EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSEN
BATAVIA

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

15e JAARGANG 1939, Nr. 5.

P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

naast B andere, met B gelijkwaardige, gebieden B′, B″, B‴, . . . op te bouwen, waaruit men slechts op ten opzichte van A irrationele gronden een keus kan doen.

Een interessante gevolgtrekking uit de mogelijkheid van een relativering van de tegenstelling a priori-a posteriori wil ik nog even aanduiden. In het systeem van de critische philosophie loopt de tegenstelling a priori-a posteriori parallel met de tegenstelling subject-object. Het a priori bepaalt de subjectieve vooronderstellingen voor de mogelijkheid van objectkennis. Met de tegenstelling a priori-a posteriori wordt blijkbaar ook de tegenstelling subject-object gerelativeerd. Ik ben mij ervan bewust, dat ik hier een uiterst moeilijke en gevaarlijke kwestie aansnijdt, die m.i. niet bevredigend behandeld kan worden, zonder dat men rekening houdt met de grondbeginselen van H e g e l 's „dialectiek". Men zal mij ten goede houden, dat ik het hier aangewezen probleemgebied, dat met de gestelde opgave slechts zijdelings verband houdt, voorlopig onbesproken laat.

CONCLUSIE.

In de vorige hoofdstukken is het materiaal bijeengebracht, dat ons thans in staat zal moeten stellen, de uitgeschreven prijsvraag te beantwoorden.

Het eerste hoofdstuk had tot doel de descriptief-psychologische analyse van de tijdsaanschouwing. In dat hoofdstuk is gebleken, dat aan de tijdsaanschouwing drie momenten moesten worden onderscheiden: de synthesen der apprehensie, der reproductie en der recognitie. Deze synthetische functies onttrokken zich aan het introspectief onderzoek, ze konden alleen langs den weg der reconstructie worden opgespoord; de bedoelde functies konden wel in abstracto worden onderscheiden, maar ze konden niet opzichzelf worden beschouwd: elk was machteloos zonder de aanvulling met de beide andere. Naast deze synthetische functies van het bewustzijn werd geplaatst de analytische functie, die kenmerkend scheen te zijn voor het menselijk intellect; deze functie kwam eerst dan tot uiting, wanneer de uitoefening van de synthetische functies op de een of andere wijze werden gestoord of onderbroken; in de terminologie van het tweede hoofdstuk kunnen we ook zeggen:

wanneer onze waarnemingen afwijken van onze verwachtingen. De uitoefening van deze analytische functie brengt ons de successie van onze gewaarwordingen eerst tot bewustzijn.

Het tweede hoofdstuk gaf de toepassing van de in het eerste hoofdstuk verkregen resultaten op het onderzoek naar het verband tussen de tijdsaanschouwing en de wiskundige denkwijze. Om redenen, die aldaar werden uiteengezet, beperkte ik me tot een onderzoek naar den grond voor de aan de arithmetische recurrentie eigen subjectieve evidentie. Deze grond bleek hierin te moeten worden gezocht, dat wij beschikken over de voorstelling van wetmatige opeenvolging. Verder werd aangetoond, dat deze voorstelling wordt opgebouwd door de bovengenoemde synthetische functies van onzen geest.

In dit verband moet echter nog een verzuim worden hersteld: ook de analytische functie van het menselijk bewustzijn had hier moeten worden genoemd. Stellen wij ons voor, dat wij een proefpersoon opdracht geven, te tellen. De pp. telt: „Een, twee, drie, vier, vijf, acht." Wij verwachten na „vijf" echter „zes", d.w.z., bij het horen van „acht" wordt de aperceptie gestoord. De analytische functie van ons bewustzijn treedt in werking: het herinneringsbeeld van de reeks „Een, twee, drie, vier, vijf, acht" valt uiteen in de twee herinneringsbeelden „Een, twee, drie, vier, vijf" en „Acht". De eerste reeks wordt herkend als te behoren tot de „juiste" telreeksen; verder treedt „zes" in het bewustzijn als zodanig aan die reeks geassocieerd, dat de uit beide reeksen samengestelde reeks weer een juiste telreeks is; tenslotte wordt het onderscheid tussen „zes" en „acht" opgemerkt. Hiermee is dan de door den pp. uitgesproken telreeks als een niet-juiste, een niet-regelmatige herkend.

Uit het voorgaande zal duidelijk geworden zijn, dat de genoemde synthetische en analytische functies van ons bewustzijn ons inderdaad in staat stellen „psychische elementen en relaties tussen die elementen te onderscheiden en te herkennen, die elementen te rangschikken in eindige, bepaalde of onbepaalde reeksen en die reeksen door inter- en extrapolatie samen te voegen tot één geheel".

Hiermee ben ik dan gekomen tot het tweede gedeelte van mijn taak: „het zuiver intuitief dan wel gedeeltelijk empirisch karakter van deze functies te onderzoeken."

Dit onderzoek werd ingeleid door een analyse van de betekenis van de termen „zuiver intuitief" en „empirisch". Deze analyse maakte een kritiek nodig van de door K a n t op den voorgrond geplaatste begrippen „a priori" en „a posteriori"; hierbij bleek, dat deze begrippen bij de huidige ontwikkeling van de wetenschap nog slechts in relatieven zin kunnen worden gebezigd, wat waarschijnlijk ingrijpende wijzigingen in het systeem der critische philosophie met zich mee zal blijken te brengen. Een nader onderzoek in deze richting moest natuurlijk achterwege blijven. De relativering van de tegenstelling „a priori-a posteriori" bleek hierom noodzakelijk, omdat de door K a n t voor de toepassing van de door hem ingevoerde, absoluut bedoelde, tegenstelling geformuleerde criteria ons tegenwoordig geen enkel houvast meer bieden. De gerelativeerde tegenstelling kan wel zonder bezwaar worden toegepast, doch hierbij is, evenmin als bij enig ander wetenschappelijk onderzoek, een definitieve beslissing mogelijk.

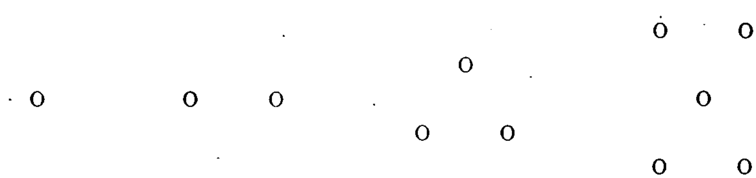
Op grond van onze relativering van de tegenstelling „a priori-a posteriori", of, wat op het zelfde neerkwam, „intuitief-empirisch", kunnen we nu de gestelde vraag zonder grote moeilijkheden beantwoorden. De synthetische en analytische functies van onzen geest zijn in den relatieven zin als a priori, als intuitief te beschouwen. Wij hebben nl. gezien, dat deze functies ons in staat stellen, de intuitieve getallenleer op te bouwen, en zodoende de subjectieve evidentie van de recurrente methoden te funderen. Anderzijds zijn deze functies mede verantwoordelijk voor het tot-stand-komen van de causaliteitsvoorstellingen. De bedoelde functies van onzen geest maken dus niet alleen het wiskundig denken mogelijk, maar tevens de natuurwetenschap, zodat aan beide in het derde hoofdstuk geformuleerde criteria voldaan is; zo vormen dus zowel voor de wiskunde, als voor de natuurwetenschap een a priori.

Het is verder in dit verband interessant, op te merken, dat na de bovenstaande uiteenzettingen de grens tussen wiskunde en natuurwetenschap enigszins schijnt te vervagen. Hier liggen belangrijke punten van aanraking met beschouwingen van M a n n o u r y, die de zuivere wiskunde beschouwt als een onderdeel van het natuurwetenschappelijk begripscomplex, van B e r n a y s, die (l.c.) ook in de wiskunde „gegenständlich motivierte" elementen meent aan te treffen, van G o n s e t h (Actes du 2me Congrès de Philosophie Scientifique, Parijs 1935), die logica en wiskunde beschouwt als een „physique de l'objet quelconque".

AANTEKENINGEN.

In het voorgaande had ik niet steeds de gelegenheid, de bestaande litteratuur over mijn onderwerp aan te halen en te bespreken; dat zou wellicht aan de duidelijkheid van mijn eigen beschouwingen enigszins afbreuk hebben gedaan. Om aan de aan die handelwijze verbonden bezwaren althans gedeeltelijk tegemoet te komen, zijn de volgende aantekeningen toegevoegd.

[1]) Ook Hertz en Schlick hebben in hun aantekeningen bij Helmholtz' verhandeling „Zählen und Messen" („Schriften zur Erkenntnistheorie", Berlijn 1923; deze verhandeling vertoont met de hier verdedigde inzichten belangrijke punten van overeenstemming) tegenover de ook door Helmholtz verdedigde fundering van het getalbegrip op de tijdsaanschouwing gewezen op de mogelijkheid van „momentaan tellen". Bij dit momentaan tellen worden echter niet zozeer *aantallen,* als wel bepaalde *groeperingen,* b.v.



herkend (volgens Enriques beschouwden de volgelingen van Pythagoras de natuurlijke getallen dan ook niet als *aantallen,* doch als *ruimtelijke structuren*); men stelt gemakkelijk vast, dat het momentaan herkennen van het aantal bij gewijzigde groepering spoedig gestoord wordt.

Bovendien stelt de hier bedoelde ruimtelijke getalvoorstelling ons niet in staat, de rij van de natuurlijke getallen als één geheel te overzien; de getallen worden hier integendeel sterk geindividualiseerd; in overeenstemming hiermee is de *getallenmystiek,* die immers aan elk getal een eigen specifieken invloed toeschrijft.

[2]) De onderscheiding tussen synthetische en analytische functies van ons bewustzijn houdt natuurlijk geen verband met de onderscheiding tussen analytische en synthetische oordelen.

[3]) Hiermee is, naar mijn mening, een grondslag gelegd voor, en een aansluiting verkregen bij de constructie van een autopsychologische of ik-nu-terminologie, zoals die door Mannoury in verschillende geschriften is verwerkelijkt. Het bestek van dit onderzoek liet niet toe, aan kwesties van meer terminologischen

(linguistischen) aard bijzondere aandacht te wijden; hiervoor worde dus naar bovenbedoelde geschriften verwezen.

Wel wil ik reeds thans wijzen op een parallel tussen Mannoury's onderzoekingen en mijn eigen beschouwingen. Waar Mannoury spreekt van een *abrupt complex,* spreek ik van een storing in de aperceptie. Ook Mannoury wijst op de nauwe betrekkingen tussen de abrupte complexen en de wiskundige denkwijze, minder duidelijk op die van de abrupte complexen tot de tijdsintuitie.

[4]) Ook Brouwer heeft in zijn dissertatie „Over de Grondslagen der Wiskunde" blz. 81 gewezen op de betrekkingen tussen de wiskunde en de causaliteitsvoorstellingen: „Den mensen is een vermogen eigen dat al hun wisselwerkingen met de natuur begeleidt, het vermogen nl. tot *wiskundig bekijken* van hun leven, tot het zien in de wereld van herhalingen van volgreeksen, van causale systemen in den tijd".

[5]) Vergelijk echter de aanvulling hierop in de „Conclusie".

[6]) Volledigheidshalve bespreek ik thans nog in het kort een verhandeling van een professioneel psycholoog, die zich op het hier betreden terrein beweegt; deze is van de hand van H. Nichols en onder den titel „The Psychology of Time" verschenen in „The American Journal of Psychology (III, 1891, IV, 1892). Aan deze verhandeling worde het volgende ontleend:

(p. 86) „The fundamental datum of our present explanations... we shall state to be that time *is* this attribute of duration wherever it exists. . . . every elementary sensation is *perceived* which presents itself in consciousness at all. When a sensation or image properly occupies the focus of attention, we shall say it is *apperceived.*

(p. 87) . . . . perception of time duration is *always a process and never a state; a certain definite time is a certain definite process.*

So also of series of sensations. That series occur at all is an ultimate fact or datum. What actually occurs when a series occurs we shall call a perception of a series.

(p. 92) But perception of the length of a sensation, the apperception of its length and the perception and apperception of its length as measured by some other sensation, are different matters altogether, as also are so-called perceptions of past, present, and future, and of other definite time relations, and of dates; all of which we must now consider . . . .

We must with greatest *care distinguish between perceiving time and apperceiving time relation.*

Perceptions of relation are commonly supposed to be involved in the very core of the indissoluble mystery of the unity of mind.

(p. 93) If two tones precisely alike in quality, intensity, and lenth, begin precisely together and end together, no relation will be perceived between them. If one begins perceptibly before the other, relations will appear. Without some qualitative or some intensive *change* there can be no temporal *relation*. The occurrence of the change in the qualitative or intensive nature of the perception *is* the perception of the relation . . . . Without qualitative or intensive change no series could occur; such change is the essential characteristic of a series; the change *makes* the series.

(p. 94) Strictly the *perceived Present* is the content of any perception at the time of its occurrence; is that occurrence itself. Similarly the *apperceived Present* is the occurring object of apperception; that which directs the association.

(p. 95) As the existence of any temporal portion of any mental content constitutes a perception of Present, so the *cessation* of its existence, constitutes a perception of Past. In order to perceive Past, some sensation or image must *cease*; . . . To have a perception of past relation, a *relation,* that is, as we have explained, a *change,* must occur.

(p. 96) . . . an apperception of Past is not an apperception of past relationship . . . . to apperceive any temporal *relation* AB, the change AB must occupy the focus of attention . . . .

(p. 100) As the fundamental sign of every idea of Present is the *continuation,* and that of every idea of the Past is the *cessation* of some representing image, so the fundamental sign or characteristic of every idea of the Future is the *beginning* of the representing associated images.

(p. 105) . . . . a word must be said as to apperception of number, in order fully to elucidate how we apperceive a sensation to denote *so many units* . . . .

For four sensations to be perceived, four sensations must occur; for these to be apperceived, the idea of four, *i.e.,* the word „four", or some four image reproductions, or both the word and the four reproductions must be added in proper apperceptive process thereto. So of any other number of sensations or images."

De analyse van de psychische processen wordt hier zonder twijfel minder ver voortgezet dan in bovenstaand onderzoek; dit is in de eerste plaats een gevolg hiervan, dat N i c h o l s bedoelt een bijdrage te geven tot de experimentele psychologie, terwijl wij ons eveneens op empirischen, maar dan op introspectieven grondslag hebben geplaatst. Toch komt hij hier en daar tot overeenkomstige gevolgtrekkingen, die ik even wil aanwijzen.

Zo brengt N i c h o l s de gewaarwording van het verleden in verband met het ophouden van een indruk; het is duidelijk, dat hij hier, als experimentator, de „het-taal" spreekt; inzender sprak hier van een storing in de apperceptie. Precies hetzelfde geldt met betrekking tot datgene, wat Nichols zegt over de toekomst.

[7]) Het is immers denkbaar, dat bepaalde kenniselementen slechts door de ervaring tot ontwikkeling kunnen komen, terwijl toch het eindresultaat van die ontwikkeling van den toevalligen inhoud van die ervaring geheel of gedeeltelijk onafhankelijk is; hetzelfde geldt immers voor de physieke ontwikkeling van den mens ten aanzien b.v. van de voeding.

Noot bij de correctie: het citaat op blz. 192 is ontleend aan *W. Gent,* „Die Raum-Zeit-Philosophie des 19. Jahrhunderts", Bonn 1930.

IS MEETKUNDE RUIMTELEER? [1]

DOOR

DR. J. HAANTJES.

Op de vraag wat meetkunde is, zou U waarschijnlijk en niet ten onrechte antwoorden: „Meetkunde is een deel van de wiskunde." Doch hiermede is alles nog niet gezegd. Zij is door deze uitspraak nog niet gekarakteriseerd. Sprekende over de taak, die de meetkunde heeft op het gebied der natuurwetenschap, zullen wij trachten na te gaan, waardoor ze zich dan van de overige wiskunde onderscheidt.

Het begrip meetkunde heeft in de loop der tijden groote veranderingen ondergaan. Telkens weer heeft men zich bezig gehouden met de vraag, welk deel van de wiskunde toch precies de naam meetkunde verdient. Het streven op zichzelf reeds, door middel van een definitie het terrein van de meetkunde op het uitgestrekte gebied van de wiskunde af te bakenen, doet de meetkunde al een bijzondere plaats innemen. Bij geen enkel ander gebied der wiskunde toch heeft men in die mate behoefte gevoeld aan een definitie. De gebezigde definities zijn niet altijd even positief. Enkele vooraanstaande meetkundigen van deze tijd bijvoorbeeld zijn van meening, dat de meetkunde een niet nader te omschrijven deel van de wiskunde is.

Wij willen nu aan de hand van een kort historisch overzicht van de definitie der meetkunde nagaan, welke opvattingen men in de loop der tijden heeft gehuldigd. Het ligt niet in mijn bedoeling hier een volledig overzicht te geven van de verschillende definities, hoe interessant een dergelijke opsomming ook zou kunnen zijn. Ik noem U slechts enkele, die typeerend zijn voor de tijden, waarin ze

[1]) Openbare les gehouden bij de aanvaarding van het ambt van lector aan de Vrije universiteit te Amsterdam op 30 September 1938.

