

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

15e JAARGANG 1938, Nr. 1.



P. NOORDHOFF — N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor ld. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang f 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (f 6.—) zijn ingetekend, betalen f 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens” (f 10.—) f 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz
Dr. O. BOTTEMA, Maxima en minima bij vierhoeken met gegeven zijden	1
M. EILANDER, Tafels in 4 of in 5 decimalen	14
C. J. ALDERS, De inhoud van een veelvlak	16
J. C. N. GERRETSEN, De functie $\frac{a_0x^2 + 2a_1x + a_2}{b_0x^2 + 2b_1x + b_2}$	23
Korrels.	34
Boekbesprekingen	42
Ingekomen boeken	46
Dr. H. C. SCHAMHARDT, Mondelinge Staatsexamens A	47

MAXIMA EN MINIMA BIJ VIERHOEKEN MET GEGEVEN ZIJDEN ¹⁾

DOOR

Dr. O. BOTTEMA.

§ 1. Zij ABCD een vlakke vierhoek, waarvan de zijden $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ en $DA = d$ gegeven zijn. (fig. 1). Is O het oppervlak van de vierhoek, dan heeft men

$$O = \frac{1}{2} ad \sin A + \frac{1}{2} bc \sin C \dots \dots \dots (1).$$

Door toepassing van de cosinusregel op de driehoeken ABD en CDB vindt men

$$b^2 + c^2 - 2 bc \cos C = a^2 + d^2 - 2 ad \cos A \dots (2).$$

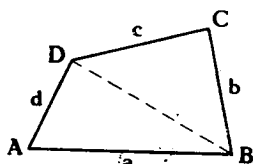


Fig. 1.

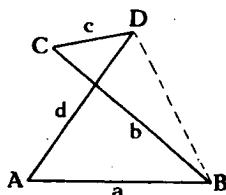


Fig. 2.

Beide formules gelden, behalve voor convexe vierhoeken en voor vierhoeken met een inspringende hoek, ook voor vierhoeken, waarvan twee zijden, b.v. AD en BC elkaar snijden (fig. 2), mits men aan het oppervlak de gebruikelijke betekenis hecht en onder $\angle C$ en $\angle D$ de inspringende hoeken bij de hoekpunten C en D verstaat.

Uit (1) en (2) volgt:

$$16 O^2 = 4 a^2 d^2 + 4 b^2 c^2 - \\ - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2 - 8 abcd \cos (A + C).$$

Vervangt men $\cos (A + C)$ door $2 \cos^2 \frac{1}{2} (A + C) - 1$, resp. door $1 - 2 \sin^2 \frac{1}{2} (A + C)$, dan vindt men:

¹⁾ Een gedeelte van de in dit artikel afgeleide resultaten werd besproken in een voordracht op de jaarvergadering van de „Vereeniging van Leeraren in de Wiskunde enz.” op 30 Dec. 1937 te Utrecht.

$$16 O^2 = (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) - 16 abcd \cos^2 \frac{1}{2} (A + C) \dots \dots \dots (3)$$

en

$$16 O^2 = (a + b + c + d)(-a + b + c - d)(a - b + c - d)(a + b - c - d) + 16 abcd \sin^2 \frac{1}{2} (A + C) \dots \dots \dots (4)$$

De in (3) en (4) voorkomende producten stellen wij door P_1 en P_2 voor:

$$P_1 = (-a + b + c + d)(a - b + c + d)(a + b - c + d)(a + b + c - d) \dots \dots \dots (5)$$

$$P_2 = (a + b + c + d)(-a + b + c - d)(a - b + c - d)(a + b - c - d) \dots \dots \dots (6)$$

zodat

$$16 O^2 = P_1 - 16 abcd \cos^2 \frac{1}{2} (A + C) = P_2 + 16 abcd \sin^2 \frac{1}{2} (A + C) \dots \dots \dots (7).$$

Wij merken nog op, dat niet alleen P_1 , maar ook P_2 *onveranderd* blijft bij *permutatie* der zijden a , b , c en d . Verder geldt nog de betrekking:

$$P_1 - P_2 = 16 abcd \dots \dots \dots (8).$$

§ 2. Uit (7) blijkt, dat voor een vierhoek met gegeven zijden $16 O^2$ *hoogstens* gelijk is aan P_1 en *minstens* gelijk aan P_2 . Is $16 O^2 = P_1$, dan is $\cos^2 \frac{1}{2} (A + C) = 0$, dus $A + C = \pi$ waaruit volgt, dat de vierhoek een *convexe koordenvierhoek* is. Is $16 O^2 = P_2$, dan is $\sin^2 \frac{1}{2} (A + C) = 0$, dus $A + C = 2\pi$, waaruit volgt, dat de vierhoek een *niet-convexe koordenvierhoek* is.

Wij vinden dus: *indien onder de vierhoeken met gegeven zijden een convexe koordenvierhoek K_1 voorkomt, dan is voor deze vierhoek het oppervlak maximaal; komt een niet-convexe koordenvierhoek K_2 voor, dan is voor deze het (kwadraat van het) oppervlak minimaal.*

Een *nodige* voorwaarde voor het bestaan van K_1 is blijkbaar: $P_1 \geq 0$; voor het bestaan van K_2 is *nodig* $P_2 \geq 0$.

De eerste voorwaarde is vervuld als geen der vier zijden groter is dan de som der drie overige; aan haar wordt voldaan, zodra het mogelijk is met a , b , c , d als zijden een vierhoek te vormen; wij kunnen het geval $P_1 \leq 0$ dus verder buiten beschouwing laten.

Anders is het gesteld met de tweede voorwaarde. Wanneer b.v. gegeven is:

$$a \geq b \geq c \geq d,$$

dan zijn de eerste, derde en vierde factor van P_2 groter dan of gelijk aan nul, zodat $P_2 \geq 0$ alleen geldt als

$$b + c \geq a + d \dots \dots \dots (9)$$

een voorwaarde, die zeker niet van $P_1 \geq 0$ afhankelijk is. Wij komen dus tot de conclusie, dat tot de verzameling vierhoeken met gegeven zijden *niet* steeds een *niet-convexe* koordenvierhoek behoort. Alvorens in te gaan op de thans openliggende vraag, voor welke vierhoek O^2 minimaal is in het geval $P_2 < 0$, brengen wij het tegengestelde geval tot afsluiting, door aan te tonen, dat tot de verzameling vierhoeken steeds een convexe koordenvierhoek behoort en dat voor het bestaan van een niet-convexe koordenvierhoek de voorwaarde $P_2 \geq 0$ niet alleen nodig, maar ook *volgende* is.

§ 3. Te dien einde maken wij eerst de eenvoudige, maar in het gegeven verband nuttige opmerking, dat een *driehoek* met de zijden p , q en r dan en alleen dan bestaat, als

$$Q \equiv (p + q + r) (-p + q + r) (p - q + r) (p + q - r) > 0 \dots \dots \dots (10).$$

Het stellen van de voorwaarde in deze vorm heeft in de eerste plaats boven de meestal gebruikte („de grootste zijde is kleiner dan de som der beide andere”) het voordeel, dat zij kan worden toegepast, zonder dat van de grootte-volgorde der zijden iets bekend is. Een tweede voordeel — waardoor de aanwezigheid van de overbodig schijnende eerste factor van Q wordt gerechtvaardigd — is gelegen in het feit, dat men haar kan gebruiken in het

geval dat b.v. de zijde p het verschil is van twee lijnstukken p_1 en p_2 , zonder dat men weet welke van deze twee de grootste is. Men kan dan zonder bezwaar voor p substitueren $p_1 - p_2$, ook voor eventuele gevallen dat $p_2 > p_1$; immers de uitdrukking Q verandert niet als men een zijde

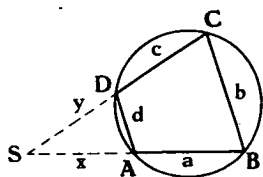


Fig. 3.

p , q of r door haar tegengestelde vervangt.

Is nu (fig. 3) ABCD een convexe koordenvierhoek en $b > d$, zodat BA en CD elkaar snijden in een punt S, $AS = x$, $DS = y$, dan is $x : (y + c) = d : b = y : (x + a)$, (11) waaruit volgt:

$$AD : DS : SA = (b^2 - d^2) : (ab + cd) : (ad + cb) \dots (12).$$

Blijkbaar zal de vierhoek bestaan, als de construeerbaarheid van de driehoek ADS vaststaat. Substitueert men

$$p = b^2 - d^2, \quad q = ab + cd, \quad r = ad + cb$$

in (10), dan vindt men

$$p + q + r = (b + d)(a + b + c - d), \text{ enz.}$$

zodat

$$Q = (b^2 - d^2)^2 P_1, \dots \dots \dots (13)$$

waaruit volgt, dat $Q > 0$. De gevallen $b = d$ en $b < d$ geven geen moeilijkheden. *Er bestaat dus steeds een convexe koordenvierhoek met vier gegeven zijden*¹⁾. Laat men permutatie der zijden toe, dus beschouwt men vierhoeken, wier zijden a, b, c en d zijn, zonder dat zij in de genoemde cyclische volgorde op elkaar aansluiten, dan bestaan

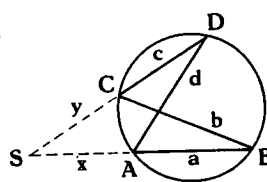


Fig. 4.

Is ABCD een niet-convexe koordenvierhoek (fig. 4), $b > d$, S het snijpunt van BA en DC, $AS = x$, $DS = y$, dan is

$$x : (y - c) = d : b = y : (x + a), \dots \dots (14)$$

vergelijkingen, die uit (11) volgen, als men c door $-c$ vervangt. Ook nu is het bestaan van de driehoek ADS beslissend. Men vindt:

$$AD : DS : SA = (b^2 - d^2) : (ab - cd) : (ad - cb), \dots (15)$$

zodat substitutie in (10) geeft

$$Q = (b^2 - d^2)^2 P_2.$$

De voorwaarde $Q > 0$ is dus vervuld als $P_2 > 0$. Maar blijkbaar is nog nodig, dat de verhoudingsgetallen in het tweede lid van (15) positief zijn. Nu kan men, zonder de algemeenheid te kort te doen,

¹⁾ Vgl. R. Sturm, Maxima und minima in der elementaren Geometrie, 1910, pg. 22.

veronderstellen (bij vierhoeken, waarvan geen twee zijden gelijk zijn), dat a de grootste zijde is en b de grootste van de beide aansluitende zijden b en d . Wij hebben dan nog de mogelijkheden 1^o. $a > b > c > d$; 2^o. $a > c > b > d$; 3^o. $a > b > d > c$.

In het eerste geval is $a - b + c - d > 0$, dus $a - d > b - c > 0$, of wel $(a - d)^2 > (b - c)^2$. Van de drie getallen uit (15) staat vast, dat het eerste en het tweede positief zijn; zal ook het derde positief zijn, dan moet $ad > bc$, dus $4ad > 4bc$, waaruit volgt $a + d > b + c$. De factor $(-a + b + c - d)$ uit P_2 is dus negatief en daar de factoren $(a + b + c + d)$, $(a - b + c - d)$ en $(a + b - c - d)$ positief zijn, zou $P_2 < 0$ zijn. De eerste volgorde komt dus niet voor. Op overeenkomstige wijze blijkt, dat ook de tweede volgorde niet mogelijk is, terwijl de derde aan alle voorwaarden voldoet. De gevallen, waarbij één of meer zijden aan elkaar gelijk zijn, geven geen moeilijkheden. Wij krijgen dus: *onder de vierhoeken, waarvan de zijden, in enige volgorde beschouwd, gelijk zijn aan vier gegeven lijnstukken, komt een niet-convexe koordenvierhoek voor als $P_2 \geq 0$* . Deze eis komt overeen met de voorwaarde, dat de som van het grootste en het kleinste lijnstuk kleiner of gelijk is aan de som der beide anderen; in de bedoelde koordenvierhoek zijn het 'grootste en het kleinste lijnstuk overstaande zijden.

§ 4. Als $P_2 < 0$, dan bevat de verzameling vierhoeken geen niet-convexe koordenvierhoek. Wij bewijzen, dat het minimale oppervlak in dat geval voorkomt bij de vierhoek met oppervlak nul, dus bij de vierhoek met evenwijdige diagonalen. Uiteraard be-

hoeven wij daarvoor alleen aan te tonen, dat een dergelijke vierhoek in het geval $P_2 < 0$ bestaat. Zijn de diagonalen AC en BD evenwijdig (fig. 5), dan wordt dus eigenlijk gevraagd de constructie van het trapezium ACBD, waarvan de opstaande zijden $CB = b$ en $AD = d$, benevens de

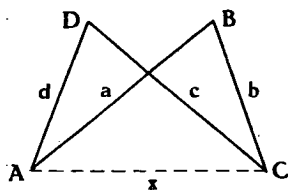


Fig. 5.

diagonalen $AB = a$ en $CD = c$ gegeven zijn.¹⁾

¹⁾ Een drietal oplossingen van dit eenvoudige vraagstuk vindt men bij Krediet, Wiskundig Tijdschrift IV, 1908, pg. 241—244, echter zonder de discussie waar het bij ons om gaat.

Stelt men $AC = x$, dan is voor de oplosbaarheid nodig en voldoende: 1°. er bestaat een driehoek met zijden a , b en x ; 2°. er bestaat een driehoek met zijden c , d en x ; 3°. de oppervlakken dezer twee driehoeken zijn gelijk. Zijn O_1 en O_2 deze twee oppervlakken, en is $y_1 = 16 O_1^2$, $y_2 = 16 O_2^2$, dus is:

$$y_1 = -x^4 - a^4 - b^4 + 2a^2x^2 + 2b^2x^2 + 2a^2b^2$$

$$y_2 = -x^4 - c^4 - d^4 + 2c^2x^2 + 2d^2x^2 + 2c^2d^2 \dots \dots \dots (16)$$

dan moet

$$y_1 = y_2 > 0 \dots \dots \dots (17)$$

y_1 is een kwadratische functie van x^2 , waarvan de grafiek een parabool is, die de x^2 -as snijdt in de punten $x^2 = (a - b)^2$ en $x^2 = (a + b)^2$, terwijl de top ligt boven deze as, nl. in $a^2 + b^2$, $4a^2b^2$; de grafiek van y_2 is een met de eerste congruente parabool, die de x^2 -as in $x^2 = (c - d)^2$ en $x^2 = (c + d)^2$ snijdt en waarvan de top in $c^2 + d^2$, $4c^2d^2$ ligt. (fig. 6). De twee parabolen hebben

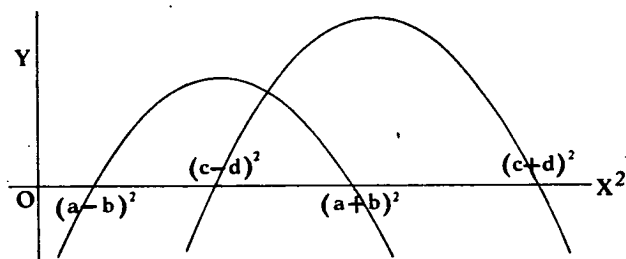


Fig. 6.

een gemeenschappelijk snijpunt met de x^2 -as, als $a + b = c + d$ of $a - b = c - d$ of $a - b = d - c$. (De andere gevallen zijn wegens $P_1 > 0$ onmogelijk; de parabolen vallen samen als $a = c$, $b = d$ en als $a = d$, $b = c$). In deze gevallen is $P_2 = 0$. Het snijpunt der beide parabolen heeft een positieve ordinata (en dan ook een positieve abscis) als de snijpunten met de x^2 -as afwisselend liggen. M.a.w. uit (17) volgt:

$$\text{of } (c - d)^2 < (a - b)^2 \text{ en } (c + d)^2 < (a + b)^2$$

$$\text{of } (c - d)^2 > (a - b)^2 \text{ en } (c + d)^2 > (a + b)^2,$$

zodat dus

$$\{(a - b)^2 - (c - d)^2\} \{(a + b)^2 - (c + d)^2\} > 0,$$

waaruit volgt $P_2 < 0$, terwijl blijkbaar ook de omgekeerde stelling geldt.

Nodig en voldoende voor het bestaan van een vierhoek met zijden a, b, c , en d , en met evenwijdige diagonalen, is dus dat $P_2 \leq 0$. Als de voorwaarde vervuld is, kan de volgorde der zijden willekeurig worden gekozen.

Is $P_2 = 0$, dan is zowel een niet-convexe koordenvierhoek mogelijk als een vierhoek met evenwijdige diagonalen. Volgens (7) is het oppervlak van de eerste dan ook nul, zodat het er een is met evenwijdige diagonalen. Het omgekeerde geldt niet: er is slechts één niet-convexe koordenvierhoek en drie niet-congruente vierhoeken met oppervlak nul. De vierhoeken met $P_2 = 0$ zijn blijkbaar de raaklijnvierhoeken. Wij hebben nu de volgende stelling bewezen:

Van de verzameling vierhoeken, wier zijden in enige volgorde gelijk zijn aan vier gegeven lijnstukken, heeft de convexe koordenvierhoek het grootste oppervlak; het oppervlak (in absolute waarde) is minimaal voor de niet-convexe koordenvierhoek als $P_2 \geq 0$; voor de vierhoek met evenwijdige diagonalen als $P_2 \leq 0$. De maximale waarde van $16 O^2$ is P_1 , de minimale waarde van $16 O^2$ is resp. P_2 en 0.

§ 5. Door D a r b o u x¹⁾ is een methode aangegeven om de exemplaren van de verzameling vierhoeken met gegeven zijden af te beelden op de punten van een kromme. Kiest men in het vlak van de vierhoek een rechthoekig assenstelsel en zijn $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ en φ_4 de hoeken die AB, BC, CD en DA met de X-as maken, dan is blijkbaar:

$$\begin{aligned} a \cos \varphi_1 + b \cos \varphi_2 + c \cos \varphi_3 + d \cos \varphi_4 &= 0 \\ a \sin \varphi_1 + b \sin \varphi_2 + c \sin \varphi_3 + d \sin \varphi_4 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

waaruit volgt

$$\begin{aligned} ae^{i\varphi_1} + be^{i\varphi_2} + ce^{i\varphi_3} + de^{i\varphi_4} &= 0 \\ ae^{-i\varphi_1} + be^{-i\varphi_2} + ce^{-i\varphi_3} + de^{-i\varphi_4} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Stelt men nu $e^{i\varphi_1}, e^{i\varphi_2}, e^{i\varphi_3}, e^{i\varphi_4}$ resp. voor door x, y, z, w en interpreteert men deze getallen als homogene puntcoördinaten in de ruimte, dan wordt de vierhoek afgebeeld op een punt, gelegen op de doorsnede van

¹⁾ D a r b o u x, De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan, Bull. Sc. Math. II, 3 (1879), pg. 109—128.

$$ax + by + cz + dw = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

en
$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} + \frac{d}{w} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Uit (19) blijkt, dat de afbeelding onafhankelijk is van het gekozen assenstelsel: een draaiing van de X-as laat de onderlinge verhoudingen van x , y , z en w onveranderd.

