

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN
NIJMEGEN

16e JAARGANG 1939, Nr. 1.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

↵ Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het ↵
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang f 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6.—) zijn ingetekend, betalen f 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens” (f 10.—) f 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
E. W. BETH, De psychologische argumenten en richtlijnen voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde	1
J. H. SCHOGT, Over ingekleede vraagstukken en vergelijkingen	24
C. J. ALDERS, De functies $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ en $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$	30
Dr. H. J. E. BETH, Iets uit de didactiek van de wiskunde. . .	33
Vraagstukken — Vraagstuk II — Enquête over logarimentafels	38
Ingekomen boeken	39
Boekbesprekingen	40
Prof. Dr. Hk. DE VRIES, Historische Studiën XXI	44

DE PSYCHOLOGISCHE ARGUMENTEN EN RICHTLIJNEN VOOR DE VERNIEUWING VAN HET ONDERWIJS IN DE WISKUNDE

DOOR

E. W. BETH.

Rapport, betreffende een onderzoek, uitgevoerd in opdracht van de Wiskunde-Werkgroep der W. V. O.

De uitgangspunten van de pogingen om te komen tot een min of meer radicale hervorming van het onderwijs in de wiskunde zijn drie in getal:

1. De heersende ontevredenheid over de resultaten van dat onderwijs.
2. De nieuwere inzichten omtrent de wiskunde zelf.
3. De nieuwere psychologische gegevens betreffende het wiskundig denken, de psychische functies, die daarbij tot uiting komen, en de ontwikkeling daarvan bij het kind.

Het derde uitgangspunt is het eigenlijk thema van dit Rapport. Volledigheidshalve, wijd ik echter ook aan de beide eerstgenoemde een korte bespreking.

1. Wij kunnen het er naar mijn mening wel over eens zijn, dat in de ongetwijfeld heersende ontevredenheid over de resultaten van ons wiskunde-onderwijs geen betrouwbare gegevens voor de hervorming daarvan te vinden zijn; hetzelfde geldt trouwens voor alle klachten, die men over ons onderwijs kan horen. Ten eerste schijnt de ontevredenheid over de onderwijsresultaten in de meeste gevallen te berusten op een miskennis van de verwachtingen, die men daaromtrent redelijkerwijs mag koesteren. Ten tweede is die ontevredenheid van tegengestelden oorsprong; sommigen menen, dat de school aan haar leerlingen te hoge eisen stelt; het betreurenswaardig feit, dat jaarlijks zoveel leerlingen niet bevorderd kunnen worden, pleit echter niet tegen ons onderwijs (hoogstens tegen de

regeling van de toelating tot onze scholen); bij testonderzoek is nl. gebleken, dat in 7 van de 8 gevallen de oorzaak van niet-bevorderen ligt in een meestal aangeboren gebrek aan verstandelijken aanleg (Terman, Burt, Koenen, Luning Prak; zie van den laatste een art. in Tijdschr. v. d. Nat. Ver. v. Handels-onderwijs en het Nat. Bureau v. Ond. op Econ. Grondslag, Jaarg. 6; weliswaar is men het over de waarde van het testonderzoek voor de bepaling van de intelligentie nog niet eens; maar in dit geval is toch de overeenstemming tussen de resultaten van dit onderzoek en de in de schoolwereld heersende overtuiging zó duidelijk, dat aan de betekenis van deze cijfers moeilijk kan worden getwijfeld); anderen klagen er omgekeerd over, dat te veel leerlingen van geringen aanleg en onvoldoende ontwikkeling gelukkig worden gemaakt met einddiploma's, waaraan belangrijke studierechten verbonden zijn. De onmogelijkheid, deze beide groepen klagers tot zwijgen te brengen, kan ten overvloede blijken uit de omstandigheid — waarop reeds vaker is gewezen —, dat hun klachten reeds zeer oud zijn, dat ze van tijd tot tijd tot hervorming van het onderwijs hebben geleid, maar nimmer zijn verstomd. Dit brengt ons tot het vermoeden, dat de bedoelde klachten hun oorsprong niet hebben in incidentele tekortkomingen van het huidige onderwijs, maar eerder zijn te beschouwen als inhaerent aan het onderwijs als zoodanig. Men kan bv. opmerken, dat het onderwijs bepaald wordt enerzijds door de eisen van hen, die het genieten, anderzijds door de eisen van de maatschappij. Daar nu deze eisen in het algemeen geenszins samenvallen, is een bevredigende oplossing van de onderwijsproblemen reeds op gronden van beginsel onmogelijk; men is gedwongen tot een compromis.

2. Nieuwe inzichten omtrent de leerstof dwingen het onderwijs op gezette tijden tot herziening van zijn programma. Een dergelijke herziening is in het algemeen niet zó ingrijpend, of ze laat zich binnen het kader van de bestaande onderwijsorganisatie wel ten uitvoer leggen. Zoals genoegzaam bekend mag worden geacht, heeft, kort geleden, een dergelijke herziening van het leerplan voor wiskunde plaats gehad; bij deze herziening is dit leerplan, wat de keuze van de leerstof betreft en mede door de reeds door die keuze min of meer aangewezen wijze van behandeling, aan moderne inzichten op wetenschappelijk gebied aangepast. Ook dit tweede

gezichtspunt komt derhalve voor de activiteit van onze werkgroep niet in de eerste plaats in aanmerking. Ik merk nog op dat, zoals uit een enquête gebleken is, onze werkgroep instemt met de grondgedachte van de ontwerpers van het nieuwe leerplan, dat nl. het wiskunde-onderwijs aan scholen van algemeen-vormend-karakter in de eerste plaats tot doel heeft de bevordering van de verstandelijke ontwikkeling van de schooljeugd.

3. Nieuwe inzichten op het gebied van de psychologie, in het bijzonder met betrekking tot de psychische ontwikkeling van de schooljeugd. Ik noem allereerst, zonder er diep op in te gaan, inzichten van algemenen aard; als voorbeeld geef ik het beginsel der activiteit: het is van het grootste belang, den leerling niet in een passieve, receptieve, zg. „belangstellende”, maar in een actieve verhouding tot het leerproces te brengen, omdat eerst dan zijn geestelijke mogelijkheden (ik vermijd opzettelijk den thans door velen zozeer verfoeiden term „vermogens”) volledig tot ontplooiing zullen komen en hij eerst dan van het onderwijs het volle profijt zal kunnen trekken. Dit beginsel is thans wel gemeen goed, niet alleen onder de voorstanders van een min of meer radicale onderwijs hervorming, maar ook onder hen, die aan de „gewone” scholen het onderwijs dienen. Onbewust en daardoor wellicht niet altijd stelselmatig en doeltreffend zullen goede docenten altijd wel hebben getracht, hun leerlingen tot zelfstandige activiteit te prikkelen. Met geen ander doel is indertijd het oplossen van vraagstukken in het onderwijs ingevoerd; oorspronkelijk zal de leraar zich hebben bepaald tot het bespreken van de theorie en zal het oplossen van eenvoudige vraagstukken den leerlingen ter zelfstandige oefening zijn opgedragen. Terwille van de meest begaafden werden in de verzamelingen ook moeilijker vraagstukken opgenomen. Op den duur echter werd het oplossen daarvan van alle leerlingen geëist, wat ertoe leidde, dat de leraar vraagstukken ging vóórmaken. Dit heeft tenslotte de ontaarding van ons onderwijs teweeggebracht, waarbij de leraar niet langer hoofdzakelijk de theorie, maar in plaats daarvan de methoden ter oplossing van allerlei soorten vraagstukken behandelt. Ik geef dit als voorbeeld van de noodlottige gevolgen, waartoe onoordeelkundige toepassing van een op zichzelf voortreffelijk en psychologisch volkomen gefundeerd beginsel kan leiden. Hetzelfde geldt voor de beruchte „denksom-

men"; ook deze zijn oorspronkelijk met uitstekende bedoelingen ingevoerd.

Het is duidelijk, dat de aanpassing van het onderwijs aan psychologische inzichten van algemenen aard geen zaak is, die in het bijzonder onze werkgroep aangaat. Ze komt eerder in aanmerking voor behandeling door onze Werkgemeenschap in haar geheel. Ook dit punt heb ik daarom alleen volledigheidshalve besproken. Ik merk nog op, dat een aanpassing van het wiskunde-onderwijs aan dergelijke psychologische gegevens van algemeen karakter vooronderstelt, dat ook met betrekking tot het wiskundig denken zelf zuivere psychologische gegevens ter beschikking staan; groot is bij ontstentenis daarvan het gevaar voor onjuiste generalisatie.

Zo kom ik dan tot mijn eigenlijk thema: welke gegevens levert ons de wetenschappelijke psychologie met betrekking tot de structuur van het wiskundig denken en de ontwikkeling daarvan bij onze leerlingen en welke argumenten en richtlijnen verschaffen ons die gegevens voor ons streven naar vernieuwing van het wiskunde-onderwijs?

Dat er dergelijke gegevens zijn, wordt blijkbaar in de kringen van hen, die naar zulk een vernieuwing streven, algemeen als vaststaand aangenomen. Ik citeer bv. het programma van een der onlangs door onze werkgroep ingestelde commissies: „een commissie ter uitwerking van een cursus, die aangrijpt bij wat het kind kan en die zich bewust is tot de ontwikkeling van welke denkfuncties hij bijdraagt". Dit vooronderstelt blijkbaar, dat men overtuigd is, te dien aanzien over betrouwbaarder gegevens te beschikken, dan de ontwerpers der thans gevolgde leermethoden, en ik kan niet zien, waar men deze gegevens anders zou kunnen vinden, dan in de moderne psychologie. Buiten onzen kring noem ik Dr H. T u r k s t r a, die in zijn brochure „Psychologisch-Didactische Problemen bij het onderwijs in de Wiskunde aan de Middelbare School" (waarvan reeds de ondertitel „Wat heeft de Psychologie voor de Wiskunde te zeggen" veelzeggend mag heten) schrijft: „Die methodes moeten worden gebezigd en *die* stof moet worden behandeld, die op zekeren leeftijd *resonantie* vertonen met het psychische niveau . . ." Zal dit iets meer zijn dan een gemeenplaats, dan zal de psychologie ons natuurlijk bovendien moeten leren, welke nu die methodes, die stof wel zijn. Dàt ze ons te dien aanzien iets kan

leren, is ook inderdaad de overtuiging van Dr Turkstra en hij verzuimt niet, die overtuiging te staven door een bespreking van onderzoekingen van Schlüssler en anderen, waarover later meer.

Het is met het oog op dit vertrouwen in den van de psychologie bij onzen vernieuwingsarbeid reeds thans te verwachten steun, dat ik enigen tijd geleden in onze werkgroep heb voorgesteld, een systematisch onderzoek naar de aanwezige gegevens in te stellen. Ik achtte deze zaak van zoveel belang, dat ik op mij heb genomen, dit onderzoek zelf ten uitvoer te leggen. Niet echter, dan na enige aarzeling: wie wel eens dergelijken documentatie-arbeid heeft verricht, zal begrijpen waarom. Bijzonder verheugde het mij dan ook, dat Prof. Dr F. Roels mij op de meest tegemoetkomende wijze toestond, van de op het Psychologisch Laboratorium der Rijksuniversiteit te Utrecht aanwezige litteratuur gebruik te maken. Ook Dr H. Turkstra was zo vriendelijk, mij met inlichtingen van dienst te zijn. Ik spreek wel uit naam van onze werkgroep, wanneer ik beiden Heren voor de zo vriendelijk betoonde hulp bij deze gelegenheid hartelijk dank zeg. Ook aan onze verschillende bibliotheken komt een woord van dank toe.

Ik zocht nu allereerst in de ons gebied betreffende rubrieken der bibliographie van de 15 laatste jaargangen van het tijdschrift „L'Année Psychologique”. Deze leverde een tiental titels van publicaties, die enigszins met het ons nu interesserende probleemgebied verband hielden. Mijn bezorgdheid, bedolven te worden onder een berg litteratuur, bleek dus wel heel weinig in overeenstemming met de feiten! Bij deze titels kon ik op grond van andere gegevens nog een ongeveer gelijk aantal voegen, die meest van ouderen datum waren. Ik wijs er met nadruk op, dat ik hier alleen het oog heb op publicaties van wetenschappelijk psychologisch karakter; publicaties op het gebied van paedagogiek, didactiek en methodiek bleven buiten beschouwing, tenzij als vindplaats voor titels als door mij werden gezocht.

Het aantal titels, dat ik op deze wijze bijeenkreeg, een twintigtal, is wel opvallend gering, vooral in vergelijking met het buitengewoon groot aantal publicaties, dat over andere psychologische vragen verschijnt. Zó opvallend, dat ik wil trachten, den geringen omvang van de ons interesserende psychologische literatuur te verklaren,

vóór ik overga tot een korte bespreking van enkele publicaties in het bijzonder.

Die geringe omvang wordt begrijpelijk, als men rekening houdt met de omstandigheid, dat in de tegenwoordige wetenschappelijke psychologie onderscheiden stromingen en richtingen bestaan. Onder deze stromingen kunnen we onderscheiden een zg. *natuurwetenschappelijken* vleugel, waartoe als extremistische repraesentanten de reflexologen en behaviouristen behoren, en een zg. *geesteswetenschappelijken* vleugel, die bv. door den structuurpsycholoog Spranger wordt vertegenwoordigd. De psychologen van de natuurwetenschappelijke richting oriënteren zich aan de methoden van de natuurwetenschap, de geesteswetenschappelijke psychologen zijn van opvatting, dat deze voor den opbouw van de psychologie niet voldoende zijn, en menen, dat de laatste het voor de zg. geesteswetenschappen karakteristieke „Verstehen” niet zal kunnen ontberen. Het is intussen, gezien het gebrek aan eenheid van terminologie op psychologisch gebied, zeer moeilijk, tussen de verschillende opvattingen de juiste methodologische betrekkingen te bepalen. Ter nadere karakterisering evenwel het volgende: de natuurwetenschappelijke psychologie kiest haar uitgangspunt bij voorkeur in het onderzoek van de „eenvoudigste” psychische processen („dierpsychologie”!), de geesteswetenschappelijke psychologie omgekeerd in de analyse van de meest gecompliceerde, die in het cultuurleven hun uitdrukking vinden.

Nu is het eigenlijk wiskundig denken voor de methoden van de natuurwetenschappelijke psychologie vooralsnog moeilijk toegankelijk. Men kan nu eenmaal juist de meest essentiële psychische processen, die zich bij het wiskundig denken voordoen, niet naar willekeur en nog minder onder vereenvoudigende (schematiserende) proefvoorwaarden te voorschijn roepen. Hiermee is zeer in het kort verklaard, waarom de natuurwetenschappelijke psychologie zich zo weinig intensief met het wiskundig denken heeft beziggehouden.

Het is wel duidelijk, dat de geesteswetenschappelijke methode zich voor de analyse van het wiskundig denken veel beter zou lenen. Nu doet zich echter de omstandigheid voor, dat de karakteristieke vertegenwoordigers van deze methode zich tot de wiskunde gewoonlijk minder voelen aangetrokken. Hun antagonisme

ten opzichte van de natuurwetenschappelijke methode houdt blijkbaar verband met een zekere aversie tegenover de natuurwetenschappen zelf, die dan, op grond van een elementair — hoewel zeer verspreid — misverstand, op de wiskunde wordt overgedragen.

Toch zijn wel psychologische onderzoeken over het wiskundig denken verricht met methoden, die sterk aan de geesteswetenschappelijke herinneren. Ik denk hier aan algemeen bekende onderzoeken als die van Helmholtz, Poincaré en Mannonry. In deze onderzoeken is ongetwijfeld veel, dat voor het onderwijs in de wiskunde van veel belang kan zijn. Het zijn echter niet in de eerste plaats déze onderzoeken, waarop men zinspeelt, wanneer men spreekt over de psychologische gegevens voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde. Bovendien staan deze onderzoeken tamelijk los van het werk, dat door de eigenlijke vakpsychologen wordt verricht, doordat ze meestal gepubliceerd zijn in samenhang met zuiver wiskundige beschouwingen, die den vakpsycholoog nu eenmaal minder zullen interesseren, en doordat de gebruikte terminologie en de gevolgde methode nogal afwijken van de door vakpsychologen toegepaste. Tenslotte bezitten deze beschouwingen uiteraard een enigszins persoonlijk, om niet te zeggen subjectief, karakter, dat hen onderscheidt van het streven naar onpersoonlijke objectiviteit, dat het werk van de vakpsychologen kenmerkt. Om al deze redenen bepaal ik me ertoe, deze onderzoeken met nadruk in Uw aandacht aan te bevelen.

Ik kan dus overgaan tot een bespreking van enkele der vakpsychologische publicaties, die ik bij mijn nasporingen heb gevonden. In de eerste plaats noem ik

Ph. Chaslin, „Essai sur le mécanisme psychologique des opérations de la mathématique pure”, Paris 1926. Chaslin was wellicht als weinigen gequalificeerd tot het schrijven van een dergelijk werk: psychiater van professie, leerling van Ribot en bovendien in de wiskunde een zeer vergevorderd amateur, bespreekt hij onderwerpen als de theorie van Galois, de vergelijking van Fredholm, de paradox van Richard. In zijn werk ontbreekt echter elke diepere psychologische analyse! Zelf spreekt hij dan ook (blz. 271) van een „étude bien insuffisante” en na een korte uitweiding over den wiskundigen aanleg merkt hij op, dat zijn be-

schouwingen het raadsel daarvan niet oplossen: „C'est malheureusement ce qui arrive toujours si rapidement en psychologie, qui, dès que cela commencerait à devenir intéressant, est obligée de faire appel à l'inconscient, donc à la physiologie. Et celle-ci n'est pas près d'aborder la question.”

E. L. Thorndike, „The Psychology of Arithmetic”, N.Y. 1922. Dit werk kon ik niet inzien, ik heb echter reden te onderstellen, dat het, evenals andere publicaties van dezen schrijver, uitsluitend op het elementair rekenen betrekking heeft.

A. S. Edwards (Journ. of ed. Psych. XXVII, 1936) vergeleek de kennis van de arithmetische termen bij eerstejaarsstudenten met hun studieresultaat en vond 0,59—0,64 correlatie.

„En daarmee hebt U een algemenen indruk, van wat er op dit gebied is gedaan. Over enquêtes naar de belangstelling voor wiskunde en andere leervakken heb ik niet gesproken; over correlatie-onderzoek zal ik nog een en ander zeggen. Maar geen van beide geeft ons het dieper inzicht in de structuur van het mathematisch denken, dat wij voor een wetenschappelijk-psychologische fundering van de vernieuwing van het wiskunde-onderwijs zouden behoeven.”

