

# EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-  
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN  
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH  
AMERSFOORT

Dr. G. C. GERRITS  
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,  
LEIDEN

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS  
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER  
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN  
BATAVIA

Dr. P. DE VAERE  
BRUSSEL

15e JAARGANG 1939, Nr. 6.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

⚡ Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het ⚡  
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken  
verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel  
druks. Prijs per jaargang f 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw  
Tijdschrift (f 6.—) zijn ingetekend, betalen f 5.—, voor idem  
op „Christiaan Huygens” (f 10.—) f 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-  
Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 23341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25  
afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan  
P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

## I N H O U D.

|                                                                                     | Bis. |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes . . . . .                                        | 237  |
| G. R. VELDKAMP, Het werkstuk van Castillon . . . . .                                | 270  |
| Dr. U. H. VAN WIJK, De meerkundige vakteal . . . . .                                | 297  |
| Dr. O. BOTTEMA, De gebroken functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ . . . | 301  |

LOSSE BANDEN voor den afgelopen jaargang  
verkrijgbaar bij den Uitgever P. NOORDHOFF  
te GRONINGEN à f 1.25.

**BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.**

1½ cts.  
postzegel

**N.V. Erven P. NOORDHOFF'S**

**Uitgeverszaak.**

**Postbus 39.**

Giro Ned. Bk. No. 1858

Post Giro No. 6593

**GRONINGEN.**

Ondergetekende, abonné op { Nieuw Archief voor Wiskunde  
„Christiaan Huygens”  
„N. T. voor Wiskunde”  
„Euclides”

verzoekt toezending van 1 exemplaar:

**DR P. MOLENBROEK, Leerboek der Vlakke Meetkunde**

geb. à f 10.— (gewone prijs is f 11.50)

**DR DIJKSTERHUIS, Vreemde woorden in de Wiskunde**

ing. à f 1.60, geb. à f 2.10 (gewone prijs is f 1.90, geb. f 2.40)

**DR GERRETSEN, Topologische behandeling van de Meetkunde van het aantal**

ing. à f 4.—, geb. à f 5.— (gewone prijs is f 4.90, geb. f 5.90)

**DR HLAVATY, Differentialgeometrie**

ing. à f 12.50, geb. à f 14.— (gewone prijs is f 14.—, geb. f 15.50)

**DR RUTGERS, Fysische Scheikunde**

ing. à f 11.25, geb. à f 12.25 (gewone prijs is f 12.50, geb. f 13.50)

door bemiddeling van de boekhandel

direct per post,

---

Naam:

Woonplaats:

---

Iedere abonné heeft slechts recht op 1 ex. en mits besteld vóór 1 Dec. 1939; voor Indië vóór 1 Febr. 1940. A.u.b. door te halen wat *niet* wordt verlangd.

grootheid, die  $(A\Delta, AZ)$  overtreft. Is nu  $AZ > \Pi$ , dan is dus te maken

$$(PE, P\Delta) < (A\Delta, \Pi)$$

wat in strijd is met

$$(PE, P\Delta) > (PX, \text{bg } P\Delta) = (A\Delta, \Pi).$$

Het is nu ook dadelijk duidelijk, waarom het tweede deel van het bewijs niet geheel analoog aan het eerste, dus met toepassing van III; 9, 2 in plaats van III; 9, 3, kan worden gegeven. Ligt nl. (fig. 108)  $E$  tusschen  $\Delta$  en  $N$ , dan is  $PE < PX$  en, daar ook  $P\Delta < \text{bg } P\Delta$ , weet men niet, of  $(PE, P\Delta)$  grooter of kleiner is dan  $(PX, \text{bg } P\Delta)$ .

Archimedes beroept zich nu dus op III; 9, 4. Volgens deze stelling nadert  $(PE, \Delta\Sigma)$  van den kleinen kant tot  $(A\Delta, AZ)$  en kan dus grooter worden gemaakt dan iedere grootheid, die kleiner is dan  $(A\Delta, AZ)$ . Is nu  $AZ < \Pi$ , dan is dus te maken

$$(PE, \Delta\Sigma) > (A\Delta, \Pi)$$

wat in strijd is met

$$(PE, \Delta\Sigma) < (XP, \text{bg } \Delta P) = (A\Delta, \Pi).$$

De geheele redeneering blijkt dus in zeer nauw verband te staan met de in de differentiaalmeetkunde gevolgde. Is de vergelijking van de kromme

$$\varrho = \lambda\varphi$$

en  $\angle A\Delta N = \Theta$ , dan is

$$\text{tg } \Theta = \lim_{X \rightarrow \Delta} \frac{P\Delta}{XP} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\varrho\Delta\varphi}{\Delta\varrho} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\varrho\Delta\varphi}{\lambda\Delta\varphi} = \frac{\varrho}{\lambda} = \varphi$$

wat dus aequivalent is met het resultaat eener differentiatie.

Uit de bewezen eigenschap volgt voor ons onmiddellijk de bekende eigenschap van de Archimedische spiraal, dat de polaire subnormaal constant is, nl.  $\varrho \cot \Theta = \frac{\varrho}{\varphi} = \lambda$ .

Archimedes vermeldt deze stelling niet. Om haar te bewijzen, zou hij twee punten  $\Delta$  en  $\Delta_1$  hebben moeten beschouwen en de cirkelbogen  $\Delta K$  en  $\Delta_1 K_1$  met centrum  $A$  hebben moeten beschrijven. Snijden nu de normalen van  $\Delta$  en  $\Delta_1$  de verlengden van  $ZA$

en  $Z_1A_1$  opv. in  $B$  en  $B_1$  dan is in verband met de bewezen stelling

$$(AB, A\Delta) = (A\Delta, \text{bg } \Delta K) \quad . . . . (1)$$

$$(AB_1, A\Delta_1) = (A\Delta_1, \text{bg } \Delta_1 K_1) \quad . . . . (2)$$

en wanneer  $A\Delta_1$  den cirkel  $\Delta K$  in  $H$  ontmoet (spiraalsymptoom):

$$(A\Delta, A\Delta_1) = (\text{bg } \Delta K, \text{bg } HK).$$

Uit (1) volgt in verband hiermee

$$(AB, A\Delta) = (A\Delta_1, \text{bg } HK)$$

terwijl ook

$$(A\Delta, A\Delta_1) = (\text{bg } HK, \text{bg } K_1\Delta_1).$$

*Ex aequali* is nu

$$(AB, A\Delta_1) = (A\Delta_1, \text{bg } K_1\Delta_1)$$

dus wegens (2)

$$(AB, A\Delta_1) = (AB_1, A\Delta_1)$$

dus

$$AB = AB_1.$$

### 3. Quadratuur van de spiraal.

Het nog overblijvende deel van het werk wordt ingenomen door de behandeling van de quadratuur van de Archimedische spiraal. Hierbij wordt weer de verschilvorm van de compressiemethode (III; 8, 2) toegepast, zoodat er eerst moet worden bewezen, dat men om en in het gebied, waarvan de oppervlakte wordt gevraagd, figuren kan beschrijven, waarvoor het verschil der oppervlakten kleiner kan worden gemaakt dan een willekeurig voorgeschreven kleine grootheid. Dit geschiedt in Prop. 21 voor het eerste oppervlak, in Prop. 22 voor het tweede en de volgende, in Prop. 23 voor een sector, die door een willekeurig deel van een winding en de voerstralen van de eindpunten daarvan wordt begrensd. De methode wordt voldoende toegelicht door de behandeling van het laatstgenoemde geval.

#### Propositie 23.

*Wanneer het oppervlak genomen wordt, dat ingesloten wordt door een boog van de spiraal, die kleiner is dan een winding en die niet den oorsprong tot eindpunt heeft, en door de voerstralen van de uiteinden, dan is het mogelijk, om dit oppervlak een vlakke*

*figuur te beschrijven, bestaande uit gelijkvormige sectoren, en een andere erin te beschrijven, zoodat de omgeschreven figuur de ingeschrevene overtreft met een bedrag, dat kleiner is dan een willekeurig voorgeschreven oppervlakte.*

Laat (fig. 109) gegeven zijn de spiraalboog  $B \dots Z$ . Beschrijf een cirkel door  $Z$  met centrum  $A$ ; hierop bepalen de voerstralen

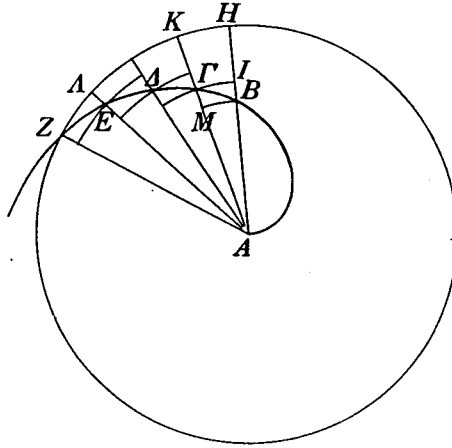


Fig. 109.

van  $B$  en  $Z$  een boog  $HZ$ . Pas op dezen boog dichotomie toe, totdat er een sector  $AKH$  ontstaat, kleiner dan de voorgeschreven oppervlakte  $\varepsilon$ . Beschrijf nu cirkelbogen met centrum  $A$  resp. door  $B \dots Z$ , telkens begrensd door twee opvolgende van de in de dichotomie verkregen voerstralen. Men verkrijgt nu een omgeschreven en een ingeschreven figuur, waarvan de oppervlakten resp.  $C_n$  en  $I_n$  mogen heeten; beide figuren bestaan uit cirkelsectoren, die alle onderling gelijkvormig zijn. De figuur leert nu onmiddellijk

$$C_n - I_n = \text{sector } AAZ - \text{sector } ABM < \text{sector } AKH < \varepsilon.$$

Is de oppervlakte van de figuur, begrensd door den spiraalboog  $BZ$  en de voerstralen  $AB$  en  $AZ$ , groot  $O$ , dan geldt a fortiori

$$O - I_n < \varepsilon \qquad C_n - O < \varepsilon$$

Hierna begint de eigenlijke quadratuur met

#### Propositie 24.

*Het oppervlak, begrensd door de eerste winding van de spiraal en het eerste lijnstuk, is het derde deel van den eersten cirkel.*



Zij  $X_1$  het bedoelde oppervlak,  $K_1$  de eerste cirkel. Is nu niet  $X_1 = \frac{1}{3}K_1$ , dan is of  $X_1 < \frac{1}{3}K_1$  of  $X_1 > \frac{1}{3}K_1$ .

Geval I. Zij  $X_1 < \frac{1}{3}K_1$ . Men kan nu volgens Prop. 23  $n$  zoo bepalen, dat

$$C_n - X_1 < \frac{1}{3}K_1 - X_1$$

dus

$$C_n < \frac{1}{3}K_1. \quad (1)$$

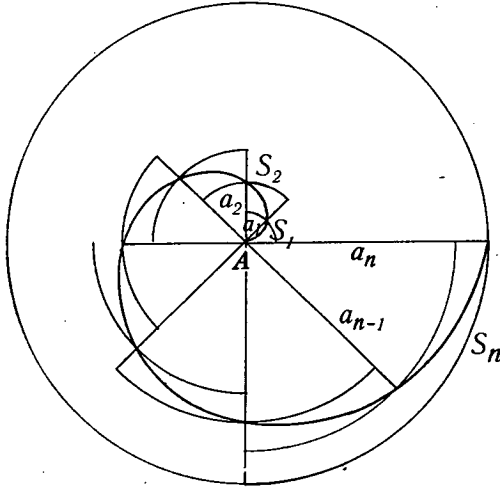


Fig. 110.

De omgeschreven figuur (fig. 110) bestaat uit gelijkvormige cirkelsectoren  $S_1, S_2, \dots, S_n$ , resp. beschreven met stralen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , die een rekenkundige reeks vormen, waarvan het verschil gelijk is aan den kleinsten term. Nu is dus wegens III; 7, 33:

$$n \cdot S_n < 3(S_1 + S_2 + \dots + S_n)$$

waarin

$$n \cdot S_n = K_1.$$

Dus is

$$C_n > \frac{1}{3}K_1 \text{ in strijd met (1):}$$

Geval II. Zij nu  $X_1 > \frac{1}{3}K_1$ . Men kan nu volgens Prop. 23  $n$  zoo bepalen, dat

$$X_1 - I_n < X_1 - \frac{1}{3}K_1$$

dus

$$I_n > \frac{1}{3}K_1. \quad (2)$$

De ingeschreven figuur bestaat uit gelijkvormige cirkelsectoren  $S_1, S_2, \dots, S_{n-1}$ , resp. beschreven met de reeds genoemde stralen  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ . Nu is weer wegens III; 7, 33:

$$3(S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}) < n \cdot S_n$$

dus  $I_n < \frac{1}{3} K_1$  in strijd met (2).

Algebraisch: De stralen van de opv. ingeschreven cirkelsectoren zijn

$$\frac{L}{n}, \quad \frac{2L}{n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{(n-1)L}{n}.$$

Men vindt dus

$$\begin{aligned} I_n &= \sum_{i=1}^{n-1} i \frac{1}{2} \left( \frac{iL}{n} \right)^2 \cdot \frac{2\pi}{n} = \pi L^2 \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} = \\ &= \pi L^2 \frac{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)}{n^3} \end{aligned}$$

dus

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{1}{3} \pi L^2$$

De uitgevoerde bewerking is equivalent met

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \varrho^2 d\varphi \quad \text{waarin} \quad \varrho = \frac{\varphi}{2\pi} L.$$

Men vindt ook hier  $I = \frac{1}{3} \pi L^2$ .

Propositie 25.

*Het oppervlak, ingesloten door de tweede winding van de spiraal en het tweede van de lijnstukken op de nulas heeft tot den tweeden cirkel de reden, die 7 tot 12 heeft, dat is dezelfde reden, die de som van den rechthoek, omvat door de stralen van den tweeden en van den eersten cirkel, en het derde deel van het vierkant op het verschil, waarmee de straal van den tweeden cirkel dien van den eersten overtreft, heeft tot het vierkant op den straal van den tweeden cirkel <sup>4)</sup>.*

<sup>4)</sup> Men merke op, dat de beschouwde figuur *niet* wordt begrensd door de eerste winding, de tweede winding en het tweede lijnstuk, maar alleen door de tweede winding en het tweede lijnstuk. Men denke zich dus de eerste winding niet geteekend.

Laat (fig. 111)  $EA \dots \Theta$  de tweede winding van de spiraal zijn en de cirkel door  $\Theta$  met centrum  $A$  de tweede cirkel  $K_2$ ; en laat het tweede oppervlak  $X_2$  heeten. Om het resultaat van Archimedes te vérduidelijken, geven we de afleiding, die bij hem indirect synthetisch

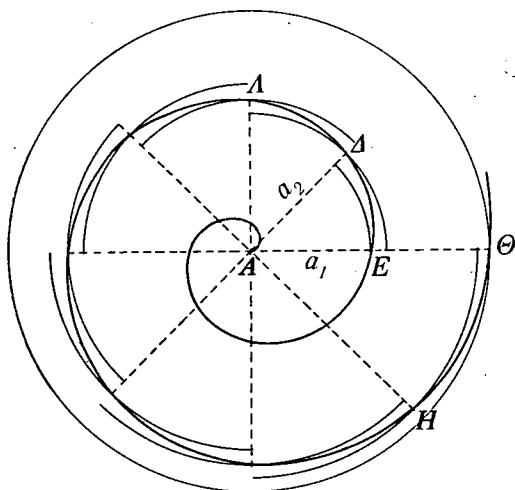


Fig. 111.

geschiedt, in den analytischen vorm, waarin hij haar zelf zoo goed als zeker ook gegeven zal hebben, toen hij de stelling vond.

Denk dus een omgeschreven en een ingeschreven figuur, elk bestaande uit gelijkvormige sectoren ten getale van  $n = 2^k$ , waarvan de stralen een rekenkundige reeks vormen. Deze sectoren zijn: voor  $C_n : S_2$  met straal  $a_2 = AE$ ,  $S_3$  met straal  $a_3 = AE$ ,  $\dots$ ,  $S_{n+1}$  met straal  $a_{n+1} = AH$ .

voor  $I_n : S_1$  met straal  $a_1 = AE$ ,  $S_2$  met straal  $a_2 = AE$ ,  $\dots$ ,  $S_n$  met straal  $a_n = AH$ .

Beide figuren zijn te vergelijken met den tweeden cirkel  $K_2$ , waarvan de oppervlakte gelijk is aan  $n \cdot S_{n+1}$ .

Op de genoemde cirkelsectoren is van toepassing de propositie III; 7, 52 (**Spir.** 11), mits bevrijd van de beperkende bepaling, dat het verschil van de rekenkundige reeks der stralen gelijk moet zijn aan den kleinsten term. Dit voert tot het volgende resultaat:

$$(n \cdot S_{n+1}, S_{n+1} \dots, S_2) < [T(a_{n+1}), O(a_{n+1}, a_1) + \frac{1}{3}T(a_{n+1} - a_1)] < (n \cdot S_{n+1}, S_n + \dots + S_1)$$

$$(K_2, C_n) < [T(2a_1), 2T(a_1) + \frac{1}{3}T(a_1)] < (K_2, I_n)$$

$$(K_2, C_n) < (12, 7) < (K_2, I_n).$$

Daar deze betrekking voor iedere waarde van  $n = 2^k$  geldt en het verschil van  $C_n$  en  $I_n$  beneden iedere voorgeschreven waarde kan dalen door keuze van  $k$ , kon Archimedes de waarde  $12 : 7$  voor de verhouding  $(K_2, X_2)$ , die wij thans door een limietovergang zouden moeten afleiden, reeds vermoeden. Het bewijs voor de juistheid van dit vermoeden (dat hij onmiddellijk synthetisch geeft) bestaat bij hem hierin, dat hij een cirkel  $M$  construeert met een straalvierkant gelijk aan

$$O(A\theta, AE) + \frac{1}{3}T(\theta E)$$

van welken cirkel de oppervlakte zich, wegens  $A\theta = 2 \cdot AE$ , tot die van  $K_2$  verhoudt als  $7 : 12$ . Te bewijzen is nu  $X_2 = M$ . Is dit niet het geval, dan is of  $X_2 < M$  of  $X_2 > M$ .

Geval I. Zij  $X_2 < M$ , dan bestaat er een omgeschreven figuur, zoodat ook nog

$$C_n < M. \quad (1)$$

De propositie III; 7, 52 toepassend, vindt men als boven

$$(K_2, C_n) < (12, 7) = (K_2, M) \text{ dus}$$

$$C_n > M \text{ in strijd met (1).}$$

Geval II. Zij  $X_2 > M$ , dan bestaat er een ingeschreven figuur, zoodat ook nog

$$I_n > M. \quad (2)$$

Toepassing van de prop. III; 7, 52 levert nu

$$(K_2, I_n) > (12, 7) = (K_2, M)$$

dus

$$I_n < M \text{ in strijd met (2).}$$

Algebraisch: Men heeft thans te bepalen

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi L^2 \frac{n^2 + (n+1)^2 + \dots + (2n-1)^2}{n^3}$$

waarvoor men vindt

$$\frac{7}{3}\pi L^2 = \frac{7}{12}\pi (2L)^2$$

Het aequivalent uit de integraalrekening is hier

$$I = \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{2} \varrho^2 d\varphi \text{ waarin } \varrho = \frac{\varphi}{2\pi} L.$$

Men vindt  $I = \frac{1}{3} \pi L^2$ .

In een Corollarium wordt het gevonden resultaat als volgt uitgebreid<sup>1)</sup>:

*Het oppervlak ( $X_i$ ) omvat door een zekere winding van de spiraal en het daarmee gelijkgenummerde lijnstuk van de nulas (d.w.z. beschreven door den voerstraal van een punt, dat een zekere winding van de kromme doorloopt) heeft tot den cirkel ( $K_i$ ) met hetzelfde rangnummer de reden, die de som van den rechtehoek, omvat door den straal ( $iL$ ) van dien cirkel en den straal  $[(i-1)L]$  van den cirkel met één rangnummer lager, en het derde deel van het vierkant op het verschil dier twee stralen, heeft tot het vierkant op den straal van den grootsten der genoemde cirkels.*

Dit kan worden ingezien volgens dezelfde methode als die in Prop. 25 werd toegepast. Het geheele bewijs blijft onveranderd, mits men slechts nalaat de betrekking  $a_{n+1} = 2a_1$  in te voeren. De bedoelde verhouding is blijkbaar

$$(X_i, K_i) = [i(i-1) + \frac{1}{3}, i^2] \quad (1)$$

wat neerkomt op

$$X_i = \pi L^2 [i(i-1) + \frac{1}{3}].$$

Voor  $i = 1$  volgt uit (1) de waarde  $\frac{1}{3}$  van Prop. 24; voor  $i = 2$  de waarde 7 : 12 van Prop. 25.

#### Propositie 26.

De redeneering van Prop. 25 is onveranderd over te nemen voor

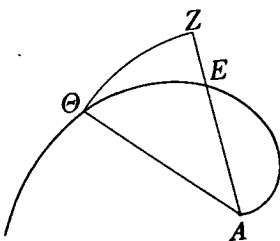


Fig. 112.

het geval (fig. 112) van een spiraal-boog  $E\theta$ , die een echt deel van een winding is. De oppervlakte  $O$  van den sector  $AE\theta$  wordt nu vergeleken met die van den cirkelsector  $S(AZ\theta)$  met straal  $A\theta$ . Men vindt

$$(O, S) = [O(AE, A\theta) + \frac{1}{3} T(A\theta - AE), T(A\theta)].$$

Dit resultaat beduidt, dat de spiraal-sector, ingesloten door de

<sup>1)</sup> Toevoegingen tusschen ( ) ter verduidelijking.

PROSPECTUS.