Daar (20) een plat vlak, (21) een oppervlak van de derde graad voorstelt, wordt *de verzameling vierhoeken afgebeeld op die der punten van een vlakke kromme van de derde graad*. In 't algemeen zal men dus voor een parametervoorstelling van de verzameling elliptische functies moeten gebruiken. De kromme is rationaal, als zij een dubbelpunt heeft, dus als het vlak (20) raakt aan het oppervlak (21). Is x_0 , y_0 , z_0 , w_0 het raakpunt, dan is de vergelijking van het raakvlak aan (21):

$$\frac{a}{x_0^2}x + y \frac{b}{y_0^2} + z \frac{c}{z_0^2} + w \frac{d}{w_0^2} = 0;$$

hieruit volgt $x_0^2 = y_0^2 = z_0^2 = w_0^2$, dus $x_0 = \pm y_0 = \pm z_0 = \pm w_0$, waarbij alle tekencombinaties gelden. Dus is

$$a \pm b \pm c \pm d = 0$$

of wel $P_2 = 0$.

De bijzondere vierhoeken, waarvoor $P_2 = 0$, worden dus afgebeeld op de punten van een vlakke cubische kromme met een dubbelpunt. Met de vierhoeken waarvoor $P_2 > 0$, resp. $P_2 < 0$, corresponderen de cubische krommen, die eendelig, resp. tweedelig zijn. Zijn de vier zijden a , b , c en d twee aan twee aan elkaar gelijk, dan is de cubische kromme ontaard in een kegelsnede en een rechte, zijn ze alle gelijk, dan is zij in drie rechten ontaard.

De afbeelding van Darboux heeft het bezwaar, dat de vierhoeken zijn afgebeeld niet op de reële punten der cubische kromme, maar op de punten wier coördinaten de modulus 1 hebben.

§ 6. Wij maken enige opmerkingen over maxima en minima in verband met de *hoeken* van de vierhoek. Uit (7) en de beschouwingen over de extreme waarden van het oppervlak volgt: *de kleinste waarde van $\cos^2 \frac{1}{2} (A + C)$ is 0; de kleinste waarde van $\sin^2 \frac{1}{2}$*

$(A + C)$ is 0 als $P_2 \geq 0$ en $-\frac{P_2}{16abcd}$ als $P_2 \leq 0$; de grootste waarde van $\cos^2 \frac{1}{2} (A + C)$ is, dus respectievelijk 1 en $1 + \frac{P_2}{16abcd}$, welke laatste uitdrukking volgens (8) kan worden herleid tot $\frac{P_1}{16abcd}$.

Men heeft dus

$$0 \leq \cos^2 \frac{1}{2} (A + C) = \cos^2 \frac{1}{2} (B + D) \leq 1, \text{ als } P_2 \geq 0$$

$$0 \leq \cos^2 \frac{1}{2} (A + C) = \cos^2 \frac{1}{2} (B + D) \leq \frac{P_1}{16abcd}, \text{ als } P_2 \leq 0 \quad (22)$$

§ 7. Bij het beschouwen van de extreme waarden van een enkele hoek van de vierhoek, doet zich de vraag voor of het mogelijk is dat een bepaalde hoek, b.v. A , elke waarde van 0 tot en met π kan aannemen.

Daarvoor is nodig, dat er een driehoek bestaat met zijden $a + d$, b en c ; eventueel mag de grootste dezer lijnstukken *gelijk* zijn aan de som der beide andere. De voorwaarde luidt (vgl. (10)):

$$(a + d + b + c) (-a - d + b + c) (a + d - b + c) (a + d + b - c) \geq 0,$$

wat dus neerkomt op

$$-a + b + c - d \geq 0. \dots \dots \dots (23)$$

Verder moet een driehoek bestaan met de zijden $a - d$ (of $d - a$), b en c , waaruit volgt

$$(a - b + c - d) (a + b - c - d) \geq 0 \dots \dots (24).$$

Uit (23) en (24) volgt door vermenigvuldiging: $P_2 \geq 0$.

Zijn de beide factoren uit het linkerlid van (24) positief of nul, dan volgt na combinatie met (23): $a \geq d$, $b \geq d$, $c \geq d$; zijn beide factoren kleiner of gelijk aan nul, dan vindt men: $a \leq b$, $a \leq c$, $a \leq d$.

M.a.w. zal de hoek A van vierhoek $ABCD$ elke waarde kunnen hebben, dan is nodig, dat een der zijden om A kleiner of gelijk is aan de drie overige en voorts dat $P_2 \geq 0$.

Uit het volgende blijkt, dat deze voorwaarden ook voldoende zijn. Is a kleiner of gelijk elk der andere zijden en verder $P_2 \geq 0$, dan onderscheiden wij twee gevallen: 1°. d is groter of gelijk elk der overige zijden, 2°. d is niet de grootste zijde. In het eerste geval

is elk der factoren van het linkerlid van (24) negatief; aan (24) en dus ook aan (23) is voldaan; in het tweede geval ziet men onmiddellijk, dat aan (23) is voldaan en dus ook aan (24).

Uit het bovenste volgt nog, dat als $P_2 \geq 0$, de beide hoeken, die *een uiteinde van de kleinste zijde* tot hoekpunt hebben, niet aan grenzen zijn gebonden.

Wij gaan thans na wanneer hoek A een (van nul verschillende) kleinste waarde A_k en tevens een (van π verschillende) grootste waarde A_g kan aannemen.

Daarvoor is ten eerste nodig het bestaan van een driehoek met zijden a , d en $b - c$ (of $c - b$); dus moet

$$(a + d + b - c) (-a + d + b - c) (a - d + b - c) (a + d - b + c) > 0$$

of wel

$$(-a + b - c + d) (a + b - c - d) > 0 \dots (25)$$

Voor het bestaan van A_g is nodig de existentie van een driehoek met zijden a , d , $b + c$, waaruit volgt:

$$a - b - c + d > 0 \dots (26)$$

Uit (25) en (26) volgt

$$P_2 > 0,$$

en verder op analoge wijze als boven:

$$a > c, b > c, d > c \text{ of } a > b, c > b, d > b.$$

Dus voor het bestaan van een kleinste hoek A_k en een grootste hoek A_g is nodig, dat A geen eindpunt is van de kleinste zijde en voorts, dat $P_2 > 0$.

Op overeenkomstige wijze als boven blijkt, dat deze voorwaarden ook voldoende zijn.

Verder is blijkbaar

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A_k &= \frac{(a + b - c - d) (-a + b - c + d)}{(a + b - c + d) (a - b + c + d)} \\ \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A_g &= \frac{(a + b + c - d) (-a + b + c + d)}{(a + b + c + d) (a - b - c + d)} \end{aligned} \quad (27)$$

terwijl men heeft

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A_k : \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} A_g = P_2 : P_1 \dots (28)$$

Wanneer ten slotte van de hoeken A_k en A_g slechts één bestaat, vinden wij andere voorwaarden.

Bestaat A_k wèl, maar kan anderszijds hoek A de waarde π verkrijgen, dan gelden de voorwaarden (25) en (23), hieruit volgt $P_2 < 0$ en verder òf $b > a, b > c, b > d$ òf $c > a, c > b, c > d$ terwijl deze voorwaarden weer met (25) en (23) gelijkwaardig zijn. Bestaat A_g wel, maar kan anderszijds hoek A de waarde 0 verkrijgen, dan gelden de voorwaarden (26) en (24), die gelijkwaardig zijn met $P_2 < 0$ en òf $a > b, a > c, a > d$, òf $d > a, d > b, d > c$.

Voor de hoeken A_k en A_g gelden daarbij resp. de waarden uit (27). Samenvattend hebben wij:

Als voor de vierhoeken met vier gegeven zijden geldt $P_2 \geq 0$, dan zijn de beide hoeken, wier hoekpunten de uiteinden zijn der kortste zijde, niet aan grenzen gebonden; de beide andere hoeken hebben elk een minimum en een maximum waarde (die resp. van 0 en π verschillen); is $P_2 < 0$, dan kunnen de hoeken, wier hoekpunten de uiteinden zijn van de langste zijde, de waarde 0 aannemen, terwijl hun maximum kleiner dan π is; de beide andere kunnen de waarde π bereiken en hebben een van 0 verschillende minimumwaarde.

§ 8. Voor het product der diagonalen p en q van een vierhoek geldt:

$$p^2 q^2 = a^2 c^2 + b^2 d^2 - 2 abcd \cos (A + C)$$

of wel

$$p^2 q^2 = (ac + bd)^2 - 4 abcd \cos^2 \frac{1}{2} (A + C) \dots (29)$$

en

$$p^2 q^2 = (ac - bd)^2 + 4 abcd \sin^2 \frac{1}{2} (A + C) \dots (30)$$

Het product is dus maximaal resp. minimaal, als $\cos^2 \frac{1}{2} (A + C)$ minimaal resp. maximaal is, dus ook als O^2 maximaal, resp. minimaal is.

Wij hebben daarom:

Het product der diagonalen is het grootst, als de vierhoek een convexe koordenvierhoek is; het bedraagt dan $(ac + bd)^2$; het product is voor vierhoeken met $P_2 > 0$ minimaal als de vierhoek een niet-convexe koordenvierhoek is, het minimum is $(ac - bd)^2$; voor vierhoeken met $P_2 \leq 0$ wordt het minimum verkregen bij een vierhoek, wier diagonalen evenwijdig zijn, het bedraagt $(ac - bd)^2 - \frac{1}{4} P_2 = (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2$.

Uit deze resultaten blijkt nog, dat voor een vierhoek met $ac = bd$ (harmonische vierhoek) geldt: $P_2 \leq 0$; voor een vierhoek met $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$ (vierhoek met diagonalen, die loodrecht op elkaar staan) is $P_2 \geq 0$.

§ 9. Is φ een der hoeken tussen de diagonalen van de vierhoek, dan is

$$16 O^2 = 4 p^2 q^2 \sin^2 \varphi \dots \dots \dots (31)$$

Wij hebben dus

$$\begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{P_1 - 16 abcd \cos^2 \frac{1}{2} (A + C)}{4(ac + bd)^2 - 16 abcd \cos^2 \frac{1}{2} (A + C)} = \\ &= \frac{P_2 + 16 abcd \sin^2 \frac{1}{2} (A + C)}{4(ac - bd)^2 + 16 abcd \sin^2 \frac{1}{2} (A + C)} \quad (32) \end{aligned}$$

$\sin^2 \varphi$ is dus een gebroken lineaire functie van $\cos^2 \frac{1}{2} (A + C)$ (en ook van $\sin^2 \frac{1}{2} (A + C)$), tenzij de teller en de noemer evenredig zijn, dus als

$$P_1 = 4 (ac + bd)^2$$

of wel

$$P_2 = 4 (ac - bd)^2.$$

In dat geval is $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 0$, $\sin^2 \varphi = 1$, de diagonalen van elke vierhoek uit de verzameling snijden elkaar loodrecht.

In alle andere gevallen is

$$\begin{aligned} P_1 - 4 (ac + bd)^2 &= P_2 - 4 (ac - bd)^2 = \\ &= (a^2 - b^2 + c^2 - d^2)^2 < 0. \end{aligned}$$

Men vindt dan

$$\text{als } P_2 \geq 0 \text{ is: } \frac{P_1}{4(ac + bd)^2} \geq \sin^2 \varphi \geq \frac{P_2}{4(ac - bd)^2} \quad (33)$$

$$\text{als } P_2 \leq 0 \text{ is: } \frac{P_1}{4(ac + bd)^2} \geq \sin^2 \varphi \geq 0 \quad (34)$$

De maximumwaarde in (33) wordt aangenomen bij de convexe, de minimumwaarde bij de niet-convexe koordenvierhoek; in (34) zijn het respectievelijk de convexe koordenvierhoek en de vierhoek met evenwijdige diagonalen.

§ 10. Ten slotte gaan wij na of met de zijden a, b, c en d een trapezium geconstrueerd kan worden. Het geval $P_2 = 0$, waarbij „ontaarde” trapezia voorkomen, laten wij buiten beschouwing.

Zijn a en c de evenwijdige zijden, dan is voor de construeerbaarheid van een *convex trapezium* nodig en voldoende het bestaan van een driehoek met de zijden $a - c$ (of $c - a$), b en d , zodat

$$(-a + b + c - d)(a + b - c - d) < 0 \dots (35).$$

Zal een *niet-convex trapezium* mogelijk zijn, dan wordt het bestaan geeist van een driehoek met de zijden $a + c$, b en d , zodat

$$(a - b + c - d) < 0 \dots \dots \dots (36).$$

Het product der linkerleden van (35) en (36) is P_2 ; bovendien volgt uit (35) en (36): of $a < b$, $a < c$, $a < d$, of $c < a$, $c < b$, $c < d$. Volgens een redenering, overeenkomend met die van § 7 blijkt dan:

Opdat met de vier zijden zowel een convex als een niet-convex trapezium kan worden geconstrueerd, waarvan a en c de evenwijdige zijden zijn, is nodig en voldoende, dat $P_2 > 0$, terwijl of a , of c de kleinste der vier zijden is.

Als $P_2 > 0$ is, kan men dus, als geen bepaalde volgorde der zijden is voorgeschreven, drie convexe en drie niet-convexe trapezia construeren; de kleinste der vier zijden fungeert daarbij telkens als één der evenwijdige zijden.

Wordt aan één en slechts één der voorwaarden (35) en (36) voldaan, dan is $P_2 < 0$ en omgekeerd. Wordt wél aan (35), niet aan (36) voldaan, dan is of $a > b$, $a > c$, $a > d$, of $c > a$, $c > b$, $c > d$. Wordt wél aan (36), niet aan (35) voldaan, dan is of $b > a$, $b > c$, $b > d$, of $d > a$, $d > b$, $d > c$.

Opdat met de vier zijden één en slechts één trapezium geconstrueerd kan worden met a en c als evenwijdige zijden, is nodig en voldoende dat $P_2 < 0$; het trapezium is convex als a of c de grootste zijde, niet-convex als b of d de grootste zijde is.

Als $P_2 < 0$ is, kan men dus, als geen bepaalde volgorde der zijden is voorgeschreven, drie convexe en drie niet-convexe trapezia construeren; elk paar zijden kan daarbij als paar evenwijdige zijden fungeren; convex zijn de trapezia, waarbij de grootste zijde tot de evenwijdige zijden behoort.

TAFELS IN 4 OF IN 5 DECIMALEN?

DOOR

M. EILANDER.

Hierover is m.i. nog een opmerking te maken, die ik in de discussies tot m'n verwondering gemist heb. Zij betreft juist het punt, waar de redeneringen van den heer Wijdenes enerzijds en van Mej. Bleeker en den Heer Staring anderzijds langs elkaar heen glijden. Zij en wij allen zijn het hierover eens: de leerlingen moeten leren interpoleren. Wat de tafel der logarithmen van de gewone getallen betreft moet ik dit tweetal collega's tegenover W. gelijk geven, dat het interpoleren in een 4-decimalige tafel even goed gaat als in een 5-decimalige. Hier hebben de samenstellers van tafels de fout gemaakt dat ze een uitgebreide tafel gaven, waarbij interpoleren overbodig is.

In de log sinus enz. tafel echter gaat de redenering van Mej. B. en den Heer S. niet op. Immers: *de opklimming van het argument moet afgestemd zijn op het aantal decimalen van de functie*. Klimt de hoek op met 1° , dan is deze opklimming geschikt om daartussen te interpoleren in 3 decimalen, maar niet in 4.

En in 3 decimalen nog met het voorbehoud: niet in de buurt van een discontinuïteit. Niet alle collega's schijnen dit te weten: ik vond in een pas verschenen leerboek voor de H.B.S. de volgende malligheid:

$$\left. \begin{array}{l} \text{„tg } 78^\circ = 4.7046 \\ \text{„tg } 79^\circ = 5.1446 \end{array} \right\} \text{ dus (!) tg } 78^\circ 40' = 4.7046 + \frac{40}{60} \times 0.4400 = 4.9979. \text{ Tot zover het boek.}$$

De werkelijke waarde is 4.9894.

Twijfelt iemand nog aan de noodzakelijkheid, om de toekomstige leerboekenschrijvers, zolang ze nog op de schoolbanken zitten, te doordringen van de grenzen der interpolatiemogelijkheden?

De opklimming met 1° is voor 4 decimalen te groot. Klimt echter de hoek op met 1 minuut, dan is deze opklimming geschikt om daartussen in 5 decimalen te interpoleren, maar niet in 4. Dát is de moeilijkheid van de 4-decimalige tafel. De verschillen zijn òf te

groot of te klein. Bij grote verschillen is het zoeken, bij kleine het terugzoeken te onnauwkeurig. Van dit laatste een voorbeeld uit de logarithmen der gewone getallen. Stel twee opeenvolgende logarithmen in de tafel verschillen 4. Deze 4 betekent: het werkelijke verschil ligt tussen 3 en 5. Stel, dat $\log x$ er midden tussen ligt. Het verschil 2 tussen $\log x$ en de tafelwaarde betekent: het werkelijke verschil ligt tussen 1 en 3. Het door interpolatie te vinden cijfer van het getal x ligt dus tussen $\frac{10}{5}$ en $\frac{30}{3}$, d.i. tussen 2 en 10; de werkelijkheid is natuurlijk nooit zó erg, maar toch erg genoeg om te zeggen: het gevonden cijfer is volkomen onbetrouwbaar. Wil men dus de 4-decimalige tafel nog een kansje geven, dan is in de $\log \sin$ enz. tafel beslist noodzakelijk, dat men de minuten en seconden opruimt en tot de 100-delige verdeling overgaat. Een 4-decimalige tafel, die opklimt met $0^\circ,1$ is wél geschikt voor interpolatie op honderdsten van graden. In de $\log$ -getallen tafel geve men dan de logarithmen der getallen, niet van 10 tot 1000 op 25(!) bladzijden, ook niet van 10 tot 100, maar van 10 tot b.v. 160 *op 2 naast elkaar liggende bladzijden*. De ruimte is dunkt me wel te vinden door ze in 3 kolommen te geven.

Zolang hieraan niet voldaan is moeten we m.i. beslist terug naar de 5-decimalige tafel.

Er is nóg een argument tegen de 4 decimalen. Er zijn beroepen waar men de 5-, resp. 6- of zelfs 7-decimalige tafel nodig heeft (b.v. resp. landmeters, stuurlieden en mathematische astronomen; ook het vergelijkend onderzoek in Breda eist bewerkingen met een tafel in 5 decimalen). Hiervoor mogen de physici onder ons niet blind, en de pure mathematici niet onverschillig zijn. Een knaap, die een 5-decimalige tafel accuraat heeft leren gebruiken, kan ook later met de 4, 6 of 7 terecht. Maar ik vrees het ergste voor hem, als hij slechts met een 4-decimalige een beetje heeft leren knoeien. Het zou m.i. goed zijn als er een tafel verscheen die de logarithmen der getallen eerst in 4, en dan in 5 decimalen geeft, de directe waarden van de sinus enz. in 4, en de logarithmen derzelve in 5 decimalen. Ook bij 5 decimalen echter wordt het toch dunkt me tijd om de minuten en seconden af te schaffen en tot de 100-delige verdeling van de graad over te gaan.

Durft de heer Wijdenes het aan om naast zijn „Five Place Tables” een goniometrieboek uit te geven met de 100-delige verdeling?

DE INHOUD VAN EEN VEELVLAK

DOOR

C. J. ALDERS.

§ 1. In zijn *Grundlagen der Geometrie* geeft D. Hilbert een methode voor de bepaling van het oppervlak van een veelhoek, en neemt daarbij als uitgangspunt de definitie: het oppervlak van een driehoek is gelijk aan het halve product van een zijde en de hoogtelijn op die zijde.

Deze methode, die vele voordelen heeft op de gebruikelijke behandeling, wordt, voor zover mij bekend, slechts in twee Nederlandse schoolboeken gevolgd ¹⁾; mijn persoonlijke ervaring ermee is onverdeeld gunstig.