Zó schreef ik, toen ik dit Rapport ontwierp! Ik acht mij gelukkig, dat ik toch een publicatie van groter gewicht kan bespreken, die verscheen, toen ik reeds met de definitieve formulering was begonnen. Het is

E. R. Jaensch u. Fritz Althoff, „Mathematisches Denken und Seelenform”, Leipzig 1939. Jaensch is ook ten onzent zeer bekend door zijn onderzoekingen over de z.g. „Eidetik” en door zijn typologie. Deze typologie wordt hier toegepast op het mathematisch denken. Verschillende deutsche wiskundigen en een aantal jeugdige proefpersonen worden op deze wijze in verschillende typen ondergebracht. Uit de verkregen resultaten worden dan verschillende conclusies met betrekking tot het wiskunde-onderwijs getrokken. Voor ik hieruit enkele citaten geef, merk ik op, dat men ook in deze publicatie gegevens over de ontwikkeling van het wiskundig denken vergeefs zoekt (zie echter blz. 160).

Jaensch bespreekt de voorstellen van Petermann en Haggge („Gewachsene Raumlehre”, Freiburg, 1935), die het meetkunde-onderwijs in de richting van een „produktives Konstru-

tionsspiel" willen hervormen. Hij voert daartegen „zwei wesentliche Einwände" aan (die ook op andere hervormingsvoorstellen van toepassing zijn): „1. Gerade auch ein *psychologischer* Vorzug des üblichen Lehrsystems würde hierbei preisgegeben werden. Eben weil dieses System nur auf den *sachlichen* Zusammenhang der mathematischen Gegenstände untereinander begründet ist und darum keine ganz bestimmte innere Haltung voraussetzt, eben dadurch gibt es den *allerverschiedensten* inneren Haltungen und Erlebnisweisen der Mathematik eine Möglichkeit der Betätigung. Die Arbeit von F. A l t h o f f zeigt sehr deutlich, dass bei dem üblichen Lehrsystem die allerverschiedensten dieser Haltungen und Erlebnisformen ihr Betätigungsfeld finden. Hier dagegen wird eine ganz bestimmte innere Haltung und Erlebnisform zum Leitgesichtspunkt des ganzen Aufbaus erhoben. Jünge Menschen von *anderem* Typus und anderer innerer Haltung werden darum nicht erfasst werden und leer ausgehen. Die Haltung des experimentierenden Konstrukteurs, wie angemessen sie vielen Jugendlichen auch sein mag, ist doch immerhin nur eine unter anderen. 2. Gerade auch in der *streng logischen und eindeutigen Gebundenheit* des bisherigen Systems, im Unterschied zu der freien Ungebundenheit des neu vorgeschlagenen, sehen wir einen grossen *erzieherischen* Vorzug, der nicht ohne weiteres preisgegeben werden darf. Gerade der logisch-exakte und eindeutige Aufbau des mathematischen Lehrsystems ist ein Hauptmittel, um in dem jugendlichen Geiste den Sinn für *das unausweichlich Zwingende und Bindende der Wahrheit* zu erwecken." Toch wil J a e n s c h het bestaande systeem in den zin van die voorstellen aanvullen, en wel door toepassing van het in Italië gangbare „spontane onderwijs". „In einer Stunde in der Woche dürfen dort die Schüler alles vorbringen, was sie wissen wollen oder auf dem Herzen haben . . . Könnte man nicht im Mathematik-Unterricht, *zusätzlich* zu seinem logisch-systematischen Aufbau, gelegentlich eine Stunde einfügen — es brauchte ja durchaus nicht jede Woche zu sein —, in der dieses freie, produktive Konstruktionspiel geübt und in Gang gebracht wird?" Uit het laatste blijkt wel, hoezeer degenen ongelijk hebben, die menen, dat het buitenland ons op onderwijsgebied in alle opzichten vóór is; ten onzent is het al lang niet meer nodig, bijzondere lesuren met de door J a e n s c h aangegeven bestemming op het lesrooster uit te trekken,

daar het algemeen als een elementaire didactische waarheid geldt, dat geen enkel lesuur volkomen aan zijn bestemming heeft beantwoord, wanneer niet van de zijde der leerlingen vragen of opmerkingen van enige betekenis in het midden zijn gebracht; verder, dat dergelijke vragen en opmerkingen met de grootst mogelijke zorg dienen te worden behandeld, en dat zulk een behandeling tot de meest waardevolle didactische hulpmiddelen moet worden gerekend. En nu nog een laatste citaat: „Die bisherigen Versuche, den mathematischen Unterricht psychologisch zu unterbauen, zielen vor allem auf die Bedürfnisse der Volksschule ab. Der Hauptgrund wird der sein, dass bei dem bisherigen Stande der Psychologie lediglich eine psychologische Erforschung elementarer Auffassungsvorgänge möglich war, auf deren Pflege es in der Volksschule vor allem ankommt.” *Hier wordt dus zo nadrukkelijk mogelijk de conclusie bevestigd, waartoe ik zelf reeds vóór de lezing van de publicatie van Jaensch en Althoff was gekomen: gegevens voor de psychologische fundering van de didactiek der wiskunde voor scholen van voortgezet onderwijs bestonden er voor deze publicatie niet en a fortiori bestonden er geen gegevens voor de hervorming van het wiskunde-onderwijs aan die scholen op psychologischen grondslag; verder blijkt: de in de genoemde publicatie vervatte gegevens pleiten voor behoud van het ten onzent bestaande; deze gegevens hebben echter geen betrekking op de ontwikkeling van het wiskundig denken.*

Ik zou hier kunnen eindigen; ik geef er echter den voorkeur aan, aan dit Rapport het karakter van een afgerond geheel te verlenen, hoewel de mij ten dienste staande tijdruimte en middelen natuurlijk niet toestaan, naar volledigheid te streven. Hoewel ik over de ontwikkeling van het wiskundig denken bij onze schooljeugd geen gegevens van enige betekenis aantrof, is het toch wel mogelijk, enkele conclusies te trekken uit de onderzoekingen over het abstract denken meer in het algemeen.

Ten onzent zijn door Kohnstamm en diens medewerkers aan het Nutsseminarium vooral de denkpsychologische onderzoekingen van de school van Külpe bekend geworden. Veel van wat deze onderzoekers (vooral Selz) hebben gevonden, is op het wiskundig denken onmiddellijk van toepassing. Alleen — den aan zelfwaarneming gewenden wiskundige (en zonder zelfwaarneming

kan men geen wiskunde beoefenen en nog minder wiskunde onderwijzen) leren de bedoelde onderzoeken weinig nieuws. En over de ontwikkeling van de denkprocessen over kinderen komen wij hier ook niet veel te weten, al schijnt men over te hellen tot de opvatting, dat deze processen in hoge mate door blote mededeling leerbaar zijn (Gertrud Bauer, Kindler, Sand).

Bijzonder veel belangstelling heeft men steeds gehad voor het *logisch denken*, waaronder men veelal in de eerste plaats het redeneren volgens de zg. Aristotelische sluitredens verstaat. Störing o.a. heeft daarover veel gepubliceerd; voor de ons in het bijzonder interesserende vraag naar de ontwikkeling van het logisch redeneren bij kinderen moeten wij ons echter tot anderen wenden. Het verschil van inzicht ten aanzien van deze vraag bewijst wel de moeilijkheid, op dit gebied tot definitieve resultaten te komen.

Preyer („Die Seele des Kindes”, 4. Aufl. Leipzig 1895) nam al logisch denken aan bij kinderen, die nog niet konden spreken. Daartegen verzette Meumann zich: in zijn studie „Die Entstehung der ersten Wortbedeutungen beim Kinde” (Festschrift Wilhelm Wundt II. Bd, ook Philosophische Studien Bd XX, ook afz. Leipzig 1902) voert hij tegen Preyer aan, dat bv. 8-jarige kinderen nog slechts zeer onbeholpen zouden concluderen, en dat het hanteren van de syllogistische figuren zich eerst onder invloed van het onderwijs, en wel mede onder invloed van het onderwijs in de wiskunde, zou ontwikkelen.

In zijn „Vorlesungen zur Einführung in die experimentelle Pädagogik” ging Meumann nog verder en beweerde, dat kinderen in het algemeen vóór hun 14de jaar niet zouden kunnen concluderen (is dat wellicht één der „psychologische gegevens”, waarop men zich bij zijn kritiek op het bestaande onderwijs zo gaarne beroept?); de juistheid van die bewering heeft Schüssler nader onderzocht (Zeitschr. f. angew. Psych. Bde XI, XIII, XV en XVII). Hij gaf daartoe aan kinderen van verschillende leeftijd praemissen; waaruit dan volgens een der zg. „logische figuren” een conclusie moest worden verkregen; ik geef voor elke figuur een stel praemissen als voorbeeld.

- | | |
|--|---|
| I. Alle Menschen sind sterb-
lich. | II. Kein Kraut hat einen hol-
zigen Stamm. |
| Ich bin ein Mensch. | Jede Pappel hat einen
holzigen Stamm. |
| III. Die Adler fressen Fleisch.
Die Adler sind Vögel. | IV. Alle Eidechse sind
Kriechtiere.
Alle Kriechtiere sind
Wirbeltiere. |

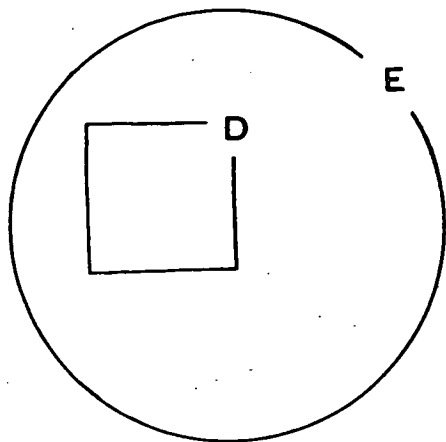
Ruw gezegd, presteerden 13—14 jarigen 50 % van wat ontwikkelde volwassenen bleken te kunnen; ook de prestaties van de laatsten waren lang niet feilloos! Voor nadere gegevens raadplegen *Turkstra, l.c.*

Kohnstamm merkt op (*Med. Nutsseminarium No. 26, Paed. Stud. 1934*), dat deze resultaten uit denkpsychologisch oogpunt (niet zozeer, dunkt me, als globale maatstaf voor den groei van de algemene intelligentie) grotendeels waardeloos zijn. *Schüssler* verzuimde namelijk, zijn proefpersonen in te lichten over een eis van zuiver conventioneel karakter, die de formele logica aan de conclusies pleegt te stellen. Ook de resultaten van *Roloff* en *Ormian* verliezen op grond van *Kohnstamm's* kritiek een groot deel van hun betekenis.

Dit gaf *Kohnstamm* aanleiding, een geheel nieuw onderzoek te ondernemen, dat ook betrekking had op kinderen van veel jeugdiger leeftijd. Om begrijpelijke redenen werden de praemissen nu niet in woorden geformuleerd, maar op een bepaalde manier door figuren weergegeven. Het bleek, dat de kinderen deels reeds op zeer jeugdigen leeftijd in staat waren, de juiste conclusies te trekken. Terecht merkt *Kohnstamm* dan ook op; „dat wij de gangbare meningen over de onlogischheid van den kinderlijken geest aanmerkelijk moeten wijzigen” . . . „Kinderen van zes en zeven, zeker die van acht jaren zijn tot redeneringen in staat, die nog maar heel weinig aanschouwelyken inhoud hebben.”

Toch zou men zich ernstig vergissen, wanneer men hieruit tot het bestaan van echt formeel-logisch redeneren bij kinderen van 6—8 jaar zou concluderen; dat wordt door deze onderzoekingen niet bewezen, zoals *Kohnstamm* zelf (*l.c. blz. 19*) opmerkt, en zoals uit de volgende analyse nader moge blijken. De vervan-

ging van de in woorden geformuleerde praemissen door figuren berust op een gedeeltelijk formeel parallelisme tussen de onderlinge betrekkingen van begripsomvangen (waarvan de theorie voor velen blijkbaar nog altijd *de logica* is) en die van vlakke gebieden. Zo



kan bv. de praemisse: „alle Duitsers zijn Europeanen” door nevenstaande figuur worden weergegeven. Hoe wil men nu echter de praemisse: „*als* alle Duitsers Europeanen zijn, *dan* zijn alle Pruisen Europeanen” in tekening brengen? Om het anders uit te drukken: het bedoelde parallelisme betreft slechts een *deel* van de logica. Het is dus duide-

lijk, dat de voorstelling van bepaalde logische betrekkingen door figuren de eerste van hun eigenlijken zin berooft. Dat de kinderen de hun gestelde vragen goed konden beantwoorden, bewijst dus nog niet, dat zij in den eigenlijken zin des woords formeel-logisch redeneerden, wel echter, dat zij beschikten over een vrij aanzienlijk vermogen tot abstractie; het is zonder twijfel een bijzonder belangrijk en verrassend resultaat, dat dit vermogen bij 6—8-jarigen reeds in zulk een omvang aanwezig blijkt.

Dat van dergelijke vermogens in den regel zo weinig blijkt, vindt zijn oorzaak in de gebrekkige taalbeheersing van het jonge kind; door een fraaien kunstgreep moest K o h n s t a m m het aanwezige vermogen tot abstractie als het ware zichtbaar maken. Eigenlijk logisch redeneren is echter minder aan ruimtebeelden, dan aan woord- en klankbeelden georiënteerd. Men zou dus in beginsel de leerlingen, die K o h n s t a m m's vragen juist beantwoordden, tot het uitvoeren van bepaalde logische redeneringen in staat kunnen stellen, door hen te brengen tot beheersing van bepaalde taalmiddelen.

Men zij in het algemeen zeer voorzichtig met het trekken van conclusies uit proeven met syllogismen, ook al worden foutenbronnen, als bij S c h ü s s l e r voorkwamen, vermeden. Men weet

immers niet, hoe een bepaalde conclusie tot stand komt, en daarop komt het hier juist aan. Wanneer ik als praemissen geef: „alle roofdieren eten vlees” en „de wolf is een roofdier”, dan zal de juiste conclusie „de wolf eet vlees” wel gemakkelijk te voorschijn komen, maar wordt ze nu inderdaad getrokken op grond van inzicht in de formele betrekkingen tussen de praemissen? Dat dergelijk inzicht bij den leerling aanwezig is, wordt ondersteld bij de behandeling van de bewijzen uit het ongerijmde, die berusten op het trekken van onjuiste conclusies uit onjuiste praemissen; de leerling moet dus kunnen onderscheiden tussen de materiële juistheid van praemissen en conclusie en de formele juistheid van de redenering (dat hieraan nog wel eens iets hapert, blijkt bv. hieruit, dat de leerlingen zich, wanneer men hen attent maakt op een rede-neerfout, gaarne beroepen op de juistheid van hun conclusie). In mijn dissertatie „Rede en Aanschouwing in de Wiskunde” (Groningen 1935) heb ik daarom gewezen op de noodzakelijkheid, vragen uit de formele logica bij intelligentie-onderzoek (ik onderstelde toen stilzwijgend, dat deze vragen — zoals toch vanzelf spreekt — werden opgegeven ter toetsing van het vermogen tot formeel-logisch redeneren) te kiezen buiten de gewone gedachten-sfeer van den proefpersoon. Dit is door L a n g e v e l d in diens „Inleiding tot de Studie der Paedagogische Psychologie” (Groningen 1937) bestreden; hij meent, dat bij een dergelijke keuze van de opgaven de proefpersoon niet voldoende zal worden geactiveerd, om hem te brengen tot die prestaties, waartoe hij overigens in staat zou zijn. Dit bezwaar blijkt m.i. geen steek te houden, wanneer ik mijn bedoeling nog in dien zin preciseer, dat niet de vorm, maar wel de inhoud van de praemissen buiten de gedachtenwereld van den proefpersoon dienen te worden gekozen; nu ja . . . maar dan wordt de bewering triviaal: want de bedoeling is juist, te onderzoeken, of de proefpersoon in staat is, den logischen vorm afzonderlijk te beschouwen, m.a.w., *of die logische vorm als zodanig tot zijn gedachtenwereld behoort!* Op de hier aangeduide moeilijkheid blijkt vroeger reeds een autoriteit als W. S t e r n („Die Intelligenz der Kinder und Jugendlichen”, Leipzig 1920, S. 110) te hebben gewezen, zij het in enigszins andere bewoordingen: „Ferner wäre es interessant festzustellen, ob, bzw. wann die Prüflinge zwischen der blossen *Tatsächlichkeit* des Schlussergebnisses und seiner

logischen Notwendigkeit zu unterscheiden wissen. Doch sehe ich noch keine geeignete Methode für diese Feststellung."

In het voorgaande werd gewezen op den samenhang tussen het vermogen tot formeel-logisch redeneren en de taalbeheersing. Nadere gegevens over de beheersing van logische termen vond ik bij O. L i p p m a n n: „Die Entwicklung der grammatisch-logischen Funktionen" (Zeitschr. f. ang. Psych. XII, 1917); uit resultaten met invul-tests bleek, dat voor de termen „denn", „oder", „nicht-und" (in de betekenis van „noch-noch"), „nachdem", „aber", het aantal „richtige Ausfüllungen" van het derde tot het achtste schooljaar van $\pm 20\%$ tot $\pm 90\%$ steeg.

Uit het bovenstaande zal gebleken zijn, dat de denkpsychologie nog maar in het beginstadium van haar ontwikkeling verkeert (ook L a n g e v e l d schrijft, l.c. blz. 156: „Onderzoekingen, welke exakte en goed geïnterpreteerde gegevens aan het licht brachten over de intellectuele ontwikkeling van de middelbare schooljeugd bestaan er bij mijn weten niet"). Het is niet zo heel moeilijk, langs experimentelen weg gegevens op dit gebied te verkrijgen; de grote moeilijkheid is, als in elke experimentele wetenschap, gelegen in de *interpretatie* van deze gegevens. Ik wil dit aan de hand van een voorbeeld nader toelichten; bepaalt men, bv. op grond van rapportcijfers, de correlatie tussen de prestaties van leerlingen in verschillende leervakken of groepen van leervakken, bv. voor wiskunde en moderne talen, dan vindt men in de lagere klassen een duidelijk positieve correlatie, die in de hogere klassen verdwijnt (W o l d e n d o r p, Paed. Stud. VIII, 1927, V a n D a l f s e n, Paed. Stud. X, 1929, XIII, 1932; eigen onderzoek met betrekking tot het Kerstrapport 1934/35 van 373 leerlingen der R.H.B.S. te Amersfoort); de voor de hand liggende verklaring van dit enigszins verrassend verschijnsel is deze: de aangeboren algemene intelligentie zou zich in den loop van de schoolloopbaan langzamerhand differentiëren. Dat deze verklaring onjuist is, volgt onder meer hieruit, dat van een school als de H.B.S. de leerlingen met eenzijdige prestaties na korter of langer tijd naar andere onderwijsinrichtingen (M.T.S., handelsschool) plegen over te gaan. V a n D a l f s e n zoekt de oplossing dan ook, m.i. geheel terecht, in tegen-gestelde richting: doordat in de hogere klassen de leerlingen, wat den omvang en de geaardheid van hun verstandelijken aanleg be-

treft, steeds méér een homogene groep vormen, worden de verschillen in hun prestaties hoe langer hoe minder door de verschillen in hun intelligentie en dus hoe langer hoe meer door anderzortige, grotendeels „toevallige” factoren (toekomstplannen e.d.) veroorzaakt; deze doen de oorspronkelijke correlatie verdwijnen. Men ziet dit als volgt gemakkelijk in: stel, dat men door voortgezette selectie gekomen was tot een schoolklasse, waarbinnen geen verschillen in verstandelijken aanleg (noch wat grootte, noch wat richting betreft) meer zouden bestaan. De rapportcijfers zouden dan geheel door het toeval bepaald worden en correlatie tussen de cijfers voor verschillende vakken zou er niet kunnen zijn. Selectie, die de homogeniteit verhoogt, heeft dus de tendenz, de correlatie tussen de rapportcijfers voor verschillende leervakken te verlagen.