Dr. P. MOLENBROEK

# LEERBOEK

DER

# VLAKKE MEETKUNDE



ACHTSTE DRUK

**640 bladzijden - 590 figuren**

**Prijs gebonden . . . . f 11.50**

Voor intekenaars op Noordhoff's  
Wisk. Tijdschriften tijdelijk f 10.—

P. NOORDHOFF N.V. — 1939 — GRONINGEN, BATAVIA

In de boekhandel verkrijgbaar en bij  
N.V. UITGEVERS MIJ NOORDHOFF-KOLFF  
Laan Holle 7 - Batavia

# INHOUD.

| Hoofd-<br>stuk | § §   |                                                                                 | Bladzijde | Stellingen | Figuren | Werkstukken | Voor-<br>beelden |
|----------------|-------|---------------------------------------------------------------------------------|-----------|------------|---------|-------------|------------------|
| —              | —     | Inleiding . . . . .                                                             | 1—7       | —          | —       | —           | —                |
| I              | 1—6   | De rechte lijn . . . . .                                                        | 8—18      | —          | 1—10    | —           | 1                |
| II             | 7—12  | Hoeken . . . . .                                                                | 19—31     | 1—4        | 11—29   | —           | —                |
| III            | 13—18 | Snijding van twee rechten door een derde.<br>Evenwijdige rechten . . . . .      | 32—39     | 5—12       | 30—39   | —           | —                |
| IV             | 19—24 | De hoeken van een driehoek. Verplaat-<br>singen. Congruentie. Hoeken en zijden  | 40—58     | 13—27      | 40—61   | —           | —                |
| V              | 25—35 | Rechthoekige en gelijkbenige driehoeken.<br>Vierhoeken. Omgekeerden . . . . .   | 59—84     | 28—48      | 62—92   | —           | 2—7              |
| VI             | 36—40 | Veelhoeken . . . . .                                                            | 85—92     | 49—54      | 93—101  | —           | —                |
| VII            | 41—51 | Eenvoudigste eigenschappen van de cir-<br>kel; cirkel en rechte; twee cirkels . | 93—117    | 55—67      | 102—130 | —           | —                |
| VIII           | 52—58 | Werkstukken . . . . .                                                           | 118—141   | —          | 131—161 | I—XIII      | 8—11             |
| IX             | 59—66 | Meetkundige plaatsen. . . . .                                                   | 142—162   | —          | 162—186 | —           | 12—23            |
| —              | 67    | Eerste herhaling . . . . .                                                      | 162—165   | —          | —       | —           | —                |
| X              | 68—77 | Verhouding van lijnstukken. Oppervlak-<br>ten . . . . .                         | 166—186   | 68—80      | 187—213 | XIV         | 24, 25           |
| XI             | 78—92 | Evenredigheid van lijnstukken . . . . .                                         | 187—216   | 81—95      | 214—242 | XV—XVIII    | —                |

|       |          |                                                                                                                                                                                                                           |                                                           |                           |                           |                           |                           |
|-------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| XII   | 93—99    | Vermenigvuldiging van figuren . . . . .                                                                                                                                                                                   | 217—234                                                   | 96, 97                    | 243—263                   | XIX                       | 26—34                     |
| XIII  | 100—107  | Gelijkvormigheid. . . . .                                                                                                                                                                                                 | 235—251                                                   | 98—108                    | 264—275                   | —                         | 35, 36                    |
| XIV   | 108—114  | De stellingen van MENELAOS en CEVA .                                                                                                                                                                                      | 252—273                                                   | 109—111                   | 276—291                   | —                         | 37—40                     |
| XV    | 115—123  | Berekening van lijnstukken. Constructies                                                                                                                                                                                  | 274—301                                                   | 112—119                   | 292—324                   | XX, XXI                   | 41—47                     |
| —     | 124      | <b>Tweede herhaling</b> . . . . .                                                                                                                                                                                         | 302—306                                                   | —                         | —                         | —                         | —                         |
| XVI   | 125—137  | Metten van hoeken door cirkelbogen . .                                                                                                                                                                                    | 307—349                                                   | 120—124                   | 325—370                   | XXII                      | 48—61                     |
| XVII  | 138—147  | Lijnstukken in de cirkel . . . . .                                                                                                                                                                                        | 350—375                                                   | 125—133                   | 371—398                   | XXIII, XXIV               | 62—66                     |
| XVIII | 148—159  | Regelmatige veelhoeken. Lengte en oppervlakte van de cirkel. . . . .                                                                                                                                                      | 376—415                                                   | 134—149                   | 399—434                   | —                         | 67                        |
| XIX   | 160—171  | Harmonische ligging. Pool en poollijn .                                                                                                                                                                                   | 416—457                                                   | 150—167                   | 435—481                   | XXV, XXVI                 | 68—76                     |
| XX    | 172—182  | Machtlijn. Bundels en netten . . . . .                                                                                                                                                                                    | 458—501                                                   | 168—181                   | 482—511                   | XXVII                     | 77—84                     |
| XXI   | 183—190  | Inversie. . . . .                                                                                                                                                                                                         | 502—550                                                   | 182—189                   | 512—554                   | XXVIII                    | 85—87                     |
| XXII  | 191—196  | Maxima en minima . . . . .                                                                                                                                                                                                | 551—580                                                   | 190                       | 555—590                   | —                         | 88—94                     |
| —     | 197, 198 | <b>Algemene herhaling</b> . . . . .                                                                                                                                                                                       | 581—589                                                   | —                         | —                         | —                         | —                         |
| XXIII | 199—203  | <b>K. HARLAAR</b><br>Het axiomastelsel van VAN DER WAERDEN. Maatgetallen. Oppervlakte. . .<br>Dr. E. J. DIJKSTERHUIS<br>Historische aantekeningen. . . . .<br>Register. . . . .<br>Formules . . . . .<br>Inhoud . . . . . | 590—606<br><br>607—618<br>619—636<br>636, 637<br>638, 639 | —<br><br>—<br>—<br>—<br>— | —<br><br>—<br>—<br>—<br>— | —<br><br>—<br>—<br>—<br>— | —<br><br>—<br>—<br>—<br>— |



## VOORBERICHT BIJ DE ACHTSTE DRUK.

Deze herdruk wijkt sterk af van de vorige; het boek is, ook in letterlijke zin, geheel opnieuw geschreven; het is niet doenlijk alle of maar een deel van de veranderingen aan te geven. We willen volstaan met het volgende.

De grondslagen zijn in het boek behoorlijk gelegd; voor een eerste beoefening ruimschoots voldoende. Aan het eind van de studie kan degene, die behoefte gevoelt aan een stevige axiomatische grondslag, bevrediging vinden in hoofdstuk XXIII en in het daar genoemde boek van Prof. VAN DER WAERDEN.

De volgorde van de stof is in deze druk zo, dat tot en met hoofdstuk XVIII de gewone vlakke Meetkunde wordt afgedaan, maar niet in de oppervlakkige behandeling van de schoolboeken. In die eerste 18 hoofdstukken zal men in theorie en vraagstukken en voorbeelden heel wat vinden, dat enkel past in een studieboek voor volwassenen, hetgeen dit boek wil zijn. Daarna komen de hoofdstukken XIX, XX en XXI met leerstof, die in het bijzonder tot de eisen voor de akten Wiskunde L.O. en K<sub>I</sub> behoort. Daartoe rekenen we ook, wat we schreven over maxima en minima in het nieuwe hoofdstuk XXII; § 195, het waardige sluitstuk van dit onderwerp, behoeft men o.i. voor deze examens niet te kennen.

Weggelaten is de meetkundige behandeling van ellips, hyperbool en parabool; daarvoor wordt verwezen naar

P. WIJDENES, De kegelsneden voor het M.O. (80 ct.),

J. VERSLUYS, De meetkunde der kegelsneden (*f* 1,90),

Prof. Dr. J. G. RUTGERS, De meetkunde der kegelsneden (*f* 5,—).

Het eerste geeft voldoende voor de kandidaten Wiskunde L.O., die er gaarne iets van willen weten; het tweede geeft genoeg voor de akte Wiskunde K<sub>I</sub>.

Wij hebben gemeend in dit boek niet enkel theorie en vraagstukken te moeten geven, maar ook leerzame voorbeelden. Men vindt volledige uitwerkingen van vraagstukken en van werkstukken en men leert, hoe men meetkundige plaatsen opspoort en naar den eis behandelt. Het aantal voorbeelden is niet minder dan 94, die samen ongeveer 100 bladzijden beslaan.

---

Van de figuren uit de vorige druk zijn er o.a. 35 vervallen wegens het weglaten van de kegelsneden; toch is het aantal in deze druk nog 82 groter dan in de vorige; de 590 figuren, waarvan de meeste nieuw zijn en die opzettelijk op kleine schaal zijn getekend, beslaan samen met de onderschriften minstens 75 bladzijden.

In de zevende druk stonden ongeveer 900 vraagstukken, waarvan er heel wat als te eenvoudig gemist konden worden; deze zijn dus geschrapt en vervangen door andere, die meer in overeenstemming zijn met het peil van het boek en van de examens voor de beide akten Wiskunde en met de opzet het werk tot een Leerboek der Vlakke Meetkunde te verheffen. In deze achtste druk vindt men 935 vraagstukken; vele daarvan zijn onderverdeeld in *a*, *b*, *c* . . . , zodat het aantal eigenlijk wat groter is. De antwoorden met aanwijzingen en korte oplossingen verschijnen tegelijkertijd met het boek.

In de theorie, in de voorbeelden en in de vraagstukken vindt men verscheidene klassieke vraagstukken; deze kwamen in de vorige druk niet voor; men zie de eigennamen in het register.

Voeg bij dit alles nog het belangrijke hoofdstuk XXIII, de historische aantekeningen en het uitgebreide register, dan is daarmee de grotere omvang grotendeels verklaard. Het is echter minder deze, dan wel de meer strenge mathematische en logische opbouw, die deze druk onderscheidt van de vorige en hem stempelt tot een handboek van de Vlakke Meetkunde. Deze hoedanigheid maakt, dat het werk tevens als leidraad kan dienen voor hen, die het vak dagelijks moeten onderwijzen en waarvan zeer velen van de Lagere Meetkunde weinig meer hebben gezien, dan wat een of ander schoolboek geeft.

We verwachten, dat dit boek door zijn rijke inhoud tevens in de smaak zal vallen van de velen, die uit pure liefhebberij zich met de Vlakke Meetkunde bezig houden en voor wie een schoolboek niet voldoende geestelijk voedsel biedt.

Verder zeggen we nog iets voor de grote klasse van gebruikers, de studerenden voor de akte Wiskunde L.O. en hun opleiders. Ten eerste: enige toevoegingen zijn opgenomen, omdat de examens die eisten. In 1938 werd behalve naar de gewone stof gevraagd naar de volgende onderwerpen (de lijst is niet volledig): negenpuntscirkel, rechte van WALLACE, de raakproblemen, het punt van NAGEL, isogonaal verwanten, symmedianen, het punt van LEMOINE, de cirkels van APOLLONIUS, de punten van BROCARD, orthogonaal en diametraal snijden, harmonisch viertal, cirkelbundels, volledige vierhoek; inversie; zelfs naar cirkelnetten werd gevraagd. Enige van deze onderwerpen zocht men in de vorige druk tevergeefs.

Bij een eerste bestudering zal men goed doen de theorie in kleine letter over te slaan. Aan opleiders wordt de raad gegeven vooraf de stof en de vraagstukken na te gaan, opdat ze weten, wat ze van hun leerlingen, zo geheel verschillend in aanleg, kunnen eisen; of ze een of ander zullen overslaan of dat ze hun bij de eerste keer reeds de volle maat kunnen geven; wij voor ons vinden het laatste niet wenselijk. De opleider stelle zich tot taak enige schifting te maken in de vraagstukken van dit boek; aan de hand van de oplossingen zal hem dat niet moeilijk vallen. We hebben niet de meer moeilijke op een of andere wijze aangegeven; het is nl. al gebeurd, dat vraagstukken, die we met een sterretje hadden gemerkt (dat betekende: voor L.O. overslaan) op het schriftelijk examen L.O. werden opgegeven.

Gaarne spreek ik hier mijn dank uit aan mijn medewerkers HARLAAR en HERREILERS voor alles en dat is heel veel, wat zij aan dit boek hebben gedaan. Men beschouwe het werk als de vrucht van onze innige samenwerking. Wij alle drie houden ons aanbevolen voor op- en aanmerkingen, die dit werk ten goede kunnen komen; van alle gebruikers, ook van studerenden dus.

De historische aantekeningen zijn van de hand van Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, wien we gaarne dank brengen voor zijn steeds weer betoonde bereidwilligheid mede te werken in het belang van de wiskunde in het algemeen en van haar geschiedenis in het bijzonder.

Amsterdam, Juni 1939.

P. WIJDENES.

Jac. Obrechtstraat 88.

Met goedkeuring van Dr. MOLENBROEK wordt het herzieningsrecht op dit werk door ondergeteekende uitgeoefend buiten eenige verantwoordelijkheid van Dr. MOLENBROEK voor inhoud en vorm.

P. W.

Hieruit zien we, dat de minimumwaarde van  $r$  gelijk is aan  $h(\sqrt{2}-1)$ ; de driehoek  $BAC$  is dan gelijkbenig.

*Opmerking.* Uit dezelfde constructie blijkt ook, dat  $2r < h$  moet zijn, dus  $r < \frac{1}{2}h$ . Hieruit volgt echter niet, dat  $\frac{1}{2}h$  de maximumwaarde van  $r$  is, doch in tegendeel, dat  $r$  geen maximum heeft. Is nl.  $r = \frac{1}{2}h$ , dan is de driehoek ontaard, daar nu een der hoekpunten  $B$  en  $C$  in het oneindige verdwijnt;  $r$  kan dus wel van de kleine kant onbepaald tot  $\frac{1}{2}h$  naderen, maar mag de waarde  $\frac{1}{2}h$  zelf niet aannemen.

We geven ook hiervan nog een minder eenvoudig voorbeeld.

**Voorbeeld 90.** Gegeven zijn twee snijdende cirkels  $(M, R)$  en  $(N, r)$ ;  $P$  is een van hun snijpunten. Trek de rechte  $PAB$  ( $A$  op cirkel  $(M, R)$  en  $B$  op cirkel  $(N, r)$ ) zo, dat  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  zo groot mogelijk is.

(Mond. ex.  $K_1$  1936.)

*Opl.* We proberen eerst de rechte  $PAB$  zo te bepalen, dat  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = a^2$  is, waarin  $a$  een gegeven lijnstuk voorstelt. We inverteren dan cirkel  $(N, r)$  met  $P$  als centrum en  $a^2$  als macht, waardoor hij overgaat in een rechte  $n$ . Heeft deze met cirkel  $(M, R)$  een punt  $A$  gemeen, dan voldoet  $PA$  aan het gevraagde, want snijdt  $PA$  cirkel  $(N, r)$  nog in  $B$ , dan zal  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = a^2$  zijn.

De maximale waarde  $k$  van  $a$ , waarvoor de constructie nog uitvoerbaar

is, is blijkbaar die (zie fig. 566), waarbij de rechte  $n$  aan cirkel  $(M, R)$  raakt. Heeft deze raaklijn met cirkel  $(N, r)$  het punt  $C$  gemeen, dan is  $PC = k$ . De rechte  $PB$  gaat nu door het raakpunt  $A$  van  $n$  en cirkel  $(M, R)$ .

Daar nu  $\overrightarrow{MA}$  en  $\overrightarrow{NP}$  evenwijdig zijn, maar tegengesteld gericht, zal  $PA$  door het inwendige gelijkvormigheidspunt  $I$  van de beide gegeven cirkels gaan.

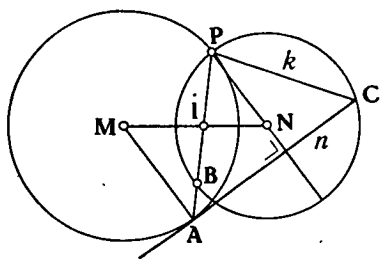


Fig. 566.  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  is maximum.

*Opmerking.* Gemakkelijk is nu in te zien, dat  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  minimaal zal zijn,

als  $PA$  door het uitwendige gelijkvormigheidspunt van de beide cirkels gaat.

Een methode, die nauw verband houdt met de vorige, is die, waarbij men bij het opsporen van uiterste waarden gebruik maakt van meetkundige plaatsen. Gewoonlijk komt het zelfs hierop neer, dat de op blz. 556 genoemde constructie met behulp van de methode der meetkundige plaatsen (verg. § 65) uitgevoerd wordt. Een mooie toepassing hiervan vindt men in § 67 nr. 17; we geven hier nog een andere toepassing.

Gegeven is een cirkel  $\varepsilon$ , benevens twee punten  $A$  en  $B$  binnen die

## AANHANGSEL.

### HOOFDSTUK XXIII.

---

#### Het axiomastelsel van Van der Waerden.

##### Maatgetallen. Oppervlakte.

- A. *Het axiomastelsel van Van der Waerden en zijn betekenis voor de planimetrie.*

§ 199. Het axiomastelsel van VAN DER WAERDEN<sup>1)</sup> omvat de volgende axioma's<sup>2)</sup>:

##### I. Verbindingsaxioma's.

- I. 1. *Door twee verschillende punten gaat één en slechts één rechte.*
- I. 2. *Door drie verschillende punten, die niet op een rechte liggen, gaat één en slechts één vlak.*
- I. 3. *Als een rechte met een vlak twee verschillende punten gemeen heeft, ligt de rechte geheel in het vlak.*
- I. 4. *Elke rechte bevat minstens twee verschillende punten.*
- I. 5. *Elk vlak bevat minstens drie verschillende niet op een rechte liggende punten.*
- I. 6. *Er zijn vier verschillende punten, die niet in een vlak en niet op een rechte liggen.*
- I. 8.<sup>3)</sup> *Twee verschillende rechten in een vlak, die met een derde rechte in dat vlak evenwijdig zijn, zijn ook onderling evenwijdig.*

##### II. Ordeningsaxioma's.

- II. 1. *Als het punt B tussen de punten A en C ligt, zijn A, B en C drie verschillende punten van een rechte.*

---

<sup>1)</sup> Prof. Dr. B. L. VAN DER WAERDEN, De logische grondslagen der Euklidische meetkunde.

<sup>2)</sup> We raden den lezer aan, eerst de inleiding nog eens door te lezen en ook de definities op te slaan van de in de axioma's voorkomende begrippen evenwijdig, halve rechte, verlengde, enz.

<sup>3)</sup> Het ontbrekende nr. 7 houdt in, dat, als twee vlakken een punt gemeen hebben, ze nog minstens een hiervan verschillend punt gemeen hebben. In het volledige axioma-stelsel is I 7 overbodig, daar het uit de voorafgaande axioma's in vereniging met die van groep II kan worden afgeleid. De uitspraak I 7 is in het stelsel van VAN DER WAERDEN alleen ter afronding van het stel verbindingsaxioma's meegenummerd. Voor de planimetrie heeft I 7 trouwens geen betekenis.

voerstralen  $\varrho_1$  en  $\varrho_2$  ( $\varrho_2 > \varrho_1$ ), opv. behoorend bij de argumenten  $\varphi_1$  en  $\varphi_2$  een oppervlakte heeft

$$O = \frac{\varrho_1 \varrho_2 + \frac{1}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)^2}{\varrho_2^2} \cdot \frac{1}{2} \varrho_2^2 (\varphi_2 - \varphi_1)$$

of, wegens

$$\varphi = \frac{\varrho}{L} 2\pi$$

$$O = \frac{\pi}{L} (\varrho_2 - \varrho_1) [\varrho_1 \varrho_2 + \frac{1}{3}(\varrho_2 - \varrho_1)^2] = \pi \frac{\varrho_2^3 - \varrho_1^3}{3L}$$

In de voorafgaande proposities is telkens sprake geweest van de oppervlakte van de spiraalsectoren, die door den voerstraal uit  $A$  worden beschreven, wanneer een boog van de spiraal wordt doorlopen. Hieruit wordt nu een stelling afgeleid over de oppervlakten der verschillende spiraalringen  $R_i$ , die worden ingesloten door het  $(i-1)^e$  lijnstuk op de nulas, de  $(i-1)^e$  en de  $i^e$  winding en het  $i^e$  lijnstuk. Blijkbaar is

$$R_1 = X_1, \dots R_i = X_i - X_{i-1} (i > 1).$$

Deze stelling luidt als volgt:

Propositie 27.

*Van de (ring)oppervlakken, omvat door de spiraalwindingen en de lijnstukken op de nulas, is het derde tweemaal zoo groot als het*

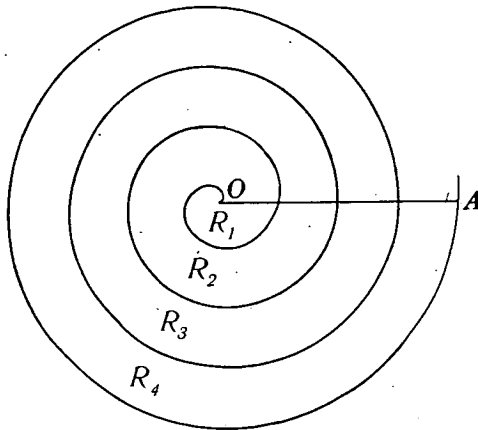


Fig. 113.

*tweede, het vierde driemaal zoo groot, het vijfde viermaal zoo groot en zoo zal telkens elk volgend ringoppervlak het volgend veelvoud*

*zijn van het tweede; het eerste is echter van het tweede het zesde deel* (fig. 113):

Het laatste resultaat volgt onmiddellijk uit Prop. 26.

Volgens deze propositie is nl.

$$(X_2, K_2) = (7, 12).$$

Ook is

$$(K_2, K_1) = (4, 1) = (12, 3)$$

Dus

$$(X_2, K_1) = (7, 3).$$

Ook is (**Spir.** 25)

$$(K_1, X_1) = (3, 1).$$

Dus

$$(X_2, X_1) = (7, 1) \text{ of } (R_2, R_1) = (6, 1).$$

Hierna wordt eerst bewezen, dat  $R_3 = 2R_2$ , terwijl daarna het bewijs wordt geleverd voor een willekeurig rangnummer. Deze laatste redeneering luidt in de boven ingevoerde notatie als volgt:

Wegens **Spir.** 25, Cor. is

$$(R_1 + \dots R_i, K_i) = [O(a_i, a_{i-1}) + \frac{1}{3}T(a_i - a_{i-1}), T(a_i)]$$

Ook is  $(K_i, K_{i-1}) = [T(a_i), T(a_{i-1})]$

en, weer wegens **Spir.** 25, Cor.,

$$(K_{i-1}, R_1 + \dots R_{i-1}) = [T(a_{i-1}), O(a_{i-1}, a_{i-2}) + \frac{1}{3}T(a_{i-1} - a_{i-2})]$$

waaruit *ex aequali*

$$(R_1 + \dots R_i, R_1 + \dots R_{i-1}) = [O(a_i, a_{i-1}) + \frac{1}{3}T(a_i - a_{i-1}), O(a_{i-1}, a_{i-2}) + \frac{1}{3}T(a_{i-1} - a_{i-2})]$$

en *separando* wegens  $a_i - a_{i-1} = a_{i-1} - a_{i-2}$

$$(R_i, R_1 + \dots R_{i-1}) = [O(a_{i-1}, a_i - a_{i-2}), O(a_{i-1}, a_{i-2}) + \frac{1}{3}T(a_{i-1} - a_{i-2})] \quad (1)$$

Zoo is ook

$$(R_{i-1}, R_1 + \dots R_{i-2}) = [O(a_{i-2}, a_{i-1} - a_{i-3}), O(a_{i-2}, a_{i-3}) + \frac{1}{3}T(a_{i-2} - a_{i-3})]$$

waaruit *invertendo* en *componendo* volgt

$$(R_1 + \dots R_{i-1}, R_{i-1}) = [O(a_{i-2}, a_{i-1}) + \frac{1}{3}T(a_{i-2} - a_{i-3}), O(a_{i-2}, a_{i-1} - a_{i-3})]$$

dus *ex aequali* met (1) in verband met

$$a_i - a_{i-2} = a_{i-1} - a_{i-3}$$

$$(R_i, R_{i-1}) = [O(a_{i-1}, a_i - a_{i-2}), O(a_{i-2}, a_{i-1} - a_{i-3})] = (a_{i-1}, a_{i-2})$$

Hieruit volgt

$$(R_{i-1}, R_{i-2}) = (a_{i-2}, a_{i-3}) \text{ enz.}$$

$$\text{en dus } (R_i, R_2) = (a_{i-1}, a_1) = (i-1).$$

Algebraisch:

Vervormt men het resultaat van Prop. 25, Cor. als volgt:

$$\frac{X_i}{K_i} = \frac{i(i-1) + \frac{1}{3}}{i^2}$$

dus

$$X_i = \frac{i(i-1) + \frac{1}{3}}{i^2} \pi(iL)^2 = [i(i-1) + \frac{1}{3}]K_1$$

dan vindt men dadelijk

$$R_i = X_i - X_{i-1} = 2(i-1)K_1 = (i-1)R_2 (i > 1).$$

De door Archimedes gevolgde methode verloopt algebraisch als volgt:

Uit

$$\frac{X_i}{K_i}, \frac{K_i}{K_{i-1}} \text{ en } \frac{K_{i-1}}{X_{i-1}}$$

vindt hij

$$\frac{X_i}{X_{i-1}} = \frac{i(i-1) + \frac{1}{3}}{(i-1)(i-2) + \frac{1}{3}}$$

dus wegens  $R_i = X_i - X_{i-1}$

$$\frac{R_i}{X_{i-1}} = \frac{2(i-1)}{(i-1)(i-2) + \frac{1}{3}}$$

Hij kent dus ook  $\frac{R_{i-1}}{X_{i-2}}$  en daardoor  $\frac{R_{i-1}}{X_{i-1}}$ .