Hilbert verwijst in zijn boek naar een methode van W. Süss, om op een soortgelijke wijze een theorie op te bouwen voor de inhoud van een veelvlak, maar werkt dit niet uit. Ik meen erin geslaagd te zijn dit vraagstuk op — voor de school-meetkunde — bevredigende wijze op te lossen. Om beide theorieën — de oude en de „nieuwe” — recht te doen wedervaren, is het nodig om de kenmerken van de eerste scherp te stellen. Ik neem hierbij als leidraad de Stereometrie van Molenbroek-Wijdenes; in alle andere schoolboeken staat over dit onderwerp vrijwel hetzelfde. De ontwikkeling is als volgt:

I. Men definieert, dat er bij elk veelvlak een getal bestaat, dat de inhoud van dat veelvlak genoemd wordt, en dat aan de volgende twee voorwaarden voldoet:

a. Congruente veelvlakken hebben dezelfde inhoud.

b. Als een veelvlak verdeeld is in andere veelvlakken, dan is de inhoud van het veelvlak gelijk aan de som van de inhouden der samenstellende veelvlakken.

II. De inhouden van twee rechthoekige blokken, die twee afmetingen gelijk hebben, verhouden zich als de ongelijke afmetingen.

III. De inhoud van een kubus, waarvan de afmetingen gelijk

¹⁾ Zie Stoelinga en Van Tol. *Vlakke Meetkunde* en C. J. Alders, idem.

zijn aan de lengte-eenheid, wordt gekozen als inhouds-eenheid; de inhoud van een rechthoekig blok wordt dan gelijk aan het product van de drie afmetingen.

IV. Men kiest een scheef blok, waarvan het grondvlak een rechthoek is, en waarvan twee zijvlakken loodrecht staan op het grondvlak, en transformeert de inhoud daarvan tot de inhoud van een rechthoekig blok door bijvoegen en afnemen van twee congruente driezijdige prisma's.

V. Men kiest een scheef blok, waarvan het grondvlak een rechthoek is, en handelt verder als in IV.

VI. Men kiest een willekeurig scheef blok en beroept zich op V, op een manier als in IV.

VII. Men bewijst, dat elk blok verdeeld kan worden in twee driezijdige prisma's, die gelijke inhoud hebben.

VIII. Men bewijst de inhoudsformule voor een willekeurig prisma.

IX. Men bewijst de inhoudsformule voor een pyramide met behulp van in- en omgeschreven prisma's en de bekende limiet-overgang.

X. Men bewijst, dat twee pyramiden met gelijke hoogte en gelijk grondvlak dezelfde inhoud hebben.

XI. Men bewijst de inhoudsformule voor een afgeknot driezijdig prisma uit die van de pyramide.

§ 2. Op deze methode zijn de volgende op- en aanmerkingen te maken.

Ad I. b. Het is niet zeker, dat op ondubbelzinnige wijze aan deze voorwaarden voldaan kan worden.

Ad II. De bespreking van het geval, dat de ongelijke afmetingen onderling onmeetbaar zijn, komt (in de boeken althans) in verdrukking; men verwijst nl. naar een analogon in de vlakke meetkunde. Dit is wel eenvoudig, maar nogal bedenkelijk, als men nagaat wat er van dat analoge bewijs in de tweede klas terecht gekomen is.

Ad IV, V en VI. Hier wordt meestal als vanzelfsprekend aangenomen, dat de bedoelde driezijdige prisma's inderdaad congruent zijn. Ten eerste is dit niet noodzakelijk, maar bovendien is een exact bewijs nogal bewerkelijk. Ten slotte is de hele redenering, om het eens ronduit te zeggen, erg vervelend!

Ad VII. Dit bewijs is zeer zwak; de gebruikte congruentie wordt hoogst onvoldoende gemotiveerd.

Ad VIII. De limiet-overgang is enigszins precair; men gebruikt de stelling: als een dalende en een stijgende oneindige getallenrij onbepaald dicht tot elkaar naderen, dan hebben zij een gemeenschappelijke limiet. Van deze stelling hebben de leerlingen nooit een bewijs gezien (natuurlijk niet!). Bovendien is het bewijs nogal bewerkelijk.

Ad X. De juistheid van het bewijs zien de leerlingen alleen in, als men er veel meer van vertelt, dan in de leerboeken staat.

§ 3. Het lijkt mij, dat op de volgende manier een meer bevredigende theorie voor de inhoud van een veelvlak opgesteld kan worden.

Bepaling. De inhoud van een viervlak is het derde deel van de oppervlakte van het grondvlak vermenigvuldigd met de lengte van de hoogte.

Daar de bedoelde oppervlakte en lengte *getallen* zijn, is de inhoud van een viervlak een *getal*. Meestal wordt de bepaling als volgt geformuleerd: de inhoud van een viervlak is het derde deel van het product van grondvlak en hoogte; men bedoelt er dan het bovenstaande mee.

Omdat een viervlak begrensd wordt door vier driehoeken, kan men elk van die driehoeken als grondvlak kiezen; het genoemde product kan dus op vier verschillende manieren samengesteld worden. Dat men in deze gevallen dezelfde waarde voor het product krijgt, bewijzen we als volgt.

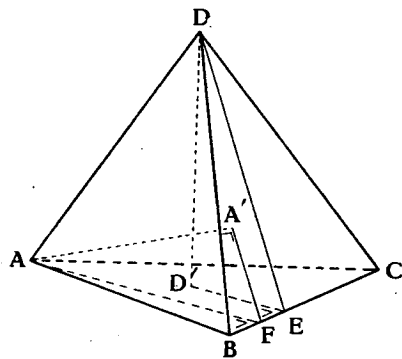


Fig. 1.

Zijn A' en F de projecties van A op vlak BCD en op BC ; D' en E de projecties van D op vlak ABC en op BC , dan is $DE \perp BC$ en $DD' \perp BC$, dus $BC \perp$ vlak $DD'E$, dus $BC \perp D'E$. Ook is $BC \perp AF$, dus $AF \parallel D'E$. Evenzo is $DE \parallel A'F$. Hieruit volgt: $\triangle AA'F \sim \triangle DD'E$, dus

$$AA' : DD' = AF : DE \rightarrow AA' \times DE = DD' \times AF.$$

Dus ook: $AA' \times DE \times \frac{1}{2} BC = DD' \times AF \times \frac{1}{2} BC$, dus $AA' \times \text{opp. } \triangle BCD = DD' \times \text{opp. } \triangle ABC$.

Bepalingen. Een viervlak ligt binnen een veelvlak, als elk punt, dat binnen het viervlak ligt, ook binnen het veelvlak ligt.

Een veelvlak V is verdeeld in viervlakken, als binnen het veelvlak V een aantal viervlakken liggen zodanig, dat elk punt binnen V ook binnen één en niet meer dan een der viervlakken, of in een zijvlak van een der viervlakken ligt. Blijkbaar kan een veelvlak op verschillende manieren in viervlakken verdeeld worden.

Axioma. De som van de inhouden der viervlakken, waarin een veelvlak verdeeld kan worden, is constant.

Dit betekent dus, dat de som van deze inhouden onafhankelijk is van de wijze van verdeling.

Bepaling. De inhoud van een veelvlak is de som van de inhouden der viervlakken, waarin het veelvlak verdeeld kan worden.

Volgens het axioma is de som van die inhouden constant; elk veelvlak heeft dus een en niet meer dan een inhoud.

Stelling 1. De inhoud van een pyramide is gelijk aan het derde deel van het product van grondvlak en hoogte.

Bewijs. Is $T \cdot A_1A_2A_3 \dots A_n$ een n -zijdige pyramide met hoogte h , dan kan het grondvlak door de diagonalen uit A_1 verdeeld worden in driehoeken. Het veelvlak is dan verdeeld in viervlakken, die elk zo'n driehoek tot grondvlak hebben, en waarvan T de top is; zij hebben dus de gemeenschappelijke hoogte h . Volgens de bepaling is de inhoud van $T \cdot A_1A_2 \dots A_n$ gelijk aan de som der inhouden van deze viervlakken, dus gelijk aan $\frac{1}{3} h \times$ de som van de oppervlakken der driehoeken $= \frac{1}{3} h \times$ de oppervlakte van de veelhoek $A_1A_2 \dots A_n$.

Stelling 2. De inhoud van een driezijdig prisma is gelijk aan het product van grondvlak en hoogte.

Bewijs: (zie fig. 2). In het driezijdig prisma $ABC \cdot DEF$ denken we ons de zijvlaksdagonalen DB , DC en BF ; het prisma is dan verdeeld in de viervlakken $D.ABC$; $D.BCF$ en $D.BEF$.

Deze laatste twee hebben gelijke grondvlakken en dezelfde hoogte, en dus gelijke inhoud. Verder is $DA \parallel CF$, dus $DA \parallel$ vlak BCF . De punten D en A liggen dus op gelijke afstanden van

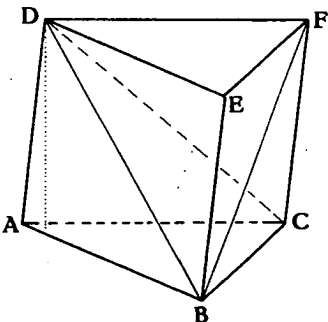


Fig. 2.

vlak BCF, zodat de pyramiden D.BCF en A.BCF dezelfde inhoud hebben.

$$\begin{aligned} \text{Dus: inh. prisma ABC.DEF} &= \text{inh. D.ABC} + 2 \times \text{inh. D.BCF} = \\ &= \text{inh. D.ABC} + 2 \times \text{inh. A.BCF} = \\ &= \text{inh. D.ABC} + 2 \times \text{inh. F.ABC} = \\ &= 3 \times \text{inh. D.ABC}. \end{aligned}$$

Is h de hoogte van het prisma en O het oppervlak van $\triangle ABC$, dan is dus: $\text{Inh. prisma ABC.DEF} = 3 \times \frac{1}{3} O \times h = O \times h$.

Uit stell. 2 volgt direct:

Stelling 3. De inhoud van een willekeurig prisma is gelijk aan het product van grondvlak en hoogte.

Het bewijs van deze stelling is volkomen analoog met dat van stell. 1.

De stelling geldt natuurlijk o.a. voor een blok; in het bijzonder voor een rechthoekig blok en een kubus. Bij een rechthoekig blok noemt men dikwijls de lengten der drie ribben, die in één hoekpunt samenkomen de *lengte*, *breedte* en *hoogte* van het blok; bij een kubus zijn deze drie afmetingen gelijk. Uit stell. 3 volgt dan direct.

Stelling 4. De inhoud van een rechthoekig blok is gelijk aan het product van lengte, breedte en hoogte; de inhoud van een kubus met ribbe a is a^3 .

Opmerking. Als de ribbe van een kubus gelijk is aan de lengte-eenheid, dan is de inhoud van de kubus blijkbaar 1; deze inhoud kan dus beschouwd worden als inhouds-eenheid.

Stelling 4. De inhoud van een driesijdig afgeknot prisma is gelijk aan het oppervlak van een loodrechte doorsnede vermenigvuldigd met het derde deel van de som der opstaande ribben.

Bewijs A. We onderstellen eerst, dat de opstaande ribben

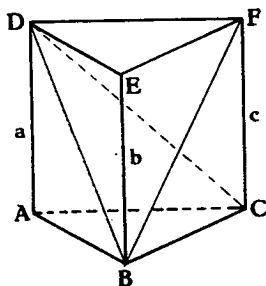


Fig. 3.

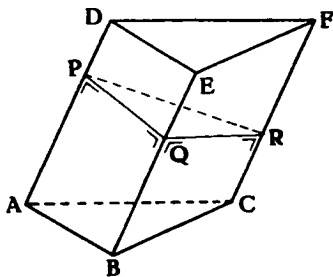


Fig. 4.

loodrecht op het grondvlak staan (fig. 3). Door de zijvlaksdiaal-
nalen DB, DC en BF kan men het afgeknotte prisma verdeeld
denken in de viervlakken D.ABC; D.BCF en D.BCE. Stellen we
de inhoud van ABC.DEF voor door I, dan is dus:

$$I = \text{inh. D.ABC} + \text{inh. D.BCF} + \text{inh. D.BCE} \dots \dots \dots (1)$$

Nu is inh. D.BCF = inh. A.BCF = inh. F.ABC.

En inh. D.BEF = inh. A.BEF = inh. C.ABE = inh. E.ABC.

(1) gaat dan over in:

$$I = \text{inh. D.ABC} + \text{inh. F.ABC} + \text{inh. E.ABC}.$$

Stellen we AD, BE en CF voor door a , b en c , en opp. $\triangle ABC$
door O, dan is dus $I = \frac{1}{3} a \times O + \frac{1}{3} b \times O + \frac{1}{3} c \times O \rightarrow$
 $I = \frac{1}{3} O (a + b + c).$

B. Staan de opstaande ribben scheef op het grondvlak, (fig. 4)
en is $\triangle PQR$ een loodrechte doorsnede met oppervlak O, dan ver-
deelt deze het afgeknotte prisma in twee andere afgeknotte pris-
ma's, nl. ABC.PQR en PQR.DEF. Beschouwen we $\triangle PQR$ als
grondvlak van deze afgeknotte prisma's, dan is volgens A:

$$\begin{aligned} \text{Inh. ABC.DEF} &= \text{inh. ABC.PQR} + \text{inh. PQR.DEF} = \\ &= \frac{1}{3} O (AP + BQ + CR) + \frac{1}{3} O (PD + QE + RF) = \\ &= \frac{1}{3} O (AD + BE + CF). \end{aligned}$$

Bij het bewijs is geen gebruik gemaakt van het feit, dat de vlak-
ken ABC en DEF elkaar snijden; de gevonden formule geldt dus
ook voor een driezijdig prisma. Is hiervan de opstaande ribbe a
en het oppervlak van de loodrechte doorsnede O, dan is de inhoud
dus $\frac{1}{3} O (a + a + a) = O \times a$. En daar een willekeurig prisma
door diagonaalvlakken verdeeld kan worden in driezijdige prisma's
geldt algemeen:

*Stelling 5. De inhoud van een willekeurig prisma is gelijk
aan het product van de oppervlakte van een loodrechte doorsnede
en de lengte van een opstaande ribbe.*

§ 4. Hiermede is de gehele theorie voor de inhoud van een
veelvlak gegeven. Men kan haar nog aanvullen met de afleiding
van de inhoudsformule voor de afgeknotte pyramide en de pris-
moïde; dit geeft natuurlijk geen nieuw gezichtspunt. Met opzet heb
ik het geheel uitgewerkt om te laten zien, hoe kort de gehele
methode is; het is mogelijk, om alles in één lesuur te bespreken.
Bovendien kan men een behoorlijke reproductie hiervan door de

leerlingen verlangen; bij de gebruikelijke methode is dat erg tijdrovend, al is het alleen al om de vele figuren, die men nodig heeft. Ten overvloede merk ik nog op, dat de „nieuwe” methode geen invloed heeft op de vraagstukken, die men gewoonlijk over deze materie bespreekt, dus ook niet op het eindexamenwerk.

Ik ben mij ervan bewust, dat de sprong nogal groot is; het zit 'm natuurlijk voornamelijk in de allereerste bepaling, die de inhoud van een viervlak definieert. Die ruimt direct de meeste moeilijkheden op. Maar ik kan niet inzien, wat daar tegen is; het begrip inhoud krijgt pas betekenis, als het gedefinieerd is, en waarom zou men die definitie niet zo eenvoudig mogelijk kiezen. In de hogere wiskunde definiëren we een inhoud door een integraal, een sinus door een reeks, een kromme lijn door een functie, entropie door een differentiaalquotient, en deze voorbeelden zijn met vele te vermeerderen. En tegen het principe, dat Hilbert geeft (door het oppervlak van een driehoek te definiëren als het halve product van basis en hoogte) moet men dezelfde bezwaren hebben, als tegen de opzet van de „nieuwe” inhoudstheorie, en Hilbert is toch een autoriteit.

Zuiver wetenschappelijk kan men er natuurlijk het volgende tegen inbrengen: Hilbert *bewijst*, dat de som van de oppervlakken der delen, waarin een driehoek verdeeld kan worden, constant is; ik heb het analogon daarvan als axioma aangenomen. Maar dit lijkt mij voor de school-meetkunde in 't geheel geen bezwaar. Integendeel: ik heb als axioma uitgesproken, wat in de gebruikelijke theorie (zie § 1, I) als vanzelfsprekend is aangenomen.

Ik hoop met het bovenstaande mijn collega's geïnteresseerd te hebben; ik hoop, dat zij het niet aan critiek laten ontbreken.

DE FUNCTIE: $\frac{a_0x^2 + 2a_1x + a_2}{b_0x^2 + 2b_1x + b_2}$

DOOR

J. C. H. GERRETSEN, (Groningen).

1. — In het volgende stellen we ons ten doel enige algemene eigenschappen van de in het opschrift genoemde functie af te leiden op een wijze, die enigszins afwijkt van de gewoonlijk bij het onderzoek van deze functie toegepaste methode.¹⁾

De coëfficiënten onderstellen we uitdrukkelijk reëel. Het spreekt wel vanzelf dat triviale gevallen, zoals $a_0 = b_0 = 0$ en dergelijke zullen worden uitgesloten. Behoudens vermelding van het tegendeel zullen aan x ook complexe waarden worden toegekend.

De waarden van x , die aan de functie dezelfde waarde y geven, zijn oplossingen van de vergelijking:

$$(1) \quad (b_0 y - a_0) x^2 + 2(b_1 y - a_1) x + b_2 y - a_2 = 0.$$

Zulke waarden van x noemen we *niveaupunten*. We zullen ze aanduiden met x_1 en x_2 , waarbij natuurlijk in aanmerking moet worden genomen dat ze van y afhankelijk zijn.

De *nulpunten* van de functie zijn niveaupunten behorende bij $y = 0$. Schrijven we (1) als:

$$(2) \quad \left(b_0 - \frac{a_0}{y}\right) x^2 + 2\left(b_1 - \frac{a_1}{y}\right) x + b_2 - \frac{a_2}{y} = 0,$$

dan blijkt hieruit dat men de *polen* van de functie eveneens als niveaupunten mag opvatten, welke aan de functie de waarde $y = \infty$ geven. Dit krijgt betekenis als we het systeem van de complexe getallen aanvullen met een symbool ∞ , in overeenstemming met het in de functietheorie heersende gebruik.

De discriminant²⁾ van het linkerlid van (1) is:

¹⁾ Men raadplege bijvoorbeeld: W i j d e n e s, P., *Lagere Algebra* II, 3e druk. Groningen 1935. § 66, blz. 298—314.

²⁾ Eenvoudigheidshalve hebben we de factor 4, die zou moeten optreden, als we de discriminant op de gebruikelijke wijze definiëren, weggelaten.

$$D(y) = (b_1 y - a_1)^2 - (b_0 y - a_0)(b_2 y - a_2),$$

of:

$$(2) \quad D(y) = (b_1^2 - b_0 b_2) y^2 + (a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2a_1 b_1) y + (a_1^2 - a_0 a_2)$$

Voor $D(y)$ reëel en ≥ 0 zijn de corresponderende niveaupunten reëel. In het bijzonder zijn ze gelijk voor die waarden van y , welke aan de vergelijking $D(y) = 0$ voldoen.

