

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN
NIJMEGEN

16e JAARGANG 1940, Nr. 5.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken
verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel
druks. Prijs per jaargang f 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw
Tijdschrift (f 6.—) zijn ingetekend, betalen f 5.—, voor idem
op „Christiaan Huygens” (f 10.—) f 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-
Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25
afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan
P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Biz.
Dr J. POPKEN, De ontwikkeling van het getalbegrip.	225
Hoofdcommissie voor de normalisatie in Nederland	240
Uit het verslag van de Staatscommissie 1939	243
Korrels XLVII—LI.	246
Ingekomen boeken	255

De redactie vestigt de aandacht op blz. 38 van afl. I; zij hoopt
dat velen hun bevindingen medeelen over de tafel in vier decimalen.

DE ONTWIKKELING VAN HET GETALBEGRIP¹⁾

DOOR

Dr. J. POPKEN.

Het getalbegrip is in de wiskunde van fundamenteele beteekenis. In deze voordracht wil ik trachten U in ruwe trekken te schetsen hoe dit begrip in de loop der eeuwen gegroeid is.

Daarbij zullen we moeten beginnen bij die getallen, waaruit tenslotte alle andere opgebouwd zijn. Ik bedoel de natuurlijke getallen, dus de geheele positieve getallen 1, 2, 3, enz. „Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk“, zoo luidt een bekende uitspraak van Kronecker²⁾.

Het natuurlijke getallenbegrip, zooals we dit op 't oogenblik in zijn volle abstractheid bezitten, heeft zich slechts heel langzaam ontwikkeld. Willen we weten hoe dit gegroeid is, dan moeten we in 't leven der volken tot voorhistorische tijden teruggaan.

Het is echter, bij gebrek aan gegevens, moeilijk om over het primitieve getalbegrip te spreken. Dit is evenwel duidelijk: zonder getalbegrip kan er van een volkshuishouding geen sprake zijn; het is een voorwaarde voor elke cultuur. Dat de lagere telwoorden heel oud zijn, blijkt wel uit de verrassende overeenkomst, die er tusschen deze woorden in geheel verschillende talen bestaat. Zoo komen de telwoorden van 1 tot en met 10 in de verschillende indogermaansche talen sterk overeen. Ja zelfs zeven is verwant met het overeenkomstige telwoord in het Finsch en in de semietische talen. Deze woorden moeten dus ontstaan zijn vóór de respectievelijke volken van elkaar gesplitst werden. Zelfs vóór de telwoorden ontstonden, moet er reeds een zeker getalbegrip aanwezig geweest zijn. Zoo kennen de Wedda's, een zeer primitieve volksstam op

¹⁾ Openbare les gegeven bij de aanvaarding van de functie van privaat-docent aan de Universiteit te Leiden.

²⁾ Vgl. *H. Weber*, Leopold Kronecker, Jahresbericht D. M. V., Zweiter Band 1891—92, p. 5—31; i. h. bijz. p. 19.

Ceylon, geen telwoorden en toch lukt het hun voorwerpen te tellen. Daartoe zijn ze in 't bezit van een aantal staafjes. Aan elk te tellen voorwerp wordt een staafje toegevoegd. Door tenslotte de toegevoegde staafjes te bundelen en te bewaren, kan de Wedda op elk oogenblik controleeren of er ook één of meer voorwerpen aan de getelde verzameling ontbreken.

Juist het onderzoek naar het getalbegrip bij primitieve volken geeft ons een beeld, hoe dit begrip zich ontwikkeld moet hebben. Enkele andere gegevens kan men vinden door taalvormen van de telwoorden te bestudeeren ³⁾.

Oorspronkelijk moet het getal zeer eng met het voorwerp verbonden geweest zijn. Het verschijnsel van de z.g. getallenklassen wijst daarop. Men spreekt van getallenklassen, wanneer de telwoorden niet alleen van het aantal, maar ook van de aard der getelde voorwerpen afhangen. Zoo gebruikt een bepaalde Zuid-Amerikaansche Indianenstam geheel andere woorden voor het tellen van ronde dingen dan voor lange. Voor levende voorwerpen bestaat er weer een nieuw systeem telwoorden en het tellen van dagen tenslotte gebeurt weer op andere wijze. We hoeven daarom nog niet laag op deze Indianen neer te zien, want als wij spreken van een paar schoenen, van een juk ossen en van tweelingen, dan is dat in de grond even stumperachtig. In verband hiermee is het misschien wel interessant er op te wijzen, dat zelfs in een zoo ver ontwikkelde taal als het Engelsch naast „two” gesproken wordt van „a pair”, „a yoke of oxen”, „a happy couple of lovers”, „deuce” (bij het dobbelen), „twins” en ook van „twain”; denk b.v. aan „east is east and west is west and never the twain shall meet.”

Het is niet moeilijk om ook in tal van andere talen zulke resten van getallenklassen aan te wijzen.

Gaan we nu de ontwikkeling van het getalbegrip verder na, dan kan men zich voorstellen hoe de getallenklassen stuk voor stuk samensmolten, tot er één overbleef. Men moet zich deze overgang niet te snel denken en ook daarna was het telwoord nog sterk afhankelijk van het substantief. Immers het telwoord werd verbogen en had geslacht. Voor het speciale geval van één gold dit tot voor kort nog in onze taal. Maar ook voor de andere telwoorden

³⁾ Zie b.v. *Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer*, Breslau 1934.

ligt die tijd nog niet ver terug. Tot in de 17^{de} eeuw had men in 't Duitsch een vrouwelijke, een mannelijke en een onzijdige vorm voor twee: zwo Töchter, zween Söhne, zwei Weiber. Men ziet, dat op dit standpunt het telwoord zich nog richt naar het substantief. Toch is de grootste stap om het telwoord daarvan vrij te maken gedaan: het kan tenslotte alles tellen. In het laatste stadium is het telwoord geheel vrij. Het getal wordt een volkomen abstract begrip. Die abstractie zal U duidelijk worden, als U zich even indenkt, dat „drie” hetzelfde begrip is in elk der volgende uitdrukkingen: drie munten, drie electronen, drie oorlogen, drie idealen en drie getallen. Wat hebben dan b.v. de drie munten en de drie idealen voor gemeenschappelijks? Klaarblijkelijk dit, dat men elk der munten kan toevoegen aan juist één ideaal en omgekeerd, zooals ook de Wedda aan elk te tellen voorwerp één staafje toevoegt.

Bekend is, dat bijna alle talstelsels 10 of ook wel 20 tot grondtal hebben. Geen wonder, want voor het tellen werden algemeen de vingers en soms ook de teenen gebruikt. Deze vervulden dus dezelfde functie als de staafjes van de Wedda. Maar men kreeg een moeilijkheid. Waren alle vingers afgeteld, „waren beide handen afgestorven”, zooals sommige volksstammen het dramatisch uitdrukken, en was men zoo tot 10 gekomen, dan moest men óf opnieuw beginnen, óf op de teenen verder tellen. In het laatste geval werd de moeilijkheid verschoven tot 20 bereikt was, „wanneer een mensch sterft”. Wilde men grootere aantallen tellen, dan zat er niets anders op, dan de gevolgde methode te herhalen en het aantal geheele aftellingen op de een of andere manier vast te leggen. Hoe dat kan gebeuren laten b.v. de Zoeloe's zien, die in zulke gevallen een aantal malen in de handen klappen, dat overeenkomt met het aantal geheele aftellingen. Nog mooier is het voorbeeld, dat een ander negervolk geeft. Bij het tellen van aantallen, die 100 te boven gaan, moeten drie mannen dit zware en verantwoordelijke werk verrichten. De eerste telt de eenheden door vinger voor vinger op te steken en heeft hij zoo tien bereikt, dan begint hij opnieuw. De tweede telt op analoge wijze de door de eerste bereikte tientallen, terwijl de derde de honderdtallen voor zijn rekening neemt.

Men ziet, dat een modern telwerk in de grond precies zoo functioneert. Maar nog meer: Schrijf ik op 347, dan telt 3 de honderdtallen, 4 de tientallen en 7 de eenheden. Men begrijpt nu, hoe men tot deze

positioneele schrijfwijze van de getallen gekomen is. Juist deze notatie is van het allergrootste belang geweest voor de menschheid. Op eenvoudige en overzichtelijke wijze stelt ze ons in staat getallen neer te schrijven en ermee te rekenen. Men heeft hier twee geniale gedachten: ten eerste de invoering van symbolen: de cijfers en ten tweede het principe, dat de waarde van een symbool afhangt van zijn plaats.

Ik wil hier nog wijzen op de weinig rationeele manier, waarop wij getallen uitspreken. In plaats van driehonderd zeven en veertig hoorde men b.v. te zeggen: driehonderd veertig zeven. Me dunkt: een invoering van deze verbetering op de scholen kan niet op groote moeilijkheden stuiten.

In de hier besproken vorm is de schrijfwijze van de getallen afkomstig van de Indiërs, terwijl de Arabieren ze in de middel-eeuwen naar West-Europa overgebracht hebben. Het Babylonische stelsel kan echter als een voorlooper beschouwd worden, want ook dit was positioneel. Daarentegen hebben de Egyptenaren, de Grieken en ook de Romeinen geen positioneele schrijfwijze gekend. Hun stelsels waren meer geschikt voor het voorstellen van de getallen dan voor het rekenen er mee. Men denke zich slechts even in, dat b.v. de vermenigvuldiging

DCXIX . CXLIII

uitgevoerd moet worden, terwijl deelingen uit de aard der zaak nog veel ingewikkelder zijn. Voor het rekenen werden deze stelsels dan ook niet gebruikt: in plaats daarvan had men rekenborden, die we nu nog kennen in de vorm van telramen.

