q) \rightarrow r) \rightarrow (((p \& \sim q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$
- 14) $(p \rightarrow (p \rightarrow q)) \rightarrow (p \rightarrow q)$
- 15) $((p \& q) \rightarrow r) \rightarrow (\sim r \rightarrow (p \rightarrow \sim q))$.

De lezer controle de volgende, bij *Boethius* voorkomende, redeneervormen, waarvan enkele bij onze interpretatie van de logische constanten $\sim$, $\vee$, $\&$, $\rightarrow$ onjuist zijn; bij welke waarheidswaarden van de variabelen blijkt dit?

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \\ \hline q \rightarrow r \end{array}}{(16)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ p \rightarrow q \\ \hline r \end{array}}{(18)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s) \\ p \rightarrow q \\ \hline r \rightarrow s \end{array}}{(20)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ q \rightarrow \sim r \\ \hline \sim p \end{array}}{(17)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} (p \rightarrow q) \rightarrow r \\ \sim r \\ \hline p \rightarrow \sim q \end{array}}{(19)}$$

$$\frac{\begin{array}{c} (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow s) \\ r \rightarrow \sim s \\ \hline p \rightarrow \sim q \end{array}}{(21)}$$

$$\frac{(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r)}{p} \quad (22)$$

$$\frac{(p \rightarrow q) \& (\sim p \rightarrow r)}{\sim q} \quad (24)$$

$$\frac{(q \rightarrow p) \& (\sim p \rightarrow r)}{q} \quad (26)$$

$$\frac{p \vee q}{p} \quad (28)$$

$$\frac{p \vee q}{\sim q} \quad (31)$$

$$\frac{(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r)}{\sim r} \quad (23)$$

$$\frac{(p \rightarrow q) \& (\sim p \rightarrow r)}{\sim r} \quad (25)$$

$$\frac{(q \rightarrow p) \& (r \rightarrow \sim p)}{r} \quad (27)$$

$$\frac{p \vee q}{\sim p} \quad (29)$$

$$\frac{\sim p \vee \sim q}{p} \quad (32)$$

$$\frac{p \vee q}{q} \quad (30)$$

$$\frac{\sim p \vee \sim q}{q} \quad (33)$$

§ 7. Van de toepassing der besproken redeneervormen nog enkele voorbeelden.

I. De uit de tautologie 8) voortvloeiende redeneervorm

$$\frac{\sim p \rightarrow p}{p}$$

is door *Euclides* („Elementen”, IX 12) toegepast bij het bewijs van de stelling: zijn a en n natuurlijke getallen, dan is a deelbaar door elke priemfactor p van a^n . Immers, was a niet deelbaar door p , dan zou, daar $a^n = a^{n-1} \times a$ deelbaar is door p , a^{n-1} deelbaar zijn door p . Evenzo zou dan a^{n-2} , en ook a^{n-3} deelbaar zijn door p , enz. Dus zou a deelbaar zijn door p . Samenvattend: was a niet deelbaar door p , dan zou a deelbaar zijn door p . Dus moet a deelbaar zijn door p (*Vailati* heeft het eerst de logische vorm dezer redenering gekarakteriseerd). Deze redeneervorm paste ik zelf toe in het laatste voorbeeld van § 5.

II. De uit de tautologie 9) voortvloeiende redeneervorm

$$\frac{p \rightarrow \sim p}{\sim p}$$

is door *Democritus* en *Plato* tegen *Protagoras* toegepast (*Scholz*).

Democritus redeneerde: had *Protagoras* gelijk met de opvatting, dat elke voorstelling waar is, dan zou ook de voorstelling: niet elke voorstelling is waar, waar moeten zijn. Dus is het niet waar, dat elke voorstelling waar is. (*Diels*, „Die Fragmente der Vorsokratiker”, 55 A 114). *Plato* redeneert analoog; cf. „*Theaitetos*” 170 E.

III. De uit de tautologie 10) voortvloeiende redeneervorm:

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \sim p \rightarrow q \\ \hline q \end{array}$$

is toegepast door *Pascal*; de redenering van *Pascal* kan als volgt worden samengevat: bestaat God, dan is er alles vóór, Zijn bestaan aan te nemen; bestaat God niet, dan is er niets tegen, Zijn bestaan aan te nemen. In elk geval doet men dus het verstandigst, God's bestaan aan te nemen (*Scholz*). cf. „*Pensées*”, art. VII in de uitgave van 1670. Men denke verder aan de bekende anecdote betreffende het proces tussen *Protagoras* en *Euathlos*.

IV. De uit de tautologie 12) voortvloeiende redeneervorm

$$\begin{array}{c} p \vee q \\ p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \hline r \end{array}$$

komt te pas bij de beantwoording van het volgende raadsel: in een gesticht worden twee soorten geesteszieken verpleegd: de patiënten van de eerste soort kunnen niets anders dan de waarheid spreken; de patiënten van de tweede soort kunnen alleen onwaarheid spreken. Ter voorkoming van moeilijkheden laat men de patiënten van de eerste soort blauwe, die van de tweede soort rode petten dragen. Op zekere dag blijkt een patiënt zijn pet kwijt te zijn en men vraagt hem: welke kleur heeft je pet? Wat zal hij antwoorden?

Men denke verder aan bewijzen, waarbij verschillende mogelijkheden moeten worden onderscheiden, b.v. $a \leq b$, $\angle C \leq 90^\circ$.

IV. De tautologieën 8) en 10) vloeien voort uit 12), de tautologieën 9) en 11) uit de tautologie:

$$(\sim(p \& q)) \rightarrow ((r \rightarrow p) \rightarrow ((r \rightarrow q) \rightarrow \sim r)),$$

die een tegenhanger vormt van 12) en waarop de volgende redeneervorm berust

$$\begin{array}{c}
 \sim (p \& q) \\
 r \rightarrow p \\
 r \rightarrow q \\
 \hline
 \sim r
 \end{array}$$

Uit het bovenstaande moge gebleken zijn, dat het aankomt op de redeneervormen en dat de tautologieën slechts dienen om de redeneervormen af te leiden. Ik wijs hierop nog eens, omdat de meeste leerboeken de nadruk leggen op het afleiden van de tautologieën, ten nadele van de practisch belangrijker theorie der redeneervormen.

(Wordt vervolgd).

OFFICIEELE MEDEDEELINGEN VAN WIMECOS.
Kort Verslag van de Algemeene Vergadering van 29 December 1941.

Na de opening vestigt de Voorzitter er de aandacht van de aanwezigen op, dat deze vergadering alleen toegestaan is op voorwaarde, dat direct noch indirect politiek ter sprake wordt gebracht. Vervolgens worden de Notulen der vorige vergadering goedgekeurd.

Aan het Jaarverslag, dat hierna goedgekeurd wordt, zij ontleend, dat verschillende moeilijkheden bij het onderwijs in de Wiskunde zijn ontstaan door het feit, dat een nieuwe urentabel is ingevoerd, zonder dat tegelijkertijd een nieuw leerplan, dat hiermede rekening houdt, is gegeven, hetgeen men toch had mogen verwachten. Bovendien zijn door maatregelen van meer recente datum de moeilijkheden zeker niet verminderd. Vermoedelijk heeft echter deze vergadering dank zij de welwillende medewerking van den Heer van Andel, Inspecteur der Lycea, wel eenige opheldering gebracht.

Het Financieel Verslag, door den waarnemenden Penningmeester uitgebracht, wijst op een bevredigende toestand. In verband hiermede wordt de contributie voor het komende Vereenigingsjaar op f 1,—, inclusief het abonnement op Euclides, gesteld.

Als penningmeester wordt Dr. H. H. Buzeman te Amsterdam gekozen, terwijl de Secretaris bij acclamatie op voorstel van den Heer Kleefstra herkozen wordt.

De keuze van de plaats voor de volgende Algemeene Vergadering wordt aan het Bestuur overgelaten, waarbij de Voorzitter toezegt, indien mogelijk, met de in deze vergadering tot uiting gebrachte wensch, om in Utrecht te vergaderen, rekening te zullen houden.

De uit de Heeren Dr. Beeger en Dr. Post bestaande kascommissie controleert vervolgens de bescheiden van den waarn. Penningmeester, waarna deze gedechargeerd wordt.

De verslagen van de door den Heer Ir. Dr. A. J. Staring gehouden rede en van de door den Heer van Andel gegeven antwoorden op de door de leden ingezonden vragen betreffende de leerstof voor de H.B.S. en Middelbare Meisjesschool, alsmede die over de Eind-exameneischen vindt men elders in Euclides opgenomen.

Bij de rondvraag wordt de wensch uitgesproken, dat Euclides meer dan tot dusver onderwerpen van didactische aard zal opnemen.

De Secretaris,
J. J. TEKELBURG.

VERSLAG

van de beantwoording der vragen, die ingekomen zijn naar aanleiding van de wijzigingen bij het eindexamen in 1942 en de urentabel, door den Heer van Andel, Inspecteur der Lycea.

