

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - DR. E. W. BETH, AMERSFOORT

DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN

DR. H. A. GRIBNAU, ROERMOND. - DR. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM

DR. J. HAANTJES, AMSTERDAM - DR. C. DE JONG, LEIDEN

DR. J. POPKEN, TER APEL - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM

DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. DE VAERE, BRUSSEL

DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM.

17e JAARGANG 1940

Nr. 3

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift v. Wiskunde f 5.—.
--

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang f 6,—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6,—) zijn ingetekend, betalen f 5,—.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en **Wimecos** (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 1,75 op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van **Wimecos** storten hun contributie van f 2,75 (waarin de abonnementskosten op **Euclides** begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 5,— per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Dr. H. C. SCHAMHARDT, Mondelinge Staatsexamens A 1940	113
Rapport inzake de overgang van officier naar leraar	119
Boekbesprekingen	133
Korrels LII, LIII.	137
Dr. E. W. BETH, Wijsbegeerte der Wiskunde	141
Prof. Dr. J. F. KOKSMA, Stellingen en vermoedens uit de meetkunde der getallen	159

(Voordracht gehouden op het 5de Ned. Congres van Leeraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen).

Vergelijk evenzo de grafieken van

$$y = 2x - 1 \text{ en } y = 2x - 1 + x^2.$$

63. Gegeven de vergelijking $ax^2 - (2a - 1)x - (a - 1) = 0$.

Voor welke waarden van a is $\frac{1}{x_1 - a} + \frac{1}{x_2 - a}$ positief?
 x_1 en x_2 zijn de wortels van de vergelijking.

64. De functies $y = 3x^2 - 2ax + 3a$

$$\text{en } y = 2x^2 + (a - 2)x + \frac{1}{2}a^2 - 10$$

hebben een even groot minimum. Bepaal a .

65. Gegeven is, dat a , b en c rationaal zijn, terwijl $a + b + c = 0$ is. Bewijs, dat de vergelijkingen $Ax^2 + Bx + C = 0$, waarin A , B en C elk één der waarden a , b en c heeft, rationale wortels hebben.

66. Stel in één figuur grafisch voor: $y = (x - 2)(x - 4)$ en $y = \frac{1}{(x - 2)(x - 4)}$. Bepaal de uiterste waarden van beide functies en de coördinaten van de snijpunten der krommen.

67. Maak een grafiek van $y = 2^x$. Oneigenlijke machten!

68. Voor welke punten (x, y) in het platte vlak is

$$z^2 - (5x - 7y - 4)z - (5x - 7y - 4) > 0,$$

als z reëel is.

Door welke roosterpunten gaat de rechte $5x - 7y = 4$?

Bewijs, dat de rechte $5x - 10y = 4$ door geen der roosterpunten gaat.

69. De vergelijking $x^3 - (a + b)x + b = 0$ heeft een wortel 2, terwijl de som van de derdemachten der twee andere wortels — 26 bedraagt. Bepaal a en b en los de vergelijking op.

70. Voor welke waarden van x is de functie

$$\sqrt{4 - \sqrt{-9x^2 + 36x - 11}} \text{ reëel?}$$

71. Bepaal m zodanig, dat de breuk $\frac{x^2 + (m - 3)x - 20}{x^3 - mx^2 - x + m}$ vereenvoudigd kan worden.

72. Schets de grafiek van

$$y = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 6x + 8}.$$

73. Bepaal liefst uit het hoofd, de wortels van de volgende vergelijkingen:

$$17x^2 + 13x = 30;$$

$$x(x+1) = 90;$$

$$x + \frac{1}{x} = 4\frac{1}{4};$$

$$x^2 + x - 2 - \sqrt{2} = 0;$$

$$x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3} = 0;$$

$$x^2 + x = \frac{3}{4};$$

$$3x^2 - 10x + 3 = 0;$$

$$x^2 + x = 6.$$

74. Stel een kwadratische functie op, waarvan het maximum 6 bedraagt en waarvan de grafiek de Y-as bij $y = -3$ snijdt.

75. Bepaal $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x-1) - \sqrt{x^2 - 2x + 7}]$.

76. De functie $y = ax^2 + bx - 42$ bereikt zijn maximum voor $x = -3$ en dit maximum is gelijk aan $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + x^2 - 7x + 2}{x^2 - x - 2}$.

Bepaal a en b en maak een grafiek van de functie.

77. Voor welke waarden van m kan

$$(m-2)x^2 - 2(m-1)x + 3m - 5$$

niet nul worden voor reële waarden van x ?

78. Ontbind in factoren door er een verschil van twee kwadraten van te maken:

$$a^4 + 4b^4;$$

$$x^2 + 2x - 2.$$

79. Los x op uit: $x^4 - 2\frac{1}{2}x^3 + 2\frac{1}{2}x - 1 = 0$.

80. Bepaal $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[5]{x} - 1}{\sqrt[9]{x} - 1}$.

81. Bewijs, dat $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ deelbaar is door $a + b + c$ en bepaal het quotient zonder de deling uit te voeren.

82. Wanneer heeft de grafiek van $y = \frac{x^2 - ax + b}{x - c}$ een verticale asymptoot en wanneer niet? Als deze aanwezig is, wanneer zal dan de grafiek de X-as niet snijden? Hoe verandert y dan van teken? Bevestig algebraïsch, dat de kromme dan een maximum en een minimum bezit.

83. Schat de wortels van $ax^2 - 2x + 3 = 0$, als $a = 0,000001$ is. Wat gebeurt er met de wortels van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ als men opv. c , b of a tot nul laat naderen? Toon aan, dat één wortel oneindig groot wordt, als a tot nul

nadert, door de vergelijking te vervangen door een, waarvan de wortels het omgekeerde zijn van die van de eerste vergelijking.

84. Een gehele rationale algebraïsche functie van x geeft bij deling door $x - 1$, $x - 2$ en $x - 3$ opv. tot rest 1, 2 en 3. Bepaal de rest bij de deling door $(x - 1)(x - 2)$ en door $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$. Wat betekenen de woorden „geheel”, „rationeel” en „algebraïsch” precies?

85. Los x op uit: $\sqrt[3]{x} = 6 + \sqrt[3]{x}$.

Geldt steeds: $\sqrt{(x-2)^2} = (\sqrt{x-2})^2$?

86. Bepaal m zo, dat de rechte $y = mx$ raakt aan de parabool $y = x^2 - 3x + 4$.

87. De grafiek van de functie

$$y = \frac{ax^2 + (b-1)x - 6}{x^2 + (a+3)x - (2b+1)}$$

snijdt de X-as in A (+2,0) en heeft voor $x = -5$ een verticale asymptoot. Bepaal a en b en schets de grafiek.

88. Gegeven: $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$.

Bereken de uiterste waarden van x en van y .

89. Is $\frac{a^{3^n} - b^{3^n}}{a^{3^{n-1}} - b^{3^{n-1}}}$ een merkwaardig quotient? Geef de 9de term van het quotient aan.

90. Bewijs, dat alle parabolen van het stelsel

$$y = (a+1)x^2 - (a-1)x - (2a+3)$$

door één punt gaan.

Aan welke lijn raken ze in dit punt?

91. De wortels van de vergelijking $x^2 - 2(p+1)x - 67\frac{1}{2}p = 0$ zijn s maal zo groot als die van $x^2 - px - 7\frac{1}{2}p = 0$. Bepaal s en p .

92. Los x op uit:

$$(17x^2 + 83x - 100) \{ (x-3)^{\frac{1}{2}} + (x+2)^{\frac{1}{2}} \} = (17x^2 + 83x - 100) (3x+4)^{\frac{1}{2}}.$$

93. Onderzoek de grafiek van de functie $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4}$.

94. Als voor alle waarden van x geldt:

$$(p+1)x^2 - 2(p-1)x + 3p - 3 < 0,$$

welke waarden moet p dan hebben?

95. Wanneer zijn $\sqrt{3x^2 + 5x - 8}$ en $\sqrt{3x^2 + 2x - 5}$ reëel?

Waartoe nadert $\frac{\sqrt{3x^2 + 5x - 8}}{\sqrt{3x^2 + 2x - 5}}$, als x tot 1 nadert?

Waartoe nadert $\sqrt{3x^2 + 5x - 8} - \sqrt{3x^2 + 2x - 5}$, als x tot ∞ nadert?

96. Voor welke reële waarden van x is

$$\left| \frac{x+2}{x-1} \right| > 1000?$$

97. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} \frac{(5x-3y+1)(6x-3y+4)}{4x+3y-7} = 0 \\ 2x-y+2+\sqrt{2x-y+3} = 5. \end{cases}$$

98. De grafiek van een gebroken lineaire functie heeft $x = -3$ tot asymptoot, snijdt de X-as in $(-3\frac{1}{2}, 0)$ en de Y-as in $(0, 2\frac{1}{3})$. Bepaal de functie en teken de grafiek. Onderzoek of de lijn $x + y = 1$ de grafiek snijdt of raakt.

99. De vorm $ax^2 + bx + c$ bereikt zijn uiterste waarde voor $x = -1$ en geeft bij deling door $(x + 2)$ tot rest 9. Verder kan de vorm ontbonden worden in twee gelijke factoren van de eerste graad in x . Bepaal a , b en c .

100. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} (x+y-1)(x-y-2) = 0 \\ (x+y-2)(x-y-3) = 0. \end{cases}$$

Geef een grafische toelichting; welke figuur komt zodoende voor den dag?

101. Laat zien, dat de lijnen $y = mx$ en $y = -\frac{1}{m}x$ loodrecht op elkaar staan door te werken met twee congruente of gelijkvormige driehoeken.

102. Van de functie $y = ax^2 + 4(a+3)x + 9a - 17$ (a reëel) is de maximum-waarde gelijk aan de abscis van het maximum. Bereken a .

103. Los x op uit:

$$x + 3 + \sqrt{\frac{x+3}{x-3}} = \frac{20}{x-3}.$$

104. De grafiek van de functie $y = ax^2 + bx + c$ snijdt de X-as

in A (— 4,0) en B (+ 2,0) en de Y-as in C (0, — 8). Bepaal a , b en c en schets de grafiek. Daarna ook die van

$$y = \frac{1}{ax^2 + bx + c}.$$

105. Splits $\frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}$ in enkelvoudige breuken.

106. Bewijs, dat $\sqrt{3 + \sqrt{3}} < 1 + \sqrt{3}$.

Eveneens, dat $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3}}} < 1 + \sqrt{3}$ is en dat dus

algemeen $\sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots}}}}$ ad inf. $< 1 + \sqrt{3}$ is.

Bepaal vervolgens $\lim \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{3 + \sqrt{\dots}}}}$ ad inf.

107. Voor welke waarde van a is

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{2x(a+x)} - \sqrt{2x^2 + ax + a^2}}{x^2 + 3ax - 4a^2} = a - \frac{2}{5}?$$

108. Voor welke waarden van x is

$$\frac{2x - 5}{x - 1} > 3?$$

109. Waar liggen de punten P (x , y), waarvoor

$$(x + 2y - 3)(2x - y + 5) \leq 0 \text{ is?}$$

110. De vergelijking $x^2 + px + q = 0$ gaat over in een zuivere vierkantsvergelijking, als men de wortels met 3 vermeerderd en in een onvolledige, als men de wortels met 3 vermindert. Bepaal p en q .

111. Gegeven de vierkantsvergelijking

$$(a - 1)x^2 - (a - 1)x - 2a + 1 = 0 \text{ (} a \text{ reëel).}$$

Noem de wortels x_1 en x_2 .

Voor welke waarden van a zal $x_1 > 1$ en $x_2 < -1$ zijn?

112. Herleid $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{a}$ en bewijs de gebruikte stellingen. Is de herleiding via $a^{1/3} \times a^{1/3}$ een bewijs?

113. Schets de grafiek van $y = \frac{x-1}{x+1}$ en daarna die van $y = \frac{x-1}{2^{x+1}}$.

114. De vorm

$V \equiv x^5 + ax^4 + 5(a-b)x^3 - (a+3b)x^2 + bx + 12$ is deelbaar door $x^2 - x - 2$. Bepaal a en b . Los daarna de vergelijking $V = 0$ op.

115. Schets de grafiek van

$$y = \frac{(x+5)(x-3)}{x-4} = x + 6 + \frac{9}{x-4}$$

116. Gegeven de vergelijking:

$$(a^2 + 2)x^2 + (a + 1)x + (a^2 - 4a) = 0.$$

Voor welke reële waarden van a heeft het product der wortels een uiterste waarde?

117. Gegeven de vergelijking
- $x^2 + mx + 2m - 14 = 0$
- . Voor welke waarde van
- m
- is de som van de kwadraten der wortels minimum?

118. Los
- x
- op uit:

$$\{x^2 - (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3}\} \{x^2 - x - 2 + \sqrt{2}\} \\ \{x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3}\} = 0.$$

119. In welk geval is
- $\frac{ax+b}{cx+d}$
- onafhankelijk van
- x
- ? Voor welke waarden van
- a
- is
- $\frac{(a-1)x+3a+1}{x+(a^2+a+1)}$
- onafhankelijk van
- x
- ?

120. Schets de grafiek van
- $y = \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 1}$
- .

121. Voor welke punten
- (x, y)
- in het platte vlak is
- $(3x + 4y - 12)(2x - 3y - 6)(-2x + y + 4) \geq 0$
- ?

122. Ga het teken na van de breuk
- $\frac{x^2+2x-8}{x^2-4x-5}$
- door een grafische voorstelling te maken van teller en noemer afzonderlijk.

123. Bepaal
- a
- ,
- b
- en
- c
- zodanig, dat de vorm
- $(a+b)x^2 + (2a+b)xy + cy^2 - x + 13y - 15$
- deelbaar is door
- $2x - y + 5$
- .

124. Bepaal
- a
- zodanig, dat de grafiek van
- $y = \frac{x^2 - 4x + a}{x(x-4)}$
- de X-as raakt. Na substitutie van de gevonden waarde van
- a
- de grafiek te tekenen.

125. Bepaal de maxima met de bijbehorende abscissen van de functie

$$y = 5 - (x^3 - 6x^2 + 11x - 6)^2.$$

RAPPORT INZAKE DE OVERGANG VAN OFFICIER NAAR LERAAR.

Aan
den Heer Secretaris-Generaal van het
Departement van Onderwijs, Kunsten
en Wetenschappen.

De Commissie, ingesteld bij Uwe beschikking van 15 Juli 1940, No. 10132, Afdeling V.H.M.O., teneinde te onderzoeken, welke maatregelen kunnen worden genomen om de kans op aanstelling in een leraarsbetrekking voor jonge officieren te vergroten, heeft de eer U het volgende rapport uit te brengen.

Samenstelling der Commissie:

De Commissie was samengesteld uit de volgende leden:

Dr. S. Elzinga, inspecteur van het Middelbaar Onderwijs te Haarlem, tevens voorzitter;

Dr. E. H. Renkema, inspecteur van het Gymasiaal en Middelbaar Onderwijs te 's-Gravenhage, tevens onder-voorzitter;

J. van Andel, inspecteur van het Gymasiaal en Middelbaar Onderwijs te 's-Gravenhage;

C. de Bruyn, inspecteur van het Middelbaar Onderwijs te Zwolle;

Dr. W. van den Ent, inspecteur van het Middelbaar Onderwijs te 's-Gravenhage;

Ir. J. Govers, majoor van de Generale Staf te 's-Gravenhage;

C. B. Koning, kapitein der Infanterie te Utrecht;

J. N. Kramer, hoofdofficier van de Marine-Stoomvaartdienst der 2de klasse te 's-Gravenhage;

A. H. Nijhoff, luitenant-kolonel van de Generale Staf te 's-Gravenhage; en

M. van der Weyst, inspecteur van het Middelbaar Onderwijs te 's-Hertogenbosch.

Als Secretaris der Commissie is opgetreden Mr. A. M. Kiers, hoofdcommies bij de Afdeling Financiële Contrôle van het Departement van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen.

Aanleiding tot bijzondere maatregelen:

De Commissie overwoog in de eerste plaats de vraag, of er op sociale gronden aanleiding is, de kansen voor beroepsofficieren, die tengevolge van de huidige omstandigheden op non-activiteit c.q. wachtgeld zijn gesteld, op benoeming tot een leraarsfunctie te vergroten. Zij meent, dat hiervoor voldoende gronden zijn aan te voeren. Door de maatregelen, met ingang van 15 Juli j.l. genomen, hebben de beroepsofficieren hun functie plotseling verloren. Bovendien is hun financiële positie ernstig geschaad: deels zijn zij door ontslag op wachtgeld gekomen, deels zagen zij door op non-activiteitstelling hun inkomen, dat voor de jongeren nog laag was, met een derde verminderd en alle in uitzicht gestelde verhogingen door bevordering vervallen. Verschillende takken van staatsdienst hebben reeds bijgedragen om de rampspoedige gevolgen van de oorlog voor de beroepsofficieren te verzachten; overwogen behoort te worden, of ook bij het onderwijs iets voor hen kan worden gedaan.

Plaatsingsmogelijkheid:

Intussen meent de Commissie, dat de mogelijkheden voor beroepsofficieren om een aanstelling bij het onderwijs te verwerven, voorlopig zeer beperkt zullen zijn. Het aantal open plaatsen is ook zonder hen geringer dan het aantal gegadigden. Niet weinig bevoegden wachten reeds lang op een aanstelling. Bovendien hebben beroepsofficieren geen opleiding voor het leraarsambt ontvangen; zij zullen daardoor bij een sollicitatie minder kansen hebben dan anderen, die wel hun opleiding voor de leraarsfunctie ontvingen.

In het volgende zal blijken, dat de Commissie meent de beroepsofficieren het best te kunnen helpen door niet alleen aan te geven, waar mogelijkheden voor het verkrijgen van een aanstelling te vinden zijn, maar hun tevens wegen te wijzen, waarlangs zij hun kansen op aanstelling kunnen vergroten.

Een overzicht van de algemene vervangingsbehoefte voor leraren in de onderscheiden vakken aan inrichtingen van voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs geeft het rapport over: „De Toekomst der Academisch Gegradueerden” (Rapport Limburg), waarvan de volgende gegevens zijn ontleend.

Het aantal leraren in de wiskunde bedroeg in 1932 462. Opgemerkt moet worden, dat hierbij de vakken cosmographie en mechanica tot de wiskunde zijn gerekend.

332 dezer leraren waren werkzaam aan neutrale scholen, nl. 294 mannen en 38 vrouwen.

56 waren werkzaam aan Prot. Chr. scholen, nl. 54 mannen en 2 vrouwen:

74 waren werkzaam aan R.K. scholen, nl. 68 mannen en 6 vrouwen.

Voor de natuurkunde waren deze getallen: totaal 97.

Aan neutrale scholen 74 (69 mannen en 5 vrouwen).

„ Prot. Chr. „ 13 (12 „ „ 1 „).

„ R.K. „ 10 (10 „ „ 0 „).

Voor de wis- en natuurkunde: totaal 137.

Aan neutrale scholen 89 (80 mannen en 9 vrouwen).

„ Prot. Chr. „ 23 (23 „ „ 0 „).

„ R.K. „ 25 (22 „ „ 3 „).

Voor de scheikunde totaal 110.

Voor schei- en natuurkunde: totaal 87.

Aan neutrale scholen 82 (78 mannen en 4 vrouwen).

„ Prot. Chr. „ 12 (10 „ „ 2 „).

„ R.K. „ 16 (13 „ „ 3 „).

Aan neutrale scholen 56 (47 mannen en 9 vrouwen).

„ Prot. Chr. „ 15 (13 „ „ 2 „).

„ R.K. „ 16 (14 „ „ 2 „).