2. — Een rechte op een afstand y evenwijdig aan de x -as snijdt de kromme met vergelijking:

$$(3) \quad y = \frac{a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2}{b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2}$$

in punten, waarvan de abscissen niveaupunten zijn. Het midden van het door deze punten bepaalde lijnsegment heeft een abscis:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Uit (1) volgt op grond van de bekende eigenschappen van wortels van een vierkantsvergelijking:

$$(4) \quad x = -\frac{b_1 y - a_1}{b_0 y - a_0}$$

of ook:

$$(4') \quad y = \frac{a_0 x + a_1}{b_0 x + b_1}$$

Tenzij het tegendeel wordt vermeld willen we in het volgende steeds onderstellen, dat $b_0 \neq 0$ en $a_0 b_1 - a_1 b_0 \neq 0$ is. *Dan wordt door (4) of (4') een orthogonale hyperbool voorgesteld, waarvan de asymptoten evenwijdig zijn aan de coördinaatassen.*³⁾

De vergelijking van de horizontale asymptoot van deze hyperbool luidt:

$$(5) \quad y = \frac{a_0}{b_0}.$$

³⁾ Dit resultaat was te verwachten. De hyperbool is niets anders dan poolkegelsnede van het oneindig verre punt van de x -as voor de kromme (3).

De horizontale asymptoot van de hyperbool is dus tevens horizontale asymptoot van de kromme (3).

Voor de vergelijking van de verticale asymptoot van de hyperbool wordt gevonden:

$$(6) \quad x = -\frac{b_1}{b_0}.$$

Ingeval er reële polen zijn en de kromme (3) dus reële verticale asymptoten bezit, liggen deze symmetrisch ten opzichte van de rechte (6).

3. — Onder harmonisch midden van een in no. 2 genoemd lijnsegment willen we verstaan een daartoe behorend punt met abscis:

$$x = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}.$$

Uit (1) volgt:

$$(7) \quad x = -\frac{b_2y - a_2}{b_1y - a_1},$$

of ook:

$$(7') \quad y = \frac{a_1x + a_2}{b_1x + b_2}.$$

De meetkundige plaats van deze harmonische middens is dus in het algemeen een orthogonale hyperbool, waarvan de asymptoten eveneens evenwijdig zijn aan de coördinaatassen.

Voor de snijpunten van de krommen (4) en (7) geldt:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2},$$

dus:

$$x_1 = x_2.$$

m.a.w. *de abscissen van deze snijpunten zijn samengevallen niveau-punten*. Daaruit volgt, dat ze tevens punten zijn van de kromme (3).

De ordinaten van deze snijpunten voldoen aan een vergelijking, die verkregen wordt door gelijkstelling van de rechterleden van (4) en (7). Na herleiding vindt men:

$$(8) \quad (b_1^2 - b_0b_2)y^2 + (a_0b_2 + a_2b_0 - 2a_1b_1)y + (a_1^2 - a_0a_2) = 0,$$

dus:

$$D(y) = 0,$$

als $D(y)$ voorstelt de uitdrukking (2). In het algemeen bezit deze vergelijking twee wortels, die we aanduiden met η_1 en η_2 .

Door gelijkstelling van de rechterleden van (4') en (7') wordt verkregen:

$$(9) \quad (a_0 b_1 - a_1 b_0) x^2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) x + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

De oplossingen hiervan zullen we noemen ξ_1 en ξ_2 , waarbij ξ_1 correspondeert met η_1 en ξ_2 met η_2 , zodat dus

$$(10) \quad \eta_1 = \frac{a_0 \xi_1 + a_1}{b_0 \xi_1 + b_1}, \quad \eta_2 = \frac{a_0 \xi_2 + a_1}{b_0 \xi_2 + b_1}.$$

Bovendien noteren we nog voor verder gebruik:

$$(11) \quad \xi_1 + \xi_2 = -\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{a_0 b_1 - a_1 b_0},$$

$$(11') \quad \xi_1 \xi_2 = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_0 b_1 - a_1 b_0}.$$

4. — Voor niveaupunten, die bij een zekere waarde van y behoren, geldt:

$$y = \frac{a_0 \frac{x_1 + x_2}{2} + a_1}{b_0 \frac{x_1 + x_2}{2} + b_1} = \frac{a_1 \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} + a_2}{b_1 \frac{2x_1 x_2}{x_1 + x_2} + b_2}.$$

De tweede gelijkheid kan worden herleid tot:

$$(12) \quad (a_0 b_1 - a_1 b_0) x_1 x_2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) \frac{x_1 + x_2}{2} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0.$$

Aangezien voor de polen van de functie de volgende betrekkingen bestaan:

$$x_1 + x_2 = -\frac{2b_1}{b_0}, \quad x_1 x_2 = \frac{b_2}{b_0},$$

volgt uit (12) de identiteit:

$$(13) \quad (a_0 b_1 - a_1 b_0) b_2 - (a_0 b_2 - a_2 b_0) b_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) b_0 = 0.$$

Men kan deze identiteit direct opschrijven als men bedenkt dat de determinant

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 \\ a_0 & a_1 & a_2 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

steeds gelijk is aan nul.

Uit (13) volgt nu in verband met (11) en (11') de merkwaardige relatie:

(14)

$$b_0 \xi_1 \xi_2 + b_1 (\xi_1 + \xi_2) + b_2 = 0.$$

Uit de analoge identiteit:

$$(13') \quad (a_0 b_1 - a_1 b_0) a_2 - (a_0 b_2 - a_2 b_0) a_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_0 = 0$$

kan worden geconcludeerd tot de juistheid van:

(14')

$$a_0 \xi_1 \xi_2 + a_1 (\xi_1 + \xi_2) + a_2 = 0.$$

5. — Door directe berekening kan gemakkelijk worden gecontroleerd dat de discriminanten van de linkerleden van (8) en (9) overeenstemmen. Steunende op (14) kan deze overeenstemming ook op de volgende wijze worden aangetoond:

$$\begin{aligned} (b_1^2 - b_0 b_2) (\eta_1 - \eta_2) &= (b_0^2 \xi_1 \xi_2 + b_0 b_1 (\xi_1 + \xi_2) + b_1^2) (\eta_1 - \eta_2) \\ &= (b_0 \xi_1 + b_1) (b_0 \xi_2 + b_1) \left(\frac{a_0 \xi_1 + a_1}{b_0 \xi_1 + b_1} - \frac{a_0 \xi_2 + a_1}{b_0 \xi_2 + b_1} \right) = (a_0 b_1 - a_1 b_0) (\xi_1 - \xi_2). \end{aligned}$$

Dus geldt ook:

$$(15) \quad \frac{1}{4} (b_1^2 - b_0 b_2)^2 (\eta_1 - \eta_2)^2 = \frac{1}{4} (a_0 b_1 - a_1 b_0)^2 (\xi_1 - \xi_2)^2$$

waarmee inderdaad de gelijkheid van de bedoelde discriminanten ⁴⁾ is uitgedrukt.

6. — Het snijpunt van de kromme (3) met zijn horizontale asymptoot (5) heeft een abscis, welke kan worden berekend uit:

$$\frac{a_0 x^2 + 2a_1 x + a_2}{b_0 x^2 + 2b_1 x + b_2} = \frac{a_0}{b_0},$$

of

$$2(a_0 b_1 - a_1 b_0) x + (a_0 b_2 - a_2 b_0) = 0.$$

De oplossing van deze vergelijking is:

$$(16) \quad \xi = - \frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{2(a_0 b_1 - a_1 b_0)}.$$

In verband met (11) hebben we dus: ⁵⁾

⁴⁾ Met de in noot ²⁾ vermelde wijziging.

⁵⁾ Het is interessant deze en andere in het artikel vermelde bijzonderheden te controleren aan enige goed getekende figuren, zoals die in de moderne schoolboeken zijn te vinden.

(17)

$$\xi = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}.$$

7. — Voor de niveaupunten x_1 en x_2 vormen we het product:

$$m = (x_1 - \xi)(x_2 - \xi).$$

Hiervoor kan men schrijven:

$$\begin{aligned} & x_1 x_2 - \xi(x_1 + x_2) + \xi^2 \\ &= \frac{(a_0 b_1 - a_1 b_0)x_1 x_2 + (a_0 b_2 - a_2 b_0) \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2}{4(a_0 b_1 - a_1 b_0)}}{a_0 b_1 - a_1 b_0} \end{aligned}$$

Op grond van (12) is dit gelijk aan:

$$\frac{(a_0 b_2 - a_2 b_0)^2 - 4(a_0 b_1 - a_1 b_0)(a_1 b_2 - a_2 b_1)}{4(a_0 b_1 - a_1 b_0)^2}.$$

De uitdrukking:

$$(18) \quad (a_0 b_1 - a_1 b_0)^2 m$$

blijkt gelijk te zijn aan de discriminant van het linkerlid van (9), en dus ook van dat van (8); bovendien is hiermede bewezen, *dat m reëel is en onafhankelijk van y .*

Voor de oplossingen van (9) kan nu worden geschreven:

$$(19) \quad \xi_1 = \xi - \sqrt{m}, \quad \xi_2 = \xi + \sqrt{m}.$$

8. — We willen nu het verloop van de functie nagaan voor reële waarden van x . Ten aanzien van m kunnen de volgende gevallen worden onderscheiden:

I. $m = 0$. Dan is $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, Uit (14) en (14') volgt:

$$a_0 \xi^2 + 2a_1 \xi + a_2 = 0$$

en

$$b_0 \xi^2 + 2b_1 \xi + b_2 = 0.$$

Teller en noemer van de gegeven functie bezitten een gemeenschappelijke factor.⁶⁾ De discriminant van $D(y)$ is gelijk aan nul, zodat steeds voldaan is aan $D(y) \geq 0$; bij iedere reële waarde van y zijn reële niveaupunten te vinden. *De functie heeft geen uiterste waarden.*

⁶⁾ $m = 0$ is de bekende conditie, waaronder twee vierkantsvergelijkingen een gemeenschappelijke wortel bezitten.

II. $m < 0$. Voor de niveaupunten x_1 en x_2 , ($x_1 < x_2$), geldt steeds:

$$(19) \quad x_1 < \xi < x_2.$$

Verder volgt voor de paren van niveaupunten x'_1, x'_2 ($x'_1 < x'_2$), en x''_1, x''_2 , ($x''_1 < x''_2$), uit

$$x'_1 < x''_1$$

dat ook

$$x'_2 < x''_2,$$

waaruit in verband met (19) kan worden geconcludeerd, dat ieder tweetal paren van niveaupunten elkaar scheiden. *De, in dit geval, steeds reële, nulpunten en polen scheiden elkaar.*

Aangezien de discriminant van $D(y)$ negatief is en wegens het reëel en verschillend zijn van de polen bovendien voldaan is aan $b_1^2 - b_0 b_2 > 0$, is steeds $D(y) > 0$, zodat de functie iedere reële waarde van y aanneemt. *Ook nu zijn er geen uiterste waarden.*

III. $m > 0$. Voor paren van reële niveaupunten x'_1, x'_2 en x''_1, x''_2 volgt uit

$$x'_1 < x''_1$$

de ongelijkheid:

$$x'_2 > x''_2.$$

De paren scheiden elkaar niet. *In het bijzonder zullen dus eventueel aanwezige reële nulpunten en polen elkaar niet scheiden.* Bovendien heeft $D(y)$ reële en verschillende nulpunten η_1 en η_2 , ($\eta_1 < \eta_2$). We onderscheiden nu drie ondergevallen:

IIIa. De polen zijn complex. Dan is $b_1^2 - b_0 b_2 < 0$ en bijgevolg $D(y) \geq 0$ voor $\eta_1 \leq y \leq \eta_2$. *Er zijn twee uiterste waarden, waarvan de kleinste een minimum en de grootste een maximum is van de functie.*

IIIb. De polen zijn reëel en verschillend. Dan is $b_1^2 - b_0 b_2 > 0$ en dus $D(y) \geq 0$ voor $y \leq \eta_1$ of $y \geq \eta_2$. *Er zijn twee uiterste waarden, waarvan de kleinste een maximum en de grootste een minimum is.*

IIIc. De polen zijn gelijk, dus $b_1^2 - b_0 b_2 = 0$. $D(y)$ bezit één (eindig) nulpunt η . *Er is nu één uiterste waarde, waarvan de aard bepaald wordt door het teken van de uitdrukking $a_0 b_2 + a_2 b_0 - 2 a_1 b_1$.*

Uit deze opsomming blijkt, dat door onderzoek naar de aard en de ligging van de nulpunten en de polen van de functie conclusies kunnen worden getrokken aangaande de al of niet aanwezigheid van uiterste waarden.

9. — Bizonder belangwekkend is de ligging van de niveaupunten in het complexe vlak; we maken ons weer vrij van de beperking dat aan x en y slechts reële waarden zijn toegestaan.

Het punt ξ van no. 6 is gelegen op de reële as. Indien het getal $m \neq 0$ is, hetgeen we eerst aannemen, zijn ξ_1 en ξ_2 reëel voor $m > 0$ en geconjugueerd complex voor $m < 0$. In dit laatste geval liggen ze symmetrisch ten opzichte van de reële as.

Uit

$$(x_1 - \xi)(x_2 - \xi) = m, \quad (m \text{ reëel})$$

volgt allereerst:

$$(20) \quad \arg(x_1 - \xi) + \arg(x_2 - \xi) \begin{cases} = 0 \pmod{2\pi}, & \text{voor } m > 0, \\ = \pi \pmod{2\pi}, & \text{voor } m < 0. \end{cases}$$

Zij x_2^* het spiegelbeeld van x_2 ten opzichte van de middelloodlijn van het door ξ_1 en ξ_2 bepaalde lijnsegment. Dan kan uit (20) worden afgelezen, dat x_1 , ξ en x_2^* collineaire punten zijn. Bovendien geldt:

$$(21) \quad |x_1 - \xi| \cdot |x_2^* - \xi| = |\xi_1 - \xi| \cdot |\xi_2 - \xi|,$$

want

$$|\xi_1 - \xi|^2 = |\xi_2 - \xi|^2 = |m|.$$

Op grond van een bekende planimetrische stelling zijn de punten x_1 , x_2^* , ξ_1 en ξ_2 gelegen op een cirkel Γ ; dus ook de punten x_1 , x_2 , ξ_1 en ξ_2 liggen op die cirkel Γ , (fig. 1 en fig. 2). Hierin is tevens het geval begrepen, dat Γ een rechte is.

De verbindingslijn van de punten ξ_1 en ξ_2 , alsmede de middelloodlijn van het door ξ_1 en ξ_2 begrensde segment, zijn blijkens (20) de bissectrices van $\angle x_1 \xi x_2$. Ze snijden dus de verbindingslijn van de punten x_1 en x_2 in een puntenpaar, dat door het paar x_1 , x_2 harmonisch wordt gescheiden, ten minste, als x_1 en x_2 niet op de reeds genoemde middelloodlijn liggen. De verbindingslijn van de punten x_1 en x_2 gaat bijgevolg door de pool van de rechte door ξ_1 en ξ_2 ten opzichte van de cirkel Γ .

omgekeerd de snijpunten van deze cirkels niveaupunten zijn. Men kan dus zeggen: *De niveaupunten vormen het snijpuntenstelsel van twee orthogonaal toegevoegde cirkelbundels.*

Het punt ξ is het *centraal-machtpunt* van de bundels. Uit (21) kan worden afgeleid *dat de macht van ξ ten opzichte van de ene bundel gelijk is aan m en ten opzichte van de andere gelijk aan $-m$.* Daarmee is een fraaie meetkundige betekenis voor het getal m gevonden.

In grote trekken blijft het gevondene juist voor $m = 0$. De beide bundels (Γ) en (Γ^*) zijn nu raakbundels. Eén van de niveaupunten van elk paar valt steeds met het punt ξ samen.

11. — De in de voorgaande nummers afgeleide resultaten kunnen ook nog iets anders worden ingekleed: *Alle op een vaste cirkel Γ of Γ^* gelegen paren van niveaupunten vormen een involutie.*⁸⁾ In het bijzonder vormen de paren van reële niveaupunten een involutie op de reële as, welke elliptisch is voor $m < 0$, hyperbolisch voor $m > 0$ en ontaard, indien $m = 0$ is. Er is iets voor te zeggen om, in overeenstemming daarmee, deze terminologie op de gegeven functie over te dragen. De in no. 8 opgesomde gevallen kunnen dan als volgt kort worden geformuleerd:

Behoort de functie tot het *elliptische type*, dan zijn er voor reële waarden van x geen uiterste waarden.

Behoort de functie tot het *hyperbolische type*, dan zijn er voor reële waarden van x steeds uiterste waarden.

Behoort ten slotte de functie tot het *ontaarde type*, dan zijn er geen uiterste waarden. De grafiek van de functie is dan ontaard.

In dit verband bezit de door (4') gedefiniëerde homografische afbeelding bijzondere betekenis. We willen echter de hiermee samenhangende vragen wegens hun minder elementair karakter laten rusten.

12. — Aparte vermelding verdient nog het in het voorgaande uitgesloten geval: $a_0b_1 - a_1b_0 = 0$. Voor het snijpunt van de kromme (3) met de horizontale asymptoot vindt men nu $\xi = \infty$. *De asymptoot is dus een buigasymptoot.* In het complexe vlak is de bundel (Γ) een stralenbundel door een eindig punt ξ_0 (we

⁸⁾ Voor een elementaire behandeling van deze involuties verwijzen we naar het reeds geciteerde boek van Prof. S c h u h.

onderstellen $m \neq 0$), terwijl de bundel (I^*) een concentrische cirkelbundel is. Alle paren van niveaupunten hebben hetzelfde midden.

Wil men, zoals het in de schoolwiskunde behoort, het symbool ∞ niet opnemen in het voor x toegestane waardenstelsel, dan heeft de vergelijking (9) met $m \neq 0$ slechts één oplossing ξ_0 . Weliswaar geeft (8) ook dan nog twee oplossingen, maar één dezer waarden wordt voor eindige waarden van x niet aangenomen. In dit geval moet dus gezegd worden, *dat de functie slechts één uiterste waarde bezit* voor reële waarden van x .

Bij contrôle in de antwoordenboekjes van sommige schoolboeken is me gebleken, dat de schrijvers zich van deze bijzonderheid niet steeds voldoende rekenschap hebben gegeven.⁹⁾ Dit wekt vooral bevreemding, omdat er onder hen zijn, die overigens een correct standpunt betreffende het gebruik van het oneindige in de schoolwiskunde innemen.

⁹⁾ In de *Nieuwe Schoolalgebra* III van Wijdenes en Beth is door een geschikte formulering van de vraagstukken, waarin deze bijzonderheid optreedt, de klip omzeild.

KORRELS.

