

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN
ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOOT EN P. WIJDENES
OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

MET MEDEWERKING VAN

DR. H. J. E. BETH, AMERSFOORT - DR. E. W. BETH, HAARLEM
DR. E. J. DIJKSTERHUIS, OISTERWIJK - DR. J. C. H. GERRETSEN, GRONINGEN
DR. A. A. GRIBNAU, ROERMOND. - DR. B. P. HAALMEIJER, AMSTERDAM
DR. J. HAANTJES, AMSTERDAM - DR. C. DE JONG, LEIDEN
DR. J. POPKEN, TER APEL - IR. J. J. TEKELENBURG, ROTTERDAM
DR. W. P. THIJSSEN, HILVERSUM - DR. P. DE VAERE, BRUSSEL
DR. P. G. J. VREDENDUIN, ARNHEM.

17e JAARGANG 1940

Nr. 2

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift v. Wiskunde f 5.—.
--

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang f 6,—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6,—) zijn ingetekend, betalen f 5,—.

De leden van **Liwenagel** (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en **Wimecos** (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen **Euclides** toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van **Liwenagel** storten de abonnementskosten ten bedrage van f 1,75 op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van **Wimecos** storten hun contributie van f 2,75 (waarin de aboniementskosten op **Euclides** begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van **Liwenagel** of **Wimecos**. Deze bedragen f 5,— per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

	Blz.
Prof. Dr. J. G. VAN DER CORPUT, Goniometrische functies gekarakteriseerd door een functionaalbetrekking (vervolg en slot)	65
Boekbesprekingen	76
Ingekomen boeken	78
Dr. A. HEYTING, Wiskundige strengheid in wetenschap en school	79
Dr. H. C. SCHAMHARDT, Mondelinge Staatsexamens A 1940 .	94

OFFICIËLE MEDEDELINGEN VAN WIMECOS.

Het Bestuur brengt ter kennis van de leden, dat, onvoorziene omstandigheden voorbehouden, de jaarlijkse Algemene Vergadering der Vereniging in de Kerstvacantie in December a.s. te Amsterdam zal worden gehouden. De voorlopige agenda is als volgt vastgesteld:

1. Opening door den Voorzitter.
2. Notulen van de vorige vergadering.
3. Jaarverslag.
4. Verslag van den Penningmeester.
5. Verkiezing van een Voorzitter. Het Bestuur stelt in deze vacature de volgende leden candidaat:
 - a. Dr. J. Spijkerboer, Utrecht.
 - b. Dr. H. H. Buzeman, Amsterdam.
6. Benoeming van twee leden om de rekening van den Penningmeester na te zien.
7. Vaststelling van de plaats voor de volgende jaarlijkse Algemene Vergadering.
8. Verslag van de Commissie, die de rekening van den Penningmeester heeft nagezien.
9. Voordracht van Prof. Dr. H. Bremekamp, Delft, over:
„Het Wiskundeonderwijs op de Middelbare School, bezien van de kant van het Hoger Onderwijs.”
10. Voordracht van den Heer C. J. Alders, Haarlem, over:
„De Differentiaal- en Integraalrekening op de Middelbare School.”
11. Rondvraag en sluiting.

Wenst men een aangelegenheid op de agenda opgenomen te zien, dan wordt hiervan gaarne bericht bij den Secretaris ingewacht voor 1 December a.s. (adres Van Vollenhovenstraat 17 B, Rotterdam, Centrum). Begin December volgt een convocatie met nadere bijzonderheden aangaande tijd en plaats der vergadering, alsmede de definitieve agenda.

GONIOMETRISCHE FUNCTIES GEKARAKTERI- SEERD DOOR EEN FUNCTIONAALBETREKKING

(Vervolg).

DOOR

J. G. VAN DER CORPUT.

Ik geef echter de voorkeur aan een direct bewijs, omdat ik dan tevens een geheel andere behandeling van de genoemde functionaalbetrekking vind, waarbij het gedeelte van § 2 na formule (6) gemist kan worden. Bovendien verdient het geen aanbeveling het onderzoek van de additieve congruentie tot dat van de minder eenvoudige functionaalbetrekking terug te brengen.

Bij het directe bewijs benut ik wederom het feit, dat M^* alleen veelvouden van 2π bevat. Uit die omstandigheid volgt, dat er een positief getal l bestaat, zoodanig, dat aan elk getal $x \geq 0$ en $\leq l$ een geheel getal h kan worden toegevoegd met

$$(18) \quad |\varphi(x) - 2\pi h| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Immers anders zou men het positieve getal x zóó tot nul kunnen laten naderen, dat bij geschikt gekozen geheele van x afhankelijke h

$$\frac{\pi}{2} \leq |\varphi(x) - 2\pi h| \leq \pi$$

is; de verzameling, gevormd door deze getallen $\varphi(x) - 2\pi h$ zou dan minstens een verdichtingspunt $\geq \frac{\pi}{2}$ en $\leq \pi$ of $\geq -\pi$ en

$\leq -\frac{\pi}{2}$ bezitten en dat verdichtingspunt zou dan tot M behooren, in strijd met de veronderstelling, dat M alleen veelvouden van 2π bevat.

Zij $\Phi(0) = 0$ gesteld; in het interval $ml < x \leq (m+1)l$, waarin m geheel ≥ 0 is, defineer ik verder de functie $\Phi(x)$, als $\Phi(ml)$ bekend is:

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \pmod{2\pi} \text{ en } -\pi < \Phi(x) - \Phi(ml) \leq \pi.$$

Op die manier is $\Phi(x)$ voor iedere $x > 0$ bepaald.

Voor ieder punt x van het interval $ml \leq x \leq (m+1)l$ is

$$(19) \quad -\frac{\pi}{2} \leq \Phi(x) - \Phi(ml) \leq \frac{\pi}{2},$$

want anders was er in dat interval minstens één x met

$$\frac{\pi}{2} < |\Phi(x) - \Phi(ml)| \leq \pi,$$

zoodat uit

$$\varphi(x - ml) \equiv \varphi(x) - \varphi(ml) \equiv \Phi(x) - \Phi(ml) \pmod{2\pi}$$

zou volgen

$$\frac{\pi}{2} < |\varphi(x - ml) - 2\pi h| \leq \pi$$

bij geschikt gekozen geheele h ; wegens $0 \leq x - ml \leq l$ is dit in strijd met (18). Hiermede is (19) bewezen, zoodat voor elk paar tot het interval $ml \leq x \leq (m+1)l$ behorende punten x_1 en x_2 de ongelijkheid

$$(20) \quad -\pi \leq \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \leq \pi$$

geldt.

Ik beweer, dat $\Phi(x)$ voor iedere $x \geq 0$ continu is. Want stel er was een $x \geq 0$ te vinden, waar deze functie een discontinuïteit vertoont. Uit (20) blijkt, dat de functie Φ in de omgeving van het punt x begrensd is, zoodat het mogelijk zou zijn y zóó tot nul te laten naderen, dat $x + y$ positief is en $\Phi(x + y) - \Phi(x)$ tot een eindige limiet $L \neq 0$ nadert; we kunnen daarbij zelfs aannemen, dat x en $x + y$ beide tot eenzelfde afgesloten interval $(ml, (m+1)l)$ behooren. Uit (20) zou dan volgen, dat $\Phi(x + y) - \Phi(x)$ en dus ook L absoluut $\leq \pi$ is en in verband met

$$\varphi(y) \equiv \varphi(x + y) - \varphi(x) \equiv \Phi(x + y) - \Phi(x) \pmod{2\pi}$$

zouden we dan vinden, dat aan het getal y een geheel getal h kan worden toegevoegd, zóódanig dat $\varphi(y) - 2\pi h$ tot L nadert. De verzameling M^* zou dan het getal L bevatten, in strijd met de veronderstelling dat deze verzameling tusschen -2π en 2π geen enkel getal $\neq 0$ bevat. Dus $\Phi(x)$ is continu voor iedere $x \geq 0$.

Vervangt men in de additieve congruentie y door $-x$, dan krijgt men

$$(21) \quad \varphi(x) \equiv -\varphi(-x) \pmod{2\pi}.$$

Stelt men nu voor negatieve x

$$\Phi(x) = -\Phi(-x),$$

dan is de functie $\Phi(x)$ voor iedere bestaanbare x gedefinieerd en continu en voldoet ze overal aan de congruentie

$$\Phi(x) \equiv \varphi(x) \pmod{2\pi}.$$

Bij elk paar bestaanbare getallen x en y is dus een geheel getal h te vinden met

$$\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y) + 2h\pi.$$

Omdat Φ continu is, is het geheele getal h onafhankelijk van x en y ; dit getal neemt wegens $\Phi(0) = 0$ voor $x = y = 0$ de waarde nul aan, zoodat $\Phi(x)$ aan de additieve vergelijking voldoet en dus in verband met haar continuïteit de waarde kx bezit, waarin k onafhankelijk van x is. Ook op deze manier vinden we dus (16).

2. Stel M^* bevat behalve de veelvouden van 2π nog minstens één ander getal. Ik beweer: bevat de verzameling M^* twee getallen γ en γ' , dan bevat ze ook de som $\gamma + \gamma'$. Want bij elk positief getal ε is dan een bestaanbaar getal x' en een geheel getal h' met

$$|x'| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ en } |\varphi(x') - \gamma' - 2h'\pi| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

te vinden en vervolgens kan men dan een bestaanbaar getal x'' en een geheel getal h'' met

$$|x - x'| < \frac{1}{2}\varepsilon \text{ en } |\varphi(x - x') - \gamma - 2h''\pi| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

bepalen. In verband met de additieve congruentie vinden we dus bij geschikt gekozen geheele h

$$|x| < \varepsilon \text{ en } |\varphi(x) - (\gamma + \gamma') - 2h\pi| < \varepsilon,$$

zoodat $\gamma + \gamma'$ tot M^* behoort.

Uit (21) blijkt: bevat de verzameling M^* een getal γ , dan bevat ze ook $-\gamma$. De verzameling M^* is derhalve een modulus, d.w.z. bevat ze twee getallen, dan bevat ze ook hun som en ook hun verschil.

Maar we weten van dien modulus nog meer: hij is afgesloten. Daarmede wordt het volgende bedoeld: heeft het bestaanbare getal γ de eigenschap, dat bij iedere positief getal δ een getal van M^* te vinden is, waarvan de afstand tot γ kleiner is dan δ , dan behoort γ zelf tot M^* . Dat is trouwens duidelijk; we kunnen dan een getal γ' van M^* met $|\gamma' - \gamma| < \frac{1}{2}\varepsilon$ vinden en aan dat getal kunnen we een bestaanbaar getal x en een geheel getal h met

$$|x| < \varepsilon \text{ en } |\varphi(x) - \gamma' - 2h\pi| < \frac{1}{2}\varepsilon$$

toevoegen; dan is

$$|\varphi(x) - \gamma - 2h\pi| < \varepsilon,$$

zoodat γ tot M^* behoort.

Zij ζ de ondergrens van de verzameling, gevormd door de positieve getallen van M^* . Ik ga bewijzen $\zeta = 0$.

Stel $\zeta \neq 0$. Dan is ζ positief. De afgesloten modulus M^* bevat ζ , dus ook alle veelvouden van ζ . Is γ een willekeurig getal van M^* , dan bestaat er een geheel getal h met $h\zeta < \gamma \leq (h+1)\zeta$. De modulus M^* bevat dan het positieve getal $\gamma - h\zeta$, dat $\leq \zeta$ is; volgens de definitie van ζ is dat getal dus gelijk aan ζ , zoodat M^* alleen de veelvouden van ζ bevat. M^* bevat 2π , zoodat $\zeta = \frac{2\pi}{q}$ is, waarin q een natuurlijk getal voorstelt. Daarbij is $q \geq 2$, omdat voor $q = 1$ de modulus M^* alleen de veelvouden van 2π zou bevatten. Zij nu m een der getallen $0, 1, \dots, q-1$. Er bestaat een positief getal δ_m zoodanig, dat het onmogelijk is een bestaanbaar getal x en een geheel getal h met

$$|x| < \delta_m \text{ en } \left| \varphi(x) - \frac{2\pi}{q^2} - \frac{2m\pi}{q} - 2h\pi \right| < \delta_m$$

te vinden; anders zou immers $\frac{2\pi}{q^2} + \frac{2m\pi}{q}$ tot M^* behooren,

hetgeen niet het geval is, omdat dit getal geen veelvoud van $\frac{2\pi}{q}$ is.

Stelt δ het kleinste der q positieve getallen $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{q-1}$ voor, dan is het dus onmogelijk een bestaansbare getal x en twee geheele getallen m en h met

$$|x| < \delta; 0 \leq m < q \text{ en } \left| \varphi(x) - \frac{2\pi}{q^2} - \frac{2m\pi}{q} - 2h\pi \right| < \delta$$

te vinden, d.w.z. dan is het onmogelijk een bestaanbaar getal x en een geheel getal n met

$$|x| < \delta \text{ en } \left| \varphi(x) - \frac{2\pi}{q^2} - \frac{2n\pi}{q} \right| < \delta$$

te bepalen. We weten echter, dat $\frac{2\pi}{q}$ tot M^* behoort, zoodat er zeker een x' en een geheel getal j met

$$|x'| < \delta \text{ en } \left| \varphi(x') - \frac{2\pi}{q} - 2j\pi \right| < \delta$$

bestaan. Uit de additieve congruentie volgt verder

$$q\varphi\left(\frac{x'}{q}\right) = \varphi(x') + 2l\pi,$$

waarin l geheel is. Het getal $x = \frac{x'}{q}$ zou dus voldoen aan

$$|x| < \frac{\delta}{q} < \delta \text{ en } \left| \varphi(x) - \frac{2\pi}{q^2} - \frac{2(l+j)\pi}{q} \right| < \frac{\delta}{q} < \delta,$$

hetgeen met het bovenstaande in strijd is.

Hiermede is bewezen, dat $\zeta = 0$ is, zoodat bij elk positief getal ε een tot M^* behoorend positief getal $\lambda < \varepsilon$ te vinden is. De modulus M^* bevat alle veelvouden van λ , zoodat aan elk bestaanbaar getal γ een getal van M^* kan worden toegevoegd, wiens afstand tot γ kleiner dan ε is. De afgesloten verzameling M^* bevat dus γ , zoodat alle bestaانبare getallen tot M^* behooren, d.w.z. bij elk reëel getal γ' en bij elk positief getal ε kan men een getal y en een geheel getal h' vinden met

$$|y| < \varepsilon \text{ en } |\varphi(y) - \gamma' - 2h'\pi| < \varepsilon.$$

Uit de additieve congruentie blijkt nu dat bij elk bestaanbaar getal γ in ieder interval een getal z te vinden is met

$$|\varphi(z) - \gamma - 2h\pi| < \varepsilon,$$

waarin h een geheel getal voorstelt; men behoeft n.l. slechts $z = x + y$ te kiezen, waarbij x het midden van het beschouwde interval voorstelt en dan verder $\gamma' = \gamma - \varphi(x)$ te stellen. Hiermede heb ik laten zien, dat in dit geval de functie $\varphi(x)$ de derde pathologische eigenschap bezit, waarmede de te bewijzen bewering aangetoond is.

Keeren we nu terug tot de in de voorgaande paragraaf behandelde functionaalbetrekking. Indien de niet-constante functies $f(x)$ en $g(x)$ aan die betrekking voldoen, dan kunnen we, zooals we hierboven gezien hebben, $f(x) = \cos \varphi(x)$ en $g(x) = \sin \varphi(x)$ stellen; de functie $\varphi(x)$ vervult daarbij de additieve congruentie en is dus $\equiv kx \pmod{2\pi}$ of ze bezit de derde pathologische eigenschap. In het eerste geval is $f(x) = \cos kx$ en $g(x) = \sin kx$. In het tweede geval benadert $\varphi(x)$ in ieder interval iedere waarde, afgezien van een veelvoud van 2π , willekeurig dicht, zoodat in elk interval minstens één x te vinden is, zóódanig dat het punt met de coördinaten $f(x)$ en $g(x)$ een willekeurig op den eenheidscirkel gekozen punt willekeurig dicht benadert; het door $f(x)$ en $g(x)$ gevormd functiepaar bezit dus dan de eerste pathologische eigenschap. Ieder niet-constant functiepaar, dat aan de functionaalbetrekking voldoet, is

dus $f(x) = \cos kx$ en $g(x) = \sin kx$ of bezit de eerste pathologische eigenschap.

Tot slot van deze paragraaf nog een opmerking. Voldoen de niet-constante functies $f(x)$ en $g(x)$ aan de in de voorgaande paragraaf behandelde functionaalbetrekking en wordt $f(x) = \cos \varphi(x)$ en $g(x) = \sin \varphi(x)$ gesteld, dan is

$$\begin{aligned} g(x - y) &= \sin \varphi(x - y) = \sin (\varphi(x) - \varphi(y)) \\ &= \sin \varphi(x) \cos \varphi(y) - \cos \varphi(x) \sin \varphi(y) \\ &= g(x) f(y) - f(x) g(y). \end{aligned}$$

Alle niet-constante oplossingen (ook de pathologische) van de oorspronkelijke functionaalbetrekking voldoen dus aan de relatie

$$g(x - y) = g(x)f(y) - f(x)g(y).$$

§ 4. Toepassing van het keuzepostulaat.

Met behulp van het keuzeaxioma zal ik bepalen alle functies $\Phi(x)$, die aan de additieve vergelijking voldoen, alle functies $\varphi(x)$, die de additieve congruentie vervullen en ten slotte alle functieparen $f(x)$ en $g(x)$, voor welke de beschouwde functionaalbetrekking geldt.

De belangrijkste toepassing van het keuzepostulaat is de stelling van ZERMELO, dat iedere verzameling welgeordend kan worden en uit die stelling leidt G. HAMEL ¹⁾ af, dat de bestaanbare getallen een rationale basis B bezitten. Daaronder wordt een verzameling van bestaanbare getallen verstaan met de volgende twee eigenschappen:

1. De in B voorkomende getallen zijn lineair onafhankelijk, d.w.z. kies ik in B een willekeurig aantal verschillende elementen $a_1, a_2, \dots, a_m$, dan is het onmogelijk een lineaire relatie

$$r_1 a_1 + r_2 a_2 + \dots + r_m a_m = 0$$

met rationale coëfficiënten $r_1, \dots, r_m$ te vinden, als het geval, dat alle coëfficiënten nul zijn, buiten beschouwing gelaten wordt.

2. Elk bestaanbaar getal x kan lineair worden uitgedrukt in een eindig aantal in B voorkomende getallen, d.w.z. men kan schrijven

$$(22) \quad x = r_1 b_1 + \dots + r_n b_n,$$

¹⁾ Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$, Mathematische Annalen **60** (1905) 459—462.

waarbij $b_1, \dots, b_n$ in B liggen en de coëfficiënten $r_1, \dots, r_n$ rationale getallen voorstellen.

HAMEL heeft juist de rationale basis ingevoerd om alle oplossingen van de additieve vergelijking te kunnen aangeven. Hij doet dat als volgt.

Een functie $\Phi(x)$, die aan de additieve vergelijking voldoet en voor elk element b van de basis vastgelegd is, is wegens (14) ook voor de getallen rb , waarin r rationaal is, bepaald, dus wegens (22) en de additieve vergelijking voor elk bestaanbaar getal x gedefinieerd. Het merkwaardige is nu dat voor elk element b van de basis de reële waarde $\Phi(b)$ willekeurig gekozen kan worden, d.w.z. kiest men voor elk element b van B het bestaanbare getal $\Phi(b)$ willekeurig, dan bestaat er één en slechts één voor iedere bestaanbare x gedefinieerde bestaanbare functie $\Phi(x)$, die aan de additieve vergelijking voldoet en voor elk element van de basis de voorgeschreven waarde aanneemt.