Zoo vindt hij

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} = \frac{i-1}{i-2}$$

waaruit

$$\frac{R_i}{R_2} = i-1.$$

Het werk wordt besloten met

Propositie 28.

*Indien op een willekeurige winding van een spiraal twee punten worden genomen, die er niet de eindpunten van zijn en er worden*



cirkels beschreven, die den oorsprong tot centrum en de voerstra-  
len dier punten tot stralen hebben, dan heeft het oppervlak, inge-  
sloten door den grootsten cirkelboog tusschen de twee voerstra-  
len, den spiraalboog tusschen beide en den verlengden voerstraal, tot  
het oppervlak, omvat door den kleinsten cirkelboog, denzelfden  
spiraalboog en de verbindingslijn hunner eindpunten, de reden,  
die de straal van den kleinsten cirkel, vermeerderd met twee derde  
deelen van het verschil van de stralen van de beide cirkels, heeft  
tot den straal van den kleinsten cirkel, vermeerderd met een derde  
deel van hetzelfde verschil (fig. 114).

Zijn  $\Gamma$  en  $\Delta$  de beschouwde punten,  $\mathcal{E}$  en  $\Pi$  de bedoelde oppervlakken,  $N$  de cirkelsector  $A\Gamma\theta$ , dan is dus te bewijzen

$$(\mathcal{E}, \Pi) = (A\theta + \frac{2}{3}\Delta\theta, A\theta + \frac{1}{3}\Delta\theta).$$

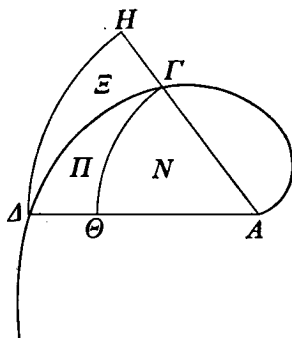


Fig. 114.

Bekend is (Spir. 26)

$$(N + \Pi, N + \Pi + \mathcal{E}) = [\mathcal{O}(A\Delta, A\theta) + \frac{1}{3}\mathcal{T}(\Delta\theta), \mathcal{T}(A\Delta)] \quad (1)$$

Ook is

$$(N + \Pi + \mathcal{E}, N) = [\mathcal{T}(A\Delta), \mathcal{T}(A\theta)]$$

dus *ex aequali*

$$(N + \Pi, N) = [\mathcal{O}(A\Delta, A\theta) + \frac{1}{3}\mathcal{T}(\Delta\theta), \mathcal{T}(A\theta)]$$

waaruit *convertendo* volgt

$$(N + \Pi, \Pi) = [\mathcal{O}(A\Delta, A\theta) + \frac{1}{3}\mathcal{T}(\Delta\theta), \mathcal{O}(A\theta, \Delta\theta) + \frac{1}{3}\mathcal{T}(\Delta\theta)]. \quad (2)$$

Uit (1) volgt wegens

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(A\Delta) - \mathcal{O}(A\Delta, A\theta) - \frac{1}{3}\mathcal{T}(\Delta\theta) &= \mathcal{O}(A\Delta, \Delta\theta) - \frac{1}{3}\mathcal{T}(\Delta\theta) = \\ &= \mathcal{O}(A\theta, \Delta\theta) + \mathcal{T}(\Delta\theta) - \frac{1}{3}\mathcal{T}(\Delta\theta) \end{aligned}$$

*invertendo en separando*

$$(\mathcal{E}, N + \Pi) = [\mathcal{O}(A\theta, \Delta\theta) + \frac{2}{3}\mathcal{T}(\Delta\theta), \mathcal{O}(A\Delta, A\theta) + \frac{1}{3}\mathcal{T}(\Delta\theta)]$$

dus *ex aequali* met (2)

$$(\mathcal{E}, \Pi) = [\mathbf{O}(A\theta, \Delta\theta) + \frac{2}{3}\mathbf{T}(\Delta\theta), \mathbf{O}(A\theta, \frac{1}{3}\Delta\theta) + \frac{1}{3}\mathbf{T}(\Delta\theta)] = \\ = [A\theta + \frac{2}{3}\Delta\theta, A\theta + \frac{1}{3}\Delta\theta]$$

Algebraisch: Zij

$$A\theta = \varrho, A\Delta = \varrho + \nu$$

dan is

$$\frac{N + \Pi}{N + \Pi + \mathcal{E}} = \frac{\varrho(\varrho + \nu) + \frac{1}{3}\nu^2}{(\varrho + \nu)^2} \quad (3)$$

Men vindt dan met behulp van

$$\frac{N + \Pi + \mathcal{E}}{N} = \frac{(\varrho + \nu)^2}{\varrho^2} \\ \frac{N + \Pi}{N} = \frac{\varrho(\varrho + \nu) + \frac{1}{3}\nu^2}{\varrho^2}$$

dus

$$\frac{N + \Pi}{\Pi} = \frac{\varrho(\varrho + \nu) + \frac{1}{3}\nu^2}{\varrho\nu + \frac{1}{3}\nu^2}$$

Uit (3) volgt

$$\frac{\mathcal{E}}{N + \Pi} = \frac{\varrho\nu + \frac{2}{3}\nu^2}{\varrho(\varrho + \nu) + \frac{1}{3}\nu^2}$$

zoodat

$$\frac{\mathcal{E}}{\Pi} = \frac{\varrho + \frac{2}{3}\nu}{\varrho + \frac{1}{3}\nu}$$

## HET WERKSTUK VAN CASTILLON

DOOR

G. R. VELDKAMP.

---

In Jrg. 15, afl. 3, blz. 153 van dit tijdschrift nodigde de Redactie de lezers uit, hun oplossingen in te zenden van het bovengenoemde vraagstuk. Door een aantal lezers is aan deze uitnodiging gevolg gegeven; hun inzendingen zijn tot het volgende artikel verwerkt.

1. Het werkstuk van Castillon kan aldus worden geformuleerd: *In een plat vlak zijn de punten  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  gegeven, benevens de cirkel ( $M$ ), die door geen dezer punten gaat. Men vraagt een driehoek  $ABC$  te construeren, waarvan de hoekpunten op ( $M$ ) liggen, terwijl de zijlijnen  $BC$ ,  $CA$  en  $AB$  opvolgend door  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  gaan.*

Speciale gevallen van dit vraagstuk komen reeds in de Oudheid voor. Zo wordt bijvoorbeeld in de „*Collectiones Mathematicae*” van Pappus de opgave behandeld voor het geval, dat  $P_3$  het oneigenlijke punt van  $P_1P_2$  is.<sup>1)</sup> Voor het geval, dat  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  de hoekpunten zijn van een (eigenlijke) driehoek schijnt het probleem voor het eerst te zijn gesteld door Cramer, terwijl het voor het eerst werd opgelost (in 1776) door G. F. Salvemini, een Italiaans wiskundige afkomstig uit Castiglione. Deze Giovanni Francesco Salvemini, die o.a. ook hoogleraar is geweest in Utrecht, noemde zich naar de plaats van zijn herkomst de Castillon, en deze laatste naam verbindt men meestal aan het vraagstuk, waarover wij hier schrijven. Na Castillon hebben zich vele andere wiskundigen met het vraagstuk en zijn uitbreidingen bezig gehouden, zoals: Brianchon, Carnot, Clausen, Encontre, Gergonne, Giordano, Lagrange, Lambert, Lhuillier, Malfatti, Mascheroni, Poncelet, Rochat, Servois, Seydewitz.

---

<sup>1)</sup> Ir. D. J. Kruijtbosch, *Bijdragen tot de methodologie van de beginselen der meetkunde*, Rotterdam 1931, blz. 196.

Betreffende *Giordano* zij nog opgemerkt, dat deze Italiaanse wiskundige afkomstig was uit *Ottobiano* en zich naar die plaats wel d' *Ottobiano* noemde; hij breidde de opgave uit tot het construeren in een gegeven cirkel van een enkelvoudige  $n$ -hoek, waarvan de zijlijnen door  $n$  in het vlak van de cirkel gelegen punten gaan (1788). Naar hem wordt dit vraagstuk ook wel eens de opgave van *Ottobiano* genoemd.<sup>1)</sup>

2. De meest voor de hand liggende oplossing van het gestelde vraagstuk is die met behulp van projectieve puntenreeksen op de cirkel. Deze oplossing is dan ook door alle inzenders behandeld; zij wordt in de nummers 3—7 besproken. In de nummers 7—15 wordt aangetoond, hoe men met behulp van inversie tot een oplossing kan geraken, terwijl in 15—22 oplossingen worden behandeld, die in nauw verband daarmee staan. In 22 geven we een oplossing met behulp van de theorie van pool en poollijn. Daarna volgen in 23 en 24 nog een tweetal oplossingen, die bij speciale ligging van de gegevens t.o. van elkaar kunnen worden toegepast. Tenslotte worden in 25 enkele opmerkingen gemaakt over de generalisaties, waartoe de opgave aanleiding geeft.

3. De projectieve oplossing van het werkstuk van *Castillon* komt neer op het construeren van de dekpunten van een projectieve verwantschap tussen de punten van de gegeven cirkel ( $M$ ). Dit is als volgt in te zien: We nemen op de cirkel het punt  $Q_1$  willekeurig aan; zij  $R_1$  het tweede snijpunt van  $P_3Q_1$  met de cirkel; het tweede snijpunt van  $P_1R_1$  met de cirkel noemen we  $S_1$ , terwijl  $Q_1'$  het tweede snijpunt is van  $P_2S_1$  met de cirkel. Wanneer nu  $Q_1$  en  $Q_1'$  samenvallen, is  $Q_1R_1S_1$  een driehoek, die aan de vraag voldoet. Doorloopt  $Q_1$  een puntenreeks op de cirkel, dan doorloopt  $Q_1'$  volgens een bekende eigenschap een daarmee projectieve puntenreeks. Daaruit volgt, dat  $Q_1$  en  $Q_1'$  dan en slechts dan samenvallen, wanneer men voor  $Q_1$  een dekpunt der genoemde projectiviteit kiest. De dekpunten echter kunnen, zoals bekend, worden bepaald met behulp van drie paar toegevoegde punten:  $Q_1, Q_1'$ ;  $Q_2, Q_2'$ ;  $Q_3, Q_3'$ . Ofschoon deze paren geheel willekeurig kunnen worden gekozen, verdient het voor het verkrijgen van een figuur met zo weinig mogelijk constructielijnen aanbeveling, een *speciale*

<sup>1)</sup> H. Liebm ann, *Synthetische Geometrie*, Leipzig u. Berlin 1934, blz. 48/49.

keuze te doen. Zoals wel vanzelf spreekt, is de onderlinge ligging der gegevens van invloed bij genoemde keuze. In fig. 1 is deze ligging zodanig, dat  $P_1P_3$  en  $P_1P_2$  de cirkel snijden. Het is nu

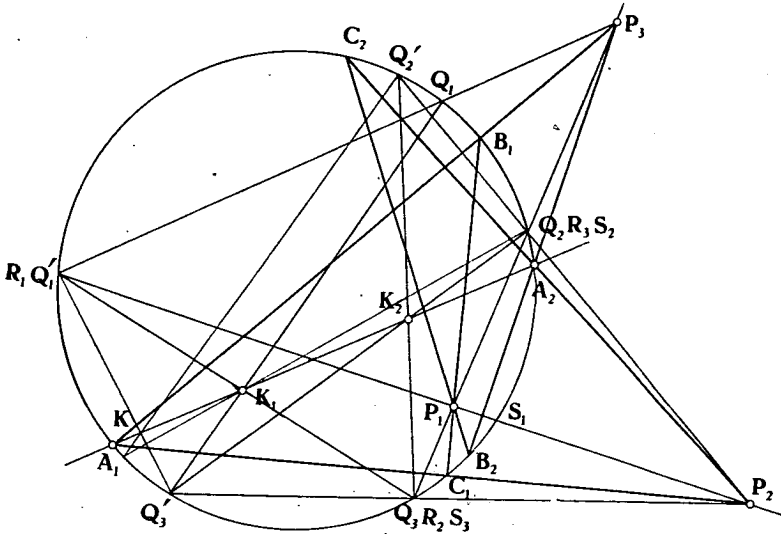


Fig. 1.

voordelig,  $Q_1$  zo te kiezen, dat  $R_1S_1$  langs  $P_1P_2$  valt; dan vallen  $R_1$  en  $Q_1'$  samen. Voor  $Q_2$  en  $Q_3$  kiest men de snijpunten van  $P_1P_3$  met de cirkel; de punten  $S_2$  en  $R_3$  vallen dan in  $Q_2$ , terwijl  $S_3$  en  $R_2$  in  $Q_3$  vallen.<sup>1)</sup> Zij nu  $K_1$  het snijpunt van  $Q_1Q_3'$  en  $Q_1'Q_3$  en  $K_2$  dat van  $Q_2Q_3'$  en  $Q_2'Q_3$ ; de lijn  $K_1K_2$  snijdt dan op de gegeven cirkel de gezochte dekpunten  $A_1$  en  $A_2$  in. Het is duidelijk, dat er 0, 1 of 2 driehoeken aan de vraag voldoen, al naar gelang  $K_1K_2$  geen enkel punt, één punt, of twee punten met de cirkel gemeen heeft.

4. De rechte, waarop de dekpunten der projectiviteit tussen de punten  $Q$  en  $Q'$  gezocht moeten worden, zullen we kortheidshalve de *as* der projectiviteit noemen. Zij kan ook worden bepaald door gebruik te maken van de volgende bekende eigenschap: *Elke projectiviteit tussen de punten van een cirkel kan worden verkregen als het product van twee involuties op de cirkel; de pool van één der involuties kan naar willekeur op de as der projectiviteit worden*

<sup>1)</sup> Dr. Fred. Schuur, *Leerboek der Nieuwere Meetkunde van het vlak en van de ruimte*, Groningen 1938, blz. 423/424.

ZO JUIST VERSCHEEN:

# INLEIDING TOT EEN TOPOLOGISCHE BEHANDELING VAN DE MEETKUNDE VAN HET AANTAL

DOOR

DR. J. C. H. GERRETSEN

GRONINGEN

## INHOUD

|                                                                                     | Pag. |
|-------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Inleiding . . . . .                                                                 | XI   |
| A. TOPOLOGIE                                                                        |      |
| Hoofdstuk I. Het begrip complex . . . . .                                           | 1    |
| Hoofdstuk II. Absolute en relatieve homologiegroepen . . . . .                      | 9    |
| Hoofdstuk III. Reticulatie . . . . .                                                | 18   |
| Hoofdstuk IV. Deformatie en approximatie . . . . .                                  | 32   |
| Hoofdstuk V. Doorsneden van ketens . . . . .                                        | 53   |
| Hoofdstuk VI. Variëteiten . . . . .                                                 | 82   |
| B. MEETKUNDE VAN HET AANTAL                                                         |      |
| Hoofdstuk VII. Algebraïsche variëteiten en de rekenwijze van Schubert . . . . .     | 113  |
| Hoofdstuk VIII. Enkelvoudige en meervoudige projectieve ruimten . . . . .           | 152  |
| Hoofdstuk IX. Stralengeometrie in de $n$ -dimensionale projectieve ruimte . . . . . | 182  |
| Hoofdstuk X. De lijnelementen in de $n$ -dimensionale projectieve ruimte . . . . .  | 200  |
| Literatuur . . . . .                                                                | 216  |
| Register . . . . .                                                                  | 220  |

Prijs van het complete boek, groot 246 pag.: f 4.90, geb. f 5.90  
Voor intekenaars op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften tijdelijk  
f 4.00, geb. f 5.00

P. NOORDHOFF N.V. — 1939 — GRONINGEN-BATAVIA  
OOK VERKRIJGBAAR DOOR BEMIDDELING VAN DE BOEKHANDEL

Het boek stelt zich ten doel de meetkunde van het aantal te funderen, in het bijzonder de z.g. symbolische rekenwijze van Schubert, met gebruikmaking van topologische hulpmiddelen.

Het werk bestaat uit twee afdelingen. In de eerste afdeling, het topologische gedeelte, is een volledig overzicht gegeven van de definities en de stellingen, die voor een topologische grondlegging van de meetkunde van het aantal van belang zijn. De nodige aandacht is besteed aan de theorie van de homologiegroepen en methoden zijn aangegeven, die in praktische gevallen het werkelijk bepalen van deze groepen mogelijk maken. Bovendien wordt de beroemde theorie der doorsneden, afkomstig van Lefschetz, opnieuw ontwikkeld.

Het tweede gedeelte is gewijd aan de meetkunde van het aantal. Allereerst zijn de grondbegrippen van de algebraïsche meetkunde gedefiniëerd, waarbij een dankbaar gebruik is gemaakt van recente publicaties van Van der Waerden.

De symbolische rekenwijze van Schubert is exact ontwikkeld. Het blijkt, dat de eigenaardigheden en de mogelijkheden van deze rekenwijze tot hun recht komen, wanneer men de symbolen van Schubert beschouwt als homologieklassen, behorende bij algebraïsche variëteiten. Steunende op de theorie der doorsneden van Lefschetz kan men daarvoor rekenregels vast stellen en aldus tot het rekensysteem komen, dat door Schubert op intuïtieve wijze was opgebouwd. Bovendien blijkt het, dat een door Schaake ingevoerde terminologie geheel natuurlijk bij de nieuwe interpretatie aangepast kan worden, zodat daarmee zonder moeite tal van door dezen auteur verkregen resultaten topologisch gefundeerd kunnen worden. De topologie doet tevens middelen aan de hand om tot een exacte bepaling van multipliciteiten van oplossingen van een meetkundig probleem te komen, zoals door Van der Waerden naar voren gebracht is.

Van de ingevoerde begrippen en methoden kunnen vele toepassingen gemaakt worden. Allereerst zijn eigenschappen behandeld van enkelvoudige en meervoudige projectieve ruimten, voor zover deze in de meetkunde van het aantal een rol spelen. De stelling van Bezout, correspondentiebeginsels en dergelijke komen ter sprake.

Daarna zijn toepassingen gemaakt op de variëteit der stralen van een  $n$ -dimensionale projectieve ruimte en zijn generaliseringën bewezen van de stelling van Bezout, zoals de formules van Halphen en Schubert.

Ten slotte zijn problemen behandeld uit de meetkunde der lijnelementen van een  $n$ -dimensionale projectieve ruimte en klassieke resultaten door specialisering uit nieuwe afgeleid.

Het werk wordt besloten met een literatuuroverzicht en een register van vaktermen.

gekozen (mits niet in één der dekpunten), waarna de pool van de andere involutie volkomen is bepaald.<sup>1)</sup> Als pool van de eerste involutie kan men dus  $K_1$  kiezen. Deze involutie zet  $Q_1$  om in  $Q_3'$ ; de andere involutie moet nu  $Q_3'$  omzetten in  $Q_1'$ , zodat haar pool op  $Q_1'Q_3'$  moet liggen. Daar  $Q_2$  door de beide involuties in  $Q_2'$  moet worden omgezet, moet de pool van de tweede involutie ook liggen op de lijn die het tweede snijpunt van  $Q_2K_1$  met de cirkel verbindt met  $Q_2'$ . Daardoor is deze pool  $K$  en daarmee de as der projectiviteit geheel bepaald.<sup>1)</sup> Overigens moet bij deze constructie één lijn meer worden getrokken, dan bij die van 3.

5. De in 3 genoemde verwantschap tussen de punten  $Q$  en  $Q'$  bezit ten hoogste 2 dekpunten, tenzij die verwantschap de identiteit is, d.w.z. elk punt van de cirkel aan zichzelf toevoegt, in welk geval elk punt van de cirkel dekpunt is. Hiertoe is nodig en voldoende, dat  $Q_1$  en  $Q_1'$ ,  $Q_2$  en  $Q_2'$ ,  $Q_3$  en  $Q_3'$  samenvallen. Dit geval doet zich klaarblijkelijk dan en slechts dan voor, als  $P_2$  de pool van  $P_1P_3$  en  $P_3$  de pool van  $P_1P_2$  ten opzichte van de cirkel is, dus, als  $P_1P_2P_3$  een pooldriehoek is van de cirkel. Er zijn in dat geval  $\infty^1$  driehoeken, die aan de vraag voldoen; als eerste hoekpunt van zo'n driehoek kan elk punt van de cirkel worden gekozen.

Opmerking verdient, dat, voor 't geval de verwantschap twee dekpunten heeft, de driehoeken, welke aan de vraag voldoen wel (hetzij één, hetzij beide) ontaard kunnen zijn. Deze omstandigheid doet zich bv. voor, als  $P_3S_1$  in  $S_1$  aan de cirkel raakt; men ziet direct, dat  $S_1$  nu één der gezochte dekpunten is. De bijbehorende driehoek heeft als zijlijnen de rechte  $P_1P_2$ , die dubbel telt, en de raaklijn in  $S_1$  aan de cirkel. Teneinde ons algemeen te kunnen uitdrukken, tellen we deze ontaarding en oplossingen mee.

6. Zoals reeds werd gezegd, is de in 3 besproken projectieve oplossing door alle inzenders behandeld. De Heer W. J. Reuvecamp Jr. geeft bovendien nog de volgende constructie, die ook berust op eigenschappen der projectieve meetkunde: Verbindt men een willekeurig punt  $Q$  van de cirkel met  $P_2$  en  $P_3$  en zijn  $R$  en  $S$  opv. de tweede snijpunten van de verbindingslijnen met de cirkel; dan zal  $RS$  een kegelsnede omhullen als  $Q$  de cirkel doorloopt.

<sup>1)</sup> Dr. F r e d S c h u h, *Idem*, blz. 445, vrgst. 1652; vgl. ook blz. 419.