VOORBERICHT

bij de verschijning in 1913 van I en II; II is in 1917 gesplitst in II A en II B.

Zooals de titel reeds aanduidt, is dit werkje bestemd om gebruikt te worden op M. U. L. O.-scholen en op andere inrichtingen van onderwijs met beperkt wiskunde-programma: H. B. S. voor Meisjes, Normaalscholen, Technische scholen enz. Het onderwijs op die scholen eischt m. i. boeken, die juist geven, wat men daar bereiken wil; neemt men uitgebreider boeken, dan moet veel worden overgeslagen en dat mag voor de theorie zooveel niet hinderen, het doorwerken van de vraagstukken blijft echter een voortdurende bron van moeite en last, daar men telkens vastloopt op zaken, die niet behandeld worden. Geheel in overeenstemming hiermee wensch ik op te merken, dat dit werkje ook niet ontstaan is door uit mijn grootere werken heele stukken en de moeielijke vraagstukken weg te laten, maar dat het geheel onafhankelijk daarvan bewerkt is; zoo zal men slechts hier en daar een vraagstukje ontdekken, nauwelijks één op de twintig, dat ook in die grootere werken staat.

Met een paar zeer bekwame en deskundige hoofden van M. U. L. O.-scholen had ik reeds menigmaal over het ontwerpen van een boekje als dit gesproken; dank zij hun voorlichting en de bestudeering van het programma voor de M. U. L. O.-examens en de examenopgaven der laatste jaren en...... niet het minst door mijn eigen werkzaamheid thans aan een H. B. S. met 3-jarigen cursus (welker leerlingen in ontwikkeling niet of niet noemenswaard verschillen van de M. U. L. O.-leerlingen) meen ik, dat dit boekje vrij wel weergeeft, wat men redelijkerwijs kan eischen.

Ik heb gedacht de theorie te moeten beperken tot het hoogst noodige, dikwijls slechts tot het geven van eenige uitgewerkte voorbeelden, naar welker model de leerlingen de volgende vraagstukken moeten maken; het aantal vraagstukken, waarbij telkens heele series gelijksoortige voorkomen, is vrij groot: de zelfwerkzaamheid van den leerling wordt daardoor bevorderd; anders zit hij om de twee of drie vraagstukjes telkens vast en dat is voor de kinderen ontmoedigend en voor den onderwijzer, die dikwijls tijdens de stille werkzaamheid van de eene afdeeling een andere afdeeling mondeling les geeft, uiterst lastig. Ook is het de beste manier om het geleerde er in te krijgen.

DE ONTVANGST

Enige van de vele besprekingen:

Deze aardige boekjes, gebonden in keurig mooie bandjes met verguldenי titel, zullen ongetwijfeld op die scholen, waarvoor de schrijver ze bestemde, wel opgang maken. De algebraische leerstof wordt duidelijk en klaar besproken, zoodat die zonder veel moeite het eigendom van den leerling zal worden; wij wijzen hier om maar iets te noemen, op de behandeling van merkwaardige producten en ontbinding in factoren, in § 35—§ 47 van het 1e stukje.

Het 1e stukje bespreekt de algebra tot en met de vergelijkingen van den eersten graad met twee en meer onbekenden en bevat meer dan 1000 opgaven en vraagstukken.

Het 2e begint met de vierkantsworteltrekking uit getallen, waarna de wortelvormen, vierkantsvergelijkingen, ,de eigenschappen harer wortels, gebroken en negatieve exponenten, logarithmen, samengestelde interest, onbepaalde vergelijkingen, machten van een binomium (driehoek van Pascal), achtereenvolgens een beurt krijgen. Dit boekje geeft daarenboven ter toepassing der behandelde leerstof nog meer dan 800 goed gekozen vraagstukken.

Heeren docenten in Wiskunde aan scholen voor m. u. l. o. enz. verzuimen niet met deze pennevrucht des heeren Wijdenes kennis te maken.

H. v. H. *De Katholieke School.*

Een eenvoudig werkje, dat op bevattelijke wijze de beginselen der Algebra behandelt. Eene korte theoretische uiteenzetting gaat aan ieder Hoofdstukje vooraf, waarna ter toepassing eene gansche reeks opgaven volgt. Dit is goed gezien. Juist door oefening, door herhaalde toepassing wordt het geleerde het eigendom van den leerling. *Schoon de schrijver naar beperking heeft gestreefd, geeft het werkje toch genoeg voor het diploma M. U. L. O. (B)*. Eene reeks Examenopgaven, zoowel van M. U. L. O. als van de H. B. S. met 3-jarigen cursus, besluit het tweede deeltje. *Die deze werkjes met zijne leerlingen g o e d doorgewerkt heeft, behoeft wat Algebra betreft, niet bevreesd te zijn,* dat zij op 't Examen voor dit vak onvoldoende zullen bekomen. *Een net en stevig bandje maakt, dat de boekjes ook uitwendig de aandacht trekken.*

Onze Vacatures.

Twee uitstekende boeken, waarin de algebra op eenvoudige wijze wordt behandeld, en die een groot aantal vraagstukken en oefeningen bevatten ter toepassing.

Antwoorden op deze oefeningen zijn mede apart verkrijgbaar.

Het Katholieke Schoolblad.

De schrijver geeft in deze boekjes kleine stukjes theorie, gevolgd door reeksen opgaven. Te moeilijke onderwerpen zijn terecht achterwege gelaten. Vooral voor jeugdige beginners moet men zijn verwachtingen niet te hoog spannen. Ze leeren door het „doen" het meest en het best. Daarom kan men in 't begin de opgaven niet licht te eenvoudig nemen.

De kennismaking met deze boekjes, die er ook uiterlijk allerliefst uitzien, kan ik ten zeerste aanraden.

R. v. W. Pzn. *School m/d Bijbel.*

Het kenmerkende van dit boekje is: de theorie is kort en krachtig, geen gebazel, maar opschieten. Een kort resept gaat vooraf aan elke nieuwe bewerking, vaak met verwijzing naar de gelijknamige bij de rekenkunde.

't Lijkt me een genot dit boekje te gebruiken. De antw. zijn alleen voor leraren en ze zijn goed.

F. B. *De Volksschool.*

Aan 't uiterlijk dezer boekjes is veel zorg besteed: ze zijn sierlijk gebonden en zeer netjes gedrukt. En 't komt ons voor, dat ze deze keurige verzorging verdienen wegens de deugden van hun innerlijk.

Als men spreken kon van aanschouwelijke Algebra — of voorzoover men daarvan spreken kan — zou men dit werkje zoo kunnen noemen.

Tot bl. 47 van het tweede deeltje is noodig voor diploma A van de examens M. U. L. O.; de opgaven van die examens in de jaren 1907—1912 vindt men in het tweede deeltje op bl. 45 tot bl. 47; de rest bovendien voor diploma B; in de Herhaling bl. 89 tot bl. 114, 2e deeltje vindt men de opgaven van de examens M. U. L. O. in de jaren 1907—1912 en de eindexamens van de Eerste H. B. S. met driejarigen cursus te Amsterdam gedurende de jaren 1902—1912.

Openbare School.

Zeer zeker bruikbare boekjes. Een korte zakelijke inhoud met veel opgaven. 't Tweede deeltje bevat nog een samenvatting van alle in de boekjes voorkomende formules.

Ten slotte de opgaven van de examens M. U. L. O. voor diploma B voor de jaren 1907—1912, en de vraagstukken v. d. eindexamens H. B. S. driej. cursus te Amsterdam van de jaren 1902—1912.

De druk is uitstekend. De uitvoering prachtig. In hun rood linnen bandje zien de boekjes er aantrekkelijk uit.

V. *Het Schoolblad.*

Dit deeltje is in denzelfden geest bewerkt als het eerste: beknopte, maar duidelijke theorie en veel opgaven. Hierbij zijn die van de M. U. L. O.-examens A en B en van de Eindexamens der 1ste H. B. S. met 3-j. c. te Amsterdam. De besproken onderwerpen zijn: vierkantsvergelijkingen; gebroken en negatieve exponenten, logarithmen; samengestelde intrest; onbepaalde vergelijkingen en binomium.

De leerlingen, die dit deeltje goed hebben doorgewerkt, kunnen gerust aan het examen deelnemen; zij zullen voor algebra geen slecht figuur maken.

V. *Het Schoolblad.*

BIJ DE SNEL OPVOLGENDE HERDRUKKEN:

Onveranderde druk: dat wil hier zeggen, dat deze druk naast de vorige kan worden gebruikt, wat een zeer groot voordeel is voor een schoolboek. Niettemin heeft de schrijver aan dezen druk toegevoegd eenige afzonderlijke paragrafen, naar aanleiding van de mondelinge examens voor diploma A van 1918. Zoo blijft het op de hoogte van den tijd, en zal het zijn weg naar den 8en druk vinden.

K. t. B. *De Nederlander.*

Vijf drukken in vier jaar tijds! Commentaar overbodig. We wenschen schr. en uitgever met dit uitstekend leerboekje bij voortduring een alleszins verdiend succes.

B. F. Z. *Christelijk Schoolblad.*

De *eerste druk* verscheen *Januari 1913,* deze *tiende* in *1920* en dat wel zoo goed als ongewijzigd. Meer behoeven we zeker niet te zeggen.

De Christelijke Onderwijzer.

Dat wil er in! En dan 4 drukken, die geheel gelijk zijn, die men naast elkaar kan gebruiken. Wat 'n buitenkansje!

De Chr. onderw.

Hèt algebra-boek voor mulo-scholen. In vijf jaren vijf drukken! In dit deeltje zijn de formules en regels op een apart blaadje bijeengevoegd. 't Is goed om deze formules te laten memoriseeren. Daartoe het losse blad.

Het Kath. Schoolbl.

De eerste druk van dit mooie boekje verscheen in 1913 en werd door ons in dit weekblad gunstig besproken. Dat na twee jaren een derde druk noodzakelijk is, bewijst wel, dat *Wijdenes Algebra* op de scholen voor M. U. L. O. een gunstig onthaal vindt, zoodat verdere aanbeveling overbodig kan geacht worden.

De *Antwoorden* zijn „uitsluitend voor leeraren" bestemd. Dat deze een 2en druk beleven, pleit eveneens voor een druk gebruik op vele inrichtingen van onderwijs.

H. v. H. *Kath. school.*

Naar aanleiding van een vorige druk schreven we: „'t Lijkt ons een genot deze boekjes te gebruiken." 't Schijnt, dat er meer zo over gedacht hebben en zich er wel bij bevinden, getuige de snel elkaar opvolgende herdrukken.

Van deel I kunnen de 4 drukken naast elkaar gebruikt worden.

In deel II is enige verandering gekomen met het oog op de eisen voor dipl. M. U. L. O. A en B.

De eig. van de wortels ener vierk. verg. zijn verschoven van B naar A, alsook: de ontbinding van $x^2 + p\, x + q$."

F. B. *De Chr. school.*

De eerste druk verscheen in 1913. De achtste in Sept. 1919. De negende nu! 't Wijst op een reusachtig debiet. En dat debiet is wel verdiend. Bij ondervinding weet ik, dat de leerlingen graag uit dit boekje werken. De vraagstukken vorderen niet eindeloos gecijfer. Ze zijn kort. En goed gerangschikt. Daardoor hebben de leerlingen succes met hun werk. En de ambitie wordt gaandeweg grooter.

N. v/h Noorden.

Het is geen eenvoudige taak een beoordeeling te schrijven over den vierden druk van een werkje, geschreven door een uiterst bekwaam schrijver. Het boekje, dat de stof helder, eenvoudig en overzichtelijk behandelt, lijkt me uitnemend geschikt voor het technisch lager onderwijs.

F. W. *Het zoeklicht.*

Geen algebraboek voor M. U. L. O. en soortgelijke scholen hebben we met meer genoegen gebruikt dan dit, waarvan elk jaar een herdruk noodzakelijk is.

Het Kath. schoolbl.

Wel het meest gebruikte werkje voor Algebra op de M. U. L. O.-scholen.

Corresp.bl. v/d V. voor Mulo.

Volgende drukken werden als volgt aangekondigd.

I. 19e druk.

Het feit alleen, dat dit boekje binnen 15 jaar negentien drukken mocht beleven, zegt genoeg. Deze 19e druk is gelijk aan de vorige, zoodat alle drukken naast elkaar kunnen worden gebruikt. Het is een schoolboek voor Algebra, dat, ook voor de Indische Mulo, alle aanbeveling verdient.

Het M. U. L. O.

Negentiende druk...... dus bekend genoeg. Veel gebruikt, en met reden.

t. B. *Chr. Sch.bl. Onze Vacatures.*

22e druk.

Deze druk is ongewijzigd. Reeds vroeger hebben we onze meening hierover gezegd.
Gezien het aantal verschenen drukken, zal verdere aanbeveling ook wel overbodig zijn.

Corr.blad.

Dit zeer geschikte boekje heeft ook bij dezen herdruk geen veranderingen ondergaan.

R. van W. *De School met den Bijbel.*

25e druk.

Een jubileum, nl. de 25ste druk. Nog altijd ongewijzigd. Als steeds aanbevolen.

De School m/d Bijbel.

29e druk.

Het eerste deeltje is overbekend en wordt op heel veel U. L. O.-scholen gebruikt; het aantal herdrukken zegt genoeg. Het boekje is vrijwel onveranderd gebleven; alleen is een toegift van 120 herhalingsvraagstukken toegevoegd.
Van het tweede deeltje kan dit niet gezegd worden, het is aanzienlijk bekort; het geeft nu alleen de A-stof en na de Schriftelijke Opgaven voor het M. U. L. O.-examen een groot aantal gemengde opgaven.
De deeltjes I en II A kunnen nu in elk opzicht voor de U. L. O.-scholen aanbevolen worden; d.w.z. voor de A-candidaten. Het spreekt

vanzelf, dat de boekjes het keurige uiterlijk hebben, dat we gewend zijn.

B. *De Bode.*

II A werd op overeenkomstige manier aangekondigd als I en II B.

II B. 6e druk.

Evenals het eerste deeltje maakt ook dit tweede deeltje een aangename indruk. *De theorie wordt er duidelijk en overzichtelijk behandeld.*

L. S. *Tijdschr. R.K. Ouders en Opvoeders.*

Het voorbericht meldt, dat de beide werkjes Algebra voor M. U. L. O. I en II B ruimschoots voldoende geven voor de beide diploma's — en een volkomen veilige gids zyn voor de examens A. en B. — Het aantal drukken bewijst, dat het boekje gaat. De groote waarde ligt m.i. in de verzameling v r a a g s t u k k e n.

De 6e druk kan naast de 4e en de 5e gebruikt worden.

De Nederlander.

7e druk.

De veelgebruikte „Algebra" behoeft niet nader besproken te worden.

De Kath. School.

8e druk.

Geeft voldoende voor de diploma's A en B. Een groote hoeveelheid oefenstof. Ook als repetitie-boek uitstekend geschikt.

De Nijverheidsschool.

9e druk.

Slechts enkele geringe wijzigingen werden aangebracht. Gaarne aanbevolen.

Corr.blad.

Deze 9e druk wijkt niet veel af van den vorigen druk. De examenopgaven zijn aangevuld, waartegenover staat, dat enkele H. B. S.-examens 3-j. cursus vervallen zijn. Bovendien is een paragraaf ingelascht over interpoleeren. Waar deze uitgave blijkens 't aantal drukken zich op onze scholen een goede naam verworven heeft, is verdere aanbeveling overbodig.

B. *Correspondentieblad.*

Het is een uitgave speciaal voor verschillende inrichtingen met beperkt wiskunde-programma. Aanbevolen.

......„Herwaarts".

11e druk.

In deze nieuwe druk zijn weer enkele verbeteringen aangebracht. We noemen o.a. de eigenschappen van de logarithmen en het limietbegrip. Het laatste wordt op bevattelijke wijze voor jonge leerlingen behandeld, wat natuurlijk niet uitsluit, dat mondelinge toelichting door den leraar voor de meeste leerlingen nodig zal zijn. Het boekje bevat een groot aantal opgaven voor herhaling. Verder zijn de opgaven van de schriftelijke examens voor Diploma A en B over de laatste 23 jaar opgenomen. Tevens een aantal vragen van mondelinge examens, zowel voor A als B. De gebruikers vinden ten slotte nog de examen-vraagstukken van de eindexamens der 1e H. B. S. met drie-jarige cursus te Amsterdam van de jaren 1912—1934.

Voor B-Candidaten het aangewezen werkje.

T. d. V. *De School met den Bijbel.*

DE VERKORTE UITGAVE VAN II A.

Het eerste deeltje is overbekend en wordt op heel veel U. L. O.-scholen gebruikt; het aantal herdrukken zegt genoeg. Het boekje is vrijwel onveranderd gebleven; alleen is een toegift van 120 herhalingsvraagstukken toegevoegd.

Van het tweede deeltje kan dit niet gezegd worden, het is aanzienlijk bekort; het geeft nu alleen de A-stof en na de Schriftelijke Opgaven voor het M. U. L. O.-examen een groot aantal gemengde opgaven.

