

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN
NIJMEGEN

16e JAARGANG 1939, Nr. 2.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

⚡ Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het ⚡
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken
verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel
druks. Prijs per jaargang f 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw
Tijdschrift (f 6.—) zijn ingetekend, betalen f 5.—, voor idem
op „Christiaan Huygens” (f 10.—) f 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-
Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25
afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan
P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Prof. Dr. Hk. DE VRIES, Historische Studîen XXI. Over ketting- breuken, projectieve puntenreeksen en verrekijkers	65
Boekbesprekingen	85
Ingekomen boeken	89
Korrel XLII	90
Dr. J. C. H. GERRETSEN, De karakterisering van de gonio- metrische functies door middel van een functionaalbetrekking	92
Dr. A. VAN THIJN, De meetkundige vaktaai	100
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes	104

Deze zelfde verhouding vinden wij voor de afstanden van voorwerp en beeld tot een willekeurig punt van de as van den kijker, wanneer beide zeer ver weg liggen. Zijn nl. a_1 en b_n zeer groot, dan kan men schrijven (zie boven):

$$N_{n+1} : H_n = a_1 : b_n = AP_1 : P_n B,$$

en zelfs, als D een willekeurig punt tusschen B_1 en P_n is:

$$AP_1 : P_n B = AD : DB = AD : -BD, \text{ zoodat:}$$

$$AD : BD = N_{n+1}^2 : 1 = 1 : H_n^2.$$

Voor de grootte c_n van het beeld vinden wij uit de laatste formule van § 11, p. 59, als $M_{n+1} = 0$ gesteld wordt:

$$c_n = (-1)^n \frac{c}{N_{n+1}};$$

maar in deze formule komt de afstand a_1 van het voorwerp niet meer voor, dus: *waar men bij een verrekijker het voorwerp ook moge plaatsen, het beeld is altijd even groot.*

Liggen voorwerp en beeld ver weg, dan wordt:

$$\frac{c}{AD} : \frac{c_n}{BD} = \frac{c}{c_n} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{N_{n+1}}{(-1)^n} \cdot \frac{1}{N_{n+1}^2} = 1 : (-1)^n N_{n+1}.$$

Onder $\frac{c}{AD}$ en $\frac{c_n}{BD}$ kan men verstaan de schijnbare middellijnen van voorwerp en beeld; noemt men de verhouding van die twee, van beeld tot voorwerp, de *vergrooting* van den kijker, dan is deze vergrooting $= (-1)^n N_{n+1}$; deze grootte behoort dus grooter te zijn dan 1.

Is deze vergrooting nu inderdaad > 1 , dan volgt uit:

$$\left| \frac{c}{c_n} \right| = N_{n+1}$$

dat het voorwerp grooter is dan het beeld; dat het kleiner schijnt, komt omdat deze N_{n+1} , als het om de schijnbare middellijnen gaat (zie boven), door N_{n+1}^2 gedeeld moet worden, zoodat het voorwerp, als het vijfmaal grooter is, vijfmaal kleiner schijnt.

15. Een verrekijker is nog om andere redenen een exceptie-neel lenzenstelsel. Zoo is het bijv. onmogelijk met louter holle lenzen een verrekijker te maken. Voor een biconcave lens zijn nl. beide brandpuntsafstanden negatief, dus ook hunne reciproke

waarden $g_1, g_2, \dots$, terwijl natuurlijk de afstanden h_i der lenzen positief blijven. Nu is (§ 10, p. 58):

$$M_2 = [g_1] = g_1 < 0, \quad M_3 = [g_1, h_1, g_2] = [g_1, h_1] g_2 - g_1 = g_1 h_1 g_2 - g_2 - g_1 > 0,$$

terwijl M_4 weer negatief wordt, en zoo om den ander; M_{n+1} valt dus positief of negatief uit, en kan derhalve niet nul worden.

Verder is het eigenaardig gesteld met de opeenvolging der brandpunten. Beschouwen wij eens de schematische Fig. 14. Het licht

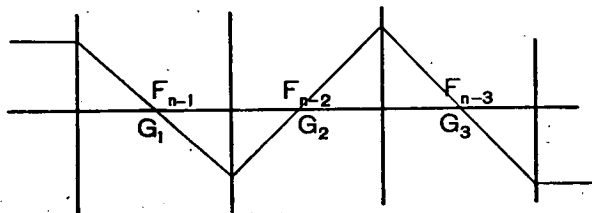


Fig. 14.

dat van links opvalt evenwijdig aan de as, gaat door het brandpunt G_1 van de eerste lens; maar na ook alle andere lenzen doorloopen te hebben, moet het evenwijdig aan de as uittreden; dus moet G_1 meteen het brandpunt F_{n-1} zijn van alle lenzen die nog volgen.

Nu geeft G_1 een beeld G_2 ten opzichte van de tweede lens alleen; men verwarre dit punt vooral niet met het brandpunt G van de tweede lens, immers dit laatste is het beeld van het oneindig verre punt, terwijl G_2 het beeld van G_1 is; voor een bolle lens ligt het brandpunt G links van G_2 .

G_2 is het brandpunt G van de eerste en tweede lens tegelijk; immers de stralen die // de as op de eerste lens opvallen, komen in G_2 samen na beide lenzen doorloopen te hebben. Nu moet echter, om dezelfde reden als boven, G_2 het brandpunt F_{n-2} zijn voor de $n-2$ lenzen die nog over zijn, enz.

Nog een opmerking. De voorwaarde $M_{n+1} = 0$ voor den verrekijker laat zich op verschillende manieren als kettingbreuk schrijven.

$$M_{n+1} = [g_1, h_1, \dots, g_{n-1}, h_{n-1}, g_n] = [g_n, h_{n-1}, g_{n-1}, \dots, h_1, g_1] \quad (\S 10, p. 58).$$

Nu is (§ 9, p. 56) de kettingbreuk:

$$(g_n, h_{n-1}, g_{n-1}, \dots, h_1, g_1) = \frac{[h_{n-1}, \dots, g_1]}{[g_n, h_{n-1}, \dots, g_1]}.$$

waarvan de noemer $= M_{n+1}$, en dus nul, is, zoodat de breuk zelve oneindig groot, en dus het omgekeerde weer nul is; dit omgekeerde echter is

$$0 = g_n - \frac{1}{h_{n-1} - \frac{1}{g_{n-1} - \frac{1}{\text{etc.}}}}$$

maar op dezelfde wijze vindt men uit de andere hakenuitdrukking:

$$0 = g_1 - \frac{1}{h_1 - \frac{1}{g_2 - \text{etc.}}}$$

twee kettingbreuken dus, die door hun nul worden de voorwaarde voor een verrekijker uitdrukken, maar die ook, uit een mathematisch oogpunt beschouwd, de merkwaardige eigenschap te zien geven dat de breuk onveranderd blijft indien men de wijzertallen omkeert, een eigenschap die voor hakenuitdrukkingen steeds, voor kettingbreuken slechts in bijzondere gevallen geldt. De eerste van de twee breuken vindt men terug in de uitdrukking voor b_n in § 10, p. 58, indien men zoowel a_1 als b_n oneindig groot maakt. Nl. als volgt:

Uit de hakenuitdrukking voor b_n in § 10, p. 58 volgt in verband met § 9, p. 56, dat b_n gelijk is aan de kettingbreuk:

$$b_n = (g_n, h_{n-1}, g_{n-1}, \dots, h_1, g_1, a_1);$$

maakt men nu a_1 oneindig groot, dan wordt het slot van de breuk, nl. $-\frac{1}{a_1}$, $= 0$, en dus:

$$b_n = (g_n, h_{n-1}, g_{n-1}, \dots, h_1, g_1).$$

Maar nu moet ook $b_n = \infty$ worden, dus ook de breuk rechts, en dus het omgekeerde nul: dit omgekeerde is echter juist de eerste breuk hierboven.

Ook het kwadraat der vergrooting, N_{n+1}^2 , laat zich met behulp van kettingbreuken uitdrukken. Voor den verrekijker was (§ 14, p. 63):

$$-H_n N_{n+1} = 1, \text{ dus:}$$

$$N_{n+1}^2 = -\frac{N_{n+1}}{H_n} = -\frac{N_{n+1}}{L_n} \cdot \frac{H_n}{L_n} = (\S 10, p. 58):$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{[h_1, \dots, g_n]}{[h_1, \dots, h_{n-1}]} \cdot \frac{[g_1, \dots, h_{n-1}]}{[h_1, \dots, h_{n-1}]} \\
 &= \frac{1}{(g_n, \dots, h_1)} \cdot \frac{1}{(g_1, \dots, h_{n-1})}
 \end{aligned}$$

16. In de tweede verhandeling, wij zeiden het reeds in § 5, p. 51, was het Möbius meer te doen om de theorie der kettingbreuken dan om de leer van het licht; toch is hij, zooals wij zoo dadelijk nader zullen toelichten, tot de vraagstukken die hem hier bezig houden gekomen door het beschouwen van lenzenstelsels.

Eerst echter een uiterlijkheid, maar die niet van belang ontbloot is. Möbius was er door de lenzenstelsels toe gekomen, een kettingbreuk $(a, b, c, d, e, \dots)$ te schrijven als:

$$\frac{1}{a - \frac{1}{b - \frac{1}{c - \text{etc.}}}}$$

Euler daarentegen interpreteerde, begrijpelijkerwijze, hetzelfde symbool als:

$$\frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \text{etc.}}}}$$

Het gevolg hiervan is dat de hakenuitdrukkingen bij Möbius een eenigszins andere beteekenis hebben dan bij Euler; hunne eigenschappen zijn echter eenvoudiger, nl. wat de teekens betreft, die bij Euler wel eens dubbelzinnig kunnen zijn, bij Möbius nooit.

Wil men een kettingbreuk van Möbius, dus met louter minteekens, omzetten in een van Euler, dan moet men vooral niet gelooven dat men eenvoudig alle wijzergetallen het minteeken moet geven; men moet dit alleen doen bij de wijzergetallen van even rangnummer, dus bij b, d, f , enz. Inderdaad, bij Möbius is:

$$\begin{aligned}
 (a, -b) &= \frac{1}{a - \frac{1}{-b}} = \frac{1}{a + \frac{1}{b}} \\
 (a, -b, c) &= \frac{1}{a - \frac{1}{-b - \frac{1}{c}}} = \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}}}, \text{ enz.}
 \end{aligned}$$

De breuk $(a, -b, c, -d, \dots)$ heeft dus louter plusteekeus, of: $(a, -b, c, -d, \dots)$ bij Möbius = $(a, b, c, d, \dots)$ bij Euler.

17. Men kan de lenzen van een stelsel natuurlijk op verschillende manieren verdeelen in twee, of zelfs meer, stukken van op elkaar volgende; doet men het in twee, dan noemt men het eene stuk het objectief, het andere het oculair, maar men kan het natuurlijk ook in drie of meer doen. Dit heeft Möbius op het idee gebracht ook de kettingbreuken, die toch immers ten nauwste met de lenzenstelsels samenhangen, in stukken te verdeelen, en in het bijzonder een kettingbreuk te vervangen door een andere die slechts de helft, of een derde, van het aantal wijzergetallen bevat.

Wij kunnen deze uitvoerige onderzoekingen, die leerrijk genoeg zijn, hier helaas niet in extenso meedeelen; wij moeten volstaan met het interessantste er uit te lichten.

Allereerst dan de opmerking, dat Möbius begint met de kettingbreuken op een eigenaardige manier te definieeren. Laat gegeven zijn een reeks breuken:

$$\frac{\alpha}{a}, \frac{\beta}{b}, \frac{\gamma}{c}, \frac{\delta}{d}, \dots,$$

dan ontstaat een kettingbreuk indien men bij iederen noemer de volgende breuk optelt, dus:

$$\frac{\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b}}{b + \frac{\gamma}{c}} \\ c + \text{etc.}$$

Nu blijft deze breuk onveranderd, indien men teller en noemer van de eerste breuk met p vermenigvuldigt, maar dan tevens den teller van de tweede; teller en noemer van de tweede met q , maar dan tevens den teller van de derde, enz.

D.w.z.:

$$\frac{p\alpha}{pa}, \frac{pq\beta}{qb}, \frac{qr\gamma}{rc}, \dots$$

geven dezelfde kettingbreuk, wat onmiddellijk te zien is. Nu kan men $p, q, r, \dots$ zóó bepalen dat:

$$p\alpha = pq\beta = qr\gamma = \dots = 1$$

wordt; dan worden alle tellers $= 1$, zooals gebruikelijk is. Men zou echter even goed:

$$pa = qb = rc = \dots = 1$$

kunnen stellen; dan zouden alle noemers $= 1$ worden. Verder is onmiddellijk in te zien dat, indien men bijv. in (a, b, c, d) $d = 0$ stelt, niet slechts de d , maar ook de c weg valt; immers:

$$(a, b, c, 0) = \frac{1}{a - \frac{1}{b - \frac{1}{c - \frac{1}{0}}}} = (a, b);$$

Stelt men echter $d = \infty$, dan valt slechts de d weg.

$$(a, b, c, \infty) = \frac{1}{a - \frac{1}{b - \frac{1}{c - \frac{1}{\infty}}}} = (a, b, c).$$

18. Indien een grootheid x uit een andere, y , gevonden wordt door de kettingbreuk:

$$x = (a, b, c, d, y),$$

(men kan het aantal wijzergetallen natuurlijk willekeurig vergrooten), dan is:

$$y = (d, c, b, a, x).$$

Deze merkwaardige stelling spreekt natuurlijk mathematisch allermint van zelf, maar eischt een deugdelijk bewijs; de physicus echter mag haar als van zelf sprekend beschouwen. Immers, indien wij nog even terug gaan tot § 8, p. 54 en daar den afstand van het voorwerp tot de eerste lens (Fig. 12) a_1 , en van de laatste lens tot het beeld b_n noemen, dan vinden wij b_n uit a_1 door een kettingbreuk, die wij nu, $b_n = x$, $a_1 = y$ stellende, gemakshalve willen schrijven als:

$$x = (a, b, c, d, e, \dots y);$$

maar indien wij dan de richting der lichtstralen omkeeren, en dus het licht van rechts laten komen, dan zullen zij juist den omgekeerden weg volgen, omdat immers iedere breking dan juist in

omgekeerden zin plaats vindt; de physicus zal het dus van zelf sprekend vinden dat:

$$y = (\dots e, d, c, b, a, x);$$

omgekeerd kan hij uit het wiskundige bewijs, dat wij nu even zullen geven, besluiten dat het proces van den loop der lichtstralen door een lenzenstelsel inderdaad omkeerbaar is.

Blijkbaar is:

$$x = \frac{1}{a - (b, \dots y)}, \text{ dus:}$$

$$(b, \dots y) = a - \frac{1}{x} = a - (x) = \frac{1}{(a, x)}, \text{ dus:}$$

$$\frac{1}{(a, x)} = (b, \dots y) = \frac{1}{b - (c, \dots y)}, \text{ dus:}$$

$$(c, \dots y) = b - (a, x) = \frac{1}{(b, a, x)}, \text{ dus:}$$

$$\frac{1}{(b, a, x)} = (c, \dots y) = \frac{1}{c - (d, y)}, \text{ dus:}$$

$$(d, y) = c - (b, a, x) = \frac{1}{(c, b, a, x)}, \text{ dus:}$$

$$\frac{1}{(c, b, a, x)} = (d, y) = \frac{1}{d - (y)}, \text{ dus:}$$

$$(y) = d - (c, b, a, x) = \frac{1}{(d, c, b, a, x)}, \text{ of:}$$

$$y = (d, c, b, a, x); \text{ q.e.d.}$$

Is inderdaad $x = b_n$, $y = a_1$, dan vinden wij dus bij één voorwerp één beeld en omgekeerd, zoodat tusschen x en y een bilineaire betrekking moet bestaan van den vorm:

$$A + Bx + Cy + Dxy = 0;$$

Möbius rekt de A, B, C, D uit, en komt dan tot een vergelijking, waarvan de coëfficiënten kettingbreuken zijn, en waaruit hij belangrijke gevolgtrekkingen afleidt. Ook had hij aan deze vergelijking reeds de ontdekking kunnen doen die hij pas 25 jaar later gedaan heeft, nl. dat de reeksen der voorwerpen en der beelden op de as projectief zijn; immers (vgl. § 10, p. 58) de bilineaire betrekking is de uitdrukking der projectiviteit.

Bij het berekenen van A, B, C, D komt nog een hoogst interessante eigenschap der kettingbreuken aan het licht. Voor $y = \infty$

volgt uit de kettingbreuk voor x : $x = (a, b, c, d, e, y)$, (vgl. § 17, p. 69):

$$x = (a, b, c, d, e),$$

en uit de vergelijking:

$$C + Dx = 0,$$

dus staat:

$$C : D = - (a, b, c, d, e) : 1.$$

Voor $y = 0$ echter wordt:

$$x = (a, b, c, d),$$

en:

$$A + Bx = 0,$$

dus:

$$A : B = - (a, b, c, d) : 1.$$

Omgekeerd is voor $x = \infty$:

$$y = (e, d, c, b, a),$$

en

$$B + Dy = 0,$$

dus:

$$B : D = - (e, d, c, b, a) : 1,$$

en voor $x = 0$:

$$y = (e, d, c, b),$$

en

$$A + Cy = 0,$$

dus:

$$A : C = - (e, d, c, b) : 1.$$

Nu is: $\frac{C}{D} \cdot \frac{A}{C} = \frac{A}{D} = (a, \dots e)(e, \dots b).$

$$\frac{B}{D} = - (e, \dots a),$$

$$\frac{C}{D} = - (a, \dots e),$$

zoodat de vergelijking luidt:

$$(a, \dots e)(e, \dots b) - (e, \dots a)x - (a, \dots e)y + xy = 0.$$

Maar bovendien is niet slechts:

$$\frac{C}{D} \cdot \frac{A}{C} = \frac{A}{D}, \text{ maar tevens:}$$

$$\frac{B}{D} \cdot \frac{A}{B} = \frac{A}{D}, \text{ dus is voor iedere kettingbreuk:}$$

$$(a, \dots e)(e, \dots b) = (e, \dots a)(a, \dots d).$$

Deze eigenschap van de kettingbreuken zelve brengt ons die van de hakenuitdrukkingen in § 9, p. 56 weêr in herinnering, die analoog, maar iets minder eenvoudig was.