Om deze functie $\Phi(x)$ aan te geven, breng ik x in de in (22) aangegeven gedaante en stel ik

$$\Phi(x) = r_1\Phi(b_1) + \dots + r_n\Phi(b_n).$$

De vraag is nu: is deze functie $\Phi(x)$ eenduidig bepaald? Het getal x bezit n.l. nog andere schrijfwijzen en leveren al die schrijfwijzen dezelfde waarde voor $\Phi(x)$? Dat is inderdaad het geval. Stel x kan ook gebracht worden in den vorm

$$x = r_1'b_1' + \dots + r_s'b_s',$$

waarin $b_1', \dots, b_s'$ elementen van de basis, $r_1', \dots, r_s'$ rationale coëfficiënten voorstellen. Dan is

$$r_1b_1 + \dots + r_nb_n - r_1'b_1' - \dots - r_s'b_s' = 0.$$

Stellen $a_1, \dots, a_m$ de verschillende getallen voor, die in het systeem $b_1, \dots, b_n, b_1', \dots, b_s'$ optreden, dan kan men het linkerlid van de laatste vergelijking brengen in de gedaante

$$(23) \quad t_1a_1 + \dots + t_ma_m,$$

waarin $t_1, \dots, t_m$ rationaal zijn; daarbij krijgt men

$$r_1\Phi(b_1) + \dots + r_n\Phi(b_n) - r_1'\Phi(b_1') - \dots - r_s'\Phi(b_s') = t_1\Phi(a_1) + \dots + t_m\Phi(a_m).$$

Omdat de som (23) nul is, volgt uit de eerste eigenschap van de rationale basis B , dat alle coëfficiënten $t_1, \dots, t_m$ de waarde nul bezitten, derhalve

$$r_1\Phi(b_1) + \dots + r_n\Phi(b_n) = r_1'\Phi(b_1') + \dots + r_s'\Phi(b_s').$$

De twee verschillende voor x gekozen schrijfwijzen leveren dus voor $\Phi(x)$ dezelfde waarde, zoodat $\Phi(x)$ eenduidig bepaald is. Dat deze functie $\Phi(x)$ de additieve eigenschap bezit, is evident, want is

$$y = r_1^* b_1^* + \dots + r_u^* b_u^*,$$

waarin $b_1^*, \dots, b_u^*$ tot de basis behooren en de coëfficiënten rationaal zijn, dan is

$$\begin{aligned}\Phi(x) + \Phi(y) &= r_1 \Phi(b_1) + \dots + r_n \Phi(b_n) + r_1^* \Phi(b_1^*) + \dots + r_u^* \Phi(b_u^*) \\ &= \Phi(x + y).\end{aligned}$$

Hiermede hebben we ervaren, op welke manier we alle oplossingen van de additieve vergelijking kunnen vinden; we kiezen die functie voor elk element van de rationale basis willekeurig en bepalen dan vervolgens met het gegeven voorschrift de functie voor elk bestaanbaar getal. Doen we onze keuze zoo, dat $\frac{\Phi(b)}{b}$ voor elk element b van de basis eenzelfde waarde k oplevert, dan vinden we voor elk bestaanbaar getal x

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= r_1 \Phi(b_1) + \dots + r_n \Phi(b_n) \\ &= k(r_1 b_1 + \dots + r_n b_n) = kx,\end{aligned}$$

zoodat $\Phi(x)$ dan evenredig aan x is. Maar deze zijn slechts de exceptioneele oplossingen van de additieve vergelijking, want de basis bestaat uit oneindig veel elementen; er zijn oneindig veel functies $\Phi(x)$ waarbij $\frac{\Phi(b)}{b}$ niet voor elk element van de basis eenzelfde waarde oplevert. Zooals nu volgens § 3 vanzelf spreekt, bezitten al die functies $\Phi(x)$ de tweede pathologische eigenschap.

Nu komen de oplossingen $\varphi(x)$ van de additieve congruenties aan de beurt. Ik begin met $\varphi(b)$ voor elk element b van de basis willekeurig te kiezen. Maar nu krijgen we al dadelijk een afwijking: het is niet waar, dat de functie $\varphi(x)$, die aan de additieve congruentie voldoet, op een veelvoud van 2π na, eenduidig bepaald is door de waarden, die ze voor de tot de basis behorende getallen aanneemt. Immers, is $\varphi(b)$ gegeven, dan is $\varphi(\frac{1}{2}b)$ nog niet op een veelvoud van 2π na bekend; we weten n.l. alleen

$$2\varphi\left(\frac{b}{2}\right) \equiv \varphi(b) \pmod{2\pi},$$

zoodat $\varphi\left(\frac{b}{2}\right)$ slechts op een veelvoud van π na bekend is. Daarom

zullen we ons eerst het volgende probleem voorleggen: indien $\varphi(b)$ gegeven is, hoe kunnen we dan voor elk rationaal getal r het getal $\varphi(rb)$ op een veelvoud van 2π na eenduidig vastleggen?

Voor een element b der basis, voor een ondeelbaar getal p en voor een natuurlijk h geldt in verband met de additieve congruentie

$$p\varphi\left(\frac{b}{p^h}\right) \equiv \varphi\left(\frac{b}{p^{h-1}}\right) \pmod{2\pi},$$

dus

$$(24) \quad \varphi\left(\frac{b}{p^h}\right) \equiv \frac{1}{p} \varphi\left(\frac{b}{p^{h-1}}\right) + \frac{2\pi \theta_h(b, p)}{p} \pmod{2\pi},$$

waarin $\theta_h(b, p)$ een natuurlijk getal $\leq p$ voorstelt. Ik zal nu de natuurlijke getallen $\theta_h(b, p)$, alle $\leq p$, willekeurig kiezen. Is het getal $\varphi(b)$ en zijn bovendien de getallen $\theta_h(b, p)$ ($h = 1, 2, \dots$) gekozen, dan is dus $\varphi\left(\frac{b}{p^\alpha}\right)$, op een veelvoud van 2π na, eenduidig bepaald, en wel voor iedere keuze van het natuurlijke getal α .

Nu kan elk rationaal getal r in de gedaante

$$(25) \quad r = s_0 + \frac{s_1}{p_1^{\alpha_1}} + \dots + \frac{s_v}{p_v^{\alpha_v}}$$

gebracht worden, waarin $s_0, s_1, \dots, s_v$ geheele, $\alpha_1, \dots, \alpha_v$ natuurlijke, $p_1, \dots, p_v$ ondeelbare getallen voorstellen. Ik stel

$$\varphi(rb) \equiv s_0\varphi(b) + s_1\varphi\left(\frac{b}{p_1^{\alpha_1}}\right) + \dots + s_v\varphi\left(\frac{b}{p_v^{\alpha_v}}\right) \pmod{2\pi}.$$

De eerste vraag is thans: is op die manier $\varphi(rb)$, op een veelvoud van 2π na, eenduidig bepaald? D.w.z. kiezen we in plaats van (25) voor r een andere analoge schrijfwijze, vinden we dan, afgezien van een veelvoud van 2π , voor $\varphi(rb)$ hetzelfde antwoord? Dat dit inderdaad het geval is, blijkt uit de volgende redeneering: De twee voor r gekozen schrijfwijzen leveren bij aftrekking een schrijfwijze van de gedaante

$$(26) \quad 0 = t_0 + \frac{t_1}{p_1^{\beta_1}} + \dots + \frac{t_w}{p_w^{\beta_w}},$$

waarin $t_0, \dots, t_w$ geheele, $\beta_1, \dots, \beta_w$ natuurlijke, $p_1, \dots, p_w$ ondeelbare getallen voorstellen; bewezen moet worden

$$(27) \quad t_0\varphi(b) + t_1\varphi\left(\frac{b}{p_1^{\beta_1}}\right) + \dots + t_w\varphi\left(\frac{b}{p_w^{\beta_w}}\right) \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Bij dat bewijs mogen we aannemen, dat elk der in (26) voorkomende

breuken onvereenvoudigbaar is, want is bijv. t_1 door p_1 deelbaar, dan volgt uit (24)

$$t_1 \varphi\left(\frac{b}{p_1^{\beta_1}}\right) \equiv \frac{t_1}{p_1} \varphi\left(\frac{b}{p_1^{\beta-1}}\right) \pmod{2\pi}$$

zoodat de term $\frac{t_1}{p_1^{\beta_1}}$ dan in het linkerlid van (26), op een veelvoud

van 2π na, dezelfde bijdrage als de term $\frac{t_1}{p_1^{\beta_1-1}}$ levert. Verder

mogen we aannemen, dat de in (26) optredende breuken ongelijknamig zijn, omdat gelijknamige breuken kunnen worden samengevoegd en de overeenkomstige samenvoeging ook in het linkerlid van (27) mogelijk is. Ik beweer, dat bij die afspraak alle in (26)

voorkomende tellers nul zijn. Anders zou men n.l. voor $\frac{t_1}{p_1^{\beta_1}}$ de in

die betrekking optredende breuk kunnen nemen, waarvoor $t_1 \neq 0$ is en de noemer door zooveel mogelijk factoren p_1 deelbaar is; volgens de veronderstelling is daarbij t_1 niet door p_1 deelbaar. Vermenigvuldigen we beide leden van (26) met het kleinste gemeene veelvoud $qp_1^{\beta_1}$ der noemers, dan vinden we, dat qt_1 door p_1 deelbaar is en dat is onmogelijk, omdat noch q noch t_1 door dat priemgetal deelbaar is. Derhalve zijn alle in (26) optredende tellers, dus ook t_0 , nul, zoodat (27) bewezen is. Aldus hebben we $\varphi(rb)$ voor elk element b der basis en voor elk rationaal getal, op een veelvoud van 2π na, eenduidig vastgelegd. Uit deze definitie volgt voor elk paar rationale getallen r en r'

$$\varphi(rb) + \varphi(r'b) \equiv \varphi((r+r')b) \pmod{2\pi}.$$

Nu is het geen kunst meer om $\varphi(x)$ voor iedere bestaansbare x , op een veelvoud van 2π na, te definieeren. Ik breng x wederom in de gedaante (22) en ik stel

$$\varphi(x) \equiv \varphi(r_1 b_1) + \dots + \varphi(r_n b_n) \pmod{2\pi}.$$

Na al het voorafgaande zal het nu wel onnoodig zijn op te merken, dat dit getal $\varphi(x)$, op een veelvoud van 2π na, eenduidig bepaald is, dat dus een andere schrijfwijze voor x dezelfde waarde van $\varphi(x)$ oplevert, afgezien eventueel van een veelvoud van 2π . Uit deze definitie blijkt dan tevens onmiddellijk, dat deze functie $\varphi(x)$ aan de additieve congruentie voldoet.

Op die manier vinden we alle bestaansbare oplossingen van de additieve congruentie. We zien, dat we daarbij een nog grootere

vrijheid genieten dan bij de additieve vergelijking, want ditmaal mogen we niet alleen de waarde van $\varphi(x)$ van elk element b der basis willekeurig kiezen, maar bovendien mogen we nog voor elk element b der basis en voor elk priemgetal p willekeurige natuurlijke getallen $\theta_h(b, p)$ ($h = 1, 2, \dots$), elk $\leq p$, invoeren. De oplossing

$$\varphi(x) \equiv kx \pmod{2\pi}$$

vinden we alleen, als we voor elk element b der basis

$$\varphi(b) \equiv kb \pmod{2\pi}$$

en dan bovendien nog voor elk priemgetal p en elk natuurlijk getal h het getal $\theta_h(b, p)$ geschikt kiezen. Alle overige oplossingen bezitten de derde pathologische eigenschap.

Zooals we in § 3 gezien hebben, vinden we alle niet-constante oplossingen van de in § 2 behandelde functionaalbetrekking door te stellen $f(x) = \cos \varphi(x)$ en $g(x) = \sin \varphi(x)$, waarin $\varphi(x)$ aan de additieve congruentie voldoet. Iedere oplossing van de additieve congruentie met de derde pathologische eigenschap levert een oplossing van de functionaalbetrekking met de eerste pathologische eigenschap. De functionaalbetrekking bezit dus oneindig veel pathologische oplossingen.

BOEKBESPREKINGEN.

Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie, door
P. WIJDENES, 5e druk. — Groningen, Noordhoff.

Dit leerboek, dat bedoeld is voor hen, die voor KI of de acte Wiskunde L.O. studeren, is een degelijk stuk werk. Naast de grotere uitvoerigheid onderscheidt het zich van de gewone schoolboeken door een grotere strengheid van behandeling. Ik wil dit met enkele voorbeelden toelichten.

De afleiding der optellingstheorema's voor $\sin$ en $\cos$ wordt op drie wijzen gegeven, eenmaal op de veelal gebruikelijke manier (eerst uit een figuur voor scherpe α en β , waarbij $\alpha + \beta < 90^\circ$ is, daarna generaliseren, vervolgens uit de betrekking van Möbius voor gerichte lijnstukken, ten slotte door middel van de stelling van Ptolemaeus). — De formule van de Moivre wordt gebruikt om de uitwerking van $\sin 3\alpha$, enz., af te leiden; de goniometrische reeksen en de limieten, waarin goniometrische functies voorkomen, worden uitvoerig besproken. Het elimineren van grootheden uit goniometrische vergelijkingen, de ongelijkheden met goniometrische functies en de uiterste waarden ervan vinden alle de hun toekomende plaats. Een hoofdstuk over grafieken van goniometrische functies is met een groot aantal zeer duidelijke figuren toegelicht, terwijl aan het werk is toegevoegd een hoofdstuk „Landmeetkunde” van de hand van den heer A. J. H. Meertens, waaruit de lezer een geheel andere — en veel juistere — indruk van dit belangrijke toepassingsgebied der trigonometrie krijgt dan uit de behandeling van het probleem van Snellius in de gewone boeken mogelijk is. Het boek is helder geschreven, gelijk wij dat van den auteur gewend zijn; het is keurig verzorgd in alle opzichten, gelijk dat bij de firma, die de uitgave heeft op zich genomen, gewoonte is; het bevat een zeer groot aantal vraagstukken. Voor het beoogde doel is het leerboek zéér geschikt.

d e J.

Historische Studiën III, door Prof. Dr. Hk. DE
VRIES. — Groningen, Noordhoff.

Dit derde deel van Prof. de Vries' *Historische Studiën* heb ik doorgebladerd, gelezen en herlezen, en telkens ben ik weer verrast door de merkwaardige beking, die van dit werk uitgaat. Het is niet gemakkelijk, onder woorden te brengen, waarin die eigenschap van het boek precies bestaat. Is het de onderhoudende, didactisch zo juist getroffen toon der uiteenzettingen, waarbij de schrijver oud en nieuw dooreenweeft en af en toe scherp stelling neemt, gelijk een goed docent dit ook soms moet doen? Is het de grote liefde en eerbied voor de historie, die het boek zo aantrekkelijk maakt? Ik weet niet zeker, wat het voornaamste is, maar wel staat voor mij vast, dat de

methode, door den schrijver nu reeds in verschillende historisch-mathematische geschriften toegepast, de vruchtbaarste is, als het gaat om een wat bredere kring van wiskundigen belangstelling te doen krijgen voor de geschiedenis van hun vak.

In de eerste hoofdstukken behandelt prof. de Vries het onderlinge verband en verschillende uitbreidingen van bekende planimetrische stellingen (die van Menelaus, Carnot), de uitbreiding van het begrip oppervlak van een veelhoek volgens Möbius, en toepassingen daarvan op verschillend gebied; enkele lezers geven een korter bewijs van de stelling van Möbius dan de schrijver zelf gevonden had. Een volgend hoofdstuk handelt over krachten en rotaties; bewezen wordt, dat het mogelijk is, om 6 gegeven assen zodanige rotaties te doen uitvoeren, dat het effect gelijk is aan een gegeven rotatie om een gegeven 7e as, waaruit weer volgt, dat de Natuur met een minimum aan hulpmiddelen de — binnen zekere grenzen — vrije beweeglijkheid van de scharen der kreeften heeft mogelijk gemaakt. Het werk van Gaspard Monge wordt uitvoerig geschetst, terwijl in het laatste hoofdstuk op het voetspoor van Möbius verband wordt gelegd tussen projectieve puntenreeksen, kettingbreuken en verrekijkers.

Ik hoop, dat ook dit deel in veler handen moge komen, en ik wens prof. de Vries gaarne toe, dat hij nog lange tijd ongestoord zal mogen wijden aan zijn historische arbeid, die niemand op déze wijze van hem kan overnemen.

d e J.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van VAN GOOR, U.M. Den Haag.

Prof. Dr. FRED. SCHUH en Ir. W. J. VOLLEWENS, *Nieuw leerboek der Mechanica* ten dienste van het voorbereidend hoger en middelbaar onderwijs. 229 blz. . . . f 2,50
geb. - 2,90

Prof. Dr. FRED. SCHUH, *Leerboek der boldriehoeksmeting*; 54 fig. 836 vraagstukken, 295 blz. geb. - 5,40

INHOUD.

- A. Meetkundige beschouwingen op den bol . . . blz. 1— 65
- B. Betrekkingen tussen de elementen van een boldriehoek blz. 65—171
- C. Verdere vragen van boldriehoeksmeting . . . blz. 172—202
- D. Verband met andere gebieden blz. 203—295

Van LOGHEM SLATERUS U.M., Den Haag.

Prof. Dr. H. J. POS, *Filosofie der wetenschappen*; vijf inleidende voordrachten. 101 blz., f 2,—, geb. f 2,90

- I. De idee ener filosofie der wetenschappen.
- II. Apriorische wetenschappen.
- III. Wetenschappen der natuur.
- IV. Wetenschappen der cultuur.
- V. Universitas scientiarum.

Van J. B. WOLTERS, Groningen.

Verslag van het vijfde Nederlands Congres van leraren in de wiskunde en de natuurwetenschappen, gehouden op 28 Maart 1940 te Amsterdam f 1,25

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

P. WIJDENES, *Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie*. 5e druk. 371 blz., 205 fig., geb. f 6,75

NOORDHOFF's *Tafel in 4 dec*. 5e druk. 21—25e duizendtal, in slap linnen - 1,—

Van W. J. THIEME en Cie., Zutphen.

Dr. W. J. A. SCHOUTEN, *Cosmographie*. Leerboek voor het Gymasiaal en Middelbaar Onderwijs. 83 blz. 53 fig. - 1,25
geb. - 1,65

WISKUNDIGE STRENGHEID IN WETENSCHAP EN SCHOOL

DOOR

Dr. A. HEYTING.

De eerste vraag, die zich voordoet, als wij over strengheid in de wiskunde nadenken, is wel deze: Waarom streven wij naar strengheid? Waarom stellen wij ons niet tevreden met wat het gezonde verstand ons leert, het gewone boerenverstand, dat zich immers slechts tegenstribbelend aan de eisen van het strenge redeneren onderwerpt? Is het, omdat wij bang zijn, fouten te maken, als wij ons niet al te veel om de strengheid bekommeren? De ervaring leert, dat die vrees sterk overdreven zou zijn; het loopt met die fouten zo'n vaart niet, zeker niet in die delen van de wiskunde, die al goed bekend zijn en waarop bijna alle toepassingen berusten. Een sterk sprekend voorbeeld hiervoor is het werk van Euler en zijn leerlingen. Belinfante¹⁾ heeft eens laten zien, hoe men met dezelfde methode, waarmee Euler en Johann Bernoulli de som van de hyperharmonische reeks $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ bepaalden, de gelijkheid $0 = \frac{1}{2}$ kan vinden. Natuurlijk belette het gezonde verstand, dat men in dit geval de methode toepaste; een voorwendsel daarvoor was wel te vinden. De 0 ontstaat hier namelijk door termsgewijze aftrekking van twee divergente reeksen met zuiver imaginaire termen.

Een ander bekend vergrijp tegen de strengheid beging Steiner in zijn bewijs voor de isoperimetrische eigenschap van de cirkel.²⁾ Hij geeft daar een methode aan, waardoor iedere gesloten kromme, die geen cirkel is, bij behoud van haar lengte zo veranderd wordt, dat zij een groter oppervlak gaat omsluiten. Hieruit concludeert

¹⁾ Bijvoegsel van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 1 (1925) 153.

²⁾ J. Steiner, Werke II, 193—195. Zie H. Rademacher und O. Toeplitz, Von Zahlen und Figuren, 108—113.

hij, dat de cirkel bij gegeven lengte het grootste oppervlak omsluit. Dat deze conclusie ongerechtvaardigd is, blijkt uit het volgende voorbeeld. Wij beschouwen de puntverzameling V , bestaande uit alle binnen een vierkant gelegen punten en voegen daaraan een zijde AB van het vierkant en de beide hoekpunten op die zijde toe. Elk lijnstuk, dat tot deze verzameling behoort, kan binnen V verlengd worden, behalve AB . Dus zou AB het langste lijnstuk binnen V zijn.