Gebleken is, dat de jaarlijkse vervangingsbehoefte 3 à 4 pct bedraagt. Jaarlijks zouden er volgens het rapport nodig zijn:

14 leraren in de wiskunde;

4 id. natuurkunde;

3 id. wis- en natuurkunde;

5 id. scheikunde;

2 id. natuur- en scheikunde.

Totaal voor de z.g. technische vakken 28.

Van 1923 tot en met 1934 bedroeg het getal van hen, die door een doctoraal examen of door het verwerven van een akte Middelbaar Onderwijs KV bevoegdheid voor de wiskunde verwierven, per jaar gemiddeld 35. Voor de jaren 1935 tot en met 1939 begroot het rapport het getal van hen, die een volledige bevoegdheid voor het vak wiskunde verwierven, op 33 per jaar, dus op ruim dubbel zoveel als er nodig zijn. Weliswaar vloeit een deel dezer bevoegdheden af

naar andere maatschappelijke functies, doch juist voor het vak wiskunde is dit aantal veel minder groot dan b.v. voor de natuur- en de scheikunde.

Ook is in de laatstgenoemde getallen geen rekening gehouden met hen, die hun bevoegdheid voor de wiskunde langs andere weg hebben verworven dan door het afleggen van het doctoraal examen of van het examen KV, nl. ingenieurs en officieren.

Daarentegen zijn in de cijfers betreffende de vervangingsbehoefte de tijdelijke vervangingen, b.v. wegens ziekte, niet opgenomen, en juist bij de tijdelijke vervangingen zal aanvankelijk wellicht eerder de hulp van beroepsofficieren worden gevraagd.

De Commissie heeft niet de indruk, dat sedert 1932 de toestand gunstiger is geworden.

Volgens een voorlopige schatting is het getal der beroepsofficieren, die, ten gevolge van andere onderwijsbevoegdheden of van hieronder nader aan te bevelen maatregelen, voor benoeming als leraar in de onderscheidene vakken in aanmerking zullen kunnen komen, op ten hoogste vijftig te stellen.

Onderwijsbevoegdheden, die officieren als zodanig bezitten.

Daar over de wettelijke onderwijsbevoegdheden van beroepsofficieren niet steeds de nodige klaarheid heerst, moge de Commissie in dit verband op het volgende de aandacht vestigen.

Bij de totstandkoming der middelbaar-onderwijswet van 1863 werd als. art. 89, 2de lid, een overgangsbepaling opgenomen, luidende:

„Onder dezelfde voorwaarden” (d.w.z. de aan het slot van artikel 82 gestelde inzake het bezit van een getuigschrift van goed zedelijk gedrag) „zijn zij, die aan een der Rijksinstellingen tot opleiding van ingenieurs en officieren der land- en zeemacht de cursus hebben ten einde gebracht, bevoegd tot het geven van middelbaar onderwijs in de technische wetenschappen, waarin zij gedurende die cursus onderwijs hebben ontvangen.”

In de Memorie van Toelichting zoekt men tevergeefs naar een motivering der opneming. Slechts in het Voorlopig Verslag van de Commissie van Rapporteurs ontmoet men de volgende opmerking:

„De bepaling scheen door de noodzakelijkheid om de op te richten scholen van geschikte docenten te voorzien genoegzaam gerechtvaardigd.”

De bepaling had klaarblijkelijk het oog op de bijzondere omstandigheden, die uit de totstandkoming der wet voortvloeiden. In 1863 wist nog niemand recht, wat middelbaar onderwijs was; dit onderwijs werd eerst door de wet in het leven geroepen. De wet formuleerde ook, langs welke weg de bevoegdheid om middelbaar onderwijs te geven, kon worden verkregen, nl. door het behalen van een akte voor middelbaar onderwijs. Verwacht kon echter worden, dat het nog enkele jaren zou duren, alvorens een voldoende aantal personen deze bevoegdheid had verworven. Eerst in 1864 is het K.B. uitgevaardigd ter instelling en regeling der examencommissiën. Het aantal kandidaten was voorlopig zeer klein. Toch zijn reeds in 1864 hogere burgerscholen opgericht. Het lag dan ook voor de hand leerkrachten te zoeken onder hen, die reeds diploma's van betekenis hadden verworven of die een opleiding hadden genoten, welke een behoorlijke voorbereiding voor het geven van middelbaar onderwijs waarborgde. In de wet worden genoemd ingenieurs, veeartsen en ook officieren der land- en zeemacht.

Ofschoon deze regeling dus als een overgang was bedoeld, is zij evenwel na bijna 80 jaar nog van kracht.

Over de vraag, wat in dit verband moet worden verstaan onder „technische wetenschappen” — een uitdrukking, die ook in artikel 82 der middelbaar onderwijswet voorkomt, en daaruit in 1905 is overgenomen in art. 129 der hoger-onderwijswet — is bij de totstandkoming der wet wel van gedachten gewisseld, doch deze gedachtenwisseling heeft niet de gewenschte klaarheid gebracht. In het Voorlopig Verslag is nl. de volgende vraag aan de regering gesteld:

„Waarom wordt hier, als bij uitzondering van „technische” wetenschappen gesproken? Dat woord schijnt te kunnen wegvallen.”

In de Memorie van Toelichting is door de regering hierop het volgende antwoord gegeven:

„De Commissiën, belast met het afnemen der examens dier diploma's, ondervragen wel is waar, behalve over technische wetenschappen, ook over andere vakken, maar daar deze niet als hoofdzaak te beschouwen zijn, kan men niet als regel aannemen, dat het bezit van het diploma genoegzame kennis voor het geven van onderwijs daarin waarborgt. Uit dien hoofde is de uitdrukking technische wetenschappen gekozen”.

De term „technische wetenschappen” is intussen niet slechts en zelfs niet in de eerste plaats voor officieren opgenomen, doch gebruikt voor ingenieurs. Dit verduidelijkt iets van de betekenis. Immers technisch onderwijs in de hier bedoelde zin werd aan de in 1842 opgerichte Kon. Academie gegeven, die sedert 1863 als Polytechnische School in de middelbaar onderwijswet en in 1905 als Technische Hogeschool in de hoger-onderwijswet werd opgenomen. Krachtens art. 118 dezer laatste wet kunnen ingenieurs een „doctoraat in de technische wetenschap” verwerven.

Men bedoelde omstreeks 1863 met technische wetenschappen een tegenstelling tot uitdrukking te brengen met theoretische wetenschappen, welke zich niet of vrijwel niet bekommerden om toepassing voor het maatschappelijk leven. Deze tegenstelling werd destijds scherper gevoeld dan in onze dagen.

Het is niet te verwonderen, dat bij de uitvoering der wet over het begrip „technische wetenschappen” moeilijkheden rezen. In 1864 reeds werd hierover door een belanghebbende aan den Minister van Binnenlandsche Zaken een vraag gesteld. Bij Besch. van 16 Januari 1864, No. 214, Afd. 5, gaf de Minister hieromtrent aan de adressant het volgende te kennen:

„dat de uitdrukking „technische wetenschappen” in het aangehaalde wetsartikel, zowel grondige kennis van technische toepassing, als die onderdelen der wis- en natuurkundige wetenschappen omvat, waarop de techniek rust, alsmede het tekenen”.

Mede op grond van de in de loop der jaren nader gegeven ministeriële interpretatiën (vgl. Hubrecht, onderwijswetten, B, 2e Afd. dl. II, p. 17 e.v.) zijn tot de „technische wetenschappen”, waarvoor beroepsofficieren een wettelijke bevoegdheid tot het geven van middelbaar onderwijs bezitten, te rekenen: *wiskunde*, *mechanica*, *natuur-*, *scheikunde* en *tekenen*, voorzover zij bij hun opleiding onderwijs in deze vakken hebben ontvangen.

Toegevoegd worde, dat de opleiding voor officier voor de verschillende wapens niet al deze vakken heeft omvat en voor zover deze vakken wèl zijn onderwezen, is dit niet voor ieder wapen in gelijke mate geschied; officieren van administratie b.v. hebben noch aan de Kon. Mil. Academie noch aan het Kon. Instituut voor de Marine in één dezer vakken onderwijs ontvangen; officieren der infanterie en der cavalerie uitsluitend in de wiskunde.

Gelijke onderwijsbevoegdheid, als boven aangegeven, is steeds voor officieren geacht aanwezig te zijn voor de gymnasia op grond van art. 16, 2de lid, der hoger onderwijswet. Krachtens art. 130 der lager onderwijswet zijn zij tevens gerechtigd tot het geven van lager onderwijs in dezelfde vakken en krachtens art. 141 der lager onderwijswet tot het geven van onderwijs aan kweekscholen ter opleiding van onderwijzers, eveneens in die zelfde vakken.

Wat het nijverheidsonderwijs betreft, het Bevoegdhedenbesluit N.O. 1935 (Kon. Besl. van 30 Maart 1935, *Stbl.* no. 162) kent (in bijl. B. sub A III 4) aan officieren van de Marine-Stoomvaartdienst, mits zij tenminste 5 jaren in die rang hebben dienst gedaan, de bevoegdheid toe tot het geven van lager nijverheidsonderwijs in scheepswerktuigkunde en mechanica, en handhaaft bovendien door een overgangsbepaling (art. 18, 2e lid) de volgende bevoegdheden (berustende op het Kon. Besl. van 23 Maart 1925, *Stbl.* no. 101, zoals dit nader is gewijzigd) voor allen, die vóór 1 September 1935 de nader te noemen rangen hadden verkregen:

a. bij het middelbaar- en het lager nijverheidsonderwijs:

voor de officieren der genie de bevoegdheid tot het geven van onderwijs in de lichamelijke oefening en in „het technische vak van den civiel-ingenieur”;

voor de officieren der artillerie, der infanterie en der cavalerie in de lichamelijke oefening;

b. bij het lager nijverheidsonderwijs bovendien:

voor de officieren der artillerie in de mechanica;

voor de aan de Koninklijke Mil. Academie en den Hoofdcursus opgeleide officieren in wiskunde, rekenen en aardrijkskunde;

voor de zee-officieren in zeevaartkunde, zeemanschap, mechanica, rekenen en aardrijkskunde;

voor de officieren van de Marine-Stoomvaartdienst in scheepswerktuigkunde, mechanica, wiskunde en rekenen.

*Onderwijsbevoegdheden, die officieren gemakkelijker
dan anderen kunnen verwerven.*

Volgens het bovenaangehaalde Bevoegdhedenbesluit N.O. 1935 genieten bezitters van het bewijs van met goed gevolg afgelegd examen voor de rang van officier van de Marine-Stoomvaartdienst der 1e klasse vrij uitgebreide vrijstellingen bij het examen voor de akte N XIII, die bevoegdheid geeft tot het onderwijzen van de

scheepswerktuigkunde aan scholen ter opleiding tot alle machinisten- en stuurmansrangen ter koopvaardij. Voor de akten N XVI (wis- en zeevaartkunde aan zeevaartscholen) en N XVIa (radio-kunde aan zeevaartscholen) kunnen zee-officiëren, ofschoon hun bij deze examens geen vrijstellingen worden toegekend, zich in betrekkelijk korte tijd voorbereiden.

Tot het afleggen van het examen voor de akte N XV (zeeman-schap) worden uitsluitend toegelaten zij, die voldaan hebben aan het examen voor 1e stuurman bij de grote handelsvaart of aan het 1e gedeelte van het examen voor luitenant ter zee der 1e klasse bij de Koninklijke Marine.

In hoever het officieren lichter zal vallen dan anderen, zich voor te bereiden voor examens ter verkrijging van verdere bevoegdheden bij het gymasiaal- en middelbaar onderwijs dan zij aan hun rang reeds ontleen, is afhankelijk van verschillende omstandigheden, ten dele in verband staande met hun opleiding, ten dele met hun persoonlijke voorkeur en gedurende de dienstdtijd voortgezette studie. Zo zullen de officieren van administratie een voorsprong hebben bij de studie voor de middelbare akte K XII (boekhouden); officieren, die de Hogere Krijgsschool of de Hogere Marine-Krijgsschool hebben doorlopen, bij de studie voor de akte K VIII (geschiedenis) en wellicht voor K IX (aardrijkskunde); zij, die als officier het getuigschrift van meer uitgebreide kennis in de lichamelijke opvoeding hebben verworven, bij de studie voor de akte P (lichamelijke oefening).

Toelating tot de studie aan universiteiten en hoge scholen.

Officiëren, die zich verdere bevoegdheden wenschen te verwerven door het afleggen van examens aan een universiteit of hogeschool, behoeven hiertoe het einddiploma van een gymnasium of van een hogere burgerschool of een daarmede overeenkomend staatsexamen-diploma (volgens artikel 12 der hoger-onderwijswet of volgens artikel 55 der middelbaar-onderwijswet). Verreweg de meeste officieren zijn in het bezit van een dezer diploma's. Voor zover zij niet in dit geval verkeren, is van hen toch, om het onderwijs aan de Koninklijke Militaire Academie of aan het Koninklijk Instituut voor de Marine te kunnen volgen, een voorbereiding geëist, die van de aan hogere burgerscholen gegevene niet belangrijk verschilt. Het is onder de bestaande omstandigheden billijk, dat hun, indien zij zich

voor het staatsexamen hogere burgerschool (het z.g. „extraneï-examen”) aanmelden, vrijstelling worde verleend voor alle vakken, en wel aan de officieren van administratie bij het staatsexamen hogere burgerscholen A, en aan de overige officieren, die aan een der beide genoemde instellingen de cursus hebben ten einde gebracht, bij het staatsexamen hogere burgerschool B. Hierdoor zouden hun tevens bij het staatsexamen, bedoeld in artikel 12 der hoger-onderwijswet, de aan de einddiploma's der hogere burgerscholen verbonden vrijstellingen ten deel vallen.

Voor officieren, die niet aan een der beide genoemde instellingen zijn opgeleid, kan in ieder bijzonder geval worden beslist, of vrijstelling van bepaalde vakken volgens de Min. Besch. van 15 Febr. 1939 hun kan worden toegekend. Althans de bevoegdheid tot het afleggen van middelbare akte-examens volgens art. 2 sub 12 van het Kon. Besl. van 27 December 1934, *Stbl.* 678, kan hun zonder bezwaar worden verleend.

De Commissie heeft ook de vraag overwogen, of het gewenst en mogelijk is om aan jonge beroepsofficieren, die aan een universiteit of hogeschool willen gaan studeren, in verband met hun gering non-activiteitstractement vrijstelling van college- en inschrijvingsgeld te verlenen; aangezien die onderwerp echter buiten de haar verstrekte opdracht valt, heeft de Commissie gemeend zich van een advies terzake te moeten onthouden.

*Vermeerdering der wetenschappelijke geschiktheid
van wettelijk bevoegden.*

Wanneer niet slechts op wettelijke bevoegdheid, maar tevens op geschiktheid tot het geven van onderwijs wordt gelet, staan de in artikel 89 der middelbaar-onderwijswet bedoelde officieren, tenzij dezen door voortgezette studie in hun onderwijsvak dieper zijn doorgedrongen, achter bij degenen, die voor het gymasiaal- en middelbaar onderwijs meer opzettelijk zijn opgeleid. Dat dit algemeen wordt ingezien, blijkt uit het feit, dat sinds verscheiden jaren slechts zeer zelden aan officieren nieuwe aanstellingen bij dit onderwijs worden gegeven, en dat in de gedurende de laatste jaren ingediende wetsontwerpen ter regeling van het voorbereidend hoger- en middelbaar onderwijs werd voorgesteld, de onderwijsbevoegdheid van officieren te doen vervallen. De weinig talrijke gevallen, waarin thans nog leraren aan gymnasia, hogere burgerscholen en lycea

krachtens genoemde bepaling in functie zijn, betreffen zo goed als uitsluitend oud-officieren der genie, der artillerie en der marine, aan wie onderwijs is opgedragen in de wiskunde, hier en daar mede in mechanica en lijntekenen. Inderdaad geldt voor de overige „technische wetenschappen” en voor de overige wapens, dat de ter verkrijging van de officiersrang genoten opleiding op zich zelf geen voldoende kennis van de te onderwijzen vakken waarborgt om enig uitzicht te geven, dat de op grond van zijn wettelijke bevoegdheid benoemde als leraar zal slagen. Maar ook die officieren, in wier opleiding de wiskunde een ruime plaats heeft ingenomen, hebben zich door deze opleiding niet kunnen verwerven het voor de wiskundeleraar aan een school voor voorbereidend hoger of middelbaar onderwijs onmisbare inzicht in de nieuwere ontwikkeling der wiskundige wetenschap en in de eisen, die in verband hiermede aan het hedendaagse schoolonderwijs moeten worden gesteld. Teneinde voor deze heren de kans op aanstelling aan zodanige scholen te vergroten en tevens te voorkomen, dat hun werkzaamheid als leraar op een mislukking zou uitloopen, is aan te bevelen, dat aan de universiteiten speciale cursussen worden ingericht, die aan krachtens art. 89 bevoegde officieren de gelegenheid moeten bieden om door voortgezette studie op de grondslag van reeds aanwezige ruimere wiskundige kennis het genoemde tekort aan te vullen. De bijzondere omstandigheden in aanmerking genomen, kan bij voldoende aanleg met een studie van één jaar worden volstaan, indien de deelnemers met vrijstelling van alle andere diensten zich daaraan volledig kunnen wijden. Van de resultaten van deze studie zouden zij aan de hoogleraren, wier lessen zij volgen, het bewijs hebben te leveren door het afleggen van een tentamen, waarvan bij gunstige uitslag een getuigschrift zou dienen te worden uitgereikt. Houders van dit getuigschrift zouden bij sollicitatie naar betrekkingen van leraar in de wiskunde en de mechanica als gelijkwaardig kunnen worden behandeld met degenen, die hun onderwijsbevoegdheid aan een universitair-diploma of aan een middelbare akte ontleenen.

Het schijnt niet gewenst, degenen, die van reserve-officier beroeps-officier zijn geworden, van deze cursussen uit te sluiten. Voorzover zij verkeren in het geval, bedoeld in art. 89 der middelbaar onderwijswet, bezitten zij voor de technische vakken, waarin zij aan een Rijksinstelling tot opleiding van officieren onderwijs hebben ontvangen, de wettelijke bevoegdheid; of zij van universitaire

PROSPECTUS

BEKNOPT MEETKUNDE

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EERSTE DEEL

NEGENSE DRUK

138 NIEUWE FIGUREN

TWEEDE DEEL

ZEVENDE DRUK

119 NIEUWE FIGUREN



PRIJS MET GRADENBOOG

EN OVERZICHT GEC. I f 1.60

II f 1.70

VRAAG PRESENT-EXEMPL. AAN BIJ DEN UITGEVER OF DEN SCHRIJVER

P. NOORDHOFF N.V. — 1939 — GRONINGEN-BATAVIA

VERKRIJGBAAR IN DE BOEKHANDEL. • IN NED. O.-INDIË UIT VOORRAAD LEVERBAAR
DOOR N.V. NED. IND. UITG. MIJ. NOORDHOFF-KOLFF, LAAN HOLLE 7, BATAVIA C

INHOUD VAN DEEL I.

	Bladz.
Grondbegrippen	1
Hoeken	5
Twee rechten, gesneden door een derde. Evenwijdige rechten	11
Driehoeken	20
Congruentie van driehoeken	30
Eerste werkstukken	40
Veelhoeken	47
Bijzondere vierhoeken	50
Congruentie van veelhoeken	58
De cirkel	62
Werkstukken	72
Oppervlakte	77
De stelling van Pythagoras met gevolgen	85
Oppervlakte en inhoud van lichamen	92
Herhaling	100

INHOUD VAN DEEL II.