Zal men dus misschien (zoals Prof. G. Révész, „De ongedeeldheid der begaafdheidsvormen”, Alg. Ned. Tijdschr. v. Wijsb. en Psych. XXXII 1938/39, meent) het verzamelen van gegevens aan psychologen zonder speciaal psychologisch inzicht kunnen overlaten (al schuilen m.i. ook hier niet te onderschatten gevaren!), de interpretatie daarvan worde steeds overgelaten aan hen, die wel over een behoorlijke psychologisch invoelingsvermogen beschikken; voor onderzoekingen op het gebied, dat ons interesseert, is bovendien enige diepere kennis van wiskunde en logica gewenst.

En dan nog moet er ernstig worden gewaarschuwd voor overijde gevolgtrekkingen uit de verkregen resultaten. Dat deze waarschuwing niet overbodig is, moge blijken uit wat een jaar of 20 geleden is voorgevallen naar aanleiding van het probleem van de „transfer of training” (zie: W. Reindersma, „Over het inleidend onderwijs in de meetkunde”, Losse Paed. Stud., Groningen, den Haag 1926, waaraan ik ook een tweetal citaten ontleen naar J. W. A. Young, „Concerning Experiments to test the Transfer of Training”, School Science and Mathematics, XVIII, 1918).

„Within the last decade or two, a more or less definite impression has gained currency to the general effect that psychologists have been making laboratory investigations of the process of mental training, whose results have *proved* that mental power, gained in the study of some one subject cannot be applied in another; that old „doctrines” have been „exploded”, that the day of educational

theorizing is past; that henceforth educational problems will be taken into the psychological laboratory and solved."

(Is hier niet zeer juist de geestestoestand gekarakteriseerd, die mij aanleiding gaf tot dit onderzoek?)

R e i n d e r s m a wijst erop, dat er onafhankelijk van het experimenteel onderzoek vele aanwijzingen voor de waarschijnlijkheid van „transfer of training” bestaan, en dat het dus reeds op dien grond onwaarschijnlijk mag heten, dat langs experimenteel psychologische weg het vertrouwen in de mogelijkheid van zulk een „transfer” zou kunnen worden ontzenuwd. Hij deelt mede, dat Y o u n g een onderzoek heeft ingesteld naar de op dit gebied voorhanden experimenteel psychologische gegevens. Inderdaad bleken inzake het probleem van de „transfer” experimenteel psychologische onderzoekingen te zijn verricht, het eerst door W. J a m e s in 1890; er was echter niets gevonden, dat de onmogelijkheid van „transfer” zou kunnen bewijzen; de werkelijk verkregen resultaten bleken onduidelijk: ze wezen echter eerder op het bestaan van „transfer”, dan op de onmogelijkheid daarvan; *de kwestie van de „transfer” van het logisch denken was zelfs in het geheel niet onderzocht*; de onderzoekers zelf hadden trouwens uit hun resultaten helemaal geen sensationele conclusies getrokken, als door Y o u n g geschetst!

„I found, that the explosions which were to overturn the entire educational edifice were taking place chiefly in the regions of rumor and misconception Danger lies in the accretions and distortions, that the descriptions of these results undergo when handed down the line from science to rhetoric, from first to tenth hand."

Laat ons de in deze woorden vervatte waarschuwing niet in den wind slaan! Ook tegenwoordig en ten onzent zijn ze er, de „regions of rumor and misconception”, de dierbare periodieken, die telkens weer colporterèn met het „schrijnend kinderleed”, waaraan in het bijzonder debet zou zijn het wiskunde-onderwijs (dat men in dit verband bij voorkeur als „alleen-zaligmakend” betitelt), gegeven aan kinderen, die nog tot geen abstract denken of logisch redeneren in staat zouden zijn.

Niet alléén, dat deze beweringen geen steun vinden in experimenteel psychologische gegevens, voorzover dergelijke gegevens

aanwezig zijn, wijzen ze in tegengestelde richting; de besproken onderzoeken van K o h n s t a m m bewijzen, dat reeds zeer jeugdige kinderen een verrassend vermogen tot abstractie bezitten; bij S c h ü s s l e r ' s onderzoek is in elk geval gebleken, dat 13 tot 14 jarigen, ruw gezegd, 50 % presteerden, van wat volwassenen konden. De prestaties nemen tot het 20ste levensjaar snel toe, m.i. vooral onder invloed van de toenemende taalbeheersing. Ik weet wel, dat er velen zijn, die nu als volgt zouden redeneren: wanneer het vermogen tot formeel redeneren na het dertiende jaar nog zo sterk toeneemt, waarom dan met het onderwijs in de wiskunde niet liever enkele jaren gewacht?

Mij herinnert die redenering aan de bekende geschiedenis van de dame, die wou leren paardrijden; vóór zij evenwel met de rijlessen begon, informeerde zij, of daaraan geen gevaren verbonden waren. De instructeur vertelde haar toen, dat beginners inderdaad wel eens vielen, maar dat dergelijke onaangenaamheden na de eerste drie, vier lessen niet meer voorkwamen; de dame in kwestie besloot toen, de eerste vijf lessen door haar echtgenoot te laten nemen en zich in afwachting van de zesde les tot de wandelsport te bepalen.

U zult begrijpen, wat ik wil betogen: de sterke stijging in de prestaties op het gebied van het logisch concluderen zou wel eens het gevolg kunnen zijn van de mede in de wiskunde-les verkregen oefening! Of dit werkelijk zo is, is niet zo gemakkelijk uit te maken, omdat men moeilijk als contrôle aan een groep kinderen van een intelligentiegraad, als voor het volgen van V.H.O. vereist is, opzettelijk alle intellectuele vorming zal kunnen onthouden. Wij zijn dus gedwongen een beroep te doen op indirecte gegevens. Ik vind deze in een door M. S c h r e f f e r uitgevoerd onderzoek (zie B i g o t — K o h n s t a m m, „Hoofdstukken uit de Psychologie”, Groningen-Den Haag-Batavia 1934), waarbij bleek, dat in de 4 opeenvolgende klassen van enkele kweekscholen de intelligentie (naar den door hem aangelegden maatstaf) toenam van 1.20 tot 1.50, in de 3 hoogste klassen van enkele H.B.S.en slechts van 1.40 tot 1.50, hoewel op laatstgenoemde scholen meer leerlingen wegens onvoldoenden aanleg plegen af te vallen. De meest bevredigende verklaring lijkt mij wel deze, dat wij op kweekschool en H.B.S. in den grond te maken hebben met leerlingen van denzelfden gemiddelden

aanleg, maar dat de aanwezige aanleg bij de leerlingen van de 1ste klasse der kweekschool door minder intensief voorbereidend onderwijs minder is ontwikkeld dan die van leerlingen van de derde klasse ener H.B.S.

Ook deze gegevens leveren, blijkbaar geen voldoende grondslag voor verstrekkende conclusies; maar wil men er een conclusie uit trekken, dan moet het toch wel deze zijn: óók de leerlingen met goede capaciteiten (beter wellicht: *juist* deze!) behoeven voor de volledige ontplooiing van hun verstandelijken aanleg intensief onderwijs, zoals dit op onze scholen voor V.H.O. wordt gegeven. De ontwikkeling van het intellect is blijkbaar (ook K o h n s t a m m wijst hierop l.c. blz. 27) niet maar alleen een biologisch rijpingsproces, dat zich spontaan, „van-binnen-uit” voltrekt, ze is integendeel vatbaar voor opzettelijke beïnvloeding, bv. door middel van onderwijs.

In dit verband nog een opmerking: de vóórstellen, het systematisch wiskunde-onderwijs op minder jeugdigen leeftijd te doen aanvangen, dan thans gebruikelijk is, berusten veelal op de mening, dat de moeilijkheden, die men bij het aanvankelijk onderwijs in de meetkunde ontmoet, wortelen in bepaalde eigenaardigheden van het kinderlijke denken, die bij individuen van rijperen leeftijd niet meer zouden voorkomen. Men leidt dit blijkbaar af uit de omstandigheid, dat kinderen moeite hebben met allerlei dingen, die voor ons vanzelf spreken. Voor de meest essentiële moeilijkheden is deze mening vrij zeker onjuist; zelf heb ik opgemerkt, dat ik bij de studie van onderdelen van de wiskunde, die van de „gewone” sterk afweken, fouten maakte van dezelfde soort als ons bij onze leerlingen zo kunnen verrassen; alleen zijn dergelijke fouten zeldzamer en kan men ze gemakkelijker zelfstandig opsporen en overwinnen. Op dit verschijnsel berust het voordeel, dat wij van eigen beoefening van de wiskunde kunnen hebben: het nut daarvan is niet gelegen in de verrijking der wetenschap, noch in de mogelijkheid, tegenover de leerlingen „den geleerde uit te hangen”, maar dáárin, dat men zelf telkens met soortgelijke moeilijkheden heeft te worstelen; daardoor zal men ook de door de leerlingen bereikte resultaten gemakkelijker met de nodige clementie beoordelen.

Wanneer ik nu uit het bovenstaande een slotsom mag trekken, dan wil ik erop wijzen, dat de verwachting, in de resultaten van de experimentele psychologie positieve richtlijnen te vinden voor de

vernieuwing van het wiskunde-onderwijs, niet wordt vervuld; bij ons streven naar vernieuwing beschikken wij in wezen over geen andere gegevens, dan onze voorgangers: onze vakkennis en onze door eigen ondervinding opgedane kennis van de behoeften en vermogens van onze leerlingen. Dit moge ons stemmen tot bescheidenheid, tot matiging van onze kritiek op het bestaande en tot het vermijden van al te revolutionaire hervormingsplannen. Veel immers, van wat wij thans wensen, zal ook door anderen vóór ons zijn nagestreefd, en zal vaak, aangepast aan de voorhanden mogelijkheden, praktische uitvoering hebben gevonden.

Wat hier omtrent de psychologische gegevens voor de vernieuwing van het onderwijs in de wiskunde werd gezegd, geldt mutatis mutandis ook voor de telkens weer opduikende voorstellen, de aan de wiskunde in ons onderwijssysteem toegewezen plaats te wijzigen. Ook deze voorstellen steunen niet op betrouwbaar psychologische gegevens. Ik wijs er in dit verband op, dat K o h n s t a m m's bewering, dat er andere dan wiskundige denkvormen zijn, berust op een zuiver willekeurige beperking van het begrip „wiskunde” tot de op onze scholen onderwezen onderdelen van dat vak (Verslag van het 4de Ned. Congres van Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen, Groningen-Batavia 1939), zoals K o h n s t a m m trouwens t.a.p. toegeeft.

Ik wees reeds op de moeilijkheid, omtrent de werkelijke behoeften en mogelijkheden van onze leerlingen betrouwbare gegevens te verkrijgen. De meningsverschillen op onderwijsgebied laten zich dan ook grotendeels uit meningsverschillen betreffende die behoeften en mogelijkheden verklaren.

Dit geeft mij aanleiding, te trachten, een bestaande legende uit de wereld te helpen; in afwijking van vele andere legenden, die op onderwijsgebied in omloop zijn, en waarvan het ontstaan zich in den grijzen voortijd verliest, kan deze zich op een aanwijsbaren oorsprong beroemen: ze is afkomstig van R e i n d e r s m a, die op blz. 25 van zijn eerder geciteerde brochure (zonder nadere bronvermelding) schreef:

„Als ik nu goed zie, kunnen we in 't algemeen onder de didactici twee stromingen onderscheiden, die men het best kan karakteriseren als de *logische richting* en de *psychologische richting*. — De eerste legt bij het onderwijs in de wiskunde den nadruk op

de streng logische ontwikkeling van de stof. Zij meent, dat aan de logische scholing te kort wordt gedaan, wanneer de gestrengheid te wensen overlaat.

De tweede richting meent, dat bij de aanbieding van de leerstof, de eis der gestrengheid niet de enige, zelfs niet de eerste eis is. Wat en hoe er onderwezen zal worden, wordt in de eerste plaats bepaald door het ontwikkelingsstadium van het kind. Het logische is voor haar niet bijkomstig, maar zij is overtuigd, dat een logische scholing alleen mogelijk is bij een gestrengheid, die past bij de ontwikkeling van het kind. Met het kind groeien de bewijsmethoden. Een logische scholing is alleen mogelijk, wanneer aan de psychologische eisen is voldaan."

Schr. heeft natuurlijk niet bedoeld, hiermee te insinueren, dat de aanhangers van de „logische” richting zich bij hun onderwijs *niet* in de eerste plaats door de ontwikkeling van het kind zouden laten leiden. Ernstiger aantijging aan het adres van een practisch schoolman zou ook nauwelijks denkbaar zijn! In werkelijkheid zullen natuurlijk ook de aanhangers van de zg. „logische” richting zich bij hun onderwijs in de eerste plaats, zo niet uitsluitend, laten leiden door de ontwikkeling, de behoeften, de mogelijkheden van hun leerlingen; evenwel: zij hebben over die ontwikkeling, die behoeften, die mogelijkheden een andere mening.

Niet alléén, dat de onderscheiding van een logische en een psychologische richting in de didactiek der wiskunde een verkeerden indruk vestigt ten aanzien van de bestaande meningsverschillen, deze onderscheiding laat zich ook practisch niet doorvoeren. Ik onderstel, dat men Prof. M a n n o u r y wel algemeen zal beschouwen als een typisch vertegenwoordiger van de psychologische richting; toch stelt hij blijkens zijn artikel „Over de bestaanbaarheid van *i*” (Euclides X, 1933/34) even hoge eisen aan het abstractievermogen, als de meest verwoede „logici”. En omgekeerd: ik vermoed, dat het Leerplan, dat indertijd door de Commissie-B e t h werd ontworpen, wel zal worden beschouwd als een karakteristiek voortbrengsel van de logische richting; toch schreef deze commissie over het meetkunde-onderwijs in klasse I: „Het spreekt echter vanzelf, dat men de strengheid der redenering niet te hoog mag opvoeren; om de daardoor veroorzaakte leemten aan te vullen, stelt zij een herziening van de grondbeginselen der vlakke

meetkunde in klasse IV. voor . . .", waarbij dus uitdrukkelijk de eisen van de logica ondergeschikt worden gemaakt aan de mogelijkheden van de leerlingen.

Ook de heer Reindersma zal diegenen, die elke verandering in de bestaande leerstof, die aan de exactheid ten goede komt (ik denk hier aan de onderscheiding van „lijn", „straal", en „lijnstuk"; aan de uitschakeling van de schijnbewijzen inzake de betrekkelijke ligging van twee cirkels en van een lijn en een cirkel door invoering van een of twee axioma's; aan de behandeling van de gelijkvormigheid met behulp van de vermenigvuldiging van figuren; aan de term: „congruentie van lijnstukken" resp. „hoeken"; aan de affiniteit), stelselmatig als „te moeilijk" verwerpen, toch niet als medestanders willen erkennen. Daarom is de door Dijksterhuis ingevoerde onderscheiding van aanhangers en tegenstanders van „epistemisch wiskunde-onderwijs" van zoveel waarde. Binnen den kring van de aanhangers van dit onderwijs bestaat dan inderdaad nog wel een meningsverschil ten aanzien van de vraag, welke de behoeften en mogelijkheden der leerlingen nu eigenlijk zijn. Belangrijker echter is, dat de aanhangers van de „logische richting" — om nog eenmaal deze aanduiding te gebruiken — méér dan hun tegenstanders het onderwijs in de wiskunde als één geheel beschouwen; bij het onderwijs aan 12 en 13-jarigen houden zij sterker rekening met de behoeften, die op iets rijperen leeftijd zullen ontstaan. Omgekeerd verwachten zij dan ook, wat een deel van hun bemoeiingen betreft, slechts op langer termijn een merkbaar resultaat. De gemoedstoestand van een leraar mag nu eenmaal niet zijn die van een speculant, die enkele dagen na een beursoperatie het resultaat daarvan in klinkende munt wil opstrijken, hij moet eer zijn die van een landman, die welgemoed zijn moeizamen arbeid verricht, in het onzeker vooruitzicht, dat hij daarvan ééns, zij het ook pas na jaren, de vruchten zal kunnen plukken.

LITTERATUUR.

Ik vestig er nogmaals de aandacht op, dat mijn onderzoek alleen psychologische onderzoekingen betrof, en geen paedagogische of didactische publicaties; de laatste vooronderstellen immers, in den gedachtengang, waarin dit onderzoek zijn oorsprong vindt, de eerste. Behalve de in den tekst genoemde publicaties vond ik nog:

BOEKEN.

KÖHLER, G. „Experimentell-pädagogische Untersuchung über die Entwicklung der mathematischen Kritikfähigkeit.” Diss. Bonn 1923.

STÖRRING, G. „Psychologie”. Leipzig 1923.

SZEMINSKA, A. „Essai d'analyse psychologique du raisonnement mathématique.” Cours de Pédag. no. 7, Genève 1935.

TIJDSCHRIFTARTIKELN.

BOGEN, Zeitschr. f. angew. Psych. 19, 1921; BURT, Journ. of Educ. Psych. 1919; DEUCHLER, Zeitschr. f. päd. Psych. 21, 1920; GREGOR, Monatsschr. f. Psychiatrie u. Neurologie 36, 1914; Zeitschr. f. angew. Psych. 10, 1915; Zeitschr. f. Kinderforschung 25, 1920; KÖHLER, Zeitschr. f. päd. Psych. 25, 1924; Marcellina von KUENBURG, Zeitschr. f. angew. Psych. 17, 1920; MÜLLER, Archiv f. die ges. Psych. 50, 1925; PILLSBURY, Scientia Vol. XXXVI, 1924; RENWICK, British Journ. of Ed. Psych. II 1932; ROLOFF, Beiheft Zeitschr. angew. Psych. 27, 1922; ROSE, Zeitschr. f. päd. Psych. 31, 1930, RUTHE, Prakt. Psych. 1, 1920, SELZ, Zeitschr. f. Psych. 119, 1930; G. STÖRRING, Archiv f. die ges. Psych. 11, 1908, 54, 1926, 55, 1926; W. STÖRRING, Archiv ges. Psych. 50, 1925; VOIGT, Zeitschr. f. päd. Psych. 20, 1919, 22, 1921; WINKLER, Päd.-Psych. Arbeiten 13, 1924.