Lang heeft het geduurd voor men de behoefte gevoelde werkelijk groote getallen in te voeren. Zoo gaan de oorspronkelijk Germaansche telwoorden slechts tot duizend. In het begin lag de getalgrens bij de Egyptenaren eveneens bij duizend. Later voerden zij hogere eenheden in. Zoo werd 100 000 geschreven door het beeld van een kikkervischje, dat dezelfde naam droeg als „ontelbaar”, nl. wegens hun veelvuldig voorkomen in de modder van de Nijl na de overstromingen (denk aan de kikvorschplaaig uit het O. T.!) Een analoog verschijnsel heeft men in 't Chineesch, waar 10 000 geschreven werd door 't beeld van een schorpioen. Teekenend is het, dat men die groote getallen blijkbaar met plagen vergeleek! In

Egypte bestond een tijdlang een nog hogere eenheid, nl. 1 000 000, ontstaan uit „oneindigheid” en voorgesteld door de god, die de hemelruimte onder de aarde droeg. Deze hogere eenheden zijn later weer verloren gegaan; dit verdwijnen registreert duidelijk het cultuurverval. Het 1 000 000 verdwijnt reeds in het Nieuwe Rijk, 100 000 in het Demotische en 10 000 in het Koptische. Eerst worden ze onbepaalde veelheidsaanduidingen en dan verdwijnen ze voor goed. Natuurlijk is het al te gewaagd om de cultuurhoogte uitsluitend te meten naar het voorkomen van groote getallen; in dat geval zou men moeten besluiten, dat het cultureele peil van een bevolking tijdens een inflatie een ongekende hoogte aanneemt.

Lag dus de getalgrens bij de volken in de oudheid voor onze begrippen in 't algemeen vrij laag, toch was er één volk, dat in dit opzicht een gunstige uitzondering vormde, nl. de Indiërs. Hun beschouwingen over het wezen van het oneindige, die eng samenhangen met hun religieuze voorstellingen, voerden hen tot invoering van steeds hogere getallen. Ze wisten hun goden en hun helden niet beter te eeren, dan door hun eigenschappen met behulp van enorm groote getallen uit te drukken. Zoo is er in het oer-oude epos Mahabharatam sprake van $24 \cdot 10^{15}$ goden en Buddha moet 600 000 millioen zonen gehad hebben. Als illustratie wil ik verder nog even een aardige legende vermelden, die voorkomt in het boek Lalitavistara, dat ongeveer 300 j. v. Chr. geschreven is.

Buddha, die naar de hand dingt van Gopa, de dochter van den vorst Dandapani, wordt door den vader uitgedaagd om zich met de geduchte wiskundige Arjuna te meten. Deze laatste vraagt Buddha de getallen boven 100 koti op te bouwen. Daarbij beteekent 1 koti 10 millioen. Door het noemen van eenheden komt Buddha zoo tot 10^{53} . Maar — zeer zeker tot ontsteltenis van Arjuna — is Buddha dan nog lang niet aan 't eind; integendeel, dit is eerst zijn eerste telling, hierboven komen nog acht dergelijke tellingen en zoo bereikt hij tenslotte 10^{421} . Maar Arjuna, als een goed examiner, vraagt verder. Buddha moet het aantal atomen van een mijl aangeven. Buddha antwoordt dan op de volgende wijze:

7 atomen vormen een *heel* fijn stofdeeltje.

7 van deze heel fijne stofdeeltjes vormen een fijn stofdeeltje; dit laatste bevat dus 7^2 atomen.

7 fijne stofdeeltjes vormen één, die de wind nog draagt; dat zijn dus 7^3 atomen.

7 dergelijke vormen één van het spoor van de haas, dus 7^4 atomen.

Op dezelfde manier gaat hij verder; zoo komt hij achtereenvolgens tot een stofdeeltje van het spoor van een ram: 7^5 atomen, één van het spoor van een stier: 7^6 atomen, een papaverkorrel: 7^7 atomen, een mosterdkorrel: 7^8 atomen, een gerstekorrel: 7^9 atomen; een vingerlid: 7^{10} atomen. Hij besluit daarna aldus: 12 vingerleden vormen een span, d.w.z. $12 \cdot 7^{10}$ atomen, 2 spannen vormen een el, dus $24 \cdot 7^{10}$ atomen, 4 ellen vormen één boog, dus $96 \cdot 7^{10}$ atomen, 1000 bogen vormen de Indische maat krosa' (letterlijk: een schreeuw), dus $96\,000 \cdot 7^{10}$ atomen; tenslotte 4 krosa vormen een mijl. De laatste bevat dus $384\,000 \cdot 7^{10}$ atomen.

Uit dit voorbeeld blijkt wel in hoe hoog aanzien het numerieke rekenen bij de Indiërs stond. Zij ontwikkelden de schrijfwijze van de getallen, die wij thans haast als iets evidents aanvaardden. Maar zij gaven daardoor het voorbeeld van een juiste symboliek; iets wat voor de verdere ontwikkeling van de wiskunde van het grootste gewicht was. Ongetwijfeld werden de Indiërs daarbij geleid door de kennis van het Babylonische talstelsel.

Geheel anders lagen de omstandigheden bij de Grieken. In tegenstelling met de Babyloniërs en de Indiërs beschikten zij slechts over een gebrekkig stelsel om getallen voor te stellen. Niet alleen was het lastig om met behulp van dit systeem te rekenen, maar het was ook moeilijk groote getallen aan te duiden. Het dichten in getallen, dat wij bij de Indiërs vonden, vinden wij bij de Grieken niet terug. Eerst de grootste onder hen, *Archimedes*, vindt in zijn z.g. zandrekening een systeem om willekeurig hooge getallen voor te stellen. Met behulp daarvan drukt hij het aantal zandkorrels uit, die in een holle bol gaan, waarvan de straal de orde van grootte heeft van de afstand der aarde tot de vaste sterren.

Tot nu toe spraken we over de natuurlijke getallen, maar ook de gebroken getallen ontstonden reeds in voorhistorische tijden. Twee mannen gingen samen op jacht en doodden een beer. Bij de verdeling ontstond het begrip helft. Analooq ontstonden de begrippen derde, vierde deel, enz. Het hoeft ons dus niet te verwonderen, dat men oorspronkelijk alleen breuken met teller 1, de z.g. stambreuken,

kende. Ook nu nog kennen volgens *Fettweis* ⁴⁾, de primitieve volken uitsluitend eenvoudige breuken, zooals $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{2}$.

Het Egyptisch en aanvankelijk ook het Grieksch bezat alleen symbolen voor de stambreuken en voor hun complementaire breuken, zooals $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, enz. Moest een willekeurige breuk uitgedrukt worden, dan gebeurde dit door optelling van passende stambreuken; b.v.

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15},$$

$$\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}.$$

Men begrijpt, dat dit omslachtig was en dat de berekeningen moeilijk verliepen. Met welke moeilijkheden de Egyptenaren te kampen hadden blijkt wel duidelijk uit het z.g. papyrus Rhind, een papyrusrol, die zich in 't Britsch Museum bevindt en waarin de schrijver *Ahmes* een aantal vraagstukken heeft verzameld, die dateeren uit de tijd van het Middelste Rijk. „Voorschrift om tot kennis te geraken van alle donkere dingen . . . van alle geheimen, die in de voorwerpen schuilen”, zoo vangt het veelbelovend aan.

Veel hooger stond het breukrekenen bij de Babyloniërs. Deze gebruikten sexagesimale breuken, die zich van onze tiendeelige breuken daardoor onderscheidden, dat hun grondtal niet 10 maar 60 was, een systeem, dat zich bij de hoek- en tijdrekening tot op de huidige dag gehandhaafd heeft. Deze sexagesimale breuken werden later door de Grieken overgenomen en ook in de middeleeuwen werd er veel mee gerekend. Vooral door toedoen van *Stevin* zijn ze door de tiendeelige vervangen.

Wat is voor de moderne wiskundige nu de beteekenis van de invoering van de gebroken getallen? Wanneer men zich beperkt tot de natuurlijke getallen, dan is optelling, vermenigvuldiging en machtsverheffing van getallen in dit gebied onbeperkt mogelijk maar de omgekeerde bewerkingen aftrekking, deeling, worteltrekking en logaritmeneming in 't algemeen niet. Voegt men nu de gebroken getallen toe, dan krijgt men een nieuw getallenrijk, waarin althans de deeling steeds mogelijk is. Welk voordeel dit heeft zullen we inzien, zoodra we later bespreken, welke rol de algebraïsche symboliek in de wiskunde speelt.

Maar eerst wil ik spreken over het aandeel, dat de Grieken gehad hebben in de ontwikkeling van het getalbegrip. Die bijdrage

⁴⁾ *E. Fettweis*, Das Rechnen der Naturvölker, Leipzig 1927, S. 43.

is van zeer fundamenteel belang geweest; ze omvat nl. de-ontdekking van het irrationale. Maar juist die ontdekking beteekende een eindpunt, een zich afwenden van het getal. Dit alles wil ik in 't volgende schetsen.

De Grieken verstonden onder getallen uitsluitend de natuurlijke getallen. Daarnaast kende men hun verhoudingen. De studie van deze getallen stond in hoog aanzien en had vooral onder de Pythagoreeërs een sterk mystieke inslag. Men vond bij dit onderzoek merkwaardige eigenschappen van de natuurlijke getallen, die juist aansloten bij de wetenschapsidealen van de Grieksche cultuurmensch: eenvoud, begrensdheid en harmonie. Toen men bovendien in de natuur, beginnend bij de muziek, harmonische betrekkingen vond, die met behulp van geheele getallen uitgedrukt konden worden, was men één en al enthousiasme. Haast jubelend is de uitspraak uit de Pythagoreesche school: „Het getal is het wezen aller dingen”. Men scheen de laatste raadselen van het zijn te kunnen onthullen, waarbij de geheele wereld werd opgelost in één harmonie van geheele getallen. Edoch, de debacle van dit systeem was nabij!