Het vraagstuk komt dus neer op het construeren van de raaklijnen uit  $P_1$  aan deze kegelsnede. Daartoe denke men zich de genoemde kegelsnede bepaald door 5 raaklijnen, die te vinden zijn met behulp van evenzoveel standen van  $Q$ . Nu snijdt een veranderlijke raaklijn van de kegelsnede op 2 vaste raaklijnen, bv. op  $t_4$  en  $t_5$  projec-

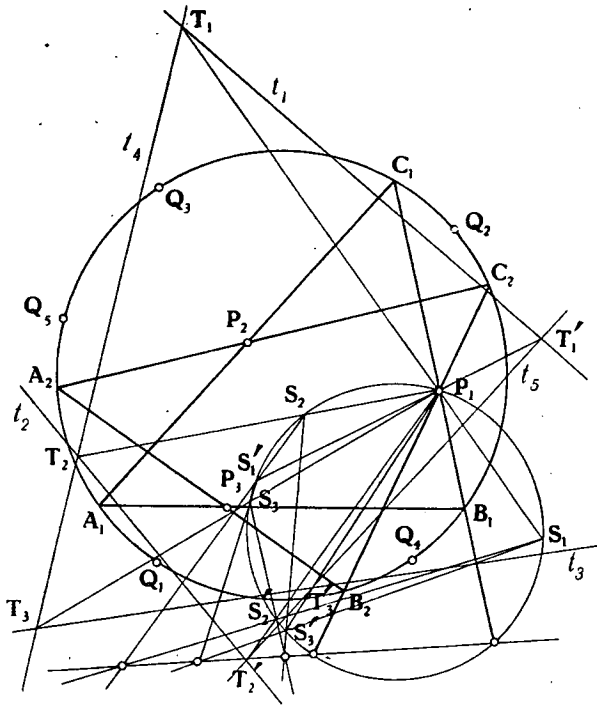


Fig. 2.

tieve puntenreeksen in. Door de punten dezer reeksen met  $P_1$  te verbinden krijgt men 2 collocale projectieve waaiers, waarvan de gemeenschappelijke stralen moeten worden geconstrueerd. Daar men drie paar toegevoegde stralen kent (nl. de verbindingslijnen van  $P_1$  met de snijpunten van  $t_1$ ,  $t_2$  en  $t_3$  met  $t_4$  en  $t_5$ ), kan deze constructie op de gebruikelijke wijze<sup>1)</sup> worden uitgevoerd; in fig. 2 is dit gedaan. Teneinde de figuur niet te overladen, zijn de verbindingslijnen van de punten  $Q_1$  t/m  $Q_5$  met  $P_2$  en  $P_3$  niet getrokken.

<sup>1)</sup> Dr H k. de Vries. *Beknopt leerboek der projectieve meetkunde*, Groningen 1923., blz. 105/106.

7. Teneinde een aantal verwante oplossingen uit één gezichtspunt te kunnen beschouwen, gaan we in het thans volgende enkele minder bekende stellingen omtrent inversies afleiden. Daarbij zullen we steeds de macht van  $P_k$  ( $k$  is een natuurlijk getal) t.o. van de cirkel  $(M)$  met  $\mu_k$  aanduiden. Verder geven we de inversie met  $P_k$  als centrum en  $\mu_k$  als macht met  $I_k$  aan. Is  $\triangle ABC$  een driehoek, die aan de vraag voldoet, dan is het duidelijk, dat het punt  $B$  in zichzelf wordt omgezet door de transformatie  $I_3 I_2 I_1$ . Is, omgekeerd,  $B$  een punt van cirkel  $(M)$ , dat door de genoemde transformatie in zichzelf overgaat, dan kan  $B$  dienst doen als hoekpunt van een driehoek, welke aan de vraag voldoet. Het vraagstuk komt dus neer op het bepalen van de op cirkel  $(M)$  gelegen dekpunten van de transformatie  $I_3 I_2 I_1$ .

We bewijzen nu allereerst:

*Stelling 1: Zijn  $I_1$  en  $I_2$  twee inversies, die geen gemeenschappelijk centrum hebben, dan is er een lijnspiegeling  $S$  en een inversie  $I$ , zodanig dat:  $I_2 I_1 = IS$ .*

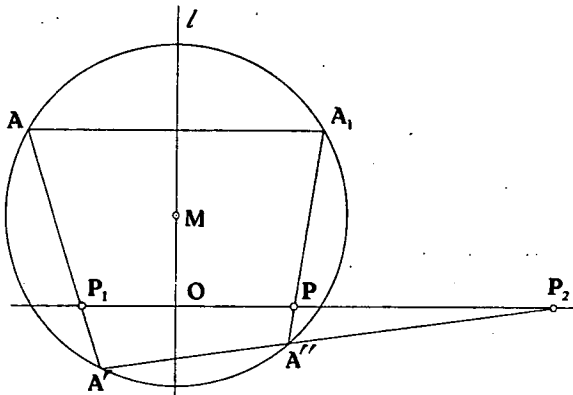


Fig. 3.

*Bewijs:* De centra van de gegeven inversies  $I_1$  en  $I_2$  en de gezochte inversie  $I$  duiden we aan met  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P$ , de machten met  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  en  $\mu$ , ( $\mu_1$  en  $\mu_2$  betekenen dus nu niet de machten van  $P_1$  en  $P_2$  t.o. van de in het werkstuk van Castillon gegeven cirkel). Een willekeurig punt  $A$  wordt door  $I_1$  omgezet in  $A'$ , terwijl  $A'$  door  $I_2$  overgaat in  $A''$  (fig. 3). Voorlopig nemen we aan, dat  $A$  niet op  $P_1 P_2$  ligt en ook niet op één der mogelijk aanwezige inversie-cirkels van  $I_1$  en  $I_2$ . De punten  $A$ ,  $A'$  en  $A''$  zijn dan niet collineair,

zodat men een cirkel met middelpunt  $M$  kan construeren, die door de genoemde punten gaat. De loodlijn  $l$  uit  $M$  op  $P_1P_2$  neergelaten, heeft  $O$  tot voetpunt. Zij nu  $r$  de straal van  $(M)$ ; dan geldt:

$$P_1M^2 = \mu_1 + r^2 \quad \text{en} \quad P_2M^2 = \mu_2 + r^2,$$

zodat:

$$OP_1^2 - OP_2^2 = P_1M^2 - P_2M^2 = \mu_1 - \mu_2,$$

of:

$$P_2O - OP_1 = \frac{\mu_1 - \mu_2}{P_1P_2}, \quad (1)$$

waarin, zoals in het volgende steeds het geval is, op de tekens der lijnstukken moet worden gelet. Hieruit volgt, in verband met:

$$P_2O + OP_1 = P_2P_1,$$

dat  $O$ , en dus ook  $l$ , niet afhangt van de keuze van  $A$ .

Zij  $A_1$  het spiegelbeeld van  $A$  in  $l$ ; het is duidelijk, dat  $A_1$  op  $M$  ligt. Het snijpunt van  $A_1A''$  en  $P_1P_2$  noemen we  $P$ ; vallen  $A_1$  en  $A''$  samen, dan verstaan we onder  $A_1A''$  de raaklijn in  $A_1$  aan  $(M)$  getrokken (de lezer kan zelf gemakkelijk nagaan, dat, in de gemaakte onderstellingen omtrent  $A$ , het niet mogelijk is, dat  $A_1A'' \parallel P_1P_2$  is). Daar nu  $\angle PP_1A' = \angle A_1AA' = \angle PA''P_2$ , zijn  $P, A'', A'$  en  $P_1$  concyclisch <sup>1)</sup>, zodat:

$$P_2P \times P_2P_1 = P_2A'' \times P_2A',$$

of:

$$P_2P \times P_2P_1 = \mu_2. \quad (2)$$

*Daaruit blijkt, dat  $P$  niet afhangt van de keuze van  $A$ .*

Zij  $\mu$  de macht van  $P$  t.o. van cirkel  $(M)$ . De stelling van Stewart, toegepast in  $\triangle MP_1P_2$  levert:

<sup>1)</sup> In dit bewijs is ondersteld, dat de onderlinge ligging van de hierin optredende punten en rechten in overeenstemming is met fig. 3. Bij andere ligging van de gegevens kan het bewijs enige verandering moeten ondergaan.

In de 8e druk van Dr. P. Molenbroek, Leerboek der Vlakke Meetkunde, wordt in § 130—132 uiteengezet en door voorbeelden toegelicht, hoe door invoering van een zeker hoekbegrip (de „schaar“, d.i. de gerichte hoek van twee rechten) in soortgelijke gevallen één bewijs kan worden gegeven, dat voor *elke* onderlinge ligging van de gegevens geldt. Hierdoor wordt het onderzoek overbodig gemaakt van de vele gevallen, die zich gewoonlijk bij dergelijke bewijzen kunnen voordoen en waarvan het aantal veelal zo groot en de behandeling zo lastig is, dat op de tot dusver gebruikelijke manier een afdoend bewijs zo goed als uitgesloten is.

$$P_1P_2 \times MP^2 + P_2P \times MP_1^2 + PP_1 \times MP_2^2 + \\ + P_1P_2 \times P_2P \times PP_1 = 0.$$

Daarvoor kan ook worden geschreven:

$$P_1P_2 \times (\mu + r^2) + P_2P \times (\mu_1 + r^2) + PP_1 \times (\mu_2 + r^2) + \\ + P_1P_2 \times P_2P \times PP_1 = 0,$$

of:

$$P_1P_2 \times \mu + P_2P \times \mu_1 + PP_1 \times \mu_2 + P_1P_2 \times P_2P \times PP_1 = 0.$$

Lettend op (2) vindt men hieruit:

$$P_1P_2 \times \mu + \frac{\mu_1 \mu_2}{P_2P_1} = 0,$$

zodat:

$$\mu = \frac{\mu_1 \mu_2}{P_1P_2^2} \quad (3)$$

Ook  $\mu$  is dus niet afhankelijk van de keuze van  $A$ .

Daarmee is gebleken, dat  $A''$  uit  $A$  kan worden gevonden, door  $A$  in  $l$  te spiegelen en het spiegelbeeld te inverteren met het door (2) bepaalde punt  $P$  als centrum en met de door (3) aangewezen macht  $\mu$ .

We dienen nog aan te tonen, dat dit ook doorgaat, als  $A$  op  $P_1P_2$  ligt. Is weer  $A_1$  het spiegelbeeld van  $A$  in  $l$ , dan moeten we dus aantonen, dat het punt  $A''$ , bepaald door de betrekkingen:

$$P_1A \times P_1A' = \mu_1 \quad (\alpha)$$

$$P_2A' \times P_2A'' = \mu_2 \quad (\beta)$$

samenvalt met het punt  $A_1'$ , bepaald door:

$$PA_1 \times PA_1' = \mu$$

Voor de laatstgenoemde gelijkheid kan worden geschreven:

$$(PP_2 + P_2O - OP_1 - P_1A) (PP_2 + P_2A_1') = \mu.$$

Na vermenigvuldiging van beide leden met  $P_1P_2^2$  kan hiervoor, lettend op (1), (2) en (3), ook worden gezet:

$$(\mu_1 - P_1A \times P_1P_2) (\mu_2 + P_2A_1' \times P_1P_2) = \mu_1 \mu_2,$$

hetgeen te herleiden is tot:

$$\mu_1 \times P_2A_1' - \mu_2 \times P_1A - P_1A \times P_2A_1' \times P_1P_2 = 0.$$

Wegens ( $\alpha$ ) gaat dit over in:

$$P_1A' \times P_2A_1' - \mu_2 - P_2A_1' \times P_1P_2 = 0$$

of:

$$P_2A' \times P_2A_1' = \mu_2.$$

Vergelijkt men dit met ( $\beta$ ), dan blijkt, dat  $A''$  en  $A_1'$  samenvallen. Het geval, dat  $A$  op één van de inversiecircels van  $I_1$  en  $I_2$  zou liggen, bezorgt geen verdere moeite. Onze stelling is dus hiermee bewezen.

8. We beschouwen thans de inversies  $I_1$ ,  $I_2$  en  $I_3$  met drie verschillende centra en machten  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  en  $\mu_3$ . Volgens 7 zijn een lijnspiegeling  $S_1$  en een inversie  $I_4$  zodanig te bepalen, dat  $I_2I_1 = I_4S_1$ . Daaruit volgt:

$$I_3I_2I_1 = I_3(I_4S_1) = (I_3I_4)S_1.$$

Er zijn nu twee gevallen mogelijk:

1.  $I_3 = I_4$ ; dan is  $I_3I_4$  de identieke transformatie en men heeft:  
 $I_3I_2I_1 = S_1$ .
2.  $I_3 \neq I_4$ ; dan kan men een lijnspiegeling  $S_2$  en een inversie  $I_5$  vinden, zodanig, dat  $I_3I_4 = I_5S_2$ . In dat geval geldt:

$$I_3I_2I_1 = (I_5S_2)S_1 = I_5(S_2S_1).$$

Ook nu kunnen zich weer twee gevallen voordoen:

- 2a.  $S_2 = S_1$ ; dan is  $S_2S_1$  de identiteit en men heeft:  $I_3I_2I_1 = I_5$ .
- 2b.  $S_2 \neq S_1$ ; daarbij kunnen zich weer twee gevallen voordoen:

$\alpha$ . De assen van  $S_1$  en  $S_2$  zijn evenwijdig. In dat geval is er een translatie  $T$ , zodanig, dat  $S_2S_1 = T$  en men heeft:  
 $I_3I_2I_1 = I_5T$ .

$\beta$ . De assen van  $S_1$  en  $S_2$  snijden elkaar. Dan is er een rotatie  $R$ , zodanig, dat  $S_2S_1 = R$ . In dit geval geldt:  
 $I_3I_2I_1 = I_5R$ .

De gevallen 1, 2a en 2b $\alpha$  kunnen zich slechts voordoen, als de centra der drie inversies collineair zijn. Men heeft dus:

*Stelling 2: Zijn de centra der inversies  $I_1$ ,  $I_2$  en  $I_3$  collineair, dan is  $I_3I_2I_1$ , gelijk aan  $S$ ,  $I$  of  $IT$ , waarbij  $S$  een lijnspiegeling,  $I$  een inversie en  $T$  een translatie is. Zijn de centra niet collineair, dan is  $I_3I_2I_1$  gelijk aan  $IR$ , waarin  $I$  een inversie en  $S$  een rotatie is. Hierbij zijn  $S, T, I$  en  $R$  voor elk geval afzonderlijk door  $I_1$ ,  $I_2$  en  $I_3$  volkomen bepaald.*

9. Bij het werkstuk van Cástillon hebben de verschillende spiegelingen, die, bij het vervangen van  $I_3 I_2 I_1$  door een andere transformatie, optreden, in elk geval het middelpunt  $M$  van de gegeven cirkel gemeen. Daardoor kan zich het geval  $2b_\alpha$  hier niet voordoen. In de gevallen 1 en  $2a$  zijn de dekpunten der transformatie zonder moeite te vinden. We hebben dus slechts het geval  $2b_\beta$  nader te onderzoeken.

Is  $X$  een dekpunt van de transformatie  $IR$  en is  $RX = X'$ , dan is  $PX \times PX' = \mu^1$ ). Nu is  $\mu$  de macht van  $P$  t.o. van de cirkel, die het rotatie-centrum  $M$  tot middelpunt en  $MX$  tot straal heeft (zie fig. 4). Daaruit volgt:  $\mu = PM^2 - MX^2$  en dus:  $MX^2 = PM^2 - \mu$ . We onderscheiden nu twee gevallen:

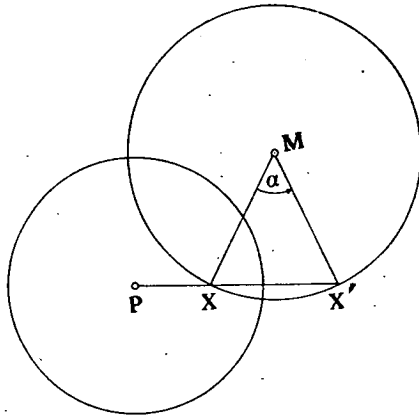


Fig. 4.

A.  $P$  en  $M$  vallen samen. Dan is  $PX^2 = -\mu$ , zodat er alleen reële dekpunten kunnen zijn, als  $\mu < 0$  is. De genoemde dekpunten zijn dan te zoeken op de cirkel met  $P$  als middelpunt en  $\sqrt{-\mu}$  tot straal. De punten van die cirkel zijn echter dan en alleen dan dekpunten, als de rotatiehoek  $180^\circ$  is.

B.  $P$  en  $M$  vallen niet samen. De betrekking  $MX^2 = PM^2 - \mu$  leert ons dan, dat de dekpunten gezocht moeten worden op een cirkel ( $M$ ) met het rotatie-centrum tot middelpunt, die de cirkel ( $P, \varrho$ ), waarin  $\varrho = \sqrt{|\mu|}$ , loodrecht snijdt ofwel halveert, al naar gelang  $\mu > 0$  of  $\mu < 0$  is.

<sup>1)</sup>  $P$  is het centrum en  $\mu$  de macht van de inversie  $I$ .

Zij  $r$  de straal van die cirkel  $(M)$ ; dan is:

$$r = \sqrt{PM^2 - \mu}. \quad (4)$$

Nodig en voldoende voor de bestaanbaarheid van cirkel  $(M, r)$ , is:

$$\mu \leq PM^2. \quad (5)$$

(Geldt het gelijktteken, dan ligt  $M$  op  $(P, \rho)$  en dan is  $M$  het enige dekpunt). Zij  $\alpha$  de rotatiehoek en  $r_1$  de lengte van de loodlijn uit  $M$  op  $XX'$  neergelaten; dan is:

$$r_1 = |r \cos \frac{1}{2} \alpha|. \quad (6)$$

Daaruit leest men af, dat het dekpunt  $X$  ligt op een raaklijn uit  $P$  aan de cirkel  $(M, r_1)$  getrokken. Het een en ander voert tot:

*Stelling 3: Valt het rotatie-centrum  $M$  niet met het centrum  $P$  der inversie samen, dan zijn de snijpunten van de cirkel  $(M, r)$  met de raaklijnen uit  $P$  aan cirkel  $(M, r_1)$  getrokken de dekpunten van de transformatie  $\mathbf{IR}$ , met dien verstande, dat slechts één der snijpunten op elk der raaklijnen dekpunt is; te weten: dat snijpunt, hetwelk door de rotatie  $\mathbf{R}$  in het andere op dezelfde raaklijn gelegen snijpunt overgaat. Voor 't geval  $\alpha = 180^\circ$ , moet  $PM$  als dubbel-tellende raaklijn worden beschouwd. De grootheden  $r$  en  $r_1$  worden bepaald door (4) en (6).*

De bedoelde dekpunten zijn slechts dan reëel, als (5) geldt en bovendien:

$$PM \geq r_1$$

is. Lettend op (4), (5) en (6) kan dit worden herleid tot:

$$\cos \alpha \leq \frac{PM^2 + \mu}{PM^2 - \mu} \quad (7)$$

Wegens  $\cos \alpha \geq -1$ , ligt (5) in (7) opgesloten. Derhalve is (7) de nodige en voldoende voorwaarde voor het reëel zijn der dekpunten.

**10.** Met behulp van het voorgaande komt men tot de volgende oplossing van het werkstuk van *Castillon*. We nemen daarbij eerst aan, dat  $P_1, P_2$  en  $P_3$  niet collineair zijn (zie fig. 5). Laat  $Q$  een willekeurig punt van cirkel  $(M)$  zijn (in fig. 5 is  $Q$  zo gekozen, dat  $P_1Q$  door  $P_3$  gaat, doch dit is bijzaak). Zij verder  $Q' = I_1Q$  en  $Q'' = I_2Q'$ . Het spiegelbeeld van  $Q$  in de loodlijn  $l_1$  uit  $M$  op  $P_1P_2$  neergelaten is  $Q_1$ , terwijl  $P_4$  het snijpunt is van

# PHYSISCHE SCHEIKUNDE

DOOR

DR. A. J. RUTGERS

HOOGLEERAAR TE GENT

UIT HET VOORBERICHT.

Bij het onderwijs dat ik aan de Rijksuniversiteit te Gent geef aan candidaten in de scheikunde, deed zich de behoefte aan een beknopt leerboek gevoelen.

Wegens het steeds verder doordringen van fysieke begrippen en methoden in de scheikunde scheen het mij wenschelijk, in dit boek aan de theoretische natuurkunde een grootere plaats in te ruimen, dan tot nu toe in werken over fysieke chemie gebruikelijk was.