Ik heb niet alle genoemde publicaties kunnen inzien; van den inhoud van de meeste kon ik mij door lezing van het origineel, van een referaat of van citaten een helder beeld vormen. Dr. D. J. E. SCHREK wees mij op: D. KATZ, „Psychologie und mathematischer Unterricht”, Abh. über den math. Unterr. in Deutschland veranlasst durch die J.M.U.K. herausgeg. von F. KLEIN, Bd. III, Heft 8, Lpzg.-Berlin 1913; verder vond ik nog: J. CASTIELLO, „Geistesformung, Beiträge zur exp. Erforschung der formalen Bildung”, Berlin u. Bonn 1934. Geen dezer beide werken bracht wijziging in mijn oordeel.

ERRATUM.

Afl. 4 van de 15e jaargang p. 175, regel 21, staat 0,8539, lees: 0.8462.

OVER INGEKLEEDE VRAAGSTUKKEN EN VERGELIJKINGEN

DOOR

J. H. SCHOGT.

In het volgende worden een paar opmerkingen gemaakt omtrent ingekleede vraagstukken. Deze opmerkingen zijn weliswaar hoogst eenvoudig, maar men vindt ze, voor zoover ik weet, zelfs in uitgebreide leerboeken der algebra niet.

I.

Wanneer men een vraagstuk in vergelijking brengt, kiest men voor eene onbekende grootheid een teeken, „onbekende”, en stelt eene betrekking op, waaraan die onbekende voldoet; deze betrekking is dan de vergelijking. Hiëruit volgt dadelijk, dat de vergelijking eene *noodzakelijke* voorwaarde bevat, opdat de onbekende eene oplossing van het vraagstuk is, maar eene voldoende voorwaarde is zij natuurlijk geenszins. Vandaar dat men *steeds* moet nagaan, of de wortels der vergelijking oplossingen van het vraagstuk zijn.

Deze samenhang wordt zelden duidelijk belicht; het best nog bij de toepassingen op meetkundige werkstukken, waar hij zich uit in het min of meer bekende feit, dat eene analyse het bewijs niet overbodig maakt.¹⁾

Toch liggen ook onder de toepassingen der algebra op vraagstukken, ontleend aan het dagelijksch leven, de voorbeelden voor het grijpen van vergelijkingen, die niet voldoende voorwaarden bevatten; men denke slechts aan vraagstukken, waarbij een aantal personen wordt gevraagd.

Wil men bij de behandeling van ingekleede vraagstukken den nadruk leggen op het bovenstaande, dan doet men m. i. goed, de

¹⁾ Zie de voortreffelijke behandeling in Dr. B. P. Haalmeijer's Leerboek der Vlakke Meetkunde, II, § 164—167.

formuleering eenigszins te wijzigen t. o. v. de gebruikelijke; ik geef hier een zeer eenvoudig voorbeeld, waarbij de afwijkingen gecursiveerd zijn.

Van een getal van twee cijfers is het cijfer der tientallen 4; verwisselt men de cijfers, dan wordt het getal 27 grooter. Welk is dat getal?

Noem het cijfer der eenheden x , dan is het getal $40 + x$, het gewijzigde getal

$$10x + 4,$$

dus is

$$10x + 4 = 40 + x + 27$$

waaruit

$$x = 7.$$

Dus is het gevraagde getal 47.

Indien er een getal is, dat aan de vraag voldoet, en men het cijfer der eenheden door x voorstelt, is het getal $40 + x$, het gewijzigde getal $10x + 4$, en dan voldoet x aan de vergelijking

$$10x + 4 = 40 + x + 27.$$

Hieruit lost men op

$$x = 7.$$

Indien er een getal is, dat aan de vraag voldoet, moet dit dus het getal 47 zijn; dit getal blijkt aan de vraag te voldoen.

Een voorbeeld, waarbij het niet voldoende zijn der voorwaarde, die door de vergelijking wordt uitgedrukt, duidelijker tot de leerlingen spreekt, is het volgende.

Een getal a zoodanig in twee deelen te verdeelen, dat twee maal het verschil der deelen, vermeerderd met de helft van het grootste en een derde van het kleinste, gelijk is aan het getal b .

Indien er eene verdeeling mogelijk is, die aan de eischen van het vraagstuk voldoet, en wij noemen het grootste deel x , dan is het kleinste $a - x$, het verschil der deelen $x - (a - x) = 2x - a$, en dan voldoet x aan de vergelijking

$$2x - a + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}(a - x) = b$$

Men lost deze vergelijking als volgt op:

$$\begin{aligned} 2\frac{1}{6}x - \frac{2}{3}a &= b \\ \frac{1}{6}x &= \frac{2}{3}a + b \\ x &= \frac{4a + 6b}{13}. \end{aligned}$$

Wanneer het vraagstuk mogelijk is, is het grootste deel $\frac{4a + 6b}{13}$ en het kleinste dus $\frac{9a - 6b}{13}$. Hieruit volgt, dat, opdat het vraagstuk mogelijk zij, de betrekking moet bestaan

$$4a + 6b > 9a - 6b$$

$$12b > 5a$$

$$b > \frac{5}{12}a.$$

Is hieraan niet voldaan, dan is het vraagstuk onmogelijk; is er wel aan voldaan, *dan blijkt, als men de proef maakt*, dat de deelen zijn $\frac{4a - 6b}{13}$ en $\frac{9a - 6b}{13}$. Het komt mij voor, dat ook de leerlingen der lagere klassen deze redeneering wel kunnen volgen, maar dat het hun moeilijk zal vallen, haar zelf toe te passen.

II.

Zooeven is gezegd, dat de vergelijking aan de onbekende eene voorwaarde oplegt, die noodzakelijk is opdat zij zal voldoen aan het vraagstuk; er zijn gevallen, waarin men met omzichtigheid te werk moet gaan om dit te bereiken.

Als voorbeeld moge dienen het derde eindexamenvraagstuk der gymnasia in 1935: De eerste, de derde en de elfde term eener rekenkundige reeks zijn opv. gelijk aan den eersten, den tweeden en den derden term eener meetkundige reeks. De som van de eerste zes termen der meetkundige reeks is 2730. Welke zijn deze reeksen?

Duidt men den gemeenschappelijken eersten term der reeksen aan door t_1 , het verschil der rekenkundige reeks door v , de reden der meetkundige reeks door r , dan komt men tot deze vergelijkingen:

$$t_1 + 2v \doteq t_1 r. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$t_1 + 10v \doteq t_1 r^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

$$t_1 \cdot \frac{r^6 - 1}{r - 1} \doteq 2730 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Men vindt voor r de waarde 4; de waarde 1, die bij de oplossing optreedt, voldoet ten duidelijkste niet aan de laatste vergelijking. Maar, gecombineerd met $v = 0$ en $t_1 = 455$ voldoet zij wél aan het vraagstuk. Het voldoen aan de vergelijkingen is in dit geval

blijkbaar niet noodzakelijk voor het voldoen aan het vraagstuk. De oorzaak hiervan is, dat de functie

$$S_n = t_1 \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

slechts de som der eerste n termen voorstelt van meetkundige reeksen, waarvoor $r \neq 1$.¹⁾ Men zou de vergelijking (3) moeten vervangen door

$$t_1 \frac{r^6 - 1}{r - 1} \doteq 2730 \text{ voor } r \neq 1 \quad . \quad . \quad . \quad (3a)$$

$$6t_1 \doteq 2730 \text{ voor } r = 1 \quad . \quad . \quad . \quad (3b)$$

Ook kan men fouten vermijden door voor de vergelijking (3) te schrijven:

$$t_1 (1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5) \doteq 2730,$$

maar het lijkt mij te veel geëischt, dit van leerlingen of eindexamen-candidaten te verlangen. Daarom is het het beste, te vermijden, dat deze quaestie verwerkt wordt in een eindexamenvraagstuk.

III.

In een humoristisch tijdschrift heb ik een plaatje gezien, voorstellende een straatkoopman, die zijn waar aanbiedt met den uitroep: „Vijf cent per stuk, twaalf voor twee kwartjes!”, waarop een voorbijganger, een verstrooide schoolmeester, zegt: „Fout; ga maar zitten.” Telken jare vertel ik deze geschiedenis in de klasse, om dan te betoogen, dat de voorbijganger ongelijk had. Het is namelijk niet mogelijk, met behulp van wiskunde alleen, uit de prijs per stuk van een artikel de prijs van een dozijn af te leiden.

Het is opmerkelijk, hoe vaak aan de wiskunde opgaven worden gesteld, die zij niet vermag op te lossen, en van de wiskunde beoordeelingen worden gevraagd, die zij niet vermag te geven. Ik herinner in dit verband aan de verschillende wijzen van renteberekening over gedeelten van een termijn, welke men vroeger in de leerboeken als „wiskundig juist” en „niet wiskundig juist” onderscheidde. Hoe harde noten de wiskunde te kraken krijgt, moge blijken uit het volgende voorbeeld, ontleend aan een leerboek: Een

¹⁾ Vgl. „Euclides” VI, bladzijde 155, regel 6 v. o.

gezelschap bestond uit drie maal zoo veel mannen als vrouwen. Nadat vier mannen met hun vrouwen vertrokken waren, was het aantal der mannen vier maal zoo groot als dat der vrouwen. Hoeveel mannen en hoeveel vrouwen waren er?

IV.

Tot slot eene opmerking, die niet uitsluitend voor ingekleede vraagstukken geldt, maar ook voor vergelijkingen. Soms lost men vergelijkingen op door toepassing van eigenschappen der evenredigheden, een enkelen keer wordt dit in de leerboeken aangeprezen of voorgeschreven. Het is echter ongeoorloofd, want als men op eene vergelijking, die den vorm eener evenredigheid heeft, eigenschappen der evenredigheden toepast, is de vergelijking, die ontstaat, niet steeds gelijkwaardig met de oorspronkelijke. Gaat men b. v. van

$$f_1(\xi) : f_2(\xi) \doteq f_3(\xi) : f_4(\xi)$$

over op

$$f_1(\xi) \cdot f_4(\xi) \doteq f_2(\xi) \cdot f_3(\xi),$$

dan voldoet eene waarde van ξ , die f_2 of f_4 nul maakt, wel aan de tweede, maar niet aan de eerste vergelijking. Bij toepassing der som- en verschieleigenschappen vindt men iets dergelijks.

Ter illustratie diene dit voorbeeld. Vier getallen verhouden zich als 4, 5, 7 en 9; vermeerderd men ze opvolgend met 8, 10, — 37 en — 47, dan ontstaat eene evenredigheid. Welke zijn die getallen?

Lost men de vergelijking

$$(4x + 8) : (5x + 10) \doteq (7x - 37) : (9x - 47) \quad . \quad . \quad (1)$$

op, door er voor te schrijven

$$(4x + 8)(9x - 47) \doteq (5x + 10)(7x - 37),$$

dan komt men tot

$$(x + 2)(x - 3) \doteq 0$$

met $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.

Lost men (1) op door te schrijven

$$\frac{4x + 8}{5x + 10} - \frac{7x - 37}{9x - 47} \doteq 0.$$

dan komt men tot

$$\frac{(x+2)(x-3)}{5(x+2)(9x-47)} \doteq 0,$$

waaruit men vindt

$$x = 3.$$

Past men de toetsing toe die op grond van bovenstaande opmerking I noodzakelijk is, dan ziet men natuurlijk, dat 3 eene oplossing van het vraagstuk is, en — 2 niet. Maar als het opgegeven vraagstuk bestaan had in de niet ingekleede vergelijking (1), zou de toetsing niet noodig geweest zijn; had men haar nagelaten, dan had men de fout van de eerste oplossing niet ontdekt.

DE FUNCTIES

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} \text{ en } y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$$

DOOR

C. J. ALDERS.

Het „nieuwe” programma voor de H.B.S. schrijft het onderzoek van de bovengenoemde functies voor. Blijkens de leerboeken betekent dit:

- Het aangeven van de intervallen, waarin die functies positief en negatief zijn.
- Het bepalen van de snijpunten met een rechte lijn; in het bijzonder de snijpunten met de coördinaat-assen.
- Het bepalen van de asymptoten.
- Het berekenen van de eventuele extreme waarden, en de bijbehorende waarden van x .

Het ligt voor de hand om na te gaan, welke nieuwe gezichtspunten het bovenvermelde onderzoek opent voor de leerlingen, die de voorafgaande schoolstof gehad hebben. Dan blijkt:

Ad *a*. Dit onderzoek is meestal reeds besproken bij of onmiddellijk na de kwadratische functie.

Ad *b*. Het bepalen van die snijpunten geeft geen wezenlijk verschil met het analoog behandelde bij de functies $y = ax^2 + bx + c$ en $y = \frac{ax + b}{cx + d}$.

Ad *c*. Dit is ook al gedaan bij de functies $y = \frac{ax + b}{cx + d}$; een uitzondering wordt gevormd door het bepalen van de scheve asymptoot bij $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$.

Ad *d*. De berekening van de extreme waarden kan, nu de leerlingen de beginselen van de differentiaal-rekening leren, m.i. beter gebeuren door differentiëren, dan door een minder exacte „elementaire” behandeling. Het minder exacte van die elementaire behan-

deling zit in het feit, dat de functie misschien helemaal geen extreme waarde heeft, maar wel buigpunten. Ik weet natuurlijk, dat men over de redelijkheid van dit bezwaar kan twisten; ook is een exacte elementaire behandeling mogelijk, maar die is bewerkelijk, of gekunsteld, of allebei. Bovendien kan men het nut van die elementaire behandeling ernstig in twijfel trekken.

Alles bij elkaar genomen, kan ik in het onderzoek van de bedoelde functies weinig vormende of practische waarde zien. Nu kan men hetzelfde zeggen van meer onderwerpen uit de schoolwiskunde; op zich zelf zou dat ook misschien geen voldoende reden zijn om ertegen te ageren. Het merkwaardige is echter, dat men uit het oude programma (m.i. terecht) verschillende onderwerpen geschrapt of besnoeid heeft, omdat ze zo weinig vormende waarde bezitten, o.a. onderdelen bij de „herleiding” van wortelvormen; exponentiële en logaritmische vergelijkingen; wederkerige vergelijkingen; de samengestelde intrestrèkening. Het lijkt mij nu in strijd met de *geest* van het nieuwe programma, dat het onderzoek van de functies

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} \text{ en } y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$$

imperatief is voorgeschreven. Als de winst nu alleen moet zitten in die beruchte scheve asymptoot (waarvan de afleiding bovendien nog vrij bedenkelijk en allesbehalve elegant is), dan vind ik het resultaat vrij pover. Ook het motief, dat de grafiek van $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$ een hyperbool is, kan ik niet steekhoudend vinden. De jongens zullen het best geloven (bewezen wordt het nl. niet), maar wat hebben ze daar nu aan? Het lijkt me dan nog beter om te vertellen, dat de grafiek van

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0. \quad \dots (1)$$

een kegelsnede is; dan „weten” ze ineens alles! In het gebied van apodictische beweringen zijn toch alle leerlingen critiekloos. En men zal toch niet de wenselijkheid willen betogen van een onderzoek van vergelijking (1) met de gebrekkige methoden van de „grafische voorstellingen”. En dat ene geval van de hyperbool met een verticale asymptoot is dan ook m.i. te onbelangrijk om er één woord aan te besteden.

Verder heb ik de functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ ($p \neq 0$) nog in geen andere onderdelen van de wiskunde ontmoet; ik heb de „merkwaardigheden” van deze functie pas leren kennen toen ik onderwijs moest gaan geven.

Nog eens: ik zie in het bedoelde onderzoek geen voordelen. Wel een groot nadeel, het kost nl. teveel tijd. Ik weet niet, hoe mijn collega's erover denken, maar mijn ervaring is, dat het nieuwe programma voor de wiskunde ons geen overvloed aan tijd laat. Men moet dit niet verkeerd verstaan; ik kom best toe met de toegemeten tijd, er moet m.i. geen uur bijkomen. Maar ik moet vijf lessen besteden aan het bovenvermelde onderwerp, en die tijd kan ik beter gebruiken. Bovendien is het voor de leerlingen weer een extra onderwerp; binnen niet al te lange tijd moet het mogelijk voor het eindexamen „gekend” worden. En we weten allemaal wat daaraan vastzit.

Conclusie: bij het wiskunde-onderwijs op de H.B.S. is het onderzoek van de functies

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r} \text{ en } y = \frac{ax^2 + bx + c}{px + q}$$

van weinig waarde; in verband met de beschikbare tijd is het daarom gewenst, dat het *imperatieve* voorschrift om deze functies te behandelen, ingetrokken wordt.

Voor de B-afdeling van het gymnasium geldt hetzelfde a fortiori, omdat op die afdeling de beginselen van de analytische meetkunde gegeven worden. Op de A-afdeling van een gymnasium vind ik de indeling van deze functies bij de eindexamenstof eenvoudig dwaasheid; bij navraag bleek mij trouwens, dat vele leraren het niet doen, of ze doen het met een of twee getallenvoorbeeldjes, omdat je nooit kunt weten, wat een gecommiteerde zal zeggen!

Ik wil besluiten met de woorden van Dr. Dijksterhuis op blz. 36 van deze jaargang: „We moeten er zorg voor dragen, dat het met de grafische voorstellingen niet juist zo gaat als met zovele andere wiskundige onderwerpen, nl. dat ze van hulpmiddel tot doel op zich zelf worden, en dat men dus grafieken gaat tekenen, niet omdat men ze nodig heeft, maar omdat men ze nu eenmaal tekenen kan”.

IETS UIT DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

DOOR

Dr. H. J. E. BETH.

De volgende beschouwing schrijf ik naar aanleiding van een opmerking, die ik onlangs in een bijeenkomst heb hooren maken. De spreker beweerde, dat het een kenmerk van de wiskundige didactiek is, dat de docent de formuleering van zijn begrippen vóórpostelt. Als voorbeeld noemde hij de behandeling van de logaritmen, waarbij de docent de beruchte definitie van de logaritmie uit de lucht doet vallen, om vervolgens een aantal stellingen af te leiden omtrent de logaritmen, en ten slotte tot de becijferingen over te gaan.

Ik geloof, dat de docent, die aldus handelt, verkeerd doet. Ook in de wiskundeles behoort hij het nieuwe begrip te doen ontstaan in aansluiting aan de reeds aanwezige begrippen, en hij voere het begrip eerst in, nadat hij de leerlingen de behoefte er aan heeft doen gevoelen. Dit is volstrekt niet in strijd met het nastreven van exactheid in onze formuleeringen; deze exacte formuleeringen moeten niet kant en klaar voor de leerlingen neergezet worden, maar ze moeten door hen onder onze leiding tot stand gebracht worden. Wat het leerboek geeft, is het *resultaat* van de werkzaamheden in de klasse, niet het *begin*.