Had men eerst rechthoekige driehoeken gevonden, zoodanig, dat tusschen de drie zijden eenvoudige geheeltallige verhoudingen bestonden, zooals $3 : 4 : 5$, toen men dezelfde methoden wou toepassen op de zijde en de diagonaal van een vierkant mislukten deze. Het bleek hun, dat de verhouding tusschen deze twee grootheden juist *niet* door geheele getallen uit te drukken was. In moderne bewoordingen: zij ontdekten, dat die verhouding, $\sqrt{2}$, onmeetbaar of irrationaal is. De ontdekking wordt wel toegeschreven aan hem, wiens naam men niet dorst uitspreken, d.w.z. aan de groote *Pythagoras* zelf. Deze ontdekking, die zoo in strijd was met hun idealen, werd eerst door de Pythagoreeërs geheim gehouden, maar lekte al spoedig uit. Uit het volgende verhaal klinkt U nog de haat tegemoet tegenover de verrader van hun diepste geheim, dat slechts aan enkele ingewijde priesters der wetenschap bekend was: „Men zegt, dat de man, die het eerst de beschouwing van het irrationale uit het verborgene in het openbaar bracht, door een schipbreuk om het leven gekomen moet zijn. En wel, omdat het onuitsprekbare en het beeldlooze voor altijd verborgen behoorde gebleven te zijn. Daarom werd deze misdadiger, die bij toeval

dit beeld van het leven aanraakte en bloot legde, naar de plaats van het ontstaan gebracht en wordt daar door de eeuwige vloed en omspoeld."

Deze ontdekking had enorme gevolgen. *Plato*, die zeer onder de invloed van de Pythagoreeërs stond, zocht de harmonie niet langer in de physische werkelijkheid, maar in de wereld der ideeën.

De wiskunde beleefde een crisis. Bij ieder getal kon men blijkbaar een lijnstuk vinden, maar omgekeerd waren er lijnstukken, die niet door een getal te meten waren. Het kwam de Grieken voor, dat de fundamenteen der wiskunde in de meetkunde lagen. Men wendde zich voortaan bijna uitsluitend tot de bestudeering van de meetkunde en van een algebra in onze tegenwoordige zin, was geen sprake meer. Deze ontwikkeling werd bovendien bevorderd door het ontbreken van een goede symboliek voor het voorstellen van getallen. Toch bezaten de Grieken een algebra, maar geheel als meetkunde verkleed. Met onze huidige theorie van het irrationale getal komt bij de Grieken de leer van de verhoudingen overeen. Ja zelfs de opbouw van die leer volgens *Eudoxus* verschilt alleen formeel van de moderne theorie van het irrationale getal volgens *Dedekind*.

Wanneer na de middeleeuwen in West-Europa een nieuwe wiskunde opbloeit, heeft men ondertusschen de algebraïsche methoden leeren kennen, en rekt men met lijnsegmenten als getallen. Zóó natuurlijk werd dit gevonden, dat men lange tijd een verdere fundeering van het begrip irrationaal getal niet noodig achtte. Eerst in de laatste tijd heeft men ingezien, hoe, uitgaande van het natuurlijke getal, ook het begrip van het irrationale getal constructief ontwikkeld kon worden.

Het wordt nu tijd om iets over het negatieve en het complexe getal te zeggen. Deze getallen zijn als 't ware geboren uit de algebraïsche symboliek. Het is die wonderbaarlijke kracht van de formule geweest, waarvan *Hertz* zei: „Zuweilen scheint die Formel klüger zu sein als der Verstand, der sie erfunden hat." Het is alsof in de algebraïsche formule een demonische kracht woont, die ons dwingt om aan het getal een steeds ruimere beteekenis toe te kennen. Het getal, als formeel rekengrootheid opgevat, ontdoet zich daarbij stuk voor stuk van de beperkingen, die bij de invoering daaraan opgelegd werden.

De formule is één der merkwaardigste voortbrengselen van de menschelijke geest. Ze spreekt haar eigen taal en is daarbij direct, kort en overzichtelijk.

Opmerkelijk is, dat de algebraïsche symboliek telkens weer opnieuw ontdekt wordt en dan weer verloren gaat, tot ze tenslotte in de laatste eeuwen in West-Europa ontwikkeld wordt tot een nooit gekende hoogte.

De oudste mathematische symboliek, die we kennen, vinden we in de Babylonische teksten. Ik vestig hier de aandacht op de wijze, waarop Neugebauer⁵⁾ het ontstaan ervan verklaart. Bekend is nl., dat de Babylonische cultuur ontstond door samensmelting van twee geheel in structuur verschillende beschavingen: die van de oorspronkelijke bewoners, de Sumeriërs, en de later binnen gedrongen Semietische Akkadiërs. Langzamerhand kregen de Akkadiërs de overhand en zelfs verdween het Sumerisch als gesproken taal; maar toch bleef de gecultiveerde bovenlaag van de bevolking het Sumerisch mede beoefenen. Men heeft dit treffend vergeleken met het gebruik van het latijn in de middeleeuwen. Nu was het Sumerisch schrift oorspronkelijk een beeldschrift, maar door de vereenvoudiging van de teekens kreeg het — evenals het Chineesche — meer en meer het karakter van een ideogramatisch schrift. Nemen we het symbool voor mond. Dit teeken leek oorspronkelijk op een gezicht, maar werd in de loop der eeuwen zoo gewijzigd, dat het alle gelijkenis daarmee verloor. Nu werd „mond” in het Sumerisch uitgesproken als „ka”. Door de Akkadiër, die niet verder in het Sumerisch ingewijd was, werd aan dit vaste teeken de geluidswaarde „ka” toegevoegd. Om nu in een willekeurig Akkadisch woord de lettergreep „ka” voor te stellen, werd voortaan het eerder genoemde Sumerische symbool voor mond gebruikt. Zoo werd het geschreven Akkadisch tot een syllabisch schrift; want wat hier voor de lettergreep „ka” gezegd is, geldt ook voor andere lettergrepen. Het Sumerisch was nl. rijk aan zulke een-lettergrepige woorden.

Daarnaast bestond echter het ideogramatisch schrift, dat gebruik maakte van de oorspronkelijke beteekenis der symbolen, en

⁵⁾ O. Neugebauer, *Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften. I. Vorgriechische Mathematik*, Berlin 1934.

dat ook door de Akkadiërs beoefend werd. In de Akkadische teksten wisselen vaak syllabisch geschreven gedeelten met ideogrammatische af. Nu burgerde zich — misschien onder invloed van de schrijfwijze der getallen — in mathematische teksten de gewoonte in, om belangrijke grootheden, zooals lengte, breedte, enz., steeds door bepaalde ideogrammen voor te stellen, terwijl overigens de tekst syllabisch was. En zie, zoo was een mathematische symboliek ontstaan.

De wiskunde van Babylon ging voor het grootste deel verloren en met haar ook de gebruikte symboliek.

De Grieken kenden geen wiskundig teekenschrift; eerst aan het einde van hun periode vinden we een schuchter begin bij *Diophantus*. Daarentegen bezaten de Indiërs een vrij ontwikkelde algebraïsche symboliek. Trouwens Indië had zin voor symboliek. Parallel daarmee gaat een krachtige ontwikkeling van de algebraïsche methoden. *Brahmagupta* onderscheidt verschillende onbekenden door ze allerlei kleuren te geven. De Indische algebra kenmerkt zich door het kleurige, poetische gewaad, waarin ze veelal gestoken is. Zoo zegt *Bhaskara* in één van zijn aan „Lilavati” opgedragen hoofdstukken: „Mooi meisje met je glinsterende oogen, zeg me, als je de juiste kunst van de omkeering verstaat, welk is het getal, dat met 3 vermenigvuldigd, dan met $\frac{3}{4}$ van het product vermeerderd, door 7 gedeeld en met $\frac{1}{3}$ van het quotient verminderd, met zich zelf vermenigvuldigd, met 52 verminderd, door worteltrekking, optelling met 8 en deeling door 10 het getal 2 tot uitkomst heeft.” Of haar oogen na het stellen van de opgave nog zoo glinsterden, is niet bekend.

De Arabieren nemen de symboliek niet van de Indiërs over; zij gaan zelfs zoo ver om getallen met woorden te omschrijven. Toch duikt bij de West-Arabieren, aan het eind van hun mathematische ontwikkeling, het teekenschrift weer op.

Tenslotte verschijnt de symboliek weer in West-Europa, vooral sinds *Vieta*, die er voor 't eerst een consequent en doelbewust gebruik van ging maken.

We zagen, hoe de algebraïsche symboliek telkens herontdekt werd en weer verdween. Dit verdwijnen is niet erg raadselachtig, omdat immers de mathematische ontwikkeling van de Babyloniërs, de Grieken, de Indiërs en de Arabieren grootendeels te niet ging.

Waarom is echter dit herhaalde herontdekken toe te schrijven? M.i. omdat er steeds een voorbeeld van een goede symboliek aanwezig was: ik bedoel de schrijfwijze van de getallen.

Ik sta hier uitvoerig stil bij het algebraïsch begripsschrift, omdat dit van fundamenteel belang is geweest voor de ontwikkeling van het getalbegrip. Het algebraïsch schrift geeft ons een voor een groot deel automatisch werkend apparaat, dat veel denkwerk bespaart. Kent men alleen positieve getallen en schrijft men

$$a - b,$$

dan is het uitermate storend, dat hierbij telkens bedacht moet worden, dat $a > b$ moet zijn. Men is geneigd het apparaat ook te laten werken, wanneer nu eens $a \leq b$ is. Daarbij kwam men tot de verrassende ontdekking, dat men nooit op tegenspraken stiet. Zoo ontstonden de nul en de negatieve getallen. De Indiërs werkten reeds rustig met negatieve grootheden, zonder zich verder over het wezen van die getallen te bekommeren. Zoo ook ontstaan omstreeks 1500, kort na *Vieta*, in West-Europa de negatieve getallen. Men staat er eerst nog wat onwennig tegenover; vertrouwt de vreemdelingen in het getallenrijk nog niet recht, noemt ze — zooals *Stifel* — absurde getallen of — zooals *Cardano* — numerici. Nog lang is er een zekere tegenzin om ze te aanvaarden, vooral onder de Engelsche wiskundigen; en ook, wanneer er reeds algemeen mee gerekend wordt, begrijpt men het wezen van deze getallen niet. Zoo vatte *Wallis* de negatieve grootheden nog op als een soort supra oneindige getallen. Eerst na de ontwikkeling van de analytische meetkunde door *Descartes*, waarbij aan de positieve en negatieve getallen een richtingszin toegekend wordt, verandert dit en worden de negatieve getallen zonder meer aanvaard.