De deeltjes I en II A kunnen nu in elk opzicht voor de U. L. O.-scholen aanbevolen worden; d.w.z. voor de A-candidaten. Het spreekt vanzelf, dat de boekjes het keurige uiterlijk hebben, dat we gewend zijn.

B. *De Bode.*

11e druk.

Deze Elfde Druk in verkorte uitgave ontleent zijn ontstaansrecht aan wat in het voorbericht aldus is uitgedrukt: „Voor diploma A kunnen we met minder dan de helft van uw Algebra voor M. U. L. O. A volstaan" (uit een brief a. d. schrijver);

„......alles in overeenstemming met de vastgestelde leerstof......";

„Aan het slot vindt men 25 stellen opgaven van de examens M. U. L.O., 10 mondelinge examens en nog een algemene herhaling van 200 vraagstukken......";

„Bij de samenstelling van de mondelinge examens en de algemene herhaling heb ik mij ook met volle instemming gehouden binnen de grenzen, die de Vereniging voor M. U. L. O. zo juist heeft getrokken."

In 46 bladz. worden behandeld, afgewisseld door een voldoend aantal opgaven: Vierkantsworteltrekking; Wortelvormen; Vierkantsvergelijkingen en Eigensch. v. d. wortels van een v.k.v.. Daarachter volgt bovengen. repetitie- en toetsstof.

Valcooch.

In zijn „Voorbericht" vertelt de schrijver, hoe hij er door een opmerking van een correspondent toe gekomen is, zijn oorspronkelijke M. U. L. O.-boekje voor het A-diploma belangrijk te vereenvoudigen. Vooral uit het onderdeel der wortelvormen is heel wat verwijderd. Nu is het geheel in overeenstemming gebracht met de eisen van het examen.

In deze nieuwe vorm ziet het boekje er uitstekend uit. De theorie is zeer sober, maar goed. Het aantal vraagstukken is uitgebreid. Het boekje eindigt met een belangrijke serie examenopgaven, zowel voor het schriftelijk als voor het mondeling examen.

Als gewoonlijk is de technische uitvoering uitstekend.

Aanbevolen.

C. *De School v. N. O. I.*

DE UITGEWERKTE ANTWOORDEN.

„De antwoorden zijn alle uitgewerkt verschenen. Ik benijd volstrekt niet den M.U.L.O.-onderwijzer, die op één dag les heeft te geven in Alg. Geschiedenis, Engels, Algebra en Natuurkunde en ik geloof hem een grote dienst te doen, door hem bij de correctie de moeite te besparen van het uitrekenen van al die sommetjes; dat is voor hem niets dan lelijk tijdverlies, dat nergens goed voor is." P. W.

Dit was en is nog steeds de mening van den schrijver.

Hoe de pers de uitwerkingen ontving:

De schrijver weet wat een mensch toekomt en maakt, door van alle opg. met log. en van vele andere de volledige uitwerking te geven, de korreksie van een last bijna tot een lust.

Een opmerking aan de voet van blz. 73 is ons uit het hart gegrepen. Deze luidt: we willen hopen, dat de tijd niet ver meer af is, waarin men inziet, dat tafels, eens voor al berekend, de studerende tijd en moeite mogen besparen voor betere zaken.

Deze uitgaven is uitsluitend voor leraren.

F. B.

Een uitkomst voor onderwijzers en leeraren in de wiskunde. Vooral de uitgewerkte opgaven over logarithmen. Want het zelf nacijferen van die dingen is tijdverslindend.

B. C. *De School.*

Prachtige uitvinding, die antwoorden.

A. v. d. S. *Kath. Sch.bl.*

Geen gewone antw. Zo zijn b.v. alle vraagst. met log. uitgewerkt. Van sommige zijn 2 antw. gegeven, een met log., een met rentetafel.

Deze antw. maken de boekjes, waarbij ze behoren, nog aantrekkeliker.

F. B. *De Volkschool.*

HET GOEDKOOPSTE BOEK VOOR ALGEBRA.

WAAROM HET GOEDKOOPSTE?

Op een school zijn 45 boekjes I, 35 II A verkort, 15 II B; het aantal leerlingen voor deze boekjes is opv. 48, 30 en 17; 3 van I er bij, 5 van II A in de kast, 2 van II B er bij. Een volgend jaar op dezelfde manier; al staat deel I 10 jaar in de kast, het is nog bruikbaar; II A, de onverkorte en de verkorte en II B *verschillen enkel* in de examenopgaven, die er bij een volgende druk bijkomen; daar is geen ontkomen aan. Door de snelle opeenvolging van de drukken zijn de uitgaven II A, II A verkort en II B met de examenopgaven steeds bij.

Pres. ex. met het oog op invoering van II A, II A verkort en II B aan te vragen aan den uitgever of aan den schrijver.

● Bij invoering ontvangt de docent op aanvraag gratis en franco de antwoordenboekjes; in duplo; een voor school en een voor thuis.

Grotere oplagen volgen elkaar steeds sneller op.

Uitgaven van P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

werden uitgesproken. Opvallend is, dat deze definities nogal erg uiteenloopend zijn.

Richten wij om te beginnen onze gedachten naar het verre verleden. Voor de Grieken lag de definitie van de meetkunde in het woord *geometrie* besloten. Voor hen was meetkunde de wetenschap, die zich bezig hield met de bepaling van de *maat van de aarde*. Natuurlijk kon deze beperkte omschrijving zich niet lang handhaven. Al heel gauw werd ze becritiseerd, o.a. door Plato, die deze omschrijving belachelijk vond. Men heeft toen in deze uitdrukking het woord *aarde* door *ruimte* vervangen. Meetkunde werd nu gedefinieerd als de wetenschap, die zich bezig hield met de beschrijving van de figuren van onze ruimte, speciaal wat betreft de maat. Deze definitie heeft men later uitgebreid, door aan het begrip *maat* het begrip *plaats* of *rangschikking* toe te voegen. Niet alle meetkundigen waren het met deze toevoeging direct eens, doch de voorstanders meenden nu eindelijk de goede vorm gevonden te hebben, immers deze beide begrippen wezen op een soort *dualisme* en het dualisme beschouwde men als een van de voornaamste eigenschappen van de natuur.

De zooeven genoemde definitie van de meetkunde bleef ongeveer in deze vorm gehandhaafd tot in de negentiende eeuw. Doch dan geeft Felix Klein blijk van een geheel nieuwe opvatting omtrent de meetkunde. In het jaar 1872 vestigt hij opnieuw de aandacht op het probleem van het wezen der meetkunde door het opstellen van zijn beroemd geworden *„Erlanger Programm"*. Klein kenschetst hierin de meetkunde als de *invariantentheorie van een transformatiegroep,* een uitspraak, die wel erg verschilt van de reeds genoemde. De omschrijving, die Klein hiermee geeft, willen wij met een enkel woord nader toelichten. Als wij nagaan, wat ons eigenlijk interesseert in de gewone meetkunde, als ik met deze naam voor het oogenblik de Euclidische meetkunde mag aanduiden, dan bemerken we, dat het die eigenschappen van lichamen of figuren zijn, die niet veranderen, wanneer we deze lichamen verplaatsen, dus hun punten aan een orthogonale transformatie onderwerpen. Het komt derhalve hierop neer, dat we eigenschappen van figuren, d.w.z. puntverzamelingen, zoeken, die invariant zijn bij de groep van de orthogonale transformaties. Men kan nu ook andere transformatiegroepen beschouwen, en de eigenschappen trachten te vinden, die daarbij invariant zijn. Men verkrijgt dan andere soorten meetkunde, waarop we nader terugkomen.

Men moet de zooeven genoemde uitspraak van Klein niet zoozeer als definitie van de meetkunde beschouwen, dan wel als een poging een korte samenvatting te geven van het probleem van de meetkunde, die een leiddraad kan zijn bij het onderzoek. Het „Programm" laat de mogelijkheid zien de verschillende meetkunden vanuit een centraal gezichtspunt te bestudeeren en heeft als zoodanig groote verdienste voor de meetkunde gehad.

Ik wil U nog wijzen op een essentieel verschil, dat er bestaat tusschen de definitie van Klein en die uit de oudheid. Laatstgenoemde toch trachtte het *doel* van de meetkunde weer te geven, terwijl we mijns inziens in de uitspraak van Klein alleen kunnen zien het aangeven van een *middel*, een *werkwijze,* om tot dat doel te komen. Deze werkwijze bestaat dan in het bestudeeren van de invariantentheorie van een transformatiegroep; het doel wordt door hem niet nader aangegeven. In dit stadium geeft men het op, het doel nader aan te duiden en vinden we als definities voor de meetkunde alleen nog omschrijvingen van het middel.

Wenden wij ons thans tot enkele meer moderne auteurs, teneinde een indruk te krijgen van de hedendaagsche opvatting. Naast de reeds genoemde uitspraken over de meetkunde stellen wij dan het antwoord dat Veblen en Whitehead gegeven hebben op de vraag: „Wat is meetkunde". Dit antwoord, dat men in een van hun werken, dateerend uit het jaar 1932, kan vinden [1]), luidt als volgt:

„Meetkunde is een wiskundige wetenschap .... een tak van de wiskunde wordt meetkunde genoemd, omdat een voldoend aantal competente menschen haar deze naam geeft, op grond van gevoel en traditie."

Natuurlijk is deze uitspraak niet ernstig bedoeld als definitie van de meetkunde. Men moet het zoo verstaan, dat naar de meening van genoemde schrijvers de meetkunde geen scherp omlijnd gebied van de wiskunde vormt en dat het geen zin heeft de wiskunde in meetkundige en niet meetkundige onderdeelen te verdeelen. Men

---

[1]) The foundations of differential geometry. Cambr. Tracts., nr. 29.

zou dus niet mogen vragen „wat is meetkunde", doch alleen „wat verstaat men tegenwoordig onder meetkunde". Hier geeft men klaarblijkelijk ook op een nadere omschrijving te geven van datgene, wat we zooeven het middel, de werkwijze, genoemd hebben.

Als we de ontwikkeling der meetkunde in de laatste vijftig jaar nagaan, zal het ons niet verwonderen, dat men tot deze uitspraak gekomen is. In het „Erlanger Programm" komt de onderlinge verhouding van de destijds bestaande meetkunden zeer goed uit. Doch de ontwikkeling van de meetkunde stond niet stil. Omstreeks 1917 ontdekten Levi-Civita en Schouten de pseudo-parallele verschuiving of overbrenging. Hieronder verstaat men het volgende: Aan elk punt van een willekeurige *n*-dimensionale ruimte wordt een Euclidische ruimte toegevoegd, die locale ruimte genoemd wordt. Een afbeelding nu van naburige locale ruimten op elkaar, waarbij lengten en hoeken gelijk blijven, bepaald een meetkunde. Deze nieuwe meetkunde, de meetkunde van de overbrenging, viel niet meer onder het schema van het „Erlanger Programm". Men moest daarom dit schema veranderen, wat men dan ook meerdere malen gedaan heeft. Later werden weer nieuwe meetkundige vondsten gedaan, o.a. werd de projectieve differentiaalmeetkunde ontwikkeld, die op haar beurt een verandering noodig gemaakt zou hebben. Vandaar dan ook de genoemde uitspraak van Veblen en Whitehead.

Zooeven hebben we het door Klein opgestelde schema gezien als het aangeven van een middel ter bestudeering van de meetkunde, als een bestudeeringswijze. Het spreekt vanzelf, dat dit alleen gerechtvaardigd is, als we aan de meetkunde een zekere taak toeschrijven, een taak, waaraan de tijdgenooten van Klein konden arbeiden door zijn beroemd schema uit te werken, terwijl een volgende generatie deze taak kon helpen vervullen door de leer van de overbrengingen te bestuderen. Deze taak zouden wij willen zien als *het zoeken naar een zoo nauwkeurig mogelijke beschrijving van onze ruimte,* de ruimte, waarin wij leven. Zooals de theoretische physicus naar verklaringen zoekt voor natuurkundige verschijnselen en hiervoor theorieën opstelt, zoo zoekt de meetkundige naar mogelijke ruimtevoorstellingen. Aan anderen, aan de waarnemers van onze ruimte, zal hij het moeten overlaten vast te stellen, welke van deze ruimtevoorstellingen de juiste is. Wij willen de meetkunde dus zien als ruimteleer; deze uitspraak is niet zoozeer bedoeld als definitie, dan wel als een opgaaf voor de meetkunde.

Gelukkig hebben de meetkundigen bij het vervullen van deze taak hun toevlucht genomen tot de wiskunde en heeft men logische systemen opgebouwd, die niet op de ervaring berusten. Het opstellen van een dergelijk systeem komt hierop neer, dat men zekere grondbegrippen (punt, rechte, enz.) definieert en daarvoor eenige axioma's of postulaten gaat invoeren, waarvan geëischt wordt, dat ze niet met elkaar in tegenspraak zijn. Kiest men andere axioma's, dan krijgt men een ander wiskundig systeem, wat we gewoon zijn dan een andere meetkunde te noemen. Om na te gaan of een bepaalde meetkunde als ruimteleer bruikbaar is, zal men dus kunnen volstaan met de axioma's aan de ervaring te toetsen, indien dit tenminste mogelijk is. Men moet daarbij natuurlijk eerst afspreken, welke physische grootheden met de grondbegrippen zullen correspondeeren, b.v. wat we een rechte zullen noemen. Hoewel deze logische systemen, zooals ik reeds opmerkte, niet op de ervaring berusten, heeft toch de ervaring bij de opbouw wel degelijk een groote rol gespeeld. Hierop komen wij nog nader terug.

Het gebied, waarin de meetkundige werkt en de bron, waaruit hij put, is zooals we zien de wiskunde. Wat hij hiervan echter noodig zal hebben, is van te voren onmogelijk te zeggen, vandaar dan ook, dat pogingen dit gebied af te bakenen op den duur moesten falen. Het „Erlanger Programm" bevatte, zooals we gezien hebben, een dergelijke afbakening, die later dan ook bleek te weinig omvattend te zijn. Dit wil niet zeggen, dat dit „Programm" niet van groote beteekenis geweest zou zijn. Klein heeft zijn tijdgenooten ongetwijfeld een beter inzicht in de problemen van de meetkunde gegeven.

Wij moeten meetkunde dus wel als een wiskundige wetenschap beschouwen, die echter op een bepaald doel gericht is, namelijk het scheppen van mogelijke ruimtevoorstellingen.

Het lijkt er misschien eenigszins op, dat ik hier aan de vele definities en omschrijvingen, die we van de meetkunde bezitten, nog maar eens een toevoeg. Niets is echter minder waar dan dat. Ik heb slechts de meening weergegeven van vele, misschien mag ik zeggen bijna alle meetkundigen, die aan de opbouw van de meetkunde hebben medegewerkt. Dat het genoemde doel van de meetkunde aan vele meetkundigen voor oogen heeft gestaan, blijkt uit de groote invloed, die de ervaring op haar opbouw heeft gehad. Men kan hier spreken van een wisselwerking, die vaak vruchtbaar gebleken is, doch soms naar het schijnt ook wel de ontwikkeling van de meetkunde heeft geremd.

Teneinde deze bewering met feiten te staven willen we de historische groei van de meetkunde fragmentarisch nagaan en wel speciaal in verband met de zooeven genoemde uitspraak over de meetkunde. Wij zullen hierbij niet naar volledigheid streven wat betreft deze historische ontwikkeling, omdat het ons niet in de eerste plaats om de geschiedenis zelve te doen is, doch willen slechts enkele historische feiten naar voren brengen, die belangrijk zijn geweest voor de grondslagen van de meetkunde. Niet in de eerste plaats het bouwwerk der meetkunde zelf, doch de fundamenten, waarop dit bouwwerk berust, vragen hiervoor onze aandacht.

De oorsprong van de meetkunde vindt men bij de Chaldeeën en de Egyptenaren. Deze meetkunde der oudheid heeft het karakter gehad van een ervaringswetenschap in de enge zin van het woord. Zij diende hoofdzakelijk voor practische doeleinden en beperkte zich tot empirische regels. Het waren vooral de landmeters en bouwmeesters, die deze regels vonden en gebruikten. Een meetkundestelling was voor hen een physische wet, die men verkreeg, of door deze uit andere stellingen af te leiden, het bewijs, dan wel langs empirische weg, de proef.

Een groote ommekeer in deze beschouwingswijze brengen de Grieken. Hun exactheidsbegrip en neiging tot logische redeneering doet hen de proef als bewijsmiddel voor stellingen verwerpen. Men zoekt voor de meetkunde naar een logisch systeem, naar een wiskundige opbouw. De geschiedschrijvers noemen verscheidene personen, allen Grieken, die in deze richting zochten. Euclides (285 v. Chr.), de beroemde schrijver van „de Elementen", neemt onder hen de voornaamste plaats in. Zijn opbouw van de meetkunde is door volgende generaties algemeen aanvaard. Een bepaalde bewering wordt uit een vorige afgeleid, deze weer uit vorige enz., totdat men zoo teruggaande tot enkele stellingen gevoerd wordt, die niet uit vorige zijn af te leiden om de eenvoudige reden, dat er geen vorige zijn. Deze onbewijsbare stellingen worden door

E u c l i d e s aangenomen. Wij noemen ze axioma's. Tot op deze dag heeft dit systeem, deze meetkunde, zich gehandhaafd. Teneinde haar van de later opgestelde meetkundige systemen te onderscheiden, wordt zij, ter eere van haar grooten grondlegger, *Euclidische meetkunde* genoemd. Het is de meetkunde, die wij ons op het gymnasium of de H.B.S. met meer of minder vrucht hebben trachten eigen te maken.