Prijs van het complete boek, groot ruim 600 pag.'s  
f 12.50, geb. f 13.50 - Voor intekenaars op Noord-  
hoff's Wisk. Tijdschr. tijdelijk f 11.25, geb. f 12.25

UITGAVE P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN-BATAVIA  
OOK VERKRIJGBAAR DOOR BEMIDDELING VAN DE BOEKHANDEL



# INHOUD.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | Blz. |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Hoofdstuk 1. De toestandsvergelijking van het ideale gas . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                      | 1    |
| Hoofdstuk 2. Kinetische beschouwingen over gassen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                             | 7    |
| Hoofdstuk 3. Kinetische beschouwingen in verband met de bepaling van<br>het getal van Avogadro . . . . .                                                                                                                                                                                                                                | 29   |
| Hoofdstuk 4. De toestandsvergelijking van van der Waals . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                       | 48   |
| Hoofdstuk 5. Electriche en optische eigenschappen der moleculen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                               | 60   |
| Hoofdstuk 6. De vaste toestand . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 90   |
| Hoofdstuk 7. Klassieke theorie en quantumtheorie van de soortelijke<br>warmte van gassen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                      | 97   |
| Hoofdstuk 8. Quantumtheorie van de soortelijke warmte van den aether<br>(Stralingstheorie) . . . . .                                                                                                                                                                                                                                    | 114  |
| Hoofdstuk 9. De soortelijke warmte van vaste stoffen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                          | 121  |
| Hoofdstuk 10. De eerste hoofdwet der thermodynamica . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                           | 126  |
| Hoofdstuk 11. Thermochemie . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 142  |
| Hoofdstuk 12. De tweede hoofdwet der thermodynamica voor omkeerbare<br>toestandsveranderingen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                 | 148  |
| Hoofdstuk 13. De thermodynamische functies van Gibbs; gevolgtrek-<br>kingen uit het feit, dat $dS$ een totale differentiaal is . . . . .                                                                                                                                                                                                | 168  |
| Hoofdstuk 14. Thermodynamische behandeling, met behulp van kring-<br>processen, van de verzadigde dampspanning; van de oplosbaarheid;<br>van de wetten der verdunde oplossingen; van het concentratie-<br>element; electrochemie . . . . .                                                                                              | 183  |
| Hoofdstuk 15. Thermodynamische behandeling van het chemische gas-<br>evenwicht met behulp van het reactievat van van 't Hoff . . . . .                                                                                                                                                                                                  | 208  |
| Hoofdstuk 16. De tweede hoofdwet der thermodynamica voor onomkeer-<br>bare processen; voorwaarden voor het fysisch en chemisch even-<br>wicht; de fasenregel van Gibbs . . . . .                                                                                                                                                        | 218  |
| Hoofdstuk 17. Evenwicht in stelsels van één component, behandeld met<br>de methode der chemische potentialen; toestandsdiagrammen voor<br>enkelvoudige stoffen; onscherpe fasenovergangen . . . . .                                                                                                                                     | 242  |
| Hoofdstuk 18. Berekening van de chemische potentialen van de compo-<br>nenten van een mengsel van ideale gassen; toepassing op de affiniteit<br>van een gasreactie en op het chemisch gasevenwicht; het evenwicht<br>tusschen condensaat en damp van een enkelvoudige stof; eenige<br>numerieke thermodynamische berekeningen . . . . . | 251  |
| Hoofdstuk 19. Het warmtetheorema van Nernst . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 282  |
| Hoofdstuk 20. Algemeene eigenschappen van oplossingen; partieele<br>molaire grootheden. Ideale oplossingen; niet-ideale oplossingen. Werk-<br>zaamheid van uitwendige krachten; grensvlakverschijnselen . . . . .                                                                                                                       | 293  |
| Hoofdstuk 21. De theorie van Debije en Hückel over sterke electrolyten;<br>de theorie van de diffuse dubbellaag in de colloïdchemie . . . . .                                                                                                                                                                                           | 320  |
| Hoofdstuk 22. Het electrisch geleidingsvermogen van electrolytoplossingen . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                     | 349  |
| Hoofdstuk 23. De theorie van van der Waals over binaire vloeistof-<br>mengsels . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                | 359  |
| Hoofdstuk 24. Het evenwicht vast-vloeibaar in stelsels van twee en drie<br>componenten, behandeld met behulp van graphische methoden; het<br>adsorptie-evenwicht . . . . .                                                                                                                                                              | 379  |
| Hoofdstuk 25. Klassieke theoretische mechanica . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                | 393  |
| Hoofdstuk 26. Het atoommodel van Rutherford-Bohr; de quantumtheorie;<br>de verbodsregel van Pauli; de theorie van Bohr van het Periodiek<br>Systeem . . . . .                                                                                                                                                                           | 407  |
| Hoofdstuk 27. Elementaire theorie der bandspectra; de verschillende<br>soorten van chemische binding . . . . .                                                                                                                                                                                                                          | 440  |
| Hoofdstuk 29. Statistische berekening van de entropieconstante van<br>een één-atomig gas . . . . .                                                                                                                                                                                                                                      | 475  |
| Hoofdstuk 30. Reactiesnelheid . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 490  |
| Hoofdstuk 31. De atoomkern . . . . .                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 530  |

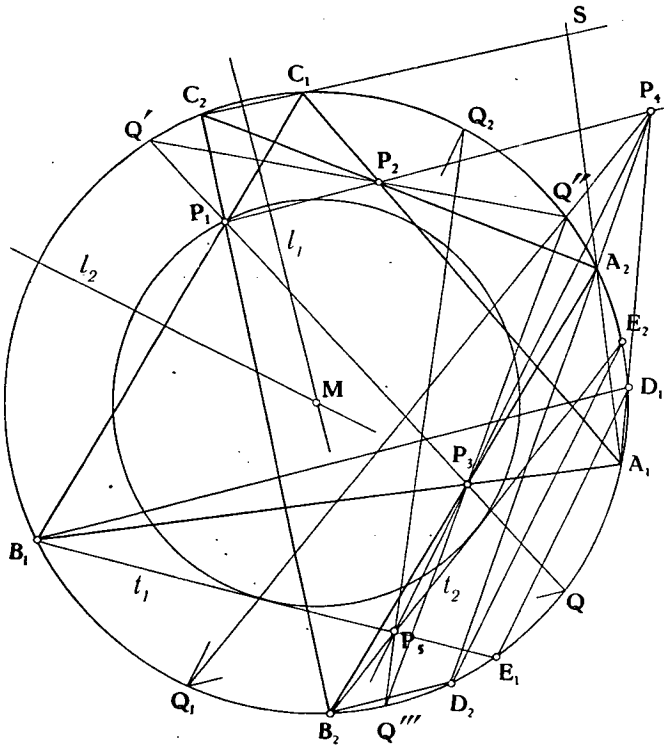


Fig. 5.

$P_1P_2$  met  $Q_1Q''$ . Geven we de spiegeling in  $l_1$  met  $S_1$  aan, dan is:  $I_2I_1 = I_4S_1$ . We stellen verder  $I_3Q'' = Q'''$  en noemen de spiegeling in de loodlijn  $l_2$  uit M op  $P_3P_4$  neergelaten  $S_2$ ; zij dan  $Q_2 = S_2Q_1$ .

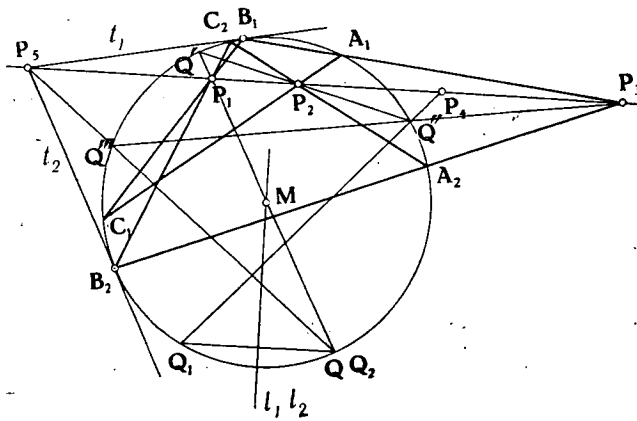


Fig. 6.

Is  $P_5$  het snijpunt van  $Q_2Q'''$  met  $P_3P_4$ , dan is  $I_3I_4 = I_5S_2$ , zodat  $I_3I_2I_1 = I_3I_4S_1 = I_5S_2S_1$ . Nu is  $S_2S_1$  een rotatie met  $M$  als centrum; is  $\varphi$  de hoek, waarover  $P_4P_1$  in goniometrisch positieve zin moet worden gedraaid, om met  $P_4P_5$  samen te vallen, dan heeft de rotatie  $R$  in goniometrisch positieve zin plaats over een hoek  $2\varphi^1$ ). De cirkel, die in *Stelling 3* met  $(M, r)$  werd aangeduid, is hier niets

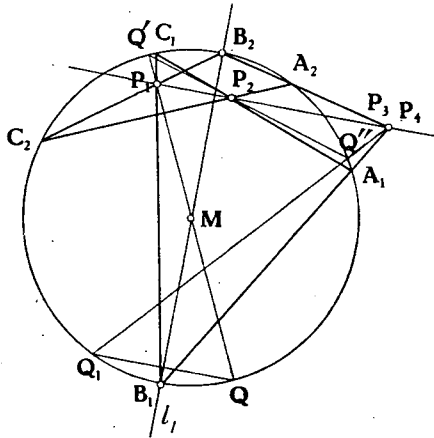


Fig. 7.

anders dan de gegeven cirkel  $M$ , terwijl de cirkel  $(M, r_1)$  uit genoemde stelling de cirkel is met  $M$  tot middelpunt, die aan  $QQ_2$  raakt. De raaklijnen  $t_1$  en  $t_2$  uit  $P_5$  aan deze cirkel getrokken, geven de gezochte dekpunten  $B_1$  en  $B_2$ . Daaruit verkrijgt men de driehoeken  $A_1B_1C_1$  en  $A_2B_2C_2$ , die aan de vraag voldoen.

In fig. 6 is de constructie uitgevoerd voor het geval, dat  $P_1, P_2$  en  $P_3$  collineair zijn; in dit geval is  $I_3I_2I_1 = I_5$ . De dekpunten zijn de raakpunten der raaklijnen uit  $P_5$  aan  $(M)$  getrokken.

Het geval  $I_3 = I_4$  is in fig. 7 geconstrueerd; dan is  $I_3I_2I_1 = S_1$ . De dekpunten zijn de snijpunten van  $l_1$  met cirkel  $(M)$ .

11. De wijze, waarop men van  $P_1$  tot  $P_5$  geraakt, zou ook aldus kunnen worden beschreven: Verbind een willekeurig punt  $Q'$  van  $(M)$  met  $P_1$  en  $P_2$  (zie fig. 5). Trek door het tweede snijpunt  $Q$  van  $Q'P_1$  met de cirkel een rechte evenwijdig aan  $P_1P_2$ , die de cirkel nog in  $Q_1$  snijdt. Verbind  $Q_1$  met het tweede snijpunt  $Q''$  van  $Q'P_2$  met de cirkel en bepaal het snijpunt  $P_4$  van  $P_1P_2$  en  $Q_1Q''$ .

<sup>1)</sup>  $P_4P_1$  en  $P_4P_5$  worden hierbij opgevat als volstralen.

Trek door  $Q_1$  een lijn evenwijdig aan  $P_3P_4$ , die de cirkel nogmaals in  $Q_2$  snijdt en verbind  $Q_2$  met het tweede snijpunt  $Q'''$  van  $Q''P_3$  met de cirkel. De laatste verbindingslijn snijdt  $P_4P_3$  in het gezochte punt  $P_5$ . De spiegellassen treden in deze beschrijving niet op.

12. Wanneer  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  niet collineair zijn kan zich bij de in 10 beschreven constructie de bijzonderheid voordoen, dat  $R$  een rotatiehoek van  $180^\circ$  heeft, terwijl  $P_5$  in  $M$  valt (fig. 8). Volgens

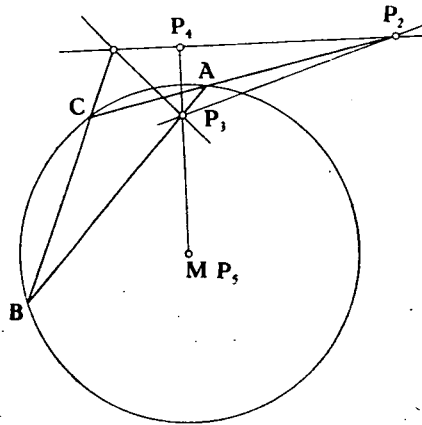


Fig. 8. <sup>1)</sup>

9 (geval A) zijn dan alle punten van cirkel (M) dekpunten van de transformatie  $I_3I_2I_1$ . Zullen, omgekeerd, alle punten van (M) dekpunten van de genoemde transformatie zijn, dan is het naar aanleiding van het voorafgaande duidelijk, dat  $P_5$  in  $M$  moet vallen, terwijl de rotatiehoek gelijk moet zijn aan  $180^\circ$ . Nu is de rotatiehoek dan en slechts dan  $180^\circ$ , als  $\varphi = 90^\circ$ , terwijl  $P_5$  dan en slechts dan in  $M$  valt, als  $P_4P_3$  door  $M$  gaat en als bovendien voldaan is aan:  $P_3P_4 \times P_3M = \mu_3$ . Voor de laatste betrekking kan ook worden geschreven:

$$(P_3M + MP_4) \times P_3M = P_3M^2 - r^2,$$

ofwel:

$$MP_3 \times MP_4 = r^2.$$

Hieruit is af te lezen, dat  $P_4$  het beeldpunt is van  $P_3$  bij de inversie met  $M$  als centrum en  $r^2$  als macht. Daar  $P_1P_2$  in  $P_4$  loodrecht op  $P_4M$  moet staan, kan men dit ook zo uitdrukken, dat  $P_1P_2$

<sup>1)</sup> In de fig. is de letter  $P_1$  bij het snijpunt van  $BC$  en  $P_2P_4$  vergeten.

de poollijn moet zijn van  $P_3$  t.o. van de cirkel  $(M)$ . Daarbij moet bovendien nog voldaan zijn aan:  $P_2P_4 \times P_2P_1 = \mu_2$  (zie fig. 8). Hiervoor kan ook worden geschreven:

$$P_2P_4 \times (P_2P_4 + P_4P_1) = P_2M^2 - r^2,$$

of:

$$P_2P_4 \times P_4P_1 = (P_2M^2 - P_2P_4^2) - r^2 = P_4M^2 - r^2 = \mu_4.$$

Daar nu:  $\mu_4 = P_4P_3 \times P_4M$ , gaat dit over in:

$$P_2P_4 \times P_4P_1 = P_4P_3 \times P_4M.$$

Volgens een elementaire eigenschap is dit de nodige en voldoende voorwaarde, dat  $M$  het hoogtepunt is van  $\triangle P_1P_2P_3$ . Dan is echter  $P_1P_2P_3$  een pooldriehoek van cirkel  $(M)$ . Daarmee is het resultaat van 5 langs andere weg gevonden.

In het volgende zullen we, zo niet anders wordt gezegd, steeds aannemen, dat  $P_1P_2P_3$  geen pooldriehoek is.

**13.** Uit de constructie in **10** volgt, dat het vraagstuk dan en slechts dan (reële) oplossingen heeft, als:

$$P_5M \geq r_1.$$

(Geldt het gelijktteken, dan voldoen 2 samenvallende driehoeken).

Men ziet gemakkelijk, dat deze voorwaarde gelijkwaardig is met:

$$4\mu_5 + QQ_2^2 \geq 0,$$

of:

$$\mu_5 - r^2 \sin^2 \varphi \geq 0.$$

Wegens (3) heeft men:

$$\mu_4 = \frac{\mu_1 \mu_2}{P_1P_2^2} \text{ en } \mu_5 = \frac{\mu_3 \mu_4}{P_3P_4^2}$$

zodat:

$$\mu_5 = \frac{\mu_1 \mu_2 \mu_3}{P_1P_2^2 \times P_3P_4^2}. \quad (8)$$

Daardoor wordt de voorwaarde:

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 + r^2 P_1P_2^2 \times P_3P_4^2 \sin^2 \varphi \geq 0.$$

Is  $O$  de oppervlakte van  $\triangle P_1P_2P_3$ , dan kan hiervoor ook worden geschreven:

$$\mu_1 \mu_2 \mu_3 + 4r^2 O^2 \geq 0. \quad (9)$$

Dit geldt ook nog, als  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  collineair zijn; in (9) moet men dan  $O = 0$  nemen, terwijl men bovendien moet bedenken, dat het gelijktteken moet vervallen. (Immers uit  $\mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0$  zou volgen,

dat een der gegeven punten op (M) ligt, hetgeen tegen de onderstelling is).

Samenvattend heeft men dus:

*De nodige en voldoende voorwaarde voor het bestaan van driehoeken, die aan de vraag voldoen, is de ongelijkheid (9), met dien verstande, dat daarin het teken „groter dan” moet gelden, indien de gegeven punten in één rechte liggen.*

14. Uit (9) kan men aflezen:

*Zijn  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  collineair, dan zijn er dan en slechts dan 2 driehoeken, die aan de vraag voldoen, als van de genoemde punten een oneven aantal buiten cirkel (M) ligt.*

Zonder berekening is overigens direct in te zien, dat er zeker geen driehoek aan de vraag voldoet, als er een even aantal van de gegeven punten buiten de cirkel ligt.

*Zijn  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  niet collineair en ligt van deze punten een oneven aantal buiten cirkel M, dan voldoen er 2 driehoeken (die ook kunnen samenvallen) aan de vraag.*

Ligt in dit geval een even aantal der punten buiten de cirkel, dan voldoen er dan en slechts dan driehoeken aan de vraag, indien aan (9) is voldaan.

15. De nauwkeurige beschouwing van fig. 5 leert ons, dat de gegeven constructie ook nog anders kan worden opgevat. We onderstellen voorlopig, dat  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  niet collineair zijn. Daar  $\mathbf{l}_2\mathbf{l}_1\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i$  en  $\mathbf{l}_2\mathbf{l}_1 = \mathbf{l}_4\mathbf{S}_1$ , is ook  $\mathbf{l}_4\mathbf{S}_1\mathbf{B}_i = \mathbf{A}_i$ , of  $\mathbf{l}_4\mathbf{D}_i = \mathbf{A}_i$ . Hierin is  $\mathbf{D}_i$  het spiegelbeeld van  $\mathbf{B}_i$  in  $\mathbf{l}_1$ , dus  $\mathbf{B}_i\mathbf{D}_i \parallel \mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ . Men kan een en ander ook zo uitdrukken, dat  $\mathbf{A}_i\mathbf{D}_i$  door  $\mathbf{P}_4$  gaat, als  $\mathbf{D}_i$  voorstelt het tweede snijpunt met de cirkel van de rechte door  $\mathbf{B}_i$  evenwijdig aan  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$  getrokken. Verder is  $\mathbf{l}_3\mathbf{l}_4\mathbf{D}_i = \mathbf{B}_i$ , zodat ook:  $\mathbf{l}_5\mathbf{S}_2\mathbf{D}_i = \mathbf{B}_i$ , of:  $\mathbf{S}_2\mathbf{D}_i = \mathbf{l}_5\mathbf{B}_i$ . Nu is  $\mathbf{l}_5\mathbf{B}_i = \mathbf{E}_i$  het van B verschillende snijpunt van  $t_i$  met cirkel (M). Derhalve is  $\mathbf{S}_2\mathbf{D}_i = \mathbf{E}_i$ , hetgeen beduidt, dat  $\mathbf{D}_i\mathbf{E}_i \parallel \mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$ . In  $\triangle \mathbf{B}_i\mathbf{D}_i\mathbf{E}_i$  heeft men dus een driehoek, waarvan twee zijlijnen evenwijdig zijn met de rechten  $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$  en  $\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4$ , terwijl de andere zijlijn door  $\mathbf{P}_5$  gaat. Zijn dus  $\mathbf{P}_4$  en  $\mathbf{P}_5$  eenmaal gevonden, dan komt de verdere constructie neer op het oplossen van het vraagstuk:

*Construeer in een gegeven cirkel een driehoek, waarvan twee zijlijnen evenwijdig zijn aan gegeven rechten, terwijl de derde zijlijn door een gegeven punt gaat. Dit is een speciaal geval van de*

oorspronkelijke opgave, nl. dat, waarbij twee der gegeven punten oneigenlijk zijn. De in 10 gegeven constructie kan dus eenvoudig worden opgevat als het terugbrengen van de opgave tot een bijzonder geval, dat gemakkelijker kan worden opgelost. De rol van cirkel  $(M, r_1)$  uit *Stelling 3* is daarbij duidelijk genoeg. Immers, construeert men in cirkel  $(M)$  driehoeken, waarvan twee zijlijnen evenwijdig zijn aan de gegeven rechte, dan omhult de derde zijlijn dezer driehoeken een cirkel en deze is het, die we vroeger  $(M, r_1)$  noemden. Liggen  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  op één rechte, dan is het vraagstuk op deze wijze terug te brengen tot:

*Construeer in een gegeven cirkel een driehoek, waarvan één zijlijn evenwijdig is aan een gegeven rechte, terwijl de andere zijlijnen elk door een gegeven punt gaan.*

16. De in 15 beschreven oplossingsmethode is gevolgd door de Heren A. Adriaanse, W. J. Reuvecamp Jr. en Ir. J. J. Tekelenburg. Bij het bepalen van de punten  $P_4$  en  $P_5$  (het enige, waar het ten slotte op aan komt) maken deze Heren alle gebruik van de betrekking (2), die voor  $P_4$  luidt:

$$P_2P_4 \times P_2P_1 = \mu_2, \quad (2a)$$

terwijl ze voor  $P_5$  overgaat in:

$$P_3P_5 \times P_3P_4 = \mu_3. \quad (2b)$$

De genoemde inzenders leiden deze betrekkingen af op dezelfde wijze als dit in 7 voor de betrekking (2) is gedaan.

De Heer Reuvecamp construeert de punten  $P_4$  en  $P_5$  op de volgende aardige manier: Beschrijf met middelpunt  $P_2$  en met straal  $P_2P_1$  een cirkelboog, die de gegeven cirkel in  $F$  snijdt; bepaal het tweede snijpunt van  $P_2F$  met de cirkel. Zij dit  $G$ ; beschrijf dan een cirkelboog met  $P_2G$  tot straal en  $P_2$  als middelpunt. Deze snijdt  $P_1P_2$  in twee punten, waarvan één het punt  $P_4$  is. Welk der beide punten men hebben moet, blijkt, door erop te letten, dat (2a) moet gelden met inachtneming der tekens. Op analoge wijze vindt men  $P_5$ .

17. In fig. 5 heeft men:  $B_1E_1 = B_2E_2$ ; daaruit volgt:  $bg B_1B_2 = bg E_1E_2$ , zodat  $\angle B_1P_5B_2 = bg B_1B_2 = \angle B_1MB_2$ . Derhalve is  $B_1B_2P_5M$  een koordenvierhoek. De punten  $B_1$  en  $B_2$  zijn dus blijkaar de snijpunten van cirkel  $(M)$  met de omgeschreven cirkel  $(O)$  van die koordenvierhoek. Van deze cirkel is punt  $M$  bekend,

terwijl  $P_5$  kan worden geconstrueerd. Wanneer we nu nog een gemakkelijk te construeren punt van cirkel (O) kunnen aangeven, dan is daarmee de weg gewezen tot een derde oplossing van het vraagstuk. Daar  $P_1$  en  $P_3$  met betrekking tot  $B_1$  en  $B_2$  dezelfde rol spelen, ligt het voor de hand, dat het punt  $P_7$ , dat uit  $P_3$  wordt afgeleid op analoge wijze, als waarop  $P_5$  uit  $P_1$  is verkregen, op cirkel (O) zal liggen. Met  $P_7$  is daarbij dus bedoeld het punt, dat voldoet aan:  $P_7 = I_1 I_2 P_3 = I_1 P_6$ . (Dit is analoog aan:  $P_5 = I_3 I_2 P_1 = I_3 P_4$ ). Dat  $P_7$  inderdaad op de genoemde cirkel ligt, blijkt als volgt: Het is duidelijk, dat de dubbelpunten van de transformatie  $I_1 I_2 I_3$  gezocht moeten worden in de snijpunten van de raaklijnen uit  $P_7$  aan cirkel  $(M, r_2)$  getrokken met cirkel (M). Daarbij is  $r_2 = |r \cos \psi|$ , terwijl  $\psi$  de hoek is, waarover  $P_6 P_3$  in goniometrisch positieve zin moet draaien, om met  $P_6 P_7$  samen te vallen. Dit is niets anders dan *Stelling 3*, toegepast op het product  $I_1 I_2 I_3$ ; volgens die stelling zijn slechts twee der genoemde snijpunten dekpunten. Daar de transformaties  $I_1 I_2 I_3$  en  $I_3 I_2 I_1$  elkaars inverse zijn, hebben ze dezelfde dekpunten. De raaklijnen uit  $P_7$  aan cirkel  $(M, r_2)$  zijn dus  $P_7 B_1$  en  $P_7 B_2$ . Op dezelfde wijze als in de aanvang van dit nummer voor  $P_5$  is gedaan, kan nu dus weer worden aangetoond, dat  $P_7$  ligt op de cirkel door  $B_1$ ,  $B_2$  en M, d.i. op cirkel (O). Dit voert tot de volgende constructie: (zie fig. 9). Bepaal het punt  $P_4$ , waarin  $P_1$  overgaat door de inversie  $I_2$ , alsmede het punt  $P_6$ , waarin  $P_3$  overgaat door de inversie  $I_3$ . Construeer verder  $P_6 = I_2 P_3$  en  $P_7 = I_1 P_6$ .

De omgeschreven cirkel van  $\triangle P_5 M P_7$  snijdt nu op cirkel M twee punten  $B_1$  en  $B_2$  in, die dienst kunnen doen als hoekpunt van een driehoek, die aan de vraag voldoet. De punten  $P_4$  t/m  $P_7$  zijn in fig. 9 op de in **16** aangegeven wijze gevonden. Om de figuur niet te overladen, zijn evenwel de constructielijnen weggelaten, terwijl slechts een der driehoeken, die voldoen, is aangegeven.