Past men op $(e, \dots b)$ links, en $(a, \dots d)$ rechts de stelling opnieuw toe, dan vindt men:

$$\frac{(a, \dots e)(b, \dots e)(c, \dots e)(d, e)(e)}{(b, \dots d)(c, d)(d)} = \\ = \frac{(e, \dots a)(d, \dots a)(c, \dots a)(b, a)(a)}{(d, \dots b)(c, b)(b)},$$

de noemers zijn echter gelijk, omdat zij beide gelijk zijn aan $bcd - b - d$, dus zijn ook de tellers gelijk, en heeft men de nieuwe eigenschap, dat:

$(a, \dots e)(b, \dots e)(c, \dots e)(d, e)(e) = (e, \dots a)(d, \dots a)(c, \dots a)(b, a)(a)$; en nu is aan de eenvoudigste gevallen gemakkelijk te controleeren, dat de reciproke waarde van het linker lid juist gelijk is aan onze oude hakenuitdrukking (§ 9, p. 56) $[a, b, c, d, e]$, zoodat:

$$[a, b, c, d, e] = \frac{1}{(a, \dots e)(b, \dots e)(c, \dots e)(d, e)(e)},$$

en onmiddellijk blijkt dat:

$$[a, b, c, \dots i, k] = [k, i, \dots c, b, a].$$

En terwijl wij in diezelfde §, p. 56, een kettingbreuk geschreven hebben als het quotient van twee hakenuitdrukkingen, vinden we hier de hakenuitdrukking geschreven als een product van kettingbreuken. Maar bedenken we nu dat:

$$\frac{1}{(b, \dots e)(c, \dots e)(d, e)(e)} = [b, c, d, e],$$

dan vinden we onmiddellijk dat:

$$(a, \dots e) = \frac{[b, c, d, e]}{[a, b, c, d, e]},$$

waarmee nu weer de kettingbreuk geschreven is als het quotient van twee hakenuitdrukkingen.

19. „Um etwas verborgener liegende Eigenschaften der Kettenbrüche etc. zu entdecken“, gaat Möbius de wijzergetallen der kettingbreuk in groepen verdeelen, en begint hij met uitvoerig te bestudeeren de vergelijking:

$$x = (a, b, \dots d, e, f, a', b', \dots d', e', y),$$

om daarna 3 en meer groepen te onderstellen. Hij slaagt er dan in, kettingbreuken op te stellen, wier aantal wijzergetallen slechts gelijk is aan het aantal groepen, waarin de oorspronkelijke verdeeld is. Daarbij gaat hij stilzwijgend, nl. bij wijze van voorbeeld, over op oneindige kettingbreuken, nl. op de welbekende voor $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

Natuurlijk dat, indien men de ontwikkeling afbreekt bij $2n$, $3n$, ... tweeën, men nieuwe breuken wenscht met slechts n wijzergetallen. Maar n is willekeurig groot, zoodat men alle ontwikkelingen onbegrensd kan voortzetten. Laat men dus alle breuken oneindig doorloopen, dan bestaat het effect van het verminderen van het aantal wijzergetallen hierin dat men van de tweede breuk slechts half zooveel, van de derde slechts een derde maal zooveel wijzergetallen behoeft te nemen om steeds denzelfden graad van nauwkeurigheid te krijgen. Zoo vindt men:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{6 - \frac{1}{6 - \text{etc.}}} \right\}, \text{ maar ook:}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} \left\{ 1 + \frac{1}{34 - \frac{1}{34 - \frac{1}{34 - \text{etc.}}}} \right\}$$

bij de eerste heeft men slechts de helft, bij de laatste slechts $\frac{1}{4}$ van het oorspronkelijk aantal termen noodig, en bij:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{5} \left\{ 2 + \frac{1}{14 + \frac{1}{14 + \text{etc.}}} \right\}$$

slechts $\frac{1}{3}$.

20. Hierna komen de repeteerende kettingbreuken aan de beurt. Begonnen wordt met de gemengd repeteerende: $(a, \dots e, f, a, \dots e, f', a, \dots e, f'', \dots)$, en van deze wordt de merkwaardige eigenschap bewezen dat:

$$(a, \dots e, f, a, \dots e, f', \dots) - (e, \dots a, f, e, \dots a, f', \dots) = (a, \dots e) - (e, \dots a),$$

dus onafhankelijk van de getallen $f, f', f'', \dots$; maar de beide kettingbreuken in het linker lid moeten tot in het oneindige doorloopen.

Worden alle getallen f aan elkaar gelijk, dan wordt de breuk zuiver repeteerend, en treedt de beroemde stelling in werking dat de wortels van een vierkantsvergelijking met rationale, dus zoo men wil geheele, coëfficiënten, of rationaal, of zuiver repeteerende kettingbreuken zijn.

Stelt men:

$$x_1 = (a, \dots e, f, a, \dots e, f, a \dots \text{in inf.})$$

dan is het niet moeilijk de vierkantsvergelijking te vinden, waarvan x_1 de eene wortel is; zij luidt (Ges. W. IV, p. 526, No. 40), met hakenuitdrukkingen geschreven:

$$[a, \dots e] x^2 - \{[a, \dots f] + [b, \dots e]\} x + [b, \dots f] = 0.$$

En nu weet Möbius op eenvoudige wijze de fraaie stelling te bewijzen, dat indien de eene wortel x_1 is, de andere, x_2 , de reciproke waarde van de kettingbreuk is die men krijgt door de periode om te keeren, zoodat:

$$x_2 = \frac{1}{(f, e, \dots a, f, e, \dots a, f, \dots \text{in inf.})}$$

Deze vondst was ook ten tijde van Möbius niet nieuw meer; Galois had haar reeds gedaan, nl. in Gergonne's „Annales de mathématiques pures et appliquées, T. XIX, en Möbius had hiervan, zooals gewoonlijk, kennis gekregen door de Ferrussac's „Bulletin des sciences mathématiques”, 1829, p. 254, dus juist een jaar geleden; hij kende echter niet het bewijs van Galois, en het zijne is dus zijn eigendom.

Opmerkelijk is het dat de stelling aangaande x_1 en x_2 slechts in den hierboven gegeven eenvoudigen vorm geldt, indien men de schrijfwijze van Möbius volgt, d.w.z. de kettingbreuken met louter mintekens schrijft; Galois deed dit niet, en Möbius toont aan dat men dan de kettingbreuk met omgekeerde periode moet deelen op -1 .

Het product van de wortels van de vergelijking waaraan x_1 en x_2 voldoen luidt:

$$\frac{[b, \dots f]}{[a, \dots e]} = \frac{[b, \dots f]}{[a, \dots f]} \cdot \frac{[a, \dots e]}{[a, \dots f]} = \frac{[b, \dots f]}{[a, \dots f]} \cdot \frac{[e, \dots a]}{[f, \dots a]} = \frac{(a, \dots f)}{(f, \dots a)} \quad (\S 9, \text{p. 56});$$

men heeft dus de allermerkwaardigste betrekking:

$$\frac{(a, \dots f, a, \dots f, \dots \text{in inf})}{(f, \dots a, f, \dots a, \dots \text{in inf})} = \frac{(a, \dots f)}{(f, \dots a)};$$

de oneindige herhaling der periode heeft dus geen effect.

21. Het wiskundige gedeelte der tweede verhandeling sluit met de volgende zeer opmerkelijke eigenschappen.

$$(1, y) = \frac{1}{1 - \frac{1}{y}} = \frac{y}{y - 1}; \text{ zoo vindt men } (1, 1, y) = 1 - y, \text{ en}$$

$$(1, 1, 1, y) = \frac{1}{y}; \text{ maar } (1, 1, 1, 1, y) \text{ geeft weer } \frac{y}{y - 1}, \text{ en zoo vervolgens. De kettingbreuk:}$$

$$(1, 1, 1, \dots, y)$$

kan dus slechts de bovengenoemde 3 waarden:

$$\frac{y}{y - 1}, 1 - y, \frac{1}{y}$$

aannemen, en alle groepen van 3 op elkaar volgende eenen kan men schrappen. Opmerkelijk is het ook dat deze 3 waarden de 3 fundamentele waarden zijn voor de 24 dubbelverhoudingen van 4 punten op een rechte lijn.

Men heeft: $(1, 1, a) = 1 - a$; verder:

$$(1, 1, a, 1, 1, b) = [1, 1, a - (1, 1, b)] = (1, 1, a - 1 + b),$$

want $(1, 1, b) = 1 - b$ (zie boven).

$(1, 1, a + b - 1)$ echter is $= 2 - a - b$, zooals door berekening onmiddellijk blijkt. Zoo wordt:

$$(1, 1, a, 1, 1, b, 1, 1, c) = 3 - a - b - c. \text{ Enz.}$$

Veel interessanter echter is het volgende voorbeeld.

$$(a, b, 1, 1, 1, c, d, e) = (a, b, - \{1, 1, 1, c - (d, e)\}) = \\ = \left(a, b - \frac{1}{c - (d, e)}\right), \text{ want } (1, 1, 1, y) = \frac{1}{y}.$$

Verder gaande, kunnen wij dus schrijven:

$$= (a, b, \dots (c, d, e)) = (a, b, c, d, e);$$

men kan dus de groep van 3 eenen schrappen.

Komen dus in een kettingbreuk verschillende groepen van 3 op elkaar volgende eenen voor, dan kan men die alle schrappen.

Zoo is bijv.:

$$(1, 1, 1, a, 1, 1, 1, b, 1, 1, 1, c) = (1, 1, 1, a, 1, 1, 1, b, c) = (1, 1, 1, a, b, c) = (a, b, c); \text{ want } (1, 1, 1, y) = \frac{1}{y} = (y).$$

Nu moet men echter niet denken dat dit schrappen onafscheidelijk gebonden is aan die eenen, of aan het getal 3; integendeel, het is op oneindig veel manieren mogelijk in een kettingbreuk een gegeven aantal op elkaar volgende wijzergétallen te schrappen, zonder dat de waarde van de breuk verandert.

Zal in:

$$(a, b, \alpha, \beta, \dots \mu, \nu, c, d, \dots)$$

de reeks $\alpha, \beta, \dots \mu, \nu$ geschrapt kunnen worden, dan moet blijkbaar de breuk:

$$(\alpha, \beta, \dots \mu, \nu, y)$$

gelijk zijn aan de eenvoudige breuk (y) , of $\frac{1}{y}$, en wel voor iedere waarde van y . Men heeft dus de vergelijking:

$$(\alpha, \beta, \dots \mu, \nu, y) = \frac{1}{y}.$$

Nu kan men deze vergelijking met behulp van eigenschappen, die wij in het voorgaande ontwikkeld hebben, rangschikken, en vindt:

$$[\alpha \dots \nu] - [\alpha \dots \mu] \frac{1}{y} - [\beta \dots \nu] y + [\beta \dots \mu] = 0. \quad 1)$$

Maar deze vergelijking moet bestaan voor alle waarden van y , dus moeten de coëfficiënten nul zijn, zoodat:

$$1) (\alpha, \beta, \dots \mu, \nu, y) = \frac{[\beta, \dots \mu, \nu, y]}{[\alpha, \beta, \dots \mu, \nu, y]} = \frac{[\beta, \dots \mu, \nu] y - [\beta \dots \mu]}{[\alpha, \dots \mu, \nu] y - [\alpha \dots \mu]}$$

dus: $[\beta, \dots \mu, \nu] y - [\beta \dots \mu] = \frac{[\alpha, \dots \mu, \nu] y - [\alpha \dots \mu]}{y}$, of:

$$[\alpha, \dots \nu] - [\alpha, \dots \mu] \cdot \frac{1}{y} - [\beta \dots \nu] y + [\beta \dots \mu] = 0.$$

$$\begin{aligned} [\alpha \dots \nu] + [\beta \dots \mu] &= 0, \\ [\alpha \dots \mu] &= 0, \\ [\beta \dots \nu] &= 0 \text{ is.} \end{aligned}$$

Maar volgens § 9, p. 56 is:

$$[\alpha \dots \mu] \cdot [\beta \dots \nu] - [\alpha \dots \nu] \cdot [\beta \dots \mu] = 1,$$

dus hier, waar:

$$\begin{aligned} [\alpha \dots \nu] &= -[\beta \dots \mu], \\ [\beta \dots \mu]^2 &= 1. \end{aligned}$$

Verder is, volgens dezelfde § 9, p. 56:

$$\begin{aligned} [\mu \dots \alpha] &= [\mu \dots \beta] \alpha - [\mu \dots \gamma], \text{ of:} \\ [\alpha \dots \mu] &= \alpha [\beta \dots \mu] - [\gamma \dots \mu]; \end{aligned}$$

stellen wij dus gemakshalve:

$$[\beta \dots \mu] = 1, \text{ dan wordt:}$$

$$\alpha = [\gamma \dots \mu],$$

$$\text{en op dezelfde wijze: } \nu = [\beta \dots \lambda].$$

Men kiese dus van de getallen $\beta \dots \mu$ alle, op één na, willekeurig, en berekene het laatste, dan kan men α en ν berekenen, en wel de ν te beginnen bij γ , omdat anders de berekening geen zin heeft; men moet dus een groep hebben van minstens 3 op elkaar volgende cijfers.

Stel dus, om het eenvoudigste geval te hebben, $\mu = \beta$ dus $\nu = \gamma$, $\lambda = \alpha$, dan geeft de eerste betrekking:

$$[\beta] = \beta = 1, \text{ de laatste:}$$

$$\nu = \gamma = [\] = 1, \text{ en de middelste:}$$

$$\alpha = [\] = 1.$$

Hier heeft men dus de groep van 3 eenen terug.

Stel $\mu = \gamma$, dus $\lambda = \beta$, en $\nu = \delta$. De eerste betrekking geeft:

$$[\beta, \gamma] = \beta\gamma - 1 = 1. \text{ Stel } \beta = 1, \text{ dan is } \gamma = 2.$$

$$\nu = \delta = [\beta,] = \beta = 1,$$

$$\alpha = [\gamma] = 2.$$

De breuk $(\dots a, 2, 1, 2, 1, b, c \dots)$ moet dus gelijk zijn aan $(\dots a, b, c, \dots)$, wat gemakkelijk te controleeren is.

22. Over het dioptrische slot der tweede verhandeling kunnen wij het stilzwijgen bewaren; daar worden, onder herhaalde verwijzing naar de eerste, de hoofdeigenschappen der lenzenstel-

sels, in het bijzonder der verrekijkers, opnieuw afgeleid, zonder dat nieuwe gezichtspunten geopend worden. In de derde daarentegen, getiteld: „Entwicklung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hülfe der Collineationsverwandschaft“, en die, zooals wij reeds weten (§ 5, p. 51) pas 25 jaar na de tweede verschenen is, wordt eindelijk de ontdekking gedaan van de projectiviteit van de reeksen der voorwerpen en beelden op de as, wordt uitgegaan van de brekingswet, en wordt de dikte der lenzen niet meer verwaarloosd.

Laat in Fig. 15 de cirkelboog het bolvormige, brekende oppervlak voorstellen, links bijv. lucht, rechts glas; spreken wij verder

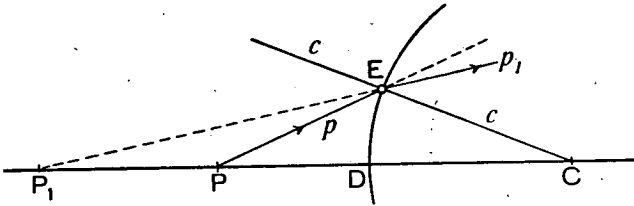


Fig. 15.

af dat we ons slechts zeer weinig van de as zullen verwijderen. De lichtstralen dan, die van een punt P van de as uitgaan, zullen zóódanig gebroken worden dat zij van een punt P_1 schijnen te komen; de stralen p_1 zijn dan de stralen p , na de breking, en P_1 is het (in ons geval virtueele) beeld van P .

Is c de normaal in E , dan is pc de hoek van inval, p_1c die van breking, en volgens de brekingswet:

$$\frac{\sin pc}{\sin p_1c} = n = \text{constant} = \text{den brekingsindex.}$$

Nu staat echter:

$$\begin{aligned} \sin pc : \sin ca &= CP : PE, \text{ en:} \\ \sin p_1c : \sin ca &= CP_1 : P_1E, \text{ dus:} \\ \frac{\sin pc}{\sin p_1c} &= \frac{CP}{PE} \cdot \frac{CP_1}{P_1E} = n : 1. \end{aligned}$$

Denkt men de lijn a een oogenblik evenwijdig aan de normaal c , dan valt C in het oneindige; CP en CP_1 worden ∞ , met een verhouding $\neq 1$, en men vindt:

$$P_1E : PE = n : 1.$$

In een noot onder aan de pagina merkt Möbius op dat dit de vorm is waarin Snellius de brekingswet het eerst heeft uitgesproken.