De eerste vraag is, of er bij de regeling voor het eindexamen in 1942 ook rekening gehouden kan worden met het feit, dat er verschillende scholen zijn, die door bijzondere omstandigheden allerlei moeilijkheden ondervonden hebben, zooals het deelen van een schoolgebouw met een andere school, waarvan uren van 40 en zelfs 35 minuten het gevolg zijn geweest. In dit verband deelt de Inspecteur mede, dat bij het ontwerpen van een *algemeene* regeling het niet mogelijk is met allerlei bijzondere omstandigheden rekening te houden. Wel kan men, indien *gegronde* aanleiding daarvoor bestaat, de gecommiteerden en deskundigen met deze moeilijkheden bekend maken, opdat deze er rekening mee kunnen houden.

De volgende vraag, die aan de orde komt, betreft de kwestie, of de kandidaten niet gedupeerd zijn, nu de Beschrijvende Meetkunde dit jaar niet geëxamineerd wordt. Volgens den steller van de vraag vindt men juist, dat een vrij groot aantal kandidaten dank zij de Beschrijvende Meetkunde hun cijfer op peil kunnen brengen. De Heer van Andel merkt op, dat men toch vooral niet uit het oog moet verliezen, dat er *lastige* Beschrijvende Meetkunde-vraagstukken en *gemakkelijke* Stereometrie-vraagstukken zijn. Naar hij verwacht, zal het Stereometriewerk niet te lastig zijn. Overigens wijst hij er op, dat er ieder jaar toch reeds genoeg vrijstellingen voor Stereometrie en Beschrijvende Meetkunde en voor de Wiskunde in het algemeen zijn.

Daarna bespreekt de Heer van Andel de vraag betreffende de Beschrijvende Meetkunde in de 4de klasse. Met nadruk wijst hij er op, dat het leerplan der 4de klasse niet is aangetast. De Wiskunde in deze klasse blijft, zooals ze is. Heeft men eventueel zelfs in de 5de klasse tijd over en goede leerlingen, om mee te werken, dan is er geen enkel bezwaar, om ook daar met de Beschrijvende Meetkunde door te gaan. Wat er in de krant dienaangaande heeft gestaan, blijft voor rekening van de krant!

Bij de Mechanica is de plaatsbepaling van het zwaartepunt en de

verticale cirkelbeweging vervallen. Al heeft men deze behandeld, dan heeft men bij de nieuwe regeling toch dit voordeel, dat men deze stof niet meer behoeft te repeteeren. Het komt den Inspecteur niet gewenscht voor, om de candidaten uit een stel opgaven te laten kiezen. Dit kon hun wel eens meer nadeel dan voordeel bezorgen, o.a. in verband met de tijd, die voor het werk beschikbaar is. De Heer van Andel vindt hierbij gelegenheid, op te merken, dat de kwestie van al of geen vrijstellingen bij het eindexamen z.i. zoo opgelost moet worden, dat *alle* candidaten mondeling examen doen. Is dit eenmaal zoo, dan behoeft men geen angst te hebben, als er één uur Mechanica in de 5de klasse komt, daar men dan immers bij het mondeling examen gelegenheid heeft, een foutief cijfer te corrigeeren. Hij herhaalt zijn toezegging, deze kwestie met het Bestuur van Wimecos te bespreken; mocht het mogelijk wezen, dan is hij zelfs bereid de zaak met de Vereeniging in haar geheel te behandelen. Met nadruk verklaart spr., dat op het oogenblik candidaten met te hooge cijfers voor de exacte vakken slagen, die toch naderhand ongeschikt voor de studie aan de Universiteit zijn.

Vervolgens komt de Heer van Andel aan de vraag betreffende het Wiskundeonderwijs op de Middelbare Meisjesschool. Na er op gewezen te hebben, dat er in 5 jaar voor deze vorm van M.O. 10 uur beschikbaar zijn, wijst hij'er op, dat hier bij de verschillende scholen een zekere divergentie bestaat ten aanzien van het Wiskundeonderwijs. Bij de neutrale scholen wordt in het algemeen meer waarde aan de Wiskunde gehecht dan bij de bijzondere (meest Katholieke) scholen, waar men meer tijd besteedt aan andere vakken, die voor deze scholen waarde hebben. Voor het leerplan zijn hier geen aanwijzingen gegeven. Men moet zich vooral er voor hoeden, op deze scholen een extract van de Wiskunde op de H.B.S. B te geven. Het doel van de Wiskunde op deze scholen moet zijn: geestelijke tucht en accuratesse. Aan de leerlingen moeten de beginselen en de denkwijze der Wiskunde bijgebracht worden. Men moet de Wiskunde op deze scholen als het ware zich zelf laten vormen. Als voorbeeld haalt spr. het feit aan, dat vele meisjes gaarne sommen over wortelvormen maken. Van de ware moeilijkheden bij dergelijke sommen optredend hebben ze echter niet de minste notie. Dergelijke dingen voorkomen men, hetgeen des te gemakkelijker is, daar de docenten hier zoo vrij zijn als een vogel in de lucht! Niemand vraagt naar een eindexamen.

De volgende vraag geldt de urenvermindering en de daarmee samenhangende leerstofbeperking. Men moet deze zaak niet overdrijven. Het totaal aantal uren voor de Wiskunde komt van 26 op 25. Spr. kan wel zeggen, dat er een herziening van het leerplan komt. Zijn collega dr. W. van den Ent is Voorzitter van een commissie, die voor het vak Nederlandsch in een dezer dagen te verschijnen rapport wijzigingen zal voorstellen. Ook bij de Mechanica zal er natuurlijk wat moeten gebeuren, nu daar het aantal uren met één verminderd wordt. Bij de Wiskunde heeft men op de H.B.S. een vermindering in de eerste klasse van 6 op 5 en bij de Lycea bovendien in de 2e klasse van 5 op 4. Ook hier zal men dus wat moeten beperken. Bij de evenredigheden volsta men met het minimum. Wat verder de onnauwkeurige getallen aangaat, moeten de leerlingen zien, dat er bepaalde benaderingen worden toegepast. Men houde hier echter geen overigens zeer interessante redeneeringen, terwijl men ook geen bijzondere vraagstukken moet laten maken. Spr. meent, dat men altijd goed zal doen, de streng mathematische behandelingsmethode te volgen. „Rechts en links wegschrappen!” is geen Wiskunde! Men moet de leerlingen zoo ver brengen, dat ze niet schrikken, als ze eens een vraagstuk krijgen van een type, dat ze nog niet gehad hebben!

Nu het onderwijs in de hoogste klassen van de H.B.S. A tot één uur is beperkt, wil spr. er op wijzen, dat men hier de Wiskunde moet geven in verband met de Handelswetenschappen, opdat dit vak er door gebaat zal zijn. Gewezen wordt op annuïteiten en rentabiliteitsberekeningen en andere toepassingen der Wiskunde bij Boekhouden en Handelsrekenen.

Wat de voorgeschiedenis van de urenwijziging aangaat, merkt spr. op, dat van den Secretaris-Generaal destijds het verzoek binnenkwam, iets tegen de overbelasting op de Middelbare School te doen, waarvan een enquête op de scholen het gevolg was. Daarna is overwogen, wat te doen stond met het oog op de brandstoffennoed, verlichtingsmoeilijkheden, beperking van de treinenloop, enz. Naderhand is daar het vervroegde eindexamen bijgekomen. Bij de H.B.S. A zijn er bijgekomen: 2 uren Nederlandsch, één uur Handelswetenschappen, één uur Handteekenen en één uur Geschiedenis; dit is geschied ten koste van één uur Engelsch, twee uren Fransch en twee uren Wiskunde. Bij de H.B.S. B is de toename voor Nederlandsch 5 uren, voor Duitsch 2 uren en voor Aardrijkskunde,

Geschiedenis en Handteekenen één uur. De vermindering van het aantal uren is bij Fransch twee uren, bij Wiskunde, Mechanica, Lijnteekenen, Scheikunde, Handelswetenschappen, Staatsinrichting, Staathuishoudkunde en Engelsch één uur. De Heer van Andel zegt, dat men de nieuwe urentabel moet aanvaarden als zijnde in het belang van de H.B.S. Los van de wijzigingen in de tabel staat de regeling, die nu is getroffen met het oog op het eindexamen in 1942. Hij wijst er op, dat de afgestudeerden van de Gymnasia, die in het geheel geen Beschrijvende Meetkunde hebben gehad, toch in het algemeen een behoorlijk figuur in Delft slaan. De bedoeling is, dat het onderwijs op peil blijft. Het diploma moet zijn waarde behouden. Spr. deelt mede, dat in 1940 en 1941 door candidaten, die onvoldoende waren, geprobeerd is, de tijdsomstandigheden als motief te gebruiken, om het diploma toch te verwerven. Dit mag natuurlijk niet gebeuren! Noch de leerlingen, noch de leeraren behoeven zich ongerust te maken over het eindexamen in 1942!

Bij de discussie verkrijgt allereerst de Heer Wansink het woord, die er op wijst, dat men zich op de feitelijke toestand moet baseeren. Hij heeft hierbij het oog op het laten vervallen van de Beschrijvende Meetkunde als eindexamenvak in 1942. Het is nu eenmaal een niet te loochenen feit, dat de candidaten voor de Stereometrie in het algemeen een lager cijfer halen dan voor de Beschrijvende Meetkunde. Wil men dus voor de candidaten de toestand gelijkwaardig maken aan die van vroeger, dan zal men het Stereometriewerk niet te lastig moeten maken. Vervolgens wijst hij nog eens op het bewuste krantenartikel, waarin stond, dat de richtlijnen voor het eindexamen van 1942 ook zouden gelden voor eventueele wijzigingen van het leerplan. Tenslotte wil hij in verband met het feit, dat de Heer Staring in zijn voordracht gesproken heeft over het weglaten van de Statica bij de Mechanica, meedeelen, dat dit in hem zeker geen voorstander heeft.