XXIV. DEELEN EN NUL STELLEN.

Nog steeds kan men in leerboeken der wiskunde de opvatting aantreffen, dat men een vergelijking, waarin alle termen een zekere functie van de onbekende als factor bevatten, aldus moet behandelen, dat men door dezen factor deelt en hem daarna (elders vindt men: daarvoor) nul stelt. Zoo wordt dus b.v.

$$\sin x \cdot \cos 3x - \sin x \cdot \sin 3x = 0$$

door $\sin x$ gedeeld, waarna men stelt $\sin x = 0$ (of: nadat men gesteld heeft $\sin x = 0$).¹⁾

Deze wijze van behandeling moet om meer dan een reden worden afgekeurd. Zij getuigt om te beginnen van een onjuiste opvatting van het begrip vergelijking. Een vergelijking oplossen bedeutet de vraag beantwoorden, voor welke waarde(n) van de onbekende(n) twee gegeven vormen dezelfde waarde aannemen. Een vergelijking is dus een vraag, die beantwoord moet worden, hetgeen doelmatig tot uitdrukking wordt gebracht, door b.v. de boven vermelde vergelijking te schrijven

$$\sin x \cdot \cos 3x - \sin x \cdot \sin 3x = ? = 0$$

en haar voortdurend door de leerlingen te laten uitspreken als: voor welke waarde(n) van x neemt de vorm

$$\sin x \cdot \cos 3x - \sin x \cdot \sin 3x$$

de waarde nul aan? Het heeft echter geen zin, om te zeggen, dat

¹⁾ Vroeger gebruikte men hiervoor den wonderlijken term „verduisteren”. Men zeide: deel door $(x - 2)$; we verduisteren dan den wortel $x = 2$. Maar tegelijkertijd schreef men den wortel $x = 2$ op en men verduisterde hem dus niet; de bedoeling was natuurlijk: indien we den factor $(x - 2)$ zonder meer weglieten, zouden we den wortel $x = 2$ verduisteren. Men noemde dus een bewerking — i.c. het neerschrijven van den wortel $x = 2$ — met den naam van de fout, die men zou hebben begaan, als men de bewerking had nagelaten.

men een vraag door een zekeren factor deelt en men kan dus ook een vergelijking niet door iets deelen.

In de tweede plaats werkt de bedoelde behandelingswijze het machinale gebruik van den vagen en dubbelzinnigen term „stellen” in de hand. Wat beduidt het, dat men $\sin x$ gelijk nul stelt? Wil dit zeggen, dat men onderstelt, dus als gegeven beschouwt, dat x een zoodanige hoek is, dat $\sin x = 0$? Zoo ja, hoe kan men dan door $\sin x$ deelen? Of bedoelt men, dat men de vraag stelt, voor welke waarden van x $\sin x$ de waarde nul aanneemt? Zoo ja (en dit is natuurlijk de juiste beteekenis), dan heeft de heele deelingsterminologie geen zin. In ieder geval heeft het woord „stellen” hier een heel andere beteekenis, dan wanneer men b.v. in een ingekleed vraagstuk een te berekenen waarde x stelt, d.w.z. door het teken x voorstelt. Het kan niet anders dan verwarrend werken, wanneer men eenzelfde woord in zoo verschillende beteekenissen gebruikt. Het woord „stellen” moet in de „stelkunde” (die daarom ook maar liever algebra moet heeten) liefst geheel vermeden worden.

In de derde plaats echter blijkt, dat zij, die de bedoelde behandelingswijze toepassen, er geen rekenschap van vermogen te geven, waarom zij haar soms wel, in andere gevallen, die van dezelfde soort zijn, echter in eens weer niet toepassen. Men kan b.v. bij de oplossing van de vergelijking

$$(x - 2)(3x - 7) = (x - 2)(2x - 3) \quad (2)$$

hooren zeggen: deel door $(x - 2)$ en stel $x - 2 = 0$.

Maar waarom dan niet ook bij

$$(x - 2)(x - 3) = 0$$

door $(x - 2)$ gedeeld? En indien door $(x - 2)$, waarom dan niet door $(x - 3)$?

Als vierde bezwaar tegen de geschetste methode blijft tenslotte dit over, dat niet is in te zien, wat men er tegen kan hebben, om haar te vermijden en haar te vervangen door het schrijven van het eerste lid der op nul herleide vergelijking in den vorm van een product.

Dus in voorbeeld (1) $\sin x (\cos 3x - \sin 3x) = 0$.

in voorbeeld (2) $(x - 2)(x - 4) = 0$.

Immers nu valt het vraagstuk vanzelf in deelen uiteen, doordat men de gestelde opgaven opv. vervangt door

$$\begin{cases} \sin x = ? = 0 \\ \cos 3x - \sin 3x = ? = 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad \begin{cases} x - 2 = ? = 0 \\ x - 4 = ? = 0 \end{cases}$$

E. J. D.

XXV. OVERBODIG GEBRUIK VAN GRAFIEKEN.

De invoering van de grafische voorstellingen in het algebra-onderwijs heeft veel goeds ten gevolge gehad. We moeten er echter zorg voor dragen, dat het met haar niet juist zoo gaat als met zoovele andere wiskundige onderwerpen, nl. dat ze van hulpmiddel tot doel op zich zelf worden en dat men dus grafieken gaat teekenen, niet omdat men ze noodig heeft, maar omdat men ze nu eenmaal teekenen kan.

Een sprekend voorbeeld van een dergelijk overbodig gebruik van grafieken wordt gevormd door het in sommige leerboeken der algebra toegepaste procédé om bij de bespreking van den positieven of negatieven toestand van een vorm

$$\frac{ax^2 + bx + c}{px^2 + qx + r}$$

de functies, die in den teller en den noemer van deze breuk staan, elk afzonderlijk grafisch voor te stellen.

Ik heb er mij vaak het hoofd over gebroken, wat men met deze handelwijze toch wil bereiken. Stel, dat men b.v. te bespreken krijgt de functie

$$\frac{x^2 + 4x - 5}{6 - x - x^2}$$

Voor het teekenen van de grafieken moet men o.a. de waarden van x bepalen, waarvoor de functies in teller en noemer de waarde 0 aannemen. Zoodra men gevonden heeft, dat deze waarden voor den teller 1 en -5 , voor den noemer 2 en -3 zijn, kent men de ontbinding van teller en noemer; de toestand van de functie is dus dezelfde als die van

$$-(x + 5)(x + 3)(x - 1)(x - 2)$$

en kan dus onmiddellijk worden afgelezen uit het schema

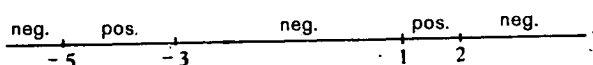


Fig. 1.

Wanneer men de grafieken van de functies in teller en noemer teekenen wil, moet men echter bovendien nog de coördinaten der toppen vinden en, wil de teekening eenigszins behoorlijk worden, die van een of meer andere punten. Al dit werk is overbodig.

Deze opmerking geldt in nog hoogere mate voor het geval, dat een der functies voor geen enkele waarde van x de waarde 0 kan aannemen. Zoo weet men b.v. in

$$\frac{x^2 - x + 2}{x^2 + 6x - 7}$$

van te voren, dat de teller steeds positief is en dat men dus voor de bespreking van den toestand kan volstaan met te schrijven

$$x^2 + 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$$

en het schema

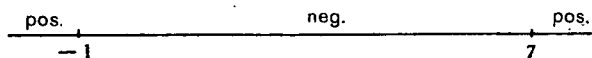


Fig. 2.

te maken.

Toch gaat men van beide functies grafieken teekenen. Welk nut kan hieraan verbonden zijn?

E. J. D.

XXVI.

ANTWOORD OP XXV.

Het op de spits drijven van mechanisch werk b.v. het berekenen van de wortels van vierkantsvergelijkingen, het laten oplossen van allerlei stelsels van twee vergelijkingen met twee onbekenden, heeft bij vele leerlingen tot gevolg, dat de begrippen wortel en stelsel wortels vervagen en bij enkelen zozeer verbleken, dat ze de meest simpele vragen, die het wezen van de zaak betreffen, niet of nauwelijks meer begrijpen.

Iets dergelijks komt voor bij de grafieken; in nog sterker mate zo mogelijk. Na enige tijd, als er heel wat kromme lijnen getekend of geschetst zijn, zijn ze het begrip functie vrijwel kwijt.

Tot een grafiek komt men op de volgende manier.



Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 3.

Fig. 1 geeft de waarden van 4; daarna maakt men een figuur als 2 enkel met de eindpunten van de lijnstukken; daarna trekt men een kromme lijn als in fig. 3; deze weinige woorden zijn voor den lezer voldoende. Na enige tijd zijn de leerlingen zich echter nauwelijks meer bewust, dat ze in fig. 3 een serie ordinaten moeten zien, waarvan fig. 1 er enige geeft. Hoe meer men dat herhaalt, hoe steviger men ze dat inprent, telkens weer, des te beter zetten de begrippen functie en grafiek van een functie zich vast.

Neem nu $\frac{x^2 + 4x - 5}{6 - x - x^2} = \frac{(x+5)(x-1)}{(3+x)(2-x)}$; de beste manier van behandeling lijkt mij de volgende. Schets een fig. als nr. 4; de waarden van de teller met wit krijt, die van de noemer met rood (ik stippel ze hier); opdat nu werkelijk parabolen zijn en op de

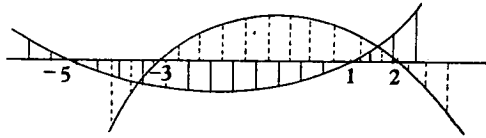


Fig. 4.

top precies op zijn plaats komt, dat hindert niets; opzettelijk teken ik hier ook maar wat.

Vragen: waar zijn de witte en de roose ordinaten beide positief; beide negatief; waar de ene positief, de andere negatief; waar krijgt men verandering van teken; om en om? Waar dus het quotient; kunnen we dan niet volstaan met enkel die nulpunten? ¹⁾ En zo komen we tot fig. 1 in de vorige korrel. Maar deze fig. 4 ligt er aan ten grondslag en die is duidelijker; deze geeft het wezen aan. Zoals gezegd; men hoeft slechts een schets te maken; in een boek mag men echter niet zo maar een krabbeltje tekenen.

Verder: in welk geval is het nog eenvoudiger? Wel als de witte op de rooie ordinaten op beide aan één kant van de X-as liggen. Na de uitlegging kan men schetsjes maken als fig. 5, 6 en 7 en meer van dat soort; eerst nog met heel wat ordinaten, daarna met een stuk of wat; zet er als op fig. 7 nog een rechte lijn door heen

¹⁾ Een product wordt tegengesteld, als een factor tegengesteld wordt; een quotient, als teller of noemer tegengesteld wordt. Het is dus onnodig van een quotient door vermenigvuldiging met het kwadraat van de noemer een product te maken.

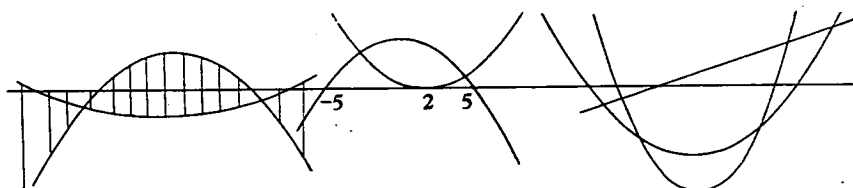


Fig. 5.

Fig. 6.

Fig. 7.

en breng de leerlingen dan tot het inzicht, dat het toch wel zo gemakkelijk is, als men alle nulpunten op een as uitzet en beurtelings de intervallen met positief en negatief aantekent. Maar vergeet dan vooral niet, dat dat falicant uitkomt bij $\frac{x^2 - 4x + 4}{25 - x^2}$; de nulpunten zijn -5 , 2 en 5 , maar fig. 8 is fout; (om en om van rechts

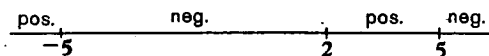


Fig. 8.

naar links voorzien van neg. en pos.). Immers de teller verandert niet van teken, als 2 wordt gepasseerd; dan moet men ze leren: bij een dubbele wortel twee streepjes en bij twee streepjes geen tekenwisseling; zie fig. 9. Zie nu fig. 6; daarmee is geen vergissen

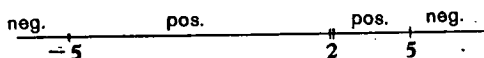


Fig. 9.

mogelijk; ze zien het voor zich; en daarna is fig. 9 ook duidelijk.

Het gaat in een schoolboek niet aan, overal te zeggen, waarom men het een of ander doet; waarom iets anders wordt nagelaten; waarom twee manieren goed zijn, maar een, altijd volgens 's schrijvers smaak, de voorkeur verdient, zodat die alleen wordt opgenomen; waarom men zich beperkt, waarom men iets laat rusten, waarom men een klip omzeilt, waarom men telkens op het begrip terugkomt, enz. enz. ¹⁾ De figuren 37, 38 en 39 in Nieuwe School-

¹⁾ Het zou toch wel eens goed zijn, als een schrijver in het openbaar rekenschap moest afleggen, waarom hij b.v. heeft neergeschreven, wat de Heer Eilander op blz. 14 regel 10 v.o. signaleert; waarom hij het heeft over $y = \sin x$ en $y = a \sin x$ tekent (Euclides Jg. XIV blz.

algebra II (8e druk blz. 107) waarop Dr. Dijksterhuis doelt, heb ik wel overwogen gemaakt; waarom, dat heeft men nu kunnen lezen.

In Lagere Algebra II 3e druk blz. 189 behandel ik dezelfde materie, maar daarin op de manier van fig. 1 van Korrel XXV; dat boek is voor volwassen studerenden. Didactische eisen gelden voor hen niet in zo sterke mate; het onderzoek wordt in Lagere Algebra II zelfs besloten met: „Blijkbaar is het geheel onnoodig de grafieken van teller en noemer te tekenen; het komt alleen maar aan op de snijpunten van die grafieken met de X-as.”

En in de Nieuwe Schoolalgebra worden juist die grafieken wel getekend; in stede van „overbodig” meen ik, dat een goede didactiek deze eist en dat men daarna met de rudimenten, in casu de nulpunten, kan volstaan. W.

XXVII. TEEKEN EN TOESTAND.

Het is in de leerboeken der algebra min of meer gewoonte, het woord „teeken” te gebruiken, als men „toestand” (d.w.z. positieve of negatieve toestand) bedoelt. Men vraagt b.v.: Onderzoek het teeken van

$$x^2 + 5x - 6$$

als men bedoelt: Voor welke waarden van x heeft deze vorm den positieven, voor welke den negatieven toestand?

Deze verwarring is aan bezwaren onderhevig. Het woord „teeken” beduidt nu eenmaal in de algebra in eerste instantie een der teekens $+$ en $-$ en is dus ongeschikt en ontoereikend, om ook nog den toestand van een functie aan te duiden. Men beschouwe slechts de functie

$$-x$$

en stelle de vraag naar het teeken van deze functie. Zal men het redelijkerwijze kunnen afkeuren, als het antwoord luidt: Min. Men bedoelt echter „toestand” en wenscht dus als antwoord: positief voor $x < 0$, negatief voor $x > 0$.

180) en op welke overweging de keuze van $a \neq 1$ steunt. Te vermeerderen met honderden andere. Men kan verschillen van mening over het al of niet didactische, of de ene manier de voorkeur verdient, over het meer of minder strenge, als men het maar over dit ene eens is: *in het boek mogen geen fouten staan.*

Deze verwarring van teeken en toestand heeft bedenkelijke gevolgen. Ze verleidt den leerling tot de onjuiste meening, dat een grootheid, waar geen teeken of het teeken $+$ voor staat, positief, een grootheid met het teeken $-$ daarentegen negatief is. Dit wreekt zich op allerlei wijzen.

Als hij reeds lang niet meer $\log (-3)$ durft opschrijven, schrijft hij nog rustig $\log x$ neer, zonder zich er om te bekommeren, of hij daarmee een deel der oplossingen verduistert (b.v. wanneer hij een vergelijking van den vorm $x^2 = a$ wil oplossen, door haar te vervangen door $2 \log x = \log a$).

Wanneer in de optica de afspraak gemaakt is, dat afstanden van virtueele voorwerpen en beelden negatief zullen worden gerekend (wat men vaak onjuist uitdrukt door te zeggen, dat men ze van het $-$ teeken voorziet), houdt hij iedere grootheid b voor een positief, iedere grootheid $-b$ voor een negatief getal en bij de divergeerende lezen meent hij de formule $-\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{v}$ te moeten gebruiken. In de mechanica doen zich fouten van dezelfde soort herhaaldelijk voor.

Het spreekt na het bovenstaande wel vanzelf, dat het afkeuring verdient, om, zooals in vele leerboeken geschiedt, de vraag naar het teeken (lees: den toestand) van den vorm

$$y = (x - 3)(x - 5)(x - 8)$$

op te lossen met behulp van het schema

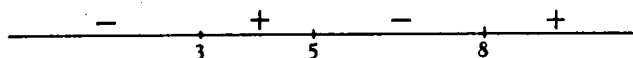


Fig. 1.

Dit behoort te luiden

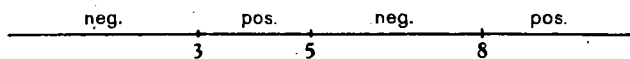


Fig. 2.

E. J. D.

BOEKBESPREKINGEN.

Unterrichtswerk des Vereins Schweizerischer Mathematikalehrer.¹⁾ Orell Füssli Verlag, Zürich—Leipzig.

Dr. E. Voellmy & Dr. O. Mautz, Leitfaden der Algebra I, z. j. 188 bldz., prijs fr. 3.—.

Dr. E. Voellmy & Dr. O. Mautz, Leitfaden der Algebra II, 1932, 210 bldz., prijs fr. 3.20

Dr. H. Stohler & Dr. O. Mautz, Leitfaden der Algebra III, 1938, 173 bldz., prijs fr. 3.60.

Dr. H. Lehmann & Dr. F. Stähli, Aufgabensammlung der Algebra I, 2e druk 1934, 162 bladzijden, prijs fr. 3.—.

Dr. F. Stähli en Dr. F. Meyer, Aufgabensammlung der Algebra II, 1934, 95 bldz., prijs fr. 2.40.

Het eerste en het tweede deeltje der theorie (Leitfaden) behandelen ongeveer de leerstof van onze middelbare scholen tot en met de derde klasse, met uitzondering van reeksen en limietbeschouwingen. De kunstmatige scheiding tusschen rekenkunde en algebra is opgeheven, reken- en stekunde zijn tot één geheel gemaakt. In het eerste deeltje wordt veel werk gemaakt van de uitbreiding van het getalbegrip tot en met de rationale getallen: de techniek van het rekenen met letters staat niet zoo sterk op den voorgrond als dat bij ons het geval is. De vergelijkingen van den eersten graad met eene en meer onbekenden worden op dezelfde wijze behandeld als bij ons, de graphieken een weinig uitvoeriger.

Het tweede deeltje begint met eene uiteenzetting van het begrip „eigenlijke macht”, daarna volgt eene beknopte behandeling der wortelvormen, vervolgens eene vrij uitvoerige maar aanschouwelijke theorie van het reële getal, gebaseerd op „Intervallschachtelingen”, daarna oneigenlijke machten, benaderde waarden en logaritmen. Eerst daarna komt de vierkantsvergelijking aan de beurt; de reden, waarom deze eerst zoo laat behandeld wordt zal wel deze zijn, dat er geen behandeling der vierkantsvergelijkingen in het reële gebied gegeven wordt. Aan de oplossing gaat dan ook eene vrij uitvoerige, door figuren toegelichte theorie der complexe getallen vooraf, die echter als eene eerste inleiding wordt aangediend, waarschijnlijk omdat worteltrekking uit complexe getallen er niet in is opgenomen. De coëfficiënten der op te lossen vierkantsvergelijkingen zijn dan ook reëel. Daarna volgen de gebruikelijke onderwerpen, waaronder b. v.

¹⁾ Twee deeltjes van dit Unterrichtswerk, betrekking hebbende op vlakke meetkunde, zijn besproken in den dertienden jaargang van Euclides, bladzijde 166.

de quadratische ongelijkheidsopgaven, die in het reële gebied thuis behooren. Door dit heen- en weerspringen tusschen het reële en het complexe getallengebied krijgt de behandeling m. i. iets halfslachtigs, dat ongunstig afsteekt bij de bijzonder fraaie bewerking van andere gedeelten. Bijzonder fraai vind ik b. v. de beschouwingen over aequivalentie van vergelijkingen en stelsels, en de grondige besprekingen van vraagstukken met lettercoëfficiënten.