Nu hebben wij echter afgesproken, dat het punt E vlak bij D zou liggen; men kan dan, met een nauwkeurigheid die voor alle doeleinden toereikend is, de evenredigheid:

$$\frac{CP}{PE} : \frac{CP_1}{P_1E} = n : 1$$

vervangen door:

$$\frac{CP}{PD} : \frac{CP_1}{P_1D} = (CDPP_1) = n : 1,$$

waar $(CDPP_1)$ de dubbelverhouding der 4 punten C, D, P, P_1 voorstelt. Nu was P een willekeurig punt; de punten P en P_1 , voorwerp en beeld, liggen dus altijd zóó, dat zij met C en D een constante dubbelverhouding vormen, d.w.z.: *de reeks $P \dots$ der voorwerpen, en $P_1 \dots$ der beelden, vormen twee projectieve puntenreeksen met de dubbelpunten C en D .*

Dat de punten C en D dubbelpunten zijn, is onmiddellijk in te zien. Stralen die in D opvallen, en hier gebroken worden, gaan van D uit verder, en stralen die uit C komen, gaan ongebroken door, en geven dus een virtueel beeld in C ; in beide gevallen vallen P en P_1 samen.

Beweegt P zich in Fig. 15 naar D toe, dan nadert $CP : PD$ tot $-\infty$; dus moet ook $CP_1 : P_1D$ tot $-\infty$ naderen, d.w.z. ook P_1 beweegt zich naar rechts. *De beide reeksen $P \dots$ en $P_1 \dots$ hebben dus gelijkheid van zin* (vgl. § 12, p. 60). Voor het geval dat men de dikte van de brekende middenstof wil verwaarloozen, moet men het onderscheid tusschen de punten C en D laten vervallen (vgl. § 12, p. 60).

22. Volgt onmiddellijk op de eerste brekende middenstof een tweede (die echter óók wel weer lucht kan zijn), dan werken de punten P_1 nu als voorwerpen, en brengen een reeks beelden P_2 voort die projectief is met de reeks P_1 , en daardoor ook met de reeks $P \dots$. Sluiten dus n brekende middenstoffen aan elkaar, dan zal de reeks der beelden $P_n, \dots$ altijd nog projectief zijn met de reeks $P, \dots$, en altijd nog met gelijkheid van zin.

PROSPEKT

DIFFERENTIALGEOMETRIE

DER KURVEN UND FLÄCHEN

UND

TENSORRECHNUNG

VON

UNIVERSITÄTSPROFESSOR

PH. DR. VÁCLAV HLAVATÝ

IN PRAG

AUTORISIERTE ÜBERSETZUNG

VON

UNIVERSITÄTSDOZENT

DR. PHIL. MAX PINL

IN PRAG

f. 14.00

Geb. f. 15.50

P. NOORDHOFF N.V. — 1939 — GRONINGEN—BATAVIA

In de boekhandel verkrijgbaar

INHALT.

KURVENTHEORIE.

KAPITEL I.

Grundlehren über ebene und räumliche Kurven.

I. ABSCHNITT.

II. ABSCHNITT.

Kurven in allgemeiner Parameterdarstellung.

Kurven in Bogenparameterdarstellung.

	Seite		Seite
§ 1. Das Rechnen mit Raumvektoren.....	1	§ 1. Frenetsche Formeln.....	39
§ 2. Definition einer Kurve und Grundbegriffe.....	12	§ 2. Berührung von Kurven....	46
§ 3. Transformationen.....	16	§ 3. Schmiegekugel.....	54
§ 4. Tangente, Schmiegeebene... ..	18	§ 4. Bertrandsche Kurvenpaare, Böschungskurven.....	60
§ 5. Das begleitende Dreibein... ..	26	§ 5. Evoluten und Evolventen ..	67
		§ 6. Natürliche Kurvengleichungen.....	71
		§ 7. Minimalkurven.....	80

FLÄCHENTHEORIE.

KAPITEL II.

Die erste Grundform und ihre Anwendungen.

I. ABSCHNITT.

Definition einer Fläche. Einparametrische Flächenscharen.

§ 1. Grundbegriffe.....	85
§ 2. Transformationen.....	92
§ 3. Singuläre Punkte.....	95
§ 4. Tangentialebene.....	98
§ 5. Einparametrische Flächenscharen.....	103

II. ABSCHNITT.

Die erste Grundform einer Fläche.

§ 1. Formale Vorbemerkungen	112
§ 2. Tensoralgebra: Vektoren..	115

§ 3. Tensoralgebra: Tensoren..	121
§ 4. Der metrische Fundamentaltensor.....	125
§ 5. Der Tensor $a^{\lambda\nu}$	128
§ 6. Winkel zweier Vektoren ..	133
§ 7. Die Diskriminante A	137
§ 8. Anwendungen.....	140
§ 9. Orthogonale Kurvenkongruenzen.....	142
§ 10. Erster Differentialoperator	150
§ 11. Geodätische Parallele	157

III. ABSCHNITT.

Konforme Abbildung.

§ 1. Kurvennetze.....	161
-----------------------	-----

	Seite
§ 2. Konforme Abbildung.	169
§ 3. Anwendungen	175

IV. ABSCHNITT.

Das absolute Differential.

§ 1. Christoffelsymbole	181
§ 2. Tschebyscheffnetze	189
§ 3. Das absolute Differential ..	191
§ 4. Das absolute Differential Fortsetzung	200

V. ABSCHNITT.

Flächenkurven.

§ 1. Geodätische Kurven.	211
§ 2. Kurvenkongruenzen und geodätische Kurven	217
§ 3. Geodätische Kurven und Flächen.	221
§ 4. Allgemeine Flächenkurven..	228
§ 5. Geodätische Krümmung ...	239
§ 6. Besondere Parametersysteme	245

Seite

VI. ABSCHNITT.

Das Gaußsche Krümmungsmaß.

§ 1. Kovariante Ableitung	254
§ 2. Zweiter Differentialoperator	257
§ 3. Das Gaußsche Krümmungs- maß.	264
§ 4. Krümmungsmaß und Flä- chenkurven	268
§ 5. Satz von Bonnet	275

VII. ABSCHNITT.

Wechselseitig auf einander abwickelbare Flächen.

§ 1. Das Problem der Abwickel- barkeit	281
§ 2. Konstantes Krümmungs- maß.	287
§ 3. Abwickelbare Flächen.	295
§ 4. Abwicklung auf die Ebene	299
§ 5. Abwicklung auf Drehflächen	304
§ 6. Das allgemeine Abwicklungs- problem	309

KAPITEL III. Die zweite Grundform und ihre Anwendungen.

Die zweite Grundform und ihre Anwendungen.

I. ABSCHNITT.

Die zweite Grundform einer Fläche.

§ 1. Die Flächennormale	314
§ 2. Der zweite Fundamentaltensor	319
§ 3. Die Skalare K und H	325
§ 4. Grundgleichungen.	330
§ 5. Sphärische Abbildung	340
§ 6. Tangentialkoordinaten	348

II. ABSCHNITT.

Ausgezeichnete Richtungen auf einer Fläche. Kurven auf einer Fläche und im Raume.

§ 1. Hauptrichtungen.	350
§ 2. Kreispunkte	355
§ 3. Normalkrümmung einer Flächenkurve	360
§ 4. Die Dupinsche Indikatrix.	370

III. ABSCHNITT.

Ausgezeichnete Flächenkurven.

§ 1. Geodätische Torsion.	377
§ 2. Konjugierte Kurven.	385
§ 3. Hauptkurven (Krümmungs- linien).	389
§ 4. Hauptkurven. (Fortsetzung)	401
§ 5. Asymptotenkurven.	406
§ 6. Anwendungen	412

IV. ABSCHNITT.

Flächenkonstruktionen.

§ 1. Das sphärische Bild kon- jugierter Kurven.	417
§ 2. Das sphärische Bild der Asymptotenkurven.	421
§ 3. Bonnet's Flächenkonstruk- tion	426
§ 4. Flächenkonstruktion mit Hilfe des Tensors $a_{\lambda\mu}$	429

KAPITEL IV. Besondere Flächen.

	Seite		Seite
I. ABSCHNITT.		III. ABSCHNITT.	
Geradlinige Flächen.		Minimalflächen.	
§ 1. Der Tensor $a_{\omega\mu\lambda}$	435	§ 1. Definition und Grundeigen- schaften	501
§ 2. Definition geradliniger Flä- chen.....	438	§ 2. Die Minimalkurven auf einer Minimalfläche	507
§ 3. Erster Fundamentaltensor	440	§ 3. Assoziierte und adjungierte Flächen.....	512
§ 4. Kehllinie.....	445	§ 4. Das sphärische Bild einer Minimalfläche.....	519
§ 5. Der Drall	452	§ 5. Das Schwarzsche Problem.	526
§ 6. Tangentialebene	457		
§ 7. Asymptotenkurven	462		
§ 8. Abwicklung geradliniger Flächen auf einander	465		
II. ABSCHNITT.		IV. ABSCHNITT.	
Weingartensche Flächen und andere.		Sphärische und pseudosphärische Flä- chen. Mongesche Flächen und andere.	
§ 1. Parallelfächen.....	472	§ 1. Sphärische Flächen.....	532
§ 2. Evoluten. (Zentralflächen) .	478	§ 2. Pseudosphärische Flächen .	536
§ 3. W-Flächen	486	§ 3. Flächen mit einer Kongru- enz ebener Hauptkurven..	540
§ 4. Schiebflächen.....	498	§ 4. Flächen mit zwei Kongruen- zen ebener Hauptkurven ..	552
Register		561	

Die Veröffentlichung dieser deutschen Uebersetzung macht auch uns das Lehrbuch der Differentialgeometrie von V. Hlavatý zugänglich, dem Prager Universitätslehrer, der als tätiger und fruchtbarer Bearbeiter der neuen differentialgeometrischen Gebiete bekannt ist.

Hier handelt es sich indes um die *klassische* Differentialgeometrie, d.h. die metrische Theorie der Kurven und Flächen im gewöhnlichen Raum. Und es handelt sich auch um eine umfang- und inhaltsreiche, aber elementare Darstellung, die beim Leser nur die Kenntnis der gewöhnlichen analytischen Geometrie des Raumes (und der Infinitesimalrechnung) voraussetzt. Als Werkzeug für die Auseinandersetzung und Untersuchung benutzt Verfasser die Vektorrechnung und in der Flächentheorie in Verbindung mit krummlinigen Bezugssystemen auf einer Fläche die Tensorrechnung von Ricci.

Das Werk von Hlavatý ist ausführlich und wohlgeordnet nach Anlage und Darstellung. Zahlreiche Beispiele und Nebenresultate (die nicht selten neu sind oder doch wenigstens zum erstenmale in einem Lehrbuch auftreten) erläutern zweckmässig die allgemeine Theorie und verdeutlichen sie an konkreten Fällen, ohne dass dabei der rote Faden der Entwicklung verloren geht. Er vermehrt so in nützlicher Weise die Reihe der Lehrbücher, die geeignet sind, für dieses Gebiet eine gute Grundlage und Einführung abzugeben.

Der Verfasser trägt dazu, in den allgemeinen Gesichtspunkten und auch in der Auswahl und Anordnung der auseinandergesetzten Begriffe und Ergebnisse, eine ausgesprochen persönliche Note bei: die Note eines praktischen, wirklichkeitsnahen Geistes, der andererseits hervorragend zu organisieren und analysieren versteht.

Zusammenfassend sei gesagt: Das Werk entspricht ausgezeichnet den vorwiegend didaktischen Zielen, die es verfolgt. Seine Lektüre, mit der gleichen unermüdlichen Geduld unternommen, mit der Verfasser den Weg vorgezeichnet hat, wird von unzweifelhaftem Nutzen für jeden sein, der die Differentialgeometrie und ihre modernen Forschungsmethoden kennen lernen will.

(E. BORTOLOTTI).

VORWORT DES ÜBERSETZERS.

Als mir der ehrenvolle Auftrag erteilt wurde, die Redaktion der vorliegenden Übersetzung zu übernehmen, gemahnte mich die Lektüre des Originaltextes mehrfach an ein berühmtes Buch: H. Weyls „Raum-Zeit-Materie“ (Berlin, 1923 in 5. Auflage bei J. Springer).

Je größer die Gefahr einer trockenen und langweiligen Manier für eine deduktive und streng systematische Darstellung eines wissenschaftlichen Gebietes ist, desto größer der Reiz, wenn es trotzdem gelingt, diese Klippen zu vermeiden. Nun gar im Falle eines Lehrbuchs für geometrisch interessierte Studierende mittlerer Semester! Hier galt es drei Dinge unter einen Hut zu bringen: Formalismus, Pädagogik und geometrischen Inhaltsreichtum.

Der deduktiv-systematischen Leitmotive halber konnte der Formalismus des Vektor- und insbesondere der des Tensorkalküls unmöglich in einen rückwärtigen „Anhang“ verbannt werden. Er mußte vielmehr stets (vornehmlich im zweiten Kapitel) in den näheren Vordergrund gestellt werden. Offensichtlich gewinnt der formale Apparat des Tensorkalküls pädagogisch sympathischere Züge, wenn man ihn in wohlbegrenzten Dosen verteilt. Deshalb (und immer natürlich auch aus systematischen Gründen-Verweilen auf nullter bzw. erster Differenzierungsstufe der Flächenmetrik) wurde die Entwicklung des Tensorkalküls im zweiten Kapitel zweimal absichtlich unterbrochen (durch den dritten und fünften Abschnitt). Es sollte sofort gezeigt werden, wozu der entwickelte Formalismus benötigt wird und was er zu leisten

vermag. Dabei wird mit Christoffelsymbolen einerlei Art $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \lambda \mu \end{smallmatrix} \right\}$ operiert, was man wohl auch als eine Vereinfachung der Symbolik ansehen kann. Die Indexstellung wurde dem Weylschen Muster angepaßt $\left(\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \lambda \mu \end{smallmatrix} \right\} \right)$ an Stelle von $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\}$, dagegen am Klammersymbol festgehalten, da Weyls Dreizeigersymbole $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$ in der Fachliteratur einem allgemeineren Falle vorbehalten worden sind.

Das zweite Kapitel des Buches, mit welchem die Flächentheorie beginnt, ist, wie der Kenner sogleich bemerkt, von der Tendenz beherrscht, von der Existenz eines dreidimensionalen euklidischen Einbettungsraumes für die in Rede stehenden Flächen weitgehendst zu

abstrahieren. Ein solches Programm restlos durchzuführen, wird wohl stets aus pädagogischen Gründen unmöglich sein. Gleichwohl ist es gelungen, den Begriff des Gaußschen Krümmungsmaßes vor dem der Flächennormalen einzuführen, da die entsprechend präparierte Kenntnis der *sgn.* kovarianten Differentiation auf dem Wege über ein bekanntes Lemma von Ricci dazu auf wenigen Zeilen Gelegenheit bietet. Dagegen mußten wegen der wiederholten Verwendung des Radiusraumvektors $r(\xi)$ der Punkte einer Fläche gewisse „Residuen“ der Vorstellung eingebetteter Flächen auch im zweiten Kapitel des Buches erhalten bleiben. Um die hier wichtigen Begriffsunterschiede dauernd zu distanzieren, wurden stets „Vektoren“ und „Raumvektoren“ unterschieden. Insbesondere erscheinen so im ersten Kapitel des Buches, welches der Kurventheorie gewidmet ist, lediglich „Raumvektoren“ (auch hier „Vektoren auf der Kurve“, d.h. also (einkomponentige!) Tangentenvektoren zu unterscheiden, würde man gewiß für eine terminologische Übertreibung ansehen müssen), wobei eine gewisse sprachliche Schwierigkeit hinsichtlich der Übersetzung des hier in der tschechischen Sprache sehr gute Dienste leistenden Wortes „úsečka“ nicht verhehlt sei.

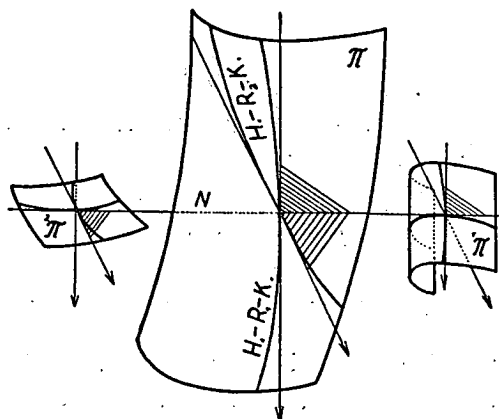
Die bekannten großen Vorteile tensorieller Darstellung, allgemeiner Charakter der Koordinatenwahl bei invarianter Formulierung, kommen natürlich auch den weiteren Kapiteln (III) und (IV) der hier entwickelten Flächentheorie zu Gute. Dies wird man z.B. in der Behandlung der Krümmungslinien oder auch gelegentlich der Untersuchung der *W*-Flächen bemerken.

In gruppentheoretischer Hinsicht handelt es sich bezüglich der Auswahl des Stoffes naturgemäß bis auf geringfügige Ausnahmen (z.B. in § 2 des dritten Abschnittes von Kapitel (III), oder auch in § 4 des vierten Abschnittes von Kapitel (IV)) stets um bewegungs-invariante Differentialgeometrie. Dagegen konnte die Darstellung nicht immer auf reelles Gebiet beschränkt werden, da dies ja seit Lie und Weierstraß' Tagen unmöglich geworden ist, will man nicht die Behandlung der so wichtigen und interessanten Klasse der Minimalflächen vernachlässigen, ganz abgesehen von Grundeigenschaften der Winkelmetrik auf Flächen, der konformen Abbildung usw.

.....

Prag, im Vorfrühling 1939.