De Heer Pekelharing wil gaarne weten, of het niet gevraagd worden van de *afleiding* van de ligging der zwaartepunten de leerlingen nu ook ontslaat van de verplichting de formules voor de ligging van de zwaartepunten te kennen.

De Heer Bronkhorst vraagt, hoe het in het vervolg moet met de aan verschillende Lycea gebruikelijke klassencombinatie van de 4e klasse der H.B.S. B en de 5de klasse B van het Gymnasium voor de exacte vakken. Er is n.l. bij de nieuwe regeling een verschil in uren ontstaan.

De Heer Streefkerk wijst er op, dat hij bij de oude regeling reeds tijd tekort kwam, om het programma in zijn geheel af te werken, zoodat hij zich genoodzaakt zag, deelen over te slaan; hij vreest, dat dit in de toekomst nog erger zal worden.

De Heer Hartwijk zegt, dat op het schriftelijk eindexamen de functie

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

vervallen is. Geldt dit nu ook voor het mondeling examen? Hoe is het voor het geval, dat $p = 0$ is?

De Heer Koning informeert, of er dit jaar normvergaderingen gehouden zullen worden.

De Heer Bakker komt met een soortgelijke opmerking als de Heer Pekelharing. Voor het eindexamen van het Gymnasium A is de *afleiding* der formules voor de inhouden en oppervlakken van de boldeelen vervallen. Moeten nu ook de formules zelf niet meer gekend worden? Is het verder geoorloofd met toestemming van candidaten en gecommitteerden bij het eindexamen der candidaten van het Gymnasium A over onderwerpen te vragen, die geschrapt zijn?

In zijn antwoord aan den Heer Wansink zegt de Heer van Andel, dat het toch zonder twijfel als een verlichting beschouwd moet worden, als over bepaalde onderwerpen niet gevraagd wordt. Zonder eenige toezegging te kunnen doen, heeft spr. in zijn oor geknoopt, dat de Stereometrie niet te moeilijk moet wezen. Over de toekomst kan spr. zich niet uitspreken, daar deze niet in zijn hand ligt. Hij weet alleen, dat *op het oogenblik* hem niets van wijzigingen van het leerplan bekend is. Wat het leerplan der Mechanica betreft, iets zal er toch *moeten* veranderen in verband met de nieuwe urentabel.

De Heeren Pekelharing en Bakker krijgen op hun vragen ten antwoord, dat men zich toch niet zonder meer van de zwaartepunten der lichamen en van de inhouden resp. oppervlakten der boldeelen moet afmaken. Men late vooral geen rijtje formules van buiten leeren. De Heer van Andel vermoedt, dat, als dit jaar b.v. bij een of ander vraagstuk het zwaartepunt van een kegel benoodigd is, dit wel in het vraagstuk gegeven zal worden. Het is overigens geen overdaad, als een candidaat weet, dat de oppervlakte van een bol $4\pi r^2$ is. Men mag verder in onderling overleg over onderwerpen vragen, die niet op het eindexamenprogramma van 1942 voorkomen.

Aan den Heer Bronkhorst antwoordt spr., dat de door hem genoemde klassencombinatie ook nu mogelijk is; de uren van het

Gymnasium vervallen, die van de H.B.S. komen er voor in de plaats.

In antwoord op den Heer Streefkerk deelt hij mede, dat het huidige leerplan in overleg met Wimecos is opgesteld. In dit leerplan is niet alles eindexamenprogramma. Dit laatste dekt niet het leerplan. Van de aangegeven nieuwe onderwerpen heeft men op de a.s. eindexamens niets te vragen. Bij het Gymnasium, kon men in verband met het verplichte mondelinge eindexamen der candidaten ook dit jaar de eindexameneischen voor Wiskunde B vrijwel ongewijzigd handhaven.

Beide door den Heer Hartwijk genoemde functies zijn als eindexamenstof vervallen.

Wat de door den Heer Koning genoemde normvergaderingen aangaat, gelooft spr., dat ook dit jaar geen officieele bijeenkomsten zullen worden gehouden. Niets belet echter, dat de leeraren zelf bijeenkomsten houden, om tot overeenstemming betreffende de aan te leggen maatstaf te komen. Bindend zijn zulke normen natuurlijk niet, maar dat waren ze vroeger ook niet.

Vervolgens neemt de Voorzitter het woord. Hij brengt de volgende kwesties onder de aandacht der aanwezigen:

1^o. Een candidaat kan z.i. toch op dit moment de dupe worden van de afschaffing der Beschrijvende Meetkunde als eindexamenvak.

2^o. Hij heeft de indruk, dat het naar voren brengen van de afschaffing der Statica als leerstof door den Heer Staring in zijn voordracht over de Mechanica gevaarlijk was. Hij hoopt, dat de autoriteiten geen enkele conclusie hieraan zullen verbinden ten aanzien van het standpunt der Vereeniging in deze kwestie.

3^o. Wat de opmerkingen van den Heer Streefkerk aangaat, erkent hij, dat het nieuwe leerplan destijds in de Vereeniging is besproken, maar hij wil nog opmerken, dat er toen zeer zeker bezwaren tegen zijn ingebracht.

Vervolgens brengt de Voorzitter aan den Heer van Andel de dank van de Vereeniging over voor het antwoord van den Inspecteur op de verschillende vragen, die door de leden gesteld zijn.

Het Bestuur van Wimecos betuigt hem hier bovendien nog zijn erkentelijkheid, dit verslag, voor het ter perse ging, te hebben willen corrigeeren.

De Secretaris,

J. J. TEKELENBURG.

LANDMETEN

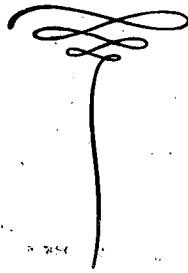
*Wenken en Oefeningen voor het
verrichten van eenvoudige
metingen*

DOOR

A. C. J. HOF

LANDMETER VAN HET KADASTER
TE AMSTERDAM

MET 65 WERKSTUKKEN EN 218 FIGUREN



f 3.75, gec. f 4.25**

P. NOORDHOFF N.V. — 1941 — GRONINGEN

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

EEN WOORD VOORAF.

De aanleiding tot het samenstellen van dit werkje was een verzoek, door het Bestuur der Vereniging van Technische Ambtenaren van het Kadaster aan mij gericht, om een schriftelijke cursus te geven voor de opleiding van de tekenaars van het kadaster tot het verrichten van eenvoudige metingen.

Daar ik reeds jaren achtereen te Amsterdam belast was met de opleiding van adspirant-landmeters, landmeters op arbeidsovereenkomst en tekenaars voor de velddienst en te dien einde reeds een verzameling van werkstukken op schrift had gezet, meende ik die taak wel op mij te kunnen nemen.

Na overleg in het Bestuur der Vereniging voor Kadaster en Landmeetkunde besloot ik aan het werk een enigszins bredere grondslag te geven, waardoor het, naar ik hoop, dienstig kan zijn als handleiding voor verschillende meettechnici en tevens als leidraad voor hen, die met de opleiding in het landmeten belast zijn. Dienovereenkomstig verschijnt dit werkje in boekvorm.

Uit de aard der zaak is aan de eisen, die het Kadaster stelt, veel aandacht geschonken.

Aanspraak op een volledige handleiding voor de lagere landmeetkunde maakt dit werkje geenszins, zoals ook al uit de titel is af te leiden. Het is slechts mijn bedoeling wenken te geven, die nuttig kunnen zijn bij het verrichten van eenvoudige metingen en daaraan werkstukken te verbinden met het doel het landmeetkundig inzicht te oefenen. Instrumenten worden niet behandeld; deze vindt men in de gewone studieboeken. Men kan dus ook niet volstaan met mijn verhandeling te volgen; het is zaak daarnevens een leerboek over de landmeetkunde te bestuderen.

Amsterdam, Maart 1941.

A. C. J. HOF.

Prof. J. M. Tienstra, Hoogleraar aan de Technische Hogeschool te Delft:

TER INTRODUCTIE.

Het is niet alleen een goed boek, dat de Heer Hof heeft geschreven, maar het is ook goed dat het is geschreven en daarom voldoe ik gaarne aan het verzoek van den schrijver om zijn werk met enkele woorden bij het landmetende publiek in te leiden.

Voor volleurde landmeters is het een genoegen dit boek door te lezen om zich te verlustigen in de verscheidenheid van de problemen, die de praktijk van het landmeten biedt. De minder volleurde zal er allicht iets in vinden, waardoor hij zijn vaardigheid tot groter raffinement kan opvoeren, terwijl voor den aankomenden vakman het boek een trouwe en ervaren raadgever is, waarop hij zich bij het overwinnen van moeilijkheden steeds kan verlaten. Tenslotte is het werk voor den leerling een uitstekend middel snel en volkomen afdoende op de hoogte te geraken met een massa dingen, die hij zich anders door vallen en opstaan in de praktijk moet trachten eigen te maken.