Meetkundige plaatsen	1
Metten van hoeken door cirkelbogen	10
Evenredigheid van lijnstukken	16
Vermenigvuldiging van figuren; gelijkvormigheid	27
Toepassingen van de gelijkvormigheid der driehoeken	42
Berekening van lijnstukken in een driehoek	62
Cirkels bij drie- en vierhoeken	67
Regelmatige veelhoeken	75
Omtrek en oppervlakte van de cirkel	82
Cylinder, kegel en bol	88

Verder vraagstukken ter herhaling, nl.: M.U.L.O. diploma A,
M.U.L.O. diploma B, Eerste H.B.S. 3-j. c. te Amsterdam,
Over opp. en inhouden.

BIJ DE BEKNOPTTE MEETKUNDE.

Op de scholen met een beperkt wiskunde-program, dus op die, **waar het onderwijs tevens eindonderwijs is**, wordt de meetkunde vooral onderwezen om de vormende waarde, om het denkvermogen van de leerlingen te scherpen, om hun hersenen te wetten; dat is het hoofddoel van het gehele schoolonderwijs in de wiskunde; voor de school toch is wiskunde een geheel van stellingen met de daarop rustende bewerkingen, die gerangschikt zijn in logische orde, zodat steeds het nieuwe rust op het bekende en als gevolg daarvan onomstotelijk kan worden vastgesteld. Met dit doel voor ogen is geen enkel vak van het lager en middelbaar onderwijs daartoe zo bij uitstek geschikt als de meetkunde men drijve dit echter niet al te zeer op de spits; de grote grief tegen ons elementair meetkunde-onderwijs, nl. **dat het absoluut bezijden het leven staat**, is maar al te juist; een leerling van de H. B. S. 3. j. c., die slechts de gewone vlakke meetkunde heeft geslikt, weet weinig of niets van wat hem in het leven te pas komt, nl. van de nodige inhouds- en oppervlakteberekeningen. Ik heb daarom gebroken met wat tot heden als de normale stof gold en heb de inhoud uitgebreid met de berekeningen van oppervlakten en inhouden; het is veel nuttiger, dat hij de inhoud van een bergruimte, van een terreinverhoging, van een uitgraving, van een emmer kan uitrekenen, dan dat hij kan bewijzen: „Als men uit het snijpunt der diagonalen van een koordenvierhoek loodlijnen op de zijden neerlaat, dan zijn de voetpunten de hoekpunten van een raaklijnen vierhoek”, om er maar eens een te nemen. Het is beter, dat hij weet, hoeveel m^2 plaatijzer er gaat aan een ronde reclamezuil, afgedekt door een kegel, dat hij kan opgeven, hoeveel m^2 verf- of stucadoorwerk ergens aan zit, dan dat hij de „verdubbelformule” kan afleiden.

„Dus nog uitgebreid de gewone leerstof?” Neen, volstrekt

niet; **veel wat onnut was, heb ik weggelaten**; waarom in alle bijzondere, opzettelijk ineengedraaide gevallen te bewijzen, dat twee driehoeken congruent of gelijkvormig zijn? Waarom constructies als $x = \sqrt[4]{abcd}$, waarom verdubbel-, halveer- en andere formules (deze hebben slechts historische waarde), waarom de s-formules voor de deellijnen, waarom ontzettend veel onpractisch sleurgoed en nog veel sterker, waarom de volgorde zó, dat het onderwijs telkens hokt en zó, dat een zelfde zaak twee keer voorkomt?

„Wat bedoelt U met dat laatste?” vraagt de lezer. — 'k Zal het U zeggen:

't **Hokt 1)** bij de congruentie van driehoeken, als men die *reeds bij de eerste oefening* uitbreidt tot: „basis, verschil van de basishoeken en som van de opstaande zijden”; dit slag heb ik veel verderop pas genomen bij de constructies. **Men loopt vast 2)** in de 2e klas bij de behandeling van de evenredigheid van lijnstukken en de gelijkvormigheid, 't zij deze op de verouderde, 't zij op de juiste manier behandeld wordt.¹⁾ Geen wonder: de onderlinge vergelijking van twee figuren (de eenvoudige congruentie van driehoeken uitgesloten) is veel lastiger dan de beschouwing van één figuur, b.v. wat betreft de oppervlakte die pas in de 3e klas komt, of de hoeken in een cirkel, die ook pas in de 3e komen. Dan, 't **loopt spaak. 3)** in het laatst van de 2e klas met de berekening van lijnstukken in driehoeken, bij U als bij mij, vroeger, thans en als we die niet wat verschuiven, ook in 't vervolg Waar wij er zijn om de leerlingen, acht ik het gewenst hun deze stof niet in de 2e klas toe te dienen, maar in de 3e, waar men door de meerdere vaardigheid in de algebra, met name in de wortelvormen, betere resultaten krijgt. — Ook zei ik: **omdat een zelfde zaak tweemaal voorkomt**: ik bedoel daarmee de stellingen van de rechthoekige driehoek en de evenredigheid van lijnstukken in de cirkel; ook de theorie van de gelijkvormigheid bij rechthoekige figuren en bij de cirkel; dit begrip later en dan in zijn geheel ontwikkelen is veel beter. —

¹⁾ De juiste manier is in 1927 ook toegelaten verklaard voor het „M.U.L.O”.

Verder heb ik gepoogd om veel dingen eenvoudiger te behandelen; zo heb ik de traditionele vijf congruentie-gevallen door samenvoeging van de beide eerste tot *vier* teruggebracht; het eerste luidt dan: „Twee driehoeken zijn congruent, als ze gelijk hebben één zijde en twee hoeken.” Kortere en beter dan de beide gevallen, waartussen geen wezenlijk onderscheid bestaat en waarbij dan bovendien volkomen overeenkomst is met de *vier* gevallen van gelijkvormigheid.

Met dat al moet ik er op wijzen, dat dit boek dezelfde moderne geest ademt, als het grotere leerboek, dat meer is voor hen, die langer en degelijker de Meetkunde beoefenen, met name geldt dit voor de behandeling van de cirkel, de meetkundige plaatsen en de gelijkvormigheid; de bestudering van dit werk is door de **betere rangschikking van de stof en de grote vereenvoudiging** van enkele zaken (zie de oppervlakten, inhouden, de regelmatige veelhoeken, de opp. van de cirkel enz.) veel meer vruchtdragend dan van andere werken; **overal heb ik er voor gezorgd, dat de leerling niet optornt tegen de stof, omdat die voor zijn ontwikkeling te vroeg valt.**

De inhoud vindt men heel eenvoudig op de beide blaadjes met de kleine figuurtjes hierbij; begonnen met de M.U.L.O.-boekjes, voortgezet bij het grotere leerboek, is het me een niet genoeg te waarden hulpmiddel bij het onderwijs gebleken en daarom heb ik mijn uiterste best gedaan om dit overzicht zo duidelijk mogelijk te doen zijn.

Met dit hulpmiddel krijgt de meetkunde voor de scholieren vastheid en grond. Leraren, die menen, dat de jongens van zelf de zaken onder de knie krijgen door „veelvuldig gebruik”, hebben het geheel mis; daarvoor is de tijd te kort, het inzicht nog te gebrekkig en het aantal vakken te groot.

Het werk, zoals het hier ligt, is geschikt voor H. B. S. met 3 j. c., voor M. U. L. O.-scholen, Zeevaart- en Kweekscholen, voor Meisjesscholen, Technische scholen, enz.

Van de beide deeltjes van deze

BEKNOPT MEETKUNDE

heeft men voor het **M.U.L.O.-diploma A** nodig *Deel I geheel* (blz. 58—60 overslaan); met inbegrip van oppervlakte en inhoud van lichamen; de herhaling achterin dient als altijd als vindplaats van proefwerksommen.

Van Deel II zijn nodig blz. 10—66 en blz. 82—105; wel is waar zijn in het programma niet genoemd omtrek en oppervlakte van de cirkel, maar die moeten toch gekend worden, evenals inhoud en oppervlakte van cylinder, kegel en bol; deze onderwerpen worden nl. gevraagd onder Rekenen; men zal goed doen de behandeling daarvan in dit boekje te volgen.

Alzo met inbegrip van oppervlakte- en inhoudberekening in het geheel $95 + 57 + 24$ bladzijden met $138 + 119$ figuren; hieronder zijn begrepen de vraagstukken; het geheel heeft dus geen overmatige hoeveelheid stof *en de beide boekjes zijn juist van pas voor scholen met een beperkt programma.*

Voor het **M.U.L.O.-diploma B** heeft men beide deeltjes nodig; mij dunkt, de eenvoudige theorie over de meetkundige plaatsen moet men in een paar lessen ook maar behandelen.

 **De oplossingen en antwoorden** zijn voor gebruikers van de Beknopte Meetkunde gratis te bekomen bij den schrijver (Amsterdam Zuid, Jac. Obrechtstraat 88) of bij den uitgever.

P. WIJDENES

Meetkundige vraagstukken

met de bewijzen van de stellingen en **meer dan 70 model-oplossingen.**

- I. Met gradenboog en 2 driehoeken gec. . . f 1.40
II. gecartonneerd - 2.40
-

P. WIJDENES

Beknorte meetkunde

1ste deel **8ste druk**, met gradenboog en overzicht
gecartonneerd f 1.70

2de deel **7de druk**, met gradenboog, gec. . . - 1.70

Oplossingen Beknorte meetkunde

I/II gratis voor de docenten-gebruikers

2de druk f 1.00

P. WIJDENES

Planimetrie

Een eenvoudig schoolboek voor het eerste onderwijs
in de Vlakke meetkunde; met gratis gradenboog,
2 celluloiddriehoeken en overzicht

2de druk, gebonden f 3.20

Uitgave in 2 delen, gecartonneerd f 1.60 per deel.

Antwoorden f 1.00, gratis voor docenten.

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE

Vlakke meetkunde

1ste deel, met gradenboog en formules **11de druk**,
gecartonneerd f 2.25

2de deel, met formules **10de druk**, gecart. . . - 2.25

P. v. LEERDAM

Oefenmateriaal wiskunde en statica

voor technische examens. Examens B.N.A., N-acten,

Machinistenexamens enz. 750 vraagstukken . . f 1.50

Antwoorden - 0.40

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN-BATAVIA

P. WIJDENES

Beknopte driehoeksmeting

8ste druk, gecartonneerd	f 2.25
Uitgave A f 0.75. Antwoorden	- 0.50
Uitgave B f 1.35. Antwoorden	- 0.75
Antwoorden 4de druk	- 1.00

P. WIJDENES

Practische driehoeksmeting

voor de practijk, met toepassingen.

2de druk f 2.00. Antwoorden	f 0.60
---------------------------------------	--------

P. WIJDENES

Leerboek der goniometrie en trigonometrie

4de druk gebonden	f 5.25
Antwoorden, 4de druk	- 2.50

Dr. B. P. HAALMEYER

Leerboek der vlakke meetkunde

voor voorbereidend hoger- en middelbaar onderwijs.

Met vraagstukken

deel I 2de druk f 2.10, gebonden	f 2.50
deel II 2de druk - 1.90, gebonden	- 2.30

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES

Planimetrie

voor het middelbaar- en voorbereidend hoger onderwijs

deel I 2e druk, gecartonneerd met overzicht f 1.90	
deel II 2e druk, gecartonneerd met overzicht - 1.90	

J. H. SCHOGT

Beginselen der vlakke meetkunde

Een leerboek voor beginners overeenkomstig de
hedendaagse inzichten in de Euclidische meetkunde

f 3.90, gebonden	f 4.40
----------------------------	--------

J. H. SCHOGT

Oefeningen in de vlakke meetkunde

in aansluiting op de Beginselen der Vlakke Meetkunde

f 2.25, gebonden	f 2.75
----------------------------	--------

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN-BATAVIA

cursussen voldoende zullen kunnen profiteren om hun geschiktheid voor het leraarschap te vergroten en na tentamen het bovenbedoelde getuigschrift te verkrijgen, zal er van afhangen, of zij bijzondere aanleg voor de wiskunde bezitten en, alvorens zulk een cursus te volgen, zich door eigen voortgezette studie in dit vak reeds verder hebben bekwaamd; het is te verwachten, dat dit geval zich zelden zal voordoen. Hetzelfde geldt ook voor de regelmatig opgeleide infanterie- en cavalerie-officieren, die een minder omvangrijk onderwijs hebben ontvangen dan hun collega's van de genie, de artillerie en de zeemacht.

De billijkheid brengt voorts mede, nu ook ingenieurs volgens art. 89 der middelbaar onderwijswet bevoegd zijn, de volgens hetzelfde artikel bevoegde officieren, voor zover zij in hun diensttijd door voortgezette studie aan de Technische Hogeschool te Delft een militair getuigschrift van meer uitgebreide kennis hebben verworven, bij sollicitatie naar betrekkingen van leraar in de wiskunde en de mechanica op grond der buitengewone omstandigheden als gelijkwaardig met ingenieurs te behandelen.

Practische voorbereiding.

Reeds bij de totstandkoming der middelbaar onderwijswet werd in art. 78 van ieder, die een acte voor middelbaar onderwijs wilde verkrijgen, geëist, dat hij een examen zou afleggen „in de theorie van onderwijs en opvoeding; hoofdzakelijk in betrekking tot het middelbaar onderwijs”.

Nadat gedurende vele jaren met de genoemde eisen weinig ernst was gemaakt, is hierin gedurende de laatste jaren wijziging gekomen. Hiertoe was aanleiding. Meer dan vroeger eisten de dichtbezette klassen een practische onderwijsbekwaamheid, die enige kennis van didactiek en methodiek tot grondslag had. Aan verschillende universiteiten werden dan ook lectoren in de methodiek aangesteld, door enige commissiën voor de afneming van examens voor middelbare akten werden eisen in onderwijsleer en methodiek gesteld. Daarnaast is het, hoewel dit wettelijk niet is voorgescreven, een goede gewoonte geworden, dat aanstaande leraren zich door hospiteren en lesgeven onder toezicht voorbereiden voor de taak, die hen wacht.

Van officieren, die leraar wensen te worden, mag gevraagd worden, dat zij in niet mindere mate dan anders opgeleiden trachten zich in de eerste plaats door hospiteren voor te bereiden voor de moeilijke leraarsfunctie. Wie met ernst zich een plaats in het onderwijs wil zoeken, kan ook niet anders wensen, daar deze voorbereiding hem de rust en het vertrouwen kan schenken, nodig, om als leraar te slagen.

Het is intussen mogelijk, dat bij sommige officieren de persoonlijke geschiktheid voor het geven van onderwijs door hun voortdurende, dagelijkse omgang met niet steeds gemakkelijk te leiden dienstplichtigen uit verschillende lagen der maatschappij en ook door lesgeven aan militairen, na de nodige voorbereiding zelfs in grotere mate aanwezig zal blijken dan bij hen, die meer onmiddellijk voor de leraarsfunctie zijn voorbereid. Dit geldt in het bijzonder voor officieren, die als leraar aan militaire onderwijsinstellingen werkzaam zijn geweest. Om dit beter te kunnen beoordelen is het gewenst, dat omtrent de dienstvervulling van beroepsofficieren in hun vroegere functie door bevoegde instanties inlichtingen kunnen worden ingewonnen en dat zij in de eerste plaats in aanmerking komen, die reeds in hun vroegere functie zich verdienstelijk hebben gemaakt.

Bevordering van benoeming in leraarsbetrekkingen.

Ten aanzien van de vraag, op welke wijze de beroepsofficieren van Rijkswege voor het verkrijgen van een onderwijsfunctie het best kunnen worden gesteund, geeft de Commissie in overweging, die beroepsofficieren, die aan een universitair- of hogeschooldiploma of aan een middelbare acte de bevoegdheid ontleen voor de leraarsbetrekking, waarnaar zij solliciteren, of die op grond van bovenbedoelde, voortgezette studie als met dezen gelijkwaardig zijn te beschouwen, bij persoonlijke geschiktheid gelijk te stellen met wachtgelders. Gedeeltelijk immers verkeren zij in de positie van wachtgelders, gedeeltelijk in omstandigheden, die met die van wachtgelders grote overeenkomst tonen.

De beoordeling van de persoonlijke geschiktheid zou opgedragen kunnen worden aan een door U te vormen kleine commissie, bestaande uit enkele officieren en inspecteurs.

Hieromtrent ware tot de directies van Rijksinstellingen een aanschrijving te richten, aan de besturen van gemeentelijke en bijzondere gesubsidieerde inrichtingen het verzoek te doen, de Rijksinstellingen te volgen, en aan de directies der niet gesubsidieerde gemeentelijke en bijzondere instellingen de aanschrijving ter kennisneming te doen toekomen.

Conclusies.

Resumerende, meent de Commissie U de volgende maatregelen te moeten aanbevelen:

1. Bij sollicitatie naar leraarsbetrekkingen worden bij persoonlijke geschiktheid met wachtgelders gelijkgesteld de beroepsofficieren van land- en zeemacht, die op 14 Juli 1940 nog in actieve dienst waren en die òf op grond van een aan een universiteit of hogeschool afgelegd examen of van een middelbare acte voor die betrekkingen bevoegd zijn, òf, voor zover het betrekkingen van leraar in de wiskunde en de mechanica betreft, op grond van art. 89 der middelbaar onderwijswet bevoegd zijn en bovendien hetzij door voortgezette studie aan de Technische Hogeschool te Delft gedurende hun diensttijd een getuigschrift van meer uitgebreide kennis hebben verworven, hetzij in het bezit zijn van het getuigschrift van, na het doorlopen van een speciale wiskundige cursus van één jaar aan een universiteit, met goed gevolg afgelegd tentamen.
2. Voor officieren, die krachtens art. 89 der middelbaar-onderwijswet bevoegd zijn tot het geven van onderwijs in de wiskunde, wordt aan één of meer universiteiten een speciale cursus van één jaar ingericht ter uitbreiding en verdieping van hun kennis, in het bijzonder met betrekking tot de grondslagen der wiskundige wetenschap en de betekenis daarvan voor het schoolonderwijs. Aan het einde van de cursus wordt de gelegenheid gegeven om door een tentamen een getuigschrift te verwerven.
3. Officieren van administratie, die aan de Koninklijke Militaire Academie of aan het Koninklijk Instituut voor de Marine de cursus hebben ten einde gebracht, worden, indien zij dit behoeven, bij het Staatsexamen hogere burgerschool A vrijgesteld van nader onderzoek in alle vakken. Andere officieren, die aan

de Koninklijke Militaire Academie of aan het Koninklijk Instituut voor de Marine de cursus hebben ten einde gebracht, worden bij het Staatsexamen hogere burgerschool B vrijgesteld van nader onderzoek in alle vakken.

De Commissie betuigt U haar dank voor het in haar gestelde vertrouwen.

's-Gravenhage, 26 Augustus 1940.

De Commissie voornoemd,

w.g. Dr. S. ELZINGA, Voorzitter.

w.g. Mr. A. M. KIERS, Secretaris.

Naschrift.

Vorenstaand rapport is door den waarnemend Secretaris-Generaal van het Departement van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen ongewijzigd aanvaard en overgenomen. Deze heeft ter uitvoering van de conclusies het volgende bepaald:

1. De op non-activiteit gestelde beroepsofficieren moeten, om op de lijst voor wachtgelders geplaatst te kunnen worden, zich aan een Nederlandse universiteit gedurende één jaar als student laten inschrijven voor het volgen van de 1e jaars colleges in de wiskunde.

2. Deze officieren moeten aan de universiteit, waar zij zijn ingeschreven, tevens de voordrachten volgen in de didactiek van de wiskunde, indien deze voordrachten althans worden gegeven.

3. Zij moeten eveneens de voordrachten volgen van hen, aan wie onder verantwoordelijkheid van de betrokken faculteit een speciaal daarvoor ingestelde leeropdracht is verstrekt.