M. PINL.



Figur (2, 2)

$$(2, 17c) \quad {}^1N = \frac{G}{\sqrt{E}} \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{E}{2EG} \frac{\partial}{\partial u} G = \frac{G}{\sqrt{E}} \left(1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \lg \sqrt{G}.$$

Setzen wir in diese Gleichung für $\frac{\partial}{\partial u} \lg \sqrt{G}$ aus (3, 5c) vom dritten Abschnitt des dritten Kapitels (S. 391) ein, so erhalten wir den in (2, 14a) angegebenen Ausdruck. Analog läßt sich (2, 14b) beweisen.

Aus diesen Hilfssätzen folgt geradewegs

Satz (2, 8). *Den Hauptkurven der Evolventen entsprechen auf der Evolute konjugierte Kurven.*

Beweis. In Hauptparametern gilt (2, 14) und somit ist insbesondere ${}^1M = 0$, d.h. die zugehörigen Kurven auf der Evolute 1H sind konjugiert.

Als weitere Anwendung des oberen Satzes können wir den folgenden Satz beweisen.

Satz (2, 9). *In Hauptparametern gilt für das Krümmungsmaß 1K der Evolute 1H*

$$(2, 18) \quad {}^1K = - \frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u}}{\frac{\partial R_1}{\partial u}}, \quad {}^2K = - \frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \frac{\frac{\partial R_1}{\partial v}}{\frac{\partial R_2}{\partial v}}.$$

Denken wij voor ons stelsel brekende middenstoffen eens de brandpunten F en G (§ 13, p. 61), wier toegevoegde in het oneindige liggen, en die dus de „tegenpunten” der projectieve reeksen $P, \dots$ en $P_n, \dots$ zijn, dan moet, als we nog een tweede stel toegevoegde punten Q, Q_n toevoegen:

$$(PQF\infty) = (P_nQ_n\infty G), \text{ dus:}$$

$$\frac{PF}{QF} = \frac{Q_nG}{P_nG}, \text{ of:}$$

$$PF \cdot GP_n = QF \cdot GQ_n = \text{constant} = f^2$$

zijn (§ 13, p. 61), wat inderdaad vroeger onze grondbetrekking geweest is.

Möbius lost nu nog allerlei theoretisch belangrijke vraagstukken op, bijv.: Bij één brekende middenstof uit den brekings-index n de plaats der beide brandpunten F_1, G_1 , en de grootheid f_1^2 te bepalen. Indien dit vraagstuk ook voor een tweede middenstof is opgelost, het op te lossen voor de beide middenstoffen tegelijk. Afzonderlijke formules op te stellen voor een lenzenstelsel, d.w.z. voor het geval dat de 1e, 3e, 5e middenstof enz. uit lucht bestaat. Voorwerpen te beschouwen in vlakken loodrecht op de as, en de vergrooting te bepalen.

Wij gaan al deze kwesties met stilzwijgen voorbij, en eindigen met de volgende opmerking, de verrekijkers betreffende.

Wij vonden in § 11, Fig. 12, dat de figuren in het vlak door A loodrecht op de as, en hunne beeldpunten in het vlak door A_1 , homothetisch waren voor het punt P_1 , deze met hunne beeldpunten in het vlak door A_2 homothetisch voor P_2 , enz.; hieruit volgt gemakkelijk dat ook de punten in het vlak door A_1 en hunne beeldpunten in het laatste vlak, dus door A_n , homothetisch zijn, en als we nu met een verrekijker te doen hebben, dan worden (§ 14, p. 63) alle afmetingen loodrecht op de as vergroot in reden van $1 : N_{n+1}$. Daarentegen worden de afmetingen in de as (§ 14, p. 63) vergroot in reden van $1 : N_{n+1}^2$, dus in het algemeen in een andere reden. Ligt dus in Fig. 12, p. 55 rond om A een vlakke figuur, dan wordt het beeld om A_n gevonden door, zeggen wij de x -coördinaten in een bepaalde verhouding te veranderen, en de y -coördinaten in een andere. Maar dat is juist de manier waarop Euler in zijne verhandeling: „De Similitudine et Affinitate Linearum Curvarum”,

in „Introd. in Anal. Inf.” T. II, Cap. XVIII de *Affiniteit* gedefinieerd heeft.

23. M ö b i u s spreekt in zijn drie verhandelingen nergens over de zoogenaamde „naderende breuken,” van zijn kettingbreuken; met behulp waarvan men het als kettingbreuk gegeven getal systematisch hoe langer hoe beter kan benaderen, en die vooral voor oneindige kettingbreuken van groot belang zijn, omdat deze altijd irrationale getallen voorstellen, en een irrationaal getal natuurlijk slechts door rationale breuken te benaderen is. Zooals bekend is, geven de naderende breuken der kettingbreuken de beste naderende breuken die mogelijk zijn, wat eenvoudig zeggen wil dat indien bijv. $\frac{p}{q}$ een naderende breuk eener kettingbreuk is voor een getal x , het onmogelijk is dit getal beter te benaderen door een andere breuk, wier noemer kleiner is dan q ; immers de noemer eener breuk bepaalt de complicatie, de teller is daarvoor onverschillig. Zoo is het bijv. onmogelijk het getal π beter te benaderen dan door de breuk $\frac{22}{7}$ met behulp van een breuk, wier noemer kleiner is dan 7, en ook niet door een breuk, die nauwkeuriger is dan $\frac{355}{113}$, en een kleineren noemer heeft.

Met behulp van onze hakenuitdrukkingen zijn de naderende breuken gemakkelijk toe te voegen. Schrijven wij de kettingbreuk duidelijkheidshalve in den vorm:

$$x = (a_0, a_1, a_2, \dots),$$

dan is de eerste naderende breuk natuurlijk $(a_0) = \frac{1}{a_0}$, dus

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{a_0} = \frac{1}{[a_0]}.$$

De tweede is:

$$\frac{p_2}{q_2} = (a_0, a_1) = \frac{1}{a_0 - \frac{1}{a_1}} = \frac{a_1}{a_0 a_1 - 1} = \frac{[a_1]}{[a_0, a_1]} = \frac{[a_1]}{[a_0] a_1 - []}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = (a_0, a_1, a_2) = \frac{1}{a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2}}} = \frac{1}{a_0 - \frac{a_2}{a_1 a_2 - 1}} =$$

$$\frac{a_1 a_2 - 1}{a_0 a_1 a_2 - a_0 - a_2} = \frac{[a_1, a_2]}{[a_0, a_1, a_2]} = \frac{[a_1] a_2 - []}{[a_0, a_1] a_2 - [a_0]}$$

Zoo voortgaande, vindt men:

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{[a_1, a_2, a_3]}{[a_0, a_1, a_2, a_3]} = \frac{[a_1, a_2] a_3 - [a_1]}{[a_0, a_1, a_2] a_3 - [a_0 a_1]}. \text{ Enz.}$$

Stellen wij:

$$\frac{p_4}{q_4} = \frac{p_3 a_3 - p_2}{q_3 a_3 - q_2}, \text{ dan is:}$$

$$\begin{aligned} p_2 &= [a_1], & p_3 &= [a_1, a_2] \\ q_2 &= [a_0, a_1], & q_3 &= [a_0, a_1, a_2]. \end{aligned}$$

Maar dan kan men ook $\frac{p_3}{q_3}$ den vorm geven:

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{p_2 a_2 - p_1}{q_2 a_2 - q_1}, \text{ indien men slechts stelt:}$$

$$\begin{aligned} p_1 &= [\] = 1, & p_2 &= [a_1], \\ q_1 &= [a_0], & q_2 &= [a_0, a_1]. \end{aligned}$$

Zelfs kan men nog verder terug gaan, en schrijven:

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 a_1 - p_0}{q_1 a_1 - q_0},$$

indien men slechts stelt:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & p_1 &= [\] = 1, \\ q_0 &= [\] = 1, & q_1 &= [a_0]. \end{aligned}$$

Nu den anderen kant opgaande, zullen wij vinden:

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n a_n - p_{n-1}}{q_n a_n - q_{n-1}} = \frac{[a_1, \dots, a_{n-1}] a_n - [a_1, \dots, a_{n-2}]}{[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}] a_n - [a_0 a_1 \dots a_{n-2}]},$$

waaruit de algemeene uitdrukkingen volgen:

$$\begin{aligned} p_n &= [a_1, \dots, a_{n-1}] \\ q_n &= [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}], \end{aligned}$$

met de toevoeging:

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & p_1 &= 1, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= [a_0]. \end{aligned}$$

Is de kettingbreuk eindig, dan is de laatste naderende breuk natuurlijk het getal x zelf; dit was het geval bij de grootheid b_n uit § 10, p. 58, en inderdaad klopt de, met behulp van hakenuitdrukkingen gegeven, vorm voor b_n volmaakt met dien van p_{n+1} , indien men binnen de haken de volgorde der letters slechts omkeert.

Ook vinden wij hier onmiddellijk het bekende kunstje terug, om

de tellers en noemers der naderende breuken vlug en overzichtelijk uit te rekenen.

Men trekke twee horizontale lijnen:

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_4 & \dots \\
 \hline
 0 & 1 & [a_1] & [a_1, a_2] & \cdot & [a_1, a_2, a_3] \\
 \hline
 1 & [a_0] & [a_0, a_1] & [a_0, a_1, a_2] & \cdot & [a_0, a_1, a_2, a_3]
 \end{array}$$

en schrijve daarboven de wijzergetallen $a_0, a_1, a_2, \dots$, dan onder

$a_0 \frac{p_0}{q_0} = \frac{0}{1}$, en onder $a_1 \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{[a_0]}$, dan wordt:

$$p_2 = a_1 \cdot 1 - 0, \quad q_2 = a_1 [a_0] - 1,$$

dus van a_1 naar beneden tot 1, en dan naar links, en van a_1 naar beneden tot $[a_0]$, en dan naar links. En zoo vervolgens, steeds van boven naar beneden, en dan naar links. Dus voor $x = (1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots)$ bijv.:

$$\begin{array}{cccccc}
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
 \hline
 0 & 1 & 2 & 5 & 18 & 85 \\
 \hline
 1 & 1 & 1 & 2 & 7 & 33
 \end{array}$$

BOEKBESPREKINGEN.

Raymond Clare Archibald, *Outline of the history of mathematics*. Fourth Edition Revised, and Enlarged. The Mathematical Association of America, Inc. Oberlin, Ohio. 1939. 66 blz.

Van het practische werkje van Prof. Archibald, dat in Amerika veel als grondslag voor cursussen in de geschiedenis der wiskunde wordt gebruikt, verscheen een vierde, herziene en uitgebreide uitgave, die het weer geheel op de hoogte van den tijd brengt. Opnieuw zal het daardoor veel nut kunnen stichten. De zeer uitvoerige en zorgvuldig bewerkte literatuurlijst vormt een belangrijke bron van informatie voor ieder, die zich over de geschiedenis van een der behandelde onderwerpen wil oriënteeren. E. J. D.

Prof. Dr. A. D. Fokker, *Over het magnetisme*. Zaterdagmiddagvoordrachten in Teylersstichting. Overdruk uit Archives du Musée Teyler. Série III; Deel IX. 52 blz. 28 fig. gr. 8°. 's-Gravenhage. Martinus Nijhoff 1939. f 1.—.

Het is voor velen een steeds weerkerend genoegen de natuurkundige voordrachtreeksen in het Teyler Museum te Haarlem bij te wonen. Hierbij denk ik vooral aan leraren, die vaak door hun drukke werkkring niet in staat zijn veel contact met de wetenschappelijke centra te onderhouden. Zij kunnen dan over een bepaald onderwerp weer eens het nieuwste horen, waardoor hun belangstelling wordt onderhouden. Velen zullen echter om een of andere reden verhinderd zijn en voor dezen is het gelukkig, dat van de voordrachten een verslag wordt uitgegeven. Zij kunnen dan toch nog kennis nemen van de besproken onderwerpen.

In 1938 heeft Prof. Fokker een drietal voordrachten gehouden over het magnetisme, waarvan thans het verslag verschenen is. Achtereenvolgens worden besproken: Magnetisme in de Oudheid. Aardmagnetisme en kosmische elektrische stromen. Magnetische inwerking op vrije atomen en ionen. Magnetisch moment van atoomstralen. Magnetisch moment van ionen in paramagnetische stoffen. Paramagnetische susceptibiliteit en temperatuur. Paramagnetische en diamagnetische stoffen. Ferromagnetisme. Gebruik van wiskundige afleidingen is hierbij geheel vermeden.

Vergelijkt men de inhoud dezer voordrachten met die, welke Lorentz in 1921 over hetzelfde onderwerp hield, dan blijkt dat onze kennis

van de magnetische verschijnselen enorm is toegenomen. Verschillende problemen, die toen nog niet behandeld konden worden, zijn thans geheel of gedeeltelijk tot oplossing gebracht.

Voor belangstellenden in de problemen der moderne natuurkunde worden deze voordrachten ten eerste aanbevolen. F. B.

A. Gloden. (prof. à l'Athénée de Luxembourg) *Sur les égalités multigrades*. avec une préface de M. Maurice Kraitchik. 1938. Imprimerie de la Cour Joseph Beffort. Luxembourg. 91 p. Prix 25 frs. belges.

Een „égalité multigrade vraie aux r degrés $n_1, n_2, \dots, n_r$ ” wordt gedefinieerd door een diophantisch simultaan systeem van de gedaante

$$\sum_{k=1}^p a_k^x = \sum_{l=1}^q b_l^x \quad (x = n_1, n_2, \dots, n_r) \quad (1)$$

De grootheden a, b, n , stellen hierbij gehele getallen voor. Voor (1) wordt de verkorte schrijfwijze:

$$(a_1, a_2, \dots, a_p)^x = (b_1, b_2, \dots, b_q)^x \quad (x = n_1, n_2, \dots, n_r) \quad (1')$$

ingevoerd. Door aanvulling met de nodige nullen kan zonder beperking $p = q$ worden genomen. Het hoofddoel is, zo algemeen mogelijke parameter-oplossingen van het stelsel (1) te construeren.

Voorbeeld van een parameter-oplossing voor $p = 4, q = 3, n_1 = 1, n_2 = 2$:

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3; \quad b_1 = a_2 + a_3, \quad b_2 = a_3 + a_1, \quad b_3 = a_1 + a_2.$$

a_1, a_2 en a_3 stellen willekeurige gehele getallen voor (Euler-Goldbach). In het bijzonder wordt bestudeerd het geval $n_k = k$. (égalités multigrades aux n premiers degrés).

In hoofdstuk II worden algemene stellingen voor deze systemen afgeleid. Een hoofdrol speelt daarbij stelling II, die als volgt kan worden geschreven:

$$\begin{aligned} \text{Uit } (a_1, a_2, \dots, a_p)^x &= (b_1, b_2, \dots, b_p)^x \quad (x = 1, 2, \dots, n) \text{ volgt} \\ (a_1, a_2, \dots, a_p, b_1 + k, \dots, b_p + k)^x &= (b_1, b_2, \dots, b_p, \\ &\quad a_1 + k, a_2 + k, \dots, a_p + k)^x \quad (x = 1, 2, \dots, n + 1) \end{aligned}$$

Dit theorema is dus in zekere zin een existentie-theorema, want hierdoor wordt het bestaan aangetoond van gelijkheden voor willekeurig hoge waarden van n . Verder wordt o.m. aangetoond (Th. III), dat $p > n$ moet zijn (uitgezonderd in het triviale geval $a_i = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, p$)). Ook worden verschillende stellingen afgeleid voor het geval, dat x de eerste n even, resp. oneven getallen doorloopt.

In hoofdstuk III worden de bijzondere gevallen $n = 2$ tot en met 7 uitvoerig nagegaan, en daarbij wordt aangetoond, dat in al deze gevallen de minimum-waarde van $p = n + 1$. Van al deze gevallen worden parameter-oplossingen geconstrueerd, uitvoerig toegelicht door getallenvoorbeelden. Speciaal voor $n = 2$ en $n = 3$ wordt de

volledige oplossing van het gestelde probleem bereikt, daar de bijbehorende parametëroplossingen alle mogelijke gevallen insluiten.

In hoofdstuk IV worden de gevallen $n > 7$ in het kort besproken. Men is er nog niet in geslaagd in dit gebied de minimum-waarde van p tot $n + 1$ te reduceren. Voor $n = 8$ geeft de schrijver het volgende voorbeeld van 10 termen:

$$(1, 5, 11, 24, 28, 30, 42, 47, 58, 59)^x = (2, 3, 14, 19, 31, 33, 37, 50, 56, 60)^x \\ (x = 1, 2, \dots, 7, 8)$$

Deze onderzoeken zijn door den schrijver uitgevoerd tot $n = 24$. Het meest recente resultaat voor de laagste daarbij gevonden waarde van p is 400 (Januari 1939). In de hoofdstukken V en VI worden nog speciale „égalités multigrades” en daarmee samenhangende problemen beschouwd. Hoofdstuk VII brengt onderzoeken over „chaines multigrades”. Onder een „ch. m. vraie aux s degrés $n_1, n_2, \dots, n_s$ wordt verstaan:

$$(a_1, a_2, \dots, a_p)^x = (b_1, b_2, \dots, b_q)^x = (c_1, c_2, \dots, c_r)^x = \dots (x = n_1, n_2, \dots, n_s),$$

Ook hiervan worden parameter-oplossingen gegeven.