Omdat bij het landmeten de theorie en de praktijk beide zo'n belangrijke plaats innemen, is het bijna niet mogelijk een werkelijk deugdelijk boek over de gehele stof te schrijven, zonder tot een werk van ondragelijke afmetingen te geraken, waarvan het tot stand brengen het vermogen van één persoon stellig te boven zou gaan.

Het is daarom van belang, dat verschillende auteurs bijdragen tot de literatuur leveren, elk over dat onderdeel van de stof, waarin hij zich volkomen thuis gevoelt. Dan kan er iets goeds ontstaan, waar wij wat aan hebben.

Iets goeds is hier zeer zeker ontstaan. Het mogen eenvoudige zaken zijn, waarover hier geschreven is, in het dagelijks leven zijn zij belangrijk; wanneer zij bovendien, zoals hier, te boek gesteld zijn door iemand, die een grote liefde voor zijn vak heeft, wel, dan ontdekt men hoe ook deze dingen hun eigen, typische bekoring hebben.

Het onderbrengen van een deel van de stof in werkstukken, waarvan de behandeling uitvoerig besproken is, maakt dat het boek een uitstekend hulpmiddel bij het onderwijs is.

J. M. TIENSTRA.

INHOUD.

Hoofdstuk I. Elementaire werkzaamheden bij het meten.

§ 1. Het uitbakenen van rechte lijnen. § 2. Tussenin bakenen. § 3. Vooruit bakenen. § 4. Achteruit bakenen. § 5. De gegeven punten zijn niet uit elkaar zichtbaar. § 6. Een ontoegankelijk punt, dat niet uit het andere punt zichtbaar is. § 7. Twee ontoegankelijke punten. § 8. Het bepalen van het snijpunt van twee lijnen. § 9. Het geven van tekens bij het richten. § 10. Lengtemeting. § 11. Het nemen van loodlijnen. § 12. Bijzondere gevallen.

Hoofdstuk II. Het opmeten van eenvoudige terreinen.

§ 13. Eisen, waaraan een meting moet voldoen. § 14. Het inrichten van de meting voor de kaartering. § 15. Het inrichten van de meting voor de groottebepaling. § 16. Het inrichten van de meting voor de vastlegging der grenzen. § 17. Algemene regelen. § 18. Het veldwerk. § 19. Bijzondere gevallen.

Hoofdstuk III. Het uitzetten van eenvoudige terreinen.

§ 20. Opmerking. Werkstukken nos. 1—9.

Hoofdstuk IV. Het uitzetten van cirkelbogen.

§ 21. Het verbinden van twee lijnen door een cirkelboog. Werkstukken nos. 10—13. § 22. Het uitzetten van een cirkelboog van de koorde uit. Werkstuk no. 14. § 23. Het uitzetten van een cirkelboog van de raaklijn uit. Werkstuk no. 15. § 24. Het uitzetten van een cirkelboog met gelijke boogafstanden. § 25. Bogenboekjes. Werkstuk no. 16.

Hoofdstuk V. Ontoegankelijke punten.

§ 26. Het bepalen van de afstand tot een ontoegankelijk punt. § 27. Beide punten ontoegankelijk. Werkstukken nos. 17—19.

Hoofdstuk VI. Het uitzetten van percelen van een gegeven grootte. Het verdelen van een perceel in een bepaald aantal even grote delen.

§ 28. Algemene beschouwingen. § 29. Het verdelen van een driehoekig terrein. § 30. Het verdelen van een terrein van willekeurige vorm. Werkstukken nos. 20—28.

Hoofdstuk VII. Bijzondere verdelingen en uitzettingen. Grensverleggingen.

§ 31. De deellijn moet evenwijdig lopen aan een der grenzen van het perceel. Werkstukken nos. 29—35. § 32. Grensverleggingen. Werkstukken nos. 36—41.

Hoofdstuk VIII. Verschillende onderwerpen.

§ 33. Het uitzetten van hoeken met een theodoliet. Radialen. § 34. Het uitzetten van een lijn door een gegeven punt evenwijdig aan een gegeven lijn. § 35. Het uitbakenen van een rechte lijn met behulp van een theodoliet. § 36. Het meten en uitzetten van hoeken zonder hoekmeetinstrument. Werkstukken nos. 42—44. § 37. Het bepalen van loodlijnen door lengtemeting. § 38. Invloed van de temperatuur op de lengte van de meetband.

Hoofdstuk IX. Herhaling.

§ 39. Algemene beschouwingen. Werkstukken nos. 45—65.

Beter dan uit de titel blijkt uit de ondertitel van dit werk, dat de schrijver niet de bedoeling heeft gehad een *leerboek* over landmeetkunde te schrijven, doch wel een werk, dat als *aanvulling* op een leerboek moet worden gebruikt.

Het richt zich voornamelijk tot die technici, die met de theorie van de lagere landmeetkunde voldoende vertrouwd zijn, doch in de praktijk telkens zullen ondervinden, dat zij vreemd staan tegenover allerlei zaken, welke in een leerboek niet of zeer summier worden behandeld. Zij kunnen den schrijver dankbaar zijn, dat hij puttende uit zijn rijke ervaring als landmeter van het Kadaster, een handleiding heeft geschreven, welke hen niet alleen in het begin van hun optreden snel over allerlei moeilijkheden heen kan helpen, doch gedurende hun gehele praktijk een betrouwbare vraagbaak kan zijn.

Het behandelde wordt verduidelijkt door uitvoerige besprekingen van vier en veertig instructieve werkstukken.

Dit werk, dat in de landmeetkundige wereld goed ontvangen werd, verdient ook in de ingenieurskringen belangstelling. Wij kunnen het warm aanbevelen.

(De Ingenieur.)

R.

DOEL EN MIDDELEN BIJ HET ONDERWIJS IN DE MECHANICA

DOOR

A. J. STARING.

Ik heb met genoegen het verzoek van het Bestuur van onze Vereniging aangenomen om te spreken over het onderwijs in de Mechanica op de H.B.S. Het onderwerp gaat mij ter harte, zoals waarschijnlijk allen onder U, maar ik ben er mij van bewust, dat ik eigenlijk geen nieuwe gezichtspunten te berde kan brengen. Er zijn echter dingen, waarvan het goed is ze telkens weer voor ogen te stellen; al zijn er dan geen nieuwe gezichtspunten, er is grote kans op nieuwe gezichten in een vergadering als deze, en daarom lijkt mij het in bespreking brengen van oude waarheden, zelfs in deze veelbewogen tijd, niet overbodig. Trouwens, misschien aanvaardt niet ieder die als waarheden.

De mechanica is een eigenaardig vak op de burgerschool: niet bepaald nuttig op zichzelf, maar nuttig door de toepassing op problemen der natuurkunde en der cosmografie. Dit vak wordt onderwezen door docenten, die men ruwweg in twee groepen kan scheiden, en die ik nu maar kort de Mathematici en de Physici zal noemen, alsof er geen belangrijke tussengroep bestond met allerlei schakeringen tussen de beide uitersten.

De instelling tegenover het vak is voor deze groepen verschillend; doel en middelen zijn voor hen niet gelijk. Een dertiental jaren geleden heeft dit aanleiding gegeven tot soms vrij heftige disputen in de vakbladen, waarbij de zaak van alle kanten bekeken is. Het ging in die strijd niet altijd vriendelijk toe, en tot algehele overeenstemming is men niet gekomen. Toch stond van weerszijden de bedoeling voor, het onderwijs in de mechanica zo vruchtdragend mogelijk te doen zijn, maar wat hieronder verstaan moest worden, daarover is een verschil van mening gebleven. Om het scherp te belichten, kan men met enige overdrijving zeggen: de mathematici zien in de mechanica vooral datgene, wat sterk aan de wiskunde doet denken: definities, axioma's, en het daaruit door logische redenering maken van gevolgtrekkingen. Zij weten wel, dat de

mechanica een onmisbaar hulpmiddel is voor de physica en de astronomie, maar zij menen: dat is een zaak, die alleen de docenten in die vakken aangaat. Hoofdzaak is voor hen: de mathematische redenering. De physici daarentegen hebben de neiging de mechanica van de grond af te beschouwen als onderdeel van de physica; hoofdzaak is voor hen: het resultaat. Definities, axioma's (zij zullen liever zeggen: hypothesen) en bewijsvoering zijn bijzaak. Nog eens: ik overdrijf, maar toch zat en zit de kern van het conflict in deze tegenstelling.

Het doel van den eenzijdigen mathematicus is: de mechanica dienstbaar te maken aan de wiskundige ontwikkeling der leerlingen; dat van den eenzijdigen physicus: de resultaten der mechanica te gebruiken bij de verklaring der eigenschappen van de materie, waardoor verband gelegd kan worden tussen ogenschijnlijk zeer uiteenlopende verschijnselen.