**18.** Eén der inzenders, de Heer G. J. J. V e l t k a m p lost het vraagstuk eveneens met behulp van inversie op en wel op de volgende manier: Bepaal het punt  $M_3 = I_3 I_2 I_1 M$  en neem aan, dat  $\triangle ABC$  aan de vraag voldoet. Op de rechte  $M_3 B$  passen we nu de inversie  $I_3$  toe; we krijgen dan als inverse figuur een cirkel of rechte gaande door  $P_3$ ,  $M_2$  en A. Op deze figuur passen we de inversie  $I_2$  toe, waardoor zij overgaat in een cirkel of een rechte



door  $P_6$ ,  $M_1$  en  $C$ . Hierop passen wij nu de inversie  $I_1$  toe, waardoor we een cirkel of een rechte door  $P_7$ ,  $M$  en  $B$  vinden. Deze laatste figuur gaan we ten slotte inverteren met  $M$  als centrum en  $r^2$  als macht; ze gaat dan over in de rechte  $P_7'B$ , indien  $P_7'$  het beeldpunt is van  $P_7$  bij de laatstgenoemde inversie. We komen dus

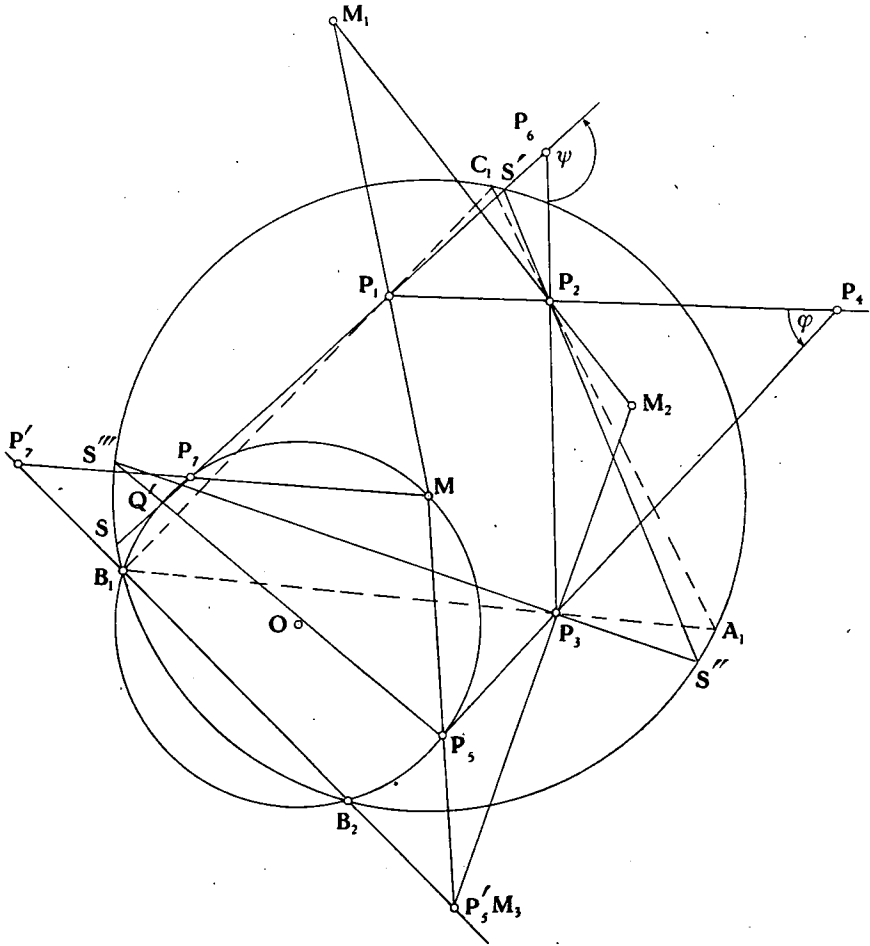


Fig. 9.

tot de slotsom, dat de rechte  $M_3B$  door de bovenstaande vier inversies overgaat in de rechte  $P_7'B$ . De cirkel  $(M)$  wordt door deze vier inversies in zichzelf omgezet.

Beschouwen we nu de hoek tussen  $M_3B$  en cirkel  $(M)$ , deze verandert bij elk der genoemde inversies alleen van teken. Daaruit

PROSPEKT

# DIFFERENTIALGEOMETRIE

DER KURVEN UND FLÄCHEN

UND

## TENSORRECHNUNG

VON

UNIVERSITÄTSPROFESSOR

PH. DR. VÁCLAV HLAVATÝ  
IN PRAG

AUTORISIERTE ÜBERSETZUNG

VON

UNIVERSITÄTSDOZENT

DR. PHIL. MAX PINL  
IN PRAG

**f. 14.00**

**Geb. f. 15.50**

Voor intekenaars op Noordhoffs Wisk.  
Tijdschriften tijdelijk f 12.50, geb. f 14.00

P. NOORDHOFF N.V. — 1939 — GRONINGEN—BATAVIA

*In de boekhandel verkrijgbaar en bij  
N.V. Uitgevers Mij. Noordhoff—Kolff,  
Laan Holle 7 — Batavia-C.*

# INHALT.

## KURVENTHEORIE.

### KAPITEL I.

#### Grundlehren über ebene und räumliche Kurven.

##### I. ABSCHNITT.

##### Kurven in allgemeiner Parameterdarstellung.

|                                                     | Seite |
|-----------------------------------------------------|-------|
| § 1. Das Rechnen mit Raumvektoren .....             | 1     |
| § 2. Definition einer Kurve und Grundbegriffe ..... | 12    |
| § 3. Transformationen .....                         | 16    |
| § 4. Tangente, Schmieg Ebene ..                     | 18    |
| § 5. Das begleitende Dreiein ..                     | 26    |

##### II. ABSCHNITT.

##### Kurven in Bogenparameterdarstellung.

|                                                      | Seite |
|------------------------------------------------------|-------|
| § 1. Frenetsche Formeln .....                        | 39    |
| § 2. Berührung von Kurven ....                       | 46    |
| § 3. Schmiegkugel .....                              | 54    |
| § 4. Bertrandsche Kurvenpaare, Böschungskurven ..... | 60    |
| § 5. Evoluten und Evolventen ..                      | 67    |
| § 6. Natürliche Kurvengleichungen .....              | 71    |
| § 7. Minimalkurven .....                             | 80    |

## FLÄCHENTHEORIE.

### KAPITEL II.

#### Die erste Grundform und ihre Anwendungen.

##### I. ABSCHNITT.

##### Definition einer Fläche. Einparametrische Flächenscharen.

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| § 1. Grundbegriffe .....                   | 85  |
| § 2. Transformationen .....                | 92  |
| § 3. Singuläre Punkte .....                | 95  |
| § 4. Tangentialebene .....                 | 98  |
| § 5. Einparametrische Flächenscharen ..... | 103 |

##### II. ABSCHNITT.

##### Die erste Grundform einer Fläche.

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| § 1. Formale Vorbemerkungen     | 112 |
| § 2. Tensoralgebra: Vektoren .. | 115 |

|                                            |     |
|--------------------------------------------|-----|
| § 3. Tensoralgebra: Tensoren ..            | 121 |
| § 4. Der metrische Fundamentaltensor ..... | 125 |
| § 5. Der Tensor $a^{\lambda\nu}$ .....     | 128 |
| § 6. Winkel zweier Vektoren ..             | 133 |
| § 7. Die Diskriminante $A$ ....            | 137 |
| § 8. Anwendungen .....                     | 140 |
| § 9. Orthogonale Kurvenkongruenzen .....   | 142 |
| § 10. Erster Differentialoperator          | 150 |
| § 11. Geodätische Parallele ....           | 157 |

##### III. ABSCHNITT.

##### Konforme Abbildung.

|                        |     |
|------------------------|-----|
| § 1. Kurvennetze ..... | 161 |
|------------------------|-----|

|                               | Seite |
|-------------------------------|-------|
| § 2. Konforme Abbildung. .... | 169   |
| § 3. Anwendungen .....        | 175   |

#### IV. ABSCHNITT.

##### Das absolute Differential.

|                                                     |     |
|-----------------------------------------------------|-----|
| § 1. Christoffelsymbole .....                       | 181 |
| § 2. Tschebyscheffnetze .....                       | 189 |
| § 3. Das absolute Differential ..                   | 191 |
| § 4. Das absolute Differential<br>Fortsetzung ..... | 200 |

#### V. ABSCHNITT.

##### Flächenkurven.

|                                                        |     |
|--------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Geodätische Kurven. ....                          | 211 |
| § 2. Kurvenkongruenzen und<br>geodätische Kurven ..... | 217 |
| § 3. Geodätische Kurven und<br>Flächen. ....           | 221 |
| § 4. Allgemeine Flächenkurven. .                       | 228 |
| § 5. Geodätische Krümmung ...                          | 239 |
| § 6. Besondere Parametersysteme .....                  | 245 |

Seite

#### VI. ABSCHNITT.

##### Das Gaußsche Krümmungsmaß.

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| § 1. Kovariante Ableitung .....                | 254 |
| § 2. Zweiter Differentialoperator              | 257 |
| § 3. Das Gaußsche Krümmungs-<br>maß. ....      | 264 |
| § 4. Krümmungsmaß und Flä-<br>chenkurven ..... | 268 |
| § 5. Satz von Bonnet .....                     | 275 |

#### VII. ABSCHNITT.

##### Wechselseitig auf einander abwickelbare Flächen.

|                                                   |     |
|---------------------------------------------------|-----|
| § 1. Das Problem der Abwickel-<br>barkeit .....   | 281 |
| § 2. Konstantes Krümmungs-<br>maß. ....           | 287 |
| § 3. Abwickelbare Flächen .....                   | 295 |
| § 4. Abwicklung auf die Ebene                     | 299 |
| § 5. Abwicklung auf Drehflächen                   | 304 |
| § 6. Das allgemeine Abwicklungs-<br>problem ..... | 309 |

### KAPITEL III.

#### Die zweite Grundform und ihre Anwendungen.

##### I. ABSCHNITT.

##### Die zweite Grundform einer Fläche.

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| § 1. Die Flächennormale .....           | 314 |
| § 2. Der zweite Fundamentaltensor ..... | 319 |
| § 3. Die Skalare $K$ und $H$ . ....     | 325 |
| § 4. Grundgleichungen. ....             | 330 |
| § 5. Sphärische Abbildung .....         | 340 |
| § 6. Tangentialkoordinaten .....        | 348 |

##### II. ABSCHNITT.

##### Ausgezeichnete Richtungen auf einer Fläche. Kurven auf einer Fläche und im Raume.

|                                                 |     |
|-------------------------------------------------|-----|
| § 1. Hauptrichtungen. ....                      | 350 |
| § 2. Kreispunkte .....                          | 355 |
| § 3. Normalkrümmung einer<br>Flächenkurve ..... | 360 |
| § 4. Die Dupinsche Indikatrix. .                | 370 |

##### III. ABSCHNITT.

##### Ausgezeichnete Flächenkurven.

|                                               |     |
|-----------------------------------------------|-----|
| § 1. Geodätische Torsion. ....                | 377 |
| § 2. Konjugierte Kurven. ....                 | 385 |
| § 3. Hauptkurven (Krümmungs-<br>linien) ..... | 389 |
| § 4. Hauptkurven. (Fortsetzung)               | 401 |
| § 5. Asymptotenkurven. ....                   | 406 |
| § 6. Anwendungen .....                        | 412 |

##### IV. ABSCHNITT.

##### Flächenkonstruktionen.

|                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 1. Das sphärische Bild kon-<br>jugierter Kurven. ....                      | 417 |
| § 2. Das sphärische Bild der<br>Asymptotenkurven. ....                       | 421 |
| § 3. Bonnet's Flächenkonstruk-<br>tion .....                                 | 426 |
| § 4. Flächenkonstruktion mit<br>Hilfe des Tensors $\alpha_{\lambda\mu}$ .... | 429 |

# KAPITEL IV. Besondere Flächen.

|                                                            | Seite |                                                                                     | Seite |
|------------------------------------------------------------|-------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>I. ABSCHNITT.</b>                                       |       | <b>III. ABSCHNITT.</b>                                                              |       |
| <b>Geradlinige Flächen.</b>                                |       | <b>Minimalflächen.</b>                                                              |       |
| § 1. Der Tensor $a_{\omega\mu\lambda}$ .....               | 435   | § 1. Definition und Grundeigen-<br>schaften .....                                   | 501   |
| § 2. Definition geradliniger Flä-<br>chen. ....            | 438   | § 2. Die Minimalkurven auf einer<br>Minimalfläche .....                             | 507   |
| § 3. Erster Fundamentaltensor                              | 440   | § 3. Assoziierte und adjungierte<br>Flächen. ....                                   | 512   |
| § 4. Kehllinie. ....                                       | 445   | § 4. Das sphärische Bild einer<br>Minimalfläche .....                               | 519   |
| § 5. Der Drall .....                                       | 452   | § 5. Das Schwarzsche Problem.                                                       | 526   |
| § 6. Tangentialebene .....                                 | 457   |                                                                                     |       |
| § 7. Asymptotenkurven .....                                | 462   |                                                                                     |       |
| § 8. Abwicklung geradliniger<br>Flächen auf einander ..... | 465   |                                                                                     |       |
| <b>II. ABSCHNITT.</b>                                      |       | <b>IV. ABSCHNITT.</b>                                                               |       |
| <b>Weingartensche Flächen und andere.</b>                  |       | <b>Sphärische und pseudosphärische Flä-<br/>chen. Mongesche Flächen und andere.</b> |       |
| § 1. Parallellflächen. ....                                | 472   | § 1. Sphärische Flächen .....                                                       | 532   |
| § 2. Evoluten. (Zentralflächen) .                          | 478   | § 2. Pseudosphärische Flächen .                                                     | 536   |
| § 3. W-Flächen .....                                       | 486   | § 3. Flächen mit einer Kongru-<br>enz ebener Hauptkurven ..                         | 540   |
| § 4. Schiebflächen. ....                                   | 498   | § 4. Flächen mit zwei Kongruen-<br>zen ebener Hauptkurven ..                        | 552   |
| Register .....                                             |       | 561                                                                                 |       |

Die Veröffentlichung dieser deutschen Uebersetzung macht auch uns das Lehrbuch der Differentialgeometrie von V. Hlavatý zugänglich, dem Prager Universitätslehrer, der als tätiger und fruchtbarer Bearbeiter der neuen differentialgeometrischen Gebiete bekannt ist.

Hier handelt es sich indes um die *klassische* Differentialgeometrie, d.h. die metrische Theorie der Kurven und Flächen im gewöhnlichen Raum. Und es handelt sich auch um eine umfang- und inhaltsreiche, aber elementare Darstellung, die beim Leser nur die Kenntnis der gewöhnlichen analytischen Geometrie des Raumes (und der Infinitesimalrechnung) voraussetzt. Als Werkzeug für die Auseinandersetzung und Untersuchung benutzt Verfasser die Vektorrechnung und in der Flächentheorie in Verbindung mit krummlinigen Bezugssystemen auf einer Fläche die Tensorrechnung von Ricci.

Das Werk von Hlavatý ist ausführlich und wohlgeordnet nach Anlage und Darstellung. Zahlreiche Beispiele und Nebenresultate (die nicht selten neu sind oder doch wenigstens zum erstenmale in einem Lehrbuch auftreten) erläutern zweckmässig die allgemeine Theorie und verdeutlichen sie an konkreten Fällen, ohne dass dabei der rote Faden der Entwicklung verloren geht. Er vermehrt so in nützlicher Weise die Reihe der Lehrbücher, die geeignet sind, für dieses Gebiet eine gute Grundlage und Einführung abzugeben.

Der Verfasser trägt dazu, in den allgemeinen Gesichtspunkten und auch in der Auswahl und Anordnung der auseinandergesetzten Begriffe und Ergebnisse, eine ausgesprochen persönliche Note bei: die Note eines praktischen, wirklichkeitsnahen Geistes, der andererseits hervorragend zu organisieren und analysieren versteht.

Zusammenfassend sei gesagt: Das Werk entspricht ausgezeichnet den vorwiegend didaktischen Zielen, die es verfolgt. Seine Lektüre, mit der gleichen unermüdlichen Geduld unternommen, mit der Verfasser den Weg vorgezeichnet hat, wird von unzweifelhaftem Nutzen für jeden sein, der die Differentialgeometrie und ihre modernen Forschungsmethoden kennen lernen will.

(E. BORTOLOTTI).

## VORWORT DES ÜBERSETZERS.

Als mir der ehrenvolle Auftrag erteilt wurde, die Redaktion der vorliegenden Übersetzung zu übernehmen, gemahnte mich die Lektüre des Originaltextes mehrfach an ein berühmtes Buch: H. Weyls „Raum-Zeit-Materie“ (Berlin, 1923 in 5. Auflage bei J. Springer).

Je größer die Gefahr einer trockenen und langweiligen Manier für eine deduktive und streng systematische Darstellung eines wissenschaftlichen Gebietes ist, desto größer der Reiz, wenn es trotzdem gelingt, diese Klippen zu vermeiden. Nun gar im Falle eines Lehrbuchs für geometrisch interessierte Studierende mittlerer Semester! Hier galt es drei Dinge unter einen Hut zu bringen: Formalismus, Pädagogik und geometrischen Inhaltsreichtum.

Der deduktiv-systematischen Leitmotive halber konnte der Formalismus des Vektor- und insbesondere der des Tensorkalküls unmöglich in einen rückwärtigen „Anhang“ verbannt werden. Er mußte vielmehr stets (vornehmlich im zweiten Kapitel) in den näheren Vordergrund gestellt werden. Offensichtlich gewinnt der formale Apparat des Tensorkalküls pädagogisch sympathischere Züge, wenn man ihn in wohlbegrenzten Dosen verteilt. Deshalb (und immer natürlich auch aus systematischen Gründen-Verweilen auf nullter bzw. erster Differenzierungsstufe der Flächenmetrik) wurde die Entwicklung des Tensorkalküls im zweiten Kapitel zweimal absichtlich unterbrochen (durch den dritten und fünften Abschnitt). Es sollte sofort gezeigt werden, wozu der entwickelte Formalismus benötigt wird und was er zu leisten

vermag. Dabei wird mit Christoffelsymbolen einerlei Art  $\left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \lambda \mu \end{smallmatrix} \right\}$  operiert, was man wohl auch als eine Vereinfachung der Symbolik ansehen kann. Die Indexstellung wurde dem Weylschen Muster angepaßt  $\left( \left\{ \begin{smallmatrix} \nu \\ \lambda \mu \end{smallmatrix} \right\} \right)$  an Stelle von  $\left\{ \begin{smallmatrix} \lambda \mu \\ \nu \end{smallmatrix} \right\}$ , dagegen am Klammersymbol festgehalten, da Weyls Dreizeigersymbole  $\Gamma_{\lambda\mu}^{\nu}$  in der Fachliteratur einem allgemeineren Falle vorbehalten worden sind.

Das zweite Kapitel des Buches, mit welchem die Flächentheorie beginnt, ist, wie der Kenner sogleich bemerkt, von der Tendenz beherrscht, von der Existenz eines dreidimensionalen euklidischen Einbettungsraumes für die in Rede stehenden Flächen weitgehendst zu

abstrahieren. Ein solches Programm restlos durchzuführen, wird wohl stets aus pädagogischen Gründen unmöglich sein. Gleichwohl ist es gelungen, den Begriff des Gaußschen Krümmungsmaßes vor dem der Flächennormalen einzuführen, da die entsprechend präparierte Kenntnis der sgn. kovarianten Differentiation auf dem Wege über ein bekanntes Lemma von Ricci dazu auf wenigen Zeilen Gelegenheit bietet. Dagegen mußten wegen der wiederholten Verwendung des Radiusraumvektors  $r(\xi)$  der Punkte einer Fläche gewisse „Residuen“ der Vorstellung eingebetteter Flächen auch im zweiten Kapitel des Buches erhalten bleiben. Um die hier wichtigen Begriffsunterschiede dauernd zu distanzieren, wurden stets „Vektoren“ und „Raumvektoren“ unterschieden. Insbesondere erscheinen so im ersten Kapitel des Buches, welches der Kurventheorie gewidmet ist, lediglich „Raumvektoren“ (auch hier „Vektoren auf der Kurve“, d.h. also (einkomponentige!) Tangentenvektoren zu unterscheiden, würde man gewiß für eine terminologische Übertreibung ansehen müssen), wobei eine gewisse sprachliche Schwierigkeit hinsichtlich der Übersetzung des hier in der tschechischen Sprache sehr gute Dienste leistenden Wortes „úsečka“ nicht verhehlt sei.

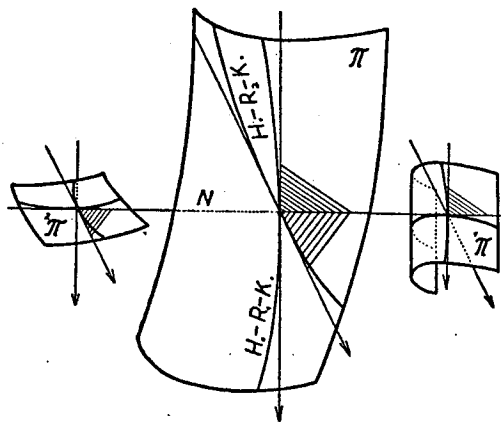
Die bekannten großen Vorteile tensorieller Darstellung, allgemeiner Charakter der Koordinatenwahl bei invarianter Formulierung, kommen natürlich auch den weiteren Kapiteln (III) und (IV) der hier entwickelten Flächentheorie zu Gute. Dies wird man z.B. in der Behandlung der Krümmungslinien oder auch gelegentlich der Untersuchung der  $W$ -Flächen bemerken.

In gruppentheoretischer Hinsicht handelt es sich bezüglich der Auswahl des Stoffes naturgemäß bis auf geringfügige Ausnahmen (z.B. in § 2 des dritten Abschnittes von Kapitel (III), oder auch in § 4 des vierten Abschnittes von Kapitel (IV)) stets um bewegungs-invariante Differentialgeometrie. Dagegen konnte die Darstellung nicht immer auf reelles Gebiet beschränkt werden, da dies ja seit Lie und Weierstraß Tagen unmöglich geworden ist, will man nicht die Behandlung der so wichtigen und interessanten Klasse der Minimalflächen vernachlässigen, ganz abgesehen von Grundeigenschaften der Winkelmetrik auf Flächen, der konformen Abbildung usw.

Prag, im Vorfrühling 1939.

M. PINL.





Figur (2, 2)

$$(2, 17c) \quad {}^1N = \frac{G}{\sqrt{E}} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{E}{2EG} \frac{\partial}{\partial u} G = \frac{G}{\sqrt{E}} \left( 1 - \frac{R_1}{R_2} \right) \frac{\partial}{\partial u} \lg \sqrt{G}.$$

Setzen wir in diese Gleichung für  $\frac{\partial}{\partial u} \lg \sqrt{G}$  aus (3, 5c) vom dritten Abschnitt des dritten Kapitels (S. 391) ein, so erhalten wir den in (2, 14a) angegebenen Ausdruck. Analog läßt sich (2, 14b) beweisen.