De werkelijke fundeering van dit getalbegrip op het natuurlijke getal werd echter eerst in de laatste tijd gelegd.

Volkomen analoog verliep de ontwikkeling van het complexe getal. Het eerst worden deze getallen, omstreeks 1550, in Italië ingevoerd bij de oplossing van de vergelijking van de derde graad.

Ook deze getallen worden eerst met een zeker wantrouwen ontvangen; de naam „imaginaire getallen” wijst reeds hierop. Dat het kwadraat van een getal negatief kon zijn werd paradoxaal geacht. Lang waren deze getallen door een mystische sfeer omgeven. Zoo

schreef *Leibniz* in 1702: „Die imaginären Zahlen sind eine feine und wunderbare Zuflucht des Göttlichen Geistes, beinahe ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein.” Veel van het wonderbaarlijke verdween toen o.a. *Gauss* de bekende voorstelling vond van de complexe getallen door de punten van een plat vlak, waarin een coördinatenstelsel gedefiniëerd is. Dit sluit onmiddellijk aan bij de moderne opvattingwijze, die wel het eerst door *Hamilton* uitgewerkt is, en waarbij het complexe getal als een paar reële getallen beschouwd wordt.

De beteekenis van de invoering van de negatieve en complexe getallen ligt daarin, dat nu de aftrekking en de worteltrekking onbeperkt mogelijk wordt, ja zelfs, dat het nieuwe getallenrijk algebräisch afgesloten is. Alleen de deeling door nul moet worden buitengesloten, daar deze bewerking zinledig is.

Hoe nu, door van het natuurlijke getal uit te gaan, de gebroken, de negatieve, de onmeetbare en ook de complexe getallen streng opgebouwd kunnen worden, kan ik hier niet verder toelichten.

Onjuist is echter de meening van sommige niet-mathematici, dat verschillende groote deelen van de wiskunde zouden berusten op enkele niet verder definiëerbare ficties, zooals $\sqrt{-1}$. Een dergelijke beschouwingswijze vindt men b.v. bij *Vaihinger* in zijn „Philosophie des Als Ob”, die hierin zelfs een diepzinnig principe zag. Dat deze meening kon post vatten, lag wel aan de onjuiste methode van vroegere mathematici, waarbij, wanneer b.v. een vergelijking als

$$x^2 + 1 = 0$$

geen oplossing in reeds bekende getallen had, eenvoudig een symbool als oplossing ingevoerd werd; in dit geval *i*. Ze eischten daarna, dat bij het formeele rekenen met deze symbolen en de oude getallen, de rekenregels van kracht bleven. *Hankel* noemde dit: „het principe van de permanentie der formeele wetten”. De moeilijkheid is, dat men zoo misschien te veel eischt en bij het rekenen met de nieuwe grootheden op tegenspraken stuit. Inderdaad kunnen bij de uitbreiding van het getalsysteem zeer wel rekenregels verloren gaan. Zoo volgt in het gebied der positieve getallen uit $a < b$ zeker $ac < bc$. Dit geldt echter niet meer, zoodra negatieve getallen toegelaten worden.

Wanneer de tijdruimte het toeliet, zou ik met U verre reizen in het rijk der getallen kunnen ondernemen. Ik zou U kunnen laten zien, hoe de weg, die naar de complexe getallen leidt, verder voert naar de quaternionen van *Hamilton*, maar ook naar de vectoren en vandaar naar nog algemeener getallenschema's, de matrices. Ik zou U kunnen laten zien, hoe *Kummer*, bij zijn poging om het bekende probleem van *Fermat* op te lossen, gevoerd werd tot een geheel nieuw soort getallen: de z.g. idealen. Ook zou ik U kunnen voeren naar de uitgestrekte en vruchtbare vlakten van de moderne algebra, waar het getal een nog geheel ander abstract karakter aanneemt.

Tenslotte zou ik U kunnen terugvoeren naar het bekende gebied der complexe getallen. Hoe we daar hebben leeren onderscheiden tusschen algebraïsche en transcendente getallen. Een onderscheiding, die het mede mogelijk maakte, het eeuwenoude probleem van de kwadratuur van de cirkel tot een oplossing te brengen. Hoe, tenslotte, *Mahler* het uitgestrekte rijk der transcendente getallen in provinciën wist in te deelen.

Ik hoop, dat het me gelukt is U eenigszins duidelijk te maken, hoe het getalbegrip zich op een natuurlijke wijze ontwikkelde. Zoo ontstond een getallensysteem, dat niet alleen gebruikt kan worden bij het meten van grootheden, maar dat bovendien de belangrijke eigenschap bezit, dat erin alle elementaire bewerkingen onbeperkt uitvoerbaar zijn, met als eenige uitzondering de deeling door nul.

Het was daartoe noodig om telkens nieuwe abstracties in te voeren. In wezen zijn dit vereenvoudigingen, want hierdoor worden hinderlijke uitzonderingen uit de weg geruimd, terwijl het daarbij vaak voorkomt, dat verschillende vroeger gevonden resultaten nu verschijnen als speciale gevallen van één algemeene waarheid. Juist de invoering van dergelijke abstracte begrippen is wezenlijk voor de mathematische methode; ze hebben de wiskunde behoed voor het lot van zoo menige wetenschap om in speciale vakken uiteen te vallen. Daardoor ook kon de wiskunde toegepast worden op zoo geheel verschillende gebieden. Toch is juist de invoering van deze abstracties er de oorzaak van, dat telkens weer tot de wiskundigen het verwijt gericht wordt, dat ze zich met wat men noemt onwezenlijke dingen bezig houden. De satyre „A voyage to Laputa” van *Swift* is daarvan een klassiek voorbeeld.

Sinds duizenden van jaren toont onze cultuur een langzaam voortschrijden aan van de bijzondere begrippen naar de algemeene, d.w.z. naar de abstracte.

Ook vraagt de leek vaak, wat dan wel het „nut” van het getalonderzoek is. Het antwoord zal er dan geheel van moeten afhangen, wat men nu precies onder nut verstaat. Direct materiëel voordeel heeft men er niet van te verwachten. Wanneer thans echter, om een voorbeeld te noemen, een technicus in een oogwenk vrij ingewikkelde becijferingen met een zoo eenvoudig apparaat als de rekenliniaal uitvoert, dan is dat slechts mogelijk, dank zij de studie, die vroegere mathematici van de getallen maakten.

Voor onze cultuur ligt de beteekenis van het getalonderzoek echter veel dieper. Het getal beheerscht voor een groot deel ons leven, veel meer dan wij wel oppervlakkig denken. We moeten daarom tot kennis van dit fundamenteele begrip geraken.

Men kan zich soms niet aan de indruk onttrekken, dat de ouden dit beter dan wij beseften. Hieraan heeft het moderne leven, dat door zijn veelheid van indrukken ons afleidt van de waarlijk fundamenteele problemen ongetwijfeld mede schuld.

Moge daarom het wiskunde-onderwijs in al zijn geledingen het besef van de centrale beteekenis van het getalbegrip voor onze cultuur weer levendig maken.

HOOFDCOMMISSIE VOOR DE NORMALISATIE IN NEDERLAND.

De Hoofdc commissie deelt mede, dat het ontwerp-normaalblad

V 1267, Symbolen voor de wiskunde

ter critiek is afgekondigd. Verzocht wordt critiek in te zenden vóór 1 Augustus 1940 bij het Centraal Normalisatie Bureau, Willem Witsenplein 6, 's-Gravenhage, of vóór 1 Juli 1940 bij het Secretariaat van de Normalisatieraad, Bragaweg 38, Bandoeng, Ned.-Indië.

Dit blad is ontworpen door commissie Bo, voor de normalisatie van *algemeene aanwijzingen voor technische geschriften*, waarin zitting hebben: prof. dr. M. de Haas, voorzitter; J. van Andel, aangewezen door den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen; ir. Wouter Cool, benoemd in overleg met de Normalisatieraad in Ned.-Indië; prof. dr. W. J. D. van Dijk, ir. L. Th. H. Hesselfelt, aangewezen door den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen; dr. ir. J. J. Koch; ir. J. A. Ladage, aangewezen door den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen; prof. ir. J. Muysken; Kol. der Genie P. W. Scharroo, aangewezen door den Minister van Defensie; dr. P. Schoenmaker; ir. G. J. van de Well, Secr.: Centraal Normalisatie-Bureau (Dir. ir. J. A. Teyinck).

Dit blad is aanvaard door groepscommissie B, voor de normalisatie van *aanwijzingen voor technische geschriften, teekeningen, modellen en onderdeelen van constructies*, waarin zitting hebben: ir. J. D. Tours, voorzitter; prof. ir. J. A. Bakker; ir. A. H. O. W. de Bats; prof. dr. M. de Haas; ir. G. Hofstede; prof. ir. E. R. Hondelink; Maj. der Genie Ph. J. H. Marcella, aangewezen door den Minister van Defensie; R. P. van Royen; prof. E. Vossnack; prof. ir. F. Westendorp. Secr.: Centraal Normalisatie-Bureau (Dir. ir. J. A. Teyinck).