Ik kan mij voorstellen, dat eigenlijk niemand zich door deze strenge scheiding bevredigd zal voelen, en inderdaad zullen wel de meesten van ons met het onderwijs in de mechanica nastreven, niet een compromis tussen die twee uitersten, maar een synthese van de eenzijdig mathematische en de eenzijdig fysische behandeling. De eerste definities en axioma's of hypothesen zullen moeten aansluiten op de min of meer dagelijkse ervaring, die een ieder, die zich rekenschap leert geven van hetgeen hij waarneemt, zich ten nutte kan maken. De bewegingen, die het onderwerp van bespreking zullen uitmaken, moeten zo mogelijk gedemonstreerd worden. Men moet de conclusies in aanschouwelijke vorm trachten te brengen, en ook weer, indien mogelijk, door zeer eenvoudige proeven toelichten of controleren. Maar zowel bij het opstellen van definities en hypothesen, als bij het verwerken daarvan tot bruikbare resultaten moet de wiskundige weg gevolgd worden, en moet men zich hoeden voor het geven en laten reproduceren van redeneringen, die men bv. in de meetkunde-les ontoelaatbaar zou achten.

Kan aan deze eisen in de praktijk voldaan worden? Het moeilijkste is dit voor de proeven, wanneer de lessen in de mechanica gegeven worden in een gewoon klasselokaal, en het is werkelijk een mathematicus niet kwalijk te nemen als hij, gewend aan het hanteren van passer en liniaal als enige instrumenten, afziet van proeven op het gebied der mechanica. De omstandigheden, waaronder hij werken moet, zullen slechts bij hoge uitzondering gunstig zijn voor het

vertonen of laten nemen van proeven. Heeft in dat opzicht zijn collega, de physicus, het beter, hem dreigt het gevaar dat hij, te midden van instrumenten, in een omgeving, die hem er als het ware toe aanzet om te handelen en te laten handelen, weinig behoefte gevoelt aan een juiste hantering van het subtiële instrument der wiskundige redenering. En vooral, als hij gewend is enkele beginselen der mechanica reeds te behandelen in de natuurkunde-les, en daarbij gebruik maakt van de theorie, zoals die nog in menig natuurkundeboek opgediend wordt.

En daarmee kom ik aan een onderwerp, waarbij het de moeite loont stil te staan. Ook dat is geen nieuw punt. Het is de grote verdienste van J. H. Schogt dat hij, in een artikel in het Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor de Wiskunde (het latere Euclides) in het jaar 1926 gewezen heeft op het grote aantal foutieve redeneringen, onjuistheden, zelfs grove onwaarheden, die gaandeweg in de leerboeken voor mechanica waren ingeslopen. Gedeeltelijk uit sleur overgenomen van den een door den ander, gedeeltelijk met de goede bedoeling een moeilijk onderwerp gemakkelijk te maken. Men gaf zich over aan de illusie, door een schijnmanoeuvre de moeilijkheid te kunnen verschalken. Dit is een principiële fout, die gewroken wordt op de onschuldige leerlingen; zij leren de beginselen van het vak niet scherp onderscheiden, en verwarren axioma's met bewezen eigenschappen en definities met axioma's.

Na dit geruchtmakend artikel gaf Schogt in zijn Leerboek aan op welke wijze hij meende de mechanica te kunnen behandelen zonder in de gewraakte fouten te vervallen. Dit boek, waarin naar de mening van vele docenten de grens der toelaatbare wiskundige strengheid op de H.B.S. overschreden is, heeft ongetwijfeld gunstig gewerkt op vele leraren, maar helaas niet op alle. Onder de sindsdien verschenen leerboeken voor mechanica op de H.B.S. vindt men er, waarin de gesignaleerde fouten vermeden zijn, maar ook zijn er schrijvers, die blijk geven zich van de geleverde kritiek niets te hebben aangetrokken; die, zelf indertijd de beginselen verkeerd geleerd hebbend, niet in staat zijn de fouten te zien. Dit is een merkwaardig verschijnsel, misschien in de hand gewerkt door het tweeslachtig karakter der mechanica, het physische en het mathematische, waardoor zij het geheel niet duidelijk overzien. Een excuus is dit niet, maar wel wijst het op de noodzakelijkheid, de beginselen goed te behandelen.

Het meest markant zijn daarbij de volgende verwarringen, door Schogt zo duidelijk aan de kaak gesteld:

1. het beschrijven van de beweging van een stoffelijk punt door middel van de beweging van de projecties op een stel assen, opvatten als een samenstellen van bewegingen; men is dan bang om het begrip: versnelling bij een kromlijnige beweging, in te voeren, hoewel dit b.v. bij de beweging langs een cirkel toch niet vermeden kan worden, en het projecteren van een beweging toch allicht ook bij de behandeling van de harmonische beweging gebruikt wordt.

2. de beweging onder invloed van twee of meer krachten vereenzelvigen met de beweging met betrekking tot verschillende stelsels, die ten opzichte van elkaar bewegen. Dit leidt tot een bedrieglijk bewijs van de eigenschap, bekend als: „het parallelogram van krachten”, afgeleid uit „het parallelogram van versnellingen”. Wie dit bewijs aanvaardt, geeft blijk van in een doolhof te zijn verdwaald; bij hem speelt Newton's vaste stelsel geen rol meer, en de poort tot allerlei ongerechtigheden bij de behandeling van mechanica-problemen staat open.

Helaas zijn deze fouten ook in de meeste natuurkunde-boeken gebleven, niettegenstaande de duidelijke woorden van b.v. E. Dijksterhuis bij verschillende gelegenheden in Euclides en het Weekblad. Men tracht moeilijkheden te omzeilen, die niet omzeild *mogen* worden. De begrippen snelheid en tangentiële versnelling hebben de leerlingen spoedig te pakken, maar totale versnelling en massa *zijn* moeilijk. Veel geduld, veel oefening, veel herhaling is nodig om de leerlingen daarmee enigszins vertrouwd te maken.

Een typisch voorbeeld van verdonkeremanen van de moeilijkheid van het massa-begrip vindt men in de uitspraak in een betrekkelijk nieuw natuurkunde-boek: „De massa van een lichaam is de hoeveelheid stof, die het lichaam bevat, en men verstaat onder dit laatste de hoeveelheden van de „bouwstenen der materie”, welke zich in dat lichaam bevinden”. (met deze bouwstenen zijn b.v. elektronen en protonen bedoeld, eventueel nog andere deeltjes). Afgezien van de onjuiste indruk, die men hieruit krijgt, dat de massa een onbenoemd getal zou zijn, is de moeilijkheid slechts verplaatst naar: massa van een deeltje; blijkbaar hoopt de schrijver dat de graad van moeilijkheid evenredig is met de grootte van het deeltje!

Het heeft geen zin om mechanica te onderwijzen, als men geen kans ziet de beginselen *goed* te leren. Niemand is gebaat bij het

verwerven van een vaag massa-begrip, en persoonlijk zie ik geen kans om b.v. in de derde klasse van een H.B.S. het gros der leerlingen iets, dat de moeite waard is, bij te brengen van kracht, massa en versnelling. Over mechanica op Ulo-scholen spreek ik hier niet; ik vrees alleen, dat men daarbij het slechte voorbeeld van de natuurkunde-boeken voor de H.B.S. volgt door dingen, die voor de meeste leerlingen te moeilijk zijn, foutief te behandelen.

Dergelijke behandelingswijzen maken huiverig om de consequentie te aanvaarden van de eis: de mechanica moet ingelijfd worden bij de natuurkunde. Neen, noch bij de natuurkunde, noch bij de wiskunde. Het blijve een afzonderlijk vak, dat afzonderlijke eisen stelt aan den docent; waarbij de natuurkundige grondslagen niet onherkenbaar weggemoffeld worden, en waarbij de wiskundige behandeling niet minder streng is dan in de meetkunde; daarbij het voordeel, dat oefening in de mechanica tevens oefening in de toepassing van de wiskunde is. De mechanica-leraar zij, wát ook zijn opleiding moge zijn geweest, *physicus en mathematicus*, met gelijke liefde voor beide takken van wetenschap.

Ik zou als doel van het onderwijs in de mechanica willen stellen: het doen verwerven van een zodanige kennis van grondbeginselen en behandelingsmethoden, dat inzicht verkregen wordt in de belangrijkste bewegingen, met inbegrip van de planetenbeweging; want zonder deze laatste is de leer der bewegingen en krachten een onvoltooid kunstwerk. Hierbij behoort ook iets over de theorie van de ligging en de beweging van het zwaartepunt van een vast lichaam en van een stelsel van lichamen. Overigens vormt de berekening van de ligging van het zwaartepunt van een lichaam van eenvoudige gedaante een geheel afzonderlijk hoofdstuk, evenals de *statica*, waarover ik aan het einde nog iets wil zeggen.

Het zij mij thans vergund over enkele punten, de methode van behandeling van bepaalde onderdelen betreffende, nog iets uit te weiden.

1. Het is gebruikelijk bij de kinematica allereerst te bespreken de rechtlijnige beweging. Waarom? Is inderdaad het begrip snelheid bij een kromlijnige beweging (en als algebraïsche grootheid beschouwd) moeilijker te vatten dan bij een rechtlijnige beweging? In een tijd, waarin ieder per fiets, auto of trein herhaaldelijk rechte en kromme banen met meer of minder grote snelheid beschrijft of ziet

beschrijven, mag deze vraag ontkennend beantwoord worden. Ook voor het begrip tangentiële versnelling maakt het geen verschil. En het is dan ook een feit, dat men in menig leerboek op sommige plaatsen ongemerkt overgaat van een rechtlijnige op een kromlijnige beweging. Zolang men nog niet spreekt over vectoren, is het onderscheid maken ongemotiveerd. Het is nuttig de verschillende leerboeken eens te toetsen op dit punt. Overbodigheid betekent hier hetzelfde als: onnodige complicatie.