Als voorbeeld neem ik het onderwerp, dat de boven bedoelde spreker zelf aanroerde; ik geef een vluchtige schets van een eerste les over de logaritmen. Ik begin daar met te wijzen op de veel grootere moeite, die het vermenigvuldigen van twee getallen, bestaande uit b.v. 5 cijfers, kost, dan het optellen van twee zulke getallen. Er bestaat echter een uitzondering: 3^{32} en 3^{57} zijn getallen van veel meer dan 5 cijfers, maar hun vermenigvuldiging kan uit het hoofd plaats hebben. De leerlingen zien, dat deze vereenvoudiging zich voordoet, omdat de beide getallen als machten van één en hetzelfde grondtal geschreven zijn. Dit leidt van zelf tot de

vraag, of niet elke twee getallen als machten van een zelfde grondtal te schrijven zijn; een vraag, die de leerling geneigd is, ontken-
nend te beantwoorden. Hierdoor komen we tot de vraag, welke
getallen dan wel als machten van een voorgeschreven grondtal te
schrijven zijn. We zijn hier weer aangekomen bij het hoofdstuk,
dat we juist verlaten hebben, als we tot de logarithmen overgaan:
het hoofdstuk van de machten met negatieve en met gebroken ex-
ponenten. Bekend is al, dat niet alleen 3, 9, 27, 81, enz. als machten
van 3 te schrijven zijn, maar dat dit ook mogelijk is voor $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$,
 $\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$, $\frac{1}{3}\sqrt[3]{27}$ enz. Aan oefening in deze herleidingen zal
het in de voorafgaande lessen wel niet ontbroken hebben. Hierna
kunnen we dan de vraag aan de orde stellen, of een willekeurig
getal, b.v. 35, als een macht van 3 te schrijven is. Het kost geen
moeite aan te toonen, dat dit niet mogelijk is, als we voor den
exponent alleen de keuze hebben tusschen de geheele en de gebro-
ken getallen. De leerlingen zijn echter, sinds ze met wortelvormen
zijn gaan werken, vertrouwd met het denkbeeld, dat met die
gebroken getallen het laatste woord nog niet gesproken is, en ze
twijfelen niet aan de mogelijkheid, dat aan de opgave: „bepaal x
uit $3^x = 35$ ”, zij het dan ook bij benadering, voldaan kan worden.
Immers is voor hen deze opgave van denzelfden aard als de opgave:
„bepaal x uit $x^2 = 19$ ”, die gesteld werd, nadat aangetoond was,
dat geen geheel of gebroken getal aan de vergelijking voldoet.

Het zou nu hier de plaats zijn om, zooals Leyds dat in
Korrel XXXV liet zien, een benaderende berekening uit te voeren
van x uit een vergelijking van den vorm $a^x = b$. Hierdoor krij-
gen de leerlingen de zekerheid, dat men elk positief getal, en wel
zoo nauwkeurig als gewenscht wordt, kan schrijven als een macht
van elk ander positief getal.

Hiermee is dan ook de vraag, of de vermenigvuldiging van twee
getallen altijd tot een optelling terug te brengen is, tegen de aan-
vankelijke verwachting in, bevestigend beantwoord, mits men met
een benaderde uitkomst genoegen wil nemen. De vraag is nu
slechts, welk getal men zal kiezen als grondtal. Een eenvoudige
beschouwing overtuigt er de leerlingen van, dat het getal 10, het
grondtal van het talstelsel, een groot voordeel heeft: het aantal
geheelen van den exponent is dadelijk aan te geven. Het eenige
werk, dat nog te doen blijft, is: alle getallen te schrijven als mach-

ten van 10. Hier kan de docent de verrassende mededeeling doen, dat dit werk al gedaan is; hij kan de tafel doen ter hand nemen, en uitleggen, dat achter elk getal de gevraagde exponent staat opgegeven; het aantal geheelen van den exponent is weggelaten, omdat dit aantal immers dadelijk bekend is. Hij laat zien, dat de exponent voor 4 het dubbele is van dien voor 2, die voor 8 het drievoud van dien voor 2; dat de som van de exponenten voor 2 en voor 3 gelijk is aan den exponent voor 6; dat de som van de exponenten voor 2 en voor 5 juist gelijk aan 1 is; en vraagt van een en ander de verklaring.

We zijn nu zoo ver, dat we van twee getallen als 5247 en 4381 het product met behulp van de tafel kunnen bepalen, en eerst hierna wordt het m.i. tijd, tot de eigenlijke invoering van het begrip logarithme over te gaan. Dit beteekent nu slechts de invoering van een term, waarvan de leerling den zin al kent; logarithmie is slechts een ander woord voor exponent. Op de stellingen, die b.v. het verband aangeven tusschen $\log a$, $\log b$ en $\log ab$ is hij door het inzien van de tafel al voorbereid en het zijn dus geen zaken, die voor hem uit de lucht komen vallen.

Ik schetste hier de inleiding tot de gebruikelijke behandeling der logarithmen, waarbij dus de logarithmische functie als de inverse van de exponentieele functie beschouwd wordt. Dit begrip wordt spoedig verdrongen, ook als het met zorg aangebracht is; naar aanleiding van dit ervaringsfeit gaf ik op blz. 240 al een andere oplossing van het vraagstuk aan. Hier keerde ik echter tot de gewone behandelingswijze terug, zulks in verband met de opmerking, die ik in het begin aanhaalde.

Ik geef nu nog een ander voorbeeld om te doen zien, hoe we ook in de wiskundeles opbouwend te werk gaan, en ons ervoor hoeden; den leerlingen iets in handen te geven, wanneer we nog niet de behoefte daaraan opgewekt hebben.

Het onderwerp van twee vierkantsvergelijkingen, die een wortel gemeen hebben, kan op verschillende manieren behandeld worden. Ik denk nu aan de methode, waarbij we uit de vierkantsvergelijkingen een lineaire vergelijking afleiden, die den gemeenschappelijken wortel als wortel heeft. Het schijnt me weer geheel onjuist de stelling, die hierop betrekking heeft, met haar bewijs voorop te stellen. We zullen beginnen met een aantal voorbeelden te geven

en hieruit eerst een vermoeden te doen ontstaan. We geven b.v.:

$\begin{array}{r} 3x^2+5x-8=0 \text{ Wortels } 1; -\frac{8}{3} \\ 2x^2+x-6=0 \quad \text{„} -2; 1\frac{1}{2} \\ \hline x^2+4x-2=0 \quad \text{„} -2\pm\sqrt{6} \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2-3x+2=0 \text{ Wortels } 1; 2 \\ x^2-7x+12=0 \quad \text{„} 3; 4 \\ \hline 2x^2-10x+14=0 \text{ Geen wortels.} \end{array}$
$\begin{array}{r} x^2-3x+2=0 \text{ Wortels } 1; 2 \\ x^2-5x+4=0 \quad \text{„} 1; 4 \\ \hline 2x^2-8x+6=0 \quad \text{„} 1, 3 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2-3x+2=0 \text{ Wortels } 1, 2 \\ x^2-5x+4=0 \quad \text{„} 1, 4 \\ \hline 2x-2=0 \text{ Wortel } 1 \end{array}$
$\begin{array}{r} x^2-3x+2=0 \text{ Wortels } 1; 2 \\ x^2-7x+12=0 \quad \text{„} 3; 4 \\ \hline 4x-10=0 \text{ Wortel } 2\frac{1}{2} \end{array}$	$\begin{array}{r} x^2-3x+2=0 \text{ Wortels } 1, 2 \\ x^2-5x+4=0 \quad \text{„} 1, 4 \\ \hline 2x-2=0 \text{ Wortel } 1 \end{array}$

Uit een aandachtige beschouwing van de voorbeelden zien de leerlingen, dat alléén in het geval, waarin de gegeven vergelijkingen een wortel gemeen hebben, zich iets opvallends voordoet. Men brengt hen er toe, het opvallende en het vermoeden, dat bij hen rijst, behoorlijk te formuleeren. Het eerste antwoord, dat men krijgt, zal in het algemeen wel ongeveer als volgt luiden: „Men mag van twee vierkantsvergelijkingen, die een wortel gemeen hebben, de overeenkomstige leden optellen of aftrekken” (het „men mag” is ook na jarenlangen strijd niet gehéél uit te roeien), maar na de eerste mislukte poging komt toch het juiste antwoord wel voor den dag. Eerst nu is de beteekenis van de bewering voldoende tot de leerlingen doorgedrongen, en kan men tot het bewijs van de stelling overgaan.

Onze manier van doen verschilt in geen enkel opzicht van wat de leeraar in een taal doet; ook hij verzamelt voorbeelden, waardoor bij de leerlingen het vermoeden opgewekt wordt van een regelmaat, die vervolgens in woorden gebracht wordt, om ten slotte toegepast te worden.

De onjuiste voorstellingen, die blijken te bestaan in zake het wiskunde-onderwijs, zullen wel haar oorsprong vinden in een beschouwing van de leerboeken. Men meent ten onrechte in het schoolboek een reproductie te moeten zien van de les. Het schoolboek kan slechts het resultaat toonen van wat in de les gedaan is. Als het werkelijk den gang van het onderwijs weergaf, dan zou het

afmetingen hebben, die de grenzen van het toelaatbare verre overschrijden. Indien in een schoolboek ¹⁾ het begrip differentiaalquotient door een uitvoerige uiteenzetting ingeleid wordt, dan is dat een uitzondering, die verklaard wordt door de omstandigheid, dat deze leerstof voor onze school geheel nieuw is. Ik stel me voor, dat na enkele jaren die inleiding bij een herdruk geschrapt wordt en de invoering van het begrip ongeveer als volgt plaats vindt:

Onder het differentiaalquotient van een functie $f(x)$ van x voor een gegeven waarde van x verstaat men het resultaat van de volgende vijfdeelige bewerking:

1o. Bepaal de waarde van de functie voor de gegeven waarde van x .

2o. Bepaal de waarde van de functie voor een andere waarde van x .

3o. Bepaal het verschil van de onder 1o. en 2o. genoemde functiewaarden.

4o. Bepaal het quotient van het onder 3o. genoemde verschil van de functiewaarden en het verschil van de waarden van x , waarbij ze behooren.

5o. Bepaal de limiet van dat quotient, als men de onder 2o. genoemde waarde van x onbepaald tot de gegeven waarde van x laat naderen.

Echter zal, indien het leerboek aldus begint, de leeraar verkeerd handelen, die deze definitie als uitgangspunt neemt op de les; hij zal stellig geen contact met de leerlingen hebben.

¹⁾ Nieuwe Schoolalgebra, dl. III.

VRAAGSTUKKEN.

In Jg. 15 hebben we voor het eerst een vraagstuk opgegeven en wel het werkstuk van *Castillon*; de oplossingen zijn tot een artikel verwerkt door *G. R. Veldkamp* in afl. VI van Jg. 15. De lezing daarvan wordt den lezers ten zeerste aanbevolen.

We schreven: „het blijkt, dat menigeen zijn krachten beproeft op een pittig vraagstuk als aangename afwisseling van de dagelijkse schoolzaken. We stellen ons daarom voor, zo nu en dan een vraagstuk op te geven en we verzoeken de lezers hun oplossingen in te zenden. Bij voorkeur zullen we een van hen uitnodigen, alle oplossingen na te gaan, te rangschikken en ze te verwerken tot een artikel.”

Hier volgt nu

VRAAGSTUK II.

In een driehoek *ABC* drie cirkels γ_1 , γ_2 en γ_3 te beschrijven, waarvan γ_1 raakt aan de benen van $\angle A$, γ_2 aan die van $\angle B$ en γ_3 aan die van $\angle C$, terwijl elk der cirkels de beide andere uitwendig raakt. (Werkstuk van *Malfatti*).

Inzending voor 1 Maart 1940 aan *P. Wijdenes*, *Jac. Obrechtstraat 88*, Amsterdam Zuid.

ENQUÊTE OVER LOGARITHMENTAFELS.

Nu ik een jaar gewerkt heb met logarithmen in vier decimalen, kan ik niet anders zeggen, dan dat deze mij slecht voldoen, voornamelijk bij trigonometrische berekeningen. De uitkomsten zijn zelden in minuten nauwkeurig, de onzekerheid is veelal groot. De interpolatie geraakt op den achtergrond; leerlingen, die een tafel met 4 decimalen hebben gebruikt, kunnen met een tafel met 5 decimalen waarschijnlijk niet overweg.¹⁾

Gaarne zal de redactie vernemen, hoe de lezers over deze quaestie denken.

J. H. S.

¹⁾ Zie het artikel van den heer *Eilander* op bldz. 14 van jaargang XV.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van den schrijver.

Dr JOH. H. WANSINK, *Reken- en Sfelkunde voor het M. en V. H. O.*,
deel I, 205 blz., geb. f 2.40

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

Dr P. MOLENBROEK, *Leerboek der Vlakke Meetkunde*, 8e druk, be-
werkt door P. Wijdenes. 640 blz., 590 fig. geb. . . . f 11.50
voor intekenaars op Noordhoff's Wiskundige tijdschriften
tijdelijk f 10.—

P. WIJDENES, *Oplossingen van de vraagstukken* uit de 8e druk van
Dr P. Molenbroek *Leerboek der Vlakke Meetkunde*, 2e druk,
64 blz., 7 fig. f 2.50

COMPOSITIO MATHEMATICA, vol. 6 fasc. 3 (11, IV, 1939).

Index van deze aflevering (blz. 305—478):

STEFAN BERGMANN, Über meromorphe Funktionen von
zwei komplexen Veränderlichen.

A. ERDÉLYI, *Transformation einer gewissen nach Produkten
konflüenter hypergeometrischer Funktionen fortschreitenden
Reihe.*

C. S. MEIJER, *Integraldarstellungen für Struvesche und Bes-
selsche Funktionen.*

E. MAKAI, *Über eine Eigenwertabschätzung bei gewissen homo-
genen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung.*

EINAR HILLE, *Remarks concerning group spaces and vector
spaces.*

REINHOLD BAER, *Almost hamiltonian groups.*

ERNST JACOBSTHAL, *Zahlentheoretische Eigenschaften ganz-
zahliger Polynome.*

SAMUEL EILENBERG, *Généralisation du théorème de M. H.
Hopf sur les classes des transformations en surfaces sphériques.*

B. KAUFMANN, *Limit groups and spaces in regions and open
manifolds.*

L. FEJES, *Über die Approximation konvexer Kurven durch
Polygonfolgen.*

ERNST SAS, *Über eine Extremumeigenschaft der Ellipsen.*

GEORGES ALEXITS, *La torsion des espaces distanciés.*

H. S. THURSTON, *A Correction.*

BOEKBESPREKING.

P. Hoenen, *Philosophie der anorganische natuur*.
460 blz., prijs f 3,—. N.V. Dekker en Van de Vegt,
Nijmegen—Utrecht. 1938.

In de bouwstoffen der levenlooze natuur treden velerlei veranderingen op, die voor een groot gedeelte behooren tot het onderzoekingsgebied der natuur- en scheikundigen. Men kan zich tevreden stellen met het beschrijven van deze veranderingen, zooals ze zich aan ons voordoen. Men kan ze groepeeren en er regels voor opstellen. Men kan ook verder gaan en die veranderingen trachten te verklaren uit de naaste oorzaken, waarbij men dan gewoonlijk uitgaat van hypothesen over den vermoedelijken bouw der stof. Zoo werd de hypothese opgesteld, dat de stof is opgebouwd uit moleculen en atomen (atoomtheorie van Dalton). Deze theorie heeft in haar verdere uitwerking vele successen beleefd en heeft dus zeker, wanneer ze ontdaan wordt van de overbodige elementen, haar grond in de werkelijkheid.

Maar ook met deze theorieën heeft men nog geen verklaring van de veranderingen in haar diepste wezen. Het probleem van de veranderlijkheid in de natuur, het probleem van worden en vergaan grijpt dieper. Wat is het wezen der stof, dat zij deze veranderingen toelaat; hoe ontstaat een molecuul van een verbinding uit zijn atomen; hoe ontstaan de atomen, wanneer een molecuul wordt ontleed? Dit zijn vragen, die niet meer behooren tot het gebied van de natuurwetenschappen, maar tot het gebied der natuurphilosophie. Gaat men de philosophische systemen na, dan zijn er in hoofdzaak twee, die, ieder op zijn wijze, een oplossing willen geven van het probleem der veranderlijkheid: 1o. het *mechanisme* (met als voornaamste vertegenwoordiger het atomisme), dat aanneemt, dat de stof is opgebouwd uit innerlijk-onveranderlijke deeltjes (atomen) en alle veranderingen in de natuur wil verklaren louter door plaatselijke beweging van deze deeltjes (een molecuul zou dan zijn een bepaalde groepeerings van de samenstellende atomen, die door onderlinge krachten samengehouden, een nieuwe uiterlijke eenheid vormen); 2o. de *leer van Aristoteles*, die naast deze zuiver uiterlijke verandering door plaatselijke beweging ook een innerlijke verandering kent en kan verklaren, en niet alleen een kwalitatieve maar ook een substantieele verandering. Volgens deze leer kan een molecuul een nieuw ding zijn, een nieuwe zelfstandigheid, waarin de atomen geen individueel bestaan meer hebben, maar waarin zij gedeeltelijk te gronde zijn gegaan. Het molecuul is dan een nieuwe innerlijke eenheid, die geheel nieuwe eigenschappen kan hebben, totaal verschillend van de eigenschappen van de atomen, waaruit het is ontstaan.

Welk van beide theorieën de juiste verklaring geeft, moet de ervaring leeren. Hiervoor is noodig een diepgaande studie van de philosophische stelsels eenerzijds en van de gegevens der physica en chemie anderzijds. De schrijver van het hier aangekondigde boek heeft dit onderzoek met volkomen meesterschap over de stof verricht en hij komt tot de conclusie, dat de laatste verklaring van de anorganische natuur niet kan gegeven worden door het mechanisme, maar alleen door de Aristotelische filosofie. In zijn boek geeft hij in het eerste hoofdstuk een interessante uiteenzetting van beide stelsels. De volgende hoofdstukken brengen ze in verband met de gegevens der ervaring.

De inhoud van het boek is te rijk, dan dat ik ook maar een eenigszins volledige bespreking van de behandelde onderwerpen zou kunnen geven. Ik zal volstaan met een kort overzicht. Het tweede hoofdstuk behandelt o.ä. de leer der kleinste deeltjes, atomen, wier bestaan logisch volgt uit de Aristotelische opvatting over den bouw der stof. De drie volgende hoofdstukken dragen achtereenvolgens de opschriften: Plaats en ruimte, Qualiteiten, Beweging en tijd. De opschriften dekken slechts zeer onvolledig den rijken inhoud. Deze hoofdstukken zijn vooral voor den natuurkundige interessant. Laat ik slechts enkele onderwerpen noemen, die er een uitgebreide behandeling in vinden: de aether van Lorentz, het traagheidsbeginsel, de ruimte, electromagnetische velden, zwaartekracht, gelijktijdigheid en relativiteitstheorie, etc. Verder wordt hier een principe besproken, dat bij het opstellen van natuurwetenschappelijke theorieën van het grootste belang is, nl. het principe der eliminatie van overbodige elementen eener theorie.