Aus diesen Hilfssätzen folgt geradewegs

**Satz (2, 8).** *Den Hauptkurven der Evolventen entsprechen auf der Evolute konjugierte Kurven.*

**Beweis.** In Hauptparametern gilt (2, 14) und somit ist insbesondere  ${}^1M = 0$ , d.h. die zugehörigen Kurven auf der Evolute  ${}^1\Pi$  sind konjugiert.

Als weitere Anwendung des oberen Satzes können wir den folgenden Satz beweisen.

**Satz (2, 9).** *In Hauptparametern gilt für das Krümmungsmaß  ${}^1K$  der Evolute  ${}^1\Pi$*

$$(2, 18) \quad {}^1K = -\frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \frac{\frac{\partial R_2}{\partial u}}{\frac{\partial R_1}{\partial u}}, \quad {}^2K = -\frac{1}{(R_1 - R_2)^2} \frac{\frac{\partial R_1}{\partial v}}{\frac{\partial R_2}{\partial v}}.$$

volgt, dat  $M_3B$  en  $P_7'B$  met cirkel  $M$  gelijke, in draaizin overeenstemmende hoeken maken. Derhalve liggen  $M_3$ ,  $B$  en  $P_7'$  op één rechte. Daar nu de punten  $M_3$  en  $P_7'$  te construeren zijn, vindt men dus  $B_1$  en  $B_2$  als snijpunten van  $M_3P_7'$  met cirkel  $M$ .

In tegenstelling met de constructies in 3 en 10 ligt hier het bewijs van de constructie niet in de voorbereiding opgesloten, We weten alleen nog maar, dat, als er een driehoek  $ABC$  is, die voldoet, het punt  $B$  op  $M_3P_7'$  moet liggen. Het bewijs kan geleverd worden door er gebruik van te maken, dat de dubbelverhouding van vier collineaire of concyclische punten bij inversie onveranderd blijft. Is  $V$  het oneigenlijke punt van  $M_3P_7'$  en  $W$  dat van de rechte, waarin  $M_3P_7'$  door de vier inversies overgaat, terwijl  $S_1$  en  $S_2$  de snijpunten zijn van  $M_3P_7'$  met  $(M)$ , die door de inversies overgaan in de punten  $S_1'$  en  $S_2'$  van  $(M)$ , dan is dus  $(M_3S_1S_2V) = (WS_1'S_2'P_7') = (P_7'S_2'S_1'W)$ . De puntendrietallen  $M_3$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  en  $P_7'$ ,  $S_2'$ ,  $S_1'$  zijn dus gelijkvormig en zelfs congruent, daar de rechten  $S_1S_2$  en  $S_1'S_2'$  in  $S_1$  en  $S_1'$  de cirkel  $(M)$  onder gelijke gerichte hoeken snijden. Uit deze gelijke gerichte hoeken en deze congruente puntendrietallen volgt nu gemakkelijk, dat  $S_1$  met  $S_1'$  en  $S_2$  met  $S_2'$  samenvalt. Tevens blijkt zo, dat  $M_3$  en  $P_7'$  gelijke afstanden tot  $M$  hebben.<sup>1)</sup> Als  $M_3$  en  $P_7'$  samenvallen, moeten we voor de rechte  $S_1S_2$  (dus  $B_1B_2$ ) blijkbaar de loodlijn door  $M_3$  op  $MM_3$  nemen.

Naar aanleiding van deze constructie kan nog de volgende opmerking worden gemaakt: Uit *Stelling 2* volgt, dat men het punt  $M_3 = I_3I_2I_1M$  ook kan vinden door een rotatie om  $M$  over een hoek  $2\varphi$  in tegenwijzerzin, gevolgd door de inversie  $I_5$ . Daar  $M$  door de genoemde rotatie op zijn plaats blijft, volgt hieruit, dat het punt  $M_3$  zo op  $P_5M$  gelegen is, dat  $P_5M \times P_5M_3 = \mu_5$ . Hiervoor kan men ook schrijven:  $P_5M \times (P_5M + MM_3) = P_5M^2 - r^2$ , of:  $MP_5 \times MM_3 = r^2$ . Daaruit blijkt, dat  $M_3$  met  $P_5'$  samenvalt, waarbij met  $P_5'$  bedoeld is het beeldpunt van  $P_5$  bij de inversie met  $M$  tot centrum en  $r^2$  als macht. Hierbij is aangenomen, dat  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  zo algemeen mogelijk gelegen zijn.

De rechte  $P_7'M_3$  is klaarblijkelijk het beeld van de cirkel  $O$  bij de genoemde inversie. De redenering van den Heer Veltkamp

<sup>1)</sup> Vgl. ook 19.

verschafft ons meteen een ander bewijs voor het feit, dat  $P_7$  (en dan natuurlijk ook  $P_5$ ) op de cirkel  $MB_1B_2$  ligt.

19. Omtrent de ligging der punten  $P_5$  en  $P_7$  valt nog het volgende te vermelden:

Volgens (3) heeft men:

$$\mu_6 = \frac{\mu_2\mu_3}{P_2P_3^2} \text{ en } \mu_7 = \frac{\mu_1\mu_6}{P_1P_6^2},$$

zodat:

$$\mu_7 = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{P_2P_3^2 \times P_1P_6^2}.$$

Daar nu  $P_4 = I_2P_1$  en  $P_6 = I_2P_3$ , is:

$$P_2P_1 \times P_2P_4 = P_2P_4 \times P_2P_6 = \mu_2,$$

waaruit volgt, dat  $P_1P_6P_4P_3$  een koordenvierhoek is. Derhalve is:

$$P_2P_3^2 \times P_1P_6^2 = P_1P_2^2 \times P_3P_4^2.$$

Men vindt dus:

$$\mu_7 = \frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{P_1P_2^2 \times P_3P_4^2}.$$

Daaruit blijkt in verband met (8):  $\mu_5 = \mu_7$ , zodat:  $P_5M = P_7M$ .

Uit het bovenstaande volgt bovendien:  $\varphi + \psi = 180^\circ$  en dus:  $r_2 = |r \cos \psi| = |r \cos \varphi| = r_1$ . De cirkels  $(M, r_1)$  en  $(M, r_2)$  vallen dus samen. De onderlinge ligging van  $M$ ,  $P_5$ ,  $P_7$ ,  $B_1$  en  $B_2$

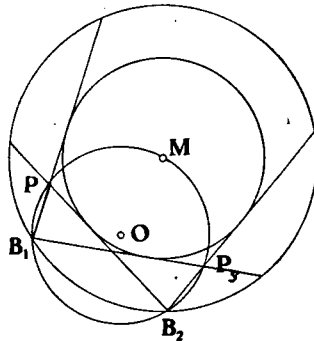


Fig. 10.<sup>1)</sup>

is in fig. 10 afzonderlijk aangeduid. Daaruit is zonder moeite te zien, dat  $P_7$  uit  $P_5$  kan worden afgeleid door een rotatie om  $M$  in goniometrisch negatieve zin over een hoek  $2\varphi$ . Deze opmerking doet ons  $P_7$  op eenvoudiger wijze vinden, dan in 17 is beschreven.

<sup>1)</sup> P moet zijn  $P_7$ .

20. Een willekeurige rechte door  $P_7$  wordt door de inversie  $I_1$  omgezet in een rechte of een cirkel gaande door  $P_1$  en  $P_6$ . Deze laatste figuur wordt door  $I_2$  omgezet in een cirkel (of een rechte) door  $P_3$  en  $P_4$ . De inversie  $I_3$  tenslotte doet deze figuur overgaan in een rechte door  $P_5$ . Elke rechte door  $P_7$  wordt derhalve door de transformatie  $I_3 I_2 I_1$  omgezet in een rechte door  $P_5$ . In het bijzonder wordt de rechte  $P_7 B$  omgezet in  $P_5 B$ . Hieruit leidt men af, dat  $P_7 B$  en  $P_5 B$  gelijke, doch tegengestelde hoeken met cirkel (M) maken, hetgeen trouwens ook in fig. 10 direct is te zien. Laat nu  $S$  één der snijpunten zijn van  $P_1 P_7$  met cirkel (M); dit punt wordt door de transformatie  $I_3 I_2 I_1$  omgezet in  $S'''$ . De rechte  $P_7 S$  gaat dus door de genoemde transformatie over in  $P_5 S'''$ . Zij  $\alpha$  de hoek, waarover men  $P_7 S$  in goniometrisch positieve zin moet draaien, om haar met  $P_7 B$  te doen samenvallen. De inverse figuren, die ontstaan door toepassing der inversie  $I_1$  maken in  $P_6$  een hoek, die gelijk, doch tegengesteld is aan  $\alpha$ ; de hoek, die de genoemde figuren in  $P_1$  met elkaar maken stemt dan in grootte en zin overeen met  $\alpha$ . Om nu tot  $P_5 S'''$  en  $P_5 B$  te geraken, moeten nog de inversies  $I_2$  en  $I_3$  worden toegepast en daarbij gaat  $P_1$  over in  $P_5$ . Daaruit volgt, dat men  $P_5 S'''$  in goniometrisch positieve zin over een hoek  $\alpha$  moet draaien om haar met  $P_5 B$  te doen samenvallen. Is  $Q$  het snijpunt van  $P_5 S'''$  en  $P_7 P_1$ , dan is dus  $Q P_7 P_5 B$  een koordenvierhoek. Zo komt men tot de volgende constructie: Bepaal de punten  $P_5$ ,  $P_7$  en  $Q$  en construeer de cirkel door deze punten. Deze snijdt cirkel (M) in twee punten, die als hoekpunten dienst kunnen doen van 2 driehoeken, welke aan de vraag voldoen. (De bedoelde cirkel is natuurlijk dezelfde als de omgeschreven cirkel van  $\triangle P_5 M P_7$ ).

21. De in 20 beschreven constructie is te vinden in: J. P e t e r s e n, *Methodes et Théories pour la résolution des problèmes de Constructions Géométriques* (trad. par O. Chemin) 5ième édition, Paris 1931, p. 39 no. 201. Er wordt daarbij echter niet opgemerkt, dat  $P_7$  door rotatie uit  $P_5$  is af te leiden en evenmin, dat de gebruikte cirkel door  $M$  gaat, dus, dat de constructie van  $Q$  feitelijk overbodig is.

Als  $P_1$ ,  $P_2$  en  $P_3$  collineair zijn, kan men gemakkelijk narekenen, dat  $P_5$  en  $P_7$  samenvallen. Daaruit blijkt dan, dat fig. 6 als een bijzonder geval van fig. 9 kan worden opgevat: de rechte  $P_5 P_7$

is in fig. 6 de rechte door  $P_5$  loodrecht op  $MP_5$  en de cirkel (O) is overgegaan in de cirkel op  $P_5M$  als middellijn. Ook fig. 7 kan als bijzonder geval van fig. 9 worden beschouwd. De punten  $P_5$  en  $P_7$  vallen nu samen met het oneigenlijke punt van  $P_1P_2P_3$  en de cirkel (O) is overgegaan in de loodrecht op  $P_1P_2P_3$  staande middellijn  $l_1$  van cirkel (M).

22. Uit fig. 5 willen we nog een andere constructie afleiden, die door de Heren A. A d r i a a n s e en W. J. R e u v e c a m p Jr. is ingezonden. We kunnen nl. de hoekpunten van de beide driehoeken, die aan de vraag voldoen, beschouwen als hoekpunten van een in cirkel (M) beschreven enkelvoudige zeshoek  $A_2B_2C_2A_1B_1C_1$ . Volgens de stelling van Pascal liggen dan de snijpunten  $\{A_2B_2, A_1B_1\}$ ,  $\{B_2C_2, B_1C_1\}$  en  $\{A_1C_2, A_2C_1\}$  op één rechte. Dit betekent, dat  $A_1C_2$ ,  $A_2C_1$  en  $P_1P_3$  door één punt gaan. De poollijn van dit punt t.o. van cirkel (M) is blijkbaar  $P_2S$ , waarin S het snijpunt is van  $A_1A_2$  en  $C_1C_2$ . Dus ligt de pool van  $P_1P_3$  op  $P_2S$ . Men kan dit ook zo uitdrukken, dat S ligt op de rechte, die  $P_2$  met de pool  $P_2'$  van  $P_1P_3$  verbindt. Bovendien ligt S op de poollijn  $p_2'$  van  $P_2$ . Derhalve is S het snijpunt van  $P_2P_2'$  en  $p_2'$ . Evenzo vindt men:

Het snijpunt van  $A_1A_2$  en  $B_1B_2$  is tevens dat van  $P_3P_3'$  en  $p_3'$  en het snijpunt van  $B_1B_2$  en  $C_1C_2$  is tevens het snijpunt van  $P_1P_1'$  en  $p_1'$ . Zo geraken we tot de volgende constructie: (fig. 11). Bepaal de toegevoegde driehoek  $P_1'P_2'P_3'$  van  $P_1P_2P_3$  t.o. van cirkel (M). Het snijpunt van  $P_kP_k'$  met  $p_k'$  zij Q. De zijden van  $\triangle Q_1Q_2Q_3$  snijden nu op cirkel (M) de hoekpunten in van twee driehoeken, die aan de vraag voldoen.<sup>1)</sup> De constructie wordt in de in de noot genoemde boeken uitvoerig behandeld. We gaan er dan ook niet nader op in. Opgemerkt zij nog dat in fig. 11 de rechten  $P_1P_1'$ ,  $P_2P_2'$  en  $P_3P_3'$  volgens een bekende eigenschap door één punt gaan.

23. Wanneer één der zijlijnen van  $\triangle P_1P_2P_3$  cirkel (M) niet snijdt, kan ook de volgende constructie worden toegepast: Ver-

<sup>1)</sup> Dr. F r e d S c h u h, *Leerboek der Nieuwere Meetkunde van het vlak en van de ruimte*, Groningen 1938, blz. 355, vrgst. 1263 t/m vrgst. 1266.

Dr. P. M o l e n b r o e k, *Leerboek der Vlakke Meetkunde*, 8e druk, blz. 453, voorbeeld 76.

J. V e r s l u y s, *Inleiding tot de nieuwere meetkunde van het platte vlak*, Groningen 1919, blz. 85/86.

onderstel, dat  $P_1P_2$  cirkel (M) niet snijdt. We beschouwen (fig. 12)

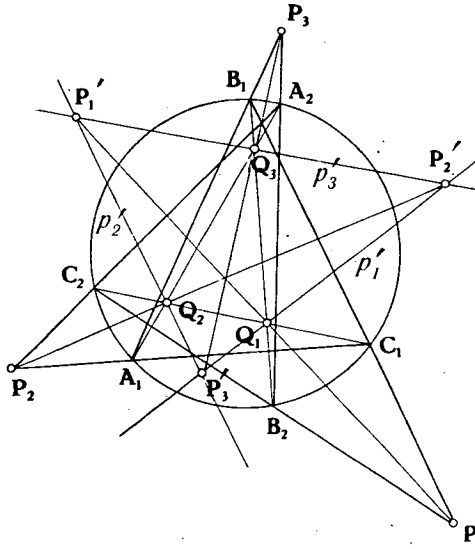


Fig. 11.

$P_1P_2$  als machtijs van de cirkelbundel waarvan (M) een exemplaar is; zij P een der grenspunten van die bundel. De involuto-

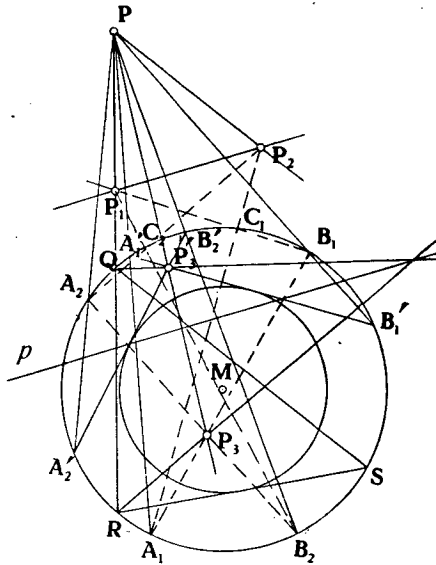


Fig. 12.

rische centrale collineatie met P als centrum, die  $P_1P_2$  in de oneigenlijke rechte omzet, heeft tot as de rechte, die verkregen

wordt door  $P_1P_2$  t.o. van  $P$  met 2 te vermenigvuldigen. Deze as is juist de poollijn  $p$  van  $P$  t.o. van  $(M)$ , terwijl cirkel  $(M)$  door de collineatie in zichzelf overgaat. Zij  $P_3'$  het punt waarin  $P_3$  overgaat; een driehoek  $ABC$ , die aan de vraag voldoet gaat dan over in een driehoek, beschreven in  $(M)$ , waarvan de zijlijnen  $B'C'$  en  $C'A'$  opv. evenwijdig zijn met  $PP_1$  en  $PP_2$ , terwijl de zijlijn  $A'B'$  door  $P_3'$  gaat. Zo'n driehoek is zonder moeite te construeren; van de 2 driehoeken, die in fig. 12 voldoen, zijn alleen getekend de zijlijnen door  $P_3'$ . De cirkel, waaraan deze zijlijnen moeten raken, is aldus gevonden: Door het snijpunt  $Q$  van  $PP_1$  met  $(M)$  trekt men een lijn evenwijdig aan  $PP_2$ , die  $(M)$  nog in  $S$  snijdt. Vervolgens verbindt men  $S$  met het tweede snijpunt  $R$  van  $PP_1$  en  $(M)$  en construeert de cirkel met middelpunt  $M$ , die  $RS$  raakt; dit is de gezochte cirkel. Daaruit zijn dan gemakkelijk met

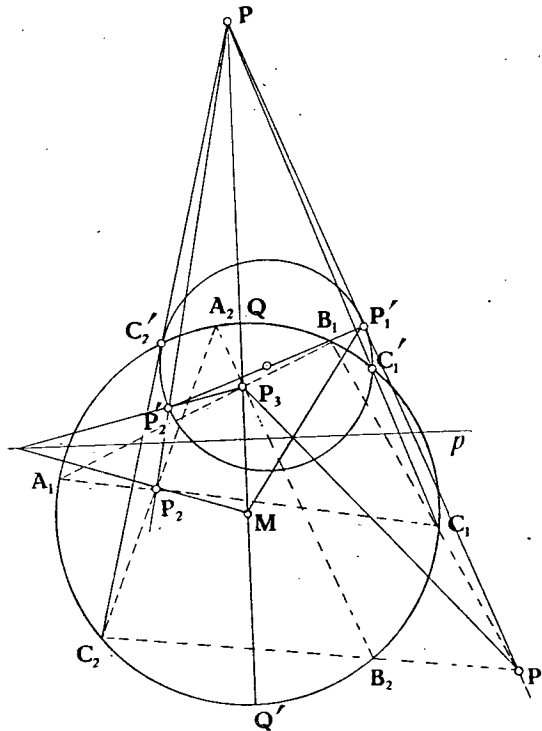


Fig. 13.

behulp van de collineatie de driehoeken af te leiden, die aan de oorspronkelijke vraag voldoen; in de fig. zijn deze gestippeld.

24. Licht één der punten  $P_1, P_2, P_3$  (bijvoorbeeld  $P_3$ ) binnen cirkel ( $M$ ), dan kan men ook op de volgende wijze tot het doel geraken (fig. 13). Laten  $Q$  en  $Q'$  de snijpunten zijn van  $MP_3$  met de cirkel. Daar de puntenparen  $P_3, M$  en  $Q, Q'$  elkaar niet scheiden, kan men een puntenpaar vinden, dat de beide genoemde puntenparen harmonisch scheidt. Dit puntenpaar vindt men bv. door de grenspunten te construeren van de cirkelbundel bepaald door ( $M$ ) en de cirkel op  $P_3M$  als middellijn; zij  $P$  één dier grenspunten en  $p$  de poollijn van  $P$  t.o. van cirkel ( $M$ ). De involutorische centrale collineatie met  $P$  als centrum en  $p$  als as, die  $P_3$  in  $M$  omzet, doet cirkel ( $M$ ) in zichzelf overgaan. Zijn  $P_1'$  en  $P_2'$  de punten, waarin  $P_1$  en  $P_2$  worden omgezet, dan doet de collineatie de gevraagde driehoek  $ABC$  overgaan in een driehoek  $A'B'C'$ , waarvan de zijlijnen  $B'C', C'A'$  en  $A'B'$  opv. door  $P_1', P_2'$  en  $M$  gaan. Daar deze driehoek rechthoekig is in  $C'$ , kan men hem gemakkelijk construeren:  $C'$  moet nl. één der snijpunten zijn van ( $M$ ) met de cirkel op  $P_1'P_2'$  als middellijn beschreven. Uit  $\triangle A'B'C'$  vindt men dan met behulp van de collineatie de gezochte driehoek  $ABC$ .

25. Een eerste uitbreiding van het werkstuk van *Castillon* kan daarin bestaan, dat men de vraag stelt, in een gegeven cirkel een  $n$ -hoek te beschrijven, waarvan de zijlijnen opvolgend door  $n$  gegeven punten gaan. Dit vraagstuk kan volgens de in 3 en 6 besproken methode worden opgelost. Ook de oplossing met behulp van inversie kan worden gebruikt; daarbij moet men onderscheid maken tussen het geval, dat  $n$  oneven is en het geval, dat  $n$  even is. Dit berust daarop, dat het product van een oneven aantal inversies, die ieder voor zich de cirkel ( $M$ ) in zichzelf omzetten, te vervangen is door een rotatie gevolgd door een inversie. Het product van een even aantal van dergelijke inversies echter is te vervangen door een spiegeling gevolgd door een inversie. Een en ander is zonder moeite uit de *stellingen 1* en *2* af te leiden; daarbij is verondersteld, dat de centra  $P$  zo algemeen mogelijk gelegen zijn. Hiermee staat in verband, dat voor even  $n$  bij de constructie van den Heer *Veltkamp* (18) de laatste inversie (nl. die met  $M$  als centrum en  $r^2$  als macht) achterwege kan blijven.

Het zo uitgebreide vraagstuk kan verder worden gegeneraliseerd, door de cirkel te vervangen door een kegelsnede, die door 5 pun-



ten is gegeven. De methode van 3 en 6 kan dan worden toegepast, terwijl voor  $n = 3$  ook de constructies van 22 en 23 blijven gelden. Ook kan men dit geval terugbrengen tot het overeenkomstige vraagstuk voor de cirkel.<sup>1)</sup>

Nog een stap verder gaande, kan men de opgave stellen, in een gegeven kegelsnede een  $n$ -hoek te construeren, waarvan de zijlijnen opv. raken aan  $n$  kegelsneden, die elk voor zich de gegeven kegelsnede dubbel aanraken. Dit vraagstuk kan ook weer met behulp van 3 worden opgelost; dat is dus wel de meest algemene oplossing.

Het spreekt wel van zelf, dat men van elk der bovengenoemde vraagstukken ook het duale kan behandelen.

*Slotopmerking.* Het bijzondere geval van het werkstuk van Castillon, waarbij cirkel (M) aan de zijlijnen van  $\triangle P_1P_2P_3$  raakt, wordt wel het vraagstuk van Clausen genoemd.<sup>2)</sup> De eenvoudigste oplossingsmethode is in dit geval die met behulp van pool en poollijn (vgl. 22).