4. Bij sollicitatie naar leraarsbetrekkingen worden tegelijk met de gelijkstelling van de sub 1 bedoelde officieren met wachtgelders, zo mogelijk met ingang van 1 October 1941, bij persoonlijke geschiktheid met wachtgelders eveneens gelijkgesteld zij, die het doctoraal examen in de wis- en natuurkundige wetenschappen met hoofdvak wiskunde hebben afgelegd, mits zij een wachttijd van twee jaren hebben.

's-Gravenhage, 1 October 1940.

*Overgenomen uit de Ned. Staatscourant
van 3 October 1940.*

BOEKBESPREKING.

Dr. Fred. Schuh, *Didactiek en Methodiek van de Wiskunde en de Mechanica*. Delft, Uitgeverij Waltman, 1940. 237 bldz., prijs f 6,25 (geb. f 7,50).

Dit werk van Prof. Schuh geeft niet eene volledige didactiek en methodiek van wiskunde en mechanica, direct gereed om op het middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs te worden toegepast. Het is zelfs niet in de eerste plaats voor de docenten bij het M. en V.H.O. bestemd; het geeft veeleer eene handleiding voor studeerenden, meer in het bijzonder voor hen, die zich voor een examen voorbereiden. Dezen wordt op zeer duidelijke wijze uiteengezet, hoe zij moeten werken, om van hunne capaciteiten het meeste voordeel te trekken, en op welke wijze zij hunne kennis op een examen het best kunnen ten toon stellen. Dus een bij uitstek *practisch* boek, waarin wordt beredeneerd, hoeveel, en wat, met het geheugen, en wat met het verstand moet worden beheerscht, hoe een examinandus dient te reageeren op schriftelijk gestelde vragen, hoe op mondelinge, enz. Deze onderwerpen worden geïllustreerd door voorschriften, of beter gezegd door raadgevingen, bij de studie der theoretische mechanica en der limietbepalingen, bij vragen over convergentie van reeksen, onbepaalde integratie en de oplossing van differentiaalvergelijkingen.

Ook bevat het boek uitvoerige beschouwingen over definitiën en stellingen, over omkeering en ontkenning, over noodzakelijke en voldoende voorwaarden. Het komt mij voor, dat in deze afdeeling veel staat, waarmede beginnende leeraren hun voordeel kunnen doen; de ervaren leeraar weet dit alles wel en past het ook toe, al is er niet veel van verwerkt in de leerboeken, die voor schoolgebruik bestemd zijn¹⁾. Het is echter ook voor den ouden docent wel aardig, deze opmerkingen, die hij meestal verspreid aantreft, eens in onderling verband te lezen.

Ten slotte bevat het boek een groot aantal raadgevingen van meer algemeenen en van meer bijzonderen aard.

Het spreekt wel vanzelf, dat dit alles door den geleerden schrijver met groote scherpste, nauwgezetheid en duidelijkheid is uiteengezet, en dat zijn werk den lof van iemand als ondergeteekende niet behoeft, noch door diens blaam wordt gedeerd. De nu volgende opmerking is dan ook bedoeld als suggestie voor het geval dat later een herdruk noodig wordt. Het komt mij voor, dat de behandeling hier en daar wel wat kort is voor de voornaamste categorie van gebruikers, nl. voor

¹⁾ Wel in de „Bijdragen tot de methodologie van de beginselen der meetkunde,” door Ir. D. J. Kruijtbosch. (Rotterdam, Nijgh en Van Ditmar, 1931).

hen, die zich zelfstandig voor een examen voorbereiden. Een voorbeeld zou de bedoeling verduidelijkt hebben. Ik heb het oog op passages als § 155, bldz. 159 en 160 over $a = 5$ als identieke of valsche vergelijking (bedoeld is in x of x en y); ik vrees, dat menige niet of weinig geschoolde lezer de bedoeling niet spoedig zal begrijpen.

Natuurlijk is over de doelmatigheid van sommige raadgevingen verschil van meening mogelijk. Ik voor mij zou het ten zeerste betreuren, wanneer bij het schoolonderwijs het gebruik ingang zou vinden, een driehoek scheefhoekig te noemen als men bedoelt, wat tegenwoordig aangegeven wordt als willekeurige driehoek (dus rechthoekig of scheefhoekig); mij dunkt dat dit zeer groote verwarring zou doen ontstaan¹⁾.

Maar dit zijn bedenkingen op punten van ondergeschikt belang. Ik wensch het leerzame boek in veler handen. J. H. S.

AANVULLING.

Men heeft mij er op opmerkzaam gemaakt, dat mijne bespreking der leerboeken der reken- en stekunde van Dr. Joh. H. Wansink en van Dr. Vredenduin en Dr. Van Haselen aanleiding zou kunnen geven tot misverstand. Ik heb (als gewoonlijk) de aantallen bladzijden genoemd, en voorts gezegd, dat het eerste werk uitvoeriger is dan het tweede. Het zou nu verkeerd zijn, de verhouding der uitvoerigheid als bij benadering door

$$(205 + 205) : (131 + 123)$$

gegeven te beschouwen, want de 410 bladzijden van het eerste werk bevatten de leerstof van drie klassen, de 254 bladzijden van het tweede leerboek de leerstof van twee klassen der H.B.S.-B. J. H. S.

P. Wijdenes, *Beknopte Beschrijvende Meetkunde*.
Vierde druk.

Deze nieuwe druk van dit bekende werk van den Heer Wijdenes is weer met zorg herzien en ik geloof wel met zekerheid te kunnen zeggen, dat het boek weer op de hoogte van zijn tijd is gebracht. Het boek behoort zonder twijfel tot de beste Beschrijvende-Meetkundeboeken, die er bestaan. M.i. terecht is de schrijver een grote voorstander van het werken met affiniteitsassen, zowel bij de eerste en tweede projecties van een figuur in een plat vlak als bij het construeren van de neergeslagen figuur. Een eenvoudig hoofdstuk over Schaduwbeeping vestigt de aandacht op een leemte in verschillende andere leerboeken. Van cilinder, kegel en bol wordt niet meer gegeven dan men redelijkerwijze van de leerlingen mag vergen. Een twintigtal eind-examenvraagstukken heeft de schrijver geheel uitgewerkt, waarbij

¹⁾ Het is m.i. niet te vergelijken met het gebruik van het woord „kromme” (in de analytische meetkunde) waarin ook het begrip rechte lijn ondergebracht wordt, omdat in dit geval een ander woord, dat krommen in engeren zin en rechten omvat, niet in gebruik is.

meermalen de fraaie oplossingsmethoden de aandacht trekken. Toch geloof ik, dat hier voor den schrijver de mogelijkheid van een zekere beperking aanwezig is. Ik geloof nl. niet, dat hier voor de leerlingen het effect wordt bereikt, dat de schrijver er zich van voorstelt: het bestuderen van een Beschrijvende-Meetskundetekening is nl. voor hen iets totaal anders dan het zelf uitvoeren. En dat laatste moet het toch zonder twijfel zijn. Bovendien zullen er docenten zijn, die met een zekere spijt zien, dat een aantal aardige opgaven van de eindexamens niet voor huiswerk gegeven kunnen worden, omdat ze in het gebruikte leerboek geheel uitgewerkt staan. Ik krijg de indruk, dat de schrijver zelf ook al min of meer dat bezwaar is gaan aanvoelen, daar hij er in zijn voorwoord op wijst, dat van de opgaven der laatste jaren er slechts één is opgenomen. Hiertegenover staat echter, dat overal in het boek voor een voldoende hoeveelheid oefenmateriaal is gezorgd. Ook aan de figuren is de nodige zorg besteed, zodat ik niet twijfel, of deze druk zal ook zijn weg wel weer vinden. Ir. J. J. Tekelenburg.

Dr. W. J. A. Schouten, *Cosmografie*, leerboek voor het gymasiaal en middelbaar onderwijs. W. J. Thieme en Cie, Zutphen, 1940. 83 bladz., prijs f 1,25, geb. f 1,65.

De keuze van de leerstof in dit boek sluit grootendeels aan bij het bekende rapport van de Commissie-Beth. Waar de schrijver afwijkt van het standpunt der Commissie-Beth zijn wij het geheel met den schrijver eens. Een bespreking van de vaste sterren en de stelsels die zij vormen, mogen ook o.i. niet gemist worden. Wij zien overigens dit boekje als een compromis. Men kan van een leerboek eischen, dat het juist de stof bevat, die in de beschikbare tijd goed kan worden vastgelegd of men kan voor een zoo aantrekkelijk en voor de algemeene ontwikkeling zoo belangrijk vak de eisch stellen ook datgene te bevatten wat de docent daarboven nog mededeelt of zou willen mededeelen indien er voldoende tijd beschikbaar was. In dit laatste geval kunnen verschillende hoofdstukken, na zeer beknopte behandeling, aan de leerlingen ter lezing worden aanbevolen, hetgeen dan nog al of niet gemeenschappelijk kan geschieden. Zelf voorstander zijnde van het laatste standpunt, heeft ook het andere zijn goede rechten. Het onderhavige leerboek voldoet noch aan het eene noch aan het andere standpunt geheel. Wij wijzen hiervoor op de behandeling van het geo- en heliocentrische wereldbeeld, de bezwaren tegen het stelsel van Copernicus, de veranderlijke sterren en de dubbelsterren en het ontbreken van iets over sterrenspectra, tenzij dan slechts om te wijzen op de toepassing van het principe van Doppler. Aanvaarden wij een compromis dan mag dit leerboek echter uitstekend geslaagd heeten, waarbij het boekje tevens uitmunt door een heldere en vlotte, zij een ietwat gecompliceerde stijl.

Maken wij nog enkele opmerkingen:

In hoofdst. I zou opname en verklaring van een sterrenkaart voor Nederland veel kunnen bijdragen de animo der leerlingen op te wekken waardoor zij tevens voor hun leven voordeel kunnen hebben van de in couranten e.d. gebruikelijke overzichten, welke immers voor vele ontwikkelde menschen een raadsel blijven en daardoor hun doel missen. In par. 10, hoofdst. 2 raden wij aan de rol te vermelden van

Anaximander, navolger van Thales, die het eerst tot de gevolgtrekking kwam dat de aarde geen oneindige afmeting had, maar als een geheel afgesloten lichaam vrij in het heelal zweefde. In zijn bewijsvoering ligt immers reeds een grondstelling der Newtonsche mechanica opgesloten, nl. dat even groote maar tegengesteld gerichte krachten elkaar opheffen. Par. 12, 13 en 25 zien wij liever samengeweven, terwijl aan de ontdekkingen van Galilei te weinig aandacht is geschonken. Op pag. 23 bij het derde bewijs van de aswenteling der aarde missen wij slechts noode de naam van Benzenberg, wiens experimenten plaats hadden (1802) voor die van Foucault. Het is ook zeer nuttig hier te wijzen op de verbeteringen van de valproeven door Hagen (1912). Het verschijnsel van eb en vloed, dat de schrijver weglaat, vinden wij te belangrijk om gemist te worden. Wat in dit boekje vermeld staat over sterrenspectra vinden wij al te summier.

De zinsnede „geraakte in conflict met de Inquisitie der Roomsche Katholieke Kerk” (pag. 20) kan in een boekje van dit bestek beter weggelaten worden.

De gemaakte opmerkingen doen evenwel aan de waarde van het leerboek niet veel af en wij zijn ervan overtuigd dat het zijn weg wel zal vinden.

H. A. G r i b n a u.

WIJDENES EN DE LANGE

Rekenboek voor de H.B.S.

DEEL I. 18e onveranderde druk. 131 Blz. 16 fig. gec. f 1,70.

DEEL II. 11e sterk bekorte druk 84 Blz. 5 fig. gec. f 1,25.

UITGAVE P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN — BATAVIA

BIJ DE ZESTIENDE DRUK VAN DEEL I

Wat de aard van dit boekje aangaat, herhaal ik hier in het kort, wat vroeger werd geschreven. De theorie wordt zeer eenvoudig behandeld, niet als logisch sluitend geheel, maar voldoende voor het recht begrip van reeds bekende bewerkingen en vooral als basis voor algebraïsche herleidingen. De behandeling van enige theorie is volstrekt noodzakelijk; het gaat niet aan de algebra te onderwijzen als een samenvoeging van wat onbegrepen werktuiglijk gedoe en daarin ontaardt dat vak zo licht, als men het niet heeft onderheid met rekenkunde.

Verder zijn er aan het eind wat vraagstukken gegeven met vermijding van kunstjes, zodat er voldoende ruimte is voor zorgvuldige bewerking, zowel naar vorm als inhoud. De leraar, die denkt, dat de leerlingen hieraan reeds ontwassen zijn, vergist zich sterk.

De theorie van de evenredigheden onderscheidt zich door bijzonder eenvoudige behandeling, omdat de algebra als basis kan dienen.

Amsterdam Zuid

Jac. Obrechtstraat 88.

P. WIJDENES.

BIJ DE ZEVENTIENDE DRUK;
de **achttiende** is een onveranderde herdruk.

Het leerplan 1937 voor het vak Rekenen voor de eerste klas luidt als volgt:

De natuurlijke getallen. Hoofdbewerkingen. Uitbreiding van het getalbegrip: (het getal nul, de negatieve getallen). De gebroken getallen. Ontbinding in factoren; grootste gemene deler en kleinste gemene veelvoud. — Verhoudingen. Evenredigheden. Practische oefeningen in het rekenen. Hoofdrekenen.

Dit programma was op een kleinigheid na reeds de inhoud van alle vorige drukken; alleen wat tussen haakjes staat, vond men er niet en vindt men nog niet in deze herdruk. Over het getal nul is immers al heel weinig te zeggen en de negatieve getallen worden in de algebraboeken behandeld.

Toegevoegd zijn de bladzijden 71—84 met vraagstukjes voor hoofdrekenen; geschrapt zijn de voorbeelden I—IV aan het begin van § 27 en enige vraagstukjes van § 29.

Op 23 Oct. 1937 is er een vergadering gehouden van leraren in Wiskunde, waarin allerlei vragen werden gesteld; (zie het artikel van Dr. Wansink in „Euclides” Jg XIV blz. 72—85). Vraag 8 luidde: „Verwacht men, dat de Rekenkunde in de eerste klas behandeld wordt, zoals dat geschiedt in de „Beknopte Rekenkunde” van Wijdenes of is het peil van het „Rekenboek” van denzelfden schrijver voldoende?” Het antwoord van den Heer Van Andel luidde in het kort aldus: „Het rekenonderwijs in klasse I zij voor een groot deel taalonderwijs. Welk een nuttige oefening is het niet de leerlingen een behoorlijke opsomming te laten geven van de eigenschappen, die ze gebruiken, wanneer ze een vermenigvuldiging als 27×237 uitvoeren. Men behoeft over talstelsels en repeterende breuken niet te spreken.” (Deze onderwerpen stonden reeds in alle drukken als „aantekening”; ik heb ze laten staan; ieder kan er mee doen, wat hij wil; de repeterende breuken te behouden als eerste kennismaking met oneindige processen, de tweede is de worteltrekking, lijkt me nog zo kwaad niet).

Al is het antwoord van den inspecteur nu niet precies antwoord op de vraag, zo lees ik er toch in, de mening van den Heer Van Andel vrij goed kennende, dat ook de **bescheiden theorie van dit „Rekenboek” voldoet aan geest en bedoeling van het leerplan.** Dat er leerstof voor het Rekenen in het leerplan is aangegeven,

zal ook inhouden, dat men er op alle scholen ook werkelijk wat aan zal doen; er zijn nog heel wat H.B.S., die geen leerboek op hun boekenlijst hebben staan of het slechts afdoen met een sommenboekje. Er zijn nog meer Gymnasia en Lycea, die het Rekenen links laten liggen of enkel volstaan met wat over evenredigheden. Dat de rekenkunde in het leerplan is opgenomen betekent voor hen, die er niets aan deden: „voortaan zult ge er voldoende zorg aan besteden”. De bedoeling van hetgeen het leerplan eist, zou ik kort en bondig aldus willen uitdrukken: „alle wiskunde steunt op de rekenkunde; zorg dus voor een goede grondslag; deze bestaat in . . .”; zie boven, lezer.

Nu wil ik wel gaarne antwoord geven op vraag 8, die in de vergadering gesteld is; ik heb beide boeken welbewust geschreven op verschillende wijze; het „Rekenboek” bij de vele herdrukken, ook bij deze, niet verzwaard, de „Beknopte Rekenkunde” wel hier en daar vereenvoudigd. Het karakter van beide schoolboeken is niet gewijzigd; het eerste is een eenvoudige rekenkunde als inleiding tot de algebra; geen sluitend geheel; aan de intuïtie wordt wel een en ander overgelaten. Het tweede is een zuivere theorie der rekenkunde, maar voor de leerlingen vrij zwaar. Alleen de leraar, die zelf veel voelt voor strengheid, zal succes hebben bij het gebruik van de „Beknopte Rekenkunde”. Ik meen, dat het overgrote merendeel liever het „Rekenboek” houdt, omdat ze van mening zijn, evenals ik, dat ook dit voldoende ondergrond geeft voor de algebra en de meetkunde.

Mijn antwoord op vraag 8 luidt dus: het peil van het Rekenboek is inderdaad voldoende; wie een volmaakt stevige grondslag meent te moeten en te kunnen leggen, laat die de Beknopte Rekenkunde nemen. Deze staat bij het Rekenboek echter achter in de behandeling van de onnauwkeurige getallen en het werken er mee.

Het verschil laat ik nog eens in deze bewoordingen uitkomen:

Het Rekenboek geeft in eenvoudige vorm het practisch bereikbare; dat de 17e druk en spoedig er op de 18e van deel I verschijnt, de 11e van deel II (deze sterk bekort!) zegt voldoende, dat de meeste collega's mijn mening delen; het leerplan 1937 kan niet bedoelen, dat het voortaan anders *moet*. Wel, dat het anders *kan*, nl. in de trant van de Beknopte Rekenkunde; een theorie, gaaf van vorm en inhoud, die slechts door een ervaren docent met veel gevoel voor exactheid goed kan worden onderwezen.

P. W.

INHOUD VAN DE 18e DRUK VAN HET EERSTE STUKJE.

De theorie tot het nodige beperkt; in eenvoudige woorden op 70 bladzijden, klein formaat, waarvan ongeveer 30 bladzijden vragen en oefeningen.

— Inleiding — Optelling — Aftrèkking — Vermenigvuldiging — Gedurige producten — Machten, G.G.D. en K.G.V. — Quotienten. — Deling — Kenmerken van deelbaarheid — G.G.D. door deling. — Verhoudingen — Evenredigheden.

Rekenen uit het hoofd. blz. 71 — 85

Vraagstukken. blz. 86—114

Cijferoefeningen. blz. 115—122

Aantekeningen. blz. 123—131

INHOUD VAN DE 11e DRUK VAN HET TWEEDE STUKJE.

Vierkantsworteltrekking — Benaderde waarden — Optelling en Aftrèkking — Vermenigvuldiging — Deling — Worteltrekking — Rekenkundige reeksen — Afhankelijkheid van grootheden.

Vraagstukken. blz. 68—84

[blz. 1—67]

„Evenals hij acht ik het van groot belang, de eigenschappen correct in woorden te laten formuleren, waarbij men zorge, dat de zin der woorden bewust wordt. **Nog altijd geeft het oude „Rekenboek voor de H.B.S.” van Wijdenes en De Lange voor dit onderwijs prachtige leerstof.**”

Aldus Dr. A. Heyting in het artikel: „Wiskundige strengheid in wetenschap en school.” Euclides Jg. 17 blz. 91.

KORRELS.

LII.

OPMERKING OVER NOTATIE

(naar aanleiding van ontwerp-normaalblad V 1267¹⁾).