Voor scheikundigen is het zesde en laatste hoofdstuk wel het interessantste. Het behandelt de substantieele veranderingen. Na een uiteenzetting van de problemen, die zich hierbij voordoen, onderwerpt de schrijver de atoomtheorie aan een diepgaand onderzoek. Zij wordt er besproken als verklaring van de stoëchiometrische wetten en in verband met de kinetische molecuultheorie. Vervolgens komen aan de beurt de inwendige structuur der kristallen, de chemische en stereochemische structuurtheorie, de additieve en constitutieve eigenschappen, het behoud der atomeigenschappen in het molecuul en ten slotte de moderne theorie van het atoom. In dit hoofdstuk valt de beslissing tusschen het mechanisme en de leer van Aristoteles; zooals deze met behulp van de ervaring in de latere eeuwen nader werd uitgewerkt en gespecificeerd. In de vorige hoofdstukken was reeds gebleken, dat het mechanisme nergens de voorkeur verdient en meestal in gebréke blijft, maar hier leidt het tot duidelijke tegenspraak. De aandachtige lezer van het boek zal het met deze conclusie wel eens zijn. Het mechanisme wordt trouwens wel reeds algemeen door physici en chemici verworpen, waar het geldt de eigenschappen van atomen en moleculen te verklaren. Hier wordt een ander stelsel er voor in de plaats gegeven, een stelsel, dat de eeuwen getrotseerd heeft, maar dikwijls, vooral door beoefenaars van de natuurwetenschappen, werd miskend of als onvruchtbaar verworpen, ten onrechte echter, zooals den lezer van dit boek zal blijken.

We hebben hier een boek, eenig in zijn soort, dat zeker een ruime

belangstelling verdient in de kringen van natuur- en scheikundigen. Dat niemand, die een diepere verklaring van de natuurverschijnselen zoekt, zich late weerhouden van dit meesterwerk kennis te nemen. Als laatste aanbeveling kan dienen, dat het prettig te lezen is, ook voor filosofisch ongeschoolde lezers, terwijl de prijs voor niemand een bezwaar kan zijn.

Roermond.

P. H. van Laer.

Louis Locher—Ernst. *Geometrisieren im Bereiche wichtigster Kurvenformen*. Zürich-Leipzig, Orell—Füssli Verlag, 1939, 64 bladzijden, prijs Fr. 4,80.

Dit boekje behandelt op uiterst aanschouwelijke wijze de manier waarop verschillende kromme lijnen als banen van bewegende punten kunnen ontstaan. Wanneer ik het goed begrepen heb, is de bedoeling des schrijvers niet in de eerste plaats de lezers kennis te laten maken met de resultaten, maar vooral, hun bepaalde oefeningen in het denken te geven, in verband met de anthroposophische opvattingen. Van daar ook de lange citaten uit het werk van Rudolf Steiner.

Het komt mij voor, dat wie zich niet speciaal voor deze opvattingen interesseert, niet veel aan het boekje heeft.

J. H. S.

Dr. P. Molenbroek, *Leerboek der vlakke meetkunde*. Achtste druk. P. Noordhoff N.V. 1939, Groningen, Batavia. 637 blz.

De titel moest eigenlijk anders luiden: Wijdenes, Harlaar en Herreilers, Hand- en leerboek der vlakke meetkunde. Eerste Druk (als het gewoonte was, dat er bij te zetten). Want waarlijk, van een herdruk, zelfs van een verbeterden en aanzienlijk vermeerderden, heeft dit nieuwe boek niets; het bezit al de encyclopaedische waarde, waaraan men bij het woord handboek denkt, zonder dat daardoor de leerboek-qualiteiten, die er aan eigen zijn, ook maar eenigszins in het gedrang komen; en de verdienste, het te hebben samengesteld, komt geheel aan de drie wiskundigen toe, waarvan de namen nu juist niet op den omslag staan.

Het is inderdaad — het voorbericht zegt het met nadruk — de vrucht van hun innige samenwerking. Ingewijden weten, dat dit bedeutet: product van de vereeniging van mathematische begaafdheid, didactische ervaring, onvermoeid streven naar volledigheid en verzorgdheid en onuitputtelijke werkkraft.

Een imposant boek dus, dat het niveau van de studie der vlakke meetkunde in ons land ineens weer een heel eind omhoog brengt, een betrouwbare leidraad voor allen, die zich op de examens Wiskunde L.O. en K I voorbereiden, maar tevens een onmisbaar hulpmiddel voor studenten in wiskunde aan een universiteit en een sterke steun voor leeraren.

De inhoud van het werk kan kort aldus worden samengevat: in de hoofdstukken I—XVIII de traditioneele planimetrie, die haar bekroning vindt in de bepaling van lengte en oppervlakte van den cirkel;

daarna hoofdstukken over Harmonische ligging, Cirkelbundels en -netten, Inversie, Maxima en Minima; ten slotte een Aanhangsel, bevattende een strengen opbouw van de fundamenteele onderwerpen der planimetrie op grond van het axiomastelsel van Van der Waerden.

Dat de behandeling van de gewone vlakke meetkunde op een veel hooger peil zou staan dan in de meeste schoolboeken, was, gezien den lezerskring (het werk is voor volwassenen bestemd), te verwachten; ook wanneer het voorbericht er niet op attent maakte, zou reeds de oppervlakkige lezer het beseffen. Het getuigt echter van gevoel voor didactische realiteit bij de schrijvers, dat zij dit peilverschil toch ook weer niet te groot hebben gemaakt. Een waarlijk strenge behandeling zou vooral in de eerste hoofdstukken ongetwijfeld vele lezers, die, hoezeer dan ook volwassen, toch menigmaal op mathematisch gebied een on- of kwalijk beschreven blad zijn, slechts afschrikken. De schrijvers, hoewel zelf blijkbaar volkomen op de hoogte met de resultaten der moderne axiomatica, hebben daarom, met opmerkelijk gevoel voor het praktisch mogelijke, opzettelijk niet de volle maat der strengheid gegeven; zij konden dit zonder schade voor het wetenschappelijk gehalte van het boek doen, omdat in het Aanhangsel toch vele leemten van het begin worden aangevuld. Bovendien vonden zij gelegenheid te over om in zaken, die niet direct met de axiomatische fundeering samenhangen, die talrijke verbeteringen in de traditioneele behandelingswijze aan te brengen, die de aandachtige lezer welhaast op iedere bladzijde opmerkt en waarvan we hier, met het oog op de plaatsruimte, de opsomming dus wel achterwege moeten laten.

In de hoofdstukken, die op het 18e volgen, beseft men nog scherper dan voorheen, welk een aanzienlijke verbredening en verdieping van de studie der vlakke meetkunde dit boek teweeg zal brengen. Wat hier geboden wordt, gaat de grenzen van wat men vroeger lagere wiskunde placht te noemen, ver te buiten; wie deze stof beheerscht, behoeft zich door de eischen der examens Wiskunde L.O. en K I, wat de planimetrie betreft, niet meer te laten afschrikken; en de studie zal hem, naast examensucces, een mathematische ontwikkeling hebben geschonken, die waarlijk niet te versmaden is.

Men pleegt aankondigingen van nieuw verschenen boeken veelal te besluiten met een lijstje van op- en aanmerkingen. Ik zal ditmaal van deze methode afwijken: het zou eenvoudig van gemis aan gevoel voor proportie getuigen, om aan de bespreking van een zoo monumentaal werk een opsomming van bezwaren te verbinden tegen een woordkeus hier, een onvolledigheid ginds, een opvatting elders, om te klagen over enkele dingen, die ten onrechte weggelaten lijken en om wenschen te formuleeren over eventueele aanvullingen. Passender is het, te besluiten met een woord van hulde aan de schrijvers en met een gelukwensch aan de toekomstige gebruikers van dit ook uiterlijk uitmuntend verzorgde werk.

E. J. D.

HISTORISCHE STUDIËN XXI

DOOR

PROF. DR. HK. DE VRIES.

Motto: *Historia sapientia ipsa est.*

Over kettingbreuken, projectieve puntenreeksen en verrekijkers.

Inleiding.

Deze „Historische Studie” heeft opnieuw ten doel den jeugdigen lezer, zoo dit nog noodig mocht zijn, te genezen van den waan als zouden de Wiskunde, de theoretische Mechanica, de theoretische Physica, en de theoretische Astronomie, afzonderlijke Wetenschappen zijn, die in afzonderlijke laadjes bewaard moeten worden, een waan waaraan vooral zij ten prooi dreigen te vallen die niet in de gelegenheid zijn aan de Universiteit te studeeren, maar zich voorbereiden voor een middelbare akte; in het bijzonder voor dezen kan de volgende studie leerrijk zijn.

Niets is nl. schadelijker voor iemands wetenschappelijk inzicht dan dit catalogiseeren, en opbergen van zijn kennis in afzonderlijke vakjes, en onze groote voorgangers uit de 18e en 19e eeuw deden dit dan ook allerminst. Zij zagen al deze wetenschappen als één geheel, strekten hunne onderzoekingen uit over alle, bevruchtten de een door de ander, en ontwikkelden bijv. nieuwe wiskundige methoden, omdat zij die noodig hadden bij de Mechanica, de Physica of de Astronomie.

Daniël Bernoulli, de stadgenoot en persoonlijke vriend van Euler, met wien hij verscheidene jaren heeft doorgebracht in Petersburg, is zóó de grondlegger geworden der Hydrodynamica; Euler zelf heeft zich intensief bezig gehouden met theoretische Mechanica, vooral bij het beantwoorden van door de fransche Akademie gestelde prijsvragen, een ontzaglijken mechanisch-astronomischen arbeid verricht, in het bijzonder op het gebied van het zoogenaamde drie-lichamenvraagstuk, dus bijv. betreffende den

uiterst ingewikkelden loop van onze maan ten opzichte van de aarde en de zon, of van een van de manen van de andere planeten.

L a g r a n g e heeft zich eveneens met deze kwesties bezig gehouden, en is door zijne „Mécanique analytique” de grondlegger geworden van de theoretische Mechanica.

G a u s s was een even groot physicus, geodeet en astronoom als mathematicus, en L a p l a c e een even groot mathematicus als astronoom; M ö b i u s, de astronoom van professie, een groot mathematicus, en P o i n c a r é, de mathematicus en filosoof, weer een groot theoretisch astronoom. En al is het tegenwoordig zelfs voor het genie niet meer mogelijk al deze vakken in hun vollen omvang te beheerschen, ieder is, op zijn eigen bescheiden niveau, in staat zich te hoeden voor eenzijdigheid; zijn loon zal dan zijn nóg dieper bewondering, nóg grooter liefde voor onze scientia amabilis.

— (02—11). —

1. Laat in Fig. 1 l en l' twee rechten zijn en die elkaar in S snijden; wij beschouwen beide als dragers hunner punten, dus als puntenreeksen, en willen nu de reeks l uit een willekeurig centrum O in het vlak l' op l' projecteeren. Dan behoort bij ieder punt A

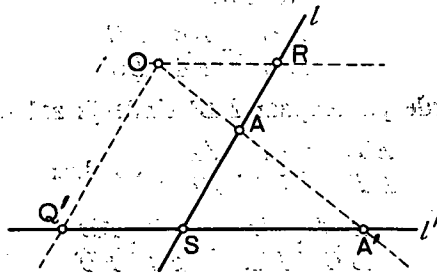


Fig. 1.

een projectie A' en omgekeerd. De projectie van R , het *verdwijnpunt*, ligt in het oneindige op l' en het origineel van Q' , het *vluchtpunt*, in het oneindig verre punt van l .

Uit de gelijkvormigheid der $\triangle\triangle OQ'A'$ en ARO volgt:

$$O'A' : RO = OQ' : AR, \text{ of:}$$

$$Q'A' \cdot RA = OQ' \cdot OR = \text{constant} = k^2,$$

want OQ' en OR zijn onafhankelijk van A en A' ; hierbij nemen wij

2. Wij gaan nu Fig. 1 afbreken, en de beide puntenreeksen op l en l' ergens anders neerleggen, voorloopig maar even op twee

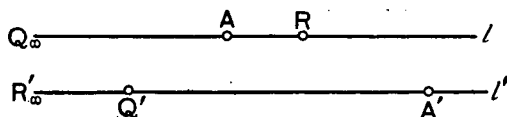


Fig. 2.

evenwijdige lijnen (Fig. 2), om daarna die beide te doen samenvallen. Dan ziet men aldaar dat dit samenvallen op 2 manieren kan

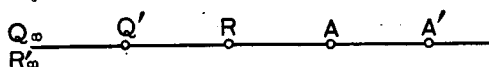


Fig. 3.

geschieden, nl. volgens Fig. 3, of volgens Fig. 4, en dat het onderscheid tusschen beide hierin ligt, dat in Fig. 4 de beide bewe-

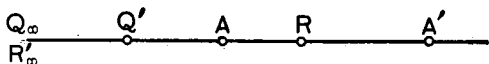


Fig. 4.

gingsrichtingen $Q_\infty RA$ en $Q'R_\infty A'$ dezelfde zijn, nl. beide naar links gaan, in Fig. 3 echter tegengesteld.

Bevonden zich de beide reeksen in Fig. 1 in *perspectivische ligging*, voor het perspectiefcentrum O , in de Figg. 2, 3 en 4, zijn zij *projectief*, en in de Figg. 3 en 4 in het bijzonder *collocaal*. En aangezien bij het verplaatsen de reeksen niet veranderen, zullen ook in de projectieve ligging de dubbelverhoudingen van twee corresponderende puntquadrupels dezelfde zijn.

Tusschen de beide Figg. 3 en 4 bestaat een principieel verschil. In Fig. 3, waar de bewegingsrichting tegengesteld is, hebben $O'A'$ en RA hetzelfde teeken, en is dus:

$$Q'A' \cdot RA = +k^2;$$

in Fig. 4 daarentegen is het juist andersom, en is dus:

$$Q'A' \cdot RA = -k^2.$$

Wordt dus in Fig. 3 $O'A'$ kleiner, en dus RA grooter, dan loopen A en A' naar elkaar toe; in Fig. 4 nu wordt, als $O'A'$ kleiner wordt, RA natuurlijk óók wel grooter, maar dit heeft ten gevolge dat de

punten achter elkaar aan loopen. Doorloopen dus in beide gevallen A en A' de reeksen (door het oneindige heen) volledig, dan zullen zij elkaar in Fig. 3 noodzakelijk ontmoeten, terwijl dit in Fig. 4 twijfelachtig is.

3. Over dat eventuele samenvallen van de punten A en A' kunnen wij enkele opmerkingen maken, die ons zoo straks in de Dioptrica, d.i. de Leer van den loop van het licht door lenzenstelsels, van nut zullen zijn.

Beschouwen wij maar weer eerst Fig. 3, waar A en A' tegengestelde bewegingsrichting hebben. Beweegt zich A naar rechts, dan gaat A' naar links, dus heeft er een ontmoeting plaats tusschen A en A' , d.w.z. rechts van R , of buiten het lijnstuk der *tegenpunten* Q' en R . Inderdaad, noemen wij de ontmoetingsplaats D , dan moet:

$$Q'D \cdot RD = +k^2$$

zijn, zoodat D niet tusschen Q' en R kan liggen. Na de ontmoeting ligt nu A' links van A ; maar als de beweging afgelopen is, beide punten door het oneindige heen de reeksen volledig doorloopen, en hunne oude plaatsen weer ingenomen hebben, dan moet A' weer rechts van A liggen; er moet dus nog een ontmoeting plaats hebben, en het punt C , waar dit geschiedt, ligt links van Q' . Immers, komt A , van rechts komende, in R aan, dan is A' rechts in het oneindige verdwenen, en komt van links terug; maar als A' dan in Q' aankomt, moet A links in het oneindige verdwenen zijn; de ontmoeting moet dus plaats hebben vóórdát A' in Q' aankomt, dus links van Q' .

De punten C en D heeten de *dubbelpunten*, of *dekpunten* der projectieve reeksen.

In Fig. 4 is alles natuurlijk juist omgekeerd, behalve dan dat het van de grootte van k afhangt of er ontmoeting plaats vindt. Beweegt zich A naar links, dan doet A' dit eveneens; maar als A' in Q' aankomt, moet A links in het oneindige aankomen; als er dus ontmoeting plaats vindt, dan moet dit geschieden vóórdát A' in Q' aankomt, dat is nu in dit geval rechts van Q' . En als er één ontmoeting plaats heeft, dan moet er, om dezelfde reden als boven een tweede plaats vinden, die dan eveneens tusschen Q' en R ligt.

4. Er bestaan eenvoudige constructies om de punten C en D , zoo zij er zijn, te vinden. Nemen wij eerst het geval van de reeksen met tegengestelde bewegingsrichting, dus het geval van Fig. 3. Zetten wij in Fig. 5 het stuk RA van Q' af in de richting van RA uit, zoodat $Q'A^* = RA$; dan heeft de raaklijn $Q'T$ aan den halven

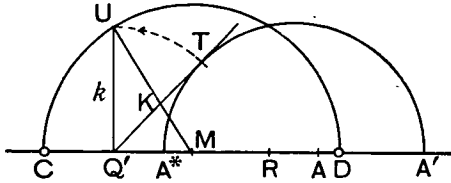


Fig. 5.

cirkel A^*A' blijkbaar de lengte k . Richt deze lijn in Q' vertikaal op ($Q'U = Q'T$), en cirkel MU (M is het midden van $Q'R$) naar weerskanten om; dan vindt men links en rechts de punten C en D . Immers:

$$Q'C \cdot Q'D = -k^2, \text{ dus:}$$

$$Q'C \cdot DQ' = +k^2,$$

maar DQ' is blijkbaar gelijk aan RC .

Men ziet dat deze constructie nooit kan falen; de dekpunten zijn dus altijd reëel en verschillend.

In het geval van Fig. 4, gelijkheid van bewegingsrichting, gaat het eenigszins anders (Fig. 6). Men zette weer RA van Q' uit naar

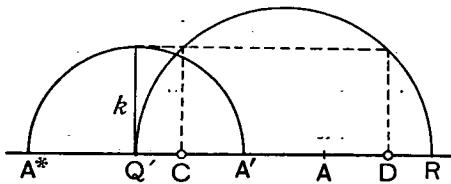


Fig. 6.

links ($Q'A^*$) af, en beschrijf een halven cirkel op A^*A' , dan is de loodlijn in Q' gelijk k . Nu beschrijf men een halven cirkel op $Q'R$, en brenge k horizontaal daarop over; dan zijn C en D blijkbaar de dubbelpunten.

Men ziet hier de mogelijkheid dat zij onbestaanbaar worden, maar óók dat zij samenvallen, nl. in het midden van $Q'R$, voor

ons een belangrijk geval met het oog op onze optische onderzoeken; k wordt dan $\frac{1}{2}Q'R$.