Het blad *V 1267, Symbolen voor de Wiskunde*, komt tegemoet aan de gebleken behoefte aan normen voor de notatie van de meest

decimaalteeken	.
plus	+
min	-
plus of min	±
vermenigvuldigteeke ¹⁾ Voorbeelden: 2×2 , $a \times b$, $a \cdot b$	$\times$ of
deelteeken Voorbeelden $\frac{a}{b}$, a/b , $a : b$	- of / of :
vierkantswortel uit	$\sqrt{\quad}$
briggiaansche logarithme	log
natuurlijke logarithme	ln
logarithme voor grondtal a	$^a \log$
som van	Σ
tot en met Voorbeeld: $a+b+c+d+e=\dots+e$	$\dots$
gelijk aan	$=$
ongeveer gelijk aan	$\approx$
identiek gelijk aan	$\equiv$
niet gelijk aan	$\neq$
niet identiek gelijk aan	$\neq$
evenredig met	$\propto$
ongeveer	$\simeq$
kleiner dan	$<$
groter dan	$>$
kleiner dan of gelijk aan	$\leq$
groter dan of gelijk aan	$\geq$
gelijkvormig aan	$\sim$
gelijk en gelijkvormig (congruent) met	$\cong$
komt overeen met Voorbeeld: $1 \text{ cm} \triangleq 1 \text{ kg}$	$\triangleq$
nadert tot	$\rightarrow$
limiet	lim
oneindig	∞
faculteit Voorbeeld: $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n = n!$	!
binomiaalquotient Voorbeeld $\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ of $\binom{n}{p}$	$\binom{\quad}{\quad}$
gemiddelde waarde van a	$\bar{a}$
modulus Voorbeeld: modulus van a : $ a $	$ \quad $

$\sqrt{-1}$	i of j ²⁾
e^x	exp x
tangens	tg
cotangens	cotg
sinus	sin
cosinus	cos
secans	sec
cosecans	cosec
boog sinus	arcsin
sinus hyperbolicus ³⁾	sinh
boog sinus hyperbolicus ³⁾	arsinh
hoek	$\angle$
loodrecht op	$\perp$
evenwijdig aan	$\parallel$
evenwijdig en gelijk gericht	$\parallel$
evenwijdig en tegengesteld gericht	$\nparallel$
evenwijdig en gelijk aan	$\parallel$
driehoek	$\triangle$
boog Voorbeeld: boog AB $\widehat{AB}$	$\frown$
projectief met	$\sim$
perspectief met	$\wedge$
determinant	$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$
aangroeiing van	Δ
totale differentiaal van	d
partiële differentiaal van	∂
variatie van	δ
aangroeiing, niet-totale differentiaal van	d'
afgeleide van $f(x)$	$f'(x)$
van de 1e, 2e, 3e, 4e orde enz.	$f''(x)$ $f'''(x)$ $f^{(4)}(x)$ enz.
$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}$	$\nabla \varphi$
$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$	$\Delta \varphi$
integraal van	$\int$
bepaalde integraal	$\int_a^b$
kringintegraal	$\oint$

¹⁾ Tusschen letters onderling en tusschen een cijfer en een letter kan het vermenigvuldigteeke vervallen

²⁾ Het symbool i alleen gebruiken voor bepaalde vakgebieden.

³⁾ De symbolen voor de overige cyclometrische en hyperbolische functies worden op overeenkomstige wijze gevormd

VECTOREN

1. Indien vectoren door begin- en eindletters worden aangegeven, worden deze letters in druk zoowel als in handschrift verbonden door het teeken $\wedge$. Voorbeeld: vector AB: $\overline{AB}$

2. Indien vectoren door een enkele letter worden aangeduid, geschiedt dit:

in druk door vette, staande letters Voorbeeld: vector w : $\mathbf{w}$
in handschrift door het teeken $\rightarrow$ boven de letter Voorbeeld vector a : $\vec{a}$

GETALLEN

Getallen, bestaande uit meer dan 3 cijfers voor of achter het decimaalteeken, worden door tusschenruimten (spatie) verdeeld in groepen van 3 cijfers, te rekenen van het decimaalteeken af.

Voorbeelden: 42 690 000 en 0,001 118 0.

Hog
ste
aantal
cijfers
in de groepen

SYMBOLEN VOOR DE WISKUNDE

V 1267

I.I.D.: 003

NADruk ALLEEN MET TOESTEMMING VAN DE HOOFDCOMMISSIE VOOR DE NORMALISATIE IN NEDERLAND

voorkomende wiskundige begrippen, o.a. bij het Hooger en Middelbaar Onderwijs en door schrijvers en drukkers van boeken, tijdschriften enz. Getracht is zooveel mogelijk aan te sluiten bij de ook in andere landen gebruikte dan wel genormaliseerde notaties.

Tevens zijn regels gegeven voor de notatie van vectoren en lange getallen, terwijl de commissie uitsluitend de komma als decimaalteeken heeft aanvaard. Overwogen is, om naast het symbool voor de vierkantswortel, ook een symbool voor de z.g. hogere machtswortels op te nemen. Na overleg met de Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde enz. besloot de commissie laatstgenoemd symbool niet op te nemen. Zij geeft er de voorkeur aan, dat de betrokken grootheden als machten met gebroken exponent worden geschreven.

Bij de drie notaties voor het deelteeken moge vermeld worden, dat de commissie in het algemeen de voorkeur geeft aan de horizontale streep; bij schrijfmachineschrift kan de schuine deelstreep echter niet gemist worden; de dubbele punt wordt meer in het bijzonder gebruikt voor het aangeven van verhoudingen.

UIT HET VERSLAG VAN DE STAATSCOMMISSIE 1939.

De subcommissie voor de *wiskunde* kan, voor zoover de examens der A-candidaten betreft, melding maken van een verbetering ten opzichte van de — ook wel zeer lage — cijfers, in 1938 door deze kandidaten behaald. Het gemiddelde cijfer voor stelskunde bedroeg dit jaar 5,33, tegen 5,16 in 1938 en 5,44 in 1937; dat voor meetkunde 5,38 tegen 5,04 in 1938 en 5,34 in 1937. Toch waren er ook dit jaar nog weer veel te veel kandidaten, die een slecht examen deden: voor stelskunde bleven 45 van de 243, voor meetkunde 39 van de 241 A-candidaten, die in dit onderdeel examen aflegden, beneden het cijfer 4.

Voor de B's zijn de resultaten belangrijk minder: de gemiddelden voor stelskunde, voor meetkunde en voor trigonometrie en analytische meetkunde bedroegen slechts 5,16, 5,20 en 5,00; de beide laatste cijfers zijn lager dan in 1937 en 1938.

Al is dus in verschillende opzichten bij de A-candidaten verbetering te bespeuren, op velen van hen blijven de in vorige verslagen gemaakte opmerkingen van toepassing. Vandaar, dat dit gedeelte van het verslag kort kan zijn en dat de sub-commissie zich bepalen zal tot enkele opmerkingen. Sterk kwam tot uiting de slordigheid, die aan de verwarring van verwante begrippen ten grondslag ligt: de woorden: „wortels” en „nulpunten” werden door elkaar gebruikt; evenzoo „functies” en „vergelijkingen”, „onbekenden” en „veranderlijken”. Het geven van goede definitiën leverde weer in menig geval groote moeilijkheid op; de reststelling werd zonder bezwaar toegepast op gevallen, waarbij het deeltal $\sqrt{x^2-1}$ was; voor $\sqrt{x-2} \times \sqrt{1-x}$ werd rustig $\sqrt{x-2} (1-x)$ geschreven, zonder dat onderzocht werd, wanneer dit wel en wanneer niet geoorloofd is. Vele examinandi wisten niet, dat de uitspraken over de wortels van een vierkantsvergelijking, die uit beschouwing van den discriminant volgen, alleen gelden, als de coëfficiënten reëel zijn. Met het benaderen van den vierkantswortel uit een getal hadden de meesten moeite;

zelfs zeer eenvoudig ingekleede vergelijkingen bleken voor niet weinige kandidaten bezwaren te bevatten, hetgeen zich veelal wreekt in gevallen, waarin een meetkundige opgave door algebraïsche analyse moet worden opgelost. Zelfs zij, die de schrijfwijze $f(x)$ kenden, keken vreemd op, als hun gevraagd werd, wat

$f(-x)$ is, als $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}$ is.

Bij de meetkunde-examens is het weer opgevallen, hoe weinig vast de grondbegrippen door vele kandidaten beheerscht worden. Het bewijs, dat twee driehoeken gelijkvormig zijn, als zij de hoeken gelijk hebben, de definities van kruisende rechten, van zwaartelijnen en hoogtelijnen van een viervlak, de constructie van den afstand van twee kruisende rechten gaven weer groote moeilijkheden.

Voor de B-kandidaten gelden de klachten, in vorige verslagen geuit, nog ten volle, al zijn ook hier enkele goede examens te vermelden.

Ten slotte dient er nog tegen te worden gewaarschuwd om uit het feit, dat bij wijze van proef dit jaar en ook in 1940 bij het schriftelijk werk geen planimetrievraagstuk wordt opgegeven, af te leiden, dat de kandidaten de studie van dit deel der meetkunde zouden mogen verwaarloozen. Integendeel zal, gelijk het bij Koninklijk besluit vastgestelde examenprogramma voorschrijft, het mondeling examen een onderzoek naar de planimetrische kennis blijven omvatten.

De subcommissie voor de *natuurkunde* heeft, in overeenstemming met de ervaringen, waarvan in het vorige jaar uitvoerig verslag is gedaan, ook nu bij een groot aantal der kandidaten gebrek aan natuurkundig inzicht moeten vaststellen, vooral op het gebied van de electriciteitsleer. Het verband tusschen veldsterkte en potentiaal werd niet voldoende begrepen; hoe men electronen groote snelheden kan geven, alsmede het belang daarvan werd niet goed ingezien. Bij menigeen haperde het aan een juist inzicht in het begrip electro-motorische kracht; doordat verscheiden kandidaten het beginsel, waarop een gewone voltmeter berust, niet duidelijk was, werd de schakeling daarvan op de meest fantastische wijze uitgevoerd. Hoe normaalelementen in plaats van voltmeters gebruikt kunnen worden voor het bepalen van stroomsterkten, bleek

in den regel onbekend; weinig candidaten begrepen, hoe uit wisselstroomen pulseerende gelijkstroomen kunnen worden verkregen. Het trof de subcommissie, dat enkele examinandi niet voldoende van de werkingwijze van een Ruhmkorff op de hoogte waren en niet wisten, waarvoor dit apparaat vooral dient. Om een beter begrip te verkrijgen inzake de eenheden, verdient het aanbeveling zich bij tijd en wijle af te vragen, van welke dimensie deze eigenlijk zijn.

De functie van het objectief van een kijker werd niet altijd voldoende voorzien, althans niet duidelijk medegedeeld; het kostte sommigen candidaten veel moeite de wet van Snellius kort en klaar weer te geven, ontdaan van theoretische toelichting; nog bezwaarlijker viel het hun, aan te geven, hoe men proefondervindelijk aannemelijk kan maken, dat licht een transversale trilling is, zelfs als zij vrije beschikking hadden over nicols, zwart-glazen spiegels en calcië-rhomboëders. Wat men moet verstaan onder het relatief dispergeerend vermogen, de subcommissie heeft het helaas niet kunnen vernemen; zelfs de term homocentrische bundel was aan eenige candidaten niet bekend, laat staan het verband waarin deze term steeds wordt gebruikt. Candidaten ten slotte, die bij dit examen niet kunnen uitleggen, waarom -273° als laagste temperatuur wordt aangenomen, hoe Mayer het mechanisch warmte-aequivalent heeft kunnen bepalen, op welk beginsel een moderne koelinrichting, werkend b.v. met ammoniak, berust, en waarom de koeltechniek zoo gaarne met ammoniak of zwaveldioxyd werkt in plaats van met lucht, en die op andere soortgelijke vragen geheel onbevredigende antwoorden geven, bewijzen daardoor, nog niet rijp te zijn voor universitaire studie.

KORRELS.

XLVII.

In mijn aantekeningen vind ik het volgende vraagstukje — ik weet niet meer of het andermans goed of eigen maaksel is:

p en q zijn wortels van de vergelijking

$$x^2 + px + q = 0 \dots\dots\dots (V)$$

Bepaal p en q.

EERSTE OPLOSSING. — Volgens de eigenschappen der wortels is

$$\begin{cases} p + q = -p \\ pq = q \end{cases} \quad \text{of} \quad (S_1) \begin{cases} q = -2p \dots\dots (1) \\ q(p - 1) = 0 \dots\dots (2) \end{cases}$$

Dit stelsel valt uiteen in:

$$\begin{cases} q = -2p \\ q = 0. \end{cases}$$

Waaruit:

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0. \end{cases}$$

V) wordt dan

$$x^2 = 0,$$

met de wortels 0 en 0.

$$\begin{cases} q = -2p \\ p - 1 = 0. \end{cases}$$

Waaruit:

$$\begin{cases} p = 1 \\ q = -2. \end{cases}$$

(V) wordt dan

$$x^2 + x - 2,$$

met de wortels 1 en -2.

TWEEDE OPLOSSING. — We drukken uit, dat *p* en *q* wortels zijn van (V):

$$\begin{cases} p^2 + p^2 + q = 0 \\ q^2 + pq + q = 0 \end{cases} \quad \text{of} \quad (S_2) \begin{cases} q + 2p^2 = 0 \dots\dots (3) \\ q(p + q + 1) = 0 \dots\dots (4) \end{cases}$$

Dit stelsel valt uiteen in:

$$\begin{cases} q + 2p^2 = 0 \\ q = 0. \end{cases}$$

Waaruit:

$$\begin{cases} p = 0 \\ q = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} q + 2p^2 = 0 \\ p + q + 1 = 0 \end{cases}$$

Aftrekking geeft

$$2p^2 - p - 1 = 0;$$

waaruit:

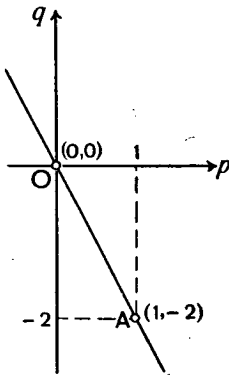
$$\begin{cases} p = 1 \\ q = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} p = -\frac{1}{2} \\ q = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

We vinden dus een derde oplossing. Voldoet die aan de vraag? Voor $p = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$ wordt (V):

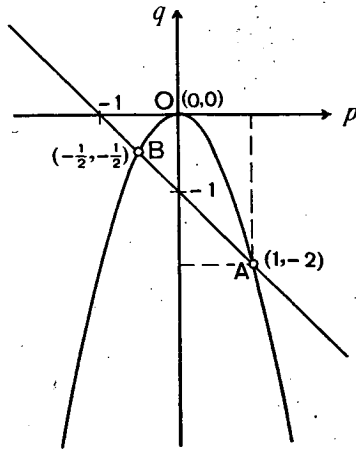
$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0 \text{ of } 2x^2 - x - 1 = 0.$$

De wortels zijn $-\frac{1}{2}$ en 1 : p of q is dus één wortel; p en q zijn niet de wortels.

Het loont de moeite beide oplossingen grafisch toe te lichten.



Vergelijking (1) wordt afgebeeld door een rechte door den oorsprong; vergelijking (2), door het samenstel van de p -as en een rechte evenwijdig met de q -as. De oplossingen van het stelsel (S_1) zijn de coördinaten van de snijpunten O en A van de eerste rechte met de andere twee.



Vergelijking (3) wordt afgebeeld door een parabool; vergelijking (4) door het samenstel van de p -as en de rechte, die stukken -1 van beide assen afsnijdt. De oplossingen van het stelsel (S_2) zijn de coördinaten van de drie punten O, A en B, die de twee rechten met de parabool gemeen hebben.

Dit op zich zelf onbeduidende vraagstukje doet dus de vraag rijzen:

Komt het op 't zelfde neer, als men wil uitdrukken, dat α en β wortels zijn van de vergelijking

$$ax^2 + bx + c = 0, \dots \dots \dots (W)$$

te schrijven:

$$\text{I} \begin{cases} a\alpha^2 + b\alpha + c = 0 & (5) \\ a\beta^2 + b\beta + c = 0 & (6) \end{cases} \quad \text{of} \quad \text{II} \begin{cases} \alpha + \beta = -\frac{b}{a} & (7) \\ \alpha\beta = \frac{c}{a} & (8) \end{cases}$$

A. De betrekkingen (5), (6) drukken uit dat α en β aan (W) voldoen dus, als $\alpha \neq \beta$ is, dat α en β de wortels zijn van (W).

In dat geval trouwens kan men (II) uit (I) afleiden. Door aftrekking volgt immers uit (5) en (6):

$$a(\alpha^2 - \beta^2) + b(\alpha - \beta) = 0, \quad (\alpha - \beta)[a(\alpha + \beta) + b] = 0,$$

dus, als $\alpha \neq \beta$:

$$a(\alpha + \beta) + b = 0, \quad \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad (7)$$

Door optelling volgt uit (5) en (6):

$$a(\alpha^2 + \beta^2) + b(\alpha + \beta) + 2c = 0,$$

of, gelet op (7):

$$a\left(\frac{b^2}{a^2} - 2\alpha\beta\right) - \frac{b^2}{a} + 2c = 0;$$

waaruit

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \quad (8)$$

Als echter $\alpha = \beta$ is, dan mag men uit (5) en (6) — die nu samen vallen — niet besluiten dat (W) geen andere wortel heeft dan α en kan men ook niet (II) uit (I) afleiden.

B. Als α en β aan (7) en (8) voldoen, dan kan (W) achter-eenvolgens in dezen vorm gebracht worden:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0, \quad x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0,$$

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0,$$

en dit bewijst, dat α en β wortels zijn van (W) en er ook geen andere wortels zijn. Dit geldt zoowel voor 't geval $\alpha = \beta$, als voor 't geval $\alpha \neq \beta$.

Bovendien kan men (I) uit (II) afleiden: men lost eerst β , dan α uit (7) op en substitueert ze daarna in (8).

SAMENVATTING. — *Het stelsel (I) drukt uit, dat α en β wortels zijn van (W), maar levert geen waarborg, in het geval $\alpha = \beta$, dat er geen andere wortel is.*

Het stelsel (II) drukt uit, dat α en β , en zij alleen, wortels zijn van (W).

Dr. Paul De Vaere.

XLVIII.

In Deel II. van de *Nieuwe Schoolalgebra* van WIJDENES en BETH vind ik op blz. 112 van de 9de druk het volgende vraagstukje, blijkens de aanwijzing gesteld bij het eindexamen van een gymnasium:

Voor welke waarden van a is het verschil van de kwadraten der wortels van de vergelijking

$$4x^2 - (12a - 8)x + 5a^2 + 4a - 12 = 0 \quad (V)$$

een minimum en hoe groot is dat?

Reeds bij een eerste lezing springt het in 't oog, dat de vraag onduidelijk geformuleerd is. Wat is immers het verschil van twee, niet in bepaalde volgorde genoemde getallen, u en v ? Is het $u - v$ of $v - u$? Deze twee functies zijn tegengesteld zoodat, als de eene een maximum (minimum) vertoont, de andere een minimum (maximum) vertoont. En volgens welk voorschrift zal men aan de twee wortels van een vierkantsvergelijking een bepaalde volgorde toewijzen? Wat is x_1 , wat is x_2 ?