2. In het algemeen is men niet precies genoeg met het gebruik van tekens. Bij het differentiëren behandelt men, of men wil of niet, de veranderlijken als algebraïsche grootheden (in casu s , v en a_{tan}). Doet men dit niet welbewust van het begin af, dan kan men opeens voor een minteken komen te staan, waarvan de leerling de betekenis dan maar raden moet. Gaat men b.v. bij de harmonische beweging langs een rechte lijn uit van

$$s = R \cdot \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right),$$

dan vindt men:

$$a_{tan} = - \frac{4\pi^2 R}{T^2} \cdot \sin \left(2\pi \frac{t}{T} \right).$$

Wat betekent het minteken? Ergens staat: „We lezen hieruit, dat de versnelling altijd het tegengestelde teken, dus de tegengestelde richting heeft van de uitwijking; de versnelling is naar het middelpunt van trilling gericht”. Maar pas verderop wordt voor het eerst van versnelling als vector gesproken, dus over richting van een versnelling!

Het is overbodig om aan vectoren, zoals totale versnelling en kracht, tekens toe te kennen. In een natuurkunde-boek staat, in verband met de wet van Coulomb: „een afstotende kracht wordt door een positief getal gegeven, een aantrekkende kracht door een negatief getal.” Dit kan tot grote verwarring aanleiding geven b.v. bij het bepalen van de veldsterkte in een punt van een veld, veroorzaakt door 4 magneetpolen! Bij het samenstellen van krachten langs één lijn werkend, kan men met voordeel een tekenafpraak maken. Overigens late men het achterwege.

3. Toen ik sprak over de min of meer dagelijkse ervaring, die men te hulp roept bij het opstellen van de eerste definities en hypothesen, bedoelde ik zeer zeker niet *elke* definitie te baseren op ervaring. Tracht men dit wel te doen, dan kunnen gemakkelijk mis-

verstanden ontstaan. Een voorbeeld, dat mij in het bijzonder bijgebleven is, omdat ik als leerling de opzet niet doorzag, betreft het invoeren van arbeid en arbeidsvermogen. De gebruikelijke manier (althans in de leerboeken, en ik vermoed: ook in menige les), is, dat men begint met het geven van de definitie van arbeid, verricht door een constante kracht, bij een rechte lijnige beweging. Men tracht dan dikwijls aannemelijk te maken waarom de arbeid in dat geval gedefinieerd moet worden als het product van de weg en de projectie van de kracht op de weg. Dit maakt de zaak m.i. niet duidelijker. Het begrip arbeid uit het dagelijks leven valt slechts in een enkel geval (nl. bij het optillen van een last) onder de definitie. Maar een veel ernstiger bezwaar tegen deze wijze van invoering van het begrip arbeid is, dat de schijn wordt gewekt, alsof daarbij in de mechanica een begrip wordt geïntroduceerd, afkomstig uit het dagelijks leven, waarmede de mechanica nu maar moet zien verder te komen. Dit lukt, wonder boven wonder, en het summum van merkwaardigheid kan men bereiken door vlak na „arbeid” te definiëren „arbeidsvermogen van beweging” (als $\frac{1}{2} mv^2$), want dan komt op het onverwachtst de „wet van levende kracht en arbeid” als een toevallige ontdekking te voorschijn. Men draait hierbij, natuurlijk zonder het te willen, den leerlingen een rad voor de ogen. Ik heb leerlingen gekend, die meenden dat de genoemde wet een natuurwet was; anderen dachten: een axioma, en tot maar weinigen, die het op deze manier geleerd hebben, is doorgedrongen dat die „wet” een vergelijking is, die door eliminatie van enkele grootheden volgt uit de kinematische bewegingsvergelijkingen en de vergelijking: $\text{kracht} = \text{massa} \times \text{versnelling}$. Ik herinner mij, als jongen, mijn verbazing over het feit, dat men tot dezelfde uitkomsten kon komen bij val- en worpbeweging op de oude manier (met vergelijkingen voor s en v) en op de nieuwe (met arbeid en arbeidsvermogen); ik zag geen verband tussen beide (hetgeen me niet verwondert als ik mijn oude leerboek nog eens inkijk), en ik durf zeggen dat onder de velen, die dergelijke vraagstukken op beide manieren goed oplossen, slechts weinigen dit verband zien. Er bleef geruime tijd voor mij een waas van geheimzinnigheid hangen om de toepassing van wat ik liever noem: de arbeidsvergelijking. En dit komt, omdat bij de gevolgde methode de zaak op de kop wordt gezet. Niet de definitie van arbeid en die van arbeidsvermogen zijn primair, maar de arbeidsvergelijking, afgeleid uit 3 of 4 vergelijkingen door elimi-

natie van versnelling en tijd. De definities behoren daar achter te komen. Natuurlijk is dit ook de historische weg, al mag dit geen argument zijn bij het zoeken naar de beste.

Wil dit nu zeggen, dat men in de natuurkunde niet over arbeid moet spreken, vóórdat het in de mechanica behandeld is? In zoverre niet, dat ik er geen bezwaar in zou zien bij de behandeling van hefboom, katrol en takel, zo dit nodig geacht werd, het woord arbeid (niet: arbeidsvermogen) te gebruiken. Maar daarbij komt het ook als het ware uit de resultaten te voorschijn. Het merkwaardige feit, dat bij het optillen van een last het product van de uitgeoefende kracht en de daarbij afgelegde weg steeds hetzelfde is, onverschillig welk hulpmiddel men voor het optillen gebruikt, rechtvaardigt het invoeren van een naam voor dat product. Overigens kan men in de natuurkunde tot aan de behandeling van de mechanische warmte-theorie het begrip arbeid missen; dat wil dus zeggen: tot aan de laatste maanden in de vierde klasse.

Men denke niet, dat door deze wijze van behandelen van het hoofdstuk „arbeid” in de mechanica-les aan de belangrijkheid van het onderwerp afbreuk wordt gedaan. In de mechanica is het werken met arbeid en arbeidsvermogen nu eenmaal niets anders dan het toepassen van een algemeen geldige vergelijking, met behulp waarvan bepaalde problemen snel en eenvoudig zijn op te lossen. Het universele belang van de begrippen arbeid en arbeidsvermogen kan pas blijken in de natuurkunde-les, en wel voor het eerst, als de mechanica wordt toegepast op gasmoleculen, dus bij de behandeling van de kinetische gastheorie, en wanneer het daarbij verkregen resultaat:

$$V \cdot p = \frac{1}{3} N m (v^2)_{gem}$$

wordt vergeleken met de uitkomsten van metingen bij gassen (wet van Boyle-Gay Lussac). Het is van belang hierbij op te merken, dat elke uitbreiding van het toepassingsgebied van de wet van het behoud van arbeidsvermogen in de natuurkunde gebaseerd is op proefondervindelijk gevonden wetten. In de mechanica daarentegen is daarvan bij de toepassingen natuurlijk geen kwestie.

4. Ik heb reeds even de wenselijkheid uitgesproken van het behandelen van de planetenbeweging. Bij een vroegere gelegenheid heb ik aangetoond, hoe dit zou kunnen geschieden; ik behoef daar niet op terug te komen, maar ik wil nog eens de nadruk leggen op het belang er van.

De vergelijking $K = m \cdot a$ geldt voor versnellingen ten opzichte van een vast stelsel van Newton. Dit stelsel is een zeer abstract iets, en het lijkt mij niet gewenst daar dadelijk mee aan te komen, zodra men het over kracht, massa en versnelling heeft, omdat de leerlingen, die nog geen cosmografie gehad hebben, onmogelijk de noodzakelijkheid van een dergelijke hypothese kunnen inzien. Aansluitend op de dagelijkse ervaring lijkt het gewenst, bij wijze van eerste benadering, de vergelijking $K = m \cdot a$ te laten gelden voor bewegingen ten opzichte van de aarde. Men kan dan weliswaar niet spreken van een kracht, die op de aarde werkt, en voor de aarde geldt ook niet de hypothese van actie en reactie; men kan zelfs niet spreken van massa van de aarde, maar deze, op het eerste gezicht zonderlinge, conclusies zullen een reden zijn, om later met meer vertrouwen een ander stelsel als vast aan te nemen.

Het gewicht, zoals zich dit uit bij lichamen in rust t.o.v. de aarde, is dan een kracht in de zin van $K = m \cdot a$; later blijkt dan, dat men het als een schijnkracht moet opvatten, d.w.z. het product van de massa en een versnelling die niet gerekend is t.o.v. Newton's vaste stelsel. Het woord schijnkracht zou ik trouwens liever niet willen gebruiken (en zeker niet in verband met centrifugaalkracht, een woord, dat men liever helemaal moet vermijden op de H.B.S.). Hoogstens zou ik, wanneer Newton's stelsel eenmaal is ingevoerd, willen spreken van schijnbaar gewicht en werkelijk gewicht. Dit laatste is de kracht, zoals die volgt uit Newton's aantrekkingswet.