Het derde deeltje der theorie behandelt de reeksen, maar op eene veel uitgebreidere manier dan te onzent gebruikelijk is. De meetkundige reeksen worden op ongeveer dezelfde wijze behandeld als wij gewoon zijn te doen, maar bovendien bevat het boekje waarnemingsreeksen, met statistiek en correlatie, voorts permutaties en combinaties, „Häufigkeitsrechnung” en waarschijnlijkheidsrekening, foutenrekening, en — behalve de ook in ons onderwijs bekende interestrekening — nog iets over verzekeringswiskunde. Aan het boekje is eene verzameling tafels toegevoegd, deze bevat rentetafels, maar ook machten van e , faculteiten met hare logarithmen, binomiaalcoëfficiënten en sterftetafels. Deze tafels moeten dienst doen bij een — nog niet verschenen — opgavenboekje. Men ziet, dat het wiskundeonderwijs in Zwitserland zich ver ontwikkeld heeft in eene richting, waarin wij zeker niet verder zouden wenschen te gaan.

Omtrent de beide deeltjes der vraagstukkenverzameling valt niet veel op te merken: alleen verdient het vermelding, dat er aardige historische vraagstukken in staan.

De afdeeling Algebra van het Unterrichtswerk is met de verschijning der hier besproken deeltjes nog niet gereed. Zoo wordt in deel III vermeld, dat de limieten in een vierde deel zullen worden behandeld, terwijl, zooals reeds gezegd is, de behandeling der complexe getallen nog slechts voorloopig is.

J. H. S.

Dr. E. J. Dijksterhuis, Archimedes, Eerste deel (Noordhoff's Historische Bibl. voor de Exacte Wetenschappen deel VI), 213 blz., geb. f 4,50; voor int. op Noordhoffs tijdschriften f 3,90.

Het werk bevat de stof, door den schrijver in zijn college aan de Universiteit van Amsterdam in de jaren 1931 en 1932 behandeld. De gevolgde methode verschilt principieel van dit van Heath in „The Works of Archimedes” en van die van Ver Eecke in „Les Oeuvres Complètes d'Archimède”. Geeft Heath de bewijzen van Archimedes in moderne notatie, en biedt Ver Eecke een letterlijke vertaling van het werk van den groten Syracusaan, Dr. Dijksterhuis, van oordeel, dat beide methoden haar bezwaren hebben, kiest een weg, die de voordelen van beide tracht te verenigen: hij volgt de Griekse tekst op de voet, vertaalt alleen de proposities letterlijk en geeft de bewijzen weer in een speciaal voor dit doel geconstrueerd tekenschrift, dat ook reeds werd toegepast in het werk „De Elementen van Euclides” van denzelfden schrijver.

Na een zeer lezenswaard hoofdstuk over het leven van Archimedes, waarin o.a. verschillende legenden, die zich om zijn persoon hebben geweven, kritisch worden beschouwd, volgt een bespreking van zijn

werk en van de handschriften en uitgaven daarvan. Hoofdstuk III, dat in dit eerste deel de meeste ruimte vraagt, bevat een overzicht van Archimedes' Elementen, d.z. de hulpstellingen, die men bij het bestuderen van zijn werken dient te kennen, en die als een aanvulling van het elementensysteem van Euclides kunnen worden beschouwd. De decimale notatie maakt een gemakkelijk terugzoeken in dit hoofdstuk mogelijk voor hem, die, zonder dit gedeelte nauwkeurig in zich te hebben opgenomen, een begin maakt met de bestudering van de twee volgende hoofdstukken, die over bol en cylinder handelen.

Dr. Dijksterhuis heeft door deze nauwkeurige, overzichtelijke uitgave de Nederlandse mathematici met historische belangstelling zeer aan zich verplicht; mogen velen van hen door het bestuderen ervan opnieuw vervuld worden van bewondering voor wat de Griekse geest duizenden jaren geleden heeft gewrocht.

de Jong.

Beppo Levi, *Analisi Matematica, algebrica ed infinitesimale*, 541 blz. met enkele (niet genummerde) figuren. Lire 80. Nicola Zanichelli Bologna 1937.

Sommario.

Cap. I Polinomi e funzioni razionali intere — Cap. II Complessi — Determinanti — Sistemi di equazioni lineari — Cap. III Moltiplicazioni fra complessi — Vettori — Quaternioni — Cap. IV Numeri complessi — Cap. V Continuità — Cap. VI Particolarità relative al dominio reale — Cap. VII Serie di potenze — Cap. VIII Derivate — Cap. IX Derivate nel campo reale — Conseguenze — Cap. X Alcune proposizioni sulle equazioni algebriche nel campo complesso. Cap. XI Integrali in quanto funzioni primitive — Cap. XII Definizione diretta dell' integrale. Integrale di Riemann Cap. XIII Applicazioni analitiche e al calcolo numerico. Cap. XIV Equazioni differenziali ordinarie. Cap. XV Funzioni di più variabili. Cap. XVI Applicazioni geometriche.

Dit is de inhoud van het boek; ook hij, die geen Italiaans leest, ziet onmiddellijk, wat de 16 hoofdstukken bevatten, zodat hij zich een denkbeeld kan vormen van het boek. (Even gemakkelijk, als men deze inhoud leest, is de lezing van een Italiaans boek over elke tak van wiskunde; in die taal wordt veel en goed werk geleverd, zodat ik ernstig kan aanraden zich de beginselen van het Italiaans eigen te maken. De uitgever van wiskundige werken is Nicola Zanichelli in Bologna.)

Het zal wel niet van mij gevergd worden, dat ik het hele boek doorwerk; ik kies er een hoofdstuk uit nl. VIII; dit is zeer goed geschreven, volkomen exact en dus gemakkelijk te bestuderen. In plaats van onze

$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gebruikt de schrijver $r(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$; „l'espressione $r(x, x_0)$ si chiama il rapporto incrementale della $f(x)$ fra i punti x e x_0 ”; dat is: de uitdrukking $r(x, x_0)$ heet de aangroeiingsverhouding van $f(x)$ tussen de punten x en x_0 . De gang van het hoofdstuk is normaal; de begrippen worden scherp gedefinieerd, de afleiding van de afgeleide

functies is zeer solide, terwijl het geheel behoorlijk leesbaar is; niet beknopt als in code noch verwaterd als een roman.

Ik heb er zo een dag aan besteed om hier en daar nog meer te lezen en ik kan niet anders zeggen, dan dat het werk van Levi in elk opzicht kan worden aanbevolen. Daaraan doet niets af, dat de figuren niet al te mooi zijn; minder is het naar mijn zin, dat er helemaal geen vraagstukken worden opgegeven; wel bevat de tekst, zoals in alle boeken, veel uitgewerkte voorbeelden; het geheel maakt echter een sterk theoretische indruk en die theorie is uitstekend in orde.

P. W.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF — Groningen.

Historische bibliotheek voor de Exacte wetenschappen

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, *Archimedes*, deel I geb. f 4.50
voor int. op Noordhoff's wiskundige tijdschriften . . f 3.90

Prof. Dr. FRED. SCHUH, *Leerboek der Nieuwere meetkunde van het Vlak en van de Ruimte*. Met 222 figuren en 1965 vraagstukken.
Geb. f 10.50

Voor int. op Noordhoff's Wiskundige tijdschriften . . f 9.—

P. WIJDENES, *Practische driehoeksmeting*, 2e druk van de Kleine Driehoeksmeting, 131 blz., 107 figuren f 2.—
Antwoorden f 0.60 (gratis voor docenten).

Een boek voor alle mogelijke technische examens, waarbij men met een minimum theorie kan volstaan, maar bedreven moet zijn in het nauwkeurig uitwerken van eenvoudige vraagstukken. In het bijzonder geschikt voor de Nijverheidsacten N I, N III, N IV en N V.

P. WIJDENES, *Beknopte Driehoeksmeting*, Uitgave B.
8e druk blz. 51—157; fig. 26—68 f 1.35
Antwoorden f 0.60 (gratis voor docenten).

Van LIBRAIRIE FÉLIX ALCAN, Paris.

MADELEINE FRANCÈS, *Spinoza dans des Pays Neerlandais de la seconde moitié du XVIIe siècle; première partie* 355 blz. 50 fr. Het ligt niet op de weg van dit tijdschrift dit werk te bespreken; maar gaarne wijzen we de filosofisch aangelegden onder onze intekenaars op het verschijnen van dit kostelijke boek; ook anderen mogen het zich aanschaffen als tegenwicht tegen de dagelijkse beslommingen.

Van den schrijver.

A. SCHOUTEET, Brugge. *De afkomst van Simon Stevin en diens werkkring in Vlaanderen*; overdruk.

Het begin van de overdruk luidt:

Over den levensloop van Simon Stevin, wis-, natuur- en vestingbouwkundige, zijn tot hertoe hoofdzakelijk de volgende, slechts schaarsche inlichtingen bekend. Deze geleerde, die bovendien een

baanbreker was voor het beoefenen der wetenschap in de moedertaal, werd waarschijnlijk te Brugge geboren in 't jaar 1548 (1). Nadat hij eenigen tijd boekhouder bij een handelsfirma te Antwerpen geweest was, heeft hij in het Brugsche Vrije een bediening van eveneens financieelen aard waargenomen. Naderhand is hij naar de Noordelijke Nederlanden uitgeweken en stellig verbleef hij in 1581 te Leiden. Hij overleed in 1620, vermoedelijk te 's-Gravenhage. Op nogal gevorderden leeftijd was hij in den echt getreden met Catharina Kraai en uit dit huwelijk heeft hij vier kinderen gehad (2). Al de bovenvermelde bijzonderheden zijn ontleend aan de werken door Simon Stevin zelf of zijn zoon Hendrik uitgegeven. Opvallend is het, dat over Simon Stevin door geen zijner tijdgenooten geschreven werd, ofschoon hij gedurende zijn leven eer en faam heeft verworven. Verwonderlijk is het ook, dat zoo weinig bescheiden omtrent dezen man van wetenschap aan den dag gekomen zijn, hoewel hij openbare functies heeft bekleed en met hooggeplaatste, ja vorstelijke personen in betrekking heeft gestaan.

Op het stadsarchief te Brugge hebben wij in den laatsten tijd eenige documenten opgedolven, die de afkomst van Simon Stevin en diens werkkring in Vlaanderen als volgt toelichten. Simon Stevin is de natuurlijke zoon door Anton Stevin verwekt bij Catharina van der Poort, dochter van Hubrecht. De laatstgenoemde vrouw, die niet tot den geringen stand schijnt behoord te hebben, is met Joost Sayon gehuwd geweest (3) en heeft daarenboven nog twee kinderen gehad uit haar buitenechtelijken omgang met Noël de Caron (4). Als pupil genoot Simon Stevin zekere jaargelden. Toen hij den ouderdom van acht en twintig jaar bereikt had, werd hij op 30 October 1577 door schepenen van Brugge mondig verklaard, blijkbaar om het vrij gewichtig emplooi te kunnen vervullen van klerk op het kantoor van Jan de Brune, commies van de imposten der Vier Leden van Vlaanderen in het Brugsche Vrije.

Daarna volgen de archiefstukken in de oorspronkelijke spelling met de datums 26 Febr. 1551, 4 Mei 1551, 9 Maart 1562, 30 Oct. 1577, 28 Juni 1584, 6 Juli 1587, 15 October 1597. Meerdere gegevens kan men vinden in: W. van der Woude en P. J. Blok, Nieuw Nederlandsch biographisch Woordenboek, deel V, kolommen 815—818; Leiden 1921.

MONDELINGE STAATSEXAMENS A 1938

DOOR

Dr. H. C. SCHAMHARDT, Zeist.

Ter voorkoming van misverstand zij opgemerkt, dat de hieronder volgende vraagstukken geen volledige verzameling vormen van de in 1938 op het Staatsexamen gestelde vragen, maar bedoeld zijn als een aantal voorbeelden van meetkunde- en algebra-vragen, zoals die in 1938 en vorige jaren aan de A's gesteld zijn.

I. MEETKUNDE.

1. In viervlak ABCD is $AB = CD$, $AD = BC$ en $AC = BD$. Bewijs, dat het zwaartepunt tevens het middelpunt is van de om- en de ingeschreven bol.
2. Van een regelmatig n -zijdige pyramide vallen de middelpunten van de om- en de ingeschreven bol samen, als de hoeken der zijvlakken aan de top $\frac{360^\circ}{2n}$ zijn.
(Aanwijzing: Het middelpunt van de omgeschreven bol wordt gevonden als snijpunt van de „as” van het grondvlak en de „as” van een der zijvlakken).
3. Van $\triangle ABC$ zijn de voetpunten D en E van de hoogtelijnen AD en BE in ligging gegeven. Verder is bekend, dat de basis AB moet liggen op een gegeven rechte l . Construeer $\triangle ABC$.
4. Bewijs, dat de afstand van een punt P van een cirkel tot een koorde, die niet door P gaat, middelevenredig is tussen de afstanden van dat punt tot de raaklijnen in de uiteinden van die koorde.
5. Hoe construeert men een lijn, die twee kruisende lijnen a en b snijdt en twee andere kruisende lijnen c en d loodrecht kruist?
6. In een regelmatig viervlak wordt een bol beschreven. Welk deel van de oppervlakte van de bol ziet men uit een hoekpunt?
7. Van een afgeknotte vierzijdige pyramide is gegeven: het grondvlak ABCD in ware gedaante en de projectie op het

grondvlak van de ribbe A_1B_1 van het bovenvlak, alsmede de hoogte. Maak de projectie van het bovenvlak af. Construeer vervolgens de ware gedaante van het opstaande zijvlak ABB_1A_1 ; daarbij de constructie verklaren met behulp van een ruimtefiguur.

8. Construeer $x = a\sqrt[4]{3}$, als a een gegeven lijnstuk is.
9. In $\triangle ABC$ is de hoogtelijn uit A gelijk aan a . In de driehoek beschrijft men een rechthoek PQRS, zodat $PQ \parallel BC$ is (P op AB, Q op AC). Bepaal PQ zó dat:
 - 1e. De oppervlakte van PQRS zo groot mogelijk is;
 - 2e. QS zo klein mogelijk is.
10. In een halve cirkel met AB als middellijn trekt men AB zo, dat boog $AB = 60^\circ$ en BC zo, dat $\angle BC = 45^\circ$ is. Druk de lengte van BC uit in R.
11. Op een globe met een straal van 5 cm liggen twee plaatsen op een breedte van 45° en met een lengteverschil van 60° . Construeer in ware lengte de kortste afstand tussen die plaatsen over de globe. Hoe zoudt ge deze boog op de bol zelf construeren?
 Construeer verder op de bol de parallelcirkel, die het Noordelijk halfrond in 2 delen van gelijke oppervlakte verdeelt.
12. Gegeven een kubus EFGH; men tekent in het verlengde grondvlak het vierkant DPQC en beschouwt de pyramide F.DPQC. Teken de doorsnijding van deze pyramide met het vlak DCGH en bereken de inhoud van het deel der pyramide, dat buiten de kubus ligt, als de ribbe van deze laatste a is.
13. In $\triangle ABC$ trekt men de hoogtelijnen AD en BE, die elkaar in H snijden; bewijs, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is. Waarom liggen de punten A, B, D en E op een cirkel? Bewijs omgekeerd, dat dit laatste altijd het geval is, als gegeven is, dat $AH \times HD = BH \times HE$ is en de punten niet op een rechte liggen.
14. Van viervlak $\begin{smallmatrix} D \\ ABC \end{smallmatrix}$ zijn de ribben van het grondvlak $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$ en zijn alle drie de opstaande ribben 10. Bereken de afstanden, waarop telkens twee hoogtelijnen elkaar kruisen. (Aanw.: elk tweetal hoogtelijnen ligt in 2 evenwijdige standvlakken).
15. In de uiteinden van een middellijn AB trekt men de raaklijnen

aan een cirkel met middelpunt M. Een willekeurige lijn snijdt de raaklijn in A in punt C, de cirkel in E en F en de raaklijn in het uiteinde B in D; C, E, F en D liggen aan dezelfde kant van AB. De loodlijnen in E en F op CD opgericht, snijden AB opv. in P en Q. Bewijs, dat $\angle CPD = \angle CQD = 90^\circ$ is.

16. Van pyramide $\begin{smallmatrix} T \\ ABCD \end{smallmatrix}$ is gegeven, dat alle ribben a zijn. Hoe volgt hieruit, dat de pyramide regelmatig is? Waar ligt het middelpunt van de omgeschreven bol? We denken nu door T, A en B en door T, C en B twee elkaar rakende bollen gebracht. Wat is dus het raakpunt? Hoe kan men dus uit het ene middelpunt direct het andere vinden? Hoe kan men er voor zorgen, dat de ene bol een tweemaal zo grote oppervlakte heeft als de andere? Construeer deze laatste stralen, als de ribbe a gegeven is.
17. In een viervlak DABC brengt men het vlak aan door het zwaartepunt van het grondvlak, evenwijdig aan de ribben BD en AC. Construeer de doorsnede en bereken de verhouding van de inhouden der delen, waarin dit vlak het viervlak verdeelt. Als D_1 de projectie is van de top op het grondvlak, welke hoek is dan groter, $\angle DAC$ of $\angle DAD_1$? En waarom?
18. Op de rechthoekszijde CB van een rechthoekige driehoek beschrijft men een halve cirkel, die AB in D snijdt. Als nu $DB = AC = x$ en $AB = y$ is, welke betrekking bestaat er dan tussen x en y ? Los uit de gevonden vergelijking $\frac{x}{y}$ op. Hoe zoudt ge nu x construeren, als $BC = a$ gegeven is?
19. Gegeven de gelijkzijdige $\triangle ABC$ ($AB = AC = BC = a$) met zijn omgeschreven cirkel. Op de boog BC tegenover de top A neemt men een punt P. BP snijdt, verlengd, het verlengde van AC in R; CP snijdt, verlengd, het verlengde van AB in Q. Bewijs, dat $BQ \times CR$ constant is, als P boog BC doorloopt. Waar moet P liggen, als $CR = BQ\sqrt{3}$ is?
20. Van pyramide $\begin{smallmatrix} T \\ ABC \end{smallmatrix}$ is gegeven, dat TA loodrecht staat op het vlak ABC. Verder zijn in ware grootte gegeven $\angle BAC = \varphi$ de ribben TA en BC. Is het viervlak hierdoor bepaald? Construeer toch met deze gegevens in ware grootte de straal van de omgeschreven bol.