Ik kan mij best de verlegenheid voorstellen van een candidaat, die over dit alles begon na te denken. Doch wellicht heeft hij niet meer gewetensbezwaren gehad dan de steller van de vraag (maar goed ook!) en is hij dadelijk aan 't rekenen gegaan, met dit resultaat, dat hij een hoger cijfer kreeg dan een medecandidaat, die eerst probeerde een helder inzicht te krijgen in de vraag.

Wat kan deze laatste doen? Eerst de wortels van (V) berekenen. Ze zijn rationaal¹⁾ — dit geeft al een opluchting:

$$\frac{5a-6}{2}, \quad \frac{a+2}{2}.$$

¹⁾ Daarom verdient het aanbeveling met de wortels zelf, liever dan met som en product te werken.

Nu kan hij zeggen: voor elke waarde van a , stel ik:

$$x_1 = \frac{5a-6}{2}, \quad x_2 = \frac{a+2}{2}$$

en beschouw als verschil van de kwadraten der wortels:

$$v = x_1^2 - x_2^2 = 6a^2 - 16a + 8.$$

Dan is v een kwadratische functie van a , waarvan de eerste coëfficiënt positief is, en die dus een minimum vertoont voor $a = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$; dat minimum is $-\frac{8}{3} = -2\frac{2}{3}$. (Zie de parabool in fig. 1). Onze candidaat heeft goed geraden! Had hij echter

$$x_1 = \frac{a+2}{2}, \quad x_2 = \frac{5a-6}{2}$$

gesteld, dan had hij gevonden

$$x_1^2 - x_2^2 = -6a^2 + 16a - 8$$

en kunnen antwoorden: het verschil van de kwadraten der wortels vertoont *geen* minimum. Zou de examinerator genoeg hebben genomen met deze m.i. onaanvechtbare oplossing?

Maar misschien denkt onze candidaat: x_1 zal wel de grootste, x_2 de kleinste wortel moeten zijn. Hoe zit de zaak dan?

$$\frac{5a-6}{2} > \frac{a+2}{2} \text{ als } 5a - a > 2 + 6 \text{ of } a > 2.$$

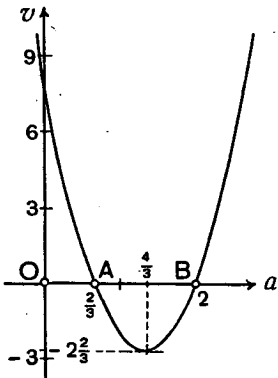


Fig. 1.

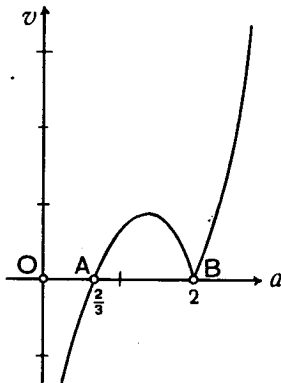


Fig. 2.

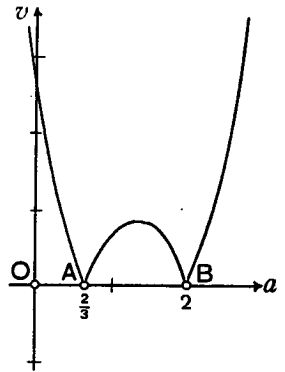


Fig. 3.

N.B. In deze 3 figuren is de lengte-eenheid op de a -as 3-maal zoo groot genomen als die op de v -as.

Bijgevolg:

voor $a \geq 2$ is

$$x_1 = \frac{5a-6}{2}, \quad x_2 = \frac{a+2}{2},$$

$$v = x_1^2 - x_2^2 = 6a^2 - 16a + 8;$$

voor $a \leq 2$ is

$$x_1 = \frac{a+2}{2}, \quad x_2 = \frac{5a-6}{2},$$

$$v = x_1^2 - x_2^2 = -6a^2 + 16a - 8.$$

De grafiek van v bekomt men nu door in fig. 1 het deel van de parabool links van het punt B te spiegelen t.o. van de a -as; dan ontstaat fig. 2 en deze toont duidelijk aan dat v een minimum bereikt voor $a = 2$; dat minimum is 0.

Maar waarom zou onze candidaat ook niet kunnen vermoeden, dat de bedoeling van den examinerator was steeds het grootste *kwadraat* als aftrektal en het kleinste *kwadraat* als aftrekker te beschouwen, m.a.w. het verschil steeds positief (of nul) te nemen? Niemand kan hem, bij gebrek aan nadere aanwijzing, deze opvatting kwalijk nemen. Wat dan? Nu is

$$v = \left| \left(\frac{5a-6}{2} \right)^2 - \left(\frac{a+2}{2} \right)^2 \right| = 6 \left| \left(a - \frac{2}{3} \right) (a-2) \right|.$$

Bijgevolg:

voor $a < \frac{2}{3}$ of $a > 2$ is

$$y = 6 \left(a - \frac{2}{3} \right) (a-2)$$

$$= 6a^2 - 16a + 8;$$

voor $\frac{2}{3} < a < 2$ is

$$v = -6 \left(a - \frac{2}{3} \right) (a-2)$$

$$= -6a^2 + 16a - 8.$$

De grafiek van v bekomt men nu door in fig. 1 de boog AB van de parabool te spiegelen t.o. van de a -as; dan ontstaat fig. 3, en deze leert ons, dat v tweemaal het minimum 0 bereikt, nl. voor $a = \frac{2}{3}$ en $a = 2$.

Moest ik besluiten, dan zou ik een woord van medelijden willen sturen aan de kandidaten, maar wat aan den steller van de vraag? In de *Nieuwe Schoolalgebra* gaat ze van geen jaartal vergezeld; ik hoop dat ze stamt uit de tijd, waarin Algebra niets dan reken-techniek was . . . en dat die tijd voorbij is.

Dr. Paul De Vaere.

XLIX.

ACTIE = REACTIE.

Plaatst men een zwaar lichaam L (gewicht G) op een elastische onderlaag O van voldoende sterkte, dan zal deze onderlaag O doorbuigen, tot een zekere evenwichtsstand is bereikt. Hierbij

treden twee nieuwe krachten K_1 (van L op O) en K_2 (van O op L) op, die veranderen (en wel, bij voldoende demping, eerst toe-, dan afnemen), zoolang de doorbuiging duurt. Is de evenwichtsstand ingetreden, dan zijn K_1 en K_2 beiden gelijk aan G geworden.

Voortdurend echter zijn de krachten K_1 en K_2 gelijk en tegengesteld aan elkaar. Het wetenschappelijk spraakgebruik duidt K_1 en K_2 aan als *actie* en *reactie* en zegt: de actie en de reactie zijn gelijk en tegengesteld. Op deze mechanische stelling berust de mogelijkheid, op verschillende lichamen werkende krachten, dus daardoor tevens massa's, te meten.

Nu wijken ten deze verschillende leerboeken der natuurkunde van het algemeen aanvaard wetenschappelijk spraakgebruik af; ik citeer een tweetal recente.

„Ook zal als we het gewicht op de tafel zetten, deze zich zolang vervormen tot de daarbij ontstane veerkracht weer in staat is de zwaarte van het gewicht op te heffen. De tafel oefent nu een tegenkracht uit, die wel met de naam van *reactie* wordt bestempeld. Als we de werking van de zwaarte van het gewicht de *actie* noemen kunnen we het zo uitdrukken: Als de rusttoestand is ingetreden is *actie gelijk aan reactie*.”

„Bij den voetbal belet de buitenbal de lucht in den binnenbal om zich verder uit te zetten en bij het schip is het weer de spanning in het koord, die de kracht van den wind tegenwerkt. Daarom blijven in onze voorbeelden de lichamen op hun plaats. We zeggen, dat ze in *evenwicht zijn*. De kracht, die op ieder der lichamen werkt, heeft het optreden van een andere kracht tengevolge. Die andere kracht heet daarom *reactiekracht*. In de voorbeelden zijn de spierkracht, de veerkracht, de spanning reactiekrachten.

Richten we het echter zo in, dat die reactiekracht niet kan ontstaan, dan zal het lichaam, dat oorspronkelijk in rust is en waarop nu maar één kracht gaat werken, in beweging komen. . .

In den evenwichtstoestand is dus de reactiekracht even groot, maar tegengesteld gericht als de kracht, waarvan zij het gevolg is. We drukken dit kort uit door den regel: *actie = reactie*.”

Tegen deze handelwijze, die neerkomt op het wijzigen van de definitie van de termen *actie* en *reactie*, kan men natuurlijk geen principiëel bezwaar aanvoeren. Maar ik zie wel een tweetal praktische bezwaren.

Ten eerste is het over het algemeen zeer ongewenscht, bij het onderwijs zonder noodzaak van het wetenschappelijk spraakgebruik af te wijken (en zulk een noodzaak kan ik hier niet zien), daar hiervan nooit anders dan begripsverwarring het gevolg kan zijn, vooral bij voortgezette studie; het geldt hier nog wel een in zekeren zin zeer subtiële kwestie, waarbij dus iedere gelegenheid voor het optreden van misverstand dient te worden vermeden.

Ten tweede echter wordt de zoo fundamenteele wetmatigheid, volgens welke de krachten K_1 en K_2 niet alleen in den evenwichtstoestand, maar ook gedurende een beweging voortdurend gelijk en tegengesteld zijn, bij de hier gesignaleerde wijze van behandelen verdoezeld.

Men merke op, dat de veelvuldig te vernemen uitspraak: „actië en reactie heffen elkaar op”, resp. „houden elkaar in evenwicht”, bij aanvaarding van het wetenschappelijk spraakgebruik geen stand houdt.

E. W. Beth.

L.

HET LIMIETBEGRIIP OP DE MIDDELBARE SCHOOL.

In het volgende worden een paar opmerkingen gemaakt naar aanleiding van het artikel van Dr. Gerretsen over „De differentiaalrekening en het limietbegrip op de middelbare school” ¹⁾, niet om in debat te treden, maar om op een enkel punt den nadruk te leggen.