Men kan, de aarde als vast stelsel beschouwend, met meer dan voldoende nauwkeurigheid de belangrijkste bewegingen behandelen, zonder dat de leerlingen de vaste grond onder de voeten verliezen. Zodra men echter verder kijkt dan de aarde, laat dit stelsel ons in de steek. Kepler's wetten voor de beweging van de planeten t.o.v. het stelsel der vaste sterren, en Newton's gevolgtrekkingen daaruit, geven de aanwijzing, dat het stelsel der vaste sterren buitengewoon belangrijk is voor de beschrijving der bewegingen. De toepassing van $K = m \cdot a$, met a gerekend t.o.v. dat stelsel, moet dan als een tweede benadering gezien worden, met veel uitgebreider toepassingsgebied dan het eerste. Maar het feit, dat de „vaste” sterren t.o.v. elkaar bewegen, wijst er op, dat men nog niet aan het einde is; de derde en laatste benadering is de hypothese, dat er een vast stelsel is, al kan men geen materiële punten aanwijzen, die er toe behoren.

Ik geloof, dat de moeite, besteed aan de mechanica der planeten

met de er uit voortvloeiende algemene aantrekkingswet, ruimschoots vergoed wordt door het inzicht, dat men er door bij de leerlingen kan aanbrengen. Deze behandeling maakt de besten toegankelijk voor verder doordringen in het „mysterie van de lege ruimte”. Mijns inziens sluit men de toegangspoort, indien men Newton's vaste stelsel al te spoedig invoert, zonder de planeten er bij te halen.

5. In het kort wil ik nog iets zeggen over leerlingenproeven bij de mechanica. Ik acht die proeven bij de natuurkunde in het algemeen zeer nuttig. In elke proef zit een algemeen instructief element (systematisch en nauwkeurig leren werken, het leren hanteren van bepaalde instrumenten, en ook dikwijls het begrip krijgen van functioneel verband tussen verschillende grootheden), en een meer speciaal element (het verkrijgen van kennis over het gedrag van bepaalde dingen in bepaalde omstandigheden; het leren kennen van de getallenwaarde van een of andere grootheid). Hieruit volgt, dat het niet nodig is voor *elk* verschijnsel een leerlingenproef in elkaar te zetten. Ik geloof niet, dat het onderwijs in de mechanica veel wint bij het laten uitvoeren van leerlingenproeven over bewegingen. De moeilijkheden van de begripsvorming (en dit zijn de essentiële moeilijkheden in de mechanica) worden er niet door op zij geschoven; eenvoudige, maar met zorg uitgevoerde klasse-proeven staan, wat dat betreft, niet achter bij leerlingenproeven. De meeste waarde hecht ik hierbij aan het demonstreren van de besproken bewegingen, en, voor zover mogelijk, aan het controleren van de meest markante eigenschappen.

6. Ten slotte wil ik nog een opmerking maken over de statica. Dit onderdeel hangt zo weinig met de bewegingsleer samen, dat men zonder bezwaar een scherpe scheiding kan maken. De eenvoudigste kwesties (hefboom, parallelogram van krachten) lenen zich ook reeds tot een proefondervindelijke behandeling in de natuurkunde-les in de tweede klasse. Moeilijke begrippen komen er niet in voor. In de natuurkunde komt de statica echter verder vrijwel niet te pas. In zoverre kan men, mochten de omstandigheden er toe leiden, de statica het beste missen uit de mechanica. En mijns inziens zal men in die richting de oplossing moeten zoeken van het probleem, hoe men de mechanica in 3 uren zal moeten onderwijzen, in plaats van in 4. Hetgeen niet wegneemt, dat ik deze verandering zeer zal betreuren.

OVER DE BEHANDELING DER KWADRATISCHE FUNCTIE

DOOR

H. H. BUZEMAN.

Het is mij opgevallen, dat de methode, volgens welke vele schoolboeken de extrema afleiden van de daar behandelde gebroken functies, bij de kwadratische functie geen toepassing vindt, hoewel zij naar mijn ervaring aan de leerlingen geen bijzondere moeilijkheden biedt, terwijl zij niet alleen het extremum van deze functie, maar ook de voornaamste andere eigenschappen op m.i. meer natuurlijke wijze uit het functie-begrip verkrijgt dan de gebruikelijke methode. Een korte schets van wat ik in de klas uitvoerig en steeds in nauw verband met de grafiek behandel moge hier volgen.

Ik vermoed, dat wij allen bij de behandeling van $y = ax^2 + bx + c$, waarin $a \neq 0$, nog weer eens stilstaan bij het begrip functie als een apparaat, dat getallen aan bepaalde bewerkingen onderwerpt en daaruit, in 't algemeen, andere getallen produceert. En dan komt al spoedig de vraag, welke getallen de functie kan verwerken. Het antwoord is niet moeilijk voor den dag te brengen: alle bewerkingen waarom het hier gaat, bezitten onbeperkte uitvoerbaarheid, zodat de verzameling x alle getallen omvat, terwijl uit elk getal x één getal y ontstaat. Het ligt dan voor de hand, dezelfde vraag te stellen voor de verzameling y , m.a.w.: welke getallen kan de functie leveren? Deze vraag leidt tot de beschouwing van de vergelijking

$$ax^2 + bx + c - y = 0 \quad (1)$$

De beperkte uitvoerbaarheid der worteltrekking laat een oplossing voor x alleen vinden, wanneer

$$b^2 - 4a(c - y) \geq 0 \quad (2)$$

Is hier aan voldaan, dan vinden we twee of één waarde(n) voor x bij een gegeven waarde van y . Uit (2) is nu af te leiden:

I. Is $a > 0 \rightarrow y \geq -\frac{D}{4a}$.

II. Is $a < 0 \rightarrow y \leq -\frac{D}{4a}$.

Ik behandel hier korthedshalve slechts het geval I. De volgende conclusies zijn dan te trekken:

1e. De verzameling y bevat een kleinste getal: $-\frac{D}{4a}$. Dit wordt geproduceerd, wanneer in (2) het gelijktteken geldt, dus wanneer (1) twee gelijke wortels heeft, waaruit volgt, dat dan $x = -\frac{b}{2a}$ is.

2e. Een bovenste grens voor y is er niet; alle getallen, die groter zijn dan $-\frac{D}{4a}$ kunnen worden geleverd.

3e. Is $D < 0$, dan is de functie definitief positief; is $D = 0$, dan bevat y alle niet-negatieve getallen; is $D > 0$, dan bevat y alle positieve getallen, het getal nul en alle negatieve getallen, die groter zijn dan of gelijk aan $-\frac{D}{4a}$. Dat deze laatste geproduceerd worden door die waarden van x , welke tussen de nulpunten liggen, vindt men, behalve uit de factoren-ontbinding van de kwadratische vorm, ook gemakkelijk uit de oplossing van de vergelijking (1): $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{D + 4ay}{2a}}$; de vorm onder het wortelteken is voor negatieve y nl. kleiner dan voor $y = 0$.

4e. Elk getal y wordt, naar uit (1) blijkt, door twee waarden van x geproduceerd. De som van deze twee is $-\frac{b}{a}$, dus constant. Hieruit volgt onmiddellijk het bestaan van een symmetrie-as van de parabool.

De voornaamste eigenschappen zijn hiermee verkregen.

Ook bij de gebroken functies vormen de beide fundamentele vragen:

a. Welke getallen omvat de verzameling x ?

b. " " " " " " " y ?

een geschikte inleiding voor het verkrijgen van de voornaamste eigenschappen. Dan blijkt ook, dat nu eens weer de deling, dan weer de worteltrekking de getallen-verzamelingen x en y beperken en dat de beperkte uitvoerbaarheid van die bewerkingen de oorzaak zijn van het voorkomen respectievelijk van singulariteiten en extrema.

BOEKBESPREKING.

W. van der Wielen. „*De Ideegetallen van Plato*”,
Acad. Proefschr. Amsterdam. Amsterdam 1941.

Plato's geschriften zijn ons voor een zeer groot deel in de oorspronkelijke vorm overgeleverd en aan hun uitleg is gedurende tweeduizend jaren onnoemelijk veel scherpzinnigheid besteed. Niettemin bestaan er ten aanzien van inhoud en uitleg van Plato's leer nog altijd onopgeloste problemen en aan een der meest fascinerende daarvan heeft Dr. Van der Wielen zijn schitterend proefschrift gewijd.