Nu kan men echter de laatste constructie vervangen door een andere, en krijgt dan een figuur, die vruchtbaarder is voor de theorie der collocale projectieve puntenreeksen dan figuur 6. Zij is gevonden door Möbius, in het jaar 1855, en wel, wat merkwaardig is, in het minst niet met het oog op projectieve punten-

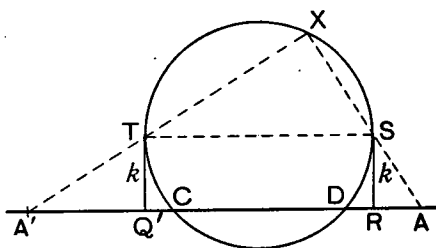


Fig. 7.

reeksen, maar met het oog op lenzenstelsels, wat echter, dank zij de onderzoeken van Möbius zelf, hetzelfde blijkt te zijn. Zij spreekt voor zich zelf; de cirkel op de middellijn $Q'R$ is opgehaald tot op de hoogte k .

De snijpunten van den cirkel met de lijn $Q'R$ zijn blijkbaar de punten C en D ; want $Q'C \cdot Q'D = k^2$, maar $Q'D = CR$, dus is $Q'C \cdot RC = -k^2$.

Maar meer nog. Verbindt men een willekeurig punt A' met T , snijdt den cirkel in X , en verbindt dit punt met S , dan is A het toegevoegde punt van A' . Want de beide $\triangle A'Q'T$ en SRA zijn gelijkvormig met den rechthoekigen $A'XA$, dus ook onderling gelijkvormig, en hieruit volgt onmiddellijk:

$$O'A' : k = k : AR.$$

Nòg meer. Men noeme in Fig. 8 het punt A' van Fig. 7 B . Immers, op de horizontale lijn liggen twee puntenreeksen op elkaar; men kan dus ieder punt naar believen tot de eene of tot de andere rekenen. Verbindt men nu B met S , en X met T , dan is B' het toegevoegde punt van B . Immers, de $\triangle B'Q'T$ en SRB zijn weer gelijkvormig, en dus staat:

$$Q'B' : k = k : BR.$$

Men kan trouwens met Fig. 5 iets dergelijks doen. De cirkel

het onderwerp terug gekomen, en heeft hij in de „Berichte der K. Sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften”, Bd. 7, p. 8—32, 1855, Ges. W. IV, p. 543—568, nogmaals een uitvoerige verhandeling gepubliceerd. Hier heeft hij zijn beschouwingen van vroeger ge-generaliseerd, door terug te gaan tot de brekingswet van Snellius zelve, en de dikte der lenzen niet meer te verwaarloozen, wat hij vroeger wél gedaan had, en hier heeft hij de ontdekking gedaan dat de reeks der lichtende punten op de as, en die van hunne beeldpunten, twee projectieve reeksen vormen met gelijkheid van bewegingsrichting, een ontdekking die hij in 1830 nog niet gedaan had.

Wij zullen, natuurlijk steunende op het werk door Möbius verricht, in de volgende §§ trachten een organisch geheel te verkrijgen.

6. Laat in Fig. 9 de verticale lijn door O het middenvlak voorstellen van een biconvexe lens, waarvan de dikte, vergeleken met de andere afmetingen die in de figuur voorkomen, zóó gering is dat zij verwaarloosd mag worden, en laat G een van de beide

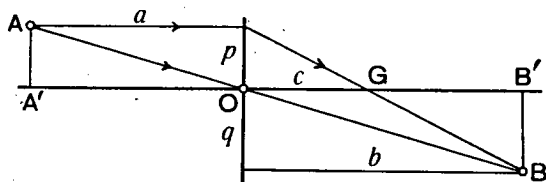


Fig. 9.

brandpunten zijn; de lichtstralen die, van links komende, invallen evenwijdig aan de horizontale as, en op geringen afstand van die as, convergeeren dan, na gebroken te zijn, naar G toe. Is dus A een voorwerp, en wenschen wij het beeld B te vinden, en onderstellen wij dat de afstand van A tot de as slechts gering is, dan trekken wij door A den lichtstraal evenwijdig aan de as, die gebroken wordt naar G toe, en den lichtstraal door het *optisch middelpunt* O van de lens, die ongehinderd doorgaat; het snijpunt is het beeld B .

Nu volgt uit twee paren gelijkvormige $\triangle\triangle$:

$$\begin{aligned} a : b &= p : q, \text{ en} \\ c : (b - c) &= p : q, \text{ dus} \\ ab - ac &= bc, \text{ of} \\ ab &= bc + ac. \end{aligned}$$

Deelen wij links en rechts door abc , dan vinden we:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \quad (2)$$

En aangezien in deze formule de afstand van A tot de as niet voorkomt, zal het beeld van het voorwerp AA' de lijn BB' zijn, omgekeerd en reëel.

Het kan echter ook anders. De lens kan concaaf zijn. Dan ligt het punt G links, en is *virtueel*, d.w.z. de lichtstralen die, van links komende, invallen evenwijdig aan de as (Fig. 10), gaan nu rechts verder in de richting van de pijl, en gedragen zich alsòf zij uit G

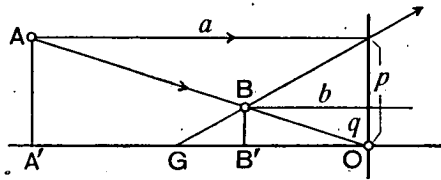


Fig. 10.

kwamen. Het beeld van A ligt dus nu in B , links van de lens, maar is *virtueel*, want de lichtstraal uit G is er niet in werkelijkheid; het beeld van AA' ligt dus nu in BB' , is rechtop staand, maar *virtueel*.

Uit dezelfde gelijkvormige driehoeken volgt nu:

$$a : b = p : q,$$

$$c : (c - b) = p : q, \text{ dus:}$$

$$ac - ab = bc, \text{ of:}$$

$$ab = ac - bc, \text{ of:}$$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}, \text{ of:}$$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}.$$

Dit is een andere formule dan (2), maar wij hebben nu ook nog niet op de teekens gelet. Brengen wij lijnstukken, die van links naar rechts gemeten worden, positief in rekening, van rechts naar links negatief, dan is in Fig. 9 de afstand a van A tot de lens positief, de afstand b van de lens naar B eveneens, en de brandpuntsafstand c van de lens tot G óók weer; maar dan zijn in Fig. 10

b en c negatief; beschouwen wij echter in de laatste formule b en c als negatief, dan neemt zij den vorm aan:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c},$$

waardoor zij identisch wordt met (2).

Zoo gaat het met al onze formules. Let men behoorlijk op de teekens, dan zijn zij algemeen geldig, en juist voor alle mogelijkheden.

7. Nemen wij nu een tweede lens er bij, met de eerste behoorlijk gecentreerd op dezelfde as, en beide convex. Licht nu links van de eerste lens en buiten den brandpuntsafstand, op de as een punt A' , dan heeft dit een reëel beeld B' rechts. Staat nu rechts van B' de tweede lens, dan werkt B' als voorwerp, want B' is immers inderdaad een lichtend punt; en als nu C' het beeld is van B' ten opzichte van de tweede lens alleen, dan is C' het beeld van A' ten opzichte van beide lenzen tegelijk.

Ook hier echter kunnen complicaties optreden, maar die zijn ook nu weer met behulp van virtueele beelden, en dus negatieve lijnsegmenten, gemakkelijk te ontwarren (Fig. 11). De lichtstralen

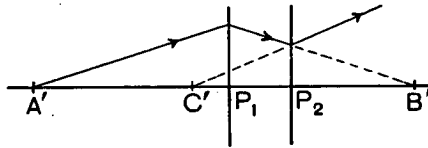


Fig. 11.

kunnen immers, vóórdat zij B' bereiken, de 2e lens ontmoeten; hoe gaan zij dan verder? Licht het beeld van B' ten opzichte van de 2e lens in C' , dan zouden lichtstralen, als zij inderdaad van B' uitgingen, in C' samen komen; nu doen zij dus juist het omgekeerde, d.w.z. zij gedragen zich alsòf zij uit C' kwamen. En als nu bijv. rechts van de tweede lens nog een derde staat, dan zal het virtuele punt C' misschien een reëel beeld D' veroorzaken, en dit is dan het beeld van A' ten opzichte van de drie lenzen tegelijk. En in de formules, die de figuur beheerschen, heeft men eenvoudig $B'C'$ als negatief in rekening te brengen.

8. Gaan wij nu over tot het algemeene geval (Fig. 12). $P_1, P_2, P_3, \dots P_n$ zijn de optische middelpunten van de lenzen,

en $A_1, A_2, \dots, A_n$ zijn de opvolgende beeldpunten, zoodat ten slotte A_n het beeld is van A . Wij stellen:

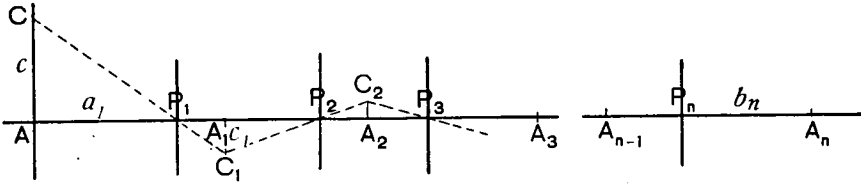


Fig. 12.

$$AP_1 = a_1, A_1P_2 = a_2, \dots, A_{n-1}P_n = a_n,$$

$$P_1A_1 = b_1, P_2A_2 = b_2, \dots, P_nA_n = b_n.$$

Nu hebben we nog de brandpuntsafstanden der verschillende lenzen noodig; de reciproke waarden van deze noemen we $g_1, g_2, \dots, g_n$; de afstanden der lenzen onderling echter noemen wij $h_1, h_2, \dots, h_{n-1}$. Formule 2 (§ 6, p. 52) geeft dan:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = g_1, \quad b_1 + a_2 = h_1,$$

$$\frac{1}{a_2} + \frac{1}{b_2} = g_2, \quad b_2 + a_3 = h_2,$$

$$\frac{1}{a_3} + \frac{1}{b_3} = g_3, \quad b_3 + a_4 = h_3,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n} = g_n, \quad b_{n-1} + a_n = h_{n-1}.$$

$$\frac{1}{b_1} = g_1 - \frac{1}{a_1}, \quad \text{dus: } b_1 = \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}};$$

$$b_2 = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{a_2}} = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - b_1}} = \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}}}}$$

$$b_3 = \frac{1}{g_3 - \frac{1}{a_3}} = \frac{1}{g_3 - \frac{1}{h_2 - b_2}} = \frac{1}{g_3 - \frac{1}{h_2 - \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}}}}}}$$

enz. Hier ziet men de kettingbreuken optreden. Schrijven wij, in een notatie die onmiddellijk duidelijk is:

$$b_1 = (g_1, a_1), \text{ dan is:}$$

$$b_2 = (g_2, h_1, g_1, a_1),$$

$$b_3 = (g_3, h_2, g_2, h_1, g_1, a_1), \text{ en dus ten slotte:}$$

$$b_n = (g_n, h_{n-1}, g_{n-1}, \dots, h_1, g_1, a_1).$$

In de uitdrukkingen rechts komen, behalve a_1 , de afstand van het voorwerp tot de eerste lens, slechts de afstanden van de lenzen onderling, en hunne brandpuntsafstanden, voor, dus louter constanten; kunnen wij dus b_n op ietwat beknoptere wijze in a_1 uitdrukken, dan zullen de coëfficiënten constanten zijn, slechts afhangelende van het lenzenstelsel; heeft men deze dus één keer berekend, dan kan men voor iederen afstand van het voorwerp tot de eerste lens den afstand van de laatste lens tot het beeld berekenen. Hoe dit kan geschieden, zullen we nu in de volgende § uiteenzetten.

9. Wij gaan grootheden beschouwen die in de Wiskunde zijn ingevoerd door Euler in zijn studie, getiteld: „Specimen algorithmi singularis”, dus: „Proeve eener eigenaardige rekenwijze” in „Nov. Comment. Petropol.’ Tom. IX, en die in nauw verband staan met de zoogenaamde „naderende breuken” der kettingbreuk (vgl. § 23, p. 82). Denken wij een willekeurige kettingbreuk:

$$(a, b, c, \dots, i, k),$$

dan is de eerste uitdrukking:

$$[a, b] = ab - 1, \text{ de tweede:}$$

$[a, b, c] = [a, b] c - a$, waarvoor we desnoods kunnen schrijven:

$[a, b, c] = [a, b] c - [a]$, als we onder $[a]$ eenvoudig het getal a verstaan; zoo kunnen wij voor $[a, b]$ zelfs schrijven $[a, b] = [a]b - []$, indien wij voor een hakenuitdrukking zonder inhoud maar de eenheid zetten. Verder definieerende stellen wij:

$$[a, b, c, d] = [a, b, c] d - [a, b],$$

$$[a, b, c, d, e] = [a, b, c, d] e - [a, b, c], \text{ enz.}$$

Deze uitdrukkingen hebben merkwaardige eigenschappen, die eenvoudiger zijn dan die der kettingbreuken, omdat deze laatste

quotienten zijn van twee van die „hakenuitdrukkingen“. De interessantste is zeker wel deze, dat men de getallen mag omkeeren, en dus:

$$[a, b, c, \dots i, k] = [k, i, \dots c, b, a],$$

terwijl verder:

$$[a, b, c, \dots i] \cdot [b, c, \dots i, k] =$$

$$[a, b, c, \dots i, k] \cdot [b, c, \dots i] = 1.$$

Natuurlijk eischen deze eigenschappen bewijzen met volledige inductie, waarom Euler zelf zich niet zoozeer bekommerd heeft, en die wij, om begrijpelijke redenen, hier achterwege laten; de eenvoudigste gevallen zijn echter onmiddellijk te controleren. Wij willen liever het volgende interessante bijzondere geval mededeelen. Men vindt gemakkelijk:

$$[2] = 2, [2, 2] = 2 \cdot 2 - 1 = 3, [2, 2, 2] = [2, 2] \cdot 2 - [2] = 3 \cdot 2 - 2 = 4, [2, 2, 2, \dots 2] = m,$$

indien het aantal tweeën $m - 1$ bedraagt.

Nu overtuigt men zich door de eenvoudigste gevallen gemakkelijk dat de kettingbreuk:

$$(a, b, c, \dots i, k) = \frac{[b, c, \dots i, k]}{[a, b, c, \dots i, k]},$$

dus is de kettingbreuk met m tweeën:

$$(2, 2, \dots 2) = \frac{m}{m+1}, \text{ en dus:}$$

$$(2, 2, 2, \dots \text{in } \text{inf.}) = 1,$$

en wel wordt de eenheid benaderd van den kleinen kant.

Nu zal echter ieder, die zich wel eens met de theorie der kettingbreuken heeft bezig gehouden, de uitdrukking ontmoet hebben:

$$(1; 2, 2, 2, \dots \text{in } \text{inf.}) = \sqrt{2},$$

maar deze uitdrukking stelt de kettingbreuk voor:

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \text{enz.}}}}}$$

terwijl onze kettingbreuk luidt:

$$\frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \text{enz.}}}}}$$

met louter minteekens, wat natuurlijk heel iets anders is:

10. Keeren wij nu terug tot ons lenzenstelsel (§ 8, p. 54).

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{g_1 - \frac{1}{a_1}} = \frac{a_1}{g_1 a_1 - 1} = \frac{[a_1]}{[g_1, a_1]}; \\ b_2 &= \frac{1}{g_2 - \frac{1}{h_1 - \frac{a_1}{[g_1, a_1]}}} = \frac{1}{g_2 - \frac{[g_1, a_1]}{[g_1, a_1] h_1 - a_1}} = \frac{1}{g_2 - \frac{[g_1, a_1]}{[a_1, g_1, h_1]}} = \\ &= \frac{[a_1, g_1, h_1]}{[a_1, g_1, h_1] g_2 - [g_1, a_1]} = \frac{[a_1, g_1, h_1]}{[a_1, g_1, h_1, g_2]} = \frac{[h_1, g_1, a_1]}{[g_2, h_1, g_1, a_1]}. \end{aligned}$$

Zoo wordt ten slotte:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{[h_{n-1}, g_{n-1}, h_{n-2}, g_{n-2}, \dots, h_1, g_1, a_1]}{[g_n, h_{n-1}, g_{n-1}, \dots, h_1, g_1, a_1]} = \\ &= \frac{[h_{n-1}, \dots, h_1, g_1] a_1 - [h_{n-1}, \dots, h_1]}{[g_n, h_{n-1}, \dots, h_1, g_1] a_1 - [g_n, \dots, h_1]} = \\ &= \frac{[g_1, h_1, \dots, g_{n-1}, h_{n-1}] a_1 - [h_1, \dots, h_{n-1}]}{[g_1, h_1, \dots, h_{n-1}, g_n] a_1 - [h_1, \dots, g_n]}. \end{aligned}$$

Nu volgen wij het voorbeeld van L a g r a n g e, en stellen:

$$\begin{aligned} [g_1, h_1, \dots, h_{i-1}] &= H_i, \quad - [h_1, g_2, h_2, \dots, h_{i-1}] = L_i, \\ [g_1, h_1, \dots, g_{i-1}] &= M_i, \quad - [h_1, g_2, \dots, g_{i-1}] = N_i; \end{aligned}$$

dan wordt:

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}} \quad \dots \quad (3)$$

Men ziet dat b_n uit a_1 wordt afgeleid door een gebroken lineaire substitutie, wier coëfficiënten slechts afhangen van het lenzenstelsel, en dus constant zijn. Maakt men de breuken weg, dan ontstaat een vergelijking van den vorm:

$$\alpha a_1 b_n + \beta a_1 + \gamma b_n + \delta = 0,$$

een zoogenaamde bilineaire vergelijking tusschen a_1 en b_n , en dit

bewijst dat de reeks der voorwerpen $A, \dots$, en die der beeldpunten $A_n, \dots$ (Fig. 12) twee projectieve puntenreeksen vormen; wij komen hierop terug (§ 22, p. 78).

11. Laat zich vertikaal boven het punt A (Fig. 12) een punt C bevinden, op een afstand $AC = c$ van A , dan ligt het beeld van C in C_1 , dat van C_1 in C_2 , enz. Nu staat, de teekens in aanmerking nemende: $AC : A_1C_1 = AP_1 : A_1P_1 =$

$AP_1 : -P_1A_1$, dus:

$$c : c_1 = a_1 : -b_1,$$

$$c_1 : c_2 = a_2 : -b_2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots, \text{ dus:}$$

$$c : c_n = (-1)^n \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{b_n}$$

Nu is echter volgens § 10, p. 58:

$$b_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}, \text{ en:}$$

$$a_{i+1} = h_i - b_i = \frac{(h_i M_{i+1} - H_i) a_1 + h_i N_{i+1} - L_i}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}} = \frac{H_{i+1} a_1 + L_{i+1}}{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}},$$

nl. volgens de definitie der hakenuitdrukkingen in § 9, p. 56 *).