De groote verdienste van E u c l i d e s is, dat hij ons leert, hoe men de meetkunde als logisch systeem, onafhankelijk van de ervaring, kan opbouwen. Naar zijn model wordt ook nu nog steeds gewerkt. Toch heeft bij deze opbouw de ervaring of laat ik liever zeggen de aanschouwing een rol gespeeld. De grondbegrippen, punt, rechte enz., worden beschreven, doch niet gedefinieerd. Hier wordt een beroep op de aanschouwing gedaan. Ook heeft E u c l i d e s geen willekeurig stelsel axioma's gekozen, doch hij kiest deze grondstellingen zoo, dat ze met voldoende nauwkeurigheid in overeenstemming zijn met het experiment en direct van toepassing zijn op de ruimte, waarin wij ons bewegen. Hij kiest ze zoo, dat ze naar zijn meening „waarheid" bevatten. Hier bedoel ik met waarheid bevatten, in overeenstemming zijn met de werkelijkheid, geldigheid hebben voor onze ruimte. Het zou nog lang duren voor men aan de waarheid van deze meetkunde zou gaan twijfelen.

Wanneer we nu, zonder bij het tusschenliggende tijdperk lang stil te staan, overgaan van 300 jaar vóór Christus naar de negentiende eeuw na Christus, dan wil dat niet zeggen, dat er wat betreft de meetkunde in deze 2000 jaar weinig gebeurd is, wat vermeldenswaard is. De ontwikkeling van de meetkunde heeft in deze tijd niet stil gestaan. Bestaande methoden werden uitgebreid, en daarnaast vele nieuwe gevonden. Ik wil U er één noemen. De toepassing van de analyse en algebra op de meetkunde. Zij voerde tot de analytische meetkunde, ook wel eens geometrie van D e s c a r t e s genoemd, daar deze de eerste geweest is, die de algebra wist te gebruiken voor de theorie van de krommen. Enkele meetkundigen hebben in de analytische meetkunde een aanranding gezien van het wezen der meetkunde, hoewel ten onrechte. Zij heeft immers niet het doel van de meetkunde veranderd, doch slechts een wijziging gebracht in de methoden, die tot dit doel leiden. Uit de geschriften blijkt ook, dat men het benoodigde deel der analyse niet met de meetkunde vereenzelvigde, doch dat men de meetkunde als ruimteleer bleef beschouwen. Monge zegt in een van zijn werken, dat niet de analytische formule het doel is, doch slechts de kortste uitdrukkingswijze van werkelijk voorgestelde ruimtelijke betrekkingen. Wij zullen niet langer stil staan bij de methoden, die in het genoemde tijdperk hun intree deden, omdat geen van deze op de beschouwingswijze van het wezen der meetkunde een zoo groote invloed gehad heeft als de in de negentiende eeuw naar voren komende *niet-Euclidische meetkunde.*

Wij hebben reeds gezien, dat de Euclidische meetkunde op een aantal axioma's berust. Van een stelsel axioma's moet vanzelfsprekend steeds geëischt worden, dat deze niet met elkaar in strijd zijn. Er wordt echter ook steeds naar gestreefd ze zóó te kiezen, dat ze onafhankelijk zijn. Wat nu de axioma's van Euclides betreft, men heeft nooit aan het niet strijdig zijn getwijfeld, wel echter aan de onafhankelijkheid. Vele pogingen zijn gedaan één der axioma's, en wel het axioma van de evenwijdige lijn uit de andere af te leiden. Dit axioma komt hierop neer: „men kan in een plat vlak door een punt buiten een rechte lijn steeds één en slechts één rechte lijn trekken, die de eerstgenoemde lijn niet snijdt, hoever men beide ook verlengt." Vooral omstreeks 1800 ontstond er een ware wedijver onder de meetkundigen, wie toch wel de gelukkige zou zijn, het bewijs van dit axioma, waardoor het dan een stelling geworden zou zijn, te vinden. Vele z.g. bewijzen zijn gepubliceerd, doch Gauss, die zelf in zijn jeugd ook menige poging aangewend heeft, wist al deze bewijzen te weerleggen en de fouten hierin op te sporen.

Gauss volgt echter nog een andere methode. Hij gaat van de veronderstelling uit, dat het axioma van de evenwijdige lijn niet geldt en stelt nu voor dit axioma een ander in de plaats, namelijk dat men in een plat vlak door een punt buiten een rechte lijn steeds meer dan één rechte lijn kan trekken, die de eerste, hoe ver ook verlengd, niet snijdt. De lijnen door een punt, evenwijdig aan een gegeven rechte, vormen dan een waaiertje. Uit het zoo verkregen axiomastelsel leidt hij nu stellingen af in de hoop op een eigenschap uit te komen, die het gevolg is van de nieuwe axioma's en toch kennelijk onjuist is, d.w.z. in onze ruimte niet geldt. Zou dit gelukken, dan was daarmede de juistheid van de Euclidische meetkunde aangetoond en zou G a u s s de nieuwe meetkunde naast zich hebben neergelegd. Ik wil U enkele stellingen noemen uit deze nieuwe meetkunde, die we *een niet-Euclidische meetkunde* noemen. Een der belangrijkste stellingen drukt uit, dat de som van de hoeken van een driehoek kleiner dan 180° is. De afwijking van 180° blijkt evenredig te zijn met het oppervlak van de driehoek. Teneinde deze stelling aan de practijk te toetsen, wordt de som van de hoeken van een driehoek, gevormd door drie bergtoppen, Brocken, Hoher Hagen en Inselberg, gemeten. De afwijking van 180° blijkt binnen de grenzen van de experimenteele nauwkeurigheid te liggen, waaruit te concludeeren valt, dat indien onze ruimte niet-Euclidisch zou zijn, de afwijking van de Euclidische ruimte wel zeer gering moet zijn. Hierbij kunnen we opmerken, dat de onvermijdelijke waarnemingsfouten het onmogelijk maken door een meting de juistheid van de Euclidische meetkunde aan te toonen. Wel zou het tegendeel uit metingen kunnen volgen.

Een andere eigenschap van de nieuwe meetkunde is het bestaan van een absolute lengte-eenheid. Misschien mag ik dit met een enkel woord toelichten. Zooals we zagen hangt de som van de hoeken van een driehoek af van de oppervlakte van die driehoek en wel zoodanig, dat alle driehoeken, waarvan de som van de hoeken een bepaald bedrag, b.v. 179° is, hetzelfde oppervlak hebben. Dit oppervlak zou men nu als oppervlakte-eenheid kunnen invoeren. Men zou dan een absolute oppervlakte-eenheid verkregen hebben. Met behulp van een dergelijke redeneering is het ook mogelijk tot een absolute lengte-eenheid te komen, een lengte-eenheid dus, die niet ontleend is aan de lichamen, die zich in onze ruimte bevinden, zooals b.v. de cm, doch die ontleend is aan de ruimte zelf. In een brief aan den astronoom S c h u m a c h e r deelt G a u s s hem dit resultaat mede. S c h u m a c h e r beschouwt dit als een voldoend bewijs voor de onjuistheid van de nieuwe meetkunde en dus voor de juistheid van de Euclidische meetkunde. Hij vindt het bestaan van een absolute lengte-eenheid absurd en spreekt er zijn verwondering over uit, dat G a u s s er anders over denkt. Deze verdedigt zich door op te merken, dat iets wat ons onnatuurlijk voorkomt, daarom nog niet absoluut onmogelijk genoemd mag worden.

Langzamerhand komt Gauss tot de overtuiging, dat de noodzakelijkheid van de Euclidische meetkunde niet bewezen kan worden, — noch door het menschelijk verstand, noch voor het menschelijk verstand — zooals hij het uitdrukt. In 1829 deelt hij in een brief aan Bessel mede, dat hij nog meer in de meening versterkt is, dat men niet zal kunnen beslissen, wat de ware meetkunde is. Toch publiceert hij zijn uitgebreide onderzoekingen niet. Hij weet, dat een publicatie veel stof zal doen opwaaien en de critiek hem niet gespaard zal worden. Om dit te vermijden, zwijgt hij. De menschen zijn er toch niet rijp voor, zoo oordeelt hij. Doch hierin is Gauss toch te pessimistisch. Want omstreeks 1830 publiceeren twee jongere wiskundigen, geheeel onafhankelijk van elkaar, de theorie van de niet-Euclidische meetkunde. Het zijn Lobatschewsky, hoogleeraar te Kasan en Bolyai, een Hongaarsch officier. Zonder vrees maken zij de wereld met de nieuwe meetkunde bekend. De verbreiding van hun ideeën gaat echter uiterst langzaam. De publicaties zouden waarschijnlijk onopgemerkt gebleven zijn, als Gauss er niet geweest was, die zijn groote waardeering voor hun werk niet onder stoelen of banken steekt.

Een beletsel voor het doordringen van de nieuwe ideeën is ook het gezag van Kant. Deze stond immers op het standpunt, dat de ruimtevoorstelling ons a priori gegeven is, onafhankelijk van eenige waarneming. De niet-Euclidische meetkunde nu werd beschouwd als te zijn in strijd met dit standpunt. De critiek van de filosofen is wel zeer scherp. Het verwondert ons dan ook niet, dat Gauss tot de uitspraak komt, dat begripsverwarringen nergens overvloediger voorkomen dan bij filosofen, die geen wiskundigen zijn! Lobatschewsky en Bolyai oogsten dan ook geen dank. De stap is te groot. Men kan hen niet volgen.

Dat ik hier bijna uitsluitend Gauss noem is niet bedoeld als een streven de niet-Euclidische meetkunde enkel aan hem toe te schrijven, doch wordt gerechtvaardigd door het feit, dat de geschriften en vooral de brieven van Gauss de beste bron vormen voor de bestudeering van de groei der nieuwe ideeën.

Bekeken vanuit een zuiver wiskundig standpunt staat de nieuwe meetkunde even sterk als de Euclidische meetkunde. Beide systemen berusten op eenige axioma's, die onderling niet met elkaar in strijd zijn; logisch is tegen de niet-Euclidische meetkunde dan ook niets in te brengen. Gauss beschouwt deze meetkunde echter niet alleen als een logisch systeem. Hij staat op een zuiver empirisch standpunt. De ruimte, waarin wij leven, heeft zijn eigen vaste eigenschappen en het gaat er om deze eigenschappen te vinden. Naar zijn meening zal het experiment moeten beslissen, welke meetkunde in werkelijkheid bestaat, de Euclidische of de niet-Euclidische. In een van zijn brieven waarschuwt hij er dan ook voor, dat men rekening moet houden met het feit, dat de Euclidische meetkunde wel eens fout kan zijn. Wij zien hieruit, dat Gauss de meetkunde als een ervaringswetenschap heeft beschouwd. Het gaat er voor hem om een beschrijving van onze ruimte te vinden.

De Euclidische en de hier genoemde niet-Euclidische meetkunde vormen, zooals we reeds opgemerkt hebben, niet de eenig mogelijke meetkundige stelsel. Het heeft dan ook geen zin hier langer stil te staan bij de vraag, welke van deze twee meetkunden voor onze ruimte de juiste of wel de meest waarschijnlijke is.

Merkwaardig is de rol, die de ervaring bij het ontstaan van de niet-Euclidische meetkunde heeft gespeeld. De twijfel aan het axioma van de evenwijdige lijn, het axioma, dat niet door de ervaring geverifieerd kon worden, vormde de aanleiding tot onderzoekingen, die tenslotte bekroond werden met de ontdekking van de nieuwe meetkunde. Hier werkt dus de ervaring mede aan de opbouw van de wiskunde. Aan de andere kant heeft zij echter remmend gewerkt op de verbreiding van de nieuwe ideeën. Had men toch de niet-Euclidische meetkunde enkel als een wiskundig systeem ingevoerd, dus los van onze ruimte, dan zou ze zeker spoediger erkend zijn geworden. De critiek van de filosofen, die nu zoo weinig mild geweest is, zou dan waarschijnlijk achterwege gebleven zijn.

Slechts enkele decenniën na het bekend worden van de niet-Euclidische meetkunde van Lobatschewsky en Bolyai wordt het onderzoek betreffende de grondslagen van de meetkunde opnieuw een schrede vooruitgebracht door het werk van Bernard Riemann (1826—1866). In 1854 houdt deze in verband met een verkregen docentschap in Göttingen een lezing over de hypothesen, die aan de meetkunde ten grondslag liggen. Als deze voordracht in druk verschijnt, wat pas in 1867, na de dood van Riemann, geschiedt, baart zij veel opzien. In zijn „Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik" vertelt Klein van de buitengewoon groote indruk, die Riemann's gedachtengang op hem heeft gemaakt, hoewel veel hem toen nog onbegrijpelijk voorkwam.

Uit het werk van Riemann blijkt, zooals we zullen zien, dat hij evenals Gauss als taak van de meetkunde de leer van onze ruimte voor oogen heeft gehad. Doch vooraf iets over de nieuwe ideeën, die in de genoemde voordracht ontwikkeld zijn.

Zoowel de Euclidische als de niet-Euclidische meetkunde is opgebouwd uit een aantal axioma's, die zekere betrekkingen tusschen de grondbegrippen vastleggen. In hoeverre een dergelijk samenstel van betrekkingen echter noodig of zelfs mogelijk is, ziet men niet direct in. Ook de verhouding van de aangenomen betrekkingen ten opzichte van elkaar blijft daarbij in het duister. Dit vindt zijn oorzaak, aldus Riemann, hierin, dat men te weinig aandacht geschonken heeft aan het begrip meerdimensionale ruimte. Hij gaat dan ook uit van een abstracte n-dimensionale ruimte. Een punt is dan bepaald door n getallen (x^h), coördinaten van het punt genoemd. Verder wordt voor elk punt een algemeene uitdrukking opgesteld voor de lengte van een klein lijn-elementje in dat punt. Een dergelijk lijn-element is bepaald door n coördinatenverschillen. Riemann kiest nu voor de uitdrukking voor de lengte van een lijn-element de wortel uit een altijd positieve, geheele, homogene quadratische functie van de coördinatenverschillen $(ds^2 = a_{hi}\, dx^h\, dx^i)$. De coëfficienten van deze quadratische vorm zullen in het algemeen van het gekozen punt afhangen, dat wil dus zeggen, zijn functies van de coördinaten. De meetkunde van een dergelijke abstracte ruimte, tegenwoordig *Riemannsche ruimte* genoemd, blijkt nu geheel bepaald te zijn door deze quadratische vorm. Wij noemen deze meetkunde Riemannsche meetkunde. Als grondslag voor de meetkunde treedt hier dus op de uitdrukking voor de lengte van een lijnelement. Kiest men voor deze uitdrukking een andere vorm, dan gelden weer andere meetkundige eigenschappen. In een n-dimensionale ruimte zijn derhalve verschillende maatverhoudingen mogelijk. Dit geldt ook voor een ruimte van drie dimensies. Stellen wij ons nu op het standpunt, dat in onze ruimte, in de ruimte, waarin wij leven, een Riemannsche meetkunde geldt, dan blijven er nog oneindig veel mogelijkheden, wat de maatverhoudingen betreft.

R i e m a n n voert bij zijn beschouwingen het begrip *kromming* (Krümmungsmass) in, een invariant of getal, dat uit de quadratische vorm, dus uit de maat, kan worden afgeleid. In de Riemannsche meetkunde behoeft deze kromming niet constant te zijn; zij zal in het algemeen van punt tot punt veranderen en is daarnaast ook nog afhankelijk van richtingen in dat punt. Wanneer we echter aannemen, dat in onze ruimte lichamen zonder hun vorm te veranderen willekeurig verplaatst kunnen worden, dan moet deze kromming constant zijn. Er blijven dan voor onze ruimte drie gevallen mogelijk, al naar gelang deze constante nul, negatief, dan wel positief is. Is de kromming nul, dan is de bij de quadratische vorm behoorende meetkunde identiek met de Euclidische meetkunde, is de kromming echter negatief, dan is ze identiek met de niet-Euclidische meetkunde van L o b a t s c h e w s k y en B o l y a i. Deze meetkunden komen hier dus voor den dag als bijzondere gevallen van de Riemannsche meetkunde. Het derde geval met constante positieve kromming voert tot een tweede soort niet-Euclidische meetkunde. In deze niet-Euclidische meetkunde van R i e m a n n snijden twee in een plat vlak gelegen rechte lijnen elkaar altijd en is de som van de hoeken van een driehoek grooter dan 180°. Geldt deze meetkunde in onze ruimte, dan is de ruimte eindig, hoewel onbegrensd.