Het boek besluit in hoofdstuk VIII met toepassingen der é.m. op algebraïsche vergelijkingen en de numerieke berekening der logaritmen. Tenslotte wordt gewezen op betrekkingen met het probleem van Waring. Moessner en Schulz hebben de volgende identiteit opgesteld:

$$(2, 12, 18, 19, 29, 35, 39)^8 = (3, 9, 20, 21, 26, 37, 38)^8.$$

Door beide zijden met de 8ste macht van het zelfde willekeurige getal te vermeerderen, blijkt hieruit, dat er oneindig vele getallen zijn, die op minstens 2 manieren als som van 8 achtste machten zijn te schrijven. Dit feit, en analoge resultaten voor $p = 9$ en $p = 10$ leveren het bewijs van bijzondere gevallen van de in 1925 door Hardy en Littlewood opgestelde hypothese, dat er oneindig vele getallen zijn, die op 2 of meer manieren als som van k kde machten zijn te schrijven. De auteur eindigt met hetannonceren van nog meerdere gebieden, waarop deze theorie kan worden toegepast.

Het boek wordt voorafgegaan door een voorwoord van Kraitichik. Deze bekende specialiteit op het gebied van numerieke berekeningen merkt daarbij terecht op, dat dit boek het enige is, dat over dit weinig ontgonnen gebied handelt. De hierin behandelde uiterst elementaire onderzoeken dateren voornamelijk uit de laatste jaren. Ze zijn eerst bekend geworden uit tijdschriftartikelen van Tarry, Escott, Moessner, Gloden en tal van anderen. Het boek van Gloden is zeer elementair van opzet, en zeer duidelijk geschreven. Wij kunnen daarom de studie van dit werkje aan ieder, die zich wenst te oriënteren op dit gebied, dat sedert enige jaren ook in ons land de aandacht begint te trekken, van harte aanbevelen. De lezer zal uit dit boekje een volledige kennis kunnen verwerven van datgene wat gepresteerd is op dit elementaire, maar zeer aantrekkelijke terrein, dat nog in vele richtingen kan worden uitgebreid en verdiept.

S. C. van Veen.

Dr. E. Voellmy, *Fünfstellige Logarithmen- und Zahlentafeln*.¹⁾ Zürich, Orell-Füssli Verlag, 1939. 184 blz. Frcs 4,50; RM. 2,70.

Deze keurig uitgevoerde tafel voor schoolgebruik bevat de gewone logarithmen en de logarithmen der goniometrische functies in vijf decimalen, de waarden der goniometrische functies in vier decimalen, voorts opgaven van quadraten, wortels, enz., natuurwetenschappelijke constanten, en uitgebreide tafels voor berekeningen op het gebied van waarschijnlijkheidsrekening en verzekeringswiskunde (machten van e , faculteiten tot $30!$ en binomiaalcoëfficiënten, rentetafels, sterftetafels). Merkwaardig is eene duidelijke graphische voorstelling van de relatieve fout bij de benaderingen $\sin x \approx x$, $\tan x \approx x$ en $\tan x \approx \sin x$. Een portret van Jost Bürgi (1552—1632), den Zwitserschen voorlooper van Napier, is tegenover het titelblad geplaatst.
J. H. S.

S. S n i j d e r, *Een nieuwe uitgave van het periodiek systeem*. — P. Noordhoff N.V., 1939. Groningen, Batavia. — f 0,75.

Deze uitgave bestaat uit een geheel nieuwe voorstelling van het periodiek systeem der elementen, op stevig papier in kleurendruk uitgevoerd, met handleiding. Ze is in de eerste plaats bedoeld voor de gebruikers van het Leerboek der Scheikunde van A. E. van Arkel en H. G. S. Snijder. Daar dit leerboek geheel gebaseerd is op bouw der atomen en periodiek systeem, is het voor het gebruik ervan noodig de verschillende gegevens over electronen-structuur der atomen steeds bij de hand te hebben. In het Leerboek zijn deze gegevens wel in tabellen te vinden, maar de moeilijkheid bleef, dat men dikwijls verschillende tabellen moest raadplegen. De ontwerper van deze nieuwe uitgave heeft nu getracht de gegevens van deze tabellen in het periodiek systeem zelf op te nemen, en met succes. Zoo is het mogelijk met één blik de electronen-configuratie van ieder atoom te overzien. Hiertoe zijn afgesloten groepen van 2, 8, 18 en 32 electronen aangegeven met gekleurde stippen op kwartcirkels, die de electronenschalen voorstellen. (De oranje stip is, wat kleur betreft, niet erg geslaagd). Bijkomende electronen worden met cijfers op de betreffende schaal aangegeven.

Behalve de electronen-verdeeling is bij ieder atoom nog genoemd atoomnummer, atoomgewicht, positieve en negatieve valentie, en de stralen van ionen en atomen (voor zoover bekend). Een bijzonderheid van dit nieuwe systeem is verder, dat de nevenreeks-elementen in afzonderlijke hokjes staan, waardoor het speciaal karakter van deze elementen ook meer in het oog valt.

Ofschoon oorspronkelijk alleen ontworpen voor de gebruikers van

¹⁾ Maakt deel uit van het Unterrichtswerk des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer, waarvan reeds verscheidene deelen in „Euclides” besproken zijn. XIII, 166, XV 42, 147.

Ondergetekende, abonné op { Nieuw Archief voor Wiskunde
„Christiaan Huygens”
„N. T. voor Wiskunde”
„Euclides”

verzoekt toezending van 1 exemplaar:

DR P. MOLENBROEK, Leerboek der Vlakke Meetkunde

geb. à f 10.— (gewone prijs is f 11.50)

DR DIJKSTERHUIS, Vreemde woorden in de Wiskunde

ing. à f 1.60, geb. à f 2.10 (gewone prijs is f 1.90, geb. f 2.40)

DR GERRETSEN, Topologische behandeling van de Meetkunde van het aantal

ing. à f 4.—, geb. à f 5.— (gewone prijs is f 4.90, geb. f 5.90)

DR HLAVATY, Differentialgeometrie

ing. à f 12.50, geb. à f 14.— (gewone prijs is f 14.—, geb. f 15.50)

DR RUTGERS, Physische Scheikunde

ing. à f 11.25, geb. à f 12,25 (gewone prijs is f 12.50, geb. f 13.50)

door bemiddeling van de boekhandel

direct per post,

Naam:

Woonplaats:

Iedere abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld vóór 1 Dec. 1939; voor Indië vóór 1 Febr. 1940. A.u.b. door te halen wat *niet* wordt verlangd.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

1½ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post Giro No. 6593

GRONINGEN.

PROSPECTUS.

Dr. P. MOLENBROEK

LEERBOEK

DER

VLAKKE MEETKUNDE



ACHTSTE DRUK

640 bladzijden - 590 figuren

Prijs gebonden f 11.50

Voor intekenaars op Noordhoff's
Wisk. Tijdschriften tijdelijk f 10.—

P. NOORDHOFF N.V. — 1939 — GRONINGEN, BATAVIA

In de boekhandel verkrijgbaar en bij
N.V. UITGEVERS MIJ NOORDHOFF-KOLFF
Laan Holle 7 - Batavia

INHOUD.

Hoofd- stuk	§ §		Bladzijde	Stellingen	Figuren	Werkstukken	Voor- beelden
—	—	Inleiding	1—7	—	—	—	—
I	1—6	De rechte lijn	8—18	—	1—10	—	1
II	7—12	Hoeken	19—31	1—4	11—29	—	—
III	13—18	Snijding van twee rechten door een derde. Evenwijdige rechten	32—39	5—12	30—39	—	—
IV	19—24	De hoeken van een driehoek: Verplaat- singen. Congruentie. Hoeken en zijden	40—58	13—27	40—61	—	—
V	25—35	Rechthoekige en gelijkbenige driehoeken. Vierhoeken. Omgekeerden	59—84	28—48	62—92	—	2—7
VI	36—40	Veelhoeken	85—92	49—54	93—101	—	—
VII	41—51	Eenvoudigste eigenschappen van de cir- kel; cirkel en rechte; twee cirkels .	93—117	55—67	102—130	—	—
VIII	52—58	Werkstukken	118—141	—	131—161	I—XIII	8—11
IX	59—66	Meetkundige plaatsen.	142—162	—	162—186	—	12—23
—	67	Eerste herhaling	162—165	—	—	—	—
X	68—77	Verhouding van lijnstukken. Oppervlak- ten	166—186	68—80	187—213	XIV	24, 25
XI	78—92	Evenredigheid van lijnstukken	187—216	81—95	214—242	XV—XVIII	—

XII	93—99	Vermenigvuldiging van figuren	217—234	96, 97	243—263	XIX	26—34
XIII	100—107	Gelijkvormigheid.	235—251	98—108	264—275	—	35, 36
XIV	108—114	De stellingen van MENELAOS en CEVA .	252—273	109—111	276—291	—	37—40
XV	115—123	Berekening van lijnstukken. Constructies	274—301	112—119	292—324	XX, XXI	41—47
—	124	Tweede herhaling	302—306	—	—	—	—
XVI	125—137	Meten van hoeken door cirkelbogen . .	307—349	120—124	325—370	XXII	48—61
XVII	138—147	Lijnstukken in de cirkel	350—375	125—133	371—398	XXIII, XXIV	62—66
XVIII	148—159	Regelmatische veelhoeken. Lengte en oppervlakte van de cirkel.	376—415	134—149	399—434	—	67
XIX	160—171	Harmonische ligging. Pool en poollijn .	416—457	150—167	435—481	XXV, XXVI	68—76
XX	172—182	Machtlijn. Bundels en netten.	458—501	168—181	482—511	XXVII	77—84
XXI	183—190	Inversie.	502—550	182—189	512—554	XXVIII	85—87
XXII	191—196	Maxima en minima	551—580	190	555—590	—	88—94
—	197, 198	Algemene herhaling	581—589	—	—	—	—
XXIII	199—203	K. HARLAAR					
		Het axiomastelsel van VAN DER WAERDEN. Maatgetallen. Oppervlakte. . .	590—606	—	—	—	—
		Dr. E. J. DIJKSTERHUIS					
		Historische aantekeningen.	607—618	—	—	—	—
		Register.	619—636	—	—	—	—
		Formules	636, 637	—	—	—	—
		Inhoud	638, 639	—	—	—	—

VOORBERICHT BIJ DE ACHTSTE DRUK.

Deze herdruk wijkt sterk af van de vorige; het boek is, ook in letterlijke zin, geheel opnieuw geschreven; het is niet doenlijk alle of maar een deel van de veranderingen aan te geven. We willen volstaan met het volgende.

De grondslagen zijn in het boek behoorlijk gelegd; voor een eerste beoefening ruimschoots voldoende. Aan het eind van de studie kan degene, die behoefte gevoelt aan een stevige axiomatische grondslag, bevrediging vinden in hoofdstuk XXIII en in het daar genoemde boek van Prof. VAN DER WAERDEN.

De volgorde van de stof is in deze druk zo, dat tot en met hoofdstuk XVIII de gewone vlakke Meetkunde wordt afgedaan, maar niet in de oppervlakkige behandeling van de schoolboeken. In die eerste 18 hoofdstukken zal men in theorie en vraagstukken en voorbeelden heel wat vinden, dat enkel past in een studieboek voor volwassenen, hetgeen dit boek wil zijn. Daarna komen de hoofdstukken XIX, XX en XXI met leerstof, die in het bijzonder tot de eisen voor de akten Wiskunde L.O. en K_I behoort. Daartoe rekenen we ook, wat we schreven over maxima en minima in het nieuwe hoofdstuk XXII; § 195, het waardige sluitstuk van dit onderwerp, behoeft men o.i. voor deze examens niet te kennen.

Weggelaten is de meetkundige behandeling van ellips, hyperbool en parabool; daarvoor wordt verwezen naar

P. WIJDENES, De kegelsneden voor het M.O. (80 ct.),

J. VERSLUYS, De meetkunde der kegelsneden (*f* 1,90),

Prof. Dr. J. G. RUTGERS, De meetkunde der kegelsneden (*f* 5,—).

Het eerste geeft voldoende voor de kandidaten Wiskunde L.O., die er gaarne iets van willen weten; het tweede geeft genoeg voor de akte Wiskunde K_I.

Wij hebben gemeend in dit boek niet enkel theorie en vraagstukken te moeten geven, maar ook leerzame voorbeelden. Men vindt volledige uitwerkingen van vraagstukken en van werkstukken en men leert, hoe men meetkundige plaatsen opspoort en naar den eis behandelt. Het aantal voorbeelden is niet minder dan 94, die samen ongeveer 100 bladzijden beslaan.

Van de figuren uit de vorige druk zijn er o.a. 35 vervallen wegens het weglaten van de kegelsneden; toch is het aantal in deze druk nog 82 groter dan in de vorige; de 590 figuren, waarvan de meeste nieuw zijn en die opzettelijk op kleine schaal zijn getekend, beslaan samen met de onderschriften minstens 75 bladzijden.

In de zevende druk stonden ongeveer 900 vraagstukken, waarvan er heel wat als te eenvoudig gemist konden worden; deze zijn dus geschrapt en vervangen door andere, die meer in overeenstemming zijn met het peil van het boek en van de examens voor de beide akten Wiskunde en met de opzet het werk tot een Leerboek der Vlakke Meetkunde te verheffen. In deze achtste druk vindt men 935 vraagstukken; vele daarvan zijn onderverdeeld in *a*, *b*, *c* . . . , zodat het aantal eigenlijk wat groter is. De antwoorden met aanwijzingen en korte oplossingen verschijnen tegelijkertijd met het boek.

In de theorie, in de voorbeelden en in de vraagstukken vindt men verscheidene klassieke vraagstukken; deze kwamen in de vorige druk niet voor; men zie de eigennamen in het register.

Voeg bij dit alles nog het belangrijke hoofdstuk XXIII, de historische aantekeningen en het uitgebreide register, dan is daarmee de grotere omvang grotendeels verklaard. Het is echter minder deze, dan wel de meer strenge mathematische en logische opbouw, die deze druk onderscheidt van de vorige en hem stempelt tot een handboek van de Vlakke Meetkunde. Deze hoedanigheid maakt, dat het werk tevens als leidraad kan dienen voor hen, die het vak dagelijks moeten onderwijzen en waarvan zeer velen van de Lagere Meetkunde weinig meer hebben gezien, dan wat een of ander schoolboek geeft.

We verwachten, dat dit boek door zijn rijke inhoud tevens in de smaak zal vallen van de velen, die uit pure liefhebberij zich met de Vlakke Meetkunde bezig houden en voor wie een schoolboek niet voldoende geestelijk voedsel biedt.

Verder zeggen we nog iets voor de grote klasse van gebruikers, de studerende voor de akte Wiskunde L.O. en hun opleiders. Ten eerste: enige toevoegingen zijn opgenomen, omdat de examens die eisten. In 1938 werd behalve naar de gewone stof gevraagd naar de volgende onderwerpen (de lijst is niet volledig): negenpuntscirkel, rechte van WALLACE, de raakproblemen, het punt van NAGEL, isogonaal verwanten, symmedianen, het punt van LEMOINE, de cirkels van APOLLONIUS, de punten van BROCARD, orthogonaal en diametraal snijden, harmonisch viertal, cirkelbundels, volledige vierhoek; inversie; zelfs naar cirkelnetten werd gevraagd. Enige van deze onderwerpen zocht men in de vorige druk tevergeefs.

Bij een eerste bestudering zal men goed doen de theorie in kleine letter over te slaan. Aan opleiders wordt de raad gegeven vooraf de stof en de vraagstukken na te gaan, opdat ze weten, wat ze van hun leerlingen, zo geheel verschillend in aanleg, kunnen eisen; of ze een of ander zullen overslaan of dat ze hun bij de eerste keer reeds de volle maat kunnen geven; wij voor ons vinden het laatste niet wenselijk. De opleider stelle zich tot taak enige schifting te maken in de vraagstukken van dit boek; aan de hand van de oplossingen zal hem dat niet moeilijk vallen. We hebben niet de meer moeilijke op een of andere wijze aangegeven; het is nl. al gebeurd, dat vraagstukken, die we met een sterretje hadden gemerkt (dat betekende: voor L.O. overslaan) op het schriftelijk examen L.O. werden opgegeven.

Gaarne spreek ik hier mijn dank uit aan mijn medewerkers HARLAAR en HERREILERS voor alles en dat is heel veel, wat zij aan dit boek hebben gedaan. Men beschouwe het werk als de vrucht van onze innige samenwerking. Wij alle drie houden ons aanbevolen voor op- en aanmerkingen, die dit werk ten goede kunnen komen; van alle gebruikers, ook van studerenden dus.

De historische aantekeningen zijn van de hand van Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, wien we gaarne dank brengen voor zijn steeds weer betoonde bereidwilligheid mede te werken in het belang van de wiskunde in het algemeen en van haar geschiedenis in het bijzonder.

Amsterdam, Juni 1939.

P. WIJDENES.

Jac. Obrechtstraat 88.

Met goedkeuring van Dr. MOLENBROEK wordt het herzieningsrecht op dit werk door ondergeteekende uitgeoefend buiten eenige verantwoordelijkheid van Dr. MOLENBROEK voor inhoud en vorm.

P. W.

AANHANGSEL.

HOOFDSTUK XXIII.

Het axiomastelsel van Van der Waerden.

Maatgetallen. Oppervlakte.

A. *Het axiomastelsel van Van der Waerden en zijn betekenis voor de planimetrie.*

§ 199. Het axiomastelsel van VAN DER WAERDEN¹⁾ omvat de volgende axioma's²⁾:

I. *Verbindingsaxioma's.*

- I. 1. *Door twee verschillende punten gaat één en slechts één rechte.*
- I. 2. *Door drie verschillende punten, die niet op een rechte liggen, gaat één en slechts één vlak.*
- I. 3. *Als een rechte met een vlak twee verschillende punten gemeen heeft, ligt de rechte geheel in het vlak.*
- I. 4. *Elke rechte bevat minstens twee verschillende punten.*
- I. 5. *Elk vlak bevat minstens drie verschillende niet op een rechte liggende punten.*
- I. 6. *Er zijn vier verschillende punten, die niet in een vlak en niet op een rechte liggen.*
- I. 8.³⁾ *Twee verschillende rechten in een vlak, die met een derde rechte in dat vlak evenwijdig zijn, zijn ook onderling evenwijdig.*

II. *Orderingsaxioma's.*

- II. 1. *Als het punt B tussen de punten A en C ligt, zijn A, B en C drie verschillende punten van een rechte.*

¹⁾ Prof. Dr. B. L. VAN DER WAERDEN, De logische grondslagen der Euklidische meetkunde.