Dus is ook:

$$a_i = \frac{H_i a_1 + L_i}{M_i a_1 + N_i}, \text{ en derhalve:}$$

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{M_{i+1} a_1 + N_{i+1}}{M_i a_1 + N_i}, \text{ waaruit volgt:}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{b_n} &= \frac{M_2 a_1 + N_2}{M_1 a_1 + N_1} \cdot \frac{M_3 a_1 + N_3}{M_2 a_1 + N_2} \cdot \dots \cdot \frac{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}}{M_n a_1 + N_n} = \\ &= \frac{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}}{M_1 a_1 + N_1}. \end{aligned}$$

Nu is:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{M_2 a_1 + N_2}{M_1 a_1 + N_1}, \text{ maar anderzijds } = g_1 a_1 - 1 \text{ (§ 10, p. 58),}$$

dus moet $M_2 = g_1$, $N_2 = -1$, $M_1 = 0$, $N_1 = 1$ zijn.

$$*) \quad H_{i+1} = [g_1, h_1, \dots, g_i, h_i] = [g_1, h_1, \dots, g_i] h_i - [g_1, h_1, \dots, h_{i-1}] =$$

$$= M_{i+1} \cdot h_i - H_i.$$

$$L_{i+1} = -[h_1, g_2, h_2, \dots, h_i] = -[h_1, g_2, h_2, \dots, g_i] h_i + [h_1, \dots, h_{i-1}] =$$

$$= N_{i+1} \cdot h_i - L_i.$$

Inderdaad is (§ 10, p. 58) $M_2 = g_1$, maar de 3 andere groot-heden zijn door hunne hakenuitdrukkingen niet gedefinieerd; want M_1 zou moeten beginnen met g_0 , die er niet is, en N_2 met g_1 , ter-wijl het symbool g_2 eischt. Om de formule door te laten gaan, moet men dus deze 3 grootheden de waarden geven, die wij hier aan-gegeven hebben; dan echter vindt men:

$$c_n = (-1)^n \frac{c}{M_{n+1}a_1 + N_{n+1}},$$

en wanneer dus, zooals in Fig. 12, alle grootheden a_i en b_i posi-tief zijn, dan is het beeld c_n rechtopstaand of omgekeerd, al naar-mate het aantal lenzen even of oneven is.

12. Denken wij weer eens (Fig. 13) één biconvexe lens, met haar beide brandpunten F en G ; het licht komt van links. Stralen,

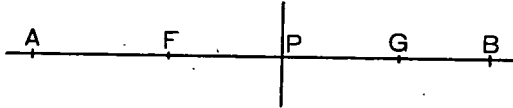


Fig. 13.

die invallen evenwijdig aan de as, worden dan gebroken naar G toe, maar als een voorwerp, van links komende, nadert tot F , dan moet het beeld B rechts in het oneindige verdwijnen; het beeld B van een voorwerp, links van F gelegen, ligt dus rechts van G .

Laat nu weer $AP = a$, $PB = b$, en ditmaal $FP = PG = f$ zijn, dan is volgens formule (2), § 6, p. 52:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \text{ of:}$$

$$(a + b)f = ab, \text{ of:}$$

$$(a - f)(b - f) = f^2.$$

$a - f = AF$, $b - f = GB$, dus:

$$AF \cdot GB = f^2 \quad (4).$$

Stellen wij $AF = \alpha$, $GB = \beta$, dan is.

$$\alpha\beta = f^2 \quad (4*).$$

$$\text{en } \frac{a}{b} = \frac{\alpha + f}{\beta + f} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha\beta}}{\beta + \sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\beta}, \text{ dus:}$$

$$a : b = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = \alpha : f = f : \beta. \quad (5)$$

of: $AP : PB = \sqrt{AF} : \sqrt{GB} = AF : FP = PG : GB.$

Schrijven wij in plaats van F eens R , in plaats van G Q' en in plaats van B A' , dan wordt (4):

$$AR \cdot Q'A' = f^2, \text{ of:}$$

$$RA \cdot Q'A' = -f^2, \text{ en deze vergelijking}$$

wordt identisch met de grondformule voor projectieve puntenreeksen met gelijkheid van bewegingsrichting uit § 2, voor $k = f$. *De reeks der voorwerpen, A, . . . , en die der beelden, B, . . . vormen dus twee zoodanige reeksen, en de brandpunten F en G zijn de beide tegenspnten (vgl. § 10, p. 58).*

Wij worden dus teruggevoerd tot de constructie in Fig. 7, § 4, p. 49, maar er is een bijzonderheid op te merken, nl. dat $k = f =$ den halven afstand der brandpunten of tegenspnten is, en dus de cirkel de as aanraakt in het midden tusschen F en G , d.i. in het optisch middelpunt P van de lens. Dit is dus het eenige punt waar voorwerp en beeld samenvallen, wat physisch duidelijk is.

13. Nu komt het hoofdresultaat, waartoe zijn studiën Möbius geleid hebben: *het komt hierop neer dat een geheel lenzenstelsel zich net eender gedraagt als één enkele lens.* Ook nu zijn er twee brandpunten F en G , en is er een afstand f ; alleen is deze nu niet meer de helft van den afstand der beide brandpunten.

Wij gaan terug tot Fig. 12, § 8, p. 54, en stellen:

$$a_1 = p + \alpha, \quad b_n = q + \beta,$$

waar α en β afhangen van de plaatsen van voorwerp en beeld en dus veranderlijk, p en q echter uitsluitend van het lenzenstelsel, en dus constant zijn.

Nu nemen wij onze bilineaire betrekking (3), § 10, p. 58:

$$M_{n+1}a_1b_n - H_na_1 + N_{n+1}b_n = L_n,$$

en substitueeren hierin voor a_1 en b_n $p + \alpha$ en $q + \beta$. Dit geeft:

$$\begin{aligned} M_{n+1}\alpha\beta + (M_{n+1}q - H_n)\alpha + (M_{n+1}p + N_{n+1})\beta = \\ = L_n - M_{n+1}pq + H_np - N_{n+1}q. \end{aligned}$$

Stelt men nu:

$$M_{n+1}q - H_n = 0 \text{ en } M_{n+1}p + N_{n+1} = 0,$$

dan wordt: $M_{n+1}\alpha\beta = L_n + H_n p$, en dus, na eliminatie van p :

$$\begin{aligned} M_{n+1}^2\alpha\beta &= L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1} = \\ &= (\S 10, p. 58): - [h_1, g_2, h_2, \dots, h_{n-1}] \cdot [g_1, h_1, \dots, h_{n-1}, g_n] \\ &\quad + [g_1, h_1, \dots, h_{n-1}] \cdot [h_1, g_2, \dots, g_n], \end{aligned}$$

maar dit is $= +1$ volgens § 9, p. 56, en dus:

$$\alpha\beta = f^2, \text{ indien } \frac{1}{M_{n+1}} = f.$$

Bepaalt men dus op de as een punt F zóódanig, dat (Fig. 12) $FP_1 = p$, een punt G zóódanig dat $P_n G = q$, en verder het lijnstuk f , dan kan men met behulp van Fig. 7 bij ieder voorwerp A het beeld A_n onmiddellijk vinden.

Wat de afmetingen van voorwerp en beeld aangaat, vonden wij in § 11, p. 59:

$$(-1)^n c : c_n = M_{n+1}a_1 + N_{n+1} = M_{n+1}(\alpha + p) + N_{n+1};$$

maar $M_{n+1} p + N_{n+1} = 0$, dus:

$$(-1)^n c : c_n = M_{n+1}\alpha : 1 = 1 = \alpha : f = \beta = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta},$$

volgens (5), § 12, p. 60, dus:

$$(-1)^n c : c_n = \sqrt{AF} : \sqrt{GA_n}$$

Kiest men het punt A zóódanig dat $AF = \alpha = f$ wordt, dan wordt ook $GA_n = f$, en dus volgens de laatste formule c_n even groot als c ; deze punten zijn door Gauss in zijne „Dioptrische Untersuchungen” van 1841 „Hauptpunkte” genoemd.

Wat is, bij een lenzenstelsel in den trant van Fig. 12, p. 60, de gunstigste plaats voor het oog? Deze vraag is gemakkelijk te beantwoorden. Onder alle stralen, die van C uitgaan, is er één, die door het optisch middelpunt P_1 van de eerste lens gaat, en de praktijk is nu deze dat lichtstralen, die van C uitgaan, en zich slechts weinig van dien „hoofdstraal” verwijderen, samen komen in C_1 . Maar zij gaan natuurlijk verder, en de hoofdstraal in het bijzonder ontmoet nu de tweede lens, d.w.z.: het punt C moet slechts zóó weinig ver van de as liggen, dat dit inderdaad geschiedt, en dat die straal, verder gaande, ook alle andere lenzen ontmoet, waaruit men de conclusie kan trekken, dat slechts de omgeving van de as in het beeld tot haar recht komt. De hoofdstralen, uitgaande van alle punten van het voorwerp AC , komen

nu samen in het beeld Q_1 , dat ten slotte door de laatste lens van P_1 ontworpen wordt, en het is duidelijk dat dit punt de gunstigste plaats is voor het oog; want hier vangt het oog de hoofdstralen op van alle punten van AC , en ziet dus het voorwerp overal even duidelijk. Dichter bij of verder af ontvangt het oog niet meer alle hoofdstralen; en vervaagt dus de omgeving van C , of verdwijnt.

Zijn F en G de brandpunten van het geheele lenzenstelsel, dan zal in den regel F links van de eerste, G rechts van de laatste lens liggen, en aangezien:

$$P_1F \cdot GQ_1 = f^2,$$

en P_1F negatief is, is ook GQ_1 negatief, zoodat Q_1 links van G ligt; het kan dus zelfs links van P_n liggen, zoodat het onmogelijk is het oog daar te plaatsen; voor practisch gebruik is dus een dergelijk samenstel niet aan te bevelen.

14. Onder een verrekijker verstaat M ö b i u s een stel lenzen zóódanig dat lichtstralen die, van links komende, evenwijdig aan de as invallen, rechts de laatste lens evenwijdig aan de as verlaten. De toestand is nl. als volgt. Richten wij het bloote oog, laat ons zeggen op een ringgebergte van de maan, dan zijn practisch de stralen, die daarvan afkomstig zijn, evenwijdig; deze stralen brengen, na in het oog gebroken te zijn, een prikkeling voort in de staafjes en kegeltjes van het netvlies, en dan geschiedt het onverklaarde wonder van het zien, d.w.z. van het ons bewust worden dat zich daar, op een afstand van 60 aardstralen van ons verwijderd, een gebergte bevindt! Waartoe nu een verrekijker? Om de stralen evenwijdig te houden, maar het voorwerp veel dichter bij te halen, en matig vergroot, en dus duidelijker, te zien. Wat wij daarbij onder vergrooting hebben te verstaan, zullen we onderzoeken.

Wij eischen dus dat het licht, dat links evenwijdig aan de as invalt, rechts evenwijdig uittreedt; dit heeft voor het lenzenstelsel allerlei belangrijke gevolgen. Het linksche brandpunt F nl., welks beeld rechts in het oneindige ligt, moet nu zelf links in het oneindige liggen, en het beeld G van het oneindig verre punt links moet het oneindig verre punt rechts zijn. De beide brandpunten moeten dus in het oneindige liggen, en hieruit volgt dat ook de groot-

heid f oneindig groot is; immers voor twee als voorwerp en beeld aan elkaar toegevoegde punten A en B van de as moet:

$$AF \cdot GB = f^2$$

zijn, maar links zijn nu beide factoren oneindig groot.

Indien van twee projectieve reeksen de beide oneindig verre punten aan elkaar zijn toegevoegd, dan zijn de reeksen gelijkvormig, zoodat tusschen twee toegevoegde lijnstukken AA' en BB' van de as een constante verhouding bestaat. Dit volgt inderdaad onmiddellijk uit onze formules. Tusschen a_1 , den afstand van het voorwerp tot de eerste lens, en b_n , den afstand van het beeld tot de laatste, bestaat de betrekking (§ 10, p. 58):

$$b_n = \frac{H_n a_1 + L_n}{M_{n+1} a_1 + N_{n+1}};$$

nu moet voor $a_1 = \infty$ ook $b_n = \infty$ worden, dus moet:

$$M_{n+1} = 0$$

zijn: $M_{n+1} = 0$ is dus het criterium voor een verrekijker.

Ook vonden we in § 13, p. 61:

$$f = \frac{1}{M_{n+1}};$$

wordt dus $M_{n+1} = 0$, dan wordt $f = \infty$.

Wij hebben dus nu:

$$N_{n+1} b_n = H_n a_1 + L_n,$$

d.w.z. de betrekking tusschen a_1 en b_n is niet meer bilineair, maar lineair, en dit is een bewijs, dat de projectiviteit overgaat in affiniteit, wat bij puntenreeksen zeggen wil dat zij gelijkvormig worden. Inderdaad is:

$$N_{n+1} \cdot P_n B = H_n \cdot AP_1 + L_n,$$

$$N_{n+1} \cdot P_n B' = H_n \cdot A' P_1 + L_n,$$

dus afgetrokken:

$$N_{n+1} \cdot BB' = H_n \cdot AA', \text{ of:}$$

$$AA' : BB' = -N_{n+1} : H_n = \text{constant.}$$

Maar nu is volgens § 13, p. 61:

$$L_n M_{n+1} - H_n N_{n+1} = 1,$$

dus voor den verrekijker: $-H_n N_{n+1} = 1$, dus:

$$AA' : BB' = N_{n+1}^2 : 1 = 1 : H_n^2.$$

P. WIJDENES

Meetkundige Vraagstukken

met de bewijzen van de stellingen en een aantal uitgewerkte voorbeelden voor het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs.

deel I — 100 bladzijden, met 141 figuren — gecartonneerd met gradenboog en twee driehoeken f 1.40

Volledige behandeling van 20 vraagstukken, 4 werkstukken en 3 meetkundige plaatsen.

Inhoud: Inleiding. — Hoeken. — Evenwijdige lijnen. — Driehoeken. — Congruentie van driehoeken. — Werkstukken. — Vierhoeken. — Veelhoeken. — De cirkel. — Meetkundige plaatsen.

deel II — 166 bladzijden, met 194 figuren — gecartonneerd . . f 2.40

Volledige behandeling van 26 vraagstukken, 11 werkstukken en 8 meetkundige plaatsen.

Inhoud: Oppervlakte. — Verhouding en evenredigheid van lijnstukken. — Vermenigvuldiging en gelijkvormigheid. — De rechthoekige driehoek. — De schreefhoekige driehoek. — Meten van hoeken door cirkelbogen. — Lijnstukken in een cirkel. — Regelmatige veelhoeken. — De cirkel. — Examenopgaven. —

In de bespreking van dr Dijksterhuis treffen we aan: Het denkbeeld der methode is, dunkt mij in 't kort samen te vatten: handhaving van het beginsel der Euclidische meetkunde; opruiming van veel, wat daarin geen ander recht van bestaan heeft dan een soms zeer toevallige traditie; invoering van tal van verbeteringen in de methodiek, die de moderne belangstelling in elementair wiskunde-onderwijs als wenselijk heeft doen zien en bovenal: sterke verhoging van de zelfwerkzaamheid der leerlingen. — Vraagstukken, niet als aanvulling der theorie, maar als middel, die theorie als het ware zelfstandig voort te brengen; blijkbaar is het juist de bedoeling, dat ze een leerboek overbodig maken.

Meetkunde van de Ruimte

een leerboek voor Stereometrie en Beschrijvende Meetkunde voor het middelbaar onderwijs

door Dr. H. J. E. BETH, Directeur van de R.H.B.S. te Amersfoort.

Prijs van het complete boek, groot 184 pag.'s met 189 fig. geb. f 2.90

Het enige schoolboek, waarin de stereometrie en de beschrijvende meetkunde tot één geheel zijn verwerkt.

P. NOORDHOFF N.V. TE GRONINGEN EN BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

SCHOOL- EN STUDIEBOEKEN VOOR DE ALGEBRA



Bij al deze boeken bestaan er antwoorden en uitwerkingen.

v. Zanten—Wijdenes, Leerboek der algebra voor ambachtslieden, 8e druk	f	0.60
Wijdenes, Algebra voor het Nijverheidsonderwijs, 3e druk	-	1.—
Wisselink—Wijdenes, Kern der Algebra, 10e druk	-	0.75
„ „ Vraagstukken Algebra I, 24e druk	-	0.75
„ „ Vraagstukken Algebra II, 15e druk	-	0.75
„ „ Vraagstukken Algebra III, 10e druk	-	0.75
Wijdenes, Algebra voor M.U.L.O. I, 30e druk	geb.	1.40
„ Algebra voor M.U.L.O. IIa, 11e druk	„	1.50
„ Verkorte uitgave van IIa, 11e druk	-	1.—
„ Algebra voor M.U.L.O. IIb, 12e druk	„	2.25
Wijdenes, Klein leerboek der Algebra I, 2e druk f 1.60, II, 2e dr.	-	1.50
Wijdenes, Algebra voor M.H.S. I, 7e druk	-	1.50
„ Algebra voor M.H.S. II, 5e druk	-	1.75
Wijdenes en Van de Vliet, Algebra voor H.B.S. A, 3e druk	-	2.—
Wijdenes, Algebra voor examens in Handelsrekenen	-	2.75
Wijdenes, Beknopte Algebra I, 7e druk	gec.	1.70
„ Beknopte Algebra II, 6e druk	„	1.70
Wijdenes en De Lange, Leerboek der Algebra I, 10e druk gec.	-	1.90
„ „ „ „ Leerboek der Algebra II, 8e druk „	-	1.90
„ „ „ „ Leerboek der Algebra III, 6e druk „	-	1.90
Wijdenes, Algebraische Vraagstukken I, 8e druk f 2.—, geb.	-	2.25
„ Algebraische Vraagstukken II, 8e druk - 1.60, „	-	1.85
„ Algebraische Vraagstukken III, 8e druk - 1.50, „	-	1.75
met hoofdpunten van de theorie; voor de grafieken gebruikte men het Grafiekenschrift		
Wijdenes en Beth, Nieuwe School-algebra I, 10e druk	geb.	2.25
„ „ „ Nieuwe School-algebra II, 9e druk	„	2.25
„ „ „ Nieuwe School-algebra III, 6e druk	„	2.25
„ „ „ Nieuwe School-algebra IIIa	-	1.—
„ „ „ Nieuwe School-algebra IV (Diff. en int. rek.)	-	2.25
„ „ „ Nieuwe School-algebra IVβ	-	0.80
Wijdenes, Grafiekenschrift 8e druk	„	0.50
Wijdenes, Lagere Algebra I, 3e druk	geb.	5.50
„ Lagere Algebra II, 3e druk	„	8.50
Wijdenes, Middel-Algebra, 2e druk	geb.	12.50
Wijdenes, Vraagst. Hogere Algebra en Rekenk., 2e druk	„	4.—
Wijdenes, Uitgewerkte mondel. ex. Hogere Algebra, 2e dr. „	-	6.—
Prof. Dr. F. Schuh, Beknopte Hogere Algebra	geb.	15.—
„ „ „ „ Lessen over Hogere Algebra I, 2e dr. „	-	13.75
„ „ „ „ Lessen over Hogere Algebra II	-	11.50
„ „ „ „ Lessen over Hogere Algebra III	-	19.—
Deze drie delen te zamen genomen	„	40.—

Uitgaven van P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA
Ook verkrijgbaar door de boekhandel.