U zult U misschien afvragen, waarom R i e m a n n als grondslag voor de meetkunde nu juist de wortel uit een quadratische vorm neemt en niet bijvoorbeeld de vierdemachtswortel uit een differentiaalvorm van de vierde graad. In zijn werk noemt R i e m a n n deze laatste mogelijkheid wel, doch hij wijst haar meteen van de hand. Hij acht een onderzoek in deze richting niet direct noodig, daar dit betrekkelijk weinig licht zal werpen op de leer van de ruimte. Uit dit gezegde blijkt wel heel duidelijk, dat het ook R i e m a n n er om te doen is een beter inzicht te krijgen in de ruimte, wat haar meetkundige eigenschappen betreft. Hij beschouwt de naar hem genoemde meetkunde als een mogelijke beschrijvingswijze van onze ruimte. Zooals R i e m a n n laat zien, zijn in een driedimensionale ruimte vele maatverhoudingen denkbaar, doch de eigenschappen, waardoor onze ruimte zich van andere denkbare driedimensionale ruimten onderscheidt, kunnen alleen door de ervaring gevonden worden.

Het spreekt vanzelf, dat het werk van Riemann wordt becritiseerd. Het woord kromming brengt velen op een dwaalspoor en heeft aanleiding gegeven tot vele speculaties over het bestaan van een vierde dimensie, want, naar men meende, had de ruimte toch een extra dimensie noodig om krom te zijn. Jarenlang wordt over de kromming van de ruimte gediscussieerd, vooral in Göttingen. Bekend is het rijmpje uit die jaren:

„Die Menschen fassen kaum es
Das Krümmungsmass des Raumes".

Dat Riemann zijn resultaten direct op onze ruimte toepast, is ook weer een van de oorzaken, dat zijn ideeën zich betrekkelijk langzaam verbreiden. De Riemannsche meetkunde wil men wel als wiskundig systeem aanvaarden, doch het heeft lang geduurd, voor men haar als een mogelijke beschrijvingswijze der ruimte erkent, terwijl Riemann toch juist dit laatste voor oogen heeft gehad.

Haar triomfen viert de Riemannsche meetkunde pas na een halve eeuw als Einstein zijn algemeene relativiteitstheorie ontwikkelt. Door de tijd als vierde dimensie er bij te nemen, wordt onze ruimte uitgebouwd tot een vierdimensionale ruimte. De meetkunde van deze ruimte is nu volgens de relativiteitstheorie een Riemannsche meetkunde.

Heeft de relativiteitstheorie groote invloed gehad op de physica, niet minder heeft ze dit gehad op de ontwikkeling van de meetkunde. De Riemannsche meetkunde wordt plotseling werkelijkheid. Weer gaan de meetkundigen aan het werk om systemen te vinden, die zullen kunnen dienen voor de beschrijving van onze ruimte, nu echter als vierdimensionale ruimte opgevat. Zoo ontstaan de leer van de overbrengingen, de projectieve en conforme differentiaalmeetkunde. Ik wil U slechts de namen noemen van een tweetal leiders op dit gebied: Schouten en Veblen. Dat ook zij de meetkunde als ruimteleer opvatten, blijkt wel hieruit, dat beide de door hen opgestelde meetkundige systemen steeds weer gebruiken voor de beschrijving der ruimte. Als Veblen dan ook beweert, dat van de meetkunde slechts gezegd kan worden, dat het een onderdeel van de wiskunde is, dan is dat in zekeren zin in tegenspraak met zijn eigen werk. Wel kunnen wij onderschrijven, dat men het deel van de wiskunde, waarin de meetkundige werkt, niet precies kan afbakenen.

De meetkunde is in de loop der jaren uitgegroeid tot een groot gebouw van stellingen. Natuurlijk willen wij, dat ons gebouw hecht en zonder constructiefouten zal zijn, doch daarnaast interesseert ons ook de vorm van het gebouw en de ideeën, die aan de vormgeving ten grondslag liggen. Het doel van mijn betoog is geweest U te laten zien, dat steeds getracht is zoo te bouwen, dat de meetkunde het best haar taak als ruimteleer zou kunnen vervullen.

DE KLINOGRAFISCHE PROJECTIE

DOOR

P. WIJDENES.

In Jaargang XXII (1934/'35) van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde heb ik een artikel geschreven over „Stereometrisch tekenen"; daarna is het afzonderlijk uitgegeven [1]). Bij het schrijven van dat artikel, de beste manier om een zaak, die ons allen ietwat vaag voor de geest staat, eens grondig te bekijken, heb ik een nieuwe projectiemethode gevonden en die gedoopt: de methode van het hellende tafereel. Daarin ligt echter niet opgesloten, dat het een projectiemethode is; daarom heb ik mij gewend tot den steeds hulpvaardigen wiskundige en classicus Dr Dijksterhuis, die mij de naam aan de hand deed, die dit artikel tot opschrift voert [2]).

De theorie van de klinografische projectie is uiterst simpel; met één bladzijde druks en een drietal figuurtjes is men klaar. Ik laat die hier volgen.

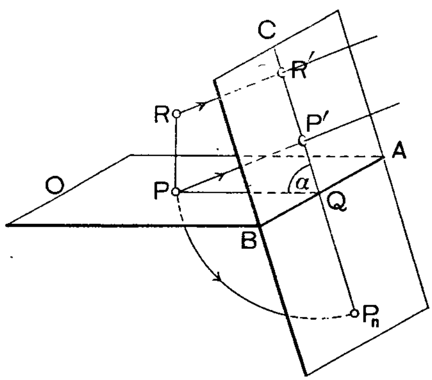


Fig. 1.

Op fig. 1 is OAB een horizontaal vlak; CAB is een vlak, dat met OAB een hoek α maakt; CAB is het tafereel. P is een punt

1) Stereometrisch tekenen, 43 blz. met 76 figuren, *f* 0,50.

2) Klino komt van klinein (Gr.) = laten hellen (verg. isoklinen); ook betekent het: zich uitstrekken, dit in kliniek.

van het horizontale vlak H; P′ is zijn projectie op het tafereel T. Het tafereel helt, vandaar de naam: *de methode van het hellende tafereel.* Ook de projectoren, zie PP′ en RR′ hellen; dat wordt uitgedrukt door *klinografische* projectie.

De plaats van P′ (fig. 1) is eenvoudig te vinden; trek PQ $\perp$ AB; OP′ $\perp$ AB en QP′ $=$ PQ cos α. De uitvoering is als volgt; eerst wordt het vlak OAB om AB als as in het verlengde van het vlak CAB gewenteld; QP′ komt dan in het verlengde van P_nQ.

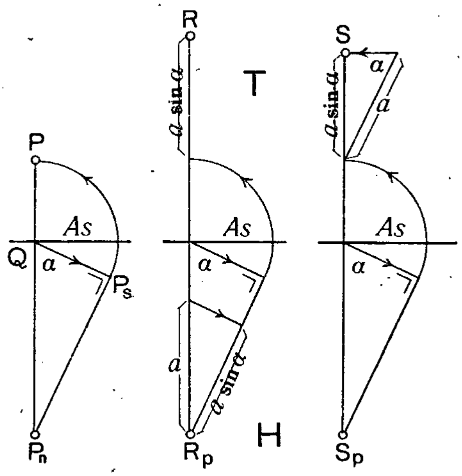


Fig. 2.

Nu moet men PQ met cos α vermenigvuldigen. Het tafereel duiden we aan met T; het vlak OAB van fig. 1 noemen we het horizontale vlak en duiden het aan met H; de snijlijn van H en T is de as. — Trek (fig. 1 en 2) $P_nQ \perp$ as; maak $QP_s = P_nQ$ cos α; maak $QP' = QP_s$. — Het is direct duidelijk, hoe men te werk moet gaan met een ander punt R, zie weer fig. 1 en 2; daarop is $P'R' =$ PR sin α; zie het tweede en derde figuurtje van fig. 2.

Verder nemen we een lijn in het horizontale vlak b.v. *m* op

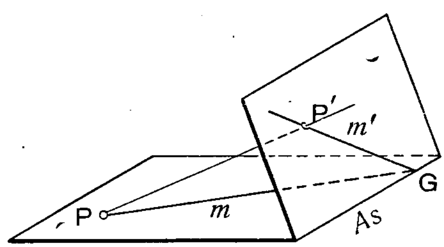


Fig. 3.

fig. 3; m snijdt de as in G; de projectie van m is m'; de lijn en zijn projectie snijden elkäar natuurlijk op de as; hiervan maakt men gebruik, als men de klinografische projectie wil tekenen van een vlakke figuur. Zie de zeshoek in H op fig. 4; bepaal op de manier als in fig. 2 links de projectie A op T; zie verder de projecties van drie evenwijdige lijnen in H en van een tweede drietal.

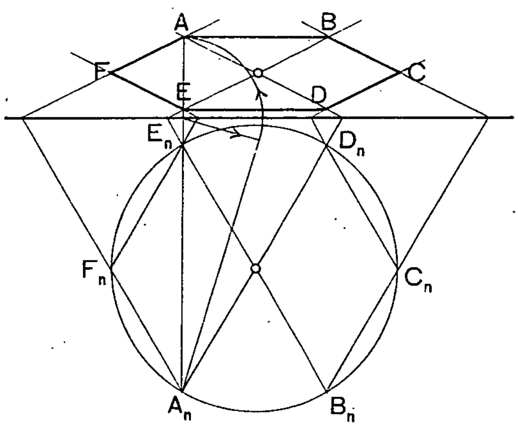


Fig. 4.

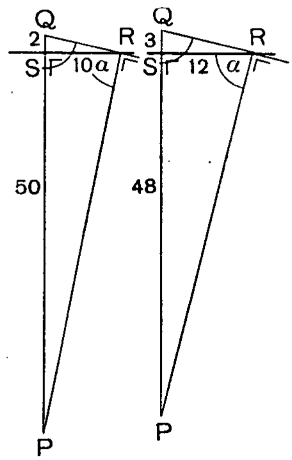


Fig. 5.

Hoe groot moet men α nemen op fig. 2? Van moeten is eigenlijk geen sprake; elke hoek is goed; maar niet bij elke hoek krijgt men een behoorlijke figuur. Men neme voor $\alpha = \text{bg tg } 5$; $\alpha = \text{bg tg } 4$ gaat ook nog wel; bij voorkeur nemen we de eerste; men construeert die hoek door te nemen (zie fig. 5 links) PS : 25 = SR : 5 = SQ : 1; b.v. opv. 100, 20 en 4 mm. Op fig. 5 links opv. 50, 10 en 2 mm; deze is echter ontstaan door verkleining op de helft. Omdat SQ altijd vrij klein is, doet men het best RQ $\perp$ PR te nemen; dan komt SQ vanzelf. Op fig. 5 rechts is $\alpha = \text{bg tg } 4$ genomen.

Hiermee is de *hele theorie* afgehandeld; meer behoeft men er op school niet aan te doen. Ook de theorie van de scheve projectie is zeer beknopt; beide vindt men uitgelegd in de genoemde overdruk[1]). We zullen beide kunnen onderwijzen; in elk geval is dat nuttiger dan zich af te sloven op veel „ruimteconstructies" met een oplossing als: „trek uit P de loodlijn m op V; breng door P de lijn n // l; leg het vlak door n en m". Doen, wel neen, *dat* is niet

[1]) Ook in Molenbroek—Wijdenes. Stereometrie voor het M. en G. O. 3e druk, blz. 124—131, incl. 19 figuren.

nodig. Van te veel van die vraagstukken zeg ik ergens: „Een groot deel van de leerstof over allerlei punten, lijnen en vlakken, zoals men die in de eerste hoofdstukken van de stereometrie aantreft behoort tot wat men noemt: „ruimteconstructies" en men verwacht er veel heil van voor het „inzicht". Ik meen daar een vraagteken bij te moeten zetten; het nut wordt overdreven voorgesteld en voor de leerlingen zijn opgaven van de bedoelde soort, naar ik meen, een plaag en voor den leraar een bron van onvoldaanheid over zijn onderwijs, zowel in de stereometrie als in de beschrijvende meetkunde."

Waartoe dienen ze eigenlijk? Liever, waartoe dient een overmatige hoeveelheid van dat slag? Zodra men aan de veelvlakken en gebogen oppervlakken komt, komen slechts heel enkele werkelijk van pas. Het uitvoeren van die ruimteconstructies is zo goed als niet te doen, ook voor ons niet; tenzij dan volgens de gewone methode van de beschrijvende meetkunde. Met de scheve en de klinografische projectie is vooral het „loodrecht" in de ruimte (in H is het gemakkelijk) lang niet eenvoudig. „Ruimteconstructies" kan men bijna alleen zo maar schetsen; knoeien, zo men wil. De denkwaarde is gering; de uitvoering geheel waardeloos.

Ik ben sterk voor de beperking van de „ruimteconstructies" en zou daarvoor gaarne enige aandacht opeisen voor de werkelijke uitvoering volgens een of andere projectiemethode. Welke zullen we daarvoor nemen, de scheve projectie of de klinografische? Er zullen wel heel wat lezers zijn waarschijnlijk, (tekenen is niet ieders werk), die figuren volgens deze methoden eens naast elkaar willen zien; opzettelijk zijn de constructielijnen weggelaten; daardoor krijgt men beter zicht op de figuren. Bij beide is het aantal hulplijnen vrijwel gelijk; bij de klinografische iets minder, maar

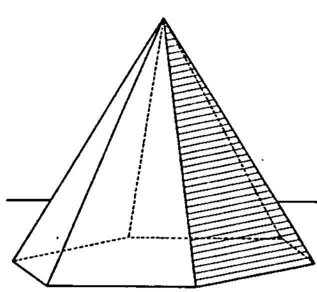


Fig. 6.

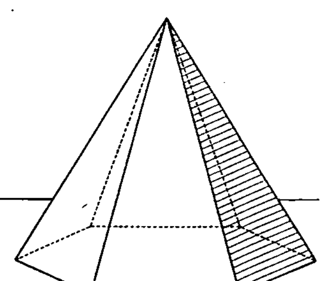


Fig. 7.

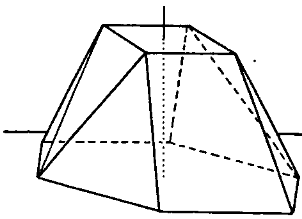


Fig. 8.

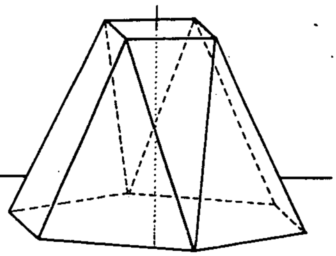


Fig. 9.

dat speelt geen rol, tenzij dan bij cirkels! Links ziet men figuren in scheve projectie (de nummers 6, 8, 10, 12, 14 en 16), rechts dezelfde in klinografische projectie (de nummers 7, 9, 11, 13, 15 en 17).

De grondfiguur van fig. 8 en 9, die niet in inkt is gezet, is een

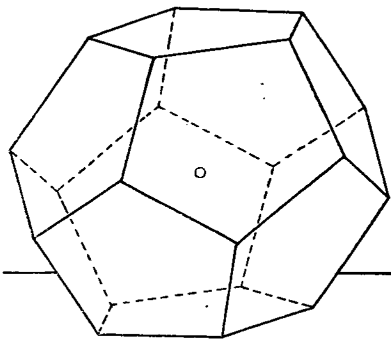


Fig. 10.

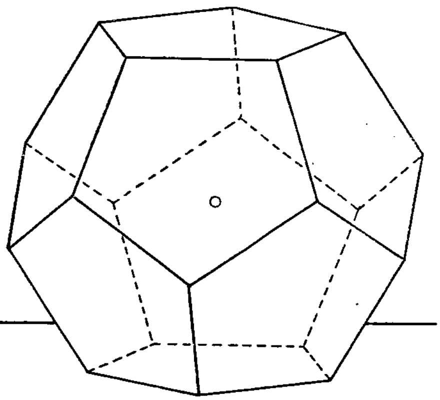


Fig. 11.

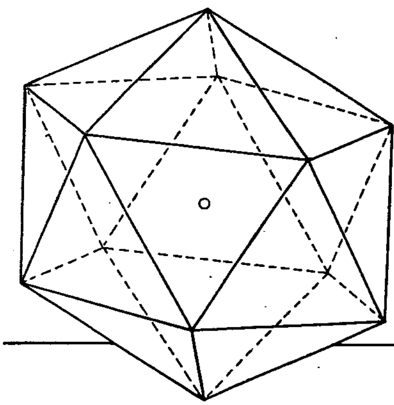


Fig. 12.

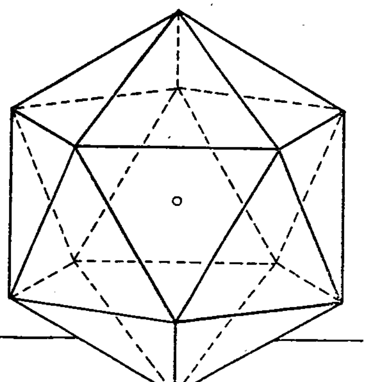


Fig. 13.

regelmatige zeshoek; de projectie van het bovenvlak op het grondvlak van de prismoide is een vierkant met hetzelfde middelpunt als de zeshoek en waarvan de zijden evenwijdig lopen met de nevendiagonalen.

De figuren 10—13 zijn alle vier wiskundig zuiver geconstrueerd; wie geeft de voorkeur aan de scheve projectie? Zie ook de cylinders van fig. 14 en 15.