²⁾ We raden den lezer aan, eerst de inleiding nog eens door te lezen en ook de definities op te slaan van de in de axioma's voorkomende begrippen evenwijdig, halve rechte, verlengde, enz.

³⁾ Het ontbrekende nr. 7 houdt in, dat, als twee vlakken een punt gemeen hebben, ze nog minstens een hiervan verschillend punt gemeen hebben. In het volledige axioma-stelsel is I 7 overbodig, daar het uit de vooraangaande axioma's in vereniging met die van groep II kan worden afgeleid. De uitspraak I 7 is in het stelsel van VAN DER WAERDEN alleen ter afronding van het stel verbindingsaxioma's meegenummerd. Voor de planimetrie heeft I 7 trouwens geen betekenis.

bovengenoemd leerboek, heeft dit systeem ook als zelfstandige uitgave haar volle recht van bestaan voor ieder, die als physicus of chemicus met atoom-eigenschappen te maken heeft. Vooral denk ik hier aan studenten in de wis- en natuurkundige faculteit. Bij gebruik ervan zal heel wat noodeloos zoeken worden voorkomen en een meer grondige studie van dit periodiek systeem zal het inzicht in de eigenschappen van de atomen zeer ten goede komen. Wij juichen deze handige en praktische uitgave ten zeerste toe.

Voor degenen, die deze uitgave naast het Leerboek van Van Arkel en Snijder gebruiken, lijkt het mij een bezwaar, dat de periodes van het periodiek systeem in beide een verschillende nummering dragen. Zoo wordt de periode H, He in het Leerboek de Voorperiode genoemd en in de hier besproken uitgave Periode I en zoo vervolgens.

Dit bezwaar zal echter een vruchtbaar gebruik niet in den weg staan.

P. H. v. L a e r.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF N.V., Groningen.

NOORDHOFF's *Tafel in vier decimalen*, 4de druk, 16e—20e duizendtal, gebonden f 1.—.

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, *Vreemde woorden in de Wiskunde* f 1,90, gebonden f 2.40.

Dr. J. C. H. GERRETSEN, *Inleiding tot een Topologische behandeling van de Meetkunde van het Aantal* f 4.90, gebonden f 5.90.

NOORDHOFF's *Schooltafel* (vijf decimalen) 4de druk, 16e—20e duizendtal, f 1.50.

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe Schoolalgebra II* 10de onveranderde druk f 2.25.

Naamlijst van leerlingen; enkel ex. 40 cent, 100 ex. f 35.—; dubbel ex. 60 cent, 100 ex. f 52.50.

Van J. B. WOLTERS, Groningen.

Dr. D. VAN DANTZIG, *Vragen en Schijnvragen over Ruimte en Tijd*. Een toepassing van den Wiskundigen Denkvorm f 0.75

KORREL.

XLII. NAAR AANLEIDING VAN EEN MOEILIKHEID OVER EVENREDIGHEDEN.

In het vorige nummer van Euclides vermeldde de Heer Schogt op pag. 28 moeilijkheden, die zich kunnen voordoen ten gevolge van het niet gelijkwaardig zijn der vergelijkingen

$$f_1(x) : f_2(x) = f_3(x) : f_4(x)$$

en

$$f_1(x) \cdot f_4(x) = f_2(x) \cdot f_3(x).$$

Deze moeilijkheden kunnen omzeild worden door te definieren: $a : b = c : d$ betekent hetzelfde als $ad = bc$.

Deze definitie heeft nog meer voordelen boven de gebruikelijke definitie, die verhouding en quotient identificeert. Zo zijn volgens deze definitie

y is evenredig met x

en

als y_1 en y_2 aangenomen worden voor $x = x_1$ opv. $x = x_2$, dan is steeds $y_1 : y_2 = x_1 : x_2$

gelijkwaardige uitspraken. De beperkende bepaling, dat daartoe $x_2 \neq 0$ ondersteld moet worden, kan nu vervallen.

Verder is de toepassing der evenredigheden er door soms in meer algemene vorm mogelijk. Zo geldt nu algemeen, dat

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

strijdig of afhankelijk zijn, als

$$a_1 : a_2 = b_1 : b_2,$$

zonder dat hieraan de beperkende voorwaarde $a_2 \neq 0$ en $b_2 \neq 0$ toegevoegd moet worden.

Ook mag men nu steeds de middelste termen of de uiterste termen verwisselen, ook in het geval, dat één dezer termen gelijk aan 0 is.

De afleidingen der hoofdeigenschap en der omgekeerde hoofdeigenschap kunnen vervallen, hetgeen de theorie vereenvoudigt. Het enige, dat de theorie daarentegen iets moeilijker maakt, is het vervallen der transitiviteit der „gelijkheid” van verhoudingen, aangezien elke verhouding nu gelijk aan $0 : 0$ is.

P. G. J. Vredenduin.

NASCHRIFT.

Het bovenstaande is ongetwijfeld vernuftig gevonden. Maar ik acht het een groot bezwaar (vooral van didaktisch standpunt bezien), dat de beteekenis van het deelteeken gewijzigd wordt. (Dit zelfde bezwaar heb ik tegen de opvatting, dat $2 : 3 : 5 = 20 : 30 : 50$ bij *definitie* beteekent $2 : 20 = 3 : 30 = 5 : 50$.)

J. H. S.

DE KARAKTERISERING VAN DE GONIOMETRISCHE FUNCTIES DOOR MIDDEL VAN EEN FUNCTIONAALBETREKKING

DOOR

J. C. H. GERRETSEN.

1. In een onlangs verschenen zeer lezenswaardig leerboek over differentiaal- en integraalrekening van O. Haupt¹⁾ wordt een methode aangegeven om de goniometrische functies arithmetisch te definiëren, door van één dezer functies, nl. $\cos x$ op te merken, dat de functie de volgende eigenschappen heeft:

(I) De (reële) functie voldoet aan de functionaalvergelijking:

$$f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)f(y) = 0;$$

(II) $f(x)$ is gedefiniëerd voor alle reële waarden van x ;

(III) $f(x)$ is afgeleide van een (continue) functie $F(x)$;

(IV) $f(x)$ is geen constante.

In het genoemde boek wordt bewezen, dat $f(x)$ een oplossing moet zijn van de differentiaalvergelijking:

$$f''(x) = kf(x),$$

waarin k een van nul verschillende reële constante voorstelt. Verder is $f(0) = 1$ en $f'(0) = 0$.

Voor $k < 0$ vinden we als oplossing de functie:

$$f(x) = \cos \sqrt{-k} x;$$

voor $k > 0$ wordt als oplossing gevonden de functie:

$$f(x) = \cosh \sqrt{k} x;$$

Geen andere dan de genoemde functies voldoen dus aan de voorwaarden (I) tot en met (IV).

¹⁾ Haupt, O. *Differential- und Integralrechnung* (Berlin 1938), II, p. 56.

Hoewel dit een belangwekkend resultaat is, moet het toch als een bezwaar aangemerkt worden, dat door de genoemde voorwaarden de functie $\cos x$ niet volledig gekarakteriseerd wordt; want de uit een elementair-oogpunt geheel verschillende hyperbolische cosinus voldoet eveneens. Bovendien is de voorwaarde (III) wegens het minder elementaire karakter niet bijzonder fraai.

We zullen in het volgende laten zien, dat de functies $f(x) = \cos x$ en $g(x) = \sin x$ éénduidig gekarakteriseerd worden door de voorwaarden:

(I') De (reële) functies $f(x)$ en $g(x)$ voldoen aan de functionaalvergelijking:

$$f(x - y) = f(x)f(y) + g(x)g(y);$$

(II') $f(x)$ en $g(x)$ zijn gedefiniëerd voor iedere reële waarde van x ;

(III') Voor $g(x)$ geldt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 1.$$

Ten overvloede merken we op, dat dus ten aanzien van continuïteit en differentiëerbaarheid ²⁾ niets ondersteld wordt.

2. We gaan uit van de onderstelling, dat er twee functies $f(x)$ en $g(x)$ bestaan, die aan de voorwaarden (I') tot en met (III') voldoen.

Het rechterlid van (I') is symmetrisch in x en y , zodat:

$$f(y - x) = f(x - y),$$

hetgeen dezelfde betekenis heeft als:

$$(1) \quad f(-x) = f(x),$$

voor alle waarden van x .

$f(x)$ is dus een even functie.

Daar:

$$(2) \quad g(x)g(y) = f(x - y) - f(x)f(y),$$

volgt, in verband met (1):

$$g(x)g(y) = g(-x)g(-y).$$

²⁾ We wijzen er op, dat (III') nog niet de differentiëerbaarheid van $g(x)$ voor $x = 0$ uitdrukt. Immers, we zouden dan reeds moeten weten, dat $g(0) = 0$ is.

Op grond van (III') mogen we besluiten tot het bestaan van een getal y_0 met $g(-y_0) \neq 0$. Voor iedere waarde van x is dan

$$(3) \quad g(-x) = g(x) \frac{g(y_0)}{g(-y_0)}.$$

Voor iedere van nul verschillende waarde van x moet gelden:

$$\frac{g(-x)}{-x} = \frac{g(x)}{x} \frac{g(y_0)}{g(-y_0)}.$$

Laten we nu hierin $x \rightarrow 0$ gaan, dan vinden we, wederom op grond van (III'):

$$-1 = \frac{g(y_0)}{g(-y_0)},$$

zodat in de plaats van (3) geschreven kan worden:

$$(4) \quad g(-x) = -g(x),$$

voor alle waarden van x .

$g(x)$ is dus een oneven functie.

De gevonden eigenschappen van $f(x)$ en $g(x)$ hebben tot gevolg, dat naast (I') ook de volgende functionaalbetrekking juist is:

$$(5) \quad f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y).$$

De gelijkheid (4) is geldig voor $x = 0$, dus:

$$(6) \quad g(0) = 0.$$

Wanneer we in (I') nemen $y = 0$, wordt op grond van (6) gevonden:

$$f(x) = f(x)f(0),$$

of:

$$(7) \quad f(x) \cdot (1 - f(0)) = 0.$$

Er is nu stellig een waarde van x , waarvoor $f(x)$ van nul verschilt. Immers, zou $f(x)$ voor iedere waarde van x gelijk zijn aan nul, dan zou uit (2) volgen:

$$g(x)g(y) = 0,$$

voor alle waarden van x en y . We verkrijgen evenwel een tegenspraak, wanneer we hierin voor x en y het reeds eerder genoemde getal y_0 nemen. Op grond van deze opmerking is het geoorloofd om uit (7) te besluiten tot:

$$(8) \quad f(0) = 1.$$

De vervanging in (I') van y door x geeft:

$$(9) \quad 1 = f^2(x) + g^2(x).^3$$

Verder is op grond van (5) en (9):

$$(10) \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = f^2\left(\frac{x}{2}\right) + g^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - 2g^2\left(\frac{x}{2}\right).$$

Wegens:

$$g(x) = \frac{g(x)}{x} \cdot x \rightarrow 1 \cdot 0 = 0,$$

voor $x \rightarrow 0$, is:

$$(11) \quad \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

Uit (10) volgt dan:

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$$

Uit (5) vindt men nu, lettende op (11) en (12):

$$(13) \quad \lim_{y \rightarrow 0} f(x+y) = f(x).$$

$f(x)$ is continu voor iedere waarde van x .

In (2) nemen we voor y het meermalen genoemde getal y_0 , waarvoor $g(y_0) \neq 0$ is. Op grond van de bekende regels voor continue functies volgt:

$g(x)$ is continu voor iedere waarde van x .

De betrekking:

$$(14) \quad f(x+y) - f(x-y) = 2g(x)g(y),$$

wordt uit (5) en (I') door aftrekking gevonden. Hierin vervangen

we x door $x + \frac{h}{2}$ en y door $\frac{h}{2}$; er komt:

$$(15) \quad f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x) = 2g\left(x + \frac{h}{2}\right)g\left(\frac{h}{2}\right).$$

In verband met de continuïteit van $g(x)$ kan men uit (15) afleiden, lettende op (III'):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f(x)}{\frac{h}{2}} = \lim_{\frac{h}{2} \rightarrow 0} g\left(x + \frac{h}{2}\right) \lim_{\frac{h}{2} \rightarrow 0} \frac{g\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = g(x),$$

³⁾ We schrijven $f^2(x)$ in plaats van $f(x)f(x)$, enz.

dus:

$$(16) \quad f'(x) = -g(x).$$

$f(x)$ is differentiëerbaar voor iedere waarde van x .

Door optelling wordt uit (5) en (I') gevonden:

$$(17) \quad f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

Door differentiatie naar y vinden we:

$$(18) \quad -g(x+y) + g(x-y) = -2f(x)g(y).$$

Na vervanging van x door $x + \frac{h}{2}$ en y door $\frac{h}{2}$ kan voor (18) worden geschreven:

$$g(x+h) - g(x) = 2f\left(x + \frac{h}{2}\right)g\left(\frac{h}{2}\right).$$

Daar $f(x)$ continu is volgt in verband met (III'):

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{\frac{h}{2} \rightarrow 0} f\left(x + \frac{h}{2}\right) \lim_{\frac{h}{2} \rightarrow 0} \frac{g\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}} = f(x),$$

dus:

$$(19) \quad g'(x) = f(x).$$

$g(x)$ is differentiëerbaar voor iedere waarde van x .

Zonder moeite blijkt nu verder dat $f(x)$ en $g(x)$ afgeleiden bezitten van willekeurig hoge orde.

3. We hebben in het voorgaande gezien, dat door functies, waarvoor de voorwaarden (I') tot en met (III') vervuld zijn, voldaan is aan (6), (8), (16) en (19).

We zullen nu laten zien, dat er inderdaad functies zijn, die aan (I'), (II') en (III') voldoen en daardoor éénduidig bepaald zijn. Daartoe maken we gebruik van het hulpmiddel der successieve approximaties.

Als eerste approximatie voor $f(x)$ nemen we de functie:

$$(20) \quad f_1(x) = 1,$$

die voor iedere waarde van x de waarde 1 bezit. Als eerste approximatie voor $g(x)$ nemen we de functie:

$$(21) \quad g_1(x) = x.$$

Door deze functies is aan (6) en (8) voldaan.

We nemen aan, dat de n -de approximaties $f_n(x)$ en $g_n(x)$, ($n \geq 1$), bekend zijn als continue functies voor iedere waarde van x . We bepalen dan $f_{n+1}(x)$ uit:

$$(22) \quad f'_{n+1}(x) = -g_n(x),$$

mits

$$(23) \quad f_{n+1}(0) = 1,$$

en $g_{n+1}(x)$ uit:

$$(24) \quad g'_{n+1}(x) = f_{n+1}(x),$$

mits

$$(25) \quad g_{n+1}(0) = 0.$$

Blijkbaar is:

$$(26) \quad f_{n+1}(x) = 1 - \int_0^x g_n(x) dx$$

en

$$(27) \quad g_{n+1}(x) = \int_0^x f_{n+1}(x) dx.$$

Door volledige inductie kan gemakkelijk bewezen worden, dat de aldus gedefiniëerde functies $f_n(x)$ en $g_n(x)$ er aldus uitzien:

$$(28) \quad f_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}$$

en

$$(29) \quad g_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}.$$

Voor onbepaald toenemende waarden van n convergeren deze functies opv. naar

$$(30) \quad f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!} = \cos x$$

en

$$(31) \quad g(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} = \sin x.$$

Van deze functies bewijst men op de bekende manier, ⁴⁾ dat ze

⁴⁾ Men raadplege: L a n d a u, E. *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung* (Groningen 1934), Kapitel 16.

S c h u h, F. *Het getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal* (Groningen 1927), Hoofdstuk IX.

de in (I'), (II') en (III') genoemde eigenschappen bezitten, zodat daarmee het existentiebewijs geleverd is.

Er rest ons nog het bewijs van de éénduidigheid. Laten we daartoe onderstellen, dat $F(x)$ en $G(x)$ eveneens functies zijn, die aan de voorwaarden (I') tot en met (III') voldoen. Dan zijn ook alle in het voorgaande genoemde eigenschappen voor deze functies geldig. Wegens (1) en (4) is het voldoende de overeenstemming van de functies f en F , evenals van g en G , te bewijzen voor positieve waarden van x ; ⁵⁾ de overeenstemming voor $x = 0$ wordt door (6) en (8) uitgedrukt.

De verzameling $\mathfrak{B}$ der niet-negatieve getallen x_0 met de eigenschap, dat f en F , evenals g en G , overeenstemmen voor alle waarden van x , die aan $0 \leq x \leq x_0$ voldoen, is niet leeg; immers $x_0 = 0$ behoort tot de verzameling.

We nemen aan, dat niet voor alle waarden van x geldt:

$$(32) \quad f(x) = F(x), \quad g(x) = G(x).$$

Dan is de verzameling $\mathfrak{B}$ naar boven begrensd; zij ξ de bovenste grens.

De (continue) functie $|g - G|$ heeft in het interval

$$\eta \leq x \leq \xi + \frac{1}{4}$$

een niet-negatief maximum μ ; hierin is $\eta = \max(0, \xi - \frac{1}{4})$.