21. In het viervlak D.ABC brengt men een bol aan, die door A, B en C gaat en AD raakt. Hoe krijgt men het middelpunt? Waar snijdt deze bol DB en DC, als $AD = 6$, $DB = 8$, $DC = 9$ cm is?
- Noem de snijpunten met DB en DC opv. S en T. Bepaal de verhouding van de inhouden der delen, waarin vlak AST het viervlak verdeelt. Neem L op AD en P op BC. Construeer het punt, waar PL het vlak AST snijdt.
22. Men verlengt de hoogtelijnen AD, BE en CF van $\triangle ABC$ tot zij de omgeschreven cirkel opv. in P, Q en R snijden. Bewijs, dat $bg\ AQ = bg\ AB$ enz.; vervolgens, dat $HD = DP$, $HE = EQ$ en $HF = FR$ is. Trek nu de middellijn AML en verbind het hoogtepunt H met L. Bewijs, dat HL het lijnstuk BC middendoor deelt. Laat tevens zien, dat de zwaartelijn uit A door HM (lijn van Euler) in de verhouding 2 : 1 wordt verdeeld.
- Door welke negen punten gaat dus de cirkel, die verkregen wordt door de omgeschreven cirkel met H als centrum met $\frac{1}{2}$ te vermenigvuldigen?
23. Van $\triangle ABC$ is gegeven $AC = BC$. Bewijs:
- 1e. dat $r \times r_e = \frac{1}{4} AB^2$ ($r =$ straal ing. cirkel, $r_e =$ straal aang. cirkel aan AB);
 - 2e. dat de cirkel door B en C, die AB raakt, gelijk is aan de omgeschreven cirkel;
 - 3e. bereken de verhouding $\frac{AB}{BC}$, als $\angle C = 36^\circ$ is.
24. Een kegel is in een bol beschreven. De ronde oppervlakte van de kegel is anderhalf maal de ronde oppervlakte van het bolsegment, waarop hij staat. Hoe verhouden zich de hoogten van het bolsegment en van de kegel?
25. In een blok $\frac{EFGH}{ABCD}$ brengt men vlakken aan opv. door B, D en E, door B, D en G, door B, E en G en door D, E en G. Bewijs, dat de inhoud van het viervlak EGBD gelijk is aan het derde deel van de inhoud van het blok.
26. Als het getal π eens gelijk was aan $\sqrt{10}$, zoals de Egyptenaren dachten, hoe zoude ge dan de kwadratuur van de cirkel uitvoeren?
27. Men verbindt de hoekpunten A en C van $\triangle ABC$ opv. met de

raakpunten D en F van de ingeschreven cirkel met de overstaande zijden. AD en CF snijden elkaar in S. Bewijs, dat $CS : SF = (s-c) : c : (s-a) : (s-b)$. Hoe blijkt uit deze uitkomst direct, dat BE (E is het raakpunt op AC) de lijn CF in hetzelfde punt zal snijden?

Hoe zou men op soortgelijke wijze kunnen aantonen, dat de drie deellijnen door één punt gaan?

28. Van een driezijdig prisma maken de opstaande ribben een hoek van 60° met het grondvlak. De loodrechte afstanden tussen die ribben zijn a , b en c . Bepaal de inhoud van het prisma, als er een bol in beschreven kan worden.
29. Breng door de top D van viervlak D.ABC een vlak aan zo, dat D het zwaartepunt is van de projectie van $\triangle ABC$ op dat vlak.
30. Verander een driehoek in een gelijkbenige met dezelfde top-hoek en met gelijke oppervlakte.
31. Twee koorden (6 en 9 cm) zijn uit een der uiteinden van een middellijn van een cirkel aan verschillende kant daarvan getrokken. De projectie van de verbindingslijn der uiteinden op de middellijn is 3 cm. Bereken de straal van de cirkel en de verbindingslijn.
32. Van een regelmatig driezijdige pyramide maken de opstaande ribben (lengte a) hoeken van 60° met het grondvlak. Bereken de inhoud.
33. Van een vierzijdige pyramide zijn gegeven: het grondvlak in ware gedaante en drie van de opstaande ribben. Construeer het volledige netwerk. Neem vervolgens op drie van de opstaande ribben de punten P, Q en R en construeer de doorsnede van het vlak PQR met de pyramide, zowel in een ruimtefiguur als in ware gedaante.
34. In $\triangle ABC$ trekt men de hoogtelijn CF en de loodlijnen AD en BE op de door C gaande middellijn van de omgeschreven cirkel van $\triangle ABC$. Te bewijzen, dat $\triangle DEF$ congruent is met $\triangle ABC$.
35. Men brengt een cirkel door de middens van drie ribben van een kubus, die in één hoekpunt samenkomen. Deze cirkel is het grondvlak van een kegel, die zijn top heeft in het overstaande hoekpunt. Druk de inhoud van deze kegel uit in de ribbe a van de kubus.

36. Wat verstaat ge onder een zwaartelij n van een viervlak? Welke eigenschap hebben de zwaartelij nen? Bewijs dit. Als van een viervlak gegeven zijn: het grondvlak in ware gedaante, de hoogte en het voetpunt van de hoogtelij n uit de top, construeer dan het netwerk en de afstand van een hoekpunt van het grondvlak tot het zwaartepunt van het viervlak.
37. Evenwijdig aan de basis van een driehoek een lij n te trekken, zodat het afgesneden stuk van een der opstaande zijden, dat aan de top grenst, tweemaal zo groot is als het afgesneden stuk van de andere opstaande zijde, dat aan de basis grenst.
38. Een trapezium is in een halve cirkel beschreven (straal R). De middellij n is een der evenwijdige zijden, de andere is $2x$. Verder kan in dat trapezium een cirkel beschreven worden. Druk eerst de straal r van de ingeschreven cirkel uit in R en x en vervolgens x in R . Construeer ten slotte x .
39. Gegeven twee elkaar snijdende lij nen l en m , een lij n n , die l en m kruist en een vlak V . Gevraagd een lij n x , die l , m en n snijdt en die evenwijdig is aan V .
40. Hoe brengt men een vlak aan, waarvan de snijpunten met de opstaande ribben van een vierzijdige pyramide de hoekpunten van een parallelogram zijn? Bepaal de meetkundige plaats van de toppen der pyramiden met gegeven grondvierhoek, waarvoor genoemde doorsnede een rechthoek is.
41. Uit een punt P ziet men $\frac{1}{9}$ van een boloppervlak, uit een punt Q , dat 1 meter verder van M afligt dan P , ziet men $\frac{1}{8}$ van het boloppervlak. Bereken de straal van de bol.
42. Gegeven is een gelijkbenige driehoek, waarin de lij n, die de voetpunten van de hoogtelij nen op de benen verbindt, de driehoek in twee gelij ke delen verdeelt. Druk de oppervlakte van de driehoek uit in de basis a .
43. Construeer een driehoek, als gegeven zijn: de tophoek, de zwaartelij n uit de top, terwijl de basis $b = \sqrt[4]{p^4 - q^2 r^2}$ is; p , q en r zijn gegeven lijnstukken.
44. Van een viervlak $ABCD$ is $AD = BD = CD = 13$, $AB = 6$, $BC = 8$ en $AC = 10$. Bereken de straal van de omschreven bol.
45. Construeer het netwerk van een vierzijdige pyramide, als het grondvlak een gegeven koordenvierhoek $ABCD$ is en verder

gegeven zijn de projectie van de top T op het grondvlak en de hoogte. Bewijs, dat de pyramide een omgeschreven bol heeft en construeer de straal van die bol.

46. In viervlak $ABCD$ staan de ribben door A twee aan twee loodrecht op elkaar. Bepaal in een stereometrische figuur de ligging van het middelpunt M van de omgeschreven bol. Toon vervolgens aan, dat het snijpunt van AM met vlak BCD het zwaartepunt is van $\triangle BCD$.
47. In viervlak $ABCD$ snijden de diagonalen elkaar in S . De zwaartepunten van de driehoeken SAB , SBC , SCD en SDA worden met elkaar verbonden. Wat voor een vierhoek ontstaat er? Welk deel is de oppervlakte van die vierhoek van die van $ABCD$?
48. Twee cirkels M en N met stralen a en b raken elkaar uitwendig in C . Een gemeenschappelijke uitwendige raaklijn raakt M in A en N in B . Bepaal de oppervlakte van $\triangle ABC$.
49. Construeer een cirkel, die door twee punten A en B gaat en die een rechte l raakt.
50. Een rechthoekige driehoek TAM met zijde $AM = 6$, $MT = 8$, $AT = 10$ wentelt om TM als as en beschrijft dus een kegel. Verder beschrijft men een bol met T als middelpunt met straal $TQ < TM$. Welk deel van de boloppervlakte ligt binnen de kegel? Bewijs, dat die oppervlakte gelijk is aan de ronde oppervlakte van een cylinder, met dezelfde hoogte als het bolsegment en met een straal, die gelijk is aan de straal van de bol. Ontwikkel het zijdelingse oppervlak van de kegel in een plat vlak en construeer de middelpuntshoek van de cirkel-sector, die daardoor ontstaat.
51. In het driezijdige prisma $\begin{smallmatrix} DEF \\ ABC \end{smallmatrix}$ verbindt men A met het midden P van EF , B met het midden Q van DF en C met het midden R van DE . Bewijs, dat AP , BQ en CR door hetzelfde punt S gaan. Hoe verhouden zich de delen, waarin deze lijnstukken elkaar verdelen?
52. Construeer een raaklijnentrapezium, als gegeven zijn: een hoek, de straal van de ingeschreven cirkel en de som der evenwijdige zijden.
53. Gegeven drie platte vlakken A , B en C , die onderling evenwijdig zijn, die een rechte lijn opvolgend in de punten X , Y

en Z snijden. Trekt men nu een andere rechte lijn, die de eerste kruist en die de vlakken opv. in X' , Y' en Z' snijdt, dan is

$$XY : YZ = X'Y' : Y'Z'.$$

Bewijs dit.

54. Gegeven een rechthoek $ABCD$ en een punt P op AD . Door P een lijn PXY (X op BC , Y op het verlengde van AB) zo te trekken, dat opp. $\triangle XBY = \frac{1}{3}$ opp. $ABCD$ is.
55. Bewijs, dat de lijnstukken, die de hoekpunten van het grondvlak van een afgeknotten driesijdige pyramide verbinden met de middens van de overstaande ribben van het bovenvlak, door één punt gaan. Als deze lijnstukken elkaar verdelen in reden van $3 : 1$, welk deel is dan de inhoud van de pyramide, die ontstaat, als men de opstaande ribben verlengt?
56. Gegeven is een cirkel met middelpunt M en straal R . Van een andere cirkel met straal r ligt het middelpunt N op de omtrek van de eerste. In een punt A van cirkel N trekt men de raaklijn, die cirkel M in B en C snijdt. Bewijs, dat $NB \times NC = 2 Rr$ is.
57. Gegeven twee platte vlakken U en V , die elkaar snijden. In U en V trekt men twee lijnen l en m evenwijdig met de snijlijn van U en V . Construeer op ware grootte de afstand tussen de snijlijn en een lijn, die l en m snijdt, indien de afstanden van l en m tot de snijlijn gegeven lijnstukken zijn en indien de standhoek van de tweevlakshoek, waarin de zijden l en m gelegen zijn, eveneens gegeven is.
Construeer bovendien in ware grootte de hoeken, die de bovengenoemde snijlijn van l en m met de vlakken U en V maakt, als de lengte van het lijnstuk tussen de snijpunten met l en m gegeven is.
58. Gegeven een cirkel met straal $2\frac{1}{2}$ en een punt P op een afstand $6\frac{1}{2}$ van het middelpunt M . De lijn PM snijdt de cirkel in A en B (A tussen P en M). Een der raaklijnen uit P raakt de cirkel in C . Gevraagd de koorde AC te berekenen.
59. Door hoeveel punten is een bol bepaald? Hoe vindt ge het middelpunt? Construeer een bol, die door drie punten A , B en C gaat en een lijn l raakt.
60. Bewijs, dat de rechten, die een cirkel raken in de uiteinden

van twee koorden, die loodrecht op elkaar staan, een koorden-vierhoek vormen.

61. Van een pyramide T.ABCD is het grondvlak een gegeven rechthoek. Het vlak TAD staat loodrecht op het grondvlak. De standhoek tussen TAB en ABCD is gelijk aan een gegeven hoek en de inhoud van T.ABCD is gelijk aan l^3 . (l is een gegeven lijnstuk). Construeer het netwerk van de pyramide en de afstand tussen TC en AD in ware grootte. Bepaal ook de plaats van de eindpunten van deze afstand op AD en TC.
62. Gegeven een cirkel met straal $6\frac{1}{2}$ en een punt P op een afstand $2\frac{1}{2}$ van het middelpunt M. Door P wordt een koorde XY zo getrokken, dat de hoek $XPM = 60^\circ$ is. Bereken XY.
63. Twee cirkels snijden elkaar. Uit een punt S, dat buiten de cirkels op de gemeenschappelijke snijlijn is gelegen, trekt men een snijlijn SAB door de ene en SCD door de andere cirkel. Waarom is nu ABDC een koordenvierhoek? Als we nu deze figuur projecteren op een ander vlak, dat niet evenwijdig is aan het vlak van tekening, en de projecties zijn A_1, B_1, D_1 en C_1 kan dan $A_1B_1D_1C_1$ ook een koordenvierhoek zijn?
Men vouwt nu het ene deel van de figuur om de gemeenschappelijke snijlijn over een hoek van 90° om. Construeer de straal van de bol, die door de beide cirkels bepaald is.
64. Verdeel $\triangle ABC$ in twee delen van gelijke oppervlakte door een lijn, evenwijdig aan een gegeven lijn l .
65. Van een viervlak ABCD is het volgende gegeven: driehoek ABC in ware gedaante; $\angle BDC$ in ware grootte, terwijl AD en BC elkaar loodrecht kruisen. Construeer $\triangle BDC$ in ware gedaante. Daarna eveneens AD in ware lengte, als ook nog de straal van de omgeschreven bol gegeven is.
66. Gegeven twee cirkels, die buiten elkaar liggen, met de middelpunten M en N. De lijn MN snijdt de cirkels opv. in de punten A en B (A op 't verlengde van MN aan de kant van M, B op 't verlengde van MN aan de kant van N). Een der uitwendige gemeenschappelijke raaklijnen raakt de cirkels M en N opv. in C en D. Als S het snijpunt is van AC en BD, bewijs dan, dat $\angle ASB = 90^\circ$ is en dat $SC \times SA = SD \times SB$ is.
67. Van viervlak T.ABC kruisen TA en BC elkaar loodrecht, terwijl TA met de vlakken ABC en TBC gelijke hoeken maakt.

- De standhoek op de ribbe BC is 60° , $TA = a$ en $BC = b$. Bereken de inhoud van het viervlak.
68. In de rechthoekige $\triangle ABC$ ($\angle C = 90^\circ$) is D het voetpunt van de hoogtelijn uit C. Door D trekt men een lijn DQ (Q op CB) en loodrecht daarop DP (P op AC). Bewijs, dat de vorm van $\triangle PDQ$ onveranderd blijft, als Q de zijde CB doorloopt. In welke stand is opp. $\triangle PDQ = \frac{1}{2}$ opp. $\triangle ABC$?
 69. Van een viervlak ABCD zijn de kruisende ribben AD en BC in ware grootte gegeven. Op de ribbe DB heeft men een punt P zo gekozen, dat de doorsnede-figuur van het vlak door P evenwijdig met AD en BC een ruit is. Gevraagd de zijde van deze ruit in ware grootte te construeren.
 70. Gegeven een punt P binnen een hoek XOY. Gevraagd door P een lijn te trekken, die de benen OX en OY opv. in de punten A en B snijdt en wel zodanig, dat $PA \times PB = l^2$ is. (l is een gegeven lijnstuk).
 71. Van een pyramide is het grondvlak een ruit met een hoek van 60° ; in de pyramide kan een rechte cirkelkegel beschreven worden. De ontwikkeling van het zijdelingse oppervlak van deze kegel geeft een cirkelsector met een middelpuntshoek van 120° . Bereken de inhoud van de pyramide. Heeft de pyramide ook een ingeschreven bol? En ook een omgeschreven bol?
 72. Construeer een driehoek, als gegeven zijn: de basis, de top-hoek en de straal van de ingeschreven cirkel.
 73. Gegeven een blok $\frac{EFGH}{ABCD}$. Door het midden van de opstaande ribbe AE en door C brengt men een vlak aan, evenwijdig met de lichaamsdiagonaal HB. Bepaal de verhouding van de stukken, waarin AB door dit vlak wordt verdeeld.
 74. Construeer een driehoek ABC, als daarvan gegeven zijn: de zijde AC, de hoek B en de zwaartelijn AD.
 75. Door een lijn a een vlak te brengen, zodat de projecties van twee kruisende lijnen b en c op dat vlak evenwijdig lopen.
 76. Twee cirkels snijden elkaar in A en B. Door A wordt een lijn getrokken, die de cirkels nogmaals snijdt in P en Q. Toon aan, dat de verhouding van BP en BQ standvastig is.
 77. Gegeven een blok $\frac{EFGH}{ABCD}$. De punten P, Q en R zijn zodanig

op de evenwijdige ribben AB, EF en HG gegeven, dat $AP = \frac{1}{3} AB$, $EQ = \frac{1}{3} EF$ en $HR = \frac{1}{2} HG$ is.

In welke verhouding verdeelt het vlak PQR de ribbe DC en hoe groot is de verhouding van de inhouden der delen, waarin het blok door het vlak PQR verdeeld wordt?

78. Gegeven $\triangle ABC$. Daarin is de zwaartelijn AD getrokken en een lijn BE, die de zijde AC in het punt E zo snijdt, dat $AE = \frac{2}{3} AC$ is. De lijnen AD en BE snijden elkaar in O.

Bereken het quotient $\frac{\text{Opp. EODC}}{\text{Opp. ABC}}$.

79. Van een bolsector is de bolvormige oppervlakte gelijk aan de kegelvormige oppervlakte. Druk de hoogte van het segment uit in de straal van de bol.
80. In een cirkel trekt men twee onderling loodrechte stralen, MA en MB. P ligt op het verlengde van MB, Q op het verlengde van MA, terwijl AP en BQ elkaar op de cirkel snijden. Bewijs, dat $AQ \times BP = 2r^2$ is (r is de straal).
81. Van viervlak ABCD is gegeven, dat AD en BC elkaar loodrecht kruisen. $AB = AC = 13$; $BC = 10$; de hoek, die AD met het vlak ABC maakt, is 60° en de standhoek op de ribbe BC is 45° . Bereken de inhoud van ABCD.
82. Gegeven een parallellogram ABCD. Punt P ligt zo op AB, dat $AP = \frac{1}{4} AB$ is en punt Q ligt zo op het verlengde van CD aan de kant van D, dat $DQ = \frac{1}{2} CD$ is. Hoe verhouden zich de oppervlakten van de delen, waarin het parallellogram door PQ verdeeld wordt?
83. Van viervlak ABCD zijn in ware grootte gegeven: $\triangle ABC$, de ribbe AD en de hoogtelijn uit D op vlak ABC. Bovendien kruisen AD en BC elkaar loodrecht. Construeer in ware grootte de hoek, waaronder AB en DC elkaar kruisen.
84. Om een cirkel een gelijkbenig trapezium te beschrijven, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een vierkant met zijde a .
85. Gegeven viervlak ABCD. Op de ribben DB en DC kiest men twee punten P en Q zo, dat $DP = \frac{1}{3} DB$ en $DQ = \frac{3}{4} DC$ is. Op BC kiest men een punt R zo, dat $BR = \frac{1}{2} BC$ is. Bepaal de verhouding, waarin het vlak door PQ evenwijdig met DA een lijn uit R naar een willekeurig punt van DA verdeelt.
86. Construeer in $\triangle ABC$ een gelijkzijdige driehoek, waarvan de

- hoekpunten liggen op de zijden van $\triangle ABC$ en één zijde evenwijdig aan AB loopt.
87. Als van een viervlak $ABCD$ de ribben AB , AC en AD twee aan twee loodrecht op elkaar staan, dan is het kwadraat van de straal van de omgeschreven bol gelijk aan de som van de kwadraten van een paar kruisende ribben. Bewijs dit.
 88. Van een driehoek een vierhoek af te snijden, waarom en waarin een cirkel beschreven kan worden.
 89. Van een afgeknot 4-zijdig prisma zijn gegeven: de verhouding, waarin de diagonalen van het grondvlak elkaar verdelen en drie der opstaande ribben. Construeer in ware lengte de vierde opstaande ribbe.
 90. Gegeven drie punten A , B en C in de ruimte. Bepaal een vierde punt X zodanig, dat AX loodrecht op BC staat, dat AX de lijn BC op een afstand a kruist en dat de lijn AC de lijn BX op een afstand b kruist.
 91. Een gelijkbenige driehoek heeft een basis van 4 cm en een been van 3 cm.
 - a. Bewijs, dat het hoogtepunt van de driehoek op de ingeschreven cirkel ligt.
 - b. Wat ontstaat bij wenteling van de driehoek om de hoogtelijn uit de top? Bereken voor dat lichaam de straal van de omgeschreven bol.
 92. In een halve cirkel met middellijn $AB = 2r$ wordt een koorde AC getrokken, die met AB een hoek van 60° maakt. Bereken de oppervlakte van het door die koorde afgesneden segment.
 93. Gegeven twee kruisende lijnen a en b . Construeer een lijn van gegeven lengte, die a snijdt en b loodrecht snijdt.
 94. Op de ribbe TA van viervlak $TABC$ is een punt D gegeven. Construeer een vlak, evenwijdig aan vlak BCD , dat de inhoud van het viervlak halveert.
 95. Gegeven twee cirkels, gelegen in twee elkaar snijdende vlakken. Construeer een cirkel, die de omtrekken van deze cirkels halveert.
 96. Van een afgeknotte n -zijdige pyramide hebben grond- en bovenvlak oppervlakten opv. van $4a$ en a cm². Men brengt een vlak aan, evenwijdig aan grond- en bovenvlak, op de helft van de hoogte. Bereken de oppervlakte van de doorsnede met de pyramide.