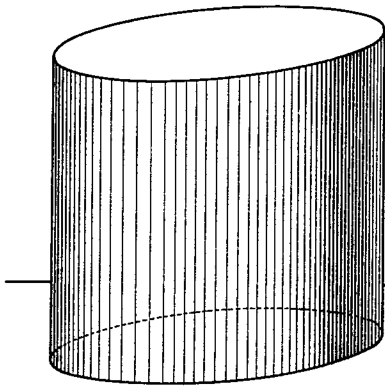


Fig. 14.

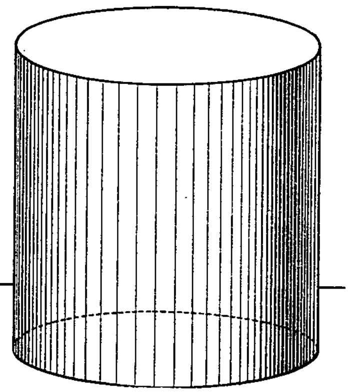


Fig. 15.

Fig. 16 geeft de constructie van de scheve projectie van een cirkel; ieder ziet, wat dat voor een werk is; de zaak is nl. dat de

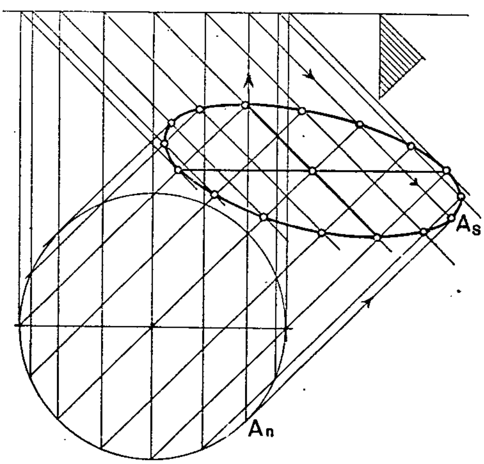


Fig. 16.

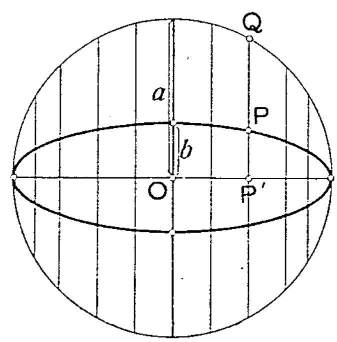


Fig. 17.

hoofdrichtingen van de grondfiguur in de scheve projectie toegevoegde middellijnen worden. Bij klinografische projectie gaan ze over in de assen; zie fig. 17; waarop alle ordinaten van de cirkel, op $\frac{1}{3}$ verkort, de ordinaten van de ellips leveren. Elke andere ellips-constructie is natuurlijk ook goed.

Op de fig. 14 en 16 ziet men tevens duidelijk, dat een cirkel in scheve projectie er wel erg scheef uitziet; het construeren er van is veel en veel bewerkelijker dan in klinografische projectie. Opzettelijk hebben we geen bol in beide projecties getekend; aan fig. 10, 12 en 16 kan men wel nagaan, wat voor een lelijke figuur een bol in scheve projectie zal geven; in klinografische krijgt men een mooie figuur; in wezen is dit immers een loodrechte projectie.

Behalve voor enkele heel eenvoudige voorwerpen bereikt men weinig met de scheve projectie; in geen enkel geval heeft de scheve projectie iets voor op de klinografische. Daar beide methoden wat uitvoering betreft, even eenvoudig zijn, is er alles voor zich enkel te bepalen tot deze laatste en de scheve projectie als afgedaan te beschouwen. Ook heeft de klinografische projectie grote voordelen boven de perspectief; het maken van een tekening in perspectief is een heel werk en eist geweldig veel ruimte zelfs voor een kleine figuur. Duidelijk ziet men aan figuur 157 in P. Reynders, Stereometrie voor het middelbaar technisch onderwijs, waarop huizenblokken in klinografische projectie zijn getekend, dat de klinografische projectie het ook wint van de perspectief.

Tot slot zullen we een schijnbaar ingewikkelde figuur eens helemaal met alle constructielijnen voordoen als voorbeeld van „Stereometrische voortbrenging van kegelsneden" zoals het leerplan 1937 voor de 5e klas van de H.B.S. eist. We zullen een ge-

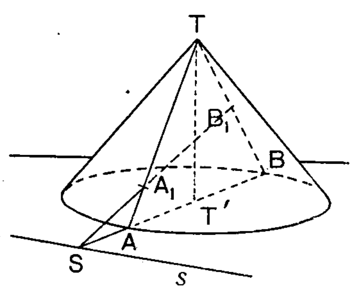


Fig. 18.

sloten doorsnede aanbrengen; bewezen moet dan worden, dat deze een ellips is; dat doen we natuurlijk niet voor; ieder kent het bewijs.

Het snijvlak V (fig. 18) snijdt het horizontale vlak volgens de lijn s; dit vlak V snijdt het vlak TAB door TT′ volgens A_1B_1; A_1 en

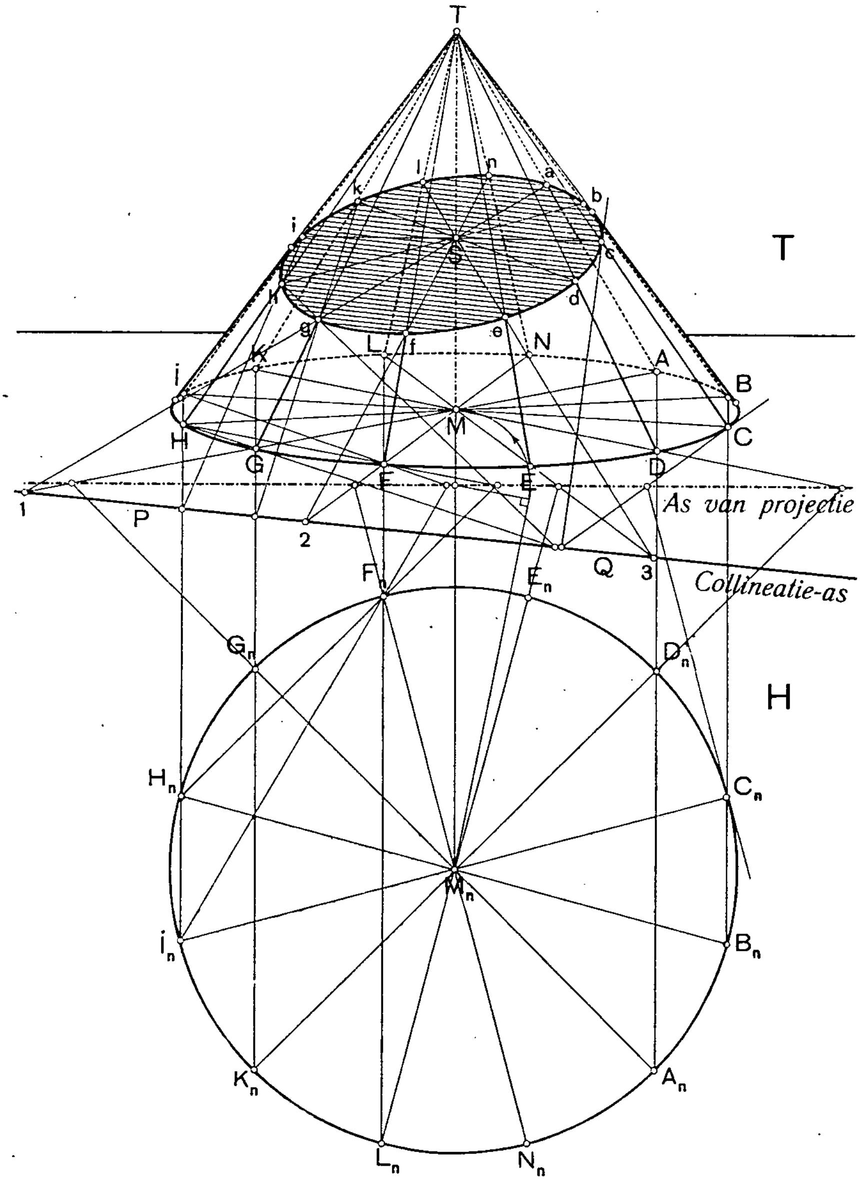


Fig. 19.

B_1 zijn twee punten van de doorsnede. Breng meer vlakken aan door TT′ b.v. een stuk of zes; dan krijgt men twaalf punten van de doorsnede; een kromme lijn, zo goed mogelijk getekend door die twaalf punten, geeft dan de ellips. Om dat een beetje behoorlijk te doen, nemen we zes middellijnen van het grondvlak van de kegel, die onderling hoeken van 30° maken en tekenen dan eerst de ellips als klinografische projectie van de grondcirkel; het middelpunt M van de cirkel in het horizontale vlak onder de as wordt overgebracht op de manier, die fig. 2 aangeeft; alle andere punten worden door lijnen overgebracht als op fig. 4.

Daarna kan men de kegel tekenen en de lijn s van fig. 18 (op fig. 19 PQ) aannemen; op deze collineatie-as snijden overeenkomstige lijnen als AB en A_1B_1 van fig. 17 elkaar. We hebben dit getekend in fig. 19.

Alles op één figuur, hetgeen natuurlijk moet, lijkt enigszins samengesteld, maar is dit niet; bij het werkelijk uitvoeren van het werkstuk heeft men als men tot fig. 18 overgaat, niets van node met de as van projectie. Fig. 19 tekenen we niet in scheve projectie; men krijgt dan zeker een lelijke verwrongen figuur; daartoe behoeft men slechts een blik te slaan op de fig. 14 en 16.

KORRELS.

XL.

Ik wil een opmerking maken over het „gedachteloos" werken met logarithmen. Zulks naar aanleiding van Korrel XXXV van J. H. Leyds. Niet, omdat ik bezwaar zou hebben tegen zijn voorstel, een enkele logarithme in een aantal decimalen te laten benaderen; dit schijnt ook mij zeer aanbevelenswaard. Maar in zijn inleiding schrijft hij iets, waarmee ik het niet eens ben.

De leraar beklaagt er zich over, dat, nadat hij de „theorie" der logarithmen met zoveel zorg behandeld heeft en beoefend aan de hand van vele voorbeelden, en nadat hij met de tafel heeft leren werken, de leerling alle „theorie" op zij zet, en verder gedachteloos werkt naar een gemakkelijk recept. Ik geloof, dat hier de leerling gelijk heeft, de leraar ongelijk. In de eerste plaats is gedachteloos werken niet altijd af te keuren; maar het is niet eens waar, dat de leerling zonder gedachte werkt; zijn gedachte is slechts een andere dan die van den leraar. Voor hem is de logarithme van een positief getal niet meer de exponent van een macht van een bepaald grondtal; de logarithmische functie is voor hem de functie, die bepaald is door de beide voorwaarden:

$$\text{I} \quad f(ab) = f(a) + f(b);$$
$$\text{II} \quad f(10) = 1.$$

(a en b zijn positieve getallen).

Ik geloof niet, dat deze manier om de logarithmen in te voeren, in enig opzicht achterstaat bij de gebruikelijke. Dat deze laatste, waarbij de logarithmische functie als de inverse van de exponentiële wordt ingevoerd, wetenschappelijk niet correct is, is vroeger al in dit tijdschrift van bevoegde zijde betoogd. En dat ze didactisch haar bezwaren heeft, blijkt wel uit het feit, dat de leerlingen zo moeilijk dit begrip van inverse functie, en dan nog slechts schijnbaar, verwerven, en het dus weer zo gemakkelijk verliezen.

We moeten de logarithmen om practische redenen in de 3de klasse aan de orde stellen; de moeilijkheid, die er in steekt, kunnen we hier zeker niet overwinnen; de vraag is dus slechts, hoe we haar het best uit de weg gaan; ik meen, dat de leerling hier de goede richting aangeeft.

Ik behoef niet te zeggen, op welke wijze en met welke graad van onnauwkeurigheid uit I volgen:

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b), \quad f(a^n) = nf(a), \quad f(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} f(a), \quad f(1) = 0;$$

en hoe uit II volgen (en met welke graad van onnauwkeurigheid) de eigenschappen, die met de keuze van het grondtal 10 samenhangen.

Dit is inderdaad de gehele *theorie* der logarithmen, die we nodig hebben voor het practische gebruik, en een functietheoretische behandeling van de logarithme zal wel niemand voorstaan.

Nu kan ik me denken, dat de leraar hiermee geen genoegen neemt, en dat hij *achteraf* aannemelijk wil maken, dat de functie f inderdaad „bestaat", zij het ook, dat de meeste leerlingen op dat tijdstip aan dat bestaansbewijs geen behoefte meer zullen gevoelen; en dat hij het verband met de exponentiële functie wil laten zien. Hij kan dan als volgt te werk gaan:

Zij $f(a) = b$, dan stellen we $a = \mathrm{F}(b)$, waarin F dus de inverse functie van f voorstelt. Nu is $f(a^n) = nb$, dus $a^n = \mathrm{F}(nb)$, dus $\mathrm{F}(nb) = [\mathrm{F}(b)]^n$. Stellen we hierin $b = 1$, dan blijkt:

$$\mathrm{F}(n) = [\mathrm{F}(1)]^n.$$

We hebben nu nog geen gebruik gemaakt van II. Uit $f(10) = 1$ volgt $\mathrm{F}(1) = 10$, dus is ten slotte $\mathrm{F}(n) = 10^n$, of ook $\mathrm{F}(b) = 10^b$, of $a = 10^b$.

Het is duidelijk, dat men hierbij de door Leyds gegeven benadering zou kunnen laten aansluiten om te doen zien, hoe de gebruikte tafel „zou kunnen" ontstaan zijn.

H. J. E. Beth.

XLI. ENKELE EENVOUDIGE TOEPASSINGEN VAN DE STEREOMETRIE OP DE KOSMOGRAPHIE.

In het originele werk van Dr Pannekoek „Kosmographie" komt aan het slot een aanhangsel voor, dat enkele wiskundige afleidingen behandelt, niet, zoals schrijver in zijn voorwoord zegt, om ze bij de kosmographie te behandelen, maar om aan te tonen, hoe de wiskunde, die op de H.B.S. geleerd wordt en haar toepassingen veelal op onreële vraagstukken moet vinden, tal van reële practische toepassingen vindt, zodra men de verschillende vakken met elkaar in verband brengt.

Hier mogen nog een drietal eenvoudige voorbeelden volgen.

1. Om aan te tonen dat de declinatieverandering der zon in de loop van het jaar verklaard kan worden uit de omloop van de aarde om de zon, waarbij de aardas zich evenwijdig verplaatst, zou men in de stereometrie het volgende vraagstuk kunnen behandelen.

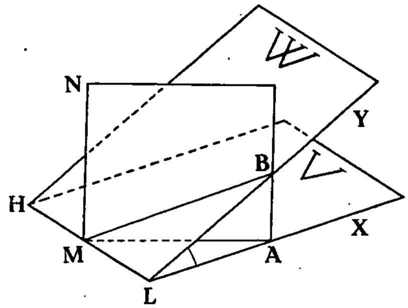
Gegeven een scheve cirkelcylinder. De beschrijvende lijn maakt een hoek van 66½ graad met het grondvlak. Het vlak gebracht door de as van de cylinder en een loodlijn op het grondvlak, snijdt de grondcirkel in de punten A_1 en A_3. De middellijn in het grondvlak loodrecht A_1A_3 snijdt deze cirkel in de punten A_2 en A_4 (A_2 tussen A_1 en A_3). Construeer deze punten en bereken de hoeken tussen de beschrijvenden in die punten en de bijbehorende stralen in het grondvlak.

Deze figuur kan dan in de kosmographieklas goede diensten bewijzen. Het punt A stelt de aarde voor, het middelpunt M de zon, de beschrijvende lijn de hemelas. Is A_1 het punt waar de hoek van 66½ bij behoort dan is dit punt het zomerpunt, A_2 het herfstpunt, A_3 het winterpunt, A_4 het lentepunt. De berekende hoeken stellen de poolafstand van de zon voor, waaruit de declinatie direct volgt.

Ook ter verklaring hoe ons winterseisoen tenslotte met ons tegenwoordig zomerseisoen samenvallen zal, is deze figuur zeer illustratief. De beschrijvende lijn in A_4 wentelt b.v. in een kwart Platonisch jaar 90 graden kloksgewijs om de ecliptie-as in dat punt. De declinatie wordt dan in dat punt als van 21 September.

2. Voor de verklaring van de verandering der rechte klimming van de zon en bij de les over de tijdvereffening moet men het verband tussen rechte klimming en astronomische lengte bespreken. We kunnen daartoe het volgende stereometrische vraagstuk behandelen.