Fascinerend zijn de problemen betreffende de leer der zg. ideegetallen in de eerste plaats, omdat van deze leer in Plato's dialogen ternauwernood een spoor is aan te treffen; in de tweede plaats, omdat Aristoteles' kritiek op de ideeënleer van Plato voornamelijk op de theorie van de ideegetallen is gericht. Men krijgt dan ook uit de kritiek van Aristoteles een geheel ander beeld van Plato's opvattingen dan uit diens eigen dialogen. Wil men echter de kritiek van Aristoteles beoordelen, dan zal men zich eerst een denkbeeld moeten vormen van Plato's leer van de ideegetallen; daarbij komen dan in de eerste plaats de volgende problemen aan de orde: 1. Zijn de ideegetallen al dan niet onderscheiden van de getallen, waarmee de Griekse wiskunde ten tijde van Plato en Aristoteles zich bezig pleegt te houden? 2. Welke relatie bestaat er tussen ideeën en getallen? Schr.'s antwoord op deze beide vragen kan als volgt worden samengevat: 1. De ideeën zijn getallen. 2. Deze getallen — aangeduid als ideegetallen — staan tot de aantallen waarneembare dingen in de relatie van idee tot ding; de mathematische getallen (dat zijn voor de wiskundigen uit de tijd van Plato en Aristoteles de natuurlijke getallen groter dan een) staan tussen de ideegetallen en de aantallen waarneembare dingen in: ze onderscheiden zich van de eerste, doordat ze in een oneindig groot aantal exemplaren voorkomen, van de tweede, doordat ze eeuwig en onbeweeglijk zijn. De ideegetallen ontleen aan hun ideekarakter namelijk de volgende eigenschappen: *a.* Ze bestaan niet uit eenheden. *b.* Ze zijn geen grootheden, d.w.z., tussen ideegetallen zijn er geen grootte-relaties (dit lijkt rec. slechts houdbaar, in zoverre men aan grootte-relaties in de zin van de theorie van de cardinaalgetallen denkt). *c.* Van ieder bestaat er slechts één exemplaar. *d.* Ieder heeft in de rij der ideegetallen zijn vaste, onveranderlijke plaats.

Schr. laat verder zien, hoe men zich volgens Plato terwille van het onderricht — in werkelijkheid zijn de ideegetallen eeuwig — een voortbrenging van de ideegetallen uit een stoffelijk beginsel — het grote en kleine — en een vormend beginsel — de één — kan denken.

Tot zover de grondstellingen van de leer der ideegetallen. Een uitwerking en toepassing van deze grondstellingen, die op hetzelfde hoge peil zou staan, heeft noch Plato, noch een zijner volgelingen ooit gegeven.

Het komt me voor, dat Dr. Van der Wielen er in geslaagd is, de gegrondheid van zijn reconstructie en uitleg van de leer der ideegetallen overtuigend aan te tonen; van grote waarde is in dit verband

ook de bespreking, die hij wijdt aan andere moderne pogingen in deze richting; in het bijzonder heeft men zich bezig gehouden met een vraag, die hij opzettelijk buiten beschouwing heeft gelaten, de vraag nl., waarom Plato de ideeën met getallen in verband bracht. Ik hoop, dat Dr. Van der Wielen gelegenheid zal vinden, ook deze vraag tot oplossing te brengen; ik moge hem in dit verband opmerkzaam maken op Frege's „Grundlagen der Arithmetik", i.h.b. Ss. 24—58.

Evert W. Beth.

Dr. Fred. Schuh, *Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening*. I. Voorbereiding. Zutphen, W. J. Thieme en Cie, 1941. 308 blz. Geb. f 11,75.

Het boek, dat hierbij wordt aangekondigd, is het eerste deel van een werk van Prof. Schuh over differentiaal- en integraalrekening, waarin de schrijver zich ten doel stelt, de stof zoo eenvoudig mogelijk te behandelen, voor zoover dit in overeenstemming te brengen is met de eischen van strengheid, die tegenwoordig in de wiskunde worden gesteld. De onderwerpen, die bij de behandeling der differentiaal- en integraalrekening aan andere deelen der wiskunde worden ontleend, heeft de schrijver in dit eerste deel verzameld en gerangschikt, opdat van alles, wat in het geheele werk behandeld wordt, de verklaring ook in het boek zelve zal kunnen worden gevonden.

Grondslag vormt het natuurlijke getal, waarvan geen theorie wordt gegeven, terwijl wel de deelbaarheidseigenschappen worden besproken. De uitbreiding van het getalbegrip tot en met de complexe getallen wordt uitvoerig behandeld; vervolgens wordt iets medegedeeld over veeltermen en hogere-machtsvergelijkingen; daarna komen achtereenvolgens ter sprake limietwaarden van functies en continuïteit, stellingen over functies in het algemeen en over machten en logaritmen in het bijzonder, eindelijk de oneindig voortlopende reeksen, met als toepassing de invoering der goniometrische functies door middel van reeksen. Ten slotte iets over determinanten en lineaire vergelijkingen.

De werkwijze van Prof. Schuh is te zeer bekend, dan dat het nog noodig zou zijn, in eene bespreking als deze uit te weiden over duidelijkheid, nauwkeurigheid, enz. Alleen op het volgende wil ik wijzen: een groot gedeelte van wat in dit werk is samengebracht behoort tot de leerstof der scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs; en daardoor is dit boek zeer geschikt om den leeraar als wetenschappelijke basis voor zijn onderwijs te dienen. J. H. S.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. Noordhoff—Groningen:

P. WIJDENES, *Algebra voor Middelbare Handelsscholen II* 6de druk gecartonneerd f 1,85*.

P. WIJDENES, *Algebra voor M.U.L.O. I* 32ste druk geb. f 1,45*.

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES, *Stereometrie voor middelbaar en voorbereidend onderwijs* 6de druk f 1,90*, geb. f 2,25*.

NOORDHOFF'S *Tafel in vier decimalen* 6de druk in twee kleuren, in slap linnen f 1,05*.

J. VERSLUYS, *Gewone en goniometrische logaritmen (5 dec.)* *Tafel D* f 1,30*.

NATUURKUNDIGE BIBLIOTHEEK

Prof. Dr. M. DE HAAS

Thermodynamika

2e druk f 12,35*, gebonden f 13,10*

Prof. W. H. JULIUS

Leerboek der Zonnephysica

f 10,25*, gebonden f 11,00*

Prof. Dr. A. D. FOKKER

De Relativiteitstheorie

f 8,65*, gebonden f 9,45*

Prof. Dr. C. ZWIKKER

Leerboek der optiek

f 15,50*, gebonden f 16,80*

HISTORISCHE BIBLIOTHEEK

VOOR DE EXACTE VAKKEN

deel I. Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, *De elementen van Euclides*. Eerste deel: de ontwikkeling der Griekse wiskunde vóór Euclides. Boek I der Elementen. Met 44 fig., gebonden f 4,70*

deel III. Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, *De elementen van Euclides*. Tweede deel — de boeken II—XIII der Elementen. Met naamregister en 107 fig., geb. f 6,05*

deel II. Dr. H. J. E. BETH, *Inleiding tot de Niet-Euclidische meetkunde op historische grondslag*. Met 77 fig., gebonden f 4,70*

deel IV en V. Dr. H. J. E. BETH, *Newton's „Principia”*, twee delen, gebonden à f 4,45*

deel VI. Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, *Archimedes*. Eerste deel, gebonden f 4,70*

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. — Groningen-Batavia.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Onveranderde herdrukken van NIEUWE SCHOOLALGEBRA



I — 12de druk II — 11de druk III — 7de druk

Prijs per deel f 2,25*

H. B. S. 5 j. c. Klassen 1, 2, 3 deel I, II
Klassen 4B, 5B, deel III

voor de klassen 4A en 5A Wijdenes en Van de Vliet, Algebra voor H.B.S. A

GYMNASIUM EN LYCEUM Klassen 1, 2, 3, 4. deel I en II
Klassen 5 β en 6 β deel III

Klassen 5 α en 6 α deel III α (f 1.05*)

Voor gebruikers antwoorden gratis en franco, benevens de uitwerkingen van de log. vraagstukken in 4 en 5 decimalen.

Wie een vraagstukkenboek met korte theorie verkiest boven een leerboek, neme inplaats van N. S. A., P. WIJDENES, Algebraïsche vraagstukken I, II, III

Uit het voorbericht van de 10e druk van WIJDENES en DE LANGE Vlakke Meetkunde II.

„Het hoofdstuk over oppervlakten is overgebracht naar het eerste deel (reeds in de 9e druk). Deze stof, waarvan het grootste deel al van de lagere school bekend is, is veel eenvoudiger dan die over vermenigvuldiging, over evenredigheden van lijnstukken en dan het hoofdstuk over berekening van allerlei lijnstukken (toepassing van algebra op figuren). Bovendien kan de voorafgaande behandeling van de oppervlakten steun geven bij verschillende bewijzen.

Een eerste eis is een behoorlijke opklimming in moeilijkheid en men voldoet aan die eis, als men de oppervlakte laat voorafgaan.”

Dat Wijdenes' inzicht in dezen door velen wordt gedeeld en steeds meer door-dringt, bewijst het toenemende gebruik van:

WIJDENES en DE LANGE Vlakke Meetkunde I 12e druk II 10e druk

WIJDENES Beknopte Meetkunde I 9e druk II 7e druk

„ Meetkunde voor M.U.L.O. I 15e druk II 8e druk

„ Planimetrie I en II 3e druk

„ en RITCHI Vlakke Meetkunde voor Indische scholen I
5e druk II 3e druk

„ Meetkundige Vraagstukken I en II

MOLENBROEK Leerboek der Vlakke Meetkunde 8e druk, dat behalve als studieboek mede bedoeld is als handleiding voor de leraren bij het middelbaar en gymasiaal onderwijs.

P. NOORDHOFF N.V. TE GRONINGEN EN BATAVIA.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.