Het lijkt mij niet gewenscht, het vectorieele karakter eener grootheid aan te geven, door de letter, die de grootheid aanduidt, te voorzien van een teeken er *boven*. Ik geef (zulks in tegenstelling met anderen) het vectorieele karakter door *onderstreping* aan. De reden hiervan is, dat men somtijds (ook in de elementaire gedeelten der wetenschap, en dus bij het schoolonderwijs) te maken krijgt met gemiddelde vectorgrootheden; het gemiddelde kan dan door een streepje er boven worden aangegeven (zooals ook het ontwerp-normaalblad V 1267 voorstelt), het vectorieele karakter door een streepje of ander teeken er onder. Dus b.v.

scalaire snelheid v

scalaire gemiddelde snelheid $\overline{v}$

snelheidsvector $\underline{v}$

gemiddelde-snelheidsvector $\underline{\overline{v}}$

Het ligt dan voor de hand, den door twee letters aangeduiden vector ook door onderstreping aan te geven: $\underline{AB}$, waarmede meteen onderscheid is gemaakt tusschen vector $\underline{AB}$ en lijnstuk $\overline{AB}$, (waarvoor het ontwerp-normaalblad geen notatie voorstelt).

J. H. S.

LIII.

DE BEREKENING VAN LIJNSTUKKEN IN EEN DRIEHOEK.

Men kan in het algemeen zeggen, dat de docenten, die in de laatste tijd een vernieuwing van het wiskunde-onderwijs verdedigd hebben in de zin van een verdieping, tegelijkertijd op vereenvoudiging aandrongen. Niet alleen keurden ze de opgaven af, die het uitvindend vermogen van de leerlingen op een te zware proef stellen,

¹⁾ Zie „Euclides” XVI, blz. 240—242.

maar ze vroegen ook versobering met betrekking tot het materiaal in de vorm van stellingen, formules enz., waarvan men eist, dat de leerling het op elk tijdstip tot zijn beschikking heeft.

Als voorbeeld hoort men dan in de regel noemen het hoofdstuk van de berekening van lijnstukken in de driehoek. Bij de oude gang van het onderwijs (misschien is hij nog niet verouderd) kreeg de leerling de beschikking over: twee stellingen betreffende evenredigheden in de rechthoekige driehoek, de stelling van Pythagoras, de projectie-stelling (2 gevallen), een formule voor de berekening van een projectie, als de 3 zijden gegeven zijn, de hoogtelijnformule, formules voor zwaartelijn en bissectrix, en de stelling van Stewart.

Hiertegenover heeft men opgemerkt, dat de leerling volstaan kan met de kennis van de stelling van Pythagoras. Om me te beperken schrijf ik ditmaal niet over de vereenvoudiging, die te bereiken is door op gepaste wijze van de goniometrische verhoudingen en de directe tafel gebruik te maken.

Het schijnt me niet overbodig, dat er eens op gewezen wordt, dat men door vereenvoudiging van het materiaal *niet* bereikt, dat het onderwijs gemakkelijker wordt in deze zin, dat een minder goed aangelegde leerling een betere kans krijgt, het onderwijs te volgen. We mogen niet ontkennen, dat we het er hem moeilijker door maken. Wanneer hij de stellingen en formules in het geheugen heeft geprent, en er zich lange tijd ijverig mee geoefend heeft, dan is het nog meer gevoel dan overleg, dat hem in staat stelt, voor elk geval, dat zich voordoet, uit het materiaal de juiste keuze te doen. Zulk een leerling, van wien men op het punt van inzicht weinig verwacht, kan een goed figuur maken bij onze examens, en uitstekend slagen zelfs bij voortgezette studie, mits deze in de goede richting gekozen is.

In het belang van zulke leerlingen rust dan ook op ons de taak, methoden aan te wijzen, liefst van algemene aard, die voor hen een aanwijzing zijn, hoe ze het beperkte materiaal kunnen gebruiken. Daarom zou ik me bij de behandeling van het bovengenoemde onderwerp niet willen beperken tot de kennis van de stelling van Pythagoras, uit de leer der oppervlakten afgeleid, maar ik wil er aan toevoegen de stelling, die dadelijk uit deze stelling is af te leiden: een hoogtelijn verdeelt de zijde, waarop ze neergelaten is, in twee stukken zo, dat het verschil van hun kwadraten gelijk is aan het verschil van de kwadraten van de aangrenzende zijden.

Ik zal in het kort nagaan, hoe men hiermee kan werken. Voor-
eerst de rechthoekige driehoek. Bekend is alleen de stelling van

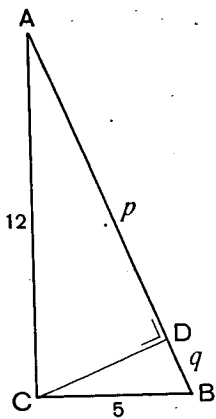


Fig. 1.

Pythagoras en de eruit afgeleide stelling; de
gelijkvormigheid is nog niet behandeld. Ge-
geven: de rechthoekszijden zijn lang 5 en 12,
dus de hypotenusa 13. Willen we de lengten
 p en q weten van de stukken, waarin de hoog-
teliijn de hypotenusa verdeelt, dan zeggen we:

$$p^2 - q^2 = 12^2 - 5^2 = 119;$$

$$\text{dus } p - q = \frac{119}{13} = 9\frac{2}{13};$$

$$\text{en } p + q = 13, \text{ dus } p = 11\frac{1}{13}, q = 1\frac{2}{13}.$$

Hierna is ook de hoogteliijn bekend door
middel van de stelling van Pythagoras (de
gewone manier, waarbij we eerst de hoogte
met behulp van de oppervlakte vinden en daarna
één van de stukken met behulp van de

St. v. P. is hier even eenvoudig).

Met even weinig moeite berekenen we in de scheefhoekige drie-
hoek de stukken, waarin een hoogteliijn een zijde verdeelt, en die
hoogteliijn zelf. Immers is ook hier (denk gemakshalve $b < a$):

$$p^2 - q^2 = a^2 - b^2, \text{ dus } p - q = \frac{a^2 - b^2}{c}, \text{ en } p + q = c.$$

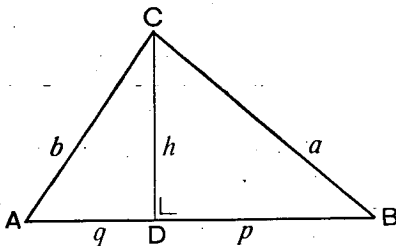


Fig. 2.

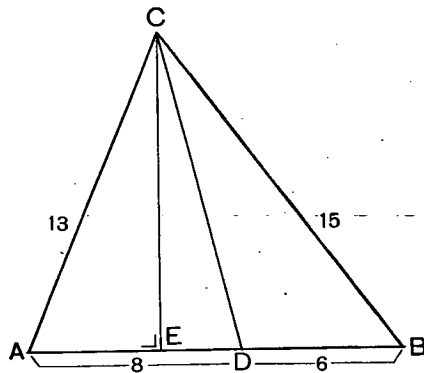


Fig. 3.

In de plaats van een zwaarteliijn en een deellijn bereken ik nog

¹⁾ Doen we aldus, dan kan q nog negatief uitvallen; we vinden
 $q < 0$, als $\frac{a^2 - b^2}{c} > c$, dus $a^2 > b^2 + c^2$ is; hoek A is dan stomp. We
kunnen ook anders handelen; ik laat dit aan den lezer over.

de lengte van het lijnstuk, dat een hoekpunt met een willekeurig punt van de overstaande zijde verbindt. Zij in fig. 3:

$AC = 13$, $BC = 15$, $AD = 8$, $DB = 6$. Gevraagd CD .

Zij $CE \perp AB$; $AE = q$, $EB = p$.

$$CB^2 - AC^2 = p^2 - q^2, \text{ dus } p - q = \frac{15^2 - 13^2}{14} = \frac{28.2}{14} = 4.$$

Uit $p + q = 14$ volgt $p = EB = 9$.

Hierna is $CE = \sqrt{15^2 - 9^2} = 12$ en $ED = 9 - 6 = 3$.

Ten slotte $CD = \sqrt{12^2 + 3^2} = \sqrt{153}$. (Anders, omdat CE niet nodig is: $CD^2 - AC^2 = ED^2 - AE^2 = 9 - 25 = -16$; dus $CD^2 = \sqrt{169 - 16} = \sqrt{153}$).

Er is geen bezwaar tegen, de lengten door letters voor te stellen, en de bekende formules te doen ontstaan; nuttig en zelfs nodig is dit met het oog op de algebraïsche herleidingen, die men erbij uitvoert. Ook kan men uit die formules belangwekkende waarheden afleiden. Maar deze formules en waarheden moeten nu niet vastgelegd worden; de afleiding dient slechts ter oefening.

Het lijkt me geheel overbodig, na de berekening van de lijnstukken de oppervlakten opnieuw aan de orde te stellen om de s -formule te bewijzen. De afleiding van deze formule is een nuttige toepassing van de ontbinding in factoren, maar het is niet de bedoeling, dat de formule gememoriseerd en toegepast wordt. Het gebruik van de formule heeft toch geen enkel voordeel boven de toepassing van de boven aangegeven methode om de hoogtelijn te berekenen; ook daarbij komen we tot uitdrukkingen, die logaritmisch zijn. ¹⁾

Ik ben me wel bewust, dat het slechts een kleinigheid is, die ik hier onder de aandacht breng, maar het succes van ons pogen is van kleinigheden afhankelijk. Ook is de aangegeven gedragslijn zo voor de hand liggend, dat ik niet kan geloven, dat de gedachte nieuw is; ik vond haar echter in geen enkel boek aangewezen of gevolgd. ²⁾

H. J. E. B.

¹⁾ Voor de boldriehoek geldt: een hoogtelijn verdeelt de zijde, waarop ze getrokken is, in twee stukken, zodat de verhouding van hun cosinussen gelijk is aan de verhouding van de cosinussen der aangrenzende zijden. Hier kunnen we dus op geheel overeenkomstige wijze te werk gaan.

²⁾ Wijdenes maakt er mij opmerkzaam op, dat wat op blz. 139 staat, te vinden is in diens meetkundeboeken, zie o.a. Meetkundige vraagstukken II § 27 nr. 63 en § 36 nr. 23.

WIJSBEGEERTE DER WISKUNDE ¹⁾

DOOR

E. W. BETH.

Het zou mij niet verwonderen, wanneer sommigen van mijn toehoorders de woordcombinatie „wijsbegeerte der wiskunde” hoogst zonderling in de oren klonk. Immers, de opvatting is nog altijd zeer verspreid, dat wijsbegeerte en wiskunde twee denkwijzen vooronderstellen, die niet alleen nauwelijks punten van aanraking vertonen, maar zelfs in de grond aan elkaar zijn tegengesteld. Om de hegeliaanse terminologie te bezigen: de wijsbegeerte zou het *redelijke denken* vereisen, terwijl de wiskunde bij uitstek als het gebied van het *verstandige denken* zou zijn te beschouwen.

Bij denkers als *Hobbes*, *Berkeley*, *Schopenhauer* uit zich het antagonisme tegenover het wiskundig denken als een incidentele kritiek op de wiskunde van hun tijd; een poging, de tussen wijsgerig en wiskundig denken onderstelde tegenstelling principiëel te funderen is bij mijn weten het eerst door *Kant* ondernomen. In *Kant's* wijsbegeerte is dan ook — hoe vreemd dit overigens moge schijnen bij *Kant's* blijkbare voorliefde voor de wiskunde — de oorsprong te zoeken van de voor de wijsbegeerte na 1800 karakteristieke vervreemding van het wiskundig denken. Echter, vóór ik overga tot een nader onderzoek van de gronden, waarop *Kant* zich beroept, wil ik U in gedachten terugvoeren naar een vroeger tijdperk in de ontwikkeling van het denken, dat een tegenstelling als de hier bedoelde nog niet kende.

Wanneer wij de geschiedenis van onverschillig welke theoretische wetenschap — voor de toegepaste wetenschap geldt, wat ik nu ga zeggen, niet steeds — in teruggaande richting doorlopen, dan bereiken we onherroepelijk een tijdstip, waar deze wetenschap door aftakking uit de wijsbegeerte ontstaat. Vóór dat tijdstip valt de geschiedenis van die wetenschap met die der wijsbegeerte samen. Zo ontstaat de natuurkunde als zelfstandige wetenschap eerst met

¹⁾ Voordracht, gehouden 15 April 1940 voor de Vereeniging voor Wijsbegeerte te Amsterdam.

de verschijning van *Newton's „Principia”*, en de aanduiding „natuurphilosophie” verraaft nog tot op heden haar oorsprong; een bijzonder karakteristiek voorbeeld van zinloos gebruik van de term „natuurphilosoof” levert onderstaande advertentie uit de „Telegraaf”:

Groote industriele onderneming op pharmaceutisch gebied
vraagt *eenige jonge, afgestudeerde*

NATUURPHILOSOPHEN

(apothekers, chemici of biologen), die, na een opleidings-
tijd van ± 2 jaar in den buitendienst (artsen bezoeken),
in het bedrijf eventueel kunnen worden opgenomen. Ons
personeel is op de hoogte van deze advertentie.

Veel verder moeten we teruggaan in de geschiedenis, willen we de geboortedatum van de wetenschappelijke wijsbegeerte leren kennen: tot de tijd nl., dat de eleatische school bloeide. Weliswaar werd ook vóór *Parmenides* en *Zeno* de wiskunde reeds om haarszelfs wille, zij het in nauwe samenhang met de wijsbegeerte, beoefend; maar eerst de eleatische school heeft de stoot gegeven tot het ontstaan van de kritische beschouwing van de toegepaste redeneringen, die sindsdien in steeds stijgende mate voor de wetenschappelijke beoefening van de wiskunde karakteristiek is geworden.

Dankt echter de wiskunde, zoals wij die thans kennen, en die daardoor kan worden gekarakteriseerd, dat ze evenveel aandacht besteedt aan de fundering van haar resultaten als aan die resultaten zelf, haar ontstaan en haar eerste ontwikkeling aan de (eleatische en platonische) wijsbegeerte, spoedig ging zij haar eigen gang en deed zij zelfs omgekeerd haar invloed gelden op de wijsbegeerte. Dat dit moest geschieden, is als volgt begrijpelijk te maken.

Als kenmerk van alle theoretische wetenschap en i.h.b. van alle wijsbegeerte pleegt men te beschouwen, dat ze zich betreft op het *algemene*; niet op datgene, wat men in bijzondere gevallen empirisch kan constateren, maar integendeel op dat, wat aan al die bijzondere gevallen geméén is. Volgens die beschouwing spreekt, om een term van *Mannoury* te gebruiken, de wetenschap steeds in de *taalvorm van de algemeenheid*.

Deze opvatting geeft aanleiding tot bepaalde moeilijkheden: de *geschiedenis* b.v. kan immers in dit verband moeilijk als een wetenschap worden beschouwd. Dat inderdaad de geschiedenis werd gezien als tegenpool van de wijsbegeerte, blijkt thans nog uit de term „natuurlijke historie”, van oudsher gebruikt als tegenhanger van „natuurphilosophie”. De natuurkundigen der XVIIIe eeuw, zoals 's *Gravesande*, beschouwden zich nog als vakphilosophen.

Kon onder het gezichtspunt van de algemeenheid de geschiedenis (en met haar de overige beschrijvende wetenschappen — de verklarende wetenschappen danken juist aan hun opsporen van oorzaken en gronden de mogelijkheid tot generalisatie) niet als wetenschap in strenge zin gelden, ook ten aanzien van andere wetenschappen rijzen er moeilijkheden (probleem der *universalia*). Het is nl. de vraag, of de wetenschap zich op het algemene direct, dan wel indirect — d.w.z. via het bijzondere — betreft. Men philosopheert, om een voorbeeld te noemen, niet over de nederlandse, de duitse, de engelse staat, maar over *de* staat, over de staatsidee. En toch staat ons filosoferen over de staat niet los van onze empirische kennis der bijzondere staten.

Het *rationalisme* leert nu, niet alleen dat onze kennis der bijzondere staten, maar (in zijn meer radicale vorm) ook, dat alle staten zelf en hun instellingen onmogelijk zouden zijn, wanneer niet de staatsidee in ons werkzaam was, wanneer niet ons denken zich op het algemene in de staat onmiddellijk kon betrekken. Het *empirisme* staat skeptisch tegenover deze onmiddellijke betrekking van het denken op de staatsidee en meent, dat deze laatste eerst door bemiddeling van de empirische kennis der afzonderlijke staten door ons kan worden ontwikkeld.

De geijkte instantie van het rationalisme tegenover het empirisme is nu de *wiskunde*. Van de wiskunde immers kan moeilijk worden betwijfeld, dat ze zich onmiddellijk op het algemene betreft. *Kant*, overigens evenmin van het dogmatisch rationalisme als van het dogmatisch empirisme een aanhanger, bracht het bijzonder karakter van de wiskunde aldus onder woorden: „De wiskunde geeft ons een schitterend voorbeeld, hoe ver wij het in de kennis a priori onafhankelijk van de ervaring kunnen brengen”. Door het voorbeeld, dat de wiskunde levert, schijnt nu ook de aspiraties van de rationalistische wijsbegeerte in principe de weg ter verwerkelijking te worden geopend.

Het bestaan der wiskunde vormt dus op zich zelf blijkbaar in zekere zin een rechtvaardiging van de aspiraties van het rationalisme. Behoeft het ons dan te verwonderen, dat de rationalisten de wiskunde aan de wijsbegeerte ten voorbeeld gingen stellen? De eerste uiting van deze gedachte vinden we bij *Descartes*, bij gelegenheid van zijn formulering van het plan voor een *mathesis universalis*; in een brief (*Clerselier* T. I no. III) schrijft hij:

„Overigens merk ik op, dat hieraan een andere uitvinding kan worden toegevoegd, zoowel om de woorden dezer oorspronkelijke taal (bedoeld is de z.g. „lingua adamica”, de gemeenschappelijke oorsprong en grondslag van alle talen), als om de tekens te vinden, zodanig, dat ze in de kortste tijd kan worden geleerd, en wel . . . doordat men de orde vaststelt tussen alle gedachten, die in de menselijke geest maar kunnen opkomen, zoals er ook tussen de getallen een van nature vaststaande orde is; zoals men iemand in één dag kan leren, alle getallen tot in 't oneindige in een onbekende taal te benoemen en te schrijven, zo zou hetzelfde met alle andere woorden kunnen gebeuren de verwerkelijking van zulk een taal hangt af van de ware wijsbegeerte. Want zonder deze is het onmogelijk alle gedachten op te sommen of ordelijk áán te geven. . . . Ik houd het er voor, dat deze taal mogelijk is, en dat de wetenschap, waarvan ze afhangt, gevonden zou kunnen worden; met behulp ervan zou zeker elke boer de waarheid over de dingen beter beoordelen dan nu een filosoof . . . de hele aarde zou echter in een aards paradijs moeten veranderen, wat alléén maar in sprookjes gebeurt.”

Descartes heeft ter verwerkelijking van zijn idee der *mathesis universalis* weinig bijgedragen; maar *Leibniz* heeft meer bereikt — op de geometrische methode van *Spinoza*, die een meer uiterlijke aanpassing van de wijsbegeerte aan de wiskundige taalvorm betekent, behoef ik hier niet in te gaan —, nl. de formulering van de eerste beginselen der *logistiek*.

De gedachte der *mathesis universalis*, de mening, volgens welke de wijsbegeerte naar het voorbeeld van de wiskunde zou kunnen en moeten worden opgebouwd, heeft *Kant* gedurende zijn gehele loopbaan bestreden. Merkwaardig is daarbij, dat de kritiek, die *Kant* in 1764 („*Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*”), dus vóór de verovering van het kritisch standpunt, leverde, in de „*Kritik der*

PROSPECTUS

Verschenen:

GONIOMETRIE EN TRIGONOMETRIE

DOOR

P. WIJDENES

Amsterdam



VIJFDE DRUK

371 bladzijden, 205 figuren;
bovendien een inlegblad met
formules.