Uit:

$$(33) \quad f' - F' = G - g$$

volgt, voor iedere waarde van x uit het genoemde interval: ⁶⁾

$$(34) \quad |f - F| = \left| \int_{\eta}^x (G - g) dx \right| \leq \int_{\eta}^x |G - g| dx \leq \mu (x - \eta) \leq \frac{1}{2} \mu.$$

Verder volgt uit:

$$(35) \quad g' - G' = f - F,$$

voor iedere waarde van x uit het genoemde interval:

$$(36) \quad |g - G| = \left| \int_{\eta}^x (f - F) dx \right| \leq \int_{\eta}^x |f - F| dx \leq \frac{1}{2} \mu (x - \eta) \leq \frac{1}{4} \mu.$$

⁵⁾ We schrijven f in plaats van $f(x)$, enz.

⁶⁾ $\int_{\eta}^x (f' - F') dx = f - F \Big|_{\eta}^x = f(x) - F(x)$, omdat $f(\eta) = F(\eta)$.

Hieruit volgt, omdat μ een waarde is van de functie $|g - G|$:

$$\mu \leq \frac{1}{4}\mu,$$

hetgeen alleen mogelijk is voor $\mu = 0$. Dit betekent evenwel, dat g en G , en wegens (34) ook f en F , voor alle waarden van x in het interval $\eta \leq x \leq \xi + \frac{1}{4}$ overeenstemmen, zodat $\xi + \frac{1}{4}$ tot de verzameling $\mathfrak{B}$ behoort. We komen daarmee echter in strijd met het feit, dat ξ de bovenste grens is van de verzameling $\mathfrak{B}$.

De tegenspraak toont aan, dat $\mathfrak{B}$ niet naar boven begrensd is, m.a.w., dat de gelijkheden (32) voor iedere waarde van x gelden.

DE MEETKUNDIGE VAKTAAL

DOOR

A. VAN THIJN.

In de 12e en 15e jaargang van Euclides komen artikelen voor resp. van de h.h. Schogt en Dr. van Wijk onder bovengenoemde titel. Bij ons onderwijs in de meetkunde, zo ongeveer is de gedachtegang van die artikelen, gebruiken wij heel dikwijls woorden, die twee of meer verschillende begrippen aanduiden en in dit opzicht zouden wij onze terminologie moeten herzien. Ik wil mij hier beperken tot het artikel van Dr. van Wijk, dat alleen over het woord lijn handelt en daarvoor 3 verschillende uitdrukkingen wil invoeren.

- 1o. *lijn*, onbepaald verlengd in beide richtingen,
- 2o. *halve lijn*, onbepaald verlengd in één richting,
- 3o. *lijn-stuk*.

Degenen, die daaraan niet meedoen, zijn dan aansprakelijk voor een zekere „chaos”. En (zo wordt in een naschrift van de redactie gezegd) „men zou geneigd zijn hun tegenstand te zien als een uiting van onberedeneerd conservatisme”.

Nu behoor ik in geenerlei opzicht tot het conservatieve heir en heb dit door invoering van verschillende nieuwere denkbeelden bij het onderwijs in de wiskunde getoond; maar omdat mijn naam in dat artikel genoemd wordt, wil ik wel een woord van verweer uiten.

Tegen de term lijnstuk heb ik geen bezwaar en gebruik dat woord ook wel, zij het slechts bij uitzondering. Zo geef ik o.a. de volgende definitie: een driehoek is een deel van een plat vlak, begrensd door 3 lijnen; dit had dan moeten zijn „lijnstukken”. Maar nooit heb ik daarbij iets van enig misverstand gemerkt. Wil men aan een onderscheid tussen lijn en lijnstuk consequent vasthouden, dan dient men ook te onderscheiden:

loodlijn en loodlijnstuk
 zwaartelijn en zwaartelijnstuk
 hoogtelijn en hoogtelijnstuk enz.

maar dan ook nog

zijde en zijdelijn of zijlijn.¹⁾

Ik moet hierbij echter opmerken, dat ook *overmaat* van duidelijkheid schaadt, evengoed als te grote beknoptheid; want er is niets dat zozeer verveelt en zozeer de onwil van den leerling opwekt als te bemerken, dat men het peil van zijn intellect nog lager taxeert dan het werkelijk is.

Wél heb ik bezwaar tegen uitdrukkingen als halve lijn of halve rechte; want ik denk daarbij aan zo iets als een halve meter en dat is de bedoeling niet; men bedoelt een lijn, die zich vanaf een zeker punt in één richting naar het oneindige uitstrekt.

Ook dit kan echter tot misvatting aanleiding geven, want men kan toch bezwaarlijk volhouden, dat *ieder* willekeurig punt van een lijn, die zich in beide richtingen naar het oneindige uitstrekt, het midden van die lijn is.

Daarom gebruiken anderen liever de uitdrukking halflijn of half-rechte; echter is dit weer in strijd met het nederlands taaleigen; want let men op analoge uitdrukkingen, als half-broer, half-duister enz., dan zou men tot de conclusie komen, dat een halflijn of half-rechte niet volkomen recht is.

Inplaats van half-rechte wil men ook wel het woord „straal” gebruiken; daarbij denkt men blijkbaar aan een lichtstraal, die zich ook vanaf het lichtpunt in één richting naar het oneindige uitstrekt; doch ook hier weer een bezwaar, aangezien de straal van een cirkel een bepaalde lengte heeft.

Het is uitermate moeilijk om nieuwe termen in te voeren en wel zó, dat ze werkelijk burgerrecht verkrijgen; de Duitsers hebben een

¹⁾ Als voorbeeld van de breedsprakigheid, waartoe hier aanleiding wordt gegeven, diene het volgende voorbeeld:
 ik doorblader een meetkunde-boek, dat nogal strikt vasthoudt aan het onderscheiden van lijn, halve lijn en lijnstuk. Daarin vind ik: „een vierhoek is een parallelogram, als twee zijden gelijk en evenwijdig zijn.” Hier is dus in één adem een zijde lijn en lijnstuk tevens; beter ware het hier te spreken van zijde en zijlijn.

zekere virtuositeit in het samenflansen van allerlei woord-verbindingen, maar hier neemt men dergelijke nieuwigheden niet zo grif over.

Als voorbeeld diene een proef van den zeer verdienstelijken schrijver, wijlen J. Versluys, die bijna een halve eeuw het monopolie had van wiskundige schoolboeken; hij gebruikte steeds het woord „bepaling” voor het vroeger meer gebruikelijke „definitie”. En toch is het laatste woord bij geletterde niet-wiskundigen nog altijd meer in zwang, terwijl de ongeletterden noch van het ene woord, noch van het andere een zuiver begrip plegen te hebben.

Eindelijk heb ik nog gezocht naar het standpunt, dat van officiële zijde tendeze wordt ingenomen en daartoe heb ik de redactie nagegaan van vele wiskundige opgaven van het schriftelijk eind-examen H.B.S. B, voornamelijk van de laatste jaren; waar hier in Nederland genoeg leerboeken gebruikt worden, waarin uitdrukkingen als lijnstuk, halve lijn enz. voorkomen, had men toch kunnen verwachten, dat die termen in die opgaven niet vermeden zouden worden. De uitkomst was negatief; alleen het woord lijnstuk kwam sporadisch voor.

Wat de opgaven van Indië betreft: hier vond ik de volgende opgave van 1937:

„Gegeven is $\angle AOB = 60^\circ$; binnen deze hoek ligt een punt P. zodanig, dat $\angle POA = 15^\circ$ en $OP = a$ cm. Door P trekt men een rechte lijn, die de halfrechte OA snijdt in R en de halfrechte OB in Q”. Inplaats van halfrechten OA en OB had men kortweg van de benen OA en OB kunnen spreken.

Ik zie dus niet in, dat dergelijke uitdrukkingen noodzakelijk zijn en zelfs niet, dat zij wenselijk zijn en zal mij liever aan het gewone spraakgebruik houden. Ondertussen, wanneer een commissie van competente deskundigen benoemd wordt (zoals Dr. van Wijk wenst) en een gedocumenteerde beslissing te dezer zake neemt, dan zal ik daarvan zeker goede nota nemen.

Amsterdam, Sept. 1939.

NASCHRIFT.

Bij het artikel van Dr. Van Thijn zou ik de volgende opmerkingen willen maken.

10. Wanneer men den term lijnstuk gebruikt, is het noodig, dat men evenwijdigheid van lijnstukken definieert (twee lijnstukken zijn evenwijdig, als de lijnen, waarvan zij deel uitmaken, evenwijdig zijn). Laat men dit na, dan komt men tot breëdsprakigheden, als in de voetnoot aangeduid.

20. De inzender doet mij een argument ten gunste van den naam „halve lijn” aan de hand, waaraan ik nog niet gedacht had. Men kan nl. wel degelijk ieder punt eener lijn als haar midden beschouwen, indien men onder „midden” verstaat een punt, dat aan de algemeene middelpuntsdefinitie voldoet.

30. Dat het woord „bepaling” het woord „definitie” niet heeft kunnen verdringen, is *misschien* een gevolg van de dubbelzinnigheid van den eersten term. Deze wordt namelijk ook gebruikt in de beteekenis van meting of berekening. Uitdrukkingen als „bepaling der oppervlakte van een veelhoek”, „bepaling van den lineairen uitzettingscoëfficiënt” kunnen twee beteekenissen hebben.

40. Omtrent de wenschelijkheid van exactheid en consequentie in het taalgebruik bij het onderwijs zullen de meeningen wel steeds uiteen blijven loopen.

J. H. S.

HOOFDSTUK IX.

EVENWICHTEN VAN VLAKKE FIGUREN of ZWAARTEPUNTEN VAN VLAKKE FIGUREN.

BOEK I.

1. Het geschrift over de evenwichten van vlakke figuren neemt in het werk van Archimedes een zeer bijzondere plaats in. Terwijl hij nl. in al zijn wiskundige verhandelingen voortbouwt op reeds lang bevestigde fundamenteen, houdt hij zich in dit werk bezig met grondslagen-onderzoek; bovendien verlaat hij hier het terrein der zuivere mathesis voor dat der mathematische natuurwetenschap: hij geeft een axiomatischen opbouw van een hoofdstuk uit de leer van het evenwicht en hij legt daardoor als eerste het nauwe verband tusschen wiskunde en mechanica, dat voor de ontwikkeling van physica en mathesis beide van zoo verstrekkende beteekenis zou worden.

Door deze uitbreiding van het terrein zijner werkzaamheden komt Archimedes onmiddellijk in aanraking met de principieele moeilijkheden, die aan de axiomatische fundeering der mechanica eigen zijn. De wijze, waarop hij die moeilijkheden, voorzoover ze in zijn onderwerp tot uiting komen, oplost, vormt tot op den huidigen dag een punt van meeningsverschil tusschen zijn commentatoren en beoordeelaars: eenzelfde, voor den verderen opbouw, niet alleen van het werk zelf, maar ook van twee der nog te bespreken zuiver mathematische verhandelingen, fundamenteele redeneering (in Prop. 6) wordt door sommigen als paralogisch verworpen, door anderen als correct aanvaard. We zullen in het volgende ons standpunt ten aanzien van deze quaestie hebben te bepalen; daar de discussie echter niet alleen over het verloop der omstreden redeneering zelf loopt, maar ook over de structuur van het ten grondslag gelegde axioma-systeem, zullen we den lezer eerst zonder

onderbreking in kennis brengen met alle axiomata en met die proposities, die aan de bedoelde stelling voorafgaan.

Axiomata.

- I. *Wij postuleeren, dat gelijke gewichten aan gelijke lengten in evenwicht zijn en dat gelijke gewichten aan ongelijke lengten niet in evenwicht zijn, maar doorslaan naar het gewicht aan de grootste lengte.*
- II. *dat wanneer, als gewichten aan zekere lengten in evenwicht zijn, aan een der gewichten iets wordt toegevoegd, zij niet in evenwicht zijn, maar doorslaan naar dat gewicht, waaraan iets is toegevoegd.*
- III. *evenzoo ook, dat wanneer van een der gewichten iets wordt afgenomen, zij niet in evenwicht zijn, maar doorslaan naar dat gewicht, waarvan niets is afgenomen.*
- IV. *wanneer gelijke en gelijkvormige figuren op elkaar worden gepast, passen ook de centra der zwaarten¹⁾ op elkaar.*
- V. *van ongelijke, maar gelijkvormige figuren zullen de centra der zwaarten gelijkelijk gelegen zijn²⁾.*
- VI. *indien grootheden aan zekere lengten in evenwicht zijn, zullen ook de daaraan gelijke [grootheden] aan dezelfde lengten in evenwicht zijn.*
- VII. *van elke figuur, waarvan de omtrek hol naar denzelfden kant is, moet het centrum der zwaarte binnen de figuur liggen.*

Dit ondersteld zijnde:

Propositie 1.

Gewichten, die aan gelijke lengten in evenwicht zijn, zijn gelijk.

Waren ze nl. ongelijk, dan zou men, door van het grootste het bedrag af te nemen, waarmee het het kleinste overtreft, wegens axioma III het evenwicht verstoren, terwijl er wegens axioma I in den nieuwen toestand juist evenwicht zou moeten zijn.

¹⁾ Op de vraag, wat deze term beteekent, komen we straks terug.

²⁾ Hieraan wordt nog toegevoegd; wij zeggen, dat ten opzichte van de gelijkvormige figuren punten gelijkelijk liggen, waarvan rechten, getrokken naar de gelijke hoeken, gelijke hoeken maken met de homologe zijden.

Propositie 2.

Ongelijke gewichten aan gelijke lengten zijn niet in evenwicht, maar zullen doorslaan naar het grootste.

Neemt men van het grootste gewicht het bedrag af, waarmee het het kleinste overtreft, dan zal er evenwicht zijn (axioma I). Herstelt men dan den oorspronkelijken toestand, dan blijkt de geldigheid der propositie met behulp van axioma II.

Propositie 3.

Ongelijke gewichten zullen [slechts] aan ongelijke lengten in evenwicht [kunnen] zijn en wel het grootste [gewicht] aan de kleinste [lengte].³⁾

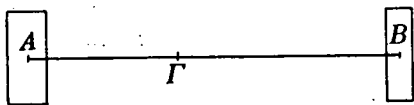


Fig. 115.

Laat (fig. 115) de gewichten A en B ($A > B$) in evenwicht zijn aan de lengten $A\Gamma$ en ΓB . Te bewijzen: $A\Gamma < \Gamma B$.

Bewijs: neemt men van A het bedrag $A - B$ af, dan moeten de gewichten doorslaan naar de zijde van B (axioma III). Dit is echter onmogelijk, wanneer $A\Gamma = \Gamma B$ (axioma I) en eveneens, wanneer $A\Gamma > \Gamma B$ (axioma I). Dus moet $A\Gamma < \Gamma B$ zijn.

Het is duidelijk, dat ook gewichten, die aan ongelijke lengten in evenwicht zijn, ongelijk zijn en wel is het grootste [gewicht] dat aan de kleinste [lengte].

Dit wordt niet nader toegelicht. Blijkbaar bevat deze uitspraak niets anders dan een contrapositie van het tweede deel van axioma I⁴⁾.

Propositie 4.

Indien twee gelijke grootheden niet hetzelfde centrum der zwaarte hebben, zal het centrum der zwaarte van de uit beide grootheden samengestelde grootheid het midden van de rechte zijn, die de centra der zwaarte der grootheden verbindt.

³⁾ Deze propositie is zeer elliptisch geformuleerd: τὰ ἄνωγα βάρηα ἀπὸ τῶν ἀνίσων μακρίων ἰσορροπιοῦσιν, καὶ τὸ μείζον ἀπὸ τοῦ ἐλάσσονος.

⁴⁾ Axioma I, 2e deel, zegt nl.: is gewicht $A_1 =$ gewicht A_2 en lengte $l_1 \neq$ lengte l_2 , dan is er geen evenwicht. Contrapositie: is er evenwicht en tevens $l_1 \neq l_2$, dan is $A_1 \neq A_2$. Dat het gewicht aan de kleinste lengte het grootste van de twee moet zijn, volgt dan uit het eerste deel van Prop. 3.

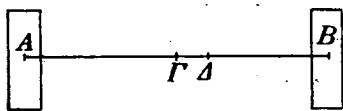


Fig. 116.

Laat (fig. 116) A en B opv. de centra der zwaarte zijn van de grootheden A en B , F het midden van het lijnstuk AB . Indien nu F niet het centrum der zwaarte van de uit A en B samengestelde grootheid is, moge het een ander punt Δ van AB zijn. A en B zijn dus in evenwicht wanneer Δ wordt vastgehouden. Dit is echter onmogelijk wegens axioma I. Dus is F het centrum der zwaarte.

Propositie 5.

Indien van drie grootheden de centra der zwaarte op een rechte gelegen zijn en de grootheden gelijk gewicht hebben en indien ook de rechten tusschen de centra gelijk zijn, zal het centrum der zwaarte van de uit alle grootheden samengestelde grootheid het punt zijn, dat ook het centrum der zwaarte van de middelste grootheid is.

Dit wordt ingezien door op te merken, dat volgens Prop. 4 het centrum der zwaarte van het stelsel der uiterste grootheden samenvalt met dat van de middelste.

In een eerste porisma wordt de stelling uitgebreid op een willekeurig oneven aantal grootheden, waarvan de centra der zwaarte op onderling gelijke afstanden op een rechte liggen, terwijl telkens twee grootheden, die evenver van het midden van het lijnstuk der twee uiterste centra afliggen, even zwaar zijn.

In een tweede porisma wordt uitgesproken, dat wanneer uit het juist beschreven stelsel de middelste grootheid wordt weggelaten, het centrum der zwaarte van het stelsel hetzelfde punt blijft als voorheen.