---

<sup>1)</sup> J. Steiner, *Die Geometrischen Konstruktionen*, Ostwald's Klassiker Nr. 60, Leipzig, blz. 76/77 Aufgabe 20.

<sup>2)</sup> A. J. Drost en G. van Herk, *Naar aanleiding van het vraagstuk van Clausen*, Nieuw Arch. v. Wisk, Tweede Reeks, dl. XVI, 1ste stuk, blz. 79—83.

# EUCLIDES

15e JAARGANG 1938/39

# EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-  
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN  
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES



15e JAARGANG 1938/39

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN • BATAVIA

## DE MEETKUNDIGE VAKTAAL

In zijn beschouwingen over de wiskundige vaktaal in den 12en. jaargang merkt de heer Schogt op (blz. 188), dat het gebruik van de termen „lijnstuk” en „halve lijn” thans zoo algemeen is, dat het nauwelijks noodig is nog iets ter aanbeveling in het midden te brengen. Op blz. 191 wijst hij er voorts op, dat het voor de hand ligt ook onderscheid te maken tuschen zwaartelijnen en zwaartelijnstukken enz., doch dat vrijwel niemand dit doet.<sup>1)</sup>

Helaas worden die termen nog geenszins algemeen gebruikt. Behalve in vele leerboeken wordt ook in wetenschappelijke publicaties nog herhaaldelijk het woord lijn voor twee verschillende begrippen gebruikt.

In Indië is kort geleden voorgesteld om het gebruik van de termen „halve lijn” en „lijnstuk(segment)” uitdrukkelijk te verbieden<sup>2)</sup>. Voor zoo'n verbod werden drie motieven opgegeven:

- a. Het sticht verwarring, als die termen door den docent worden gebruikt of in een examenopgave voorkomen, terwijl ze in het leerboek (van Van Thijn) niet worden gebezigd.
- b. De leerlingen zullen geen hoogen dunk krijgen van de correcte wijze van uitdrukken in de wiskunde, als ze bemerken, dat de docent niet consequent is en over de lengte van een hoogtelijn spreekt (in de terminologie van Bottema is dit in orde).
- c. De oneenigheid in het wiskundige kamp over de terminologie maakt het gebruik van niet algemeen gebruikte termen ongewenscht bij het onderwijs.

Deze bezwaren zijn de overdenking zeker waard, maar wij moeten ons toch afvragen, of de betere terminologie daardoor (voorloopig) veroordeeld is.

---

<sup>1)</sup> Bottema spreekt in „De Elementaire Meetkunde van het platte vlak” over rechten, halfrechten en lijnen, en onderscheidt hoogterechten en hoogtelijnen, enz.

<sup>2)</sup> In de Indische opgaven van het M.U.L.O.-examen, ook in de Nederlandse, komt het woord lijnstuk voor! W.

Het verdient m.i. echter aanbeveling zoo spoedig mogelijk een poging te doen meer eenheid in de terminologie te brengen door een competente commissie in het leven te roepen, die op korten termijn orde in de chaos schept en ons (d.w.z. de docenten en de schrijvers van leerboeken) de meest gewenschte terminologie eenvoudig voorschrijft in den geest van de internationaal vastgestelde maten en gewichten.

v. W.

## DE „OPENING” VAN EEN HOEK.

In tal van examenvraagstukken treft men de uitdrukking aan, dat hoeken een opening naar rechts of links hebben. Natuurlijk begrijpen de kandidaten wel, wat de steller van het vraagstuk ermee bedoeld heeft, maar daar is men er niet mee af. De steller dient zich exact uit te drukken en geen termen te gebruiken, die niet gedefinieerd zijn.

Ook in de mechanica is deze terminologie al doorgedrongen (eindexamen H.B.S. 1937). Daar het zoo eenvoudig is deze slordige wijze van uitdrukken te vermijden, zou het dwaas zijn haar nog langer te tolereeren.

v. W.

## NASCHRIFT VAN DE REDACTIE.

Het moet toegegeven worden, dat ik mij te optimistisch heb uitgedrukt over het gebruik van het woord „lijnstuk”; het is namelijk een feit, dat de nieuwe terminologie in zeer veel gebruikte leerboeken stelselmatig wordt vermeden. Het is jammer, dat geen der, blijkbaar talrijke, tegenstanders der nieuwe nomenclatuur ooit de moeite heeft genomen, eene poging te doen om de voorstanders van hun ongelijk te overtuigen. Daardoor is men geneigd, hun tegenstand te zien als eene uiting van onberedeneerd conservatisme, of van een streven om op de geringe scherpte der oude nomenclatuur vage redeneeringen te baseeren. Wat de heer Van Wijk ons nu bericht, is wel heel erg. Stel U voor, dat men een wiskundige door een overheidsmaatregel dwingen wil dingen te zeggen, waarvan de onzinnigheid vaststaat. Het is bijvoorbeeld fout te beweren, dat een rechte lijn door twee willekeurige harer punten bepaald is, en

tevens te zeggen, dat eene zijde eens driehoeks eene rechte lijn is, en dat aan die zijde eene lengte kan worden toegekend.

Eene dergelijke handelwijze zou bovendien elke verbetering van het onderwijs kunnen tegenhouden, want er zal wel geen wijziging te bedenken zijn, die onmiddellijk door eene meerderheid der leeraren wordt voorgestaan.

. En nu de argumenten. *a.* Wil men bij het gebruik van een ouderwetsch leerboek verwarring voorkomen, dan moet men den leerlingen opdragen, de noodige wijzigingen in het leerboek aan te brengen.

*b.* Ik kan mij voorstellen, dat het hardnekkig verzet der voorstanders tegen termen als „hoogtelijnstuk” voor sommigen een bezwaar vormt tegen de aanvaarding der nieuwe termen; of het voorstel van Dr. Bottema uitkomst zal brengen, betwijfel ik.

*c.* Kan men eigenlijk wel zeggen, dat er oneenigheid omtrent de terminologie bestaat? De ontoereikendheid der oude nomenclatuur is, naar ik meen, nooit ontkend; slechts weigeren sommigen de nieuwe benamingen toe te passen, zonder echter hunne weigering te motiveeren.

Omtrent het werk en de lotgevallen eener in 1928 ingestelde nomenclatuurcommissie heeft Dr. Verrijp iets medegedeeld in Euclides XIII, bldz. 62. De heer Van Wijk voelt blijkbaar voor hernieuwing der pogingen. Ook ik kan er wel iets voor voelen, maar meen, dat zulk eene commissie niet het recht heeft, dwingende voorschriften te geven. Stel eens, dat zij de nieuwe nomenclatuur aanvaardde; dan mag zij die toch niet opdringen, omdat het niet zeker is, dat de tegenstanders geen respectabele motieven voor hun tegenstand hebben, ook al spreken zij die niet uit. Ik wil trouwens wel bij voorbaat verklaren, dat ik mij door niemand zal laten dwingen, dwaasheden te zeggen, en ik ben benieuwd te vernemen, quo jure de Indische autoriteiten dit van hunne ondergeschikten zouden kunnen eischen.

Onderstaand citaat uit den juist verschenen achtsten druk van Molenbroek's Leerboek der Vlakke Meetkunde (welk werk de richting der toekomstige ontwikkeling der meetkunde in Nederland bepaalt) geeft een duidelijk overzicht van de verschillende figuren en getallen, welke men dient te onderscheiden; misschien zou dit een grondslag voor het bereiken van meer eenheid kunnen vormen.

### Wat betekent $AB$ ?

Voor we verder gaan, zeggen we nog eens precies, wat we met  $AB$  kunnen bedoelen:

- 1)  $AB$  stelt de rechte lijn door  $A$  en  $B$  voor;
- 2) met  $AB$  wordt bedoeld de halve rechte met eindpunt  $A$ , waarop  $B$  ligt;
- 3)  $AB$  betekent het lijnstuk met de eindpunten  $A$  en  $B$ ;
- 4)  $AB$  stelt een gericht lijnstuk voor met  $A$  als beginpunt,  $B$  als eindpunt, of het kental van dit gerichte lijnstuk.  
B.v.  $AB + BC = AC$ ;  $AB + BC + CA = 0$  (betrekking van Möbius).
- 5)  $AB$  stelt de lengte of het maatgetal van het lijnstuk  $AB$  voor. B.v. voor een driehoek  $ABC$  is  $AB + BC > AC$ ;  $AB + BC + CA = 2s$ ; de oppervlakte van een rechthoek  $ABCD$  is  $AB \times AD$ ; dit betekent, dat het aantal vlakkeenheden gelijk is aan het product van de aantallen lengteëenheden van  $AB$  en  $CD$ .

Terecht worden deze dingen in de notatie onderscheiden; aldus

|                            |     |                                        |
|----------------------------|-----|----------------------------------------|
| $AB$                       |     | stelt voor een rechte.                 |
| $\overline{AB}$            | „ „ | een lijnstuk.                          |
| $AB$ of $l(\overline{AB})$ | „ „ | de lengte van het lijnstuk $AB$ .      |
| $[AB$                      | „ „ | een halve rechte met $A$ als eindpunt. |
| $\overrightarrow{AB}$      | „ „ | een gericht lijnstuk.                  |
| $\overrightarrow{(AB)}$    | „ „ | het kental van $\overrightarrow{AB}$ . |

Wanneer door woorden wordt aangegeven, welk begrip wordt bedoeld, blijft het teken achterwege. Men schrijft dus hetzij „ $\overline{AB}$ ”, hetzij „het lijnstuk  $AB$ ”.

Tegen de uitdrukking „opening van een hoek” is nog iets in te brengen, tenminste tegen het gebruik in de beschrijvende meetkunde. Gebruik van deze uitdrukking houdt in, dat men b. v. door-gangen van vlakken opvat als halve lijnen. Het is aangenaam op te merken, dat in de eindexamenvraagstukken voor beschrijvende meetkunde van 1938 en 1939 het gebruik van de bedoelde uitdrukking vermeden is.

J. H. S.

# DE GEBROKEN FUNCTIE $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$

DOOR

Dr. O. BOTTEMA.

---

Bij de behandeling van de kwadratische functie  $y = ax^2 + bx + c$  en van de gebroken functie  $y = \frac{ax + b}{cx + d}$  maakt men algemeen gebruik van een *verschuiving* van het assenstelsel. Men ziet dan in, dat men zich wat de *gedaante van de grafiek* betreft, beperken kan tot de functies  $y = ax^2$  opv.  $y = \frac{p}{x}$ . De grafiek van een willekeurige functie van de beschouwde soort valt, na toepassing van een geschikt gekozen translatie, samen met een exemplaar, dat een eenvoudige vergelijking heeft. Een dergelijke herleiding tot een *canonische vorm* wordt in de analytische meetkunde algemeen toegepast, vereenvoudigt het rekenwerk en verheldert het inzicht in de gedaante van een door een bepaalde vergelijking voorgestelde figuur.

Merkwaardigerwijze wordt dit hulpmiddel, voor zover ik weet, bij de bespreking van de gebroken functie  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$  versmaad. Dat wekt om twee redenen verwondering. Ten eerste bevat de algemene functie van deze soort zes (of eigenlijk vijf) constanten, terwijl dat aantal bij de kwadratische functie drie, bij de homographische functie vier (eigenlijk drie) bedraagt. Een groter aantal vormen (nl. vier verschillende) is daarvan het directe gevolg en te meer zal men een reductie van het aantal coëfficiënten op prijs stellen. En ten tweede zijn de herleidingen, welke moeten worden toegepast, dezelfde als die welke bij de eenvoudiger functies worden gebruikt.

Deelt men, evenals zulks bij de gebroken lineaire functie geschiedt, de teller door de noemer, dan komt er



$$y = \frac{a}{p} + \frac{\left(b - \frac{aq}{p}\right)x + \left(c - \frac{ar}{p}\right)}{px^2 + qx + r},$$

zodat na de verticale verschuiving  $y' = y - \frac{a}{p}$  blijkt, dat men zich kan beperken tot functies van de gedaante  $y = \frac{bx + c}{px^2 + qx + r}$ .

Past men nu op de kwadratische functie in de noemer de bekende herleiding toe:  $px^2 + qx + r = p\left(x + \frac{q}{2p}\right)^2 + r - \frac{q^2}{4p}$ , dan blijkt, dat door de horizontale verschuiving  $x' = x + \frac{q}{2p}$  de coëfficiënt van  $x$  in de noemer nul wordt. De constanten bij de translaties hangen *rationaal* af van de gegeven coëfficiënten.

*Men kan zich dus, als het alleen om de vorm van de grafiek te doen is, beperken tot de functie*

$$y = \frac{Ax + B}{Cx^2 + D},$$

welke in plaats van zes (vijf) slechts vier (drie) constanten bevat. De grafiek heeft de X-as tot horizontale asymptoot; zijn er twee verticale asymptoten, dan liggen deze symmetrisch t.o.v. de Y-as, is er één verticale asymptoot, dan valt deze met de Y-as samen.<sup>1)</sup>

Zijn de coëfficiënten  $a, b, c, p, q$  en  $r$  numeriek gegeven, moet de grafiek worden getekend en moeten de eventuele maxima en minima van de functie worden bepaald, dan geeft de geschetste methode *misschien* geen vereenvoudiging t.o.v. de gebruikelijke handelwijze. Wil men echter, zoals de meeste leerboeken doen, een discussie geven van de functie in het algemeen, dan lijken mij de voordelen der herleiding onmiskenbaar. De discriminanten welke daarbij moeten worden beschouwd worden dan nl. zeer eenvoudig.

---

<sup>1)</sup> De Y-as wordt — ook in het geval dat de grafiek geen verticale asymptoten heeft — de verticale asymptoot van de met de kromme geassocieerde hyperbool, welke de meetkundige plaats is van de middens der niveaupunten. Vgl. G e r r e t s e n, Euclides 15, pg. 24 (1938).

# INHOUD VAN DE 15e JAARGANG 1938/'39.

Blz.

|                                                                                                                                        |          |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| Dr. O. BOTTEMA, Maxima en minima bij vierhoeken met gegeven zijden . . . . .                                                           | 1        |
| M. EILANDER, Tafels in 4 of in 5 decimalen? . . . . .                                                                                  | 14       |
| C. J. ALDERS, De inhoud van een viervlak . . . . .                                                                                     | 16       |
| J. C. N. GERRETSEN, De functie $\frac{a_0x^2 + 2a_1x + a_2}{b_0x^2 + 2b_1x + b_2}$ . . . . .                                           | 23       |
| Dr. H. C. SCHAMHARDT, Mondelinge Staatsexamens A . . . . .                                                                             | 47       |
| Korrels XXIV, XXV, XXVI, XXVII, 34; XXVIII, XXIX, 74; XXX—XXXIV, 142; XXXV—XXXIX, 173; XL, XLI, . . . . .                              | 240      |
| Dr. G. H. A. GROSHEIDE, Het afbeelden in de Wiskunde . . . . .                                                                         | 76       |
| Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes . . . . .                                                                                           | 96, 248  |
| L. J. ROBORGH, Het vraagstuk van Morley . . . . .                                                                                      | 136      |
| A. M. KROON, Over „de inhoud van het viervlak” . . . . .                                                                               | 138      |
| Prof. Dr. CH. H. VAN OS, Wat is wiskunde? . . . . .                                                                                    | 154      |
| Dr. O. BOTTEMA, Graphische oplossing van de vergelijking $\sqrt{a_1x - b_1} \pm \sqrt{a_2x - b_2} \pm \sqrt{a_3x - b_3} = 0$ . . . . . | 169      |
| Uit het verslag van de Staatsexamen 1938 . . . . .                                                                                     | 185      |
| Dr. E. W. BETH, Getalbegrip en tijdaanschouwing . . . . .                                                                              | 190      |
| Dr. J. HAANTJES, Is meetkunde ruimteleer? . . . . .                                                                                    | 216      |
| P. WIJDENES, De klinografische projectie . . . . .                                                                                     | 231      |
| G. R. VELDKAMP, Het vraagstuk van Castillon . . . . .                                                                                  | 153, 270 |
| Dr. U. H. VAN WIJK, De meetkundige vaktaal . . . . .                                                                                   | 297      |
| Dr. O. BOTTEMA, De gebroken functie $y = \frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$ . . . . .                                                | 301      |

## Boekbesprekingen.

|                                                                                                            |                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| Unterrichtswerk des Vereins Schweizerischer Mathematiklehrer . . . . .                                     | 42, 47           |
| Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes . . . . .                                                               | 43               |
| BEPPO LEVI, Analisi Mathematica . . . . .                                                                  | 44               |
| G. E. KIERS en M. DIJKSHOORN, Leerboek der beschrijvende meetkunde . . . . .                               | 146              |
| Dr. O. BOTTEMA, De elementaire meetkunde van het platte vlak . . . . .                                     | 147              |
| Prof. Dr. F. SCHUH, Leerboek der nieuwere meetkunde van het platte vlak en van de ruimte . . . . .         | 148, 183         |
| Dr. H. TURKSTRA, Het veel omstreden vraagstuk van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school . . . . . | 181              |
| Prof. Dr. F. SCHUH, Leerboek der nieuwe vlakke driehoeksmeting . . . . .                                   | 245              |
| Ingekomen boeken . . . . .                                                                                 | 45, 72, 152, 247 |

## Premies op de 15e jaargang:

- Prof. Dr F. SCHUH, Leerboek der Nieuwere Meetkunde van het platte vlak en van de ruimte, geb. van f 10,50 voor . . . f 9,—
- Prof. Dr J. G. RUTGERS, Beknopte Analytische Meetkunde, 2e druk, geb. van f 9,— voor . . . f 8,—
- Prof. Dr H. BREMEKAMP, Partieële differentiaalvergelijkingen, geb. van f 5,75 voor . . . f 4,85
- Dr P. MOLENBROEK, Leerboek der Vlakke Meetkunde, 8e druk geb. van f 11,50 voor . . . f 10,—
- Dr E. J. DIJKSTERHUIS, Vreemde woorden in de Wiskunde, geb. van f 2,40 voor . . . f 2,10
- Dr J. C. H. GERRETSEN, Topologische behandeling van de Meetkunde van het aantal, geb. van f 5,90 voor . . . f 5,—
- Dr V. HLAVATY, Differentialgeometrie der Kurven und Flächen und Tensorrechnung, geb. van f 15,50 voor . . . f 14,—
- Prof. Dr A. J. RUTGERS, Physische Scheikunde, geb. van f 13,50 voor . . . f 12,25

### Doórlpend:

- HISTORISCHE BIBLIOTHEEK, de thans verschenen vijf delen tezamen genomen geb. f 18,— in plaats van . . . f 23,25
- Dr E. J. DIJKSTERHUIS, De elementen van Euclides I, II.
- Dr H. J. E. BETH, Inleiding tot de niet-Euclidische Meetkunde op historischen grondslag.
- Dr H. J. E. BETH, Newtons Principia I, II.

### In 1938 verscheen:

- Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes I, geb. f 4,50, voor f 3,90  
Deel II verschijnt in 1940.
-

Verschenen:

## Differentialgeometrie

der Kurven und Flächen und Tensorrechnung  
von Ph. Dr. VÁCLAV HLAVATY. — Autorisierte  
Übersetzung von Dr. Phil. MAX PINL.

Prijs f 14.—, geb. f 15.50.

Voor abonné's op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften  
tijdelijk f 12.50, geb. f 14.—.

Dezer dagen verschijnt:

Dr P. MOLENBROEK

## Leerboek der Vlakke Meetkunde

Achtste druk, geb. f 11.50.

Voor intekenaars op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften  
tijdelijk f 10.—.

Uitwerkingen f 2.50.

Dezer dagen verschijnt:

Dr E. J. DIJKSTERHUIS

## Vreemde woorden in de Wiskunde

Prijs f 1.90, geb. f 2.40.

Voor intekenaars op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften  
tijdelijk f 1.60, geb. f 2.10.

Verschenen:

Dr J. C. H. GERRETSEN

## Inleiding tot een Topologische Behandeling van de Meetkunde van het Aantal

in de serie Noordhoff's Verzameling van Wisk. werken.

Prijs f 4.90, geb. f 5.90.

Voor intekenaars op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften  
tijdelijk f 4.—, geb. f 5.—.

Zo juist verscheen:

Dr A. J. RUTGERS

## Physische Scheikunde

Prijs f 12.50, geb. f 13.50.

Voor intekenaars op Noordhoff's Wisk. Tijdschriften  
tijdelijk f 11.25, geb. f 12.25.

---

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

P. WIJDENES

## Meetkundige vraagstukken

Met de bewijzen van de stellingen en een aantal uitgewerkte voorbeelden voor het middelbaar en voorbereidend hoger onderwijs.

deel I — 163 bladzijden, met 141 figuren — gecartonneerd met graden-boog en twee driehoeken . . . . . f 1,40

Volledige behandeling van 20 vraagstukken, 4 werkstukken en 3 meetkundige plaatsen.

Inhoud: Inleiding. — Hoeken. — Evenwijdige lijnen. — Driehoeken. — Congruentie van driehoeken. — Werkstukken. — Vierhoeken. — Veelhoeken. — De cirkel. — Meetkundige plaatsen.

deel II — 163 bladzijden, met 194 figuren — gecartonneerd f 2,40  
Volledige behandeling van 26 vraagstukken, 11 werkstukken en 8 meetkundige plaatsen.

Inhoud: Oppervlakte. — Verhouding en evenredigheid van lijnstukken. — Vermenigvuldiging en gelijkvormigheid. — De rechthoekige driehoek. — De schreefhoekige driehoek. — Meten van hoeken door cirkelbogen. — Lijnstukken in een cirkel. — Regelmatige veelhoeken. — De cirkel. — Examenopgaven. —

In de bespreking van dr Dijksterhuis treffen we aan: Het denkbeeld der methode is, dunkt mij in 't kort samen te vatten: handhaving van het beginsel der Euclidische meetkunde; opruiming van veel, wat daarin geen ander recht van bestaan heeft dan een soms zeer toevallige traditie; invoering van tal van verbeteringen in de methodiek, die de moderne belangstelling in elementair wiskundeonderwijs als wenselijk heeft doen zien en bovenal: sterke verhoging van de zelfwerkzaamheid der leerlingen. — Vraagstukken, niet als aanvulling der theorie, maar als middel, die theorie als het ware zelfstandig voort te brengen; blijkbaar is het juist de bedoeling, dat ze een leerboek overbodig maken.

---

## Meetkunde van de ruimte

een leerboek voor stereometrie en beschrijvende meetkunde voor het middelbaar onderwijs door

Dr E. J. E. BENE

Directeur van de R.H.B.S. te Amersfoort.

Prijs van het complete boek, groot 184 pag.'s met 189 fig., geb. f 2,20

 Het enige schoolboek, waarin de stereometrie en de beschrijvende meetkunde tot één geheel zijn verwerkt.

---

P. NOORDHOFF N.V. TE GRONINGEN EN BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Op Leeren, die op hun school deze Meetkundige Vraagstukken gebruiken, kunnen gratis en franco een exemplaar bekomen van Dr. P. Meisenbroek, Leerboek der Vlakke Meetkunde, Gedrukt. Aanvraag aan den uitgever of aan P. Wijdenes, Amsterdam.