Stevig gebonden *f* 6.75

ANTWOORDEN - 2.50

P. NOORDHOFF N.V. — 1940 — GRONINGEN-BATAVIA

HET GRIEKSE ALFABET.

α	A	alpha	a
β	B	bêta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	dêlta	d
ϵ	E	epsilon	e
ζ	Z	zêta	z
η	H	êta	ê
θ of ϑ	Θ	thêta	th
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mu	m
ν	N	nu	n
ξ	Ξ	xi	x
$\omicron$	O	omikron	o
π	Π	pi	p
ρ	P	rho	r
σ of ς	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Y	upsilon	u
φ	Φ	phi	ph
χ	X	chi	ch
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	omega	oo

In dit boek komt het voor, dat het argument van een goniometrische functie wordt uitgedrukt in radialen. De enige tafel, die daarbij kan dienen, is

J. VERSLUYS, GROTE TAFEL H

in drie kleuren. Derde druk. 296 blz., geb. f 2,90.

Wit I. Gewone logaritmen — Rose II De log. der gon. functies — Wit III De gon. functies, argument zowel in graden als in radialen, met interpolatietafels. Groen IV Bijtafels.

Uitgave van P. NOORDHOFF—Groningen-Batavia

BIJ DE VIJFDE DRUK.

De volgorde van de hoofdstukken is enigszins anders dan in de vorige drukken. Op de goniometrie hebben we nu de vergelijkingen laten volgen, omdat de oplossingen daarvan toepassingen zijn van de goniometrie. We bereiken daarmee nog een tweede doel: men kan nu bij de trigonometrie de vraagstukken ook behoorlijk bespreken.

Het hoofdstuk over cyclometrische functies is naar achteren verschoven. Dat over toegepaste driehoeksmeting is vervallen; het kon de toets van een redelijke kritiek niet doorstaan; dit zal wel het geval zijn met het nieuwe hoofdstuk XVIII, geschreven door den Heer Meertens, landmeter bij het kadaster; deze inleiding geeft den lezer een juiste kijk op de practijk. Gaarne brengen we hem dank voor de welwillendheid, waarmee hij ons van dienst is geweest.

Verder vestigen we de aandacht op de volgende minder ingrijpende veranderingen, die alle verbeteringen beteken.

1) Een ruim gebruik van de sinustafel, dat is de tafel van de goniometrische verhoudingen, zo genoemd in tegenstelling met de logarithmen-sinustafel; zie hoofdstuk VI en vele berekeningen.

2) Verplaatsing van de grafieken en uitbreiding, zie hoofdstuk XV.

3) Betere behandeling van de optellingsformules; zie hoofdstuk VII.

4) Verplaatsing van de theoretische grondslag van de formules, die men gebruikt bij de kleine hoeken; zie § 134.

5) Sterke vereenvoudiging van de paragraaf, waarin R , r en r_a worden berekend en allerlei andere lijnstukken; zie § 107.

6) Verbeterd is de behandeling van de vergelijking $a \cos x + b \sin x = c$; de meetkundige oplossing, veel mooier dan die in de vorige druk, vindt men in § 128.

Verder zijn allerlei kleinigheden veranderd, hier is wat bekort, daar wat uitgebreid, elders wat weggelaten of een enkele nieuwigheid verwerkt, b.v. de ongelijkheden; te veel om op te noemen.

Met nadruk wordt er op gewezen, dat deze nieuwe druk gemakkelijker door te werken is dan de vorige; daartoe dragen niet weinig bij de uitgewerkte voorbeelden, 120 in getal, die men verspreid vindt in alle hoofdstukken. Het opnemen daarvan en van de hoofdstukken XV en XVIII en de vermeerdering van het aantal figuren van 125 tot 205 heeft vanzelf enige uitbreiding van de omvang tot gevolg gehad.

Ten slotte moeten we nog zeggen, dat dit werk aan alle eisen voldoet, die de examens Wiskunde L.O. en K1 stellen. Voor K1 heeft

men het hele werk nodig; het zal de kandidaten een geringe moeite kosten, ook kennis te nemen van de practische toepassingen, die de Heer Meertens in het laatste hoofdstuk zo duidelijk heeft ingeleid. De kandidaten voor L.O. kunnen een en ander overslaan; in het bijzonder noemen we de volgende paragrafen: 41, 42, 54, 70, 71, 110, 131, 133, 134, 139 en 141.

De opleider voor de akte Wiskunde L.O. stelle zich tot taak enige schifting te maken in de vraagstukken, al naar aanleg en ijver van zijn leerlingen. Wij hebben niet meer met sterretjes aangegeven, welke vraagstukken naar onze mening door kandidaten L.O. kunnen worden overgeslagen; het is nl. al gebeurd, dat een vraagstuk uit dit boek, gemerkt met een sterretje, op het schriftelijk examen werd opgegeven.

Gaarne spreek ik hier mijn dank uit aan mijn medewerkers Harlaar en Herreilers voor alles en dat is heel veel, wat zij aan dit boek hebben gedaan. Men beschouwe dit werk als de vrucht van onze innige samenwerking. Wij houden ons alle drie aanbevolen voor op- en aanmerkingen, die dit boek ten goede kunnen komen; van alle gebruikers, ook van studerenden dus.

Een nieuw boekje met antwoorden en aanwijzingen verschijnt vrijwel tegelijk met deze herdruk.

Amsterdam Zuid
Aug. 1940.

P. WIJDENES.

INHOUD.

GONIOMETRIE	1—159
Hoofdstuk I. Inleiding. Scherpe hoeken.	1—11
Hoofdstuk II. Goniometrische verhoudingen van andere dan scherpe hoeken.	12—21
Hoofdstuk III. Bijzondere waarden en het verloop van de goniometrische verhoudingen	22—29
Hoofdstuk IV. Algemene formules voor willekeurige hoeken	30—36
Hoofdstuk V. Goniometrische verhoudingen als lijnstukken	37—45
Hoofdstuk VI. De tafel van de goniometrische verhoudingen en van hun logarithmen	46—62
Eerste herhaling	62
Hoofdstuk VII. Optellingsformules	64—84
Hoofdstuk VIII. Toepassingen van de optellingsformules	85—105
Tweede herhaling.	106
Hoofdstuk IX. Goniometrische vergelijkingen.	110—142
Hoofdstuk X. Uiterste waarden	143—156
Derde herhaling	156
TRIGONOMETRIE	160—257
Hoofdstuk XI. Rechthoekige driehoeken	160—170
Hoofdstuk XII. Scheefhoekige driehoeken.	170—197
Hoofdstuk XIII. Merkwaardige lijnen in de driehoek . . .	198—220
Hoofdstuk XIV. Vierhoeken.	221—249
Vierde herhaling.	250
Hoofdstuk XV. Grafieken.	258—289
Hoofdstuk XVI. Cyclometrische functies	290—304
Hoofdstuk XVII. Stereometrische toepassingen.	305—317
Hoofdstuk XVIII. Landmeetkunde door A. J. H. Meertens .	318—345
Algemene herhaling	346

Voorbeeld 98. Teken de grafiek van de functie:

$$y = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x$$

in het interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Opl. (zie fig. 146). De functie is te herleiden tot:

$$y = \sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x}.$$

We stellen nu (zie blz. 123 en voorbeeld 60) $\sin x + \cos x = p$; dan gaat de functie over in:

$$y = p + \frac{2(1+p)}{p^2-1} = p + \frac{2}{p-1} = \frac{p^2-p+2}{p-1}.$$

Daar $p^2 - p + 2 > 0$ is voor elke waarde van p , heeft de functie geen nulpunten. De pool is $p = 1$, die overeenkomt met $x = 0^\circ, 90^\circ$ en 360° ; de grafiek zal dus 3 verticale asymptoten vertonen. De uiterste waarden van de functie vindt men het eenvoudigst door hem te schrijven als:

$$y = (p-1) + \frac{2}{p-1} + 1,$$

waarbij de eerste twee termen een constant product hebben, nl. 2. De

functie $z = p - 1 + \frac{2}{p-1}$ heeft dus het relatieve minimum $2\sqrt{2}$ voor

$p = 1 + \sqrt{2}$ en het relatieve maximum $-2\sqrt{2}$ voor $p = 1 - \sqrt{2}$.

Hiervan vervalst de eerste uiterste waarde, daar $|p| \leq \sqrt{2}$ moet zijn.

In plaats daarvan treedt een relatief minimum op, als de beide termen zo

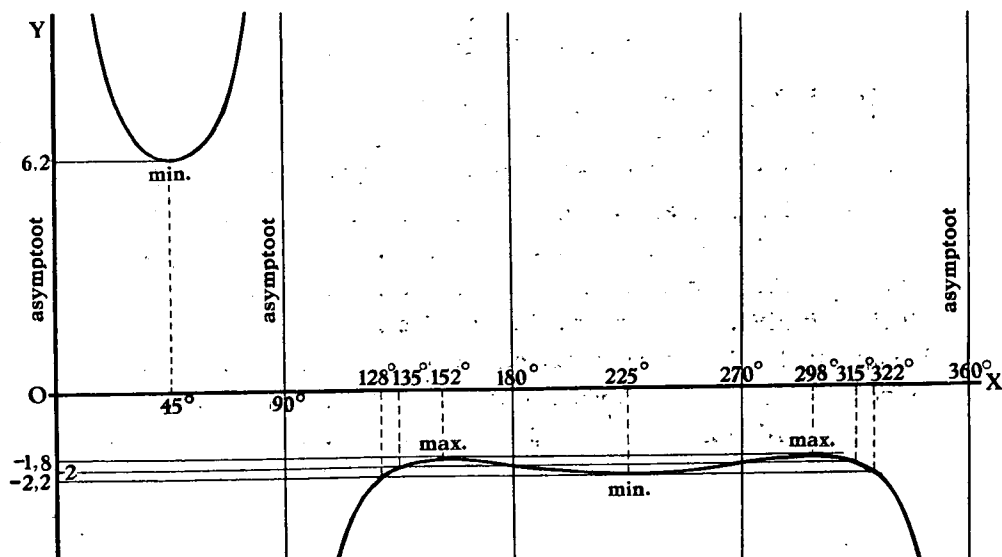


Fig. 146 (eenheid op de Y-as $\frac{1}{2}$ cm).

weinig mogelijk verschillen¹⁾, dus voor $p = \sqrt{2}$; het minimum is dan $1 + 3\sqrt{2}$. We vinden voor y dus het relatieve minimum $2 + 3\sqrt{2}$ voor

HOOFDSTUK XVII.

Stereometrische toepassingen.

§ 143. De rechthoekige drievlakshoek.

We geven in het volgende enige toepassingen van de gonio- en trigonometrie op de stereometrie; natuurlijk is hiertoe enige kennis van de stereometrie nodig ¹⁾. Sommige van deze toepassingen worden eerst bij de boldriehoeksmeting behandeld, we zullen echter laten zien, dat ze eenvoudig met behulp van de vlakke driehoeksmeting behandeld kunnen worden. Ook zullen we een paar van de belangrijkste formules uit de boldriehoeksmeting op eenvoudige wijze afleiden.

We beginnen met de afleiding van een paar formules voor de rechthoekige drievlakshoek. Daartoe zetten

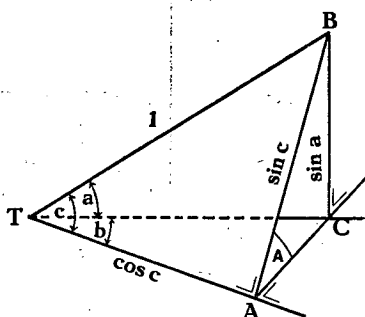


Fig. 171.

we van de top T uit op een ribbe van een der scheve hoeken het stuk $TB = 1$ uit (zie fig. 171), waarna we door B een sluitvlak aanbrengen loodrecht op de ribbe van de andere scheve hoek, dat deze ribbe in A snijdt en de derde ribbe in C. Zijn a , b en c de zijden van de drievlakshoek, waarvan we aannemen, dat ze alle kleiner dan 90° zijn, dan heeft men:

$$BC = \sin a, \quad TC = \cos a, \quad AB = \sin c \quad \text{en} \quad TA = \cos c.$$

Hieruit volgen onmiddellijk de formules:

$$(173) \quad \cos c = \cos a \cos b;$$

$$(174) \quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c},$$

die opv. de **cosinusregel** en de **sinusregel** voor de rechthoekige drievlakshoek worden genoemd.

Men heeft verder nog in fig. 171:

$$\cos A = \frac{AC}{\sin c} = \frac{\cos c \operatorname{tg} b}{\sin c} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c};$$

¹⁾ Zie Dr. P. Molenbroek, Stereometrie, 8e druk.

SCHOOLBOEKEN OVER DRIEHOEKSMETING

P. WIJDENES.

Beknopte driehoeksmeting, 8e druk, 157 blz.,
68 fig., gec., met formules in één deel *f* 2.25.
Antw. *f* 1.—.

Afzonderlijk: A 50 blz. 25 fig. *f* 0.75 en B 107 blz.
43 fig. *f* 1.35.

A Scherpe hoeken. — Andere hoeken. — Meetkundige toepassingen. — Logarithmen. — Algemene formules. — Grafieken.

B Optellingstheorema's. — Rechthoekige driehoeken. — Scheefhoekige driehoeken. — Merkwaardige lijnen. — Het probleem van Snellius. — Cyclometrische vormen. — Vergelijkingen. — Grafieken. — Vraagstukken van verschillende examens.

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES.

Vlakke driehoeksmeting voor Middelbaar en
Voorbereidend Hoger Onderwijs, 2e druk 125 blz.,
60 fig. gec., met formules, *f* 2.—. Antw. *f* 0.60.

In dit boek is sterk rekening gehouden met de wensen van L.I.W.E.N.A.G.E.L., nl. het gebruik van tafels met de directe waarden der goniometrische functies; de behandeling van opgaven, waarin de trigonometrie wordt toegepast op de stereometrie.

De enige tafels, die bij deze beide schoolboeken kunnen dienen, zijn *Noordhoff's Schooltafel, Gonggrijp Tafel D en Versluys Tafel H*; de beste, die in ons land bestaan.

P. WIJDENES.

Practische Driehoeksmeting. Tweede druk. 131
blz. 107 fig., *f* 2.—.

Antwoorden *f* 0.60.

De scherpe hoek. — Logarithmen. — Rechthoekige driehoeken. De stompe hoek. — Drie formules. — Meetkundige toepassingen. Som en verschil van hoeken. — Som en verschil van gon. verhoudingen. — De dubbele en de halve hoek. — Scheefhoekige driehoeken. — Merkwaardige lijnen. — Vergelijkingen. — Herhaling. — Snellius. — Spanten. — Krachtendriehoeken. — Hellend vlak met wig en keg. — Hoeken in alle kwadranten. — Grafieken. De decimale tafel.

P. WIJDENES,

in overleg met A. C. P. E. VERMEULEN.

Wiskunde voor zeevaartscholen. Deel II. Drie-
hoeksmeting. 142 blz. 128 fig., gec. *f* 2.25.

Antwoorden samen met Rekenen en Algebra *f* 1.50.

Uitwerkingen van de log. en driehoeksmetingvraagstukken *f* 5.—, uitsluitend door bemiddeling van A. C. P. E. Vermeulen, Directeur der visserijschool te Vlaardingen; ook aanvragen voor pres.-ex.

Blz. 1—83. Vlakke driehoeksmeting. — Gon. functies van de scherpe hoek. — Log. der gon. verh. — Rechthoekige drieh. Gon. lijnen. — Herleiding tot het 1e kwadrant. — Betrekkingen tussen gon. verh. van één hoek. — Sommen en verschillen. — Dubbele en halve hoeken. — Scheefhoekige driehoeken. — Snellius. — Gon. vergelijkingen.

Blz. 87—142. Boldriehoeksmeting. — Bolmeetkunde. — Rechthoekige boldriehoeken. — De Hulpstellingen. — Formules. — Algemene herhaling.

Geschiedt voor

H.B.S. 5-j. c.
Gymn.
Staatsexamen.
Lyceum.
Midd. Techn. S.
Acte N XIII,
N XVI.

Gymn.
Lyceum.
H.B.S. 5-j. c.
Acte N IV, N V.

Opzichter Rijks-
waterstaat, weg en
werken, bouw- en
woningtoezicht.
Gas-, beton-, we-
gen-, radiotechn.
Constructeurs.
Machinisten-
diploma's en
nijverheidsacten.

Aspirant derde
stuurlieden.
Visserij-
scholen.
Inleiding tot
grotere boeken
over driehoeks-
meting voor de
Zeevaart-
scholen.

Deze boeken bevatten praktische toepassingen aan het vak ontleend en van de theorie alleen het nodige.

P. NOORDHOFF, GRONINGEN—BATAVIA.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

reinen Vernunft" vrijwel onveranderd terugkeert; in eerstgenoemd werk laat hij, met *Warburton*, gelden „dass nichts der Philosophie schädlicher gewesen sei, als die Mathematik, nämlich die *Nachahmung* derselben in der Methode zu denken, wo sie unmöglich kann gebraucht werden"; en in de „Kritik der reinen Vernunft" wil hij tonen: „Dass der Messkünstler, nach seiner Methode, in der Philosophie nichts als Kartengebäude zu Stande bringe" (Kr. d. r. V. A 727). Volgens *Kant* „ist es notwendig, noch gleichsam den letzten Anker einer phantasiereichen Hoffnung wegzunehmen, und zu zeigen, dass die Befolgung der mathematischen Methode in dieser Art Erkenntnis nicht den mindesten Vorteil schaffen könne" (Kr. d. r. V. A 726).

Kant's argumenten zijn in dit geval allesbehalve sterk; hoogstens tegenover *Spinoza* houden zij steek. Maar niet tegenover de gedachte van de „mathesis universalis", die immers niet meer (of minder!) verlangt dan de constructie van een (uitsluitend) aan de behoeften van het denken aangepaste taalvorm, naar analogie van die, welke voor het wiskundig denken ten tijde van *Descartes* en *Leibniz* reeds tot een aanmerkelijke hoogte was ontwikkeld.

Was zulk een taalvorm werkelijk essentieel onmogelijk, dan zou dit immers alleen dáárop kunnen berusten, dat gedachten niet onder woorden te brengen zouden zijn (een opvatting, die men inderdaad kan stellen, maar die tot volledige skepsis leidt). Maar *Kant* zelf is van mening, dat de bewijzen der wijsbegeerte „sich nur durch lauter Worte (den Gegenstand in Gedanken) führen lassen." De gehele redenering berust op de — nog altijd hardnekkig voortwoekerende — misvatting, volgens welke aan de symbolen der mathesis universalis een essentieel andere functie zou toekomen, dan aan de woorden der natuurlijke taal. Dat de gedachte van *Descartes* en *Leibniz* wel degelijk levensvatbaarheid had, is door de logische onderzoekingen der laatste eeuw overtuigend bewezen (logistiek).

Om de door hem gemaakte principiële scheiding tusschen wijsgerig en wiskundig denken — hij meende die voor de bestrijding van het dogmatisch rationalisme nodig te hebben — te rechtvaardigen heeft *Kant* naast en tegenover het denken de *aanschouwing* als zelfstandige bron van kennis geplaatst. „Nur so viel scheint zur Einleitung und Vorerinnerung nötig zu sein, dass es zwei Stämme der menschlichen Erkenntnis gebe, die vielleicht aus einer gemeinschaftlichen, aber uns unbekannten Wurzel entspringen, nämlich,

Sinnlichkeit und Verstand, durch deren ersteren uns Gegenstände gegeben, durch den zweiten aber gedacht werden." (Kr. d. r. V. A 15).