Gegeven een tweevlakshoek met een standhoek van 23½ graad. Op de ribbe LH nemen we een punt M aan en richten op vlak V



van de tweevlakshoek in M de loodlijn op (MN), zo dat, als W de andere zijde van de tweevlakshoek is, deze loodlijn zich met W aan dezelfde zijde van V bevindt. In L construeren we de standhoek van de tweevlakshoek, waarvan de benen XL en YL opv. in V en W liggen. In V trekken we de lijn MA, zo dat hoek LMA scherp is. (A is het snijpunt met XL). Door NM en MA brengen we een vlak Z en construeren de snijlijn van Z en W (deze is MB, als B het snijpunt is van de lijn door A loodrecht op V met YL). — Bewijs dat de hoek LMA kleiner is dan hoek LMB. — Hoe is dit als hoek LMA 90 graden is? stomp? 180 graden? etc. (planimetrisch).

Men kan aan dit vraagstuk een goniometrische beschouwing vastknopen, waarbij men op enigszins eenvoudiger wijze dan Dr Pannekoek in zijn genoemd werk kan komen tot de betrekkingen tussen deze hoeken. Immers tg BML is BL/ML en tg AML is AL/ML. Dus tg AML/tg BML is AL/BL is cos 23½. Ofwel tg AML is cos 23½ . tg BML.

Waar hoek BML de astronomisch lengte der zon voorstelt als MB de richtingslijn naar de zon is, M het middelpunt der aarde, ML de richtingslijn naar het lentepunt, MH die naar het herfstpunt, hoek LMA de rechte klimming van de zon als ze staat in de richting MB, is hiermee het verband tussen lengte en rechte klimming der zon gevonden, nl. goniometrisch tg $a = \cos 23½ . \text{tg } l$ (a = rechte klimming, l = lengte der zon).

Ook kan uit deze figuur eenvoudig het verband tussen lengte en declinatie der zon gevonden worden. Immers hoek BMA stelt de declinatie voor. Sin BMA is AB/BM en sin BML is BL/BM dus sin BMA/sin BML is AB/BL is sin 23½ . ofwel sin d is sin 23½ . sin l. (d is decl., l de lengte der zon).

3. Om te bewijzen dat horizon en equator elkaar overal in Oost- en Westpunt snijden, kunnen we stereometrisch aldus te werk gaan. Ons vlak van tekening is het vlak gebracht door de verticaal en hemelas. Het horizontale vlak snijdt dit vlak volgens

de lijn Zuidpunt—Noordpunt. Daar equatoriale en horizontale vlak beide loodrecht op dit vlak staan, zo zal de snijlijn dezer vlakken (er is een snijlijn, want ze hebben punt M gemeen, het middelpunt der aarde) loodrecht op het vlak van tekening staan. Zijn de snijpunten dezer snijlijn met de hemelbol X en Y dan is dus hoek NMY en hoek NMX beide 90 graden, en X en Y stellen dus het Oosten en Westen voor, omdat N het Noordpunt voorstelt.

A. A.

BOEKBESPREKING.

Leerboek der Nieuwe Vlakke Driehoeksmeting, door Dr. Fred. Schuh, met 64 figuren en 625 vraagstukken, benevens vraagstukken der examens Wiskunde K I en L.O. 1904—1938; G. B. van Goor Zonen, Den Haag 1939, 317 blz., prijs f 5,90, gebonden.

De verschijning van het leerboek, dat we hierbij aankondigen, is voor de Nederlandse schoolwereld een belangrijke gebeurtenis. Het zal als zoveel andere werken van denzelfden auteur niet nalaten grote invloed uit te oefenen, niet doordat het algemeen op onze scholen voor M.O. en V.H.O. zou kunnen worden ingevoerd (hiervoor is het werk ook volstrekt niet bestemd), maar doordat, naar wij verwachten, alle docenten in de wiskunde en zij die het hopen te worden, met genoegen de inhoud van het leerboek tot hun geestelijk bezit zullen trachten te maken.

De opzet van het boek is geheel anders dan die van alle andere leerboeken der driehoeksmeting. Om tot algemeen geldige resultaten te komen, resultaten, die onafhankelijk zijn van de kwadranten, waarin de verschillende hoeken liggen en van de tekens, die aan de verschillende lijnstukken worden toegekend, ook onafhankelijk van de figuur, die het bewijs illustreert, worden bij driehoeken negatieve zijden en in willekeurige kwadranten gelegen hoeken toegelaten. Op de zijlijnen van de driehoek wordt een positieve zin, in het vlak van de driehoek een positieve draaizin aangenomen. Ter vereenvoudiging der notatie gebruikt de auteur het begrip congruentie uit de rekenkunde. Hij voert het begrip hoekenklasse in voor de getallenklasse naar de modulus 360° der draaiingshoeken, waarmee een figuur in een ermee congruente figuur van het platte vlak waarin ze ligt, kan worden overgevoerd.

De voordelen van de nieuwe methode komen in sterke mate uit in hoofdstuk XVI, waarin o.m. door één enkele berekening wordt aangetoond, dat de negenpuntscirkel van een driehoek zowel aan de aangeschreven cirkels als aan de ingeschreven cirkel raakt, alsmede in hoofdstuk XVIII, waarin een elegant en duidelijk bewijs van de stelling van Morley over de door de triçectrices van een driehoek gevormde gelijkzijdige driehoeken wordt gegeven.

Doel van den schrijver is het machinaal leren hanteren van enige zorgvuldig afgeleide voorschriften; een mechanisatie van het denkproces, waardoor dit met grotere zekerheid en snelheid werkt, omdat geen aandacht behoeft te worden geschonken aan het onderscheiden der verschillende mogelijkheden, zoals dat bij meer aanschouwelijke methoden nodig is. In verband hiermee wijdt de schrijver enige van didactisch standpunt gezien waardevolle paragrafen aan de betekenis van de figuur als steun voor het geheugen, als heuristisch middel en als contrôle.

Door de voordracht van den schrijver op het vierde Nederlands Congres voor Leraren in de Wiskunde en de Natuurwetenschappen op 25 April 1938 te Utrecht gehouden (men zie het congresverslag, blz. 37—44), was de belangstelling van velen voor de in dit boek gevolgde methode reeds in hoge mate gewekt. Dat in hetzelfde jaar, waarin de schrijver zijn Nieuwere Meetkunde voltooide (gedagtekend April 1938) ook nog dit Nieuwe Leerboek der Driehoeksmeting kon klaar komen (December 1938), dwingt onze bewondering af voor de enorme werkkracht van den auteur.

We hopen van harte, dat deze uitgave de waardering zal vinden, waarop ze op grond van hare kwaliteiten aanspraak kan maken. Het boek is, zoals ten dele uit het bovenstaande reeds moge blijken, oorspronkelijk van opzet, rijk van inhoud, exact in zijn formuleringen, bondig van betoogtrant, het laat zich gemakkelijk lezen, geeft een schat van vraagstukken (ongeveer 900). Het biedt den lezer tenslotte nog veel meer, dan men alleen op grond van de titel zou mogen verwachten: wanneer er n.l. een beroep gedaan zou kunnen worden op aanwezige kennis uit andere gebieden der wiskunde, geeft de schrijver er dikwijls de voorkeur aan deze onderdelen in het boek zelf te behandelen. Vandaar, dat we in dit leerboek der driehoeksmeting o.m. een behandeling aantroffen van: hogere-machtsvergelijkingen, de reststelling, nulpunten ener functie, en-stelsels en of-stelsels, limieten en continuïteit, uitbreiding van het begrip wortel ener vergelijking, gelijkwaardige stelsels vergelijkingen, strijdigheid en afhankelijkheid, de oplossing van lineaire selsels vergelijkingen, samengestelde evenredigheid, inverse functies, enz.

Aan het bezwaar, dat het boek mede door de bespreking dezer onderwerpen een omvang krijgt, die groter is dan strikt noodzakelijk moet worden geacht, komt de schrijver tegemoet door een methodische inleiding, waarin nauwkeurig wordt aangegeven, wat de candidaten voor de akte K I, voor wie het boek een voortreffelijk leerboek zal blijken, en de candidaten voor de akte L.O., die de auteur zich eveneens gaarne als gebruiker denkt, zullen hebben te bestuderen, en wat ze zullen kunnen weglaten. Nu zullen deze gebruikers den schrijver niet anders dan dankbaar kunnen zijn voor de duidelijke en overzichtelijke paragrafen en hoofdstukken, die aan bovengenoemde onderwerpen uit de algebra worden gewijd, alsmede voor de vraagstukken, paragrafen en hoofdstukken, waarvan bestudering voor een examen weliswaar niet noodzakelijk is, maar die toch de wiskundige horizon van de lezers kunnen helpen verruimen.

Joh. H. Wansink.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

C. J. ALDERS, Vlakke Meetkunde, 2e druk, gec. . . . . . . *f* 2,50
C. J. ALDERS, Driehoeksmeting, 2e druk, gec. . . . . . . *f* 1,25
P. WIJDENES, Beknopte Rekenkunde, 3e druk . . . . . *f* 2,—
J. VERSLUYS, Beschrijvende Meetkunde, deel I, 11e druk, bezorgd door P. Wijdenes . . . . *f* 2,—
Prof. Dr. H. BREMEKAMP, Partiëele Differentiaalvergelijkingen, deel XX van Noordhoff's Verzameling van Wiskundige werken *f* 4,90, geb. *f* 5,75; voor intekenaars op de Wiskundige Tijdschriften opv. *f* 4,— en . . . *f* 4,85

Van de Centrale Commissie voor studiebelangen, Delft.

Dr. Ir. E. H. M. BEEKMAN, Wiskundige opgaven van het propaedeutisch examen aan de T.H. (Delft). 8e druk, 240 blz. met 54 blz. antwoorden . . . . *f* 3,75
Analytische meetkunde van het platte vlak (242 opg.), van de ruimte (153 opg.), Beschrijvende meetkunde (118 opg.), Analyse (674 opg.), Differentiaalvergelijkingen (145 opg.).
Een mooie verzameling niet te moeilijke vraagstukken als inleiding voor K V en voor allerlei examens, waarvoor wiskundige voorstudie nodig is.

Van de Technische Boekhandel, N. STAM, Amsterdam.

Dr. H. LOOMAN, Beginselen der Hogere Wiskunde, Leerboek ten dienste van het M.T.O. deel I, Algebra en Coördinatenleer. 242 blz. 182 fig., ing. *f* 2,90, geb. *f* 3,40
Inhoud: I. Coördinaten. II. Functies. III. De rechte lijn en de cirkel. IV. Het schetsen van kromme lijnen uit gegeven vergelijkingen. V. Meetkundige plaatsen. VI. Poolcoördinaten. VII. Algebra. VIII. Herhaling en uitbreiding. Nomographie.

HOOFDSTUK VIII.

OVER SPIRALEN.

1. De behandeling van de z.g. Archimedische spiraal, waaraan het geheele werk *Over Spiralen* is gewijd, begint na 11 inleidende proposities, die reeds in Hoofdstuk III verwerkt zijn (10, 1—2; 9; 7, 30; 7, 50), met een aantal definities, waarvan we de eerste hier in extenso weergeven.

Indien in een plat vlak een rechte lijn wordt getrokken en, terwijl een van haar uiteinden op zijn plaats blijft, willekeurig vaak eenparig rondwentelend weer terugkomt op de plaats, vanwaar ze vertrok, terwijl terzelfder tijd een punt eenparig zich op de rechte beweegt vanaf het vast blijvende uiteinde, dan zal het punt een spiraal (ἕλιξ) beschrijven.

Het vast blijvende uiteinde heet *oorsprong van de spiraal* (ἀρχὰ τᾶς ἕλικος; steeds aan te duiden door *A*); de beginstand van de wentelende rechte *oorsprong van de wenteling* (ἀρχὰ τᾶς περιφορᾶς; weer te geven door *nulas*); de lijnstukken met de lengte *L*, die gedurende de eerste, tweede enz. volledige omwenteling door het bewegende punt op den wentelenden voerstraal worden doorloopen, *eerste, tweede enz. lijnstuk* (εὐθεῖα πρώτα, δευτέρα enz.); de oppervlakken, door het stuk van den voerstraal tusschen *A* en het bewegende punt doorloopen tijdens de eerste, tweede enz. omwenteling, *eerste, tweede enz. oppervlak* (χωρίον πρῶτον, δεύτερον enz.). Van de rechte, die den oorsprong met een punt *P* der kromme verbindt, heet *stuk aan de voorzijde* (τὰ προαγούμενα) de halve rechte met eindpunt *P*, die aan den kant ligt, waarheen de wenteling plaats vindt, d.w.z. die halve rechte, waarop de oorsprong niet ligt; *stuk aan de achterzijde* (τὰ ἑπόμενα) de andere halve rechte. De cirkels met centrum *A* en stralen resp. *L*, 2*L* enz. heeten *eerste, tweede enz. cirkel* (κύκλος πρῶτος, δεύτερος enz.).

De proposities 12—17 bevatten inleidende meetkundige stellingen over voerstralen en raaklijnen van de spiraal.

Propositie 12.

Indien naar de winding, die in een willekeurige omwenteling wordt beschreven, vanuit den oorsprong willekeurig veel rechten worden getrokken, die gelijke hoeken met elkander maken, zullen ze elkander met een gelijk bedrag overtreffen (fig. 103).

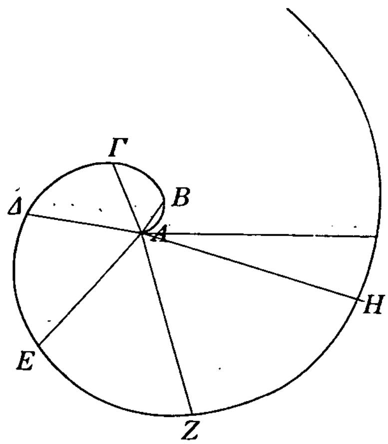


Fig. 103.

Dit volgt onmiddellijk uit de definitie van de kromme.

Propositie 13.

Indien een rechte lijn de spiraal raakt, zal ze haar slechts in één punt raken.

Zie voor een bespreking van het Grieksche raaklijnbegrip III; 1, 6. De bedoeling is hier, dat, indien een rechte de spiraal in een zeker punt Γ ontmoet (fig. 104), terwijl geen harer punten binnen de winding ligt, waartoe Γ behoort, deze rechte dezelfde winding niet in een ander punt H nog eens opnieuw kan ontmoeten. Er moet dus m.a.w. aangetoond worden, dat een spiraalwinding geen dubbelraaklijnen bezit.

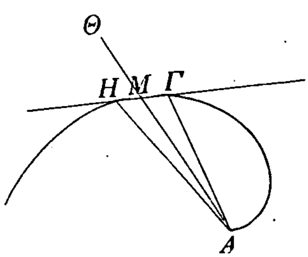


Fig. 104.

Stel nu, dat de rechte de spiraal op de beschreven wijze ontmoette (dus raakte) in Γ en in H. Bepaal nu de bisectrix AM van $\triangle\ A\Gamma H$, dan is volgens een bekende planimetrische stelling

$$A\Gamma + AH > 2 \,.\, AM.$$

Op AM ligt een punt Θ van de spiraal, dat bepaald is door

$$A\Gamma + AH = 2 \,.\, A\Theta.$$

Hieruit volgt $AM < A\Theta$, zoodat Θ buiten $\triangle\ A\Gamma H$ ligt, dus M binnen de spiraalwinding, in strijd met de onderstelling, dat ΓH geen punt binnen de spiraalwinding bezit.

Propositie 14.

Indien vanuit den oorsprong twee rechten worden getrokken naar de eerste winding en zij tot aan den omtrek van den eersten cirkel verlengd worden, zullen de voerstralen van de spiraal tot elkander dezelfde reden hebben als de bogen van den eersten cirkel tusschen de nulas en de uiteinden der verlengde voerstralen, gerekend in de richting van wenteling (fig. 105).

Dus·

$$(A\Delta,\ AE) = (\text{bg}\ \Theta H,\ \text{bg}\ \Theta Z)$$

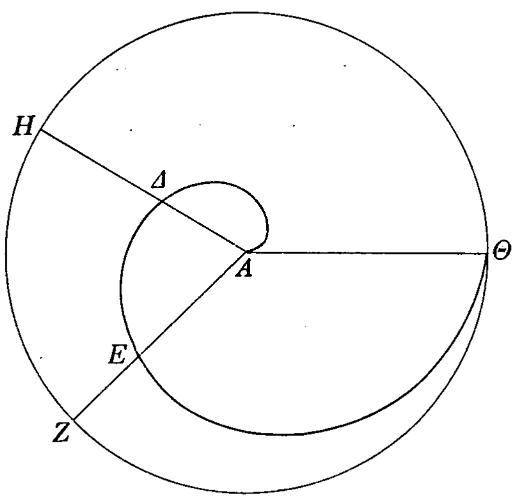


Fig. 105.

Propositie 15.

Voerstralen van de tweede winding hebben tot elkander dezelfde reden als de (in Prop. 14) *genoemde bogen, elk vermeerderd met den geheelen omtrek van den eersten cirkel.*

Beide stellingen volgen onmiddellijk uit de definitie van de kromme.

P r o p o s i t i e 16.

Indien een rechte raakt aan de eerste winding en het raakpunt wordt met den oorsprong verbonden, zullen de hoeken, die de raaklijn met den voerstraal maakt, ongelijk zijn en wel de hoek aan de voorzijde stomp, die aan de achterzijde scherp.