Hierna volgt de beroemde en veel omstreden propositie, waarin de z.g. hefboomswet wordt uitgesproken.

Propositie 6.

Onderling meetbare grootheden zijn in evenwicht aan lengten, die in verwisselde volgorde dezelfde reden hebben als de gewichten.

Laat de onderling meetbare grootheden A en B zijn, waarvan A en B de centra, en laat $E\Delta$ een zekere lengte zijn en laat, zooals A tot B , de lengte ΔF tot de lengte FE staan. Te bewijzen is, dat

van de uit A en B samengestelde grootheid het centrum der zwaarte Γ is (fig. 117).

Bewijs: Daar A en B onderling meetbaar zijn, zijn $\Delta\Gamma$ en $E\Gamma$ het ook. Zij N een gemeene maat van deze twee lengten. Maak $\Delta H = \Delta K = E\Gamma$ en $E\Delta = \Delta\Gamma$. Blijkbaar is ook $EH = \Delta\Gamma$. Daar nu $HA = 2 \cdot \Delta\Gamma$ en $HK = 2 \cdot E\Gamma$, is ook

$$A : B = \Delta H : HK$$

Laat nu de grootheid Z evenvaak op A begrepen zijn als de lengte N op ΔH , dus ook evenvaak op B als N op HK . Verdeel nu ΔH en HK elk in deelen N , A en B elk in deelen Z . Plaats nu op elk der lijnstukken N een grootheid Z , zoodat telkens het centrum

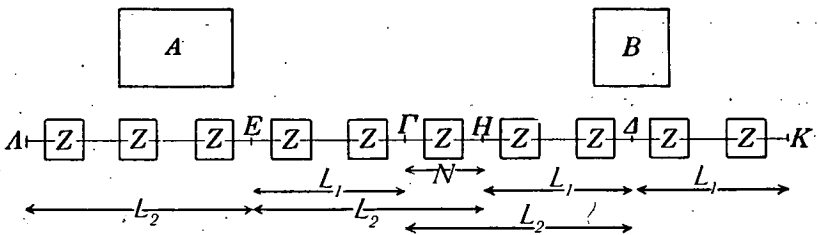


Fig. 117.

der zwaarte van Z het midden van N is, dan zal het centrum der zwaarte van al de grootheden Z , die geplaatst zijn op de deelen van ΔH , het punt E zijn (Prop. 5, Porisma 2) en evenzoo ook het centrum der zwaarte van al de grootheden Z , die geplaatst zijn op de deelen van HK , het punt Δ . Nu zal dus A in E geplaatst zijn en B in Δ . Er zullen nu onderling gelijke grootheden op een rechte gelegen zijn, waarvan de centra der zwaarte evenver van elkaar afliggen en waarvan het aantal even is. Het is nu duidelijk, dat van de uit alle samengestelde grootheid het midden van de rechte, die begrensd wordt door de centra van de middelste grootheden, het centrum der zwaarte is Zoodat van de uit alle samengestelde grootheid het centrum der zwaarte het punt Γ is. Wanneer dus A in E geplaatst is en B in Δ , zullen ze in evenwicht zijn om Γ .

Hiermee is dus bewezen, dat de omgekeerde evenredigheid van kracht en arm een voldoende voorwaarde is voor het evenwicht van een in zijn zwaartepunt ondersteunden hefboom onder invloed van

twee gewichten aan weerskanten van het steunpunt. Dat deze voorwaarde ook noodig is, wordt door Archimedes niet bewezen; het bewijs had als volgt geleverd kunnen worden:

Laat gewichten A en B aan lengten ΓA en ΓB evenwicht maken. Was nu niet

$$A : B = \Gamma B : \Gamma A$$

dan zou er een gewicht Δ moeten bestaan, verschillend van B , zoodat

$$A : \Delta = \Gamma B : \Gamma A.$$

Dit gewicht Δ zou met A in evenwicht zijn wegens de bewezen Propositie 6. Herstelt men dan den oorspronkelijken toestand, dan wordt wegens de axiomata II en III het evenwicht verstoord, in strijd met het onderstelde, dat A en B in evenwicht zijn.

Men moet het als een leemte in het werk over de evenwichten beschouwen, dat Archimedes verzuimt, dit bewijs te geven; later (zie Hoofdstuk X) past hij nl. de voorwaarde der omgekeerde evenredigheid herhaaldelijk als noodige voorwaarde voor evenwicht toe.

2. Beschouwen we thans het bewijs van Prop. 6 wat nauwkeuriger. De eigenlijke kern ervan bestaat blijkbaar in de wijze, waarop de grootheden A en B in de punten E en Δ worden geplaatst; dit geschiedt nl. door ze elk in deelen Z te verdeelen, die zoo aan de stukken van de rechte AK worden gehangen, dat de zwaartepunten der beide stelsels opv. in E en Δ komen te liggen. Aan den hefboom hangen nu dus niet de oorspronkelijk gegeven grootheden A en B , maar twee stelsels van grootheden, die opv. even zwaar zijn als A en B en welker zwaartepunten in de punten E en Δ liggen, die opv. als plaatsen van A en B worden beschouwd. Dit beduidt m.a.w., dat de invloed, dien een aan een hefboom opgehangen lichaam op het evenwicht heeft, uitsluitend beoordeeld wordt naar de zwaarte van het lichaam en de plaats van zijn zwaartepunt en dat de vorm niet ter zake doet.

De vraag is nu: is Archimedes zich ervan bewust, dat de conclusie, die hij trekt, op deze praemissé steunt? Zoo ja, heeft hij die praemissé uitdrukkelijk als zoodanig geformuleerd? En, zoo opnieuw ja, motiveert hij haar nog nader?

Op deze drieledige vraag (die ten onrechte vaak niet in drie leden gesplitst wordt) zijn verschillende antwoorden gegeven, die

onderling groot verschil in waardeering voor het betoog van Archimedes toonen.

Hooren wij in de eerste plaats de meening van een bekenden schrijver over de geschiedenis der *Mechanica*, Ernst Mach⁵⁾, aan wiens historische uiteenzettingen velen vertrouwen plegen te schenken. We geven zijn woorden in extenso weer:

„So überraschend uns nun auf den ersten Blick die Leistung von Archimedes erscheint, so steigen uns bei genauer Betrachtung doch Zweifel an der Richtigkeit derselben auf. Aus der bloßen Annahme des Gleichgewichts gleicher Gewichte in gleichen Abständen wird die verkehrte Proportion zwischen Gewicht und Hebelarm abgeleitet! Wie ist das möglich?

Wenn wir schon die bloße Abhängigkeit des Gleichgewichts vom Gewicht und Abstand überhaupt nicht aus uns h e r a u s p h i l o s o p h i e r e n konnten, sondern aus der Erfahrung holen mußten, um wieviel weniger werden wir die Form dieser Abhängigkeit, die Proportionalität, auf spekulativem Wege finden können.

Wirklich wird von Archimedes und allen Nachfolgern die Voraussetzung, daß die (gleichgewichtstörende) Wirkung eines Gewichts P im Abstand L von der Achse durch das Produkt $P \cdot L$ (das sogenannte statische Moment) gemessen sei, mehr oder weniger versteckt oder stillschweigend eingeführt. Zunächst ist klar, daß bei vollkommen symmetrischer Anordnung das Gleichgewicht unter Voraussetzung i r g e n d e i n e r beliebigen Abhängigkeit des gleichgewichtstörenden Moments von L , also $P \cdot f(L)$, besteht; demnach kann aus diesem Gleichgewicht unmöglich die bestimmte Form $P \cdot L$ abgeleitet werden. Der Fehler der Ableitung muß also in der vorgenommenen Transformation liegen, und liegt hier auch. Archimedes setzt die Wirkung zweier gleicher Gewichte unter allen Umständen gleich der Wirkung des doppelten Gewichts mit dem Angriffspunkt in der Mitte. Da er aber einen Einfluß der Entfernung vom Drehpunkt kennt und voraussetzt, so darf dies nicht von vornherein angenommen werden, wenn die beiden Gewichte ungleiche Entfernung vom Drehpunkt haben. Wenn nun ein Gewicht, das seitwärts vom Drehpunkt liegt, in zwei gleiche Teile geteilt wird, welche symmetrisch zu dem ursprünglichen Angriffspunkt verschö-

⁵⁾ Ernst Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt*. 7e Auflage (Leipzig 1912). p. 14.

ben werden, so nähert sich das eine Gewicht dem Drehpunkt so viel, als sich das andere vom dem selben entfernt. Nimmt man nun an, daß die Wirkung hierbei dieselbe bleibt, so ist hiermit schon über die Form der Abhängigkeit des Moments von L entschieden, -denn dies ist nur möglich bei der Form $P \cdot L$, bei Proportionalität zu L . Dann ist aber jede weitere Ableitung überflüssig. Die ganze Ableitung enthält den zu beweisenden Satz, wenn auch nicht ausdrücklich ausgesprochen und in anderer Form, schon als Voraussetzung."

Volgens het oordeel van Mach is dus ten eerste Archimedes zich er niet van bewust geweest, dat zijn redeneering steunt op de praemisse, dat een hefboomevenwicht niet verstoord wordt, wanneer men een der opgehangen grootheden met behoud van gewicht en zwaartepunt van vorm laat veranderen en wordt ten tweede het geheele bewijs overbodig, zoodra men deze praemisse bewust aanvaardt, omdat zij de te bewijzen stelling (dat omgekeerde evenredigheid van twee gewichten met de lengten der armen, waaraan zij hangen, een voldoende voorwaarde voor evenwicht van een hefboom is) reeds insluit. Het tweede deel der tegenwerping is in meer moderne inkleeding ook als volgt te formuleeren: wanneer men eenmaal aanvaardt, dat de functie $P \cdot f(L)$ voldoet aan de functionaalvergelijking ⁶⁾

$$\frac{1}{2} P \cdot f(L + h) + \frac{1}{2} P \cdot f(L - h) = P \cdot f(L)$$

is het overbodig, nog te bewijzen, dat $P \cdot f(L)$ de gedaante $P \cdot L$ heeft, want de bedoelde functionaalvergelijking bestaat slechts, wanneer $f(L)$ de gedaante L heeft.

De hiermee samengevatte tegenwerpingen van Mach lijken ons geen van beide steekhoudend. We hoorden immers Archimedes uitdrukkelijk verklaren, dat door de plaatsing der deelen Z op de lijnstukken N het gemeenschappelijk zwaartepunt van de deelen van A in E en dat van de deelen van B in Δ ligt en dat hierdoor *dus* de grootheid A in E en de grootheid B in Δ geplaatst is, terwijl toch in feite noch A noch B in den oorspronkelijken vorm aanwezig zijn.

⁶⁾ Deze vergelijking drukt nl uit, dat de invloed van het evenwicht van een gewicht P op afstand l gelijk staat met de gezamenlijke invloeden van gewichten $\frac{1}{2}P$ in punten, die symmetrisch liggen ten opzichte van het punt, waar P eerst hing. Tevens berust zij natuurlijk op de onderstelling, dat de bedoelde invloeden additief te verbinden zijn.

Hierdoor blijkt reeds duidelijk, dat hij den invloed van een grootheid alleen beoordeelt naar het gewicht en de plaats van het zwaartepunt. Maar bovendien heeft hij in axioma VI uitgesproken, dat, wanneer grootheden aan zekere lengten in evenwicht zijn, grootheden, die daaraan gelijk zijn, aan dezelfde lengten in evenwicht zullen zijn. Dit kan bij eerste beschouwing een volmaakt overbodige tautologie lijken. Zoodra men echter aanneemt, dat hij met „grootheden aan dezelfde lengte” bedoelt „grootheden, waarvan de zwaartepunten op dezelfde afstanden van het steunpunt liggen”, heeft men èn aan dit axioma een redelijken zin verleend èn tegelijkertijd de naar de meening van Mach ontbrekende expliciete formuleering van de in Prop. 6 toegepaste praemisse gevonden. Het eerste van zijn bezwaren kan hiermee als weerlegd worden beschouwd ⁷⁾).

En wat het tweede aangaat: hiervan springt de onhoudbaarheid in het oog, zoodra men op de mathematische formuleering let, die wij er boven van gaven. Immers, als het niet noodig is, in dit geval de optredende functionaalvergelijking op te lossen, wanneer heeft het dan wel zin, het te doen? En wanneer in het algemeen het trekken van een conclusie Q uit een praemisse-groep P overbodig mag heeten, wanneer P slechts geldt, wanneer Q juist is, kan men alle wiskundige bewijzen wel als overbodig verwerpen, want als Q niet juist is, geldt P zeker niet!

Nu zagen we Mach zich echter ook nog beroepen op het algemeene argument, dat men uit het bestaan van evenwicht bij symmetrische belasting nooit een conclusie kan trekken omtrent den aard der functie $f(L)$, omdat dat evenwicht bij iederen vorm van deze functie zou bestaan. Hierop kan men alleen maar antwoorden, dat Archimedes zijn conclusie ook niet trekt uit het bestaan van dat evenwicht alleen, maar dat dit slechts een der praemissen is, waarop zijn redeneering steunt. Men kan die redeneering alleen beoordeelen, wanneer men het geheele stelsel van axiomata, definities en

⁷⁾ De hier ontwikkelde opvatting van het axioma VI is afkomstig van O. Toeplitz, wien ik voor mondelinge en schriftelijke toelichting van zijn standpunt dank verschuldigd ben. De denkbeelden van Toeplitz zijn verder uitgewerkt in een zeer zorgvuldige studie van W. Stein, *Der Begriff der Schwerpunktes bei Archimedes*. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie. Abt. B: Quellen. I (1930), 221—244.

Drs P. J. TEN HAVE

Een serie denk- en repetitievragen over de Natuurkunde, ten dienste van Gymnasium, H.B.S. B. kandidaten voor een N. O. Akte en voor de Hoofdkakte f 1,50

LEERBOEK DER SCHEIKUNDE

1e deel f 2,75, gebonden f 3,25, 2e deel f 3,90, gebonden f 4,40

aansluitend bij v. Arkel en Snijder: Leerboek der Scheikunde
met toelichting f 0,75

Inleiding tot een topologische behandeling van de meetkunde van het aantal

f 4,90, gebonden f 5,90

P. WIJDNES, **Klein leerboek der Algebra II** — 2de druk f 1,50

P. WIJDENES, **Beknopte Algebra** deel II — 7de druk, gec. f 1,70

P. WIJDENES, **Nieuwe schoolalgebra** deel I — 11de druk,
gebonden f 2,25

„ „ „ deel II — 10de druk,
gebonden f 2,25

Dr B. P. HAALMEIJER, **Vlakke meetkunde** deel II — 3de
druk f 2,10, gebonden f 2,50

NOORDHOFF's **Schooltafel** — 16de tot 20ste duizendtal f 1,50

A. J. LIEFKENS, **Algebra** — serie Onze uitgebreide technische serie f 2,25

A. J. LIEFKENS, **Vlakke Meetkunde** — serie Onze uitgebreide technische serie f 2,25

LEERBOEK DER VLAKKE MEETKUNDE

achtste druk. 640 blz. 590 fig., gebonden . .. f 11,50

Voor intekenaars op Noordhoff's Wiskundige Tijdschriften tot 1 December 1939 f 10,—

P. NOORDHOFF N. V. — GRONINGEN—BATAVIA.

Ook verkrijgbaar in de boekhandel.

P. WIJDENES

MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

Met de bewijzen van de stellingen en
meer dan 70 uitgewerkte voorbeelden.

Een leerboek er naast is niet nodig.

Een verzameling vraagstukken met sterk didactisch karakter voor
H.B.S., Gymnasium, Lyceum, Kweekschool, Zeevaartschool,
Middelb. Technische School.

Deel I. 100 blz. 144 fig., 20 oplossingen, 4 volledige werkstukken
en 3 meetkundige plaatsen; gec. met gradenboog en twee
driehoeken f 1.40

Deel II. 166 blz. 189 fig., 26 oplossingen, 11 volledige werkstuk-
ken en 8 meetkundige plaatsen; gec. f 2.40

Prae. ex. voor leraren op aanvraag bij P. NOORDHOFF N.V.
GRONINGEN.

 Leraren, die de Meetkundige vraagstukken op hun school
gebruiken, kunnen bij den uitgever of bij den'schrijver gratis
een ex. bekomen van Dr. P. MOLENBROEK.

LEERBOEK DER VLAKKE MEETKUNDE

bewerkt door P. WIJDENES; 8e druk geb. f 11.50

ANTWOORDEN en OPLOSSINGEN - 2.50

P. WIJDENES

De kegelsneden voor het M.O.

Inhoud. I. Meetkundige behandeling.

De parabool fig. 4—15; de ellips fig. 16—31; de hyperbool fig.
32—41; de brandpunt-richtlijn definitie; de poolvoerstraal-definitie
fig. 42—50.

Dit hoofdstuk beslaat 30 blz. met 50 fig., die samen minstens 10 blz.
beslaan, zodat de hele meetkundige behandeling met inbegrip van
wat eenvoudige vraagstukken slechts 20 blz. telt.

II. De methode van het hellende vlak (kinemografische projectie).

III. Stereometrische voortbrenging der kegelsneden.

Tezamen met 22 fig. op 18 blz.

Aanhangsel met historische aantekeningen.

Het enige werkje, dat voldoet aan de eis van het leerplan
voor de vijfde klas, nl. stereometrische voortbrenging van
de kegelsneden.

68 bladz., 75 figuren, met envelop met kartonnen modellen f 0.80.

Leraren, die het boekje niet kennen, worden verzocht een prae.
ex. aan te vragen.

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. - Groningen-Samva.

Ook verkrijgbaar in de boekhandel.