Nu is dit element in het oorspronkelijk kriticisme reeds door *Hegel* en later door de neo-kantianen fel bestreden (ook in het neo-intuitionisme van *Brouwer* vindt de onderscheiding van aanschouwing en denken geen plaats; de oer-intuïtie der wiskunde is tegelijk de grondslag van het denken); maar de conclusie, die *Kant* getrokken wilde zien, werd algemeen aanvaard en dit verklaart de vervreemding en de onverschilligheid van de filosofen der 19e eeuw tegenover de wiskunde.

De vervreemding van de wiskundigen der 19e eeuw van de wijsbegeerte had een andere oorzaak: ik bedoel de ontdekking van de niet-euclidische meetkunde en de weinig verkwikkelijke reactie van de wereld der officiële wijsbegeerte daarop. *Cohen, Land, Heijmans* bestreden methode en conclusies van de grondleggers der niet-euclidische meetkunde. *Lotze* sprak (met betrekking tot de meerdimensionale meetkunde) van „een logisch spelletje”, van „grimasen der wetenschap”, *Dühring* van „gaussiaanse zelfmystificatie”; zo schreef *Bolland*: „de absolute meetkunde heeft weinig nut, en is tot dusverre in hoofdzaak aan phantasterijen bevorderlijk geweest”. Een der weinigen, die destijds scherper zagen, was *Liebmann*, die sprak van „hoogst sublieme speculaties, waarbij een revolutie, een nieuw tijdperk in de wiskunde aansluit.” Tot deze mate van waardering heeft zelfs *Lange*, die toch de positieve wetenschappen van zijn tijd op wellicht ongeëvenaarde wijze beheerste, zich niet kunnen verheffen.

Deze merkwaardige reactie van de filosofische wereld is te verklaren uit de omstandigheid, dat de overgrote meerderheid der filosofen onder invloed van *Kant's* opvatting, volgens welke uit het voorbeeld der wiskunde voor de wijsbegeerte niets wezenlijks te leren viel, van het wiskundig denken volkomen was vervreemd. Bij een groot en temperamentvol denker als *Bolland* kon die vervreemding zich bij tijd en wijle tot animositeit verscherpen. „„Wiskundige” ontboezemingen gelijk deze,” schreef hij eens, „zijn niet geschikt om een onbepaald vertrouwen te doen ontstaan in het begrip van rekenmeesters.”

Ik kan mij voorstellen, dat deze opmerkingen sommigen mijner toehoorders minder aangenaam aandoen; ik meende echter, ze niet

achterwege te mogen laten, omdat de enige manier om de gevolgen van de besproken historische situatie uit den weg te ruimen hierin bestaat, dat men laat zien, dat deze situatie, hoewel historisch begrijpelijk — ze ontstond immers uit een opzichzelf gezonde en noodzakelijke reactie tegen de pretenties van het dogmatisch rationalisme —, naar huidig zakelijk inzicht geen reden van bestaan had.

In het voorgaande is, hoop ik, tegelijk enigszins toegelicht, waarom naar mijn (en anderer) mening en in weerwil van de opvatting van *Kant* en diens volgelingen, voor een vruchtbaar contact tussen wijsbegeerte en wiskunde alleszins de mogelijkheid blijft bestaan, ook als *Kant's* kritiek op het dogmatisch rationalisme wordt aanvaard. Ik wil geenszins beweren, dat het mogelijk of zelfs wenselijk zou zijn, de wijsbegeerte reeds nu en geheel naar het model van de wiskunde op te bouwen. Maar wèl ben ik overtuigd, dat de moderne ontwikkeling van het wiskundig denken enerzijds heeft geleid tot inzichten, die ook voor de wijsbegeerte richtlijnen in zich sluiten, anderzijds problemen aan de orde stelt, die niet alleen voor de wiskunde, maar ook voor de wijsbegeerte van wezenlijke betekenis zijn en voor welke beantwoording een beroep op wijsgerige methoden dient te worden gedaan. Dit aan te tonen is de bedoeling van het nu volgend hoofddeel van mijn voordracht.

De bespreking van de bedoelde inzichten en problemen is de taak van elke *wijsbegeerte der wiskunde*; een scherper omschrijving te geven ware zeer bezwaarlijk. Maar het werkt verhelderend, onderscheid te maken tussen twee wijzen, de wijsbegeerte der wiskunde te beoefenen. Ten eerste kan men binnen het kader van de beoefening van de wiskunde op radicale wijze zijn aandacht richten op de fundering van het reeds bereikte, in plaats van te streven naar het bereiken van nieuwe resultaten; men zou hier kunnen spreken van wijsgerig gerichte beoefening van de wiskunde. Ten tweede kan men, de wiskunde, ook wat de fundering betreft, latend, zoals ze is, deze maken tot object van wijsgerig onderzoek; dit is wijsbegeerte der wiskunde in engere zin.

Ik wil eerst een paar voorbeelden geven van wijsgerig gerichte beoefening van de wiskunde, waarbij men dus het terrein der wiskunde niet behoeft te verlaten.

Men herinnert zich uit de vlakke meetkunde de stelling: de

zwaartelijnen (beter ware: „zwaartelijnstukken”) van een driehoek gaan door één punt. Het bewijs pleegt men als volgt te beginnen: trek in een driehoek ABC de zwaartelijnen BQ en CR en zij S daarvan het snijpunt. Welnu: hoe weet men, dat de lijnstukken BQ en

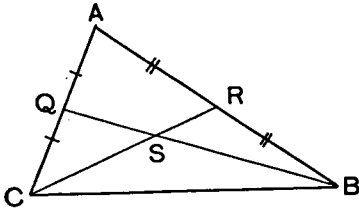


Fig. 1.

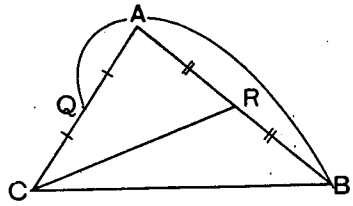


Fig. 2.

CR een punt gemeen hebben? Op welke grond is de in de tweede figuur schetsmatig aangegeven situatie uitgesloten? Het beroep op de aanschouwing is slechts steekhoudend, wanneer het zich niet uitsluitend betreft op het hier in concreto beschouwde geval, maar wordt uitgesproken in den vorm van een algemeen-geldig, aanschouwelijk-evident principe, een *axioma* (in traditionelen zin); men kan aan deze eis volgens *Pasch* en *Hilbert* voldoen door de volgende formulering: Zijn A, B, C drie niet op één rechte gelegen punten en zij a een rechte die niet door A, B , of C gaat; bevat a nu een punt van het lijnstuk BC , dan bevat a ook een punt van één der lijnstukken CA en AB .

Bij het bewijs van de stelling moet men bovendien nog een beroep doen op de in de elementaire leerboeken (terecht) niet behandelde eigenschappen van de volgorde der punten op een rechte lijn.

Een tweede stelling, waarvan de gebruikelijke bewijzen onvolgende zijn, is: in een driehoek is de som van twee zijden groter

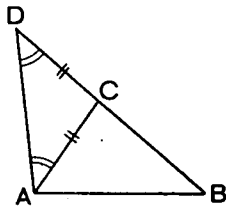


Fig. 3.

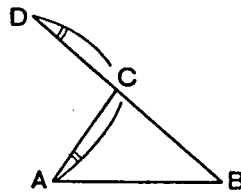


Fig. 4.

dan de derde. Men beroept zich nl. op fig. 3 zonder aan te tonen, dat bv. de in fig. 4 aangegeven situatie onmogelijk is. De remedie is hier dezelfde als in het vorige geval.

Het kritisch onderzoek van de traditionele bewijzen leert dus, dat ze herhaaldelijk impliciet een beroep doen op niet geformuleerde axiomata. Dit is opzichzelf geen onrustbarend verschijnsel; men heeft de ontbrekende axiomata kunnen opsporen en zo de meetkunde gemaakt tot een logisch volkomen samenhangend systeem.

Maar hierbij deed men een ondervinding op, die bezien van het standpunt van de traditionele opvatting van het wiskundig denken wel onrustbarend moet heten: men moet axiomata formuleren, die door de aanschouwelijke evidentie niet worden gegarandeerd ¹⁾.

De beide beginselen, die de ontwikkeling van de wiskunde hebben beheerst, en waarvan men steeds heeft gemeend, dat ze zich met elkaar moesten verdragen: aanschouwelijke evidentie en logische samenhang, blijken dus overeenigbaar te zijn. Eén der beide zal het veld moeten ruimen; in eerste instantie kan men zeggen, dat de eis van logische samenhang het heeft gewonnen.

Ik wil met U nagaan, wat dit met zich mee brengt. Men is lange tijd van mening geweest, dat in de meetkunde de logische redenering t.o.v. de aanschouwing een ondergeschikte plaats innam, dat de logische redenering slechts zin had, voorzover ze aanschouwelijk kon worden gedemonstreerd. *Kant* (en met hem *Schopenhauer*) meende zelfs, dat er in de wiskunde eigenlijk in het geheel geen plaats was voor logische redenering: „Nur ein apodiktischer Beweis, sofern er intuitiv ist, kann Demonstration heissen . . . Nur die Mathematik enthält also Demonstrationen, weil sie nicht aus Begriffen, sondern der Konstruktion derselben, d.i. der Anschauung, die, der Begriffen entsprechend *a priori* gegeben werden kann, ihre Erkenntnis ableitet” (K. d. r. V. A 734). Waar in schijn wordt *geredeneerd*, wordt dus in werkelijkheid *geconstrueerd*, behoort althans *geconstrueerd* te worden. „Dem Ersten, der den *gleichschenkligen Triangel* demonstrierte, . . . dem ging ein Licht auf; denn er fand, dass er nicht dem, was er in der Figur sahe, oder auch dem blossen Begriffe derselbe nachspüren und gleichsam davon ihre Eigenschaften ablernen, sondern durch das, was er nach Begriffen selbst *a priori* hineindachte, und darstellte, (durch Konstruktion)

¹⁾ Volgens *Mannoury* mist zelfs het begrip „evenwijdig” aanschouwelijke inhoud.

hervorbringen müsse" (B XII). Hier ligt nu volgens *Kant* het grote verschil met de wijsgerige methode. „Die *philosophische Erkenntnis* ist die *Vernunftkenntnis* aus *Begriffen*, die mathematische aus der *Konstruktion* der Begriffe" (A 714; ook het gehele volgende gedeelte is van essentiële betekenis voor *Kant's* opvattingen over de wiskunde en voor zijn kritiek op de idee der mathesis universalis). *Bolland* bedoelt hetzelfde, waar hij de wiskunde als „verstandig onverstand" betitelt.

De resultaten der moderne axiomatica leren, of schijnen te leren, dat de situatie precies andersom is, als *Kant* en *Schopenhauer* meenden; de aanschouwelijke evidentie is een onvoldoende fundering voor de meetkunde en een onwezenlijk element in haar stelselmatige opbouw; wezenlijke elementen zijn slechts de beginselen van het logisch redeneren en zekere axiomata, die alleen ten dele aanschouwelijk evident mogen heten.

Waar dus de aanschouwelijke evidentie van minder belang werd geacht dan voorheen, vervielen ook de oude bezwaren tegen de niet-euclidische systemen, waaraan men immers hun gebrek aan aanschouwelijkheid verweet; wanneer de euclidische meetkunde zelf niet ten volle door de aanschouwing wordt gewaarborgd, kan men van de niet-euclidische systemen evenmin volledige aanschouwelijkheid eisen.

Het is duidelijk, dat men er op deze wijze toe werd gebracht, van de aanschouwelijke inhoud van de meetkundige stellingen te abstraheren en alleen op hun logische samenhang te letten. Men kan dit standpunt echter op verschillende grond innemen: principiëel, of incidenteel, d.w.z. ter bereiking van een bijzonder doel.

De axiomatici plegen van de aanschouwelijke inhoud van de meetkunde te abstraheren bij het onderzoek naar de onderlinge niet-strijdigheid van de axiomata's, die aan een meetkundig systeem ten grondslag liggen. Wanneer alle axioma's aanschouwelijk evident waren, zou men gerechtigd zijn aan te nemen, dat zij met elkaar niet in strijd zijn; maar nu men aan de aanschouwelijk evidente axioma's andere moet toevoegen, die de aanschouwelijke evidentie missen, is het niet ondenkbaar, dat laatstbedoelde axioma's onderling of met de eerstbedoelde in strijd blijken. *Hilbert* heeft de eis geformuleerd, de onderlinge niet-strijdigheid der axioma's streng te bewijzen.

Het is natuurlijk niet mogelijk, hier te bespreken, hoe een dergelijk

bewijs kan worden geleverd; dat het hier een zuiver formeel-logisch onderzoek geldt en dat dus de aanschouwelijke inhoud der axioma's buiten beschouwing moet blijven, behoeft geen betoog; evenmin, dat aan een bewijs van niet-strijdigheid ook weer zekere vooronderstellingen ten grondslag zullen liggen; deze vooronderstellingen nu houden in de niet-strijdigheid van de principes van de leer der (reële) getallen en van de logica. De vraag doet zich klaarblijkelijk voor, of deze vooronderstellingen niet een nadere rechtvaardiging behoeven; op dien vraag zal ik nog niet aanstonds ingaan.

Naast de axiomatici bestaat nl. de groep der *logicisten*, die van mening zijn, dat bij de wetenschappelijke opbouw van de wiskunde de aanschouwing niet in aanmerking kan worden genomen. De enige grondslag van de wiskunde wordt gevormd door de *principes van het logisch redeneren*. Voor den wijsgeer heeft dit logicisme op het eerste gezicht ongetwijfeld veel aantrekkelijks en schijnt het de voorkeur te verdienen boven de axiomatische opbouw. Bij de laatste immers ontstaat de wiskunde (zoals we voor de meetkunde meer in bijzonderheden hebben nagegaan) uit wel zeer heterogene elementen. Daar zijn ten eerste de aan de aanschouwelijke evidentie ontleende axioma's, ten tweede de logische principes en ten derde zekere axioma's, die niet aanschouwelijk evident, en ook niet logisch te deduceren zijn (uit de eerstbedoelde axioma's) en die eigenlijk alleen hierdoor enigszins gerechtvaardigd zijn, dat ze voor een logisch sluitende opbouw niet gemist kunnen worden.

Teneinde nu de afleiding van de wiskunde uit de logica te kunnen bewerkstelligen, hadden de logicisten een volledige en nauwkeurige kennis van de beginselen van het logisch redeneren nodig; om die te verkrijgen perfectioneerden zij (d.w.z. vooral *Frege* en *Whitehead & Russell*) de reeds door *Boole*, *Peirce*, *Schröder*, *Peano* ontwikkelde symbolische of mathematische logica; hierdoor ontstond de moderne *logistiek*, waarvan het programma door *Descartes* en *Leibniz* reeds in grote trekken was aangeduid. Ik wil er in dit verband op wijzen, dat deze logistiek van waarde blijft, óók, als men de aspiraties van het dogmatisch rationalisme of van het logicisme niet aanvaardt; ze stelt ons nl. in staat, het redeneren te *formaliseren*, d.w.z. de redeneringen uit te drukken in een kunstmatige taal, welker structuur zo nauwkeurig mogelijk de structuur van het logisch redeneren weerspiegelt; eerst zo kan men de logische principes exact en volledig formuleren en daardoor wordt het doen-

lijk, een gefundeerd antwoord te geven op de vraag: is het mogelijk, de wiskunde uit de logica af te leiden?

Frege heeft deze vraag ten aanzien van de leer der natuurlijke getallen (en daardoor in principe algemeen) bevestigend beantwoord. Maar de logische principes, waarop zijn hele systeem steunde, waren, zoals *Russell* aantoonde, onderling strijdig ¹⁾. Daarom herzag *Russell* het stelsel der logische principes (of axioma's), en hierbij ontstond een situatie, die wij bij de axiomatische behandeling der meetkunde reeds hebben leren kennen: het bleek nodig principes voorop te stellen, die de innerlijke evidentie van het *principium identitatis* en het *principium contradictionis* ten enenmale missen. *Daardoor wordt het nodig, de niet-strijdigheid van de logische principes te bewijzen.*

Nu ligt de volgende tegenwerping voor de hand: bij een niet-strijdigheidsbewijs voor de logica moet men redeneren, en dus de logica toepassen; men vooronderstelt dus reeds de niet-strijdigheid van de logische principes. Maar dit betoog is niet klemmend. Het is immers niet ondenkbaar, dat men bij de „metalogische” redeneringen, die het bewijs van de niet-strijdigheid van de logische principes moeten opleveren, uitsluitend die principes behoeft toe te passen, die wèl evident zijn, en dus geen bewijs van niet-strijdigheid behoeven. In dit verband moet nog worden gewag gemaakt van de mogelijkheid, dat het metalogisch onderzoek niet alleen logische, maar ook aanschouwelijke evidenties zou behoeven; dit zou de weerlegging van het logicisme beteken.

In elk geval loopt het zowel bij de axiomatica als bij het logicisme uit op het probleem, de niet-strijdigheid te bewijzen van een geformaliseerde theorie; dat de symbolen, die de theorie tot uitdrukking brengen, in het ene geval meetkundige, in het andere logische betekenis bezitten, doet niet ter zake, omdat van die betekenis terwille van de gezochte bewijsvoering dient te worden geabstraheerd (trouwens, het is onzeker, of de theorie betekenis heeft, zolang de niet-strijdigheid nog niet vaststaat). We hebben slechts te letten op de formele structuur van de geformaliseerde theorie, d.w.z. op de symbolen, die voor de formalisatie nodig zijn, op de rangschik-

¹⁾ Zie mijn art. „De Paradoxen”, *Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsb. en Psych.*, 32 (1938/39) bldz. 193—208.

king ervan en op de operaties („substitutie” en „conclusievorming”), die men er mee kan uitvoeren.

Maar dan zal de metalogica een beroep moeten doen op ons vermogen, de symbolen te *herkennen*, te *onderscheiden*, te *rangschikken*; dit zijn echter geen logische, doch aanschouwelijke functies van het bewustzijn. We zien dus, dat de eis van een nietstrijdigheidsbewijs de positie van het logicisme zeer verzwakt.

Hilbert, de grondlegger van de moderne axiomatica, heeft er intussen op gewezen, dat de bedoelde aanschouwelijke gegevens, die voor het leveren van een nietstrijdigheidsbewijs nodig zijn, zich in een belangrijk opzicht van de meetkundige evidenties onderscheiden: terwijl de laatste voor een bijzonder gebied van de wetenschap betekenis hebben, vormen de eerste een voorwaarde voor elke vorm van wetenschappelijke arbeid, en in het bijzonder voor de mogelijkheid van verstandhouding op wetenschappelijk gebied. We worden dus teruggevoerd tot de aanvaarding van één der grondslagen van de transcendentale methode, tot de erkenning van het *synthetisch a priori* als voorwaarde voor de mogelijkheid van wetenschap.

Het is niet mijn bedoeling, de successen en tegenslagen van het metalogisch en axiomatisch (metamathematisch) onderzoek te bespreken. Bij het zoeken naar niet-strijdigheidsbewijzen is men tot allerlei onverwachte methodologische inzichten gekomen (*Tarski*, *Gödel*). Ik wil volstaan met de opmerking, dat zowel logicisme als axiomatica aan de wiskunde heterogene gegevens ten grondslag moeten leggen. Ten eerste inzichten van rationele, resp. intuïtieve aard, die in de vorm van logische principes of axioma's, resp. meetkundige axioma's worden geformuleerd; ten tweede principes, resp. axioma's zonder rationele, resp. intuïtieve evidentie; tenslotte, voor de metalogica, resp. metamathesis, aanschouwelijke evidenties van tot op heden niet bekend karakter.