Historisch ligt de zaak iets gunstiger voor Steiner dan ik ze hier heb voorgesteld. Hij gaat namelijk uit van de onjuiste stelling, dat in iedere begrensde getallenverzameling een grootste getal moet voorkomen; hij noemt deze stelling en redeneert verder onberispelijk. Ondanks zijn verkeerde uitgangspunt kwam hij tot een goed resultaat en het gezonde verstand behoedt ons er wel voor, zijn methode toe te passen in gevallen als dat van de verzameling V .

Een grote mate van strengheid is dus niet noodzakelijk, om voor de toepassingen voldoende betrouwbare resultaten af te leiden. Een langs ietwat bedenkelijke weg afgeleide formule moge dan al niet onomstotelijk vaststaan, de kans dat bij een proef een afwijking van het verwachte resultaat een gevolg zou zijn van een fout in de formule is zoveel kleiner dan die, dat ze veroorzaakt wordt door onvoldoende kennis van de natuurwetten, dat wij de eerste gerust kunnen verwaarlozen. Men kan het de beoefenaren der natuurwetenschap niet euvel duiden, wanneer zij voor hun doel aan scherpe afleidingen slechts beperkte waarde toekennen.

Een tweede argument voor de strengheid is van psychologische aard; zij zou nodig zijn om ons volkomen van de juistheid van een stelling te overtuigen. Ik geloof niet, dat dit argument tegen een toetsing door nuchtere waarneming bestand is. Zelfs weinige mathematici zullen op een terrein, waar zij enigszins bekend zijn, een volkomen streng bewijs nodig hebben om overtuigd te worden; zij zijn tevreden, als zij ongeveer zien, hoe dat bewijs geleverd zou moeten worden.

De eis van strengheid heeft geen zin, zolang het in de wiskunde om de resultaten te doen is, hetzij men die op de natuurwetenschap toe wil passen of niet. Eerst wanneer men de wiskunde om haar zelfs wil beoefent in deze zin dat de bij het redeneren uitgeoefende geestelijke werkzaamheid zelve doel is, komt de strengheid tot haar recht. Maar dan moet zij ook onvoorwaardelijk geëist worden als het meest essentiële kenmerk juist van de wiskundige denkwijze.

Wanneer wiskunde betekent bezinning op het exacte element in ons denken en haar beoefening bestaat in het bouwen en doorvorsen van steeds ingewikkelder gedachtenconstructies, dan is het bewust aanvaarden van een niet streng bewijs slechts het gevolg van lafheid of laksheid, die ons beletten te erkennen, dat de volkomen oplossing van het gestelde probleem ons niet gelukt is. In de zuivere wiskunde is strengheid hetzelfde als eerlijkheid en de vraag „waarom strengheid?” treedt terug achter de diepere „waarom wiskunde?” Deze vraag stel ik hier niet, omdat ze alleen te beantwoorden zou zijn als wij ons eerst klaarheid verschaffen over het doel van onze geestelijke arbeid in het algemeen. Nemen wij dus aan, dat beoefening van de wiskunde nuttig en nodig is, dan is de noodzaak van strengheid tegelijkertijd gepostuleerd.

De vraag „wat is strengheid?” is echter door de vergelijking „strengheid = eerlijkheid” niet bevredigend opgelost, omdat de meeste vergripen tegen de strengheid onbewust begaan worden. Redeneren wij zeer streng over de strengheid, dan moeten wij zeggen: „Niet streng = fout”. Men is echter gewoon, bepaalde soorten van fouten speciaal als strengheidsfouten te beschouwen en als zodanig enigszins te vergoelijken, vooral als de uitkomst goed is. Wij zullen ons verder aan dit min of meer willekeurig en empirisch begrensde begrip van strengheid houden. De voornaamste vergripen tegen de strengheid in deze zin zijn wel de volgende.

1e. Bij de formulering van een stelling worden de voorwaarden, waaronder zij geldt, onvolledig of onnauwkeurig vermeld, of wel, bij de toepassing verzuimt men te onderzoeken, of die voorwaarden inderdaad vervuld zijn. Zo gebruikt E u l e r stellingen, die alleen voor eindige reeksen bewezen zijn, zonder veel scrupules ook voor oneindige reeksen; S t e i n e r past de stelling, dat in iedere eindige verzameling van vlakke figuren er minstens een met maximaal oppervlak voorkomt, zonder verder onderzoek toe op de oneindige verzameling der figuren met gegeven omtrek.

2e. Onnauwkeurig woordgebruik verraaft slordigheid in het denken: bepaalde termen worden zonder behoorlijke definitie gebruikt of men houdt zich niet aan de gegeven definitie. Hoewel in de tijd van E u l e r de juiste definitie van de som van een oneindige reeks niet geheel onbekend was, dacht men er niet aan, met de toepassing van die definitie ernst te maken.

3e. Stellingen, ontleend aan een materiele interpretatie worden

als wiskundig bewijsmateriaal gebruikt. Voorbeelden hiervan liggen voor het grijpen. Uit het feit, dat men tegen een rutschbaan in ieder punt aan de boven- of onderzijde een plank kan leggen, concludeerde men, dat een continue kromme in ieder punt een raaklijn moet bezitten. Het feit, dat iedere nog zo grillig gevormde vlakke plaat een bepaald gewicht heeft, geldt nog voor velen als voldoende argument voor de stelling, dat iedere gesloten vlakke kromme een bepaald oppervlak omsluit. De bewijzen van Klein voor stellingen uit de functietheorie met behulp van een model uit de electriciteitsleer zijn voorbeelden van de beste niet-strengere wiskunde.¹⁾

Natuurlijk denk ik er niet aan, Euler en Felix Klein wegens hun minder strenge redeneringen van lafheid of oneerlijkheid te beschuldigen of hun betekenis als wiskundigen te verkleinen. Het is te veel geëist, dat in de grote strijd met het onbekende, die de wetenschap is, het bezit van ieder nieuw verworven gebied onmiddellijk met alle eigendomspapieren te staven zou zijn. Dikwijls hebben onstrenge methoden, door een meester gehanteerd, zeer grote heuristische waarde. Vele belangrijke ontdekkingen zijn langs onstrenge weg gegaan. Als definitief bezit kunnen de resultaten echter pas gelden, nadat de strenge bewijzen zijn gegeven. Zo groeit de wiskunde door samenwerking van het meer organisatorisch en het meer filosofisch gerichte talent; slechts zelden vindt men die beide vermogens in hoge mate in een persoon verenigd (In onze tijd bijv. bij Hilbert en Brouwer).

Het is duidelijk, dat de omschrijving van het begrip „strengheid”, die ik hier beproef, geen aanspraak maakt op volledigheid; ook zijn de drie categorieën van strengheidsfouten niet scherp van elkaar te scheiden. Voor een niet wiskundig exacte beschouwing over het wiskundig bedrijf is het begrip nu echter wel voldoende vastgelegd.

Hier sluiten wij het beste de vraag aan, of strengheid een relatief of een absoluut begrip is. Kan men spreken van streng — strenger — strengst of alleen van streng — niet streng? Gingen wij van de opvatting uit, dat elke niet strenge redenering fout is, dan moesten wij wel tot het laatste besluiten. Er zijn echter sterke argumenten voor de eerste, de relatieve opvatting van strengheid te vinden in de geschiedenis van de wiskunde. De begrippen over strengheid

¹⁾ F. Klein, Gesammelte Abhandlungen III, 498 vgl.

zijn in de loop der eeuwen sterk veranderd; men heeft zowel in de oudheid als in de nieuwe tijd naar strengheid gestreefd, maar ze in zeer verschillende mate bereikt. De gedachte van een strenge wiskunde schijnt het eerst bij de Grieken te zijn opgekomen. Er zou een welsprekender redenaar nodig zijn, om het ongehoorde avontuur te beschrijven waarin de geest zich begaf, toen hij voor het eerst los van directe ervaring uit eigen kracht tot waarheid trachtte te geraken. Begrijpelijk is, dat de steun van de materie voorlopig niet geheel gemist kan worden, ook, dat ondanks de geweldige arbeid, in enkele eeuwen door generaties van denkers verricht, het resultaat niet in alle opzichten tegen de kritiek van onze tijd opgewassen bleek. Het is hier niet de plaats, uitvoerig over het karakter van de Griekse wiskunde te spreken. Wie het werk van Dijksterhuis over de Elementen van Euclides bestudeert, zal dikwijls met verbazing zien, hoe hoog de Grieken hun doel kozen, maar ook bemerken, dat het doel lang niet volledig werd bereikt. Van ons standpunt gezien is wel het grootste gebrek, dat de axioma's worden beschouwd als geldig voor de materiele werkelijkheid, of althans voor een ideële werkelijkheid, die op een of andere wijze achter de materiele school. Daardoor was de verleiding wel heel groot, in de als 3e genoemde strengheidsfout te vervallen. Dat zij aan die verleiding niet ontkomen zijn, is bekend en vooral duidelijk bij de congruentiestellingen, waar het verplaatsen van een figuur wordt toegepast. Het schijnt wel, ¹⁾ dat Euclides deze methode zo lang mogelijk tracht te vermijden, maar hij kan ze niet geheel missen. Ook het ontlenen van alle ordeningseigenschappen aan de aanschouwing is een bekend voorbeeld, waaraan men bovendien ziet, dat de Grieken zich niet bij elke bewering afvroegen, of die wel op een vroeger bewezen stelling steunde.

Ondanks al deze gebreken heeft het na de opleving der wiskunde in de Renaissancetijd lang geduurd, voordat het Griekse strengheidspeil weer bereikt was en heeft men het eerst in de 19e eeuw overtroffen. Een belangrijk deel van de wiskundige arbeid uit die eeuw is gewijd aan het verdrijven van resten van materiele voorstellingen. Ik noem als voorbeelden de reductie van het begrip „oppervlak” tot dat van de zuiver arithmetisch gedefinieerde integraal; de axiomatisering van het ordeningsbegrip door P a s c h; de nauw-

¹⁾ Zie E. J. Dijksterhuis, De Elementen van Euclides I, 147.

keurige definitie van het begrip continuïteit. Omstreeks 1900 zag men met voldoening terug op de enorme hoeveelheid arbeid, in deze richting gedaan en op het indrukwekkende resultaat, zodat Poincaré op het congres in dat jaar de woorden gebruikte: „On peut dire qu'aujourd'hui la rigueur absolue est atteinte”.

Toch had Poincaré ongelijk. Na 1900 en merkwaardig genoeg juist mede onder de invloed van zijn filosofische geschriften is de mate van strengheid nog vergroot en wel in verschillende richtingen, overeenkomende met de eisen, die wij hierboven hebben genoemd. Men kan de strijd tussen formalisme en intuitionisme zien als een strijd om de voorrang tussen die eisen. Terwijl het formalisme de nauwkeurigheid van woordgebruik tot het uiterste tracht door te voeren, bindt het intuitionisme de strijd aan tegen ongemotiveerde generalisaties, die het bij nauwkeurig toezien ook in de strenge 19e-eeuwse wiskunde nog opmerkt. Laten wij in het kort nagaan, hoe de beide richtingen hun doel trachten te bereiken en waarom zij daarbij in botsing geraakten.

Het formalisme gaat uit van het inzicht, dat volkomen nauwkeurig woordgebruik niet mogelijk is, zolang aan een woord een voorstelling als zijn betekenis verbonden blijft. De betekenis kan immers in laatste instantie niet anders dan door de gewone omgangstaal duidelijk gemaakt worden en blijft steeds in bepaalde opzichten vaag, zodat men nooit geheel kan ontkomen aan de mogelijkheid van twijfel, of in een bepaald geval een zeker woord op zijn plaats is of niet. Dit geldt zelfs voor een zo wiskundige uitdrukking als „natuurlijk getal”. Is het aantal vrijwilligers, dat in Finland streed, een natuurlijk getal? Of het aantal atomen, waaruit ik besta? Of de kleinste exponent, waarvoor het vermoeden van Fermat niet geldt, terwijl ik 1 bedoel als dat vermoeden juist is? Wij kunnen er van afzien, deze vragen te beantwoorden, als wij maar inzien, dat zij verschillend beantwoord kunnen worden. Een niet-wiskundige zal geneigd zijn, ze alle drie bevestigend te beantwoorden, de meerderheid der tegenwoordige wiskundigen de eerste twee ontkennend, de derde bevestigend; ikzelf alle drie ontkennend. Een bevestigend antwoord impliceert de aanvaarding van een zeker feit als voldoende vaststaand; in het eerste voorbeeld is dit van historische aard, in het tweede fysisch, in het derde betreft het de aard van de wiskundige begrippen. Het hangt van de betekenis af, die men aan de woorden „natuurlijk getal” hecht, of men de fundering van

elk dier feiten voldoende zal achten om die woorden te gebruiken. Nu kan men de definitie van „natuurlijk getal” wel zo scherp geven, dat in elk der genoemde gevallen twijfel omtrent het antwoord uitgesloten is, maar men kan zich niet de zekerheid verschaffen, dat een dergelijke twijfel zich bij een ander voorbeeld niet weer zal voordoen. Wil men zich hiervoor vrijwaren, dan moet men het antwoord op de vraag, of een zin een natuurlijk getal definieert, niet laten afhangen van de betekenis van die zin, maar uitsluitend van zijn uiterlijke gedaante. Zo komen de formalisten er toe, de wiskunde op te bouwen als een spel met tekens. Vaste tekenrijen gelden als axioma's en hieruit kunnen met behulp van spelregels andere tekenrijen worden gevormd, die stellingen heten. Hiertoe leidt met onwrikbare noodzakelijkheid de consequente toepassing van de tweede strengheidseis.

Terwijl de formalisten terwille van de formele strengheid de interpretatie van de wiskunde als geestelijke werkzaamheid op de achtergrond schuiven, plaatsen de intuitionisten deze in het centrum van de belangstelling; zij moeten daarom een zekere mate van vaagheid in de uitdrukkingswijze aanvaarden. Dit is voor hen geen groot bezwaar, omdat de wiskunde voor hen bestaat in een denkproces en de taal slechts een bemiddelende functie heeft. Zij merken op, dat de eerste en derde strengheidseisen ook toegepast dienen te worden op de logische principes. Nemen wij als voorbeeld de stelling: Een wiskundig ding met de eigenschap E bestaat of wel, of niet. Deze is blijkbaar ontleend aan de theorie der eindige verzamelingen, waar men voor alle elementen van een verzameling een voor een kan onderzoeken of daaraan de eigenschap E toekomt of niet. Past men nu deze logische stelling zo maar op oneindige verzamelingen toe, dan zondigt men tegen de eerste strengheidseis. Voert men het argument aan, dat het bijv. niet mogelijk is, de natuurlijke getallen een voor een te onderzoeken, om uit te maken of zij aan E voldoen en met dit onderzoek tot een eind te komen, maar dat niettemin het al of niet bestaan van een natuurlijk getal met de eigenschap E vaststaat onafhankelijk van onze kennis daaromtrent, dan gebruikt men een begrip „bestaan”, dat aan voorstellingen of philosophische onderstellingen omtrent de materiele werkelijkheid ontleend is en overtreedt men de derde eis.

Zowel het formalisme als het intuitionisme gaat dus strenger te werk dan de wiskunde der 19e eeuw. Toch zou ik niet durven

beweren, dat nu met een van deze twee richtingen de absolute strengheid bereikt is. Beide bevatten nog resten van materiele interpretatie. Hilbert moet materiele tekens gebruiken, waarover niet formeel, maar aanschouwelijk geredeneerd wordt. Men heeft ook die meta-mathematica alweer geformaliseerd, wat in zoverre een vooruitgang geeft, dat daarvoor met een eenvoudiger systeem kan worden volstaan dan voor de formalisering van de hele wiskunde nodig is. Principieel is echter op de tekens van de metamathematica hetzelfde van toepassing als zoeven over die van de wiskunde is gezegd. Een mogelijkheid van verdere ontwikkeling zie ik hier nog in de richting van uiterste beperking van het aantal tekens en vooral van het aantal met de tekens te verrichten bewerkingen.

In de intuitionistische wiskunde kunnen wij nog zo ons best doen, de natuurlijke getallen te denken vrij van alle niet wezenlijke associaties, volkomen gelukt ons dat nooit. Een verdere ontwikkeling is denkbaar bijv. in richting van een diepere analyse van het getalbegrip, waardoor dit ontleend wordt in eenvoudiger elementen, die zich zuiverder laten denken.

Wiskundige strengheid is dus niet een vaststaand begrip, maar het ondergaat een voortdurende ontwikkeling in de zin van een steeds scherper voldoen aan de eisen, die wij geformuleerd hebben. Die ontwikkeling is niet afgesloten, maar gaat ook nu nog door. In verschillende tijden heeft men onder strenge wiskunde verschillende dingen verstaan; wat hetzelfde bleef, was het streven naar zuiverheid van denken en uitdrukking.

Veel van het voorgaande is ook van toepassing op het wiskunde-onderwijs op school. Ook hier is strengheid niet nodig, om de resultaten af te leiden, die men voor de toepassingen nodig heeft. De kennis, die in de natuur- en scheikunde werkelijk onmisbaar is, kon men niet wat voorbeelden, liefst aan de toepassing ontleend, plausibel maken en dan laten memoriseren. Het is dwaasheid, wiskunde-onderwijs in zijn traditionele vorm te verdedigen met een beroep op de toepassingen in de techniek of zelfs op militair terrein. Evenmin is strengheid van afleiding nodig voor het vestigen van juistheidsovertuiging bij de leerling; die is in veel sterker mate afhankelijk van het suggestievermogen van de leraar. Ook in de school betekent de vraag: „Waarom strenge wiskunde?” hetzelfde

als „Waarom wiskunde?” Of men beoefene de wiskunde streng of alleen als onderdeel van de natuurkunde.

Nu moet ik nadrukkelijk waarschuwen, de vorige alinea niet te lezen — en nog minder te citeren! — zonder verband met het volgende. Wij moeten ons dadelijk afvragen: welke strengheid eisen wij in de school? Die van Euclides, Weierstrass, Hilbert of Brouwer? Nu, de laatste twee vallen zeker uit. Wat in de wetenschap nog omstreden wordt, were men uit de school. Eerst wanneer een theorie zo ten einde gedacht is, wanneer men er zo in alle richtingen de weg in weet, dat ze voor de wetenschap alle interesse heeft verloren, kan ze als regelmatige leerstof in de school gebruikt worden, en ook dan eerst nadat ze een langdurige didactische bewerking heeft ondergaan. Dat men de differentiaalrekening zolang niet heeft aangedurfd, lag niet zozeer aan de moeilijkheid van het vak als wel aan het feit, dat de didactiek er van niet voldoende was uitgewerkt. Ik spreek hierover, omdat juist de voortreffelijke analyse van het limietbegrip door de heer Gerretsen¹⁾ op de laatste vergadering van de Vereniging van leraren in de wiskunde enz. een prachtig voorbeeld is van wat ik met didactische bewerking bedoel. Ook strengheid van behandeling is slechts te bereiken langs de weg van een speciaal daarop toegespitste didactiek.

Om hetzelfde nog eens anders te zeggen: de strengheid, die in de school betracht wordt, is natuurlijk niet die van Hilbert, Brouwer, Weierstrass, Euclides, de leraar of een andere oude heer, maar die van de leerling. En daarmee zitten wij midden in het probleem. Het is niet voldoende, de leerlingen strenge redeneringen voor te zetten, zij moeten zelf tot streng redeneren opgevoed worden en dit eist nog veel meer van de didactiek dan het bijbrengen van wat differentiaalrekening.

Ik zal nu de drie strengheidseisen de revue laten passeren om te zien, wat er in de school van terecht kan komen. Eerst dan de eis, een stelling slechts daar toe te passen, waar haar praemissen vervuld zijn, of, om in schooltermen te spreken, „alleen gebruik te maken van het gegeven”. Merkwaardig genoeg aanvaarden de leerlingen deze eis zonder veel moeite. Het heeft mij dikwijls verbaasd, dat zij in de eerste klas de in verhouding tot wat zij daarvoor

¹⁾ Euclides 16 (1940), 197—218.

hebben leren kennen toch wel zeer wiskundig-streng deducties uit onze meetkundeboeken zo gemakkelijk slikken. Over de oorzaak hiervan kan ik slechts een vermoeden uitspreken; het schijnt mij toe, dat de analogie met het spel het de kinderen gemakkelijk maakt. Evenals bij het spel hebben zij ook in de meetkunde zich te onderwerpen aan regels, die voor hun gevoel wel tamelijk willekeurig moeten zijn. Het gebruiken van een stelling, die niet bewezen is of als axioma aangenomen, is tegen de regels en dus onsportief. In ieder geval moedigt de ervaring ons wel aan, hier de strengheid nog wat op te voeren. Speciaal een betere behandeling van de ordeningsbegrippen zal wel mogelijk zijn. Voor twee gevaren dient men zich te hoeden: ten eerste voor te lange en onoverzichtelijke redeneringen, ten tweede voor beschouwingen, waarvan het aanschouwelijk correlaat te mager zou worden. Om die redenen is een axiomatische behandeling van de ordening der punten op een lijn zeker te moeilijk; waarschijnlijk doet men het beste er, als gebruikelijk, geheel over te zwijgen. Misschien kan men wel iets uitvoeriger ingaan op de verdeling van het vlak door een lijn, in verband met de stelling, dat een lijn steeds geen of twee der zijden van een driehoek snijdt. Door aan deze kwestie enige aandacht te besteden, kan men later op vele punten de strengheid aanmerkelijk vergroten.

Over de vraag, of men in de hogere klassen met vrucht op de grondslagen terug kan komen, heb ik geen op ervaring gegrond oordeel. Misschien kan men een enkel onderwerp, bijv. de ordening of de congruentiestellingen eens goed behandelen. In geen geval zou ik daarbij hetgeen in de eerste klas gedaan is als waardeloos voorstellen of belachelijk maken; de juiste opvatting lijkt mij, dat hetzelfde doel, dat daar reeds nagestreefd en gedeeltelijk bereikt werd, nu beter benaderd kan worden.

Nu de tweede eis: nauwkeurig woordgebruik. Ik aarzel, hier veel over te zeggen. Het is al zo dikwijls betoogd, dat wiskundeonderwijs voor een belangrijk deel taalonderwijs moet zijn en het wordt even algemeen erkend, dat de resultaten in dit opzicht ver van schitterend zijn. Op eindexamens hoort men nog dikwijls van een punt, dat aan een kromme voldoet of op een vergelijking ligt, en zelfs studenten volbrengen het wonder, een breuk door 2 te delen, zonder dat haar waarde verandert. Een der redacteuren van Euclides maakte zich onlangs wat boos over een opmerking in deze geest, omdat hij daarin een onverdiend verwijt aan de leraren zag. Ik geloof, ten

Men begint de studie met de boeken genummerd 1; daarna schaft men zich geleidelijk de nummers 2 aan; de nummers 3 en 4 zijn niet noodzakelijk; toch is het goed, dat de studerende over wat meer en uitgebreider boeken beschikt.



HET EXAMEN KI.

Rekenkunde, in zijn gehele omvang; de commissie van 1916 heeft het nader omschreven als volgt:

De hoofdbewerkingen en hun eigenschappen, de deelbaarheid en de beginselen van de leer der congruenties, de repeterende breuken, de worteltrekking en het begrip der onmeetbare getallen.

1. P. WIJDENES, **Theorie der Rekenkunde.**
2. P. WIJDENES, **Beginnelsen van de Getallenleer.**
3. Prof. Dr. F. SCHUH, **Het onmeetbare getal.**
4. Prof. Dr. F. SCHUH, **Het natuurlijke getal.**

Docenten *moeten* de boeken onder 3 en 4 genoemd bestuderen.

Hogere Algebra. De wet noemt ongeveer de inhoud van de leerboeken; sinds is de stof iets uitgebreid. Men houde zich aan de volgende boeken:

1. P. WIJDENES, **Middel-Algebra, 2e druk**, (met antw.).
1. P. WIJDENES, **Complexe getallen** (à f 1.— enkel bij den schrijver).
2. Prof. Dr. F. SCHUH, **Beknopte Hogere Algebra.**
2. P. WIJDENES, **Vraagstukken over Hogere Algebra en Rekenkunde, 2e druk** (met antwoorden).
3. LOBATTO—WIJDENES, **Lessen over de Hogere Algebra, 2e stuk**; vooral voor eenvoudige theorie over de reeksen.

Voor herhaling is aan te bevelen:

4. J. J. C. WESTENDORP, **Vraagstukken over Hogere Algebra.**

Ten eerste raden we verder candidaten aan door te werken:

4. P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, **Nieuwe School-algebra IV** of
4. Dr. W. L. VAN DE VOOREN, **Grenswaarden, 2e druk.**
In beide worden de beginselen van de Differentiaal- en Integraalrekening uiteengezet.
4. Dr. B. P. HAALMEYER en J. H. SCHOGT, **Inleiding tot de leer der verzamelingen.**

Docenten *moeten* dit laatste bestuderen.

Als logarhythmefel geeft alleen genoeg:

1. J. VERSLUYS, **Grote Tafel H, 3e druk.**

Voor de grafieken neme men:

- P. WIJDENES, **Tekenbladen voor grafische voorstellingen.**

Meetkunde, waaronder ook de stereometrie. De stof voor K I is iets uitgebreider dan die voor L. O.; de boeken hiervoor nodig moeten geheel doorgewerkt worden.

Vlakke Meetkunde:

1. Dr. P. MOLENBROEK, **Leerboek der Vlakke Meetkunde, 8e druk**, met uitwerkingen.

Stereometrie:

1. Dr. P. MOLENBROEK, **Leerboek der Stereometrie, 8e druk**, met uitwerkingen.
1. P. WIJDENES, **Stereometrisch tekenen.**
3. Prof. Dr. F. SCHUH, **Leerboek der Nieuwere Meetkunde van het platte vlak en van de ruimte.**

Driehoeksmeting. De stof voor de vlakke driehoeksmeting is nagenoeg dezelfde als voor L. O.; iets moeilijker en uitgebreider; men neme daarvoor

1. P. WIJDENES, **Leerboek der Gonio- en Trigonometrie, 5e druk** (met antwoorden).

Voor de boldriehoeksmeting neme men:

2. J. VERSLUYS, **Boldriehoeksmeting, 9e druk.**
3. J. VERSLUYS, **Handboek der boldriehoeksmeting.**

Zie verder vooral nr. III blz. 5.

Beschrijvende Meetkunde. Aan de gewone eisen, die tot en met de bol gaan volgens het programma, heeft de commissie van 1916 ook iets toegevoegd, zodat het programma thans luidt: Leerwijze der rechthoekige, scheve, axonometrische en centrale projectie (zie onder XIII blz. 5), de werkstukken betreffende de rechte lijn en het platte vlak, de bol, de cylinder en de kegel, de projectieve ontstaanswijze der kegelsneden (zie IX blz. 5 en SCHUH, **Grepen uit de Moderne Meetkunde**, blz. 220—225, blz. 232—261 en blz. 298—320).

Als inleiding neme men

1. P. WIJDENES, **Beknopte beschrijvende Meetkunde, 4e druk.**
Hierin vindt men, behalve de grondconstructies, 20 volledig uitgevoerde werkstukken.

Verder

1. Prof. Dr. Hk. DE VRIES—P. WIJDENES,
Leerboek der Beschrijvende Meetkunde, I, 5e druk, of
1. Prof. Dr. J. G. RUTGERS, **Leerboek der Beschrijvende Meetkunde, 1e deel, 1e en 2e stuk.**

1. P. WIJDENES, **Oefenbladen voor de Beschrijvende Meetkunde, 4e druk.**
2. Prof. Dr. Hk. DE VRIES en P. WIJDENES, **Leerboek der Beschrijvende Meetkunde II.**
3. Prof. H. J. VAN VEEN, **Beknopt Leerboek der Beschrijvende Meetkunde** of Prof. Dr. Hk. DE VRIES, **Leerboek der Beschrijvende Meetkunde I.**

Analytische Meetkunde. De wet eist de kennis hiervan tot en met de kegelsneden en de vergelijkingen van de rechte lijn in de ruimte en van het platte vlak. Sinds 1905 ongeveer heeft men nooit naar „de ruimte” gevraagd; de commissie van 1916 heeft weer precies omschreven, wat gekend moet worden: de beginselen van de analytische meetkunde in het platte vlak, met behulp van gewone, en ook van homogene coördinaten voor het punt en de rechte lijn, de involuties van de tweede graad en de kegelsneden. Voor deze studie heeft men als inleiding: -

1. J. VERSLUYS—WIJDENES, **Beknopt Leerboek der Analytische Meetkunde, 5e druk**, met antwoorden, of
1. Dr. D. J. E. SCHREK, **Beginselen der Analytische Meetkunde, 5e druk**, met antwoorden. — Verder:
2. Prof. Dr. J. G. RUTGERS, **Inleiding tot de Analytische Meetkunde I, 2e druk**, of
2. Prof. Dr. J. WOLFF, **Analytische Meetkunde.**
3. Prof. H. J. VAN VEEN, **Systematische verzameling van opgaven over Analytische Meetkunde.**
Wie ernstige, diepgaande studie van de Analytische Meetkunde wenst te maken, neme
3. Prof. Dr. J. A. BARRAU, **Leerboek der Analytische Meetkunde I, 2e druk**, Docenten *moeten* dit werk bestuderen.
3. J. VERSLUYS, **Meetkunde der kegelsneden**, of
3. Prof. Dr. J. G. RUTGERS, **Meetkunde der kegelsneden.**
Zie verder vooral VII en IX blz. 5.

Bij de studie zal men veel gemak hebben van de **celluloidkegelsneden**, verkrijgbaar bij Noordhoff.

Voorbereiding. De kandidaten voor K I zijn te verdelen in drie hoofdgroepen:

1. Onderwijzers met Wiskunde L. O.;
2. bezitters van het diploma eindexamen H.B.S. met 5-jarige cursus;

3. idem met 3-jarige cursus of van een kweekschool.

De eerste zijn het best beslagen om voor K I te gaan werken, de laatste het minst; de eerste kunnen direct met de eigenlijke studie voor K I beginnen, mits hun studie niet langer dan b.v. een jaar onderbroken is; in dit geval staan ze weer even ver als groep 2 of groep 3. Daarom geven we voor alle drie groepen liever aan wat ze onder de knie behoren te hebben of nog moeten repeteren van de lagere wiskunde, voor ze kunnen beginnen met de eigenlijke studie voor K I.

P. WIJDENES, **Lagere Algebra I, 3e druk; II, 3e druk, beide met uitwerkingen.**

P. WIJDENES, **Functionies en Grafieken.**

Dr. P. MOLENBROEK, **Vlakke Meetkunde, 8e druk.**

„ „ **Stereometrie, 8e druk, beide met oplossingen.**

J. VERSLUYS, **Methoden voor het oplossen van meetkundige vraagstukken, 4e druk.**

P. WIJDENES, **Leerboek der Goniometrie en Trigonometrie met antwoorden, 5e druk.**

H. G. A. VERKAART, **Gids voor Wiskunde L. O., 4e druk.**

Dr. B. GONGGRIJP, **Logarithmentafel D, 6e druk, of**

J. VERSLUYS, **Grote tafel H, 3e druk.**

H. G. A. VERKAART, **Tien Jaargangen van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde, deel I, verzameling van belangrijke artikelen en vraagstukken voor L. O. uit de eerste 10 Jaargangen van het N. T. v. W.**

Met niet genoeg nadruk kan worden geëist, dat kandidaten K I terdege thuis zijn in de Lagere Wiskunde; daarom stelle men zich zelf tot taak de nieuwste druk van de **Gids voor Wiskunde L.O.** van H. G. A. VERKAART door te werken en zijn krachten te beproeven op de **lagere nummers**, die geregeld in het **Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde** worden opgenomen.

Zonder degelijke voorkennis loopt de studie voor K I op volslagen mislukking uit.

1. **Het N. T. v. Wiskunde**, thans (Nov. 1940) de 28e jaargang onder redactie van K. HARLAAR en H. HERREILERS.

Candidaten moeten hierop intekenen.

Hierin komen telkens 20 vraagstukken voor ter oplossing, terwijl het artikelen bevat, die allerlei hoofdstukken, nodig voor K I en L. O., verdiepen en verbreden naar de meest moderne eisen, zoals

die gesteld worden door de examinatoren. Men raadplege vooral de klappers in Jg. V, Jg. X, Jg. XV, Jg. XX en Jg. XXV; deze geven een overzicht van alles, wat verscheen in de Jg. I—XXV; vele artikelen en uitgewerkte vraagstukken, **waaronder alle van de schriftelijke examens en uitgebreide verslagen van mondelinge examens**, geven hulp en steun.

Men tekene ook in op „Euclides”, **Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken**.

In verband met paedagogische en didactische scholing van a.s. leraren, is intekening op Euclides beslist noodzakelijk.

Omdat slechts weinigen, de meeste studerenden zeker niet, over al deze jaargangen beschikken, is het voornaamste, dat van direct belang is voor het examen K I, afzonderlijk uitgegeven onder de titel:

- 10 Jaargangen van het N. T. v. Wiskunde, Deel II**, met de volgende inhoud:
- Ia. Inversie door Prof. Dr. JAN DE VRIES.
 - b. Inversie door P. JANSEN.
 - c. Inversie door Prof. Dr. Hk. DE VRIES.
 - II. Transversalen en volledige figuren door Prof. Dr. JAN DE VRIES.
 - III. Enige hoofdstukken uit de boldriehoeksmeting en de bolmeetkunde door Prof. Dr. G. SCHOUTEN.
 - IV. Over netten van kegelsneden door Prof. Dr. JAN DE VRIES.
 - V. Uitwerking van een groep determinanten door H. G. A. VERKAART.
 - VI. De formule voor het getal $\varphi(n)$ door Prof. Dr. F. SCHUH.
 - VII. Triangulaire coördinaten door Prof. Dr. JAN DE VRIES. Vraagstukken hierbij door P. WIJDENES.
 - VIII. De constante van Euler door P. WIJDENES.
 - IX. De projectieve ontstaanswijze der kegelsneden door Prof. Dr. JAN DE VRIES.
 - X. Over de bepaling van graad en klasse ener vlakke kromme door Prof. Dr. CHS. VAN OS.
 - XI. Enige werkstukken uit de beschrijvende meetkunde door Prof. Dr. JAN DE VRIES.
 - XIIa. Constructie van een parabool, waarvan de top, de as en een punt gegeven zijn door Prof. Dr. W. A. VERSLUYS.
 - b. Over een eigenschap en daaruit voortvloeiende constructies ener parabool door Prof. Dr. J. G. RUTGERS.
 - XIIIa. Beginselen der centrale projectie. } Prof. Dr. J. CARDINAAL
 - b. Perspectief. } met oefeningen van P.
 - c. De scheve parallelprojectie. } WIJDENES.
 - d. Over de axonometrie. }
 - e. De verhouding $9 : 5 : 10$ door P. WIJDENES.
 - XIV. Rotatie-invarianten door Prof. Dr. JAN DE VRIES.
 - XV. De stelling van Euler ($Z + H = R + 2$) door Prof. Dr. F. SCHUH.

Herhaling. Voor herhaling neme men:

P. WIJDENES, **Opgaven K I van 1904 tot heden**, of

A. J. VAN BREEN, **Vraagstukken van het examen K I, 4e druk met supplementen tot heden**.

P. WIJDENES, **Uitgewerkte mondelinge examens Hogere Algebra, 2e druk**.

VERKAART, WIJDENES en SCHUH, **Mondelinge examens L.O., K I, K V.**

Opmerkingen. Hoe lang men nodig heeft, om K I te halen? In het algemeen richten de opleiders het zo in, dat men na twee jaar examen kan doen; deze tijd is echter heel krap. In korter tijd kunnen tegenwoordig alleen zeer begaafden het doen, als ze bovendien hard werken en goed voorbereid zijn.

De bezitters van K I zijn de aangewezen personen voor burgeravond-, ambachts-, zeevaart-, machinisten- en kweekscholen, terwijl ze altijd een voorsprong hebben bij beter betaalde betrekkingen bij het M.U.L.O. of in een grote stad.

Na het behalen van de akte K I, ga men door voor K V. Deze studie duurt 2 jaar; K V geeft bevoegdheid voor de H.B.S. 5-j. c. in alle klassen.

Zij, die K I, K V en dan later nog K XII (Boekhouden) halen, hebben een behoorlijke kans op een goede betrekking.

 **Meld U niet aan voor het examen, voordat U kant en klaar bent;** U moet de lagere en hogere nummers uit het N. T. v. Wiskunde kunnen oplossen en de opgaven der laatste jaren uit bovenstaande verzamelingen kunnen maken. **Wie niet zorgt een voldoende schriftelijk examen te maken, heeft geen kans van slagen.**

Opleiding. De mondelinge cursus in **Amsterdam** wordt gegeven door K. HARLAAR (Niersstraat 38, tel. 96843) en H. HERREILERS (Lekstraat 90 I, tel. 90014); inlichtingen ook bij ondergetekende.

In **Den Haag** wordt een cursus gegeven door Prof. Dr. F. SCHUH, v. Boetzelaerlaan 28.

In **Indië** vrage men inlichtingen aan Prof. Dr. W. BOOMSTRA, Bandoeng.

Voor schriftelijk onderricht wende men zich tot ondergetekende; dit schriftelijk onderwijs kan op elk willekeurig tijdstip aanvangen en in elk stadium van de studie.

Alle verdere inlichtingen, ook omtrent te gebruiken boeken bij het schoolonderwijs, worden gratis en franco verstrekt door

P. WIJDENES,

Amsterdam Zuid, Jac. Obrechtstr. 88.
Tel. 27119.

BOEKBESPREKING in afl. II, N.T.v.W. Jg. XXV.

Beginnelsen van de getallenleer; deel II van de theorie der Rekenkunde door *P. Wijdenes*. *P. Noordhoff-1937-Groningen-Batavia*.

100 voorbeelden, 430 opgaven, 236 blz. f 4,50

Gaarne beveel ik dit uitstekende werk aan voor een ieder, die met de beginselen der getallenleer wil kennismaken. Dit duidelijk geschreven boek is in het bijzonder geschikt voor degenen, die zich voor de middelbare akte wiskunde voorbereiden; zij zullen hier juist vinden, wat ze nodig hebben.

De waarde van dit boek wordt nog verhoogd door een aanhangsel, bestaande uit een overzicht van de stellingen, een samenvatting van de formules en enige tafels, alsmede geschiedkundige aantekeningen van de hand van Dr. E. J. Dijksterhuis. De enige passage, die ik in dit boek enigszins anders geformuleerd zou willen zien, heeft betrekking op enkele tot op heden onopgeloste vragen (blz. 227); doch deze is voor den leerling van geen belang. J. G. VAN DER CORPUT.

**Gratis en franco ontvangt ieder op aanvraag:
van P. WIJDENES te Amsterdam:**

Wenken en Boekenlijst Wiskunde L.O.

Het Examen K I en id. K V, met boekenlijst.

van P. NOORDHOFF, Uitgever, Gröningen:

Wisk. Catalogus A. Schoolboekencatalogus B.

Studie-catalogus C. Leermiddelencatalogus D.

Volledige Catalogus van uitgaven.

**Proefnummers N. Tijdschr. v. Wiskunde (L. O.
en K I).**

en „Euclides” (Didactiek).

P. WIJDENES

Uitgewerkte mondelinge examens Hogere Algebra

**41 volledig uitgewerkte vragen, bovendien nog 11 volledige
verslagen en 30 niet uitgewerkte vragen**

Prijs f 6,—.

Uitgave van P. NOORDHOFF—GRONINGEN

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

LOGARITHMEN- EN RENTETAFELS.

- Voor scholen, waar men geen goniometrie leert, maar wel sam. interest.**
- P. WIJDENES, **Log.- en Rentetafel A, 7e druk**, gec. . . . f 0.60
Deze bevat: Aanwijzingen, Gewone log. Log. van constanten. Log. van rentefactoren. Rentetafels I $(1+i)^n$; II $(1+i)^{-n}$ voor de procenten 2, $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, 4, $4\frac{1}{2}$, 5, $5\frac{1}{2}$ en 6. Machten, wortels en omgekeerden.
- P. WIJDENES, **Log.- en Rentetafel B, 11e druk**, gec. . . f 0.75
Inhoud als A en bovendien Rentetafel III $\Sigma(1+i)^n$; IV $\Sigma(1+i)^{-n}$; V Annuïteitentafel.
- P. WIJDENES, **Log. tafel C, 3e druk** f 0.40
Inhoud als A, maar zonder rentetafels en aanwijzingen.
- Voor Wisk. L.O.; H.B.S.; Gymn B.**
- P. WIJDENES, **Rentetafel D, 2e druk** f 0.50
Deze bevat de rentetafels I, II, III, IV en V onder A en B hierboven genoemd, met 50 termijnen in 8 decimalen.
- Voor examens in Handelsrekenen, banken, kantoren, accountants.**
- P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET, **Log.- en Rentetafel E, 3e druk**, gec. met hulpboekje f 3.25
Deze bevat de gewone log. en de vijf tafels voor samengestelde interest, verder de vijf overeenkomstige voor samengesteld disconto in 100 termijnen en procenten van $\frac{1}{2}$ tot 8 met $\frac{1}{2}$ % opklimmende. Tafel I, II en V met $\frac{1}{4}$ % opklimmende.
- Handels-scholen H.B.S. A.**
- P. WIJDENES en Dr. P. G. VAN DE VLIET, **Logarithmen- en rentetafels uitgave G, Schooluitgave van tafel E voor de H.B.S. A.** 95 blz. groot formaat, in slap linnen f 1.60
- Middelbaar en Gymnaasiaal Onderwijs: Midd. Technische Scholen.**
- NOORDHOFF'S SCHOOLTAFEL** in 2 kleuren, in slap linnen band, 16e—20e duizendtal, 112 blz. f 1.50
I Gewone logarithmen, blz. 3.
II Logarithmen Sinustafel, blz. 24.
III Sinustafel (de goniometrische functies), blz. 81.
IV Rentetafels $(1+i)^n$ en $(1+i)^{-n}$ van $1\frac{1}{2}$ %— $7\frac{1}{2}$ % met 50 termijnen, blz. 107.
Geen moeilijkheden bij de interpolatie; in tafel II twee volle graden naast elkaar, in tafel III zelfs vier.
- NOORDHOFF'S Tafel in 4 decimalen. 21e—25e duizendtal, 88 blz., in slap linnen in twee kleuren, geb. f 1.—**
- H.B.S. 5-j. c., Gymn., Kl. Deift Landmeter Wiskunde L.O.; Studenten.**
- J. VERSLUYS, **Grote tafel H**, in drie kleuren, 298 blz. 3e druk, gebonden f 2.90
Wit I. Gewone logarithmen blz. 1—32. — Rose II. De log. der gon. functies blz. 1—96. — Wit III. De gon. functies met interpolatietafels blz. 1—128. — Groen IV. Bijtafels blz. 130—170.
A. Natuurlijke logarithmen.
B. Omzetting van natuurlijke logarithmen in gewone.
C. Gon. verh. van hoeken in radialen uitgedrukt.
D. Exponentiële en hyperbolische functies.
E. Factorentafel en tafel der priemgetallen.
F. Machten, wortels en omgekeerden.
G. Enige constanten met hun logarithmen.

 Inlichtingen omtrent keuze van tafels vraag men aan P. WIJDENES, Jacob Obrechtstraat 88, Amsterdam Zuid, Tel. 27119.

P. NOORDHOFF N.V. TE GRONINGEN EN BATAVIA.
Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

onrechte. Ook de klagers zien de moeilijkheden wel. Men kan begrijpen, dat de leerlingen weinig voelen voor een scherpe, maar omslachtige wijze van uitdrukking, als een kortere, maar slordige, ook wel begrepen wordt; bovendien geldt buiten de exacte wetenschap een sterk elliptische stijl als levendig en origineel. De zelftucht, nodig voor het in de wiskunde correcte taalgebruik, ligt kinderen slecht. De leraar, die het goede voorbeeld geeft, laadt de schijn op zich van pedanterie en vervelende langdradigheid. Ieder schoolman weet, hoe moeilijk men tussen al die klippen doorzeilt; ik verbeeld mij geenszins, daarvoor een onfeilbaar kompas te bezitten. Een methode, om ondragelijke wijdlopiegheid te vermijden, die in de hogere wiskunde steeds wordt toegepast, is het invoeren van een korte, met zorg gekozen term voor een ingewikkeld begrip. Zo zegt men, dat een functie een eigenschap heeft „bijna overal” in een interval, wanneer de verzameling der punten in het interval, waar de eigenschap niet geldt, de maat 0 heeft. Met deze methode is ook in de lagere wiskunde zeker nog veel te bereiken. Een mooi voorbeeld vind ik weer in de reeds aangehaalde lezing van den heer Gerretsen; zijn „op den duur” is een zeer geslaagde afkorting van deze aard.

De derde strengheidseis was, de wiskunde zoveel mogelijk los te maken van de ervaring. Deze is op de school niet door te voeren. Hij vereist een geesteshouding, die voor schooljongens, zo al bereikbaar, toch niet gewenst is. Ook de wiskunde dient mee te werken, van de kinderen voor de maatschappij geschikte mensen te maken; de weinigen, die zich in abstract-philosophische speculaties zullen verdiepen, dienen hun weg zelf te zoeken. De leerlingen verzetten zich ook vanzelf tegen te grote abstractie. Zodra het aanschouwelijke correlaat te zwak wordt, vervallen zij in gedachteeloos formalisme. Dat is niet overal verkeerd: ook het correct leren toepassen van een formele techniek is een der elementen, waarop de vorinende waarde van wiskundeonderwijs berust en het kan geen kwaad als de vierkantsworteltrekking en sommige delen van de goniometrie zuiver technisch beoefend worden. Maar waar het om de grondbegrippen gaat, dient men het tot elke prijs te vermijden. De schoolwiskunde moet in onmiddellijk verband blijven met concrete voorstellingen. Een punt kan voor een kind onmogelijk iets anders zijn dan een heel klein bolletje. Een getal is een aantal en

slechts in zoverre abstract dat de aard van de getelde voorwerpen onverschillig is. Eigenlijk is dus alle schoolwiskunde toegepaste wiskunde. De absolute geldigheid van alle stellingen voor de materiele werkelijkheid dient te worden aanvaard; ik betwijfel, of het zelfs in de hoogste klasse gelukken zal, enig begrip bij te brengen van de mate van idealisatie die nodig is voordat de werkelijkheid voor wiskundige behandeling toegankelijk wordt.

Ook in de „echte” wiskunde kan men de aanschouwing niet missen. Zoals P o i n c a r é in zijn eerder geciteerde rede opmerkt, ¹⁾ begrijpt men een redenering nog niet, als men de wiskundige juistheid van elke stap heeft geverifieerd. Voor het inzicht is kennis van de intuïtieve of aanschouwelijke achtergrond nodig. Terwijl echter de moderne vakwiskunde die twee elementen, de aanschouwelijke grondslag en de strenge uitwerking, telkens weer zo scherp mogelijk scheidt, dienen zij op school ten nauwste verbonden te blijven. De leerling moet zich aan een bepaald standpunt kunnen houden: streng redeneren over aanschouwelijk gegeven begrippen; het telkens heen en weer gaan tussen aanschouwing en strengheid, dat karakteristiek is voor de moderne wiskunde, zou hem totaal in de war brengen.

Laat ik, om niet al te theoretisch te blijven, een enkel onderwerp in verband met het voorgaande nader beschouwen. Ik kies het onderwijs in de rekenkunde. Er wordt veel gepleit voor een behandeling, die tenminste in zoverre streng is, dat de voornaamste stellingen uit een beperkt aantal grondeigenschappen worden afgeleid, zodat bij iedere uitbreiding van het getalbegrip slechts de grondeigenschappen behoeven te worden bewezen. Een dergelijke handelwijze was ook 25 jaar geleden niet ongewoon. Hoe komt het, dat zovelen daaraan de afschuwelijkste herinneringen bewaren, zelfs al zijn zij intussen goede wiskundigen geworden? Ik geloof, dat hiervoor in het voorgaande twee redenen te vinden zijn. In tegenstelling tot de meetkunde is het rekenen voor de kinderen bekende stof. Zij menen de regels van dat spel te kennen en de leraar, die hen plotseling aan strengere regels tracht te binden, treedt op als spelbreker. ²⁾ Ook werkt het gevoel, niets nieuws te leren, verlamdend op hun energie.

¹⁾ Deze rede is ook afgedrukt in „La valeur de la science”, Chap. I.

²⁾ Dit is een groot bezwaar tegen voorbereidend onderwijs in Middelbare Schoolvakken op opleidingsscholen. De leraren dienen zich daartegen krachtig te verzetten.

Hoewel men psychologische factoren als deze niet moet onderschatten, lijkt mij het tweede bezwaar nog belangrijker. Bij een strenge behandeling van de rekenkunde missen de kinderen de steun der aanschouwing, die in de meetkunde veel sterker is. Ondanks alle pogingen van de leraar, de stellingen door aanschouwelijke beelden toe te lichten, glijden deze langs hen heen of dringt althans het verband met de formele bewijzen niet tot hen door. Ik kan mij nauwelijks iets ergers voorstellen dan een twaalfjarige die 's avonds rijen a's en b's van buiten zit te leren, en daar komt het toch toe, als men eist, dat de leerstof ook gereproduceerd wordt. Zo ergens, dan is het bij deze fundamentele begrippen nodig, dat de leerstof volkomen verwerkt wordt, dat zij het eigendom van de leerlingen wordt. Beter een zeer gebrekkige behandeling, waarbij zij actief zijn en waarvan zij het nut inzien, dan een strenge, die langs hen heen gaat.

Wat ik dan wel zou willen, kan ik het beste duidelijk maken aan de hand van de voordracht van den heer W a n ' s i n k in dezelfde vergadering, waar de heer G e r r e t s e n zijn lezing hield. Evenals hij acht ik het van groot belang, de eigenschappen correct in woorden te laten formuleren, waarbij men zorgt, dat de zin der woorden bewust wordt. Nog altijd geeft het oude „Rekenboek voor de H.B.S.” van W i j d e n e s e n d e L a n g e voor dit onderwijs prachtige leerstof. Langzamerhand kan men wat meer de nadruk gaan leggen op het logische verband tussen de stellingen.

Voornamelijk komt hier de tweede strengheidseis, correct woordgebruik, tot zijn recht. Toch wil ik ook hierin tegen overdrijving waarschuwen. Men gaat naar mijn mening te ver, als men de stelling „Een quotient wordt met een getal vermenigvuldigd, door het deeltal met dat getal te vermenigvuldigen”, aanvult met „en de deler onveranderd te laten.” Ook deze formulering is immers niet onberispelijk. De gewone opvatting schijnt te zijn: „quotient” betekent zowel het getallenpaar deeltal — deler als de uitkomst der deling. Past men op het quotient in de eerste betekenis de beschreven bewerking toe, dan ondergaat het quotient in de tweede betekenis de gewenste verandering. Ik vind dit een voorbeeld van slecht taalgebruik. Waartoe die dubbele betekenis van „quotient”? Wat is er tegen, het getallenpaar een „deling” te noemen en de naam „quotient” alleen voor de uitkomst te gebruiken? De stelling wordt dan: „Het quotient van een deling wordt met een getal vermenig-

vuldigd, door het deeltal met dat getal te vermenigvuldigen." Om helemaal volledig te zijn, zou men er niet alleen bij moeten zeggen, dat de deler onveranderd blijft, maar ook, wat men als deeltal, resp. deler van de nieuwe deling moet nemen, dat men ze bijv. niet mag verwisselen. Neemt men dit laatste als vanzelfsprekend aan, dan mag dat ook wel voor het onveranderd blijven van de deler. Wie heel precies wil zijn, kan eenmaal zeggen, dat in dergelijke stellingen datgene, waarover niet gesproken wordt, niet verandert.

Bij de invoering van negatieve getallen en breuken zou ik, in overeenstemming met wat ik zoeven betoogd heb, zoveel mogelijk van de aanschouwing willen uitgaan. Voordat ik over negatieve getallen sprak, toonde ik hun noodzakelijkheid aan door voorbeelden uit de toepassingen, dus niet op grond van de onmogelijkheid van zekere aftrekkingen. Ik gaf een groot aantal voorbeelden van grootheden, die de som 0 geven. Dit bracht ons er toe, een nieuw soort eenheden in te voeren met de eigenschap, dat $(+1) + (-1) = 0^1$. Ook de definities van de bewerkingen gaf ik op grond van de toepassingen; dat is zelfs heel goed mogelijk voor de vermenigvuldiging, als men uitgaat van snelheid $\times$ tijd = weg. Het nadeel, dat de leerlingen voor een bewijs kunnen aanzien, wat niets anders is dan de motivering van een definitie, weegt niet op tegen het voordeel, dat de aanschouwelijkheid bewaard blijft. Om dezelfde reden geef ik voor de breuken de voorkeur aan een verzamelingstheoretische definitie boven de formele als getallenpaar.

Wij zullen wel als onvermijdelijk moeten aanvaarden, dat een bevredigende opbouw van het getalbegrip niet mogelijk is. Zo heel erg vind ik het niet, als men voor de breuken enkele eigenschappen afleidt en daarna zonder bewijs meedeelt, dat er „net zo” mee gerekend kan worden als met gehele getallen. Voor de reële getallen zal men toch nooit meer kunnen bereiken. Vooral in de hogere klassen is het wel gewenst, dat de leerlingen zien, wat er eigenlijk ontbreekt.

Om alle misverstand te vermijden, wijs ik er nog op, dat naar mijn mening de vormende waarde van de wiskunde behalve op het streng redeneren op tal van andere factoren berust, als het leren overzien van een enigszins ingewikkelde logische structuur, de

¹⁾ Vragen van speciale didactiek over een voorlopige notatie voor de negatieve getallen e. d. laat ik hier rusten.

correcte toepassing van een rekenregel, de oefening van de ruimte-aanschouwing. Maar door hierop in te gaan zou ik de grenzen van mijn onderwerp overschrijden. Liever wil ik enkele hoofdpunten van mijn betoog nog eens kort in de vorm van stellingen formuleren.

1. Wiskundige strengheid is geen vaststaand begrip, maar heeft in de loop der tijden een evolutie ondergaan.

2. Voor de school is alleen een vorm van strengheid bruikbaar, die in de wetenschap overwonnen is.

3. Niet de bereikte mate van strengheid, maar wel het streven naar en de opvoeding tot exact denken zijn belangrijk voor de vormende waarde van wiskundeonderwijs.

4. Het streven naar strengheid mag niet geschieden ten koste van de aanschouwelijke inhoud van de leerstof.

Ten slotte merk ik nog op, dat stelling 3 ook geldt voor diegenen, die later wiskunde als studievak kiezen. De volkomen strenge opbouw zowel van de rekenkunde als van de meetkunde moet toch op de Universiteit van voren af aan begonnen worden, maar het is wel van groot belang, dat de student niet te vreemd staat tegenover het streven naar strengheid, dat hij dan in zijn scherpste vorm leert kennen.

MONDELINGE STAATSEXAMENS A 1940

DOOR

Dr. H. C. SCHAMHARDT, Zeist.

Ter voorkoming van misverstand zij opgemerkt, dat de hieronder volgende vraagstukken geen volledige verzameling vormen van de in 1940 op het Staatsexamen gestelde vragen, maar bedoeld zijn als een aantal voorbeelden van meetkunde- en algebravragen, zoals die in 1940 en vorige jaren aan de A's gesteld zijn.

I. MEETKUNDE.

1. De overstaande zijden $AB = a$ en $CD = c$ van een koorden-
vierhoek $ABCD$ snijden elkaar in S . Druk $SA = x$ en $SD = y$
uit in de zijden a , b , c en d van de koordenvierhoek. Wanneer
zijn de optredende vergelijkingen strijdig?
2. In de kubus $\begin{smallmatrix} EFGH \\ ABCD \end{smallmatrix}$ trekt men de lijnen BD en BH . Construeer
door B een lijn a , die gelijke hoeken maakt met de lijnen BD ,
 BH en BC , en een lijn b , die gelijke hoeken maakt met de
vlakken BCD , BDH en BCH . Van welke kegels zijn de lijnen
 a en b de assen?
3. Van een driezijdig prisma $\begin{smallmatrix} DEF \\ ABC \end{smallmatrix}$ is gegeven: van het grondvlak
 ABC : R (straal omcirkel), r (straal incirkel) en c . Verder,
dat $\angle (DA, AB) = \angle (DA, AC)$, $\overline{DA} = \overline{DC}$.
Construeer de hoogte, als gegeven is, dat in het prisma een
bol kan beschreven worden. Hoe zoudt ge het netwerk afmaken?
Hoeveel gegevens heeft men nodig voor een n -zijdig prisma?
4. Van $\triangle ABC$ zijn de voetpunten D en E van de hoogtelijnen
 AD en BE in ligging gegeven. Verder is bekend, dat de basis
 AB moet liggen op een gegeven rechte l . Construeer $\triangle ABC$.
5. Op de basis AB of zijn verlengde van de gelijkbenige driehoek

ABC ligt een punt P . Bewijs, dat de cirkels, beschreven om $\triangle ACP$ en $\triangle BCP$ gelijk zijn. Welke bijzonderheid hebben we als P met A of B samenvalt?

Wat komt er van het bovenstaande terecht als $AC \neq BC$ is?

Wat merken we op, als P samenvalt met het voetpunt van de loodlijn uit C op AB neergelaten?

6. Gegeven de punten A en B en de rechte l met daarop het punt C . Is een bol mogelijk, die door A en B gaat en de rechte l in C raakt?
7. Van een afgeknotte n -zijdige pyramide is gegeven: oppervlakte bovenvlak B , oppervlakte grondvlak G , som der oppervlakten van de zijvlakken Z . In de afgeknotte pyramide kan een bol beschreven worden. Welke betrekking bestaat nu tussen B , G en Z ? Ga na, welke lichaamsdiagonalen van een afgeknot 4-zijdig prisma elkaar altijd snijden en welke elkaar kunnen snijden.
8. In $\triangle ABC$ trekt men de hoogtelijnen AD en BE , die elkaar in H snijden; bewijs, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is. Waarom liggen de punten A , B , D en E op een cirkel? Bewijs omgekeerd, dat dit laatste altijd het geval is, als gegeven is, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is en de punten niet op een rechte liggen.
9. In een halve cirkel met AB als middellijn trekt men AD zo, dat boog $AD = 60^\circ$ en BC zo, dat $\angle B = 45^\circ$ is. Druk de lengte van DC uit in de straal R van de cirkel.
10. Een lijn maakt gelijke hoeken met 3 snijdende lijnen van een plat vlak. Bewijs, dat de lijn loodrecht op het vlak staat.
11. Gegeven de rechten l en m en daarop de punten A en B . Is er een bol, die l in A en m in B raakt?
12. Teken twee rechte cirkelkegels op een gegeven vlak V . Wanneer hebben deze een gemeenschappelijk raakvlak? Door welk punt van vlak V gaat dit vlak? Wat is de betekenis van dit punt voor de twee gegeven cirkels in V ?
Wat kunt ge nu in V bewijzen over de in- en uitwendige gelijkvormigheids punten van drie willekeurige cirkels?
13. Van viervlak $\begin{smallmatrix} D \\ ABC \end{smallmatrix}$ zijn de ribben van het grondvlak $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$ en zijn alle drie de opstaande ribben 10. Bereken de afstanden, waarop telkens twee hoogtelijnen elkaar

kruisen. (Aanw.: elk tweetal hoogtelijnen ligt in twee evenwijdige standvlakken).

14. Men brengt een bol aan door de hoekpunten A, B en C van het grondvlak van een viervlak en door een punt P op de opstaande ribbe AD. Het boloppervlak snijdt BD in Q en CD in R. Bewijs, dat vlak PQR evenwijdig aan zich zelf blijft, als P zich langs AD verplaatst.

15. Gegeven de punten A en B en het vlak V met daarin het punt C. Is er een bol mogelijk, die door A en B gaat en het vlak in C raakt? Aan welke voorwaarde moet het punt C voldoen?

16. Twee rechte cirkelkegels met gemeenschappelijke top hebben twee beschrijvende lijnen gemeen. Hoe zoudt ge die construeren?

Construeer een lijn x , die a snijdt, b snijdt, die met c een hoek α maakt en met d een hoek β . (a , b , c en d zijn kruisende lijnen).

17. In een viervlak DABC brengt men het vlak aan door het zwaartepunt van het grondvlak evenwijdig aan de ribben BD en AC. Construeer de doorsnede en bereken de verhouding van de inhouden der delen, waarin dit vlak het viervlak verdeelt. Als D_1 de projectie is van de top op het grondvlak, welke hoek is dan groter, $\angle DAC$ of $\angle DAD_1$? En waarom?

18. Om een afgeknot driezijdig prisma $\begin{smallmatrix} DEF \\ ABC \end{smallmatrix}$ kan een bol beschreven worden. Bewijs, dat $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ is. Bewijs daarna, dat het omgekeerde ook waar is.

19. Teken een cirkel met middellijn AB en middelpunt M. Neem P op het verlengde van AB zo, dat $\overline{PA} = k \times \overline{AB}$ is. Zij Q een willekeurig punt van de cirkel, S het snijpunt van MQ en de loodlijn uit P op AQ. Wat is de meetkundige plaats van S, als Q de cirkel doorloopt?

20. Construeer een regelmatige tienhoek, die even groot is als een gegeven vierhoek.

21. Gegeven een kubus $\begin{smallmatrix} EFGH \\ ABCD \end{smallmatrix}$; men tekent in het verlengde grondvlak het vierkant DPQC en beschouwt de pyramide F . DPQC. Teken de doorsnijding van deze pyramide met het vlak DCGH en bereken de inhoud van het deel der pyramide, dat buiten de kubus ligt, als de ribbe van deze laatste a is.

22. Gegeven de gelijkzijdige $\triangle ABC$ ($AB = AC = BC = a$) met zijn omschreven cirkel. Op de boog BC tegenover de top A neemt men een punt P; BP snijdt, verlengd, het verlengde van AC in R; CP snijdt, verlengd, het verlengde van AB in Q. Bewijs, dat $BQ \times CR$ constant is, als P boog BC doorloopt. Waar moet P liggen, als $CR = BQ \sqrt{3}$ is?
23. Van een viervlak OABC staan de drie ribben in O loodrecht op elkaar. Wat is de projectie van het viervlak:
- 1e. op een vlak loodrecht op de verbindingslijn van AC en OB;
 - 2e. op een vlak evenwijdig aan vlak ABC.
 - 3e. op een vlak loodrecht op AC.
- Bepaal de doorgang van de as van de om-, opv. ingeschreven kegel van drievlakshoek A.OBC met vlak OBC.
- Bereken de straal van de omschreven bol van het viervlak, als OA, OB en OC gegeven zijn.
- Bewijs ten slotte, dat:
- $$(\text{Opp. } \triangle ABC)^2 = (\text{Opp. } \triangle OAB)^2 + (\text{Opp. } \triangle OBC)^2 + (\text{Opp. } \triangle OAC)^2.$$
24. Gegeven de regelmatige vierzijdige pyramide T.ABCD met hoogtelijn TE. Construeer het middelpunt van de omschreven bol van het lichaam TABE en bereken zijn straal als de ribbe $AB = 10$ cm en de hoogte $TE = 8$ cm is.
25. Van een vlakke vierhoek ABCD is gegeven $AB = 3$, $BC = 7$, $CD = 11$, $DA = 9$. Bewijs, dat $AC \perp BD$. Wat kunt ge beweren van deze vierhoek als A, B, C en D niet in een vlak liggen?
26. In het viervlak D.ABC brengt men een bol aan, die door A, B en C gaat en AD raakt. Hoe krijgt men het middelpunt? Waar snijdt deze bol DB en DC, als $AD = 6$, $DB = 8$, $DC = 9$ cm is?
- Noem de snijpunten met DB en DC opv. S en T. Bepaal de verhouding van de inhouden der delen, waarin vlak AST het viervlak verdeelt. Neem L op AD en P op BC. Construeer het punt, waar PL het vlak AST snijdt.
27. Men verlengt de hoogtelijnen AD, BE en CF van $\triangle ABC$ tot zij de omschreven cirkel opv. in P, Q en R snijden. Bewijs, dat $bg AQ = bg AB$, enz.; vervolgens, dat $HD = DP$, $HE = EQ$ en $HF = FR$ is. Trek nu de middellijn AML en verbind het hoogtepunt H met L. Bewijs, dat HL het lijnstuk BC

- middendoor deelt. Laat tevens zien, dat de zwaartelijn uit A door HM (lijn van Euler) in de verhouding 2 : 1 wordt verdeeld. Door welke negen punten gaat dus de cirkel, die verkregen wordt door de omgeschreven cirkel met H als centrum met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen?
28. Bewijs, dat de projectie van een rechte hoek op een vlak weer een rechte hoek is, als één der benen evenwijdig aan het vlak loopt. Wat is de projectie, als beide benen het vlak snijden? En wat als één been en het verlengde van het andere been het vlak snijden?
29. Op de kubus $\begin{smallmatrix} EFGH \\ ABCD \end{smallmatrix}$ is een regelmatige vierzijdige pyramide TFGH geplaatst. De punten P, Q, R opv. op TE, op TG en in het vlak ABCD zijn gegeven. Construeer de doorsnede van het vlak door P, Q en R met de kubus en met de pyramide.
30. Construeer een regelmatige vijfhoek, als de macht van het snijpunt van twee diagonalen gegeven is.
31. Van $\triangle ABC$ is gegeven $AC = BC$. Bewijs:
- 1e. dat $r \times r_c = \frac{1}{4} AB^2$ (r = straal ing. cirkel; r_c = straal aang. cirkel aan AB).
 - 2e. dat de cirkel door B en C, die AB raakt, gelijk is aan de omgeschreven cirkel.
 - 3e. bereken de verhouding $\frac{AB}{BC}$, als $\angle C = 36^\circ$ is.
32. Verander een driehoek in een gelijkbenige met dezelfde top-hoek en met gelijke oppervlakte.
33. Op de zijde AB van $\triangle ABC$ neemt men een punt P en op AC een punt Q. Als nu $AP : AB = AQ : AC$, dan is $PQ \parallel BC$. Bewijs dit. Waar zal de lijn PQ bij verlenging BC snijden, als gegeven is, dat $AP : PB = 4 : 5$ en $AQ : QC = 5 : 4$?
34. Gegeven een bol en een rechte a buiten de bol. Construeer door a een vlak, dat het boloppervlak verdeelt in stukken, die zich verhouden als 2 : 3.
35. Teken een rechte cirkelcylinder op vlak V. Neem P en R in V, Q op de cylinder. Teken de doorboringspunten van TQ en eveneens van een lijn l door R evenwijdig met PQ, met de cylinder. Teken in Q de raakklijn aan de cylinder, die l snijdt.
36. Van een vierzijdige pyramide zijn gegeven: het grondvlak in

- ware gedaante en drie van de opstaande ribben. Construeer het volledige netwerk. Neem vervolgens op drie van de opstaande ribben de punten P, Q en R en construeer de doorsnede van het vlak PQR met de pyramide, zowel in een ruimtefiguur als in ware gedaante.
37. Van een driehoek zijn de hoekpunten A $(-5, 0)$, B $(9, 0)$ en C $(0, 12)$. Bepaal de coördinaten van de middelpunten der om-, in- en aangeschreven cirkels, alsmede de coördinaten van het hoogtepunt en het zwaartepunt.
Bewijs, dat de cirkels, beschreven in $\triangle ACD$ en $\triangle BCD$ elkaar raken, als D het punt $(1, 0)$ is. Bereken ook de verhouding van de stralen der omschreven cirkels van $\triangle ACD$ en $\triangle BCD$ en de straal van de cirkel door B en C, die AB raakt.
38. In het vlak van tekening ligt een trapezium ABCD $(AB \parallel CD)$. Men laat dit wentelen om AB en projecteert het in elke stand op het vlak van tekening. Bepaal de hoek, waarover men moet wentelen, opdat: a) de projectie een rechthoekig,
b) de projectie een gelijkbenig trapezium is.
39. Gegeven een bol en een punt P er binnen. Construeer door P een koorde, die door P in de verhouding $p : q$ (p en q) gegeven lijnstukken) verdeeld wordt.
40. Construeer $\triangle ABC$ als gegeven zijn: $\angle A$, h_c en $2s$ (de omtrek).
41. In viervlak ABCD staan de ribben door A twee aan twee loodrecht op elkaar. Bepaal in een stereometrische figuur de ligging van het middelpunt M van de omschreven bol. Toon vervolgens aan, dat het snijpunt van AM met vlak BCD het zwaartepunt is van $\triangle BCD$.
42. Construeer een cirkel, die door twee punten A en B gaat en die een rechte l raakt.
43. Hoe luidt de stelling van Ptolemaeus voor een willekeurige koordenvierhoek? Geef het bewijs. Wat levert deze stelling op als we haar toepassen op een rechthoekig trapezium? En wat, als het trapezium gelijkbenig is?
44. Gegeven de kruisende lijnen a en b . Kan men door a een vlak α en door b een vlak β brengen zó dat:

$$1e) \alpha \parallel \beta? \quad 2e) \alpha \perp \beta? \quad 3e) \alpha \perp b?$$

45. Construeer $x = a \sqrt{\frac{b(-3+2\sqrt{5})}{c}}$, als a , b en c gegeven lijnstukken voorstellen.
46. Een rechthoekige driehoek TAM met zijden $AM = 6$, $MT = 8$, $AT = 10$, wentelt om TM als as en beschrijft dus een kegel. Verder beschrijft men een bol met T als middelpunt met straal $TQ < TM$. Welk deel van de boloppervlakte ligt binnen de kegel? Bewijs, dat die oppervlakte gelijk is aan de ronde oppervlakte van een cylinder met dezelfde hoogte als het bolsegment en met een straal, die gelijk is aan de straal van de bol. Ontwikkel het zijdelingse oppervlak van de kegel in een plat vlak en construeer de middelpuntshoek van de cirkelsector, die daardoor ontstaat.
47. Gegeven een halve bol met straal R. In die halve bol is een kubus beschreven, waarvan de hoekpunten van het bovenvlak op het boloppervlak en die van het grondvlak in het platte vlak van de halve bol liggen. Bereken de ribbe van de kubus.
48. Gegeven de kubus $\begin{smallmatrix} EFGH \\ ABCD \end{smallmatrix}$. Verleng DH met $HP = \frac{1}{2} AB$, DA met $AQ = \frac{1}{2} AB$ en DC met $CR = \frac{1}{2} AB$. Teken de doorsnede van vlak PQR met de kubus en bewijs, dat dit een regelmatige zeshoek is. Hoe moet men de drie ribben bij D met een zelfde stuk verlengen, opdat het vlak de kubus slechts in een punt snijdt?
Construeer de afstand van AC en BG en bereken deze, als de ribbe van de kubus a is.
49. In een halve cirkel met middellijn AB is de lijn $CD \perp AB$ gegeven (C op AB, D op de cirkelomtrek). Construeer een cirkel in de figuur, begrensd door de rechten AC, CD en de boog AD.
50. Wat verstaat ge onder een zwaartelijns van een viervlak? Welke eigenschap hebben de zwaartelijnen? Bewijs dit. Als van een viervlak gegeven zijn: het grondvlak in ware gedaante, de hoogte en het voetpunt van de hoogtelijn uit de top, construeer dan het netwerk en de afstand van een hoekpunt van het grondvlak tot het zwaartepunt van het viervlak.
51. Evenwijdig aan de basis van een driehoek een lijn te trekken, zodat het afgesneden stuk van een der opstaande zijden, dat aan de top grenst, tweemaal zo groot is als het afgesneden

- stuk van de andere opstaande zijde, dat aan de basis grenst.
52. Van een viervlak ABCD is het grondvlak ABC in ware grootte gegeven. Verder maken de ribben DA, DB en DC gelijke hoeken met het grondvlak. Indien nu verder de afstand van het hoekpunt A tot het vlak DBC in ware lengte gegeven is, construeer dan het netwerk van het viervlak.
 53. Van een viervlak ABCD is het grondvlak ABC in ware grootte gegeven. Verder is $AD \perp BC$, en zyn de hoogtelijn uit D op ABC en de afstand tussen BD en AC in ware lengte gegeven. Construeer het netwerk van het viervlak ABCD.
 54. Van een regelmatige pyramide $\begin{matrix} T \\ ABCD \end{matrix}$ ($AB = a$) maken de opstaande zijvlakken hoeken van 60° met het grondvlak. Bereken de straal van de omgeschreven bol; eveneens die van de in- en de aangeschreven bollen.
 55. In $\triangle ABC$ is D een willekeurig punt van de basis; M_1 is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van $\triangle ADC$, M_2 dat van de omgeschreven cirkel van $\triangle BDC$.
Bewijs, dat $\triangle M_1 DM_2$ niet van vorm verandert, als D langs AB loopt en toon aan, dat die twee cirkels elkaar altijd onder een hoek $= \angle C$ snijden.
 56. Construeer een cirkel zo, dat vier gegeven punten A, B, C en D gelijke afstanden tot de omtrek hebben.
 57. Hoe construeert men een lijn, die twee kruisende lijnen a en b snijdt en twee andere kruisende lijnen c en d loodrecht kruist?
 58. Van een vierzijdige pyramide T . ABCD is het grondvlak ABCD een trapezium met de evenwijdige zijden AD en BC. Door AD brengt men het vlak aan, dat de standhoek tussen TAB en ABCD middendoor deelt. Bereken de verhouding van de inhouden der delen, waarin dit vlak de pyramide verdeelt, indien $AD = a$, $BC = b$, de afstand tussen AD en BC $= h$, en de hoogtelijn uit T op AD $= k$ is.
 59. Gegeven een vlak V met twee punten A en B aan dezelfde kant van V. De rechte AB snijdt vlak V in S. In vlak V is een lijn l getrokken, die AB kruist; op l ligt punt R. Hoe bepaalt men het middelpunt van de bol, die door A en B gaat en de rechte l in R raakt? Bewijs, dat deze bol vlak V raakt als $SR^2 = SA \cdot SB$ is. Welke is dus de meetkundige plaats

van de raakpunten der bollen door A en B, die vlak V raken?

60. Gegeven het viervlak D . ABC. Op welke vlakken projecteert zich dit viervlak als een parallellogram?
61. Gegeven twee elkaar snijdende cirkels M en N; hun gemeenschappelijke snijlijn is AB. Op het verlengde van AB neemt men een punt P; men trekt door P een rechte, die cirkel M in C en D, en een rechte, die cirkel N in E en F snijdt. Bewijs, dat de punten C, D, E en F op een cirkel liggen.
62. Gegeven twee elkaar snijdende lijnen l en m , een lijn n , die l en m kruist en een vlak V. Gevraagd een lijn x , die l , m en n snijdt en die evenwijdig is met V.
63. Gegeven het parallelepipedum ABCD EFGH. Op de ribben AE en DH kiest men een punt P en een punt Q zo, dat $AP = \frac{1}{3} AE$ en dat $DQ = \frac{1}{2} DH$ is. Door PQ brengt men een vlak evenwijdig aan HB aan. In welke verhouding verdeelt dit vlak de ribbe AB?
64. Van een vierzijdige pyramide T . ABCD is ABCD een parallellogram. $TA = TC = b$, $TB = TD = a$, $TT^1 \perp ABCD$, $TT^1 = \frac{1}{2} a\sqrt{3}$, $\angle TBC = 90^\circ$. Construeer en bereken de afstand van TA en BC.
65. Een cirkel O raakt de cirkels M en N uitwendig, opv. in A en B. De centraal MN snijdt de cirkels M en N opv. in C en D. Bewijs, dat de punten A, B, C en D op een cirkel liggen. Hoe zou men dus, als de cirkels M en N en op cirkel M het punt A gegeven waren, de cirkel O kunnen construeren, die cirkel N raakt en cirkel M in A raakt?
66. Bewijs, dat de lijn AB in de figuur van No. 65 door het uitwendige gelijkvormigheidspunt van de cirkels M en N gaat.
67. Gegeven een bol met straal R en een punt P er buiten zodanig, dat $MP = a$ is. (M is het middelpunt). Door P zijn drie raakvlakken aan de bol aangebracht, die gelijke hoeken met elkaar maken. Construeer die hoek in ware grootte.
68. Gegeven het viervlak T . ABC en een punt D op AB. Construeer door D een lijn l evenwijdig aan het vlak BCT.
Hoeveel vlakken gaan er door l , die het viervlak volgens een trapezium snijden? Gevraagd het vlak door l , dat als doorsnede een gelijkbenig trapezium geeft. Eveneens het vlak, dat een rechthoekig trapezium als doorsnede oplevert.

69. Gegeven van een viervlak ABCD: 1e. het grondvlak ABC in ware grootte; 2e. $AD \perp BC$; 3e. $\angle BDC = \alpha$ (gegeven hoek); 4e. de hoek tussen CA en BD = een gegeven hoek φ . Construeer het netwerk van het viervlak.
70. Verdeel een trapezium ABCD ($AB \parallel CD$) in twee delen, door een lijn evenwijdig met AB zo, dat die delen gelijkvormig zijn. Zijn die delen dan ook gelijkvormig met ABCD? Bewijs, dat de oppervlakten van die delen gelijk zijn aan de oppervlakten van de delen, waarin een diagonaal het trapezium verdeelt.
71. Bewijs, dat een zeshoek ABC DEF een raaklijnen-zeshoek is, als alle zijden gelijk zijn en $\angle A = \angle C = \angle E$ is.
72. Gegeven viervlak ABCD. Op de ribben DB en DC kiest men twee punten P en Q zo, dat $DP = \frac{1}{3} DB$ en $DQ = \frac{3}{4} DC$ is. Op BC kiest men een punt R zo, dat $BR = \frac{1}{2} BC$ is. Bepaal de verhouding, waarin het vlak door PQ evenwijdig met DA een lijn uit R naar een willekeurig punt van DA verdeelt.
73. In een drievlakshoek met drie rechte zijden is een bol geplaatst, die alle zijvlakken raakt. Een tweede even grote bol raakt de drie ribben. Bereken de afstand der middelpunten van deze bollen, als hun straal R is.
74. Gegeven het parallelepipedum ABCDEFGH. Op HB is punt P zo gegeven, dat $HP = \frac{1}{3} HB$ is. Door P en het midden van AB wordt een vlak gebracht, evenwijdig met DB. Construeer de doorsnede van dit vlak met het parallelepipedum en bepaal de verhouding, waarin dit vlak de ribbe FG verdeelt.
75. Gegeven een cirkel met middellijn AB en een punt P binnen de cirkel. Trek door P een lijn, die de cirkel in Q snijdt. Uit Q trekt men $QR \perp AB$ (R op AB). Bepaal Q zo, dat $QP = PR$ is. In welke strook moet P liggen, opdat de oplossing mogelijk zij? Bereken de verhouding van de oppervlakte van die strook tot die van de hele cirkel.
76. In een raaklijnentrapezium ligt het snijpunt der diagonalen op één rechte met de raakpunten op de benen. Bewijs dit.
77. In het driezijdige prisma $\begin{smallmatrix} DEF \\ ABC \end{smallmatrix}$ verbindt men A met het midden P van EF, B met het midden Q van DF en C met het midden R van DE. Bewijs, dat AP, BQ en CR door hetzelfde punt S gaan. Hoe verhouden zich de delen, waarin deze lijnstukken elkaar verdelen?

78. Van viervlak D . ABC is gegeven: het grondvlak ABC in ware gedaante, de hoogte DD_1 en de projectie D_1 van de top D. Construeer in ware grootte de hoek, die AC met het vlak BDC maakt; eveneens de afstand tussen de kruisende lijnen DD_1 en BB_1 (BB_1 is de hoogtelijn uit B), de hoek tussen AC en BD en de afstand, waarop AC en BD elkaar kruisen.
79. Construeer in een gegeven cirkelsegment een vierkant zo, dat twee hoekpunten op de koorde en twee op de boog liggen.
80. Van het viervlak DABC is gegeven: vlak BCD $\perp$ vlak ABD, vlak BCD $\perp$ vl. ACD, AC $\perp$ BC. Bewijs, dat vlak ADC $\perp$ vlak ABC staat.
81. Gegeven de kubus $\begin{smallmatrix} EFGH \\ ABCD \end{smallmatrix}$ met ribbe a . Door het punt P op DH zo gelegen, dat $DP = \frac{3}{4} DH$ en het punt Q zo op BF gelegen, dat $BQ = \frac{2}{3} BF$ is, brengt men een vlak, dat tevens door het snijpunt van de diagonalen van ABFE gaat. Construeer in ware gedaante de doorsnede van dit vlak met de kubus.
82. In een cirkel trekt men twee onderling loodrechte stralen MA en MB. P ligt op het verlengde van MB, Q op het verlengde van MA, terwijl AP en BQ elkaar op de cirkel snijden. Bewijs, dat $AQ \times BP = 2r^2$ is; (r is de straal).
83. Construeer $x = a\sqrt[4]{3}$, als a een gegeven lijnstuk is.
84. In de uiteinden van een middellijn AB trekt men de raaklijnen aan een cirkel met middelpunt M. Een willekeurige lijn snijdt de raaklijn in A in punt C, de cirkel in E en F en de raaklijn in het uiteinde B in D; C, E, F en D liggen aan dezelfde kant van AB. De loodlijnen in E en F op CD opgericht, snijden AB opv. in P en Q. Bewijs, dat $\angle CPD = \angle CQD = 90^\circ$ is.
85. Van een vierzijdige pyramide TABCD is het volgende gegeven: vlak TAB $\perp$ vlak ABCD; ABCD is een parallelogram, TA = TB = 13, AB = 10. Inhoud TABCD = 640. Bereken de afstand van AB tot TC.
86. Gegeven een kubus $\begin{smallmatrix} EFGH \\ ABCD \end{smallmatrix}$ (ribbe = a). Bereken de straal van de bol, die de drie zijden van drievlakshoek A . BDE raakt en tevens door G gaat.
87. Teken een cirkel met straal r , en in deze cirkel twee stralen MA en MB, die een hoek van 120° met elkaar maken. Verbind

Verschenen:

GONIOMETRIE EN TRIGONOMETRIE

DOOR

P. WIJDENES

Amsterdam



VIJFDE DRUK

371 bladzijden, 205 figuren;
bovendien een inlegblad met
formules.

Stevig gebonden *f* 6.75

ANTWOORDEN - 2.50

HET GRIEKSE ALFABET.

α	A	alpha	a
β	B	bêta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	epsilon	e
ζ	Z	zêta	z
η	H	êta	$\acute{e}$
θ of ϑ	Θ	thêta	th
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mu	m
ν	N	nu	n
ξ	Ξ	xi	x
o	O	omikron	o
π	Π	pi	p
ϱ	P	rho	r
σ of ς	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Y	upsilon	u
φ	Φ	phi	ϕh
χ	X	chi	ch
ψ	Ψ	psi	ψs
ω	Ω	omega	oo

In dit boek komt het voor, dat het argument van een goniometrische functie wordt uitgedrukt in radialen. De enige tafel, die daarbij kan dienen, is

J. VERSLUYS, GROTE TAFEL H

in drie kleuren. Derde druk. 296 blz., geb. / 2,90.

Wit I Gewone logaritmen — Rose II De log. der gon. functies — Wit III De gon. functies, argument zowel in graden als in radialen, met interpolatietafels. Groen IV Bijtafels.

Uitgave van P. NOORDHOFF—Groningen-Batavia

BIJ DE VIJFDE DRUK.

De volgorde van de hoofdstukken is enigszins anders dan in de vorige drukken. Op de goniometrie hebben we nu de vergelijkingen laten volgen, omdat de oplossingen daarvan toepassingen zijn van de goniometrie. We bereiken daarmee nog een tweede doel: men kan nu bij de trigonometrie de vraagstukken ook behoorlijk bespreken.

Het hoofdstuk over cyclometrische functies is naar achteren verschoven. Dat over toegepaste driehoeksmeting is vervallen; het kon de toets van een redelijke kritiek niet doorstaan; dit zal wel het geval zijn met het nieuwe hoofdstuk XVIII, geschreven door den Heer Meertens, landmeter bij het kadaster; deze inleiding geeft den lezer een juiste kijk op de practijk. Gaarne brengen we hem dank voor de welwillendheid, waarmee hij ons van dienst is geweest.

Verder vestigen we de aandacht op de volgende minder ingrijpende veranderingen, die alle verbeteringen betekenen.

1) Een ruim gebruik van de sinustafel, dat is de tafel van de goniometrische verhoudingen, zo genoemd in tegenstelling met de logarithmen-sinustafel; zie hoofdstuk VI en vele berekeningen.

2) Verplaatsing van de grafieken en uitbreiding, zie hoofdstuk XV.

3) Betere behandeling van de optellingsformules; zie hoofdstuk VII.

4) Verplaatsing van de theoretische grondslag van de formules, die men gebruikt bij de kleine hoeken; zie § 134.

5) Sterke vereenvoudiging van de paragraaf, waarin R , r en r_a worden berekend en allerlei andere lijnstukken; zie § 107.

6) Verbeterd is de behandeling van de vergelijking $a \cos x + b \sin x = c$; de meetkundige oplossing, veel mooier dan die in de vorige druk, vindt men in § 128.

Verder zijn allerlei kleinigheden veranderd, hier is wat bekort, daar wat uitgebreid, elders wat weggelaten of een enkele nieuwigheid verwerkt, b.v. de ongelijkheden; te veel om op te noemen.

Met nadruk wordt er op gewezen, dat deze nieuwe druk gemakkelijker door te werken is dan de vorige; daartoe dragen niet weinig bij de uitgewerkte voorbeelden, 120 in getal, die men verspreid vindt in alle hoofdstukken. Het opnemen daarvan en van de hoofdstukken XV en XVIII en de vermeerdering van het aantal figuren van 125 tot 205 heeft vanzelf enige uitbreiding van de omvang tot gevolg gehad.

Ten slotte moeten we nog zeggen, dat dit werk aan alle eisen voldoet, die de examens Wiskunde L.O. en K1 stellen. Voor K1 heeft

men het hele werk nodig; het zal de kandidaten een geringe moeite kosten, ook kennis te nemen van de practische toepassingen, die de Heer Meertens in het laatste hoofdstuk zo duidelijk heeft ingeleid. De kandidaten voor L.O. kunnen een en ander overslaan; in het bijzonder noemen we de volgende paragrafen: 41, 42, 54, 70, 71, 110, 131, 133, 134, 139 en 141.

De opleider voor de akte Wiskunde L.O. stelle zich tot taak enige schifting te maken in de vraagstukken, al naar aanleg en ijver van zijn leerlingen. Wij hebben niet meer met sterretjes aangegeven, welke vraagstukken naar onze mening door kandidaten L.O. kunnen worden overgeslagen; het is nl. al gebeurd, dat een vraagstuk uit dit boek, gemerkt met een sterretje, op het schriftelijk examen werd opgegeven.

Gaarne spreek ik hier mijn dank uit aan mijn medewerkers Harlaar en Herreilers voor alles en dat is heel veel, wat zij aan dit boek hebben gedaan. Men beschouwe dit werk als de vrucht van onze innige samenwerking. Wij houden ons alle drie aanbevolen voor open aanmerkingen, die dit boek ten goede kunnen komen; van alle gebruikers, ook van studerenden dus.

Een nieuw boekje met antwoorden en aanwijzingen verschijnt vrijwel tegelijk met deze herdruk.

Amsterdam Zuid
Aug. 1940.

P. WIJDENES.

INHOUD.

GONIOMETRIE	1—159
Hoofdstuk I. Inleiding. Scherpe hoeken.	1—11
Hoofdstuk II. Goniometrische verhoudingen van andere dan scherpe hoeken.	12—21
Hoofdstuk III. Bijzondere waarden en het verloop van de goniometrische verhoudingen	22—29
Hoofdstuk IV. Algemene formules voor willekeurige hoeken	30—36
Hoofdstuk V. Goniometrische verhoudingen als lijnstukken	37—45
Hoofdstuk VI. De tafel van de goniometrische verhoudingen en van hun logarithmen	46—62
Eerste herhaling	62
Hoofdstuk VII. Optellingsformules	64—84
Hoofdstuk VIII. Toepassingen van de optellingsformules	85—105
Tweede herhaling.	106
Hoofdstuk IX. Goniometrische vergelijkingen.	110—142
Hoofdstuk X. Uiterste waarden	143—156
Derde herhaling	156
TRIGONOMETRIE	160—257
Hoofdstuk XI. Rechthoekige driehoeken	160—170
Hoofdstuk XII. Scheefhoekige driehoeken.	170—197
Hoofdstuk XIII. Merkwaardige lijnen in de driehoek . . .	198—220
Hoofdstuk XIV. Vierhoeken.	221—249
Vierde herhaling.	250
Hoofdstuk XV. Grafieken.	258—289
Hoofdstuk XVI. Cyclometrische functies	290—304
Hoofdstuk XVII. Stereometrische toepassingen.	305—317
Hoofdstuk XVIII. Landmeetkunde door A. J. H. Meertens .	318—345
Algemene herhaling	346

Voorbeeld 98. Teken de grafiek van de functie:

$$y = \sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x$$

in het interval $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Opl. (zie fig. 146). De functie is te herleiden tot:

$$y = \sin x + \cos x + \frac{1 + \sin x + \cos x}{\sin x \cos x}.$$

We stellen nu (zie blz. 123 en voorbeeld 60) $\sin x + \cos x = p$; dan gaat de functie over in:

$$y = p + \frac{2(1+p)}{p^2-1} = p + \frac{2}{p-1} = \frac{p^2-p+2}{p-1}.$$

Daar $p^2 - p + 2 > 0$ is voor elke waarde van p , heeft de functie geen nulpunten. De pool is $p = 1$, die overeenkomt met $x = 0^\circ, 90^\circ$ en 360° ; de grafiek zal dus 3 verticale asymptoten vertonen. De uiterste waarden van de functie vindt men het eenvoudigst door hem te schrijven als:

$$y = (p-1) + \frac{2}{p-1} + 1,$$

waarbij de eerste twee termen een constant product hebben, nl. 2. De functie $z = p - 1 + \frac{2}{p-1}$ heeft dus het relatieve minimum $2\sqrt{2}$ voor $p = 1 + \sqrt{2}$ en het relatieve maximum $-2\sqrt{2}$ voor $p = 1 - \sqrt{2}$. Hiervan vervalt de eerste uiterste waarde, daar $|p| \leq \sqrt{2}$ moet zijn. In plaats daarvan treedt een relatief minimum op, als de beide termen zo

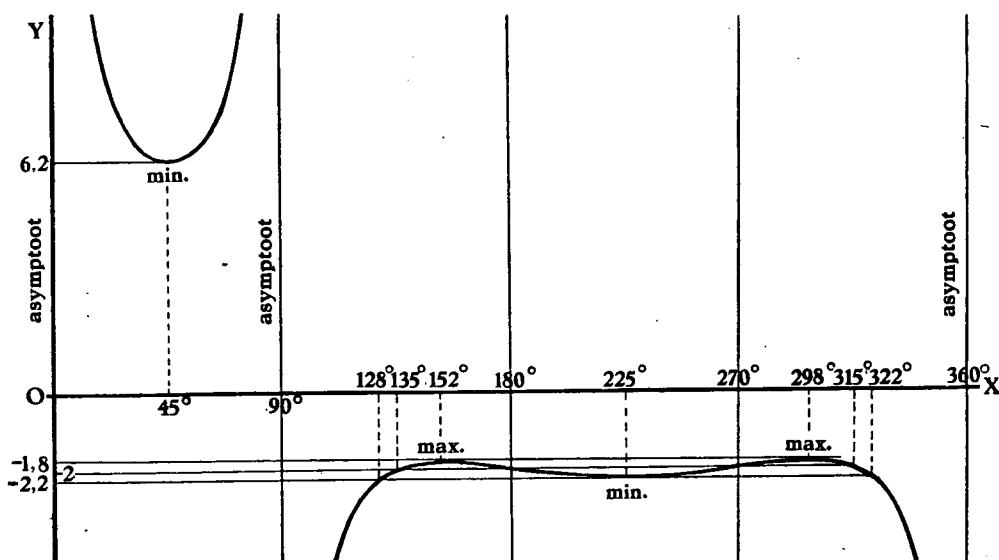


Fig. 146 (eenheid op de Y-as $\frac{1}{2}$ cm).

weinig mogelijk verschillen¹⁾, dus voor $p = \sqrt{2}$; het minimum is dan $1 + 3\sqrt{2}$. We vinden voor y dus het relatieve minimum $2 + 3\sqrt{2}$ voor

HOOFDSTUK XVII.

Stereometrische toepassingen.

§ 143. De rechthoekige drievlakshoek.

We geven in het volgende enige toepassingen van de gonio- en trigonometrie op de stereometrie; natuurlijk is hiertoe enige kennis van de stereometrie nodig ¹⁾. Sommige van deze toepassingen worden eerst bij de boldriehoeksmeting behandeld, we zullen echter laten zien, dat ze eenvoudig met behulp van de vlakke driehoeksmeting behandeld kunnen worden. Ook zullen we een paar van de belangrijkste formules uit de boldriehoeksmeting op eenvoudige wijze afleiden.

We beginnen met de afleiding van een paar formules voor de rechthoekige drievlakshoek. Daartoe zetten we van de top T uit op een ribbe van een der scheve hoeken het stuk $TB = 1$ uit (zie fig. 171), waarna we door B een sluitvlak aanbrengen loodrecht op de ribbe van de andere scheve hoek, dat deze ribbe in A snijdt en de derde ribbe in C. Zijn a, b en c de zijden van de drievlakshoek, waarvan we aannemen, dat ze alle kleiner dan 90° zijn, dan heeft men:

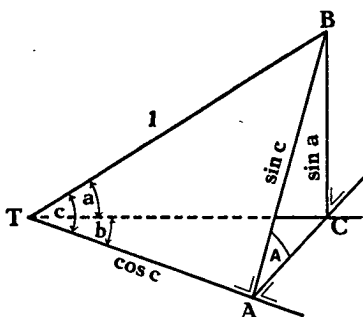


Fig. 171.

$BC = \sin a$, $TC = \cos a$, $AB = \sin c$ en $TA = \cos c$.

Hieruit volgen onmiddellijk de formules:

$$(173) \quad \cos c = \cos a \cos b;$$

$$(174) \quad \sin A = \frac{\sin a}{\sin c},$$

die opv. de **cosinusregel** en de **sinusregel** voor de rechthoekige drievlakshoek worden genoemd.

Men heeft verder nog in fig. 171:

$$\cos A = \frac{AC}{\sin c} = \frac{\cos c \operatorname{tg} b}{\sin c} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{tg} c};$$

¹⁾ Zie Dr. P. Molenbroek, *Stereometrie*, 8e druk.

SCHOOLBOEKEN OVER DRIEHOEKSMETING

P. WIJDENES.

Beknopte driehoeksmeting, 8e druk, 157 blz.,
68 fig., gec., met formules in één deel f 2.25.
Antw. f 1.—.

Afzonderlijk: A 50 blz. 25 fig. f 0.75 en B 107 blz.
43 fig. f 1.35.

A Scherpe hoeken. — Andere hoeken. — Meetkundige toepassingen. — Logarithmen. — Algemene formules. — Grafieken.

B Optellingstheorema's. — Rechthoekige driehoeken. — Scheefhoekige driehoeken. — Merkwaardige lijnen. — Het probleem van Snellius. — Cyclometrische vormen. — Vergelijkingen. — Grafieken. — Vraagstukken van verschillende examens.

Dr. P. MOLENBROEK en P. WIJDENES.

Vlakke driehoeksmeting voor Middelbaar en Voorbereidend Hoger Onderwijs, 2e druk 125 blz.,
60 fig. gec., met formules, f 2.—. Antw. f 0.60.

In dit boek is sterk rekening gehouden met de wensen van L.I.W.E.N.A.G.E.L., nl. het gebruik van tafels met de directe waarden der goniometrische functies; de behandeling van opgaven, waarin de trigonometrie wordt toegepast op de stereometrie.

De enige tafels, die bij deze beide schoolboeken kunnen dienen, zijn *Noordhoff's Schooltafel, Gonggrijp Tafel D en Verstuys Tafel H*; de beste, die in ons land bestaan.

P. WIJDENES.

Practische Driehoeksmeting. Tweede druk. 131
blz. 107 fig., f 2.—.

Antwoorden f 0.60.

De scherpe hoek. — Logarithmen. — Rechthoekige driehoeken. De stompe hoek. — Drie formules. — Meetkundige toepassingen. Som en verschil van hoeken. — Som en verschil van gon. verhoudingen. — De dubbele en de halve hoek. — Scheefhoekige driehoeken. — Merkwaardige lijnen. — Vergelijkingen. — Herhaling. — Snellius. — Spanten. — Krachtendriehoeken. — Hellend vlak met wig en keg. — Hoeken in alle kwadranten. — Grafieken. De decimale tafel.

P. WIJDENES,

in overleg met A. C. P. E. VERMEULEN.

Wiskunde voor zeevaartscholen. Deel II. Driehoeksmeting. 142 blz. 128 fig., gec. f 2.25.

Antwoorden samen met Rekenen en Algebra f 1.50.

Uitwerkingen van de log. en driehoeksmetingvraagstukken f 5.—, uitsluitend door bemiddeling van A. C. P. E. Vermeulen, Directeur der visserijschool te Vlaardingen; ook aanvragen voor pres.-ex.

Blz. 1—83. Vlakke driehoeksmeting. — Gon. functies van de scherpe hoek. — Log. der gon. verh. — Rechthoekige driehoeken. — Herleiding tot het 1e kwadrant. — Betrekkingen tussen gon. verh. van één hoek. — Sommen en verschillen. — Dubbele en halve hoeken. — Scheefhoekige driehoeken. — Snellius. — Gon. vergelijkingen.

Blz. 87—142. Boldriehoeksmeting. — Bolmeetkunde. — Rechthoekige boldriehoeken. — De Hulpstellingen. — Formules. — Algemene herhaling.

Geschiedt voor

H.B.S. 5-j. c.

Gymn.

Staatsexamen.

Lyceum.

Midd. Techn. S.

Acte N XIII,

N XVI.

Gymn.

Lyceum.

H.B.S. 5-j. c.

Acte N IV, N V.

Opzichter Rijks-
waterstaat, weg en
werken, bouw- en
woningtoezicht.
Gas-, beton-, we-
gen-, radiotechn.
Constructeurs.
Machinisten-
diploma's en
nijverheidsacten.

Aspirant derde
stuurlieden.

Visserij-
scholen.

Inleiding tot
grotere boeken
over driehoeks-
meting voor de
Zeevaart-
scholen.

Deze boeken bevatten practische toepassingen aan het vak ontleend en van de theorie alleen het nodige.

P. NOORDHOFF, GRONINGEN—BATAVIA.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

- B met het midden van MA. Deze lijn snijdt de cirkel nogmaals in C. Druk de lengte van BC uit in r .
88. Van pyramide T. ABCD is gegeven, dat het grondvlak ABCD een trapezium is; verder maken alle opstaande zijvlakken hoeken van 60° met het grondvlak. Construeer de hoeken, die de overliggende opstaande zijvlakken met elkaar maken, als men AB, BC en CD in ware grootte geeft.
89. Van pyramide $\begin{matrix} T \\ \text{ABCD} \end{matrix}$ is gegeven, dat alle ribben a zijn. Hoe volgt hieruit, dat de pyramide regelmatig is? Waar ligt het middelpunt van de omschreven bol? We denken nu door T, A en B en door T, C en D twee elkaar rakende bollen gebracht. Wat is dus het raakpunt? Hoe kan men dus uit het ene middelpunt direct het andere vinden? Hoe kan men er voor zorgen, dat de ene bol een tweemaal zo grote oppervlakte heeft als de andere? Construeer deze laatste stralen, als de ribbe a gegeven is.
90. In $\triangle ABC$ is de hoogtelijn uit A gelijk aan de zijde a . In de driehoek beschrijft men een rechthoek PQRS, zodat $PQ \parallel BC$ is (P op AB, Q op AC). Bepaal PQ zo, dat:
- 1e. de oppervlakte van PQRS zo groot mogelijk is;
 - 2e. QS zo klein mogelijk is.
91. Van $\triangle ABC$ is gegeven $AC = BC$. Bewijs:
- 1e. dat $r \times r_o = \frac{1}{4} AB^2$ (r = straal ing. cirkel, r_o = straal aang. cirkel aan AB);
 - 2e. dat de cirkel door B en C, die AB raakt, gelijk is aan de omschreven cirkel;
 - 3e. bereken de verhouding $\frac{AB}{BC}$ als $\angle C = 36^\circ$ is.
92. Van een viervlak ABCD is gegeven: grondvlak ABC in ware gedaante; $AD \perp BC$; de standhoek tussen DBC en ABC en de straal van de omschreven bol. Construeer het netwerk.
93. Construeer een driehoek, als gegeven zijn: de tophoek, de zwaartelijn uit de 'top, terwijl de basis $b = \sqrt[4]{p^4 - q^2 r^2}$ is; p , q en r zijn gegeven lijnstukken.
94. Gegeven drie platte vlakken A, B en C, die onderling evenwijdig zijn, die een rechte lijn opvolgend in de punten X, Y en Z snijden. Trekt men nu een andere rechte lijn, die de eerste

- kruist en die de vlakken opv. in X^1 , Y^1 en Z^1 snijdt, dan is $XY : YZ = X^1Y^1 : Y^1Z^1$. Bewijs dit.
95. Gegeven een cirkel met straal $2\frac{1}{2}$ en een punt P op een afstand $6\frac{1}{2}$ van het middelpunt M. De lijn PM snijdt de cirkel in A en B (A tussen P en M). Een der raaklijnen uit P raakt de cirkel in C. Gevraagd de koorde AC te berekenen.
96. Van een pyramide is het grondvlak een ruit met een hoek van 60° ; in de pyramide kan een rechte cirkelkegel beschreven worden. De ontwikkeling van het zijdelingse oppervlak van deze kegel geeft een cirkelsector met een middelpuntshoek van 120° . Bereken de inhoud van de pyramide. Heeft de pyramide ook een ingeschreven bol? Ook een omgeschreven bol?
97. Gegeven $\triangle ABC$. Daarin is de zwaartelijns AD getrokken en een lijn BE, die de zijde AC in het punt E zo snijdt, dat $AE = \frac{2}{3} AC$ is. De lijnen AD en BE snijden elkaar in O.
- Bereken het quotient $\frac{\text{opp. EODC}}{\text{opp. ABC}}$.
98. Van viervlak ABCD is gegeven, dat AD en BC elkaar loodrecht kruisen. $AB = AC = 13$; $BC = 10$; de hoek, die AD met het vlak ABC maakt, is 60° en de standhoek op de ribbe BC is 45° . Bereken de inhoud van ABCD.
99. Om een cirkel een gelijkbenig trapezium te beschrijven, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een vierkant met zijde a .
100. Gegeven $\triangle ABC$.
- a) Construeer op AC een punt D zo, dat CD het grootste stuk van de in uiterste en middelste reden verdeelde zijde AC is.
 - b) Trek $DE \parallel AB$. Bewijs, dat CE en DE in dezelfde betrekking staan tot BC en AC.
 - c) Bewijs, dat DE de oppervlakte van $\triangle ABC$ in uiterste en middelste reden verdeelt; dat nu echter het grootste stuk aan AB grenst.

II. ALGEBRA.

1. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} \frac{x}{(x+6)^2} - \frac{y}{(y+6)^2} \\ x + y = 13 \end{cases}$$

2. Bepaal a zo, dat het minimum van

$$y = ax^2 - 4x + (2a + 1)$$

gelijk is aan $a + 1$.

3. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} x + y = -\sqrt{x + y} + 12 \\ x^3 + y^3 = 243. \end{cases}$$

4. Is $x^{n^3} - y^{n^3}$ deelbaar door $x^{n^2} - y^{n^2}$?

5. Onderzoek de grafiek van

$$y = \frac{x-1}{x^2}.$$

6. Voor welke waarde van x is $\frac{2x+10}{x-3} > \frac{x+11}{x-4}$?

7. Schets de grafiek van $y = x(x-1)(x-2)$.

Bepaal m zodanig, dat $y=mx$ de kromme $y=x(x-1)(x-2)$ raakt. Welke twee mogelijkheden doen zich voor?

8. Voor welke waarden van x is $\frac{x}{x-1} < \frac{3}{x+1}$?

9. Van de vierkantsvergelijking $x^2 - 5x + 2\alpha = 0$ zijn de wortels x_1 en x_2 . Voor welke waarden van α zijn x_1 en x_2 reëel? Voor welke waarde van α geldt: $x_1 : x_2 = \sqrt{9 + 4\sqrt{5}} : 1$?

10. Gegeven de vergelijking:

$$(a+4)x^2 + 3(a-3)x + 3a - 9 = 0 \quad (a \text{ reëel})$$

Voor welke waarden van a zullen:

1) de wortels verschillend teken hebben?

Is de voorwaarde $x_1 x_2 < 0$ noodzakelijk? Voldoende?

2) de wortels beide positief zijn?

Is de voorwaarde $x_1 x_2 > 0$ noodzakelijk? Voldoende?

3) de wortels beide negatief zijn?

11. $x^{20} - 4x^{11} + 5x - 3$ wordt gedeeld door $x(x-1)(x+1)$.
Bepaal de rest zonder de deling uit te voeren. (Denk om de algemene gedaante van de rest).
12. Voor welke waarden van x bestaat $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$ niet?
Dezelfde vraag voor $\sqrt{-x^2 + x + 30}$.
Schrijf een wortelvorm op, die voor alle waarden van x bestaat.
Bepaal: $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 10} - \sqrt{x^2 - 3x - 10})$. Denk daarbij aan de herleiding van $\frac{1}{2 - \sqrt{3}}$.
13. De functie $y = x + 1 - \frac{1}{x - \beta}$ heeft geen grenzen. Bewijs dit algebraïsch en tracht het ook grafisch te illustreren.
14. Bepaal a zo, dat het minimum van
- $$y = ax^2 + (a + 2)x - (a - 1)$$
- gelijk is aan driemaal de waarde van x , voor welke het bereikt wordt.
15. De vierkantsvergelijking $x^2 + px + q = 0$ heeft tot wortels x_1 en x_2 . Stel een vierkantsvergelijking op, die tot wortels heeft:
- $$x_1^2 + x_2^{(-3)} \text{ en } x_2^2 + x_1^{(-3)}.$$
16. Gegeven de functies: $f(x) \equiv \frac{2x-1}{2x+1}$ en $g(x) \equiv \frac{3x+2}{3x-2}$.
Los x op uit $f\{g(x)\} = 1$.
17. De vorm $f(x) \equiv 3x^3 + ax^2 + 13x + b$ laat bij deling door $x^2 - x - 6$ tot rest $47x + 99$. Bepaal a en b en los daarna de vergelijking $f(x) = 0$ op.
18. Door welk punt gaan alle parabolen, voorgesteld door
- $$y = x^2 - (a - 3)x - (a - 3)?$$
- Voor welke waarden van a liggen de parabolen geheel boven de x -as?
19. Ga de onderlinge ligging na van de kromme $y = 2x - 3 + x^2$ en de rechte $y = 2x - 3$.
20. Voor welke waarden van x is $\frac{5x+4}{x^2+x+1} > x$?

21. Herleid: $\frac{\sqrt[4]{a^6 b^2} \cdot c \sqrt{c}}{\sqrt[3]{c^2}} : \frac{c^{-1/2} a^0}{b^{-6}}$.

22. Als men beide leden van de vergelijking

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x-6} = \sqrt{2x+5}$$

kwadrateert, voert men geen wortels in. Verklaar dit.

Na kwadrateren kan men vinden: $\sqrt{(x-1)(x-6)} = 6$.

Ga dit na. Kwadrateert men opnieuw beide leden, dan wordt er weer geen wortel ingevoerd.

Verklaar nu, dat toch één der gevonden wortels niet voldoet.

23. In welk deel van het platte vlak liggen de punten, waarvoor

$$(y-x^2)(y-x-1) > 0 \text{ is?}$$

24. Men zet op een lijnstuk a aan weerskanten een lijnstuk x af en maakt nu een rechthoek met het middelste stuk tot basis en de uiterste stukken tot opstaande zijden. Voor welke waarde van x is de oppervlakte van die rechthoek zo groot mogelijk?

25. Los x op uit:

$$\frac{1}{2} R (\sqrt{5} - 1) = \sqrt{2R^2 - R \sqrt{4R^2 - x^2}}.$$

26. x_1 en x_2 zijn de wortels van $x^2 - ax + b = 0$.

y_1 en y_2 zijn de wortels van $y^2 - 7y - 5b = 0$.

$$y_1 = x_1^2 + 1; y_2 = x_2^2 + 1.$$

Bepaal a en b .

27. Vermindert men beide wortels van $x^2 - 18x + p = 0$ met a , dan verkrijgt men de wortels van de vergelijking $x^2 - 7ax + 48 = 0$. Bepaal a en p .

28. Gegeven $\sqrt{7 - 2\sqrt{(a+1)(6-a)}}$, waarin a een reëel getal is.

Voor welke waarden van a is deze vorm reëel?

Voor welke waarden van a geldt:

$$\sqrt{7 - 2\sqrt{(a+1)(6-a)}} = \sqrt{6-a} - \sqrt{a+1}?$$

29. Onderzoek de grafiek van

$$y = \frac{-2x+3}{x^2-6x+9}.$$

30. De vorm $ax^2 + bx + c$ wordt nul voor $x = 4$ en voor $x = 1$ en laat bij deling door $x - 5$ tot rest 12. Bepaal a , b en c .

31. Bepaal $\frac{2x^2 - y^2}{3xy}$, als $x^3 - 2x^2y - 5xy^2 + 6y^3 = 0$ is.

Hoe lost men x en y op uit het stelsel:

$$\begin{cases} 2x^2 - 3xy - y^2 = 1 \\ 5x^2 - 7xy - 4y^2 = 2? \end{cases}$$

Laat zien, dat de bijbehorende grafieken hun middelpunt in de oorsprong hebben. Laat ook zien, dat de eerste vergelijking steeds „oplosbaar” is naar x . Welke zijn echter de grenzen voor x ?

32. Van een opgaande deling is de deler $x^2 - x - 2$ en het deeltal $x^4 + ax^2 + bx + c$. Wanneer men het quotient deelt door $x - a$ wordt de rest $-b$. Bepaal a , b en c .

33. Los x op uit: $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x}$.

34. $x^2 + x + 1 = 0$ heeft tot wortels x_1 en x_2 . Laat zien, dat $x_1 \neq x_2$ is zonder x_1 en x_2 te berekenen.

Stel een nieuwe vierkantsvergelijking op met wortels x_1^2 en x_2^2 .

Men vindt $x^2 + x + 1 = 0$; wat is dus de conclusie?

Bepaal eens twee verschillende getallen, die elkaar kwadraat zijn. Laat zien, dat $x_1^3 = 1$ is. Hoeveel is nu x_1^8 ?

Wat krijgt men, als men een nieuwe vierkantsvergelijking opstelt met wortels x_1^3 en x_2^3 ?

35. De grafiek van de functie $y = \frac{8x+7}{x^2+ax+b}$ heeft twee asymptoten evenwijdig aan de Y-as, nl. $x = -1$ en $x = -2$. Bepaal a en b en teken de grafiek.

36. Schets de grafiek van

$$y = \frac{3x-4}{x+4}.$$

37. Als $x^2 + px + q = 0$ is, vraagt men af te leiden, dat

$$(x_1^n + x_2^n) + p(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + q(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0$$

wanneer x_1 en x_2 de wortels zijn van de eerste vergelijking.

38. Voor welke waarden van a zal de functie

$$y = ax^2 - (a-1)x - (a+2)$$

voor elke x negatief zijn?

39. Wanneer zal $\sqrt{4 - 2\sqrt{-60 + 16a - a^2}}$ een reëel getal voorstellen? Trek deze wortel.

40. Gegeven de vergelijking $(a-1)x^2 - (a-1)x - (2a-1) = 0$ (a reëel). De wortels zijn x_1 en x_2 .

Voor welke waarden van a zal $x_1 > 2$ en $x_2 < -3$ zijn? (x_1 en x_2 niet berekenen).

41. De vorm $\frac{m(x-2)}{x^4 - ax^2 + a - 1}$ is onbepaald voor $x = 2$ en heeft als x tot 2 nadert tot grenswaarde $\frac{1}{2}$. Bepaal a en m . Splits daarna de vereenvoudigde breuk in de som van drie breuken:

$$\frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}.$$

42. Bewijs, dat $17(x^{23} - 1) - 23(x^{17} - 1)$ deelbaar is door $(x - 1)^2$.

43. Als we beschouwen de vergelijkingen $y = x^2 - 6x + 10$,

$$y = x^2 - 6x + 8, y = -x^2 + x, y = \frac{x+1}{x-1}, y = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1},$$

dan merken we op, dat bij elke reële waarde van x ook een reële waarde van y behoort. (Waarom?) Ga nu na, of bij deze vergelijkingen ook het omgekeerde geldt, m.a.w. wanneer ook x reëel is, zolang y dit is. Toelichting door middel van grafieken.

44. Beantwoord dezelfde vraag als in (43) ook voor:

$$y = x + \frac{1}{x-1}, y = x - \frac{1}{x-1}, y = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Wat kunt ge in dit verband opmerken van $y = \sqrt{x^2 - 3x - 10}$, $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - 3xy - 10y^2 = 0$?

Welke grafieken staan met deze vergelijkingen in verband?

45. Van een deling is het deelfal $x^4 + ax^3 - bx^2 - (a+1)x + c$, de deler $x^2 - 3x + 2$ en de rest $-x + 3$. Bepaal a , b en c , als ge weet, dat het quotient door $x + 1$ deelbaar is.

46. Men vraagt een vergelijking met wortels x_1 en x_2 , als $x_1 = x_2^2$ en $x_1^3 + x_2^3 = 756$ is.

47. Leid de grafiek van $y = \sqrt{x^2 - x - 6}$ af uit die van $y = x^2 - x + 6$. Eveneens die van $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$ uit $y = x^2 - 2x + 1$. Vergelijk dit met $y = x - 1$.

48. De vergelijkingen $5x^3 - 5ax^2 - 2(3a - 10)x + 24a = 0$ en $x^2 - ax + 4 = 0$ hebben één gemeenschappelijke wortel. Bepaal a en los de vergelijkingen op.

49. De functie $y = \frac{x^2 - 2x + p}{x^2 - 8x + 15}$ heeft 10 als uiterste waarde.

Bepaal p en onderzoek de grafiek van de functie.

50. De vorm $3(x-1)^7 + 15(x-2)^{13} + 4x^3 - 9x^2 + 11$ wordt gedeeld door $(x-1)(x-2)$. Bepaal de rest.
51. Gegeven de vergelijking $x^2 - ax + b = 0$ met wortels x_1 en x_2 en de vergelijking $y^2 - (b + \frac{3}{2})y + a = 0$ met wortels y_1 en y_2 . Verder is bekend, dat $y_1 = \frac{1}{x_1} + 1$ is en $y_2 = \frac{1}{x_2} + 1$. Bepaal a en b .
52. Ontbind de vorm $18x^2 - 9x\sqrt{3} - 6$ in twee factoren van de eerste graad in x .
53. Is de functie $(x-1)(q-r) + (q-1)(r-x) + (r-1)(x-q)$ deelbaar door $(x-1)$? Ook door $(x-r)$ en door $(x-q)$? Verklaar dat.
54. Voor welke waarden van x is

$$-3 < \frac{x^2 - 4x - 6}{x^2 - 5x + 6} < +3?$$

55. Voor welke waarden van x ligt de waarde van de functie $y = 5^{\frac{1}{x^2 - x - 5}}$ tussen 1 en 5?
56. Wat is het grootst $\sqrt[3]{3}$ of $\sqrt{2}$? Laat zien, dat $\sqrt{2}$ onmeetbaar is. Laat ook zien, dat x , voorkomend in de vergelijking $2^x = 9$ niet meetbaar kan zijn. Hoeveel is x ongeveer?
57. Toon aan, dat de wortels van

$$x^2 - (a-1)x - (a+2) = 0$$

voor alle waarden van a bestaanbaar en verschillend zijn. Bepaal het minimum van $x_1 - x_2$; ($x_1 > x_2$).

58. Schets de grafiek van de functie

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^2}.$$

59. Leid de grafiek van $y = 2^{x^2+1}$ af uit die van $y = x^2 + 1$.
60. Bepaal een vergelijking van de 4e graad, die tot wortels heeft de kwadraten en de derde machten van de wortels van $x^2 + 3x + 1 = 0$.
61. In een driehoek beschrijft men een rechthoek met twee hoekpunten op de basis en twee hoekpunten op de opstaande zijden. Als de hoogte van de rechthoek x is, voor welke waarde van x is dan de oppervlakte van de rechthoek maximaal?
62. Welke ligging hebben $y = 2x - 1 + \frac{1}{x-3}$ en $y = 2x - 1$ ten opzichte van elkaar?

Dr H. J. E. BETH

**Inleiding tot de Differentiaal- en
Integraalrekening**

met toepassingen op verschillende gebieden

Antwoorden f 10.50, geb. f 11.50
f 1.—

Dr H. J. E. BETH

**Inleiding tot de Niet-Euclidische Meetkunde
op historische grondslag**

geb. f 4.50

Dr H. J. E. BETH

Newton's „Principia”

2 delen geb. à f 4.25

Dr H. J. E. BETH

Beknopt leerboek der Cosmographie

voor het middelbaar- en voorbereidend hoger onderwijs,
kweek- en normaalscholen en studerende voor de
hoofdacte, 3e druk f 0.90

Dr H. J. E. BETH

Leerboek der Cosmographie

f 1.90, geb. f 2.40

Dr H. J. E. BETH

Meetkunde van de ruimte

Een leerboek voor stereometrie en beschrijvende meet-
kunde voor het M.O. geb. f 2.90

Dr H. J. E. BETH en Dr P. J. VAN LOO

Mechanica

voor het M.O. met vraagstukken, 4e druk . . f 2.50
Antwoorden f 0.50

Dr H. J. E. BETH

Tafels in vier decimalen

benevens gegevens op verschillend gebied voor
schoolgebruik f 0.45

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN—BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA

DOOR

P. WIJDENES

AMSTERDAM

EN

Dr H. J. E. BETH

DIRECTEUR VAN DE R.H.B.S. TE AMERSFOORT

- I. Elfde druk. 156 blz. 21 fig. geb. f 2.25.
- II. Tiende druk. 204 blz. 50 fig. geb. f 2,25.
- III. Zevende druk. 198 blz. 60 fig. geb. f 2.25.

Deel I en II geven de volledige stof voor de klassen 1, 2 en 3 van de H.B.S., deel III voor de 4e en 5e van de H.B.S. B.

Voor de 4e en 5e van de H.B.S. A.

P. WIJDENES en Dr P. G. VAN DE VLIET

ALGEBRA VOOR DE H.B.S. A.

Derde druk. 164 blz. 20 fig. f 2.—.

Voor Gymnasia en Lycea:

Klassen I—IV: Nieuwe Schoolalgebra I, II, zonder de reeksen

V α en VI α Nieuwe Schoolalgebra III α

V β en VI β Nieuwe Schoolalgebra III

Voor het Staatsexamen

Voor α de delen I, II, III α

Voor β de delen I, II, III.

Leraren, die deze werken niet kennen, kunnen pres. ex. bekomen op aanvraag aan den uitgever of aan de schrijvers.

Uitgave P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA
Ook verkrijgbaar door de boekhandel