97. Op de ribben van een drievlakshoek met hoeken van 90° worden gegeven stukken OA, OB en OC afgepast. Beschrijf om de drievlakshoek met top A en ribben AO, AB en AC een rechte cirkelkegel; hoe vindt men de as hiervan? Construeer in ware grootte de halve tophoek?
98. Construeer met behulp van het netwerk van een driezijdige pyramide de afstand van twee kruisende ribben in ware lengte.
99. Gegeven $\triangle ABC$.
- Construeer op AC een punt D zo, dat CD het grootste stuk van de in uiterste en middelste reden verdeelde zijde AC is;
 - trek $DE \parallel AB$. Bewijs, dat CE en DE in dezelfde trekking staan tot BC en AC;
 - bewijs, dat DE de oppervlakte van $\triangle ABC$ in uiterste en middelste reden verdeelt, dat nu echter het grootste stuk aan AB grenst.
100. Gegeven het viervlak T.ABC en een punt D op AB. Construeer door D een lijn l evenwijdig aan vlak BCT. Hoeveel vlakken gaan door l , die het viervlak volgens een trapezium snijden? Gevraagd het vlak door l , dat als doorsnede een gelijkbenig trapezium geeft. Eveneens het vlak, dat een rechthoekig trapezium als doorsnede oplevert.

II. ALGEBRA.

1. Onderzoek de grafiek van

$$y = \frac{x-1}{x^2}.$$

2. Los x en y op uit:

$$\frac{2x+3y}{9} = \frac{2x-3y}{3} = \frac{xy-1}{2}.$$

Licht de oplossing grafisch toe aan de hand van de beide gebruikte vergelijkingen.

3. Gegeven de vergelijkingen:

$$(a^2 + 2)x^2 + (a + 1)x + (a^2 - 4a) = 0.$$

Voor welke reële waarden van a heeft het product van de wortels een uiterste waarde?

4. Voor welke waarden van x is $\frac{2x+10}{x-3} > \frac{x+11}{x-4}$?

5. Onderzoek de grafiek van

$$y = \frac{-2x+3}{x^2-6x+9}.$$

6. Noem factoren op, waardoor $a^{12} - b^{12}$ deelbaar is.

Schrijf de uitkomst op van het quotient $\frac{a^{12} - b^{12}}{a^2 + b^2}$.

Noem de merkwaardige quotienten en bewijs ze.

7. Van een koordenvierhoek zijn gegeven de zijden a , b , c en d . De verlengden der zijden a en c tot hun snijpunt zijn opv. x en y . Bereken x en y . Wanneer zijn de beide vergelijkingen in x en y strijdig? Wat betekent dit meetkundig?

8. De parabolen, voorgesteld door:

$$y = (a+1)x^2 - (a-1)x - (2a-3) \text{ of wel:}$$

$y = a(x^2 - x - 2) + (x^2 + x - 3)$, gaan *alle* door twee vaste punten. Welke zijn die punten? Laat verder algebraïsch zien, dat, — in overeenstemming met de ligging van

deze punten, — de discriminant van de drieterm steeds positief is.

9. Gegeven de vergelijking $x^2 + mx + 2m - 14 = 0$. Voor welke waarde van m is de som van de kwadraten der wortels minimum?
10. Bepaal m zo, dat de rechte $y = mx$ raakt aan de parabool $y = x^2 - 3x + 4$.
11. De wortels van de vergelijking $x^2 + 21ax + 16b = 0$ zijn de derde machten van de wortels van de vergelijking $x^2 + ax + b = 0$. Bepaal a en b .
12. Los x op uit:

$$(17x^2 + 83x - 100) \{ (x - 3)^{\frac{1}{2}} + (x + 2)^{\frac{1}{2}} \} = \\ = (17x^2 + 83x - 100) (3x + 4)^{\frac{1}{2}}.$$

13. Los x op uit:

$$\{x^2 - (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3}\} \{x^2 - x - 2 + \sqrt{2}\} \{x^2 - (\sqrt{3} - 1)x - \sqrt{3}\} = 0.$$

14. Schets de grafiek van $y = \frac{x(x-2)}{(x-1)(x-3)}$ en toon aan, dat er geen grenswaarden zijn.

15. Van de vergelijking $x^2 + px + q = 0$ zijn de wortels x_1 en x_2 . Bepaal de vierkantsvergelijking, die tot wortels heeft

$$\frac{x_1}{x_1 + 2} \text{ en } \frac{x_2}{x_2 + 2}.$$

16. $x^{20} - 4x^{11} + 5x - 3$ wordt gedeeld door $x(x-1)(x+1)$. Bepaal de rest zonder de deling uit te voeren. (Denk om de algemene gedaante van de rest).

17. Voor welke waarden van x bestaat $\sqrt{x^2 - 3x - 10}$ niet? Dezelfde vraag voor $\sqrt{-x^2 + x + 30}$.

Schrijf een wortelvorm op, die voor alle waarden van x bestaat. Bepaal:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 10} - \sqrt{x^2 - 3x - 10}). \text{ Denk daarbij aan de herleiding van } \frac{1}{2 - \sqrt{3}}.$$

18. In welk geval is $\frac{ax + b}{cx + d}$ onafhankelijk van x ? Voor welke

waarden van a is $\frac{(a-1)x + 3a + 1}{x + (a^2 + a + 1)}$ onafhankelijk van x ?

19. Los x op uit:

$$\frac{2x^2}{x-1} = \frac{2a^2}{a-1}.$$

20. Los $\frac{x}{y}$ op uit:

$$x^3 - 4x^2y - 7xy^2 + 10y^3 = 0$$

Voor welke punten in 't platte vlak is het eerste lid ≥ 0 ?

21. Schets de grafiek van $y = \frac{2x^2}{x^2 - 2x + 1}$.

22. Bewijs, dat $2^{6x+3} + 3^{4x+2}$ deelbaar is door 17.

23. $f(x) = f(x) - f(a) + f(a)$. Waarom is $f(x) - f(a)$ deelbaar dóór $x - a$? Wat is nu hiermee dus bewezen?

24. Als voor alle waarden van x geldt:

$$(p+1)x^2 - 2(p-1)x + 3p - 3 < 0,$$

welke waarde moet p dan hebben?

25. Laat zien, dat $\lim_{x \rightarrow 0} \{x - 3 - \sqrt{x^2 - 6x + 8}\}$ en

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{\sqrt{x^2 - 6x + 10} - (x - 3)\}$$
 gelijk nul is.

Wat is dus op te merken van de grafiek van $y = \sqrt{x^2 - 6x + 8}$

en van die van $y = \sqrt{x^2 - 6x + 10}$ ten opzichte van $y = x - 3$?

Welke zijn dus de asymptoten van de krommen

$$y = x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 6x + 8} \text{ en } y = x - 1 \pm \sqrt{x^2 - 6x + 10}?$$

Schets deze krommen.

26. Voor welke punten (x, y) in het platte vlak is

$$(3x + 4y - 12)(2x - 3y - 6)(-2x + y + 4) \geq 0?$$

27. De vorm $f(x) \equiv 3x^3 + ax^2 + 13x + b$ laat bij deling door $x^2 - x - 6$ tot rest $47x + 99$. Bepaal a en b en los daarna de vergelijking $f(x) = 0$ op.

28. Welke betrekking bestaat er tussen p en q , als de vergelijkingen $x^2 + px + p^2 = 0$ en $x^2 + qx + q^2 = 0$ één wortel gemeen hebben? Kunnen p en q beide reëel zijn?

29. De vergelijkingen $x^3 - 3x^2 + 7x - 85 = 0$ en $2x^3 - 11x^2 + 10x - 25 = 0$ hebben een wortel gemeen. Los beide op.

30. Onderzoek de grafiek van de functie $y = \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 4}$.
31. De grafiek van $y = ax^2 + bx + c$ gaat door de punten O (0,0), A (1,3) en B (2,-3). Bepaal het maximum van de functie.
32. Door welk punt gaan alle parabolen, voorgesteld door $y = x^2 - (a - 3)x - (a - 3)$?
- Wanneer liggen de parabolen geheel boven de X-as?
33. De wortels van de vergelijking $2x^2 - 19x + 51 = 0$ zijn b groter dan die van de vergelijking $2x^2 - 3x + a = 0$. Bepaal a en b .
34. Herleid $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}}$. Als dit geschiedt door de vorm gelijk te stellen aan $\sqrt{x} + \sqrt{y}$, enz., welke eigenschap wordt dan daarbij gebruikt? Bewijs deze.
35. Symmetrische functies van de wortels van een vierkantsvergelijking. Afhankelijkheid en strijdigheid van 2 lineaire vergelijkingen met 2 onbekenden. (Ook grafisch).
36. In welk deel van het platte vlak liggen de punten, waarvoor

$$(y - x^2)(y - x - 1) > 0 \text{ is?}$$

37. Los x op uit: 1e. $x(a - x) = \frac{3}{16}a^2$;
 2e. $x^2 + (a - x)^2 = \frac{5}{8}a^2$;
 3e. $\left(\frac{cx}{a}\right)^2 = x(a - x)$.

38. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3 \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21. \end{cases}$$

Begrip. gelijkwaardige stelsels.

39. Men zet op een lijnstuk a aan weerskanten een lijnstuk x af en maakt nu een rechthoek met 't middelste stuk tot basis en de uiterste stukken tot opstaande zijden. Voor welke waarde van x is de oppervlakte van die rechthoek zó groot mogelijk?
40. Gegeven de vierkantsvergelijking $4x^2 - 2x + 1 = 0$ (wortels x_1 en x_2). Gevraagd wordt de vergelijking van de vierde graad te bepalen, die tot wortels heeft $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, x_1^3$ en x_2^3 .

41. De grafiek van de functie $y = \frac{8x + 7}{x^2 + ax + b}$ heeft twee asymptoten evenwijdig aan de Y-as, nl. $x = -1$ en $x = -2$. Bepaal a en b en teken de grafiek.

42. Schets de grafiek van

$$y = \frac{3x - 4}{x + 4}.$$

43. Voor welke waarden van p is $x^2 + px + 4p$ groter dan 12 voor alle reële waarden van x ?
44. Van de vergelijking $x^2 + ax + a^2 - 7 = 0$ is $x_1^4 + x_2^4 = 17$. Bepaal a .
45. Los x en y op uit:

$$\begin{cases} \frac{(5x - 3y + 1)(6x - 3y + 4)}{4x + 3y - 7} = 0 \\ 2x - y + 2 + \sqrt{2x - y + 3} = 5. \end{cases}$$

46. De vorm $ax^2 + bx + c$ wordt nul voor $x = 4$ en voor $x = 1$ en laat bij deling door $x - 5$ tot rest 12. Bepaal a , b en c . Welke rest laat de drieterm over bij deling door $x - p$? Voor welke waarde van p is deze rest minimaal?

47. De vorm $\frac{m(x - 2)}{x^4 - ax^2 + a - 1}$ is onbepaald voor $x = 2$ en heeft tot grenswaarde $\frac{1}{2}$. Bepaal a en m . Splits daarna de vereenvoudigde breuk in de som van drie breuken:

$$\frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1}.$$

48. Gegeven: $x^2 - (a - 3)x - (a - 3) = 0$. Bereken $x_1^2 + x_2^2$. Voor welke waarde van a is deze som minimum? Gevonden wordt, dat de minimumwaarde -1 is voor $a = 2$. Hoe komt het, dat men hier voor de som van twee kwadraten een negatieve uitkomst vindt? Wat is dus op te merken omtrent de wortels van $x^2 + x + 1 = 0$? Los ook eens op $x^3 = 1$. Hoeveel zal x_i^{19} zijn? (de 19e macht van een der imaginaire wortels).
49. Bewijs, dat de wortels van $mx^2 + (m + 1)^2x + (m - 1)^2 = 0$ reëel zijn voor alle reële waarden van m .
50. Ontbind in factoren:

$$15a^2 + ab + 3a - 28b^2 - 4b.$$

WISKUNDIGE TAFELS.

Dr. H. J. E. BETH.

Tafels in vier decimalen benevens gegevens op verschillend gebied 0.45

Dr. B. GONGGRIJP.

- Tafel A. Beknopte logarithmische en goniometrische tafels (zonder bijt afels), 3de druk gec. f 1.35
- „ B. Beknopte logarithmische en goniometrische tafels met 7 bijt afels, 5e druk geb. 1.90
- „ C. Tafel der goniometrische functies, met opklimming van één minuut gec. - 0.80
- „ D. Logarithmische en goniometrische tafels en bijt afels (Deze uitgave omvat A, B en C) 6e druk geb. 2.50

Dr. J. DU SAAR.

Rente-Annuititeiten en Sterfzetafels, in linnen 1.00

Dr. D. P. A. VERRIJP.

Vierdecimalige tafels, Sinus enz.-tafel, Briggsse Logarithmen, Log. Sinus enz.-tafel f 0.40, 10 ex. f 3.50, 100 ex. 30.—

J. VERSLUIS.

- Tafel A. Gewone logarithmen, in 5 decimalen. De logarithmen der getallen 1—10000 in 5 decimalen; logarithmen der rentefactoren in 7 decimalen 0.40
- „ C. Goniometrische logarithmen, in 5 decimalen met opklimming van een minuut 1.00
- „ D. Gewone en goniometrische logarithmen, in 5 decimalen (deze bevat de tafels A en C) 1.25
- „ F. Antilogarithmen, in 5 decimalen voor alle mantissen van 0000—9999 0.50
- „ G. Tafel van tweedemachten, derdemachten, tweedewortels en derdewortels, voor de getallen 1—1000, de wortels in 7 decimalen 0.60
- „ H. Grote tafel, in vijf decimalen, I Gewone logarithmen, II Logarithmen der goniometrische functies, III Goniometrische functies met interpolatietafels, IV Bijt afels, 3e dr. geb. 2.90

Noordhoff's Schooltafel, bewerkt door P. WIJDENES in slap linnen bandje, in twee kleuren, 11e—15e duizendtal. 1.50

Noordhoff's Tafel in vier decimalen in 2 kleuren in slap linnen band, 5—10e duizendtal. geb. - 1.00

P. WIJDENES.

- Tafel A. Logarithmen- en rentet afels, Tafel van tweedemachten, derdemachten, tweedewortels en derdewortels, 6e druk, gec. - 0.60
- „ B. Logarithmen en rentet afels, Tafels van tweedemachten, derdemachten, tweedewortels en derdewortels met uitbreiding der rentet afels (Annuititeiten) 10e druk. 0.75
- „ C. Logarithmentafels, in vijf decimalen 2e druk 0.40
- „ D. Rentet afels, in acht decimalen 2e druk f 0.50, gec. 0.75

P. WIJDENES en Dr. P. G. V. D. VLIET.

Logarithmen-, rente- en discontotafels, 2e dr. uitgave E van Noordhoff's Log. en rentet afels, prijs met hulpboekje, 2e druk - 3.25

Log. en Rentetafel G; schooluitgave van tafel E. in slap linnen band - 1.60

Dr. M. v. HAAFTEN.

Reziprokontafel aller ganzen Zahlen von 1 bis 10000. Ausgabe F von Noordhoff's Tafeln. Geb. - 2.40

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

Op de Handelshogeschool, voor examens in Handelsrekenen (M. O., accountant, acte U), voor actuaars, op Notariskantoren gebruikt men WIJDENES en VAN DE VLIET, Tafel E; op H.B.S. A Tafel G. Tafel F van Dr. VAN HAAFTEN is onmisbaar voor levensverzekeringswiskunde en op Banken.

WISKUNDE-TIJDSCRIFTEN

I. Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde

1938/'39 26e Jaargang

onder redactie van K. Harlaar en H. Herreilers — met medewerking van de professoren: dr. F. Schuh, dr. Hk. de Vries en dr. J. de Vries en van dr. L. Crijns, P. Jansen, dr. Paul de Vaere, H. G. A. Verkaart, dr. J. F. de Vries, P. Wijdenes en dr. U. H. van Wijk.

Zes tweemaandelijks afleveringen f 6.—

Oplossingen van de vraagstukken kunnen worden opgezonden aan de redactie.

De veilige gids voor de examens Wiskunde L.O. en K.I.

2. Euclides

1938/'39 15e Jaargang

Tijdschrift voor de didactiek der exacte vakken voor leraren en hen, die het wenschen te worden — onder leiding van J. H. Schogt P. Wijdenes — met medewerking van dr. H. J. E. Beth, dr. E. J. Dijksterhuis, dr. G. C. Gerrits, dr. B. P. Haalmeijer, dr. C. de Jong en dr. W. P. Thijssen.

Zes tweemaandelijks afleveringen f 6.—

3. Christiaan Huygens

1938/'39 17e Jaargang

Mathematisch tijdschrift — onder redactie van prof. dr. Fred. Schuh; ass. red. K. Harlaar. *De veilige gids voor K.V.*

Jaarlijks circa 20 vel druks — prijs f 10.—

Abonnementsprijs voor 1 en 2 samen f 11.—; voor 2 en 3 f 14.—; voor 1 en 3 f 14.— en voor 1, 2, en 3 f 18.—.

Intekenaars op Noordhoff's Wiskundige werken genieten bij verschijning van studiewerken belangrijke prijsvermindering; bovenstaande jaargangen op:

P. WIJDENES Beginselen van de Getallenleer.

Prof. Dr. F. SCHUH, Leerboek der Nieuwere meetkunde van het platte vlak en van de ruimte.

Dr. O. BOTTEMA, De elementaire meetkunde van het platte vlak.

Ir. J. F. SCHUH e.i., Leerboek der Technische theoretische Mechanica, I.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN—BATAVIA.

Ook verkrijgbaar door de boekhandel.