Logicisme en axiomatica, die hadden bedoeld, de opbouw van de wiskunde onafhankelijk te maken van elk beroep op de aanschouwing, blijken tenslotte zekere aanschouwelijke evidenties niet te kunnen ontberen. Is het dan wellicht mogelijk, de wiskunde *uitsluitend* op de grondslag van zulke evidenties op te bouwen? Dit was, zoals we ons herinneren, de opvatting van *Kant*.

Een dergelijke opbouw is verwerkelijkt door onze landgenoot

Prof. Dr. *L. E. J. Brouwer*. Hij heeft, reeds vóór de logicisten en de axiomatici zich van de noodzaak van een terugkeer tot de aanschouwing klaar bewust waren geworden, aangetoond, dat de moderne kritiek op *Kant's* denkbeelden wél het aprioristisch karakter van de ruimte-aanschouwing, maar niet dat van de tijdsaanschouwing heeft weerlegd. De tijdsaanschouwing voerde *Brouwer* later terug tot de nog primitiever twee-enigheidsbeleving, volgens hem het oer-gebeuren van het menselijk intellect. De scheiding tussen denken en aanschouwing is hier weggevallen.

Brouwer is er niet bij blijven staan, de principes van een zuiver intuïtieve opbouw van de wiskunde te formuleren, zoals *Kant* en *Schopenhauer*, hij is er ook in geslaagd het door hem opgestelde programma, in samenwerking met een aantal leerlingen (*Belinfante*, *Freudenthal*, *Heyting*, *De Loor*) ten uitvoer te leggen. De intuïtionistische wiskunde blijkt op belangrijke punten van de „klassieke” wiskunde af te wijken; dit is mede daaraan toe te schrijven, dat de wiskundige termen in de intuïtionistische wiskundige anders moeten worden opgevat dan in de klassieke.

De logica, het formeel-logisch redeneren, verliest voor den intuïtionist elke constitutieve betekenis. De logica berust op bepaalde regelmatigheden in de taal, i.h.b. in de wiskundige taal, en deze regelmatigheden vinden hun oorsprong in bepaalde wiskundige wetten, niet omgekeerd. De logische principes zijn zelfs binnen de wiskundige taal niet onbeperkt geldig. Het bekendste geval is dat van het principium tertii exclusi, dat op de meer gecompliceerde wiskundige theorieën niet van toepassing is.

Met de bespreking van *Brouwer's* stelling aangaande de onafhankelijkheid van de wiskunde van de logica, m.a.w. de onafhankelijkheid van het denken van de taal, heb ik het terrein van de wijsbegeerte der wiskunde in engere zin betreden. Deze stelling is een gevolg van *Brouwer's* opvatting van de wiskunde als een *vrije schepping van de menselijke geest*. Niet alleen van de taal, ook van de ervaring is de wiskunde geheel onafhankelijk.

Deze opvatting van de vrijheid der wiskunde wordt door de axiomatici van de school van *Hilbert* gedeeld. Maar deze laatsten trekken uit het vrijheidsbeginsel geheel andere gevolgen dan *Brouwer*: zij beschouwen de beperkingen, die voortvloeien uit de eis van een zuiver intuïtieve opbouw van de wiskunde, als een

onduldbare beknotting van hun vrijheid. Wanneer men den wiskundige de toepassing van het principium tertii exclusi ontzegt, aldus ongeveer *Hilbert*, kan men ook wel den bokser het gebruik van zijn vuisten verbieden. Daartegenover zou de intuitionist een wiskundige, die het principium tertii exclusi toepast, kunnen vergelijken met een voetballer, die een wedstrijd tracht te winnen door zijn tegenstanders met zijn vuisten te bewerken.

Intussen verdedigen intuitionisten en axiomatici, elk op hun wijze, de vrijheid van de wiskunde tegenover de logicisten, die deze wetenschap geheel door de logische principes gedetermineerd achten; de logicisten interpreteren de logische principes hetzij „platonistisch”, als wetten, die een ten opzichte van de waarneming transcendente zijnsorde beheersen, hetzij „conventionalistisch”, als regels, die uit de structuur der wetenschappelijke taal voortvloeien. In tegenstelling met de intuitionisten en axiomatici, die doorgaans mathematici van origine zijn, zijn de logicisten vaak oorspronkelijk beoefenaars van een andere wetenschap dan de wiskunde. Het valt in dit verband op, dat juist de wiskundigen de nadruk leggen op het element van vrijheid in het wiskundig denken, terwijl de gebondenheid ervan door niet-mathematici naar voren wordt gebracht. Een analoge situatie bestond tijdens de strijd om de niet-euclidische meetkunde: de filosofen achtten de meetkunde gebonden aan de gegevens der ruimtelijke aanschouwing, waarmee huns inziens alleen de euclidische meetkunde te rijmen viel, de wiskundigen wilden zich van die gegevens emanciperen.

Een voor de hand liggende, maar al te triviale verklaring zal er van uitgaan, dat iedereen nu eenmaal graag op zijn terrein van wetenschap heer en meester wil blijven. De vrijheid, waarvan elk wiskundige zich bij zijn arbeid bewust is, wordt echter geenszins uitsluitend als een aangename ervaren: zij bemoeilijkt het werk onnoemelijk, ze schept een element van voortdurende onzekerheid, dat van de wiskunde, als van elke geesteswerkzaamheid, de bekoring, maar ook de tragiek uitmaakt.

Wellicht kan een vergelijking met de kunstbeoefening deze gedachtengang verhelderen. Een componist kan zich voorniemen een fuga of een sonate te componeren. In elk van die gevallen onderwerpt hij zich vrijwillig aan de regels, die voor de gekozen kunstvorm gelden; dit betekent echter geen beperking van zijn schepingsdrang, alleen geeft hij aan het resultaat ervan een eerste

globale vorm¹⁾). Wat vrijheidsbeperking lijkt, is vormgeving en een bewijs te meer voor de *autonomie van de geest*.

In persoonlijke gedachtenwisseling heeft men hiertegen wel aangevoerd, dat de analogie tussen wiskunde en kunst niet opgaat, omdat de wiskunde niet, als de kunst, in de eerste plaats op *schoonheid*, maar op *waarheid* is gericht. Op deze tegenwerping laat zich allerlei antwoorden.

Ten eerste kan men opmerken, dat tegenover de *waarheid* in de wetenschap de *waarachtigheid* in de kunst staat²⁾; zij vertegenwoordigen elk op hun wijze de objectiviteit, die aan wetenschap en kunst als uitingen van de geest gemeen is, en die het bewijs levert voor de *autonomie van de geest*.

Maar omdat het hier de wiskunde betreft, is nog een andere beantwoording mogelijk. Het waarheidsbegrip verdient namelijk het vertrouwen, dat men er in pleegt te stellen, niet ten volle. Consequente toepassing van de wijze, waarop men het gewoonlijk hanteert, leidt namelijk tot een contradictie; dit is de reeds in de Oudheid welbekende pseudomenos of leugenaar³⁾.

In wetenschappen als de natuurkunde levert dit geen praktisch bezwaar op. Maar wel voor de logica, en daardoor voor de logicistische wiskunde — bij de intuitionistische⁴⁾ en de axiomatische opbouw van de wiskunde verliest het waarheidsbegrip elke fundamentele betekenis. Een analyse van den pseudomenos heeft er nu

¹⁾ Men kan de analogie nog iets verder doorvoeren en intuitionistische, formalistische (axiomatische) en logicistische richting beschouwen als verschillende *stijlen* in de wiskunde, die elk voor zich hun waarde en betekenis bezitten, zodat men de waarheidsvraag ten aanzien van de verschillende opvattingen niet zou behoeven of behoren te stellen. De intuitionistische en formalistische wiskunde zijn met de absolute, de logicistische is met de dramatische muziek te vergelijken. De logicistische opbouw van de wiskunde maakt volgens *Carnap* de toepassing van de wiskunde begrijpelijk, de logicistische wiskunde is toegepaste wiskunde in de meest abstracte vorm. Zo is dramatische muziek de meest abstracte vorm van het drama.

²⁾ Men herinnert zich de wijze, waarop *Multatuli* in het eerste en tiende hoofdstuk van den „Max Havelaar”. Droogstoppel tot tolk van dit inzicht maakt.

³⁾ Zie mijn reeds geciteerd art. „De Paradoxen”.

⁴⁾ Met betrekking tot de intuitionistische wiskunde zou men de waarheid kunnen definiëren analoog aan de metaphysische waarheid der scholastiek: als overeenstemming van het object met zijn schepper, in dit geval met de mensengeest.

toe geleid, dat men het waarheidsbegrip in dier voege kon preciseren, dat de contradictie verdwijnt, en de zin van het waarheidsbegrip bij toepassing op natuurkunde of geschiedenis niet verandert (*Tarski*). Daarbij blijkt evenwel, dat de toepassing van dit waarheidsbegrip op de wiskunde weinig „succes” oplevert: onderling strijdige geformaliseerde wiskundige theorieën blijken evenzeer „waar”. Het *waarheidsbeginsel* is dus geen reële beperking.

De vraag naar de *waarheid* van de wiskunde is hiermee bevestigend beantwoord. Maar, anders dan bij de natuurkunde of de geschiedenis, zijn we niet nader gekomen tot een antwoord op de vraag naar de *zin* van de wiskunde.

Het meest gebruikelijke antwoord op deze tweede vraag identificeert de zin van de wiskunde met haar *toepassing* op andere wetenschappen; zo zocht *Kant* (Kr. d. r. V. A 725) de zin van de wiskunde in haar toepassing op de natuurwetenschappen. Intussen is deze beantwoording van de vraag weinig bevredigend; de moderne wiskunde heeft zich, evenals van de grenzen der ruimtelijke aanschouwing, ook van probleemstellingen van natuurwetenschap en techniek geëmancipeerd. Lag de zin van de wiskunde in haar toepassingen, dan zou zij zich door deze autonome ontwikkeling van haar eigen zin hebben vervreemd; intussen schijnt het mij evident, dat zij, juist in die autonome ontwikkeling, integendeel haar eigenlijke zin verwerkelijkt.

Ook hiermee is de vraag naar de zin van de wiskunde nog niet beantwoord. Een antwoord op deze vraag wil ik hier niet geven; wel wil ik er op wijzen, dat niet de vraag naar de waarheid van de wiskunde, maar die naar haar zin ¹⁾ naar huidig inzicht de centrale vraag van de wijsbegeerte der wiskunde is.

Ik zie hier een aandachtsverschuiving, die ook op andere wijsgerige gebieden in de moderne tijd kan worden waargenomen. Zo is bv. sinds *Kant* de cardinale vraag van de wijsgerige ethiek niet meer de vraag naar de waarheid of geldigheid van zedelijke oordelen, maar de vraag naar de zin van de zedelijke beoordeling en naar de postulaten, die in de zingeving, waartoe men komt, voorondersteld zijn. Het factum der zedelijke beoordeling wordt hier, in schijn dogmatisch maar in werkelijkheid kritisch, vooropgesteld,

¹⁾ Zeer kort kan men deze vraag zó formuleren: waarom wiskunde?

waardoor elk ethisch scepticisme van te voren is buitengesloten en waardoor het autonoom karakter der zedelijkheid is gegarandeerd.

Zo zien we, dat de problemen van de wijsbegeerte der wiskunde niet los staan van de algemeen-wijsgerige problematiek en dat de beantwoording ervan niet kan geschieden geheel los van een beantwoording van algemeen-wijsgerige problemen. Toch is de wijsbegeerte der wiskunde tegenover andere gebieden der wijsbegeerte in het voordeel, doordat een aantal van haar problemen voor exacte behandeling toegankelijk zijn; uit het voorgaande zal wel duidelijk geworden zijn, dat ik dit niet toeschrijf aan een eigenaardigheid van de wiskunde, maar eerder aan haar hoge ontwikkelingsgraad; de wiskunde is reeds sinds *Euclides* en diens onmiddellijke voorgangers de zekere gang der wetenschap gegaan, terwijl de beoefening b.v. van de ethiek als autonome wetenschap van *Kant* dateert — waarmee ik natuurlijk niet gezegd wil hebben, dat vóór *Kant* in de ethiek niets van betekenis zou zijn verricht. Daarbij komt nog, dat de euclidische methode en daarmee de autonome opbouw van de wiskunde vrijwel aanstonds algemeen ingang heeft gevonden, terwijl een autonome opbouw van de ethiek ook heden nog bij zeer velen op principiële bezwaren stuit, waarover men goed doet, niet met lichtzinnigheid te spreken.

In geen geval verwachte men van de wijsbegeerte een voorschrift, *hoe* wij nu de wiskunde moeten opbouwen. Wijsbegeerte, zei *Bolland* eens ongeveer, is geen receptenboek; ze kan ons niet leren, wat wij geloven of hoe wij handelen moeten. Maar wel stelt zij ons in staat, in redelijkheid te beoordelen, waar met zin *geweten*, *geloofd* of *zedelijk geoordeeld* kan worden.

STELLINGEN EN VERMOEDENS UIT DE MEETKUNDE DER GETALLEN

DOOR

Prof. Dr. J. F. KOKSMA.

De merkwaardige wisselwerking, zooals wij die in de analytische meetkunde leeren kennen, tusschen reken- en stekunde eenerzijds en meetkunde anderzijds, heeft daar, waar men zuiver arithmetische doeleinden nastreefde, geleid tot het ontstaan der zoogenaamde meetkundige getallenleer. Een eigensoortig hoofdstuk in dit vruchtbare gebied wordt gevormd door de door Hermann Minkowski ontwikkelde en aldus genoemde „Geometrie der Zahlen”. Hoewel hare oorsprongen reeds bijna een halve eeuw achter ons liggen, heeft deze „Geometrie der Zahlen” ook thans hare betekenis en hare bekoring nog geenszins verloren. Hare betekenis niet: nog steeds vindt zij, en bij belangwekkende problemen, toepassing. Hare bekoring niet: nog steeds komen mathematici aandragen met eenvoudiger bewijzen voor hare fundamentele stellingen, bewijzen, die de bovengenoemde wisselwerking, door welke zuiver arithmetische waarheden langs den weg van geometrische aanschouwing worden ontsloten dan wel uitgebeeld, in helder licht stellen; en ook: nog steeds beproeven velen hunne krachten op de schijnbaar zoo voor de hand liggende, reeds door Minkowski geuite, maar tot nu onbewezen vermoedens, die naar hem worden benoemd.¹⁾

¹⁾ Wat de literatuur betreft, zij allereerst verwezen naar Minkowski's boeken:

„Geometrie der Zahlen”, Teubner-Leipzig (1910) (hier aangeduid met G. d. Z.).

„Diophantische Approximationen”, Teubner-Leipzig (1927) (hier aangeduid met M. DA).

Voor verdere en nieuwere lit. zie Kap. II van „Diophantische Approximationen” van schrijver dezes, Springer-Berlin (1936) (verschenen in de serie „Ergebnisse d. Mathem. und ihrer Grenzgeb.” IV 4. Hier aangeduid met K. DA).

Een ander onderdeel der meetkundige getallenleer dan de „Geometrie der Zahlen” behandelt E. Landau in „Band” 2 van zijn „Vorlesungen über Zahlentheorie”, Hirzel-Leipzig (1927).

1. Voor geheele $n \geq 2$ beschouwen wij de ruimte R_n der punten $X = (x_1, \dots, x_n)$. Terwille van de aanschouwelijkheid denke men zich de coördinaten betrokken op een recht- dan wel scheefhoekig assenstelsel met oorsprong $O = (0, 0, \dots, 0)$; op elk der n assen nemen we een positieve en een negatieve richting, zoowel als een lengteëenheid aan. Die punten, welker coördinaten $x_1, \dots, x_n$ alle geheel zijn, heeten de *roosterpunten* van de ruimte R_n . Het rooster verdeelt de ruimte in onderling congruente parallelepipedum (*fundamentealparallelepipedum*). Zooals opgemerkt is kan men zich het assenkruis naar verkiezing rechthoekig of scheefhoekig denken; ook is men bij ieder der n assen vrij in de keuze der lengteëenheid. We zullen echter afspreken, als volume-eenheid steeds den inhoud van een fundamentealparallelepipedum te kiezen, dus den inhoud van het *eenheidsparallelepipedum* $0 \leq x_v \leq 1$ ($v = 1, 2, \dots, n$).

In R_n beschouwen we nu een *convex lichaam* K : onder een *lichaam* verstaan we een *begrensde open puntverzameling*; het lichaam heet convex, als met ieder tweetal punten X en Y , die tot het lichaam behoren, het rechte-lijnsegment $\overline{XY}$, dat deze beide punten verbindt, in zijn geheel tot het lichaam behoort.¹⁾

De fundamentele stelling van M i n k o w s k i nu luidt:

Stelling 1. *Ieder convex lichaam K in R_n met middelpunt in O en inhoud $> 2^n$ bevat minstens één roosterpunt $\neq O$.*

Opmerking. Dat een lichaam den oorsprong O tot middelpunt heeft, wil zeggen dat met ieder punt $A = (a_1, \dots, a_n)$ ook het punt $-A = (-a_1, \dots, -a_n)$ (het gespiegelde t.o.v. O) tot het lichaam behoort. Is dus stelling 1 juist, dan bevat K minstens 3 roosterpunten, nl. het in die stelling genoemde $\neq O$, het gespiegelde hiervan t.o.v. O en (wegens de convexiteit) O zelf.

Bewijs van stelling 1. We zullen klaar zijn, zoodra bewezen is, dat K twee verschillende punten $X = (x_1, \dots, x_n)$ en $Y = (y_1, \dots, y_n)$ bevat, waarvoor het punt $X - Y = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)$ een roosterpunt is met louter *even* coördinaten. Immers met Y ligt $Y' = -Y$ in K en dus het midden van het segment $\overline{XY'}$;

¹⁾ Volgens deze definitie behoeft dus een *lichaam* niet samenhangend te zijn, maar is een *convex lichaam* zelfs enkelvoudig-samenhangend. Daar deze opmerking niet verder wordt gebruikt, laat ik definities dezer begrippen achterwege.

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH

DIRECTEUR VAN DE R.H.B.S. TE AMERSFOORT

- I. Elfde druk. 156 blz. 21 fig. geb. f 2.25.
- II. Tiende druk. 204 blz. 50 fig. geb. f 2.25.
- III. Zevende druk. 198 blz. 60 fig. geb. f 2.25.

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Derde druk. 164 blz. 20 fig. f 2.—.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

V α en VI α Nieuwe Schoolalgebra III α

V β en VI β Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Leraren, die deze werken niet kennen, kunnen pres. ex. bekomen op aanvraag aan den uitgever of aan de schrijvers.

Uitgave P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA
Ook verkrijgbaar door de boekhandel

Verschenen:

Dr. H. C. SCHAMHARDT

Mondelinge Staatsexamens A 1940

f 0,80

Dr. P. MOLENBROEK—P. WIJDENES

Stereometrie voor middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs

6e druk, ter perse, 161 fig., ing. f 1,90, gebonden f 2,25

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE

Rekenboek voor de H.B.S. I

18e druk, 131 blz., gecartonneerd f 1,70

Theorie blz. 1—70.

Vraagstukken (Rekenen uit het hoofd en cijferoefeningen
inbegrepen) blz. 71—122.

Aantekeningen blz. 123—131.

Dr. H. J. E. BETH en Dr. P. J. VAN LOO

Mechanica voor het M.O.

4e druk, 203 blz. 97 fig. f 2,50

P. WIJDENES

Beknopte beschrijvende Meetkunde

4e druk, 133 blz. 130 fig., gecartonneerd . . . f 2,00

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. — Groningen—Batavia.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

 Volledige uitwerkingen in 4 en 5 decimalen van
de Logarithmenvraagstukken uit

NIEUWE SCHOOLALGEBRA

ALGEBRAISCHE VRAAGSTUKKEN

BEKNOPT ALGEBRA

gratis en franco voor gebruikers van deze boeken op aan-
vraag aan P. Wijdenes.