Zeër terecht vestigt Dr. Gerretsen de aandacht op het onderscheid tusschen limieten van varianten en limietwaarden van functies. Dit onderscheid wordt in de leerboeken zelden behoorlijk belicht. Men kan de eigenschappen der limietwaarden van functies op overeenkomstige manieren bewijzen als de eigenschappen der limieten van varianten, men kan ze ook uit deze laatste afleiden. Hoe men ook te werk gaat, het onderwerp is, naar mijne ervaring, buitengewoon moeilijk voor de leerlingen. Ik zou er dan ook wel iets voor voelen, de definitie van limietwaarden van functies weg te laten, en alle redeneeringen der infinitesimaalrekening op limieten van varianten te baseeren, wanneer niet de limietwaarden van functies zelfstandig in examenopgaven optraden.

¹⁾ Euclides XV, blz. 137.

De beste manier om de leerlingen te doen doordringen in de definitie der limieten van varianten lijkt mij het behandelen van vragen in den trant der opgaven 13—20, bldz. 39, van Wijdenes' Algebraïsche Vraagstukken III; men vergete niet, de eigenschappen der absolute waarden grondig te herhalen (zie aldaar, no. 5—12).

J. H. Sch o g t.

LI.

NAAR AANLEIDING VAN KORREL XLV.

Men heeft er mij vriendschappelijk kritisch op gewezen, dat ik in mijn Korrel „Over de aanduiding van halve projectievlakken” (deze jaargang, afl. 4; p. 219) een leelijken lapsus heb begaan door te beweren, dat er tusschen de twee projectievlakken van de methode der orthogonale parallelprojectie affiniteit bestaat. De lezer zal begrepen hebben, dat ik bij het schrijven het oog had op de verwantschap tusschen de twee projecties van een *vlakke* figuur, maar het blijft daarom evengoed een tekortkoming van me, dat ik dat niet gezegd heb.

E. J. D.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

- C. J. ALDERS, *Algebra voor M.O. en V.H.O.*, deel I —
 2de druk gec. f 1,50
 Beschrijvende meetkunde voor de H.B.S. gec. f 1,20
- A. J. LIEFKENS en B. H. GERRITSMA, *Vlakke meetkunde*
 — Onze Uitgebreide Technische Serie — f 2,25
- Prof. Dr. J. G. RUTGERS, *Meetkunde der Kegelsneden*, **2de druk**
 geb. f 5,—
- P. WIJDENES, *Log. en rentetafels B*, **11de druk** gec. f 0,75
 „ *Log. en rentetafels C*, **3de druk** f 0,40
 „ *Beknopte Algebra II*, **7de druk** gec. f 1,70
 „ *Klein leerboek der Algebra II*, **2de druk** f 1,50
 „ *Beknopte Meetkunde II*, **9de druk** gec. f 1,70
 „ en Dr. D. DE LANGE, *Vlakke Meetkunde II*,
 10de druk geb. f 2,25
 „ en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe Schoolalgebra I*,
 11de druk geb. f 2,25
- Dr. B. P. HAALMEYER, *Leerboek der Vlakke Meetkunde II*,
 3de druk geb. f 2,50
- Dr. A. VAN DOP en Dr. P. G. VAN DE VLIET, *Opgaven van*
 eindexamens der Hogere Burgerscholen B voor de vak-
 ken Wiskunde, Natuurkunde, Mechanica en Scheikunde.
 Examenopgaven Nederland van 1921—1939.
 „ Nederlands Indië 1937—1939.
 Nog 28 bladzijden oudere opgaven over Mechanica, Na-
 tuurkunde en Scheikunde „welke thans nog voor de
 voorbereiding van het eindexamen van waarde geacht
 kunnen worden”, 167 blz. f 1,85
- Dr. A. D. NATHANS en Dr. H. LINDEMAN, *Leerboek der Na-*
 tuurkunde voor het middelbaar en voorbereidend hoger
 onderwijs. Deel III 223 blz. 192 fig. f 2,90, . . . geb. f 3,25

COMPOSITIO MATHEMATICA. Vol. 7, fasc. 2 van 17 XI 1939.

INHOUD.

- K. Kodaira, Die Kuratowskische Abbildung und der Hopfsche Er-
 weiterungssatz.
- Makoto Abe, Über die Methode der Polyederentwicklung der Kom-
 pakten und ihre Anwendungen auf die Abbildungstheorie.
- N. Vedenisoff, Généralisation de quelques théorèmes sur la dimension.
- Isaïe Maximoff, Sur les ensembles mesurables B dans l'espace transfini.
- Jacob Levitzki, On rings which satisfy the minimum condition for the
 righthand ideals.

- Rufus Oldenburger, Factorability of general symmetric matrices.
 P. Hebroni, Über lineare Differentialgleichungen in Ringen und ihre Anwendungen auf lineare Integrodifferentialgleichungen.
 A. C. Zaanan, On some orthogonal systems of functions.
 Paul Lévy, Sur certains processus stochastiques homogènes.
 A. Erdélyi, Transformation of a certain series of products of confluent hypergeometric functions. Applications to Laguerre and Charlier polynomials.

Idem Vol. 7, fasc. 3 van 29 II 1940.

- W. Doeblin, Remarques sur la théorie métrique des fractions continues.
 S. Sidon, Über Orthogonalsysteme.
 J. Marcinkiewicz et R. Salem, Sur les sommes riemannniennes.
 B. V. Bulgakov, Sur le mouvement troublé par des forces de haute fréquence.
 S. Stoilow, Sur les surfaces de Riemann normalement exhaustibles et sur le théorème des disques pour ces surfaces.
 Max Wyman, The simultaneous theory of two linear connections in a generalized geometry with Banach coordinates.
 J. A. Schouten and D. van Dantzig, On ordinary quantities and W-quantities. Classification and geometrical applications.
 L. Fejes, Eine Bemerkung zur Approximation durch n -Eckringe.

Van G. B. VAN GOOR, Den Haag.

Prof. Dr. F. SCHUH en Ir. W. J. VOLLEWENS, *Nieuw Leerboek der vlakke driehoeksmeting* f 1,90 . . . geb. f 2,30

Van J. B. WOLTERS, Groningen.

Dr. JOH. H. WANSINK, *Reken- en Stelkunde voor het Middelbaar en Voorbereidend Hoger Onderwijs. Deel II* . . f 2,25
 geb. f 2,60
Deel I f 2,10
 geb. f 2,40

STEREOMETRIE

Dr H. J. E. BETH, Meetkunde van de Ruimte (Stereometrie en Beschrijvende meetkunde tot één geheel verwerkt)
f 2,90

J. VERSLUYS, Leerboek der Stereometrie, 13de druk, herzien door J. H. Schogt, gec. met overzicht f 2,90
ANTWOORDEN, 2e druk f 0,50

Dr P. MOLENBROEK en P. WIJDENES, Stereometrie voor M.O. en V.H.O., met overzicht, 5e druk f 1,90
gec. f 2,25
ANTWOORDEN f 0,50

P. WIJDENES, Kleine Stereometrie, 3e druk, geb. f 1,40

P. WIJDENES, Beknopte Stereometrie, 3e druk, geb. f 1,50

P. WIJDENES, Stereometrisch tekenen f 0,50

P. REIJNDERS, Stereometrie voor de M.T.S. f 1,90
gec. f 2,25

Dr P. MOLENBROEK, Leerboek der Stereometrie, 8e druk, bewerkt door P. Wijdenes, met overzicht, geb. f 6,—
UITWERKINGEN, 3e druk f 2,25

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

Dr J. C. H. GERRETSEN, Beginselen der Beschrijvende Meetkunde f 1,50, geb. f 1,90
Zie de bespreking op blz. 222 van afl. IV.

P. WIJDENES, Beknopte Beschrijvende Meetkunde, 3e druk, gec. f 2,—

Bij de bewerking van de tweede druk zijn zulke ingrijpende veranderingen aangebracht, dat het werkje als het ware geheel nieuw is.

Bij onderzoek blijkt gemakkelijk, dat het beknopte leerboek van Wijdenes door de bondige, stelselmatige en nauwkeurige behandelingswijze, de duidelijke uiteenzetting en de overvloed van goed gekozen, keurig uitgewerkte voorbeelden en oefenstof voor de leerlingen, tot de beste van zijn soort behoort.

Dr H. J. E. Beth. *Weekbl. gymn. en m. o.*

P. WIJDENES, Oefenbladen. Methodisch gerangschikte verzameling van 350 vraagstukken uit de Beschrijvende Meetkunde op 82 losse bladen door P. Wijdenes. 4e druk. Verlaagde prijs in portefeuille f 1,90

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA
Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Dr P. MOLENBROEK

Leerboek der vlakke Meetkunde

Achtste druk, gebonden f 11,50

Dr E. J. DIJKSTERHUIS

Vreemde woorden in de Wiskunde

Prijs f 1,90, gebonden f 2,40

Dr J. C. H. GERRETSEN

Inleiding tot een Topologische Behandeling van de Meetkunde van het Aantal

in de serie Noordhoff's Verzameling van Wisk. werken.

Prijs f 4,90, gebonden f 5,90

Dr A. J. RUTGERS

Physische Scheikunde

Prijs f 12,50, gebonden f 13,50

TER PERSE:

Noordhoff's tafel in vier decimalen

5e druk, 21e—25e duizendtal. In slap linnen . f 1,—

BETH en v. LOO

Mechanica

voor het m.o. met vraagstukken, 4e druk, geb. f 2,50

Antwoorden f 0,50

NATHANS en LINDEMAN

Natuurkunde

voor het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs
deel I f 2,75, geb. f 3,10; deel II f 3,25, geb. f 3,60;
deel III f 3,50, geb. f 3,85.

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. — Groningen—Batavia.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.