Laat (fig. 106) EZ de eerste winding raken in Δ [1]. Zij de cirkel

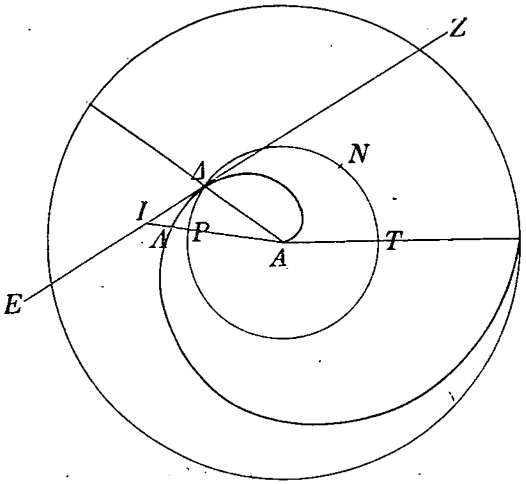


Fig. 106.

met centrum A door Θ de eerste cirkel. Beschrijf den cirkel met centrum A door Δ, dan ligt van dezen cirkel bg $TN\Delta$ buiten, bg ΔPT binnen de spiraal; dus is $\angle A\Delta E$ grooter dan de hoek van een halven cirkel, die zelf grooter is dan elke scherpe hoek [2]. Dus is $\angle A\Delta E$ niet scherp. Te bewijzen is nog, dat hij ook niet recht is, d.w.z. dat EZ niet in Δ raakt aan den cirkel $TN\Delta$. Denk, dat dit wel het geval was, dan kon men [wegens III; 9, 1] door A een rechte trekken, die den cirkel ontmoet in P, de spiraal in Λ, de rechte EZ in I, zoodat

---

[1]) Met den hoek van raaklijn en voerstraal aan de voorzijde wordt bedoeld $\angle E\Delta A$, met den hoek aan de achterzijde $\angle Z\Delta A$.

[2]) Met „hoek van een halven cirkel" wordt de z.g. hoornvormige hoek bedoeld, dien een cirkel met zijn middellijn maakt (dus niet de rechte hoek van een middellijn en de raaklijn van den cirkel in een harer uiteinden). De toegepaste stelling is Euclides III, 16, 3e lid. Zie *Elementen van Euclides* II, 34, 37. Dat, zooals daar gezegd wordt, Euclides het begrip van den hoornvormigen hoek slechts om historische redenen zou hebben opgenomen, kan met het oog op de toepassing, die Archimedes ervan maakt, niet worden volgehouden.

$$(PI,\ AP) < (\text{bg}\,\Delta P,\ \text{bg}\ \Delta NT)$$

dus *componendo*

$$(AI,\ AP) < (\text{bg}\ TN\Delta P,\ \text{bg}\ \Delta NT) = (A\Lambda,\ A\Delta)$$

Echter is $AP = A\Delta$, dus $AI < A\Lambda$ in strijd met de onderstelling, dat EZ de raaklijn van de spiraal is.

In Prop. 17 wordt dezelfde stelling uitgesproken voor raaklijnen aan andere windingen en voor raaklijnen in eindpunten van windingen.

2. Toepassing van de spiraal van Archimedes op de rectificatie van cirkelbogen.

In de proposities 18—20 wordt de spiraal gebruikt om te komen tot rectificatie van cirkelbogen. In Prop. 18 wordt uitgesproken, dat de omtrek van den eersten cirkel gelijk is aan het stuk van de loodlijn, in den oorsprong op de nulas opgericht, tusschen den oorsprong en het snijpunt met de raaklijn van de spiraal in het uiteinde van de eerste winding; in Prop. 19 dezelfde stelling voor de omtrekken van den tweeden, den derden cirkel enz. De bewijzen zijn geheel gelijkluidend aan dat van Prop. 20, waarvan de twee voorafgaande proposities bijzondere gevallen zijn. We volstaan dus met de behandeling van

Propositie 20.

Indien een rechte raakt aan de eerste winding van de spiraal in een ander punt dan het uiteinde [2]*, indien van het raakpunt naar den oorsprong een rechte wordt getrokken, indien dan met den oorsprong als centrum en de getrokken rechte als straal een cirkel wordt beschreven en uit den oorsprong een rechte loodrecht op de voerstraal van het raakpunt wordt opgericht, dan zal deze loodlijn de raaklijn ontmoeten en het stuk tusschen het snijpunt en den oorsprong zal gelijk zijn aan den boog van den beschreven cirkel tusschen het snijpunt met de nulas en het raakpunt, gerekend in de richting van wenteling van den voerstraal.*

Laat (fig. 107) de raaklijn in het punt Δ van de spiraal door

[2]) De gemaakte beperkingen „eerste winding" en „in een ander punt dan het uiteinde" zijn geen van beide wezenlijk.

de loodlijn in A op $A\Delta$ opgericht, in Z worden gesneden. Dat het snijpunt Z bestaat, volgt uit het in Prop. 16 afgeleide resultaat, dat de hoek van raaklijn en voerstraal aan de achterzijde scherp is. Laat de cirkel door Δ met het centrum A de nulas in K snijden. ΔZ raakt den cirkel niet en ontmoet hem dus nogmaals in N; zij

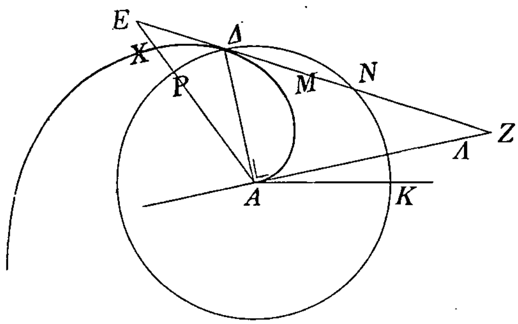


Fig. 107.

M het midden van de koorde ΔN. Te bewijzen is, dat AZ gelijk is den cirkelboog $KN\Delta$, dien we door Π voorstellen. Is dit onjuist, dan is òf $AZ > \Pi$ òf $AZ < \Pi$.

Geval I. Zij $AZ > \Pi$. Dan bestaat er tusschen A en Z een punt Λ, zoodat ook nog $A\Lambda > \Pi$[3]).

Pas nu in den geconstrueerden cirkel de prop. III; 9, 3 toe op de koorde ΔN ter bepaling van een punt E op het verlengde van $N\Delta$, zoodat als AE den cirkel in P en de spiraal in X ontmoet, de reden $(PE, P\Delta)$ een voorgeschreven waarde heeft, die grooter moet zijn dan $(\Delta M, AM)$, dus ook grooter dan $(A\Delta, AZ)$. Men kan dus E zoo bepalen, dat

$$(PE,\ P\Delta) = (A\Delta,\ A\Lambda)$$

dus *permutando*

$$(PE,\ A\Delta) = (P\Delta,\ A\Lambda)$$

---

[3]) Het bestaan van het punt Λ volgt uit de Prop. 4 van het werk: *Wanneer twee ongelijke lijnen gegeven zijn, een rechte en een cirkelboog, dan is het mogelijk, een rechte te nemen, die kleiner is dan de grootste der gegeven lijnen en grooter dan de kleinste.* Bewijs: Zij de cirkelboog A, de rechte B; bepaal n zoo, dat het n-voud van het verschil van A en B grooter is dan B; verdeel nu B in n gelijke deelen, dan is het gevraagde lijnstuk de som van het n^e deel van B en de kleinste der grootheden A en B; hoe men een recht lijnstuk maakt, dat gelijk is aan A, wordt niet gezegd.

dus wegens $A\Delta = AP$

$$(PE,\ AP) < (\text{bg } P\Delta,\ \Pi)$$

of *componendo*

$$(AE,\ AP) < (\Pi + \text{bg } P\Delta,\ \Pi)$$

welke laatste reden wegens het symptoom van de spiraal gelijk is aan $(AX,\ A\Delta)$. De ongelijkheid

$$(AE,\ AP) < (AX,\ A\Delta)$$

is echter onmogelijk, omdat $AE > AX$, terwijl $AP = A\Delta$.

Geval II. Zij nu $AZ < \Pi$. Neem nu op het verlengde van AZ een punt I, zoodat ook nog $AI < \Pi$ (fig. 108).

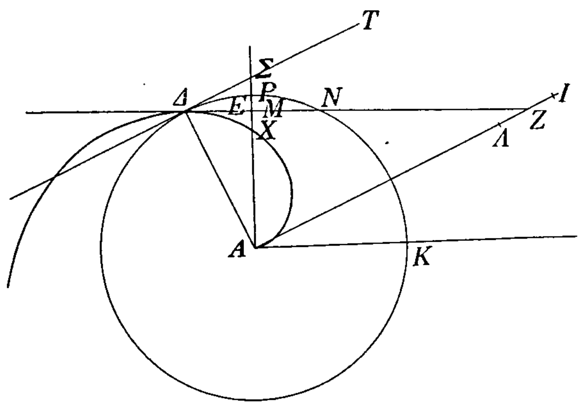


Fig. 108.

Pas nu in den geconstrueerden cirkel op de koorde ΔN met midden M en de lijn ΔT, die in Δ aan den cirkel raakt, de prop. III; 9, 4 toe ter bepaling van een punt E tusschen Δ en N, zoodat, als AE de spiraal in X, den cirkel in P en de raaklijn ΔT in Σ ontmoet, de reden $(EP,\ \Delta\Sigma)$ een voorgeschreven waarde heeft, die kleiner moet zijn dan $(\Delta M,\ AM)$, dus kleiner dan $(A\Delta,\ AZ)$. Men kan dus E zoo bepalen, dat

$$(PE,\ \Delta\Sigma) = (A\Delta,\ AI)$$

dus *permutando*

$$(PE,\ A\Delta) = (\Delta\Sigma,\ AI)$$

of

$$(PE,\ AP) > (\text{bg } \Delta P,\ \Pi)$$

dus *separando*

$$(AE, AP) < (\text{bg } KNP, \Pi)$$

dus (spiraalsymptoom)

$$(AE, AP) < (AX, A\Delta)$$

Deze ongelijkheid is echter onmogelijk, omdat $AE > AX$, terwijl $AP = A\Delta$.

De juistheid der bewezen propositie is met moderne hulpmiddelen zeer eenvoudig in te zien.

Zij de vergelijking van de spiraal in poolcoördinaten met oorsprong O en nulas langs de nulas van de kromme

$$\varrho = \lambda\varphi$$

dan is de scherpe hoek Θ, die de voerstraal van een punt Δ (ϱ, φ) aan de achterzijde met de raaklijn maakt, bepaald door

$$\text{tg } \Theta = \frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{\lambda\varphi}{\lambda} = \varphi$$

en dus vindt men voor de polaire subtangens

$$AZ = \varrho \,.\, \text{tg } \Theta = \varrho\varphi$$

d.i. de lengte van den boog met boogmaat φ van een cirkel met straat ϱ.

De gedachtengang, die Archimedes tot deze merkwaardige propositie kan hebben gevoerd, is wellicht nog als volgt nader te verhelderen:

In Prop. 16 is ingezien, dat de hoek van een raaklijn met den voerstraal van het raakpunt aan de voorzijde stomp is, terwijl de beschouwing van de figuur al spoedig het vermoeden wekt, dat die hoek bij voortgaande draaiïng van den voerstraal steeds aangroeit. Archimedes kan nu een quantitatieve uitspraak over de mate van deze aangroeiïng hebben gewenscht en daartoe hebben opgemerkt, dat wanneer in fig. 107 X op de kromme dicht bij Δ ligt, de hoek $AE\Delta$ als benadering van den hoek $A\Delta N$ kan dienen. Wegens het symptoom der kromme is nu

$$(AX, A\Delta) = (\text{bg } PK, \text{bg } \Delta K)$$

of *separando* m

$$(PX, A\Delta) = (\text{bg } P\Delta, \text{bg } \Delta K).$$

Vervangen we hierin nu bij benadering PX door PE en bg $P\Delta$ door koorde $P\Delta$, dan is

$$(PE,\ A\Delta) \backsim (P\Delta,\ \text{bg}\ \Delta K)$$

of *permutando*

$$(PE,\ P\Delta) \backsim (A\Delta,\ \text{bg}\ \Delta K),$$

Deze betrekking leert, hoe de vorm van $\triangle\ PE\Delta$ bij draaiïng van den voerstraal verandert. Zij toont echter ook, dat bg ΔK bij benadering te construeeren is als zijde van een driehoek met zijde $A\Delta$ en gelijkvormig met $\triangle\ PE\Delta$. Wanneer nu X over de kromme tot Δ nadert, nadert $\angle\ EP\Delta$ tot een rechten hoek en $\angle\ PE\Delta$ tot $\angle\ A\Delta N$. We kunnen dus vermoeden, dat bg ΔK gelijk zal zijn aan de zijde AZ van een driehoek $A\Delta Z$, die rechthoekig is in A.

De juistheid van dit vermoeden wordt nu volgens de Grieksche regelen der kunst bewezen met behulp van een dubbele reductio ad absurdum; hierbij wordt gebruik gemaakt van de in III; 9 bewezen stellingen over de limiet, waartoe de verhouding $(PE,\ P\Delta)$ nadert, wanneer P over den cirkel tot Δ nadert (III; 9, 7). Het eerste deel van het bewijs kan met behulp van de terminologie der limieten als volgt worden weergegeven:

Wegens III; 9, 3 is

$$\lim_{P\to\Delta} \frac{PE}{P\Delta} = \frac{\Delta M}{A\Delta} = \frac{A\Delta}{AZ}.$$

Op grond van het feit, dat ΔE een raaklijn is en dus in de buurt van Δ weinig van de kromme afwijkt, kan geschreven worden

$$\lim_{P\to\Delta} \frac{PE}{P\Delta} = \lim_{X\to\Delta} \frac{XE}{P\Delta} = \lim_{X\to\Delta} \frac{XE}{\text{bg}\ P\Delta}.$$

De laatste breuk is echter wegens het symptoom der kromme gelijk aan $\dfrac{A\Delta}{\text{bg}\ \Delta K}$, welke breuk constant is, wanneer X tot Δ nadert. Hieruit volgt

$$\frac{A\Delta}{AZ} = \frac{A\Delta}{\text{bg}\ \Delta K} \quad \text{dus } AZ = \text{bg}\ \Delta K.$$

Archimedes formuleert dit alles met behulp van ongelijkheden. Hij weet, dat $(PE,\ P\Delta)$ van den grooten kant nadert tot $(A\Delta,\ AZ)$ en dat $(PE,\ P\Delta)$ dus kleiner kan worden gemaakt dan iedere

Examen 1938 Wiskunde L.O. KI, KV

De Examens L.O. worden schriftelijk afgenomen in 's-Gravenhage, Groningen, Deventer en Venlo; ze vangen aan op 24 Augustus; de examens voor K I en K V worden afgenomen in den Haag, begin September. Aanmelding voor 1 Juni 1939 bij den voorzitter, den Heer J. VAN ANDEL, Insp. M.O., Den Haag, Riouwstraat 128 (ongezegeld papier, naam, voornaam; woonplaats, adres, geboorteakte).

Candidaten L.O. moeten hun onderwijzersakte bij de aanmelding inzenden.

Examengeld voor K I, ook voor K V **f 40.25**; voor L.O. **f 30.25**, te storten **vóór 1 Juni** op girorekening van den voorzitter, Den Haag nr. 172007.

De Logische Grondslagen der Euclidische Meetkunde

door

Prof. Dr. B. L. v. d. WAERDEN

ƒ 1,75 . . . . gebonden *ƒ* 2,50

Mechanica

voor het M.O. met vraagstukken

door

Dr. H. J. E. BETH en Dr. P. J. VAN LOO

3e druk . . . . gebonden *ƒ* 2,50

Antwoorden . . . . *ƒ* 0,50

Boekbespreking in afl. II, N. T. v. W. Jg. XXV.

Beginselen van de getallenleer

deel II van de theorie der Rekenkunde

door P. WIJDENES

100 voorbeelden, 430 opgaven, 236 blz. . . . *ƒ* 4,50

Gaarne beveel ik dit uitstekende werk aan voor een ieder, die met de beginselen der getallenleer wil kennismaken. Dit duidelijk geschreven boek is in het bijzonder geschikt voor degenen, die zich voor de middelbare akte wiskunde voorbereiden; zij zullen hier juist vinden, wat ze nodig hebben.

De waarde van dit boek wordt nog verhoogd door een aanhangsel bestaande uit een overzicht van de stellingen, een samenvatting van de formules en enige tafels, alsmede geschiedkundige aantekeningen van de hand van Dr. E. J. Dijksterhuis. De enige passage, die ik in dit boek enigszins anders geformuleerd zou willen zien, heeft betrekking op enkele tot op heden onopgeloste vragen (blz. 227); doch deze is voor den leerling van geen belang.

J. G. van der Corput.

☞ In het prosp. van Wijdenes Beknopte Rekenkunde 3e druk en Wijdenes en De Lange, Rekenboek voor de H.B.S. I 17e en II 11e druk wordt aan leraren, die deze boeken op hun school gebruiken een pres. ex. aangeboden van de Theorie der Rekenkunde en van dit deel II over Getallenleer. Aanvragen aan den uitgever of aan den schrijver.

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel