EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

14e JAARGANG 1937/38, Nr. 1.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

☛ Bij de verzending van pres. ex. van de *tweede* druk (thans derde) van de Schooltafel is een prosp. van ongeveer 3 blz. bijgevoegd. Men zal mij zeer verplichten met toezending van dat prosp.; noch de uitgever, noch ik, hebben een ex. meer. P. W.

INHOUD.

DER ZAHLBEGRIFF UND DIE ERFAHRUNG

VON

T. EHRENFEST—AFANASSJEWA.

Problemstellung.

§ 1. In der Entwickelung des Zahlbegriffes, welche auf der Schule beigebracht wird, gibt es zwei Punkte, die unseren Schülern besondere Schwierigkeiten bereiten, so wie sie auch manchem von uns bereitet haben: es sind die Erweiterungen des Begriffes „*Multiplikation*" zunächst auf *Brüche*, dann auf *negative* Zahlen.

Man wird ungefähr längs diesem Wege geführt:

a) Gegeben die neue Zahlenart. *b*) Gefragt, was soll man unter Multiplikation *mit* solchen Zahlen verstehen (womit als von selbst sprechend angenommen wird, dass — wenn es schon einmal eine „Zahl" ist, so muss damit auch „multipliziert" werden). *c*) Deutlich gemacht, dass der vorher gebrauchte Begriff der Multiplikation für diese neue Art von Zahlen sich als sinnlos ergibt und dass man „also" einen allgemeineren Begriff ausarbeiten muss, von dem der alte bekannte ein für die alten bekannten Zahlen gültiger Spezialfall wäre. *d*) Die betreffende neue Definition gegeben.

Und nun kommt die Misère: alle Erweiterungen des Begriffes „Summe", auch die Erweiterungen der Multiplikation auf Irrationalzahlen und auf Komplexe Zahlen schluckt man ohne Mühe. Aber die beiden oben genannten Erweiterungen empfindet man als paradoxal! [1]) Und man kennt wohl manche verzweifelten Versuche, welche durch einige Lehrer gemacht werden um den Schülern zu beweisen, dass die vorgelegte Definition „die Richtige" sei.

Hier möchte ich doch eine Kürieuse Erklärung anführen, die im

[1]) Ich meine, natürlich, die Schüler, welche zum Nachdenken geneigt sind. Ich weiss, dass sehr viele Schüler glauben, sie haben eine Erklärung begriffen, wenn sie nur begriffen haben, was der Lehrer von ihnen will. Aber es gibt eben auch jene anderen!

XV Jahrhundert durch den Mathematiker Lucas Paciuolo[2]) gegeben wurde. Seine Skrupel sind ja vielen van uns gemein gewesen; er drückt sie so aus: „Ist es nicht ein Widerspruch, wenn Brüche bei der Multiplikation mit einander sich gegenseitig kleiner machen, während multiplizieren, vervielfachen auf das Grösserwerden hinweisen, wie auch gesagt sei: Wachset und vervielfältigt Euch und füllet die Erde!" — und nun probiert er sich ruhig zu stellen, unter anderem, durch die Betrachtung, dass „grösser werden heisse sich mehr von der Einheit entfernen," und dass dieses ebenso „nach der Richtung des Gangen, wie nach der Richtung der Brüche" geschehen könne, so dass in diesem Sinne

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}$$

wirklich grösser als jeder der Faktoren sei!

Und noch eine andere Erklärung, die auf den ersten Blick sogar recht schön antut[3]): „eine Zahl a mit der Zahl b multiplizieren soll stets bedeuten: eine neue Zahl c so aus a bilden, wie b aus der Einheit gebildet ist."

Unbestritten: alle uns bekannten Multiplikationen sind unter diese Definition unterzubringen. Das Ueble aber ist, dass sie zu unbestimmt ist. Wie ist $\frac{3}{4}$ aus der Einheit gebildet? — man sagt: die Einheit ist durch 4 geteilt und das Resultat ist verdreifacht. Aber ist nicht auch

$$\frac{3}{4} = \frac{1 + 1 + 1}{1 + 1 + 1 + 1}?$$

Wie soll man denn zwischen

„$\frac{3}{4} \times a = \left(\frac{a}{4}\right) \times 3$" und „$\frac{3}{4} \times a = \frac{a + a + a}{a + a + a + a}$" wählen?

Oder: wie ist $\sqrt{2}$ aus der Einheit gebildet? ist es nicht so:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1 + 1}?$$

darf man also schreiben: „$\sqrt{2} \times a = \sqrt{a + a}$"? ! !

§ 2. Ein jeder Mensch mit gesundem Verstand wird einsehen,

---

[2]) M. Cantor, *Geschichte d. Math.*, Bd. II, p. 289.

[3]) Sie wird keinem geringeren, als dem Euler zugeschrieben, obwohl ich, leider, kein bekräftigendes Zitat anführen kann.

dass $\frac{3}{4}$ Kilo einer Waare dreimal so viel kosten, wie $\frac{1}{4}$ Kilo, und dass $\frac{1}{4}$ Kilo ein Viertel des Preises eines ganzen Kilo kostet. Auch wird man — wenn auch mit etwas mehr Mühe — zugeben, das $(5-2) \times (10-3) = 5 \times 10 - 5 \times 3 - 2 \times 10 + 2 \times 3$ sei. [4])

Dieses stimmt mit „plus-mal-minus gibt minus", „minus-mal-minus gibt plus" u.s.w.

Es hat, bekanntlich, auch ein anschauliches Gegenstück, das seit Euclides datiert: die Darstellung der Oberfläche eines Rechteckes, wovon die Seiten als Differenzen von gewissen Strecken gegeben sind, durch vier andere Rechtecke.

Es sind nicht diese Rechenmethoden, die befremdend wirken, denn ihre Richtigkeit *ist* beweisbar, sondern die Tatsache, dass diese so heterogenen Berechnungen („$\frac{3}{4}$ von a bilden"; „a mit 2 multiplizieren und das Vorzeichen wechseln") mit demselben Namen genannt und mit demselben Symbol bezeichnet werden, wie das *Vervielfältigen.*

Wollen wir unseren Schülern in diesem Punkte behilflich sein, so sollen wir uns selber die Rechenschaft darüber geben, was denn die Mathematiker veranlasst haben *konnte* [5]) alle diese Berechnungen als „Multiplikation" zu erklären.

Die allgemeinen Gesetze der Operationen.

§ 3. Die Erweiterung des Zahlbegriffes und die damit gepaarte Erweiterung der Operationenbegriffe vollzog sich — so

---

[4]) Man sieht dieses auf eine Weise ein, die unabhängig ist von den speziellen Zahlenwerten, und man hat dabei an lauter positive (lieber: unrelative) Zahlen zu denken:
$(10-3)$ kann mit $(5-2)$ stückweise multipliziert werden, erst mit 5, was zu viel gibt, dann mit 2 um dieses Produkt von $5 \times (10-3)$ abzuziehen: $5 \times (10-3) - 2 \times (10-3)$. Ferner kann jeder dieser Terme wiederum stückweise ausgerechnet werden: $5 \times (10-3) = 5 \times 10 - 5 \times 3$, was einfach ist; endlich: anstatt $2 \times (10-3)$ abzuziehen, kann man erst 2×10 abziehen, was zu viel *abgezogen* ist; also soll man, um *zu korrigieren,* 2×3 *addieren.*

[5]) Was sie wirklich veranlasst *hat,* darüber wage ich kein Urteil, aber glücklicherweise ist dieses für unsere Zwecke auch nicht so wichtig.

wie die Entwickelung der meisten unserer Begriffe — nicht auf Grund von systematischer Ueberlegung, sondern ohne viel Fragen und Erklären, unter dem Einflusse von den jeweiligen Problemen, die sich teilweise von Seiten der Praxis aufdrängten, teilweise sich auf dem Wege der Ausarbeitung des bereits gewonnenen theoretischen Materiales erhoben.

Neue Gebiete entdecken und die Methoden zu ihrer Verwertung erfinden ist *eine* Sache, das Erworbene begreifen lernen und zu logischer Klarheit bringen ist eine *andere* Sache, die nicht anders, als *nach* jener ersteren zustande kommen kann.

So geschah es, dass die Mathematiker sich erst gegen die Mitte des neunzehnten Jahrhunderts der Frage zuwandten[6]), was denn eigentlich das Wesen der Berechnungen wäre, die man „Addition" resp. „Multiplikation" nennt. Und sie konstatierten, dass für alle Arten von den in der Algebra behandelten Zahlen die nun allgemein bekannten Gesetze gelten:

$$a + b = b + a \qquad a \times b = b \times a \; \ldots . \; \textit{kommutatives.}$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$
$$\textit{assoziatives.}$$

$$(a + b)c = a \times c + b \times c \; \ldots . \; \textit{distributives.}$$

Somit hatte man erfahren, *was* das Gemeinsame war, das den sonst so verschiedenen Berechnungen den Namen „Multiplikation" (resp. „Addition") verlieh. Nun sind aber die Mathematiker, als Solche, vollständig befriedigt, wenn der *rein mathematische Inhalt* eines Begriffes klargelegt ist; für ihre Zwecke ist es nicht erforderlich die weitere Frage zu stellen (die für den Mathematiklehrer wohl von Belang ist): *wieso* kommt es, dass die Erweiterung der Addition und Multiplikation gerade diese Gestalt angenommen hat und keine andere?

Man kann von ihnen höchstens den Hinweis auf die *Permanenz* jener Gesetze bei dieser Erweiterung erhalten. Dieses ist aber keine Antwort auf unsere Frage: jede Begriffserweiterung besteht darin, dass man einige Eigenschaften des ursprünglichen Begriffes fallen lässt, aber gewisse anderen beibehält — diese erscheinen dann eben als permanent. Aber damit ist nichts gesagt über die

---

[6]) H. Hanckel, *Vorles. über die komplexen Zahlen.* [1867].

Gründe für gerade *ihre* Permanenz [7])! Es wird dadurch auch nicht erklärt, warum es nötig wäre bei der Erweiterung des Zahlbegriffes von diesen beiden Operationen auch etwas übrig zu lassen, warum die Zahlen justamente — auf welche Weise auch — „addiert" und „multipliziert" werden sollten.

§ 4. Wir sind also, scheinbar, auch nach der Entdeckung der allgemeinen Gesetze der Operationen nicht weiter gekommen in dem, was uns hier beschäftigt. Und doch wird uns gerade diese Entdeckung helfen in unser Problem eine grössere Uebersichtlichkeit hineinzubringen.

Der Zweck der Untersuchungen, welche zum Feststellen der obigen Gesetze führten, war derselbe, wie der der Axiomatisierung der Geometrie: man verfügte über ein recht ausgebreitetes, aber noch nicht ganz durchsichtiges Wissensmaterial, und es war notwendig die logischen Zusammenhänge darin einmal ganz deutlich zu überblicken.

Diese auf einem gewissen Entwickelungsstadium einer Wissenschaft unentbehrliche Leistung scheint aber Anlass zu manchem Misverständnis zu geben: einerseits wird die systematische und von jeder praktischen Motivierung losgelöste Darstellung der Zahl- und Operationenbegriffe zuweilen als eine Empfehlung aufgefasst auf eine abstrakte Weise die erste Bekanntschaft mit den Zahlen anzuleiten. Diese offenbar unhaltbare Auffassung bringt Manche zu einem vernichtenden Urteile über die ganze logische Analyse der Grundlagen, wofür diese wahrhaft unverantwortlich ist. Andrerseits wird die dabei deutlich gewordene *logische Unabhängigkeit* zwischen der Erweiterungsrichtung eines Begriffes und dem bis dahin entwickelten System von Begriffen oft als ein Beweis gedeutet für eine *allseitige Ungebundenheit* der mathematischen Begriffe, was dann manche Leute staunen lässt, wieso es doch kommt, dass die Mathematik so weitgehend praktisch anwendbar sei.

---

[7]) In diesem Sinne wurde im Jahre 1910 auf dem Kongresse der Mathematiklehrer in St. Petersburg von P. Ehrenfest die Frage gestellt. Sie blieb damals unbeachtet. Im Jahre 1932 erschien in russischer Sprache (Nachrichten des 2-ten Nordkaukasischen Pädagog.. Inst.) ein Artikel van L. Kreer, wo der Einfluss der Lebenspraxis auf die Gestaltung des Multiplikationsbegriffes besonders stark betont wird. Der Autor spricht mit geringschätzung über die rein mathematisch-abstrakte Darstellungsweise.

Bei näherem Besehen ergeben sich jedoch die so abstrakt scheinenden Gesetze der Operationen durchaus nicht als vom Himmel gefallen. Weit davon entfernt „dem Leben fremd" zu sein, zeigen sie sich als eine unmittelbare Abbildung der Erfahrung selber.

Erfahrungsgrundlage des Begriffes der ganzen Zahl.

§ 5. Unsere Auseinandersetzungen werden an Einheitlichkeit gewinnen, wenn wir darin auch die *ganzen Zahlen* einbeziehen.

Viele eminente Mathematiker sind der Meinung, dass der Ursprung unseres Begriffes der ganzen Zahl keiner Analyse zugänglich sei.[9]) Ich will mir dessen ungeachtet eine dergleiche Analyse erlauben: der praktische Anlass zum Ausbilden dieses Begriffes scheint mir auf der Hand zu liegen; eine Tatsache ist es jedenfalls, das uns selber und unseren Kindern dieser Begriff *längs dem Wege der Erfahrung* beigebracht wird.[10]).

Wollen wir einmal die Arithmetik neben den anderen Kalküls stellen: da haben wir, z.B., den Vektorenkalkül, den Matrizen-, den Logikkalkül u.s.w.

Ihre Objekte sind Symbole zweierlei Art: Symbole von Dingen und Symbole von Operationen. Die Operationen weisen gewissen Gruppen von Dingen (eigentlich: Dingsymbolen) andere Dinge derselben Art zu. Es bestehen Regeln, welchen gemäss man gewisse Operationen an gegebenen Dingen durch andere Operationen erstzen kann um dasselbe resultierende Ding zu ermitteln — „identische Transformationen". Alle identischen Transformationen

---

9) Kronecker soll gesagt haben: „Die ganzen Zahlen hat Gott geschaffen, alles andere ist Menschenwerk". Es war mir unmöglich in den Werken von Kronecker einen Beleg dafür zu finden, aber jedenfalls werden diese Worte als die Seinen wiederholt und zwar in dem Sinne, dass die ganzen Zahlen irgendwie à priori unserem Bewusstsein gegeben seien. Und viele andere Mathematiker behaupten, die Zahlen seien eine *freie* Schöpfung unseres Geistes, die von der Erfahrung unabhängig ist.

10) Natürlich, meine ich nicht, dass das Zurückbringen eines Begriffes auf die Erfahrung den Progress der Begriffsbildung bis zu dem Boden erschöpft: dass so etwas, wie unser Bewusstsein besteht, dass es Erfahrungen erleben kann, dass es von Erfahrungen Begriffe abstrahieren kann — das alles bleibt unergründet. Aber hier stehen wir vor einer einfacheren Frage: soll man dem Zahlbegriffe, speziell dem Begriffe der ganzen Zahl eine Sonderstellung geben unter allen anderen Begriffen, die anerkanntermaassen in der Erfahrung zumindest einige ihrer Wurzeln haben?

eines Kalküls sind logische Folgen aus gewissen elementaren identischen Transformationen, welche die *Grundgesetze der elementaren Operationen* ausmachen (kurz: *„Operationengesetze"*).

Die elementaren Operationen dieser verschiedenen Kalküls haben dieselben Namen — *„Addition"* und *„Multiplikation"* — wie die der Arithmetik, nur sind ihre Grundgesetze in den verschiedenen Kalküls verschieden (ohne das hätte man auch keine verschiedenen Kalküls!). So hat man, z. B., im Vektorenkalkül zwei verschiedene *Arten* von Multiplikation und nur für eine davon ist das kommutative Gesetz gültig.

Im Matrizenkalkül gilt die Kommutativität der Multiplikation nicht.

Im logikkalkül hat man ein eigenartiges Additionsgesetz: $a + 1 = 1$, welches zur Folge hat, dass die umgekehrte Operation keinen Sinn hat, und dass man neben dem Gesetz

$$(a + b) \times c = a \times c + b \times c$$

noch ein zweites distributives Gesetz hat:

$$(a \times b) + c = (a + c) \times (b + c),$$

welches aus dem ersten durch Vertauschung der Operationensymbole „$+$" und „$\times$" gewonnen wird.

Welches sind die Dinge, auf die sich diese Kalküls beziehen, und woher hat man ihre Grundgesetze der Operationen? — Sie sind ebenso wenig „frei versonnen", wie die ganzen Zahlen mit ihren Operationengestetzen: alle diese Kalküls bilden einen Sach verhalt ab, den man auf einem oder anderen Gebiete vorgefunden hat. Sie helfen diese Gebiete zu ordnen und zu beherrschen.

§ 6. *Die ganzen Zahlen bilden auch einen vorweg gegebenen Sachverhalt ab* und zwar *denjenigen, den wir in unserem alltäglichen Leben an den verschiedartigsten Versammlungen von diskreten Dingen vorfinden.*

Um kurz zu sein, wollen wir diesen Sachverhalt recht abstrakt formulieren. Wenn wir bei verschiedenen gelegenheiten mit Versammlungen von mehreren Dingen zu tun haben, bemerken wir bald, dass diese nach dem folgenden Merkmale in verschiedene Kategorieen zerfallen: wenn wir die Elemente einer Versammlung den Elementen einer anderen Versammlung *ein-an-ein* zuordnen, so werden entweder diese beiden Versammlungen zugleich erschöpft, oder aber ist die eine erschöpft, während von der anderen noch Elemente übrig bleiben. Dabei ist das eine oder das andere Resultat stets dasselbe unabhängig davon, welches Element der einen Versammlung welchem Elemente der anderen Versammlung zugeordnet wird. Alle Versammlungen, welche bei solcher Zuordnung an eine beliebige unter ihnen zugleich mit dieser erschöpft werden — und nur solche — rechnen wir zu einer und derselben Kategorie. Wir können uns beliebig viele beliebig verschiedene Versammlungen einer und derselben Kategorie denken, so dass das einzige, was ihnen allen gemeinsam ist, eben diese Eigenschaft ist: bei einer eineindeutigen Zuordnung zu einander zugleich erschöpft zu werden. Dieses ist die „Grundlage für die Begriffe *„gleiche Anzahl", „grössere"* resp. *„kleinere Anzahl"*. [11])

Die Erfahrung, welche diesen Begriffen zugrunde liegt, ist verhältnissmässig primitiv: sie reduziert sich darauf, dass die Eindrücke, welche wir von dem Leben (auch von unserem inneren Leben) bekommen, auf den ersten Blick in diskrete Stücke zerfallen (oder zumindest Verdichtungen aufweisen, wie H. Weber bemerkt [12]), und dass diese (oder eventuell Erinnerungen an sie) eine genügende Existenzdauer haben damit wir sie als dieselben wiedererkennen [13]). Die Welt enthält (merklich) diskrete Dinge, unser Leben — (merklich) diskrete Erlebnisse; diese gruppieren sich — und zwar zunächst ohne unser eigenes Zutun — in mehr oder weniger zahlreiche Versammlungen. Dass wir eventuell an ein zweites Ding denken, wo uns nur ein einziges gegeben ist, kann ich unmöglich als die allerprimärste Tat unseres Geistes auf dem Wege der Bildung des Zahlbegriffs erblicken [14]). Ich glaube nicht, dass ausser dem allgemeinen Vermögen Begriffe als Abstraktionen von der (äusseren und inneren) Erfahrung zu bilden noch eine spezielle Gabe nötig wäre um den Zahlbegriff zu bilden.

---

[11]) Russell. *The principles of Mathematics* [1903] Vol. I, § 111, p. 115.

[12]) Weber u. Wellstein, *Enzykl. der Elementarmath.* Bd. I, p. 3. [1922].

[13]) G. Mannoury. *Mathesis en Mystiek* [1924]. In diesem Büchlein unterstreicht der Autor die Notwendigkeit dieser relativen Beständigkeit der Dinge für die Möglichkeit des Zählens. Uebrigens ist ihm selber dabei die Relativität wichtiger als die Beständigkeit.

[14]) L. E. J. Brouwer, *Over de Grondslagen der Wiskunde,* p. 81. [1907].

§ 7. Es sei hervorgehoben, dass man mit den Begriffen der gleichen oder ungleichen Anzahl noch nicht weit genug ist um die Dinge zu *zählen!* Dazu ist noch der Begriff einer *bestimmten Zahl* erforderlich [15]).

Wie sollen wir jemandem erklären, was für uns *„sechs"* bedeutet? — Wir können noch so viel suchen, wir finden nichts Besseres, als was bei einer solchen Gelegenheit einem Kinde vorgelegt wird: ein individuelles Beispiel von sechs Gegenständen.

Die Kategorie von Versammlungen, welche alle aus je sechs Elementen bestehen, kann nicht anders definiert werden, als durch den Hinweis auf einen speziellen Repräsentanten.

Wir verfügen, bekanntlich, seit jeher über eine Serie solcher speziellen Repräsentanten — einen für jede Kategorie; sie werden folgendermaassen gebildet: man lernt *auswendig* eine Reihe von *Symbolen* („eins, *„zwei", ...*) und zwar *in einer bestimmten Reihenfolge.* (Das Auswendiglernen wird zwar auf eine listige Weise auf einen recht kurzen Abschnitt dieser Reihe reduziert — dank der Erfindung des Dezimalsystems — aber die Reihe ist prinzipiell unbeschränkt). Man bildet aus diesen Symbolen Versammlungen und zwar so, dass eine Versammlung, welche ein gewisses Symbol enthält, („sechs") auch alle in jener Reihe vorangehenden Symbole „drei", „eins", „zwei", „fünf" und „vier") enthalte. Eine solche Versammlung ist dann der Repräsentant der bewussten Kategorie. „Zählen" ist nichts anderes, als feststellen, welcher von allen diesen Versammlungen die gegebene Versammlung eineindeutig ohne Rest zuordenbar sei. Dass man bei dem Zuordnungsprozesse die Elemente der repräsentativen Versammlung stets in der erlernten Reihenfolge nimmt, ist eine Angelegenheit der — überauss grossen — Bequemlichkeit: es erspart uns das unbegrenzte Suchen; es trifft aber nicht das *Wesen* des Unterbringens unserer Versammlung in die entsprechende Kategorie, d.h. das Wesen des Zählens. Bekanntlich, wird das letzte Element des betreffenden Abschnittes der Symbolenreihe der gegebenen Versammlung als ihre *„Zahl"* zugewiesen [16]).

---

[15]) Es ist mir ein Fall bekannt, (aus einer wenig kultivierten Landstrecke), wo eine Mutter nicht sagen konnte, wie viel Kinder sie hatte, obwohl sie sie alle bei ihren Namen aufzählen konnte.

[16]) Vielleicht können die obigen Betrachtungen auch zu der Aufklärung der Frage beitragen, ob die Kardinal- oder die Ordinalzahl bei dem Bilden des Zahlbegriffes vorangehe.

Dass der Zahlbegriff uns nicht angeboren sei, wird wohl dadurch belegt, dass die Menschheit recht lange auf die Ausbildung einer Zahlenreihe warten liess: wie lange begnügte man sich mit dem Unterschiede „ein" — „zwei" — „viele"! Vielmehr erscheint er als eine langsam ausgearbeitete Abstraktion aus der menschlichen Erfahrung. Wie ich zu zeigen trachtete, haftet dem Begriffe einer bestimmten Zahl sogar die Erinnerung an eine ganz individuelle Erfahrung an: an einen bestimmten Abschnitt der memorierten Symbolenreihe.

Operationen an ganzen Zahlen und ihre Beziehung zu der Erfahrung.

§ 8. Das „*Addieren*" von zwei ganzen Zahlen ist die Abbildung des Vereinigens von zwei Versammlungen von Gegenständen zu einer einzigen. Hätte man nie die Gelegenheit zu einem solchen Vereinigen, so wäre auch kein Anlass da um den Begriff der Addition auszubilden [17]).

Da das Resultat des Zählens unabhängig ist von der Reihenfolge, in welcher die verschiedenen Elemente der Versammlung den Zahlensymbolen zugeordnet werden, so ist es auch gleichgültig, welche von den Teilversammlungen zu diesem Zuordnungsprozesse als erste herangezogen wird. Dieses besagt, dass die *Kommutativität* der Addition durch den Karakter des Zahlbegriffes selber festgelegt ist. (Ein mir bekanntes Kind welches sonst keine besondere mathematische Veranlagung besass, gab auf die Frage „was ist mehr: zwei und drei oder drei und zwei, ganz prompt die richtige Antwort, versagte aber, als man fragte, wieviel es denn präzis wäre). M.a.W.: ist die ganze Zahl eine Abstraktion aus Versammlungen von diskreten Dingen, so ist die Addition von ganzen Zahlen mit allen ihren Eigenschaften eine Abbildung des sachsverhaltes an diesen Versammlungen. Diese Bemerkung breitet sich auch auf das assoziative Gesetz der Addition aus.

---

[17]) Ich will damit nicht prinzipiell ausschliessen, dass das Vereinigen von zwei Versammlungen gelegentlich aus einem noch nicht ergründeten inneren Drange vollbracht werden könnte — dieses muss man wohl von jeder neuen Kombination von Dingen zugeben, die der Mensch vollbringt; ich will nur betonen, dass ein solches Vereinigen noch keine mathematische Handlung sei und dass es dem Bilden des Additionsbegriffes *vorangeht.*

Bei der Multiplikation tritt ein neues Symbol auf, welches die Anzahl der Summanden angibt. In der Formel $a \times b$ spielen a und b wesentlich verschiedene Rollen (nicht so, wie in „$a + b$"), die Kommutativität der Multiplikation kann daher nicht ohne Weiteres zugegeben werden. Der Beweis beruht aber unmittelbar auf dem Begriffe „gleicher Anzahl" [18]) und auf keiner neuen Erfahrungstatsache [19]).

Dasselbe gilt für das assoziative und das distributive Gesetz der Multiplikation. [20]).

Wir können nun ganz allgemein behaupten: ist der Begriff der ganzen Zahl eine Abstraktion aus der Erfahrung, so ist alles

---

[18]) In der Tat: „$a \times b$" bildet das Vereinigen von a Versammlungen gleicher Anzahl b ab. Bilden wir jetzt aus denselben Elementen neue Versammlungen auf eine solche Weise, dass jede von ihnen *ein* Element aus jeder der a ursprünglichen Versammlungen enthalte, also im Ganzen a Elemente. Wiederholen wir dieses; solange es geht. Nun ist das gleichzeitige Nehmen von je einem Elemente aus jeder Versammlung eine Form von eineindeutiger Zuordnung dieser Versammlungen zu einander; also müssen sie zugleich erschöpft sein, da sie alle dieselbe Anzahl b besitzen. Damit ist gezeigt, dass die gegebene Totalversammlung auf eine neue Weise als Vereinigung von gleichzahligen Versammlungen dargestellt werden kann und dass die Anzahl der Teilversammlungen genau b ist.

[19]) Wenn man für die Anfänger den Beweis an Hand von konkreten Zahlen führt, so ist es um bei ihnen die Begriffe „Zahl" und „Produkt" frisch zu halten, da sie sonst nicht imstande wären unseren *Worten* zu folgen, aber durchaus nicht um ihnen einen Induktionsschluss von der Art: „ $3 \times 4 = 4 \times 3$; $4 \times 5 = 5 \times 4$; ..... *also* stets $a \times b = b \times a$" abzuzwingen. Die anschauliche Darstellung der Versammlungen etwa durch Punkte, die man auf zwei verschiedene Weisen zu gleich langen Reihen vereinigen kann, ist wohl geeignet um an ein Paar Spezialbeispielen das Wesentliche und allen analogen Fällen Gemeinsame zu erfassen. Das Ausrechnen von Produkten um sie dann miteinander zu vergleichen ist dazu ungeeignet, es stärkt hingegen die Neigung um sich auf die unvollständige Induktion zu verlassen anstatt nach dem Kerne der Sache zu suchen. Damit trägt man der Entwickelung des kritischen Denkens bei den Schülern sicher nicht bei!

[20]) Ich möchte mir hier wieder eine didaktische Bemerkung erlauben: das assoziative Gesetz der Multiplikation scheint nicht allen Schülern ohne Weiteres einleuchtend zu sein. Sie sind nicht alle imstande den Verband zwischen diesem Gesetz und dem Sachverhalt, den es abbildet, selbstständig herzustellen. Man bemerkt es an dem Zögern bei dem Zerlegen der Zahlen in Faktoren (es ist nicht der Mangel an Rechentechnik allein, der sie dabei hindert). Eine Veranschaulichung des betreffenden Sachverhaltes, etwa durch Gruppen von Gruppen, die ihrerseits in gleichen Anzahlen von gleich langen Reihen von Punkten geordnet sind, wäre hier wohl am Platze.

Weitere, was man an den ganzen Zahlen entdecken kann, eine logische Folge aus den Eigenschaften, die diesen Begriff ausmachen [21]).

Additive Grössen.

§ 9. Die Multiplikation mit einer ganzen Zahl ist keine wesentlich andere Operation, als eine Addition. Es bestand daher ohne Weiteres kein Anlass um auch diesen Begriff bei der Erweiterung des Zahlbegriffes zu erweitern [22]). Man brachte aber diesen Speziellen Fall der Addition in eine *besondere Kategorie* unter — zusammen mit den gewissen Berechnungen an den erweiterten Zahlen — aus dem Grunde, weil er als Spezialfall dieser Art von Berechnungen bei der Abbildung eines *besonderen Sachverhaltes an Grössen* und zwar an den *additiven* Grössen auftrat.

---

[21]) In Verband damit möchte ich auf eine Auffassung weisen, die — meines Erachtens — unrichtig ist: es wird oft gesagt, dass die Behauptung: „$2 \times 2 = 4$" unbeweisbar sei, weil es eine Definition wäre (des Begriffes „4"? des Begriffes „$\times$"?) Nun kann man allerdings den Aufbau einer Theorie von verschiedenen Enden beginnen, man kann gewiss auch die Zahl „vier" etwa durch die obige Relation einführen. Aber dann werden sich andere Beziehungen als beweisbar erweisen, die jedoch nie als solche erwähnt werden. Wir wollen aber von dem gebräuchlichen Wege sprechen, längs welchem man die verschiedenen individuellen Zahlen und ihre Eigenschaften kennen lernt. Auf diesem Wege wird das „Produkt" als „Summe von gleich grossen Summanden" definiert und die Zahl *„vier"* wird *vor der Frage nach* „$2 \times 2 = ?$" bereits als „$3 + 1$" bekannt. Aber dann ist

$$2 \times 2 = 4, \text{ d.h. } 2 \times 2 = 3 + 1$$

eine ebenso des Beweises bedürftige Tatsache, als

$$376 \times 153 = \ldots.$$

— der Leser finde selber heraus, was da rechts stehen soll; er wird zugeben, dass er keine willkürliche Ziffer an jene Stelle setzen darf, wie es der Fall wäre, wenn jene Gleichung zur *Definition* der rechten Seite dienen sollte.

[22]) Von diesem Standpunkte aus darf man wohl sagen: die Frage „was soll man unter einer Multiplikation mit einem Bruche verstehen?" ist nicht nur unbeantwortbar, sondern konnte in der tatsächlichen Geschichte des Zahlbegriffes auch kaum gestellt werden. Nur die späteren Kommentatoren — wie L u c a s P a c i u o l o und die Schullehrer, welche vor dem fait accompli standen, konnten bei der Darstellung der Zahlenlehre die Situation umkehren und so tun, alsob die Erweiterung des Multiplikationsbegriffes an und für sich ein natürliches Problem wäre. Die Verleitung dazu war vielleicht diese, dass der Name der Operation dem ersteren Spezialfalle entnommen war.

Die Grössen treten uns zunächst ohne jede Arithmetisierung — als blosse „Ausdehnungen" entgegen. Für einige von ihnen gelingt es die Begriffe „gleich", „grösser" und „kleiner" auszubilden. Von einigen unter diesen bemerken wir aber das Folgende:

a. manche Dinge, an welchen wir eine Grösse wahrnehmen, lassen sich in Teile zerlegen (sei es nur gedanklich), an welchen die betreffende Grösse auch anwesend ist (Wenn man ein Rechteck längs seiner Diagonale in zwei Dreiecke zerlegt, so haben diese Beiden, ebenso wie das Rechteck, eine Oberfläche; sie haben aber keine Diagonallänge).

b. die Grösse, welche dem ganzen Dinge zukommt, verhält sich zu den entsprechenden Grössenexemplaren der Teildinge, wie sich das Ganze zu seinen Teilen verhält (Die Längen der Teilstrecken einer Geraden sind Teile der Länge der Totalstrecke; die Oberflächen der oben genannten Dreiecke sind Teile der Oberfläche des Rechteckes, ihre Peripherieen sind aber nicht Teile der Peripherie des Rechteckes; die Massen der Teile einer Gasmenge sind Teile der Masse der ganzen Gasmenge, ihre Temperaturen lassen aber keine analoge Deutung zu).

Grössen, welche zugleich beide diese Eigenschaften in Bezug auf irgend welche Dinge besitzen können, wollen wir *„additive"* Grössen nennen.

§ 10. Die additiven Grössen sind die ersten, die man „messen", d.h. denen man Zahlen zuzuordnen gelernt hat.

Das Messen einer additiven Grösse kommt in den einfachsten Fällen auf ein Zerlegen dieser Grösse in gleich grosse Teile hinaus und wird längs diesem Wege auf das Zählen zurückgebracht. Somit werden zu dem Anwendungsgebiet der ganzen Zahlen neben den Versammlungen von diskreten Dingen nunmehr auch die kontinuierlichen additiven Grössen hinzugefügt.

Was sind die „gleich grossen" Teile einer Grösse? Es sind jene Grössenexemplare *„gleich gross"*, welche *identischen Dingen* zukommen. Damit ist nicht gesagt, dass die physischen Gegenstände, an welchen wir eine gewisse Grösse vergleichen, in jeder Beziehung „identisch" zu sein brauchen [23]): die Dinge, welche

[23]) Ohne uns hier auf die genauere Bedeutung des Wortes „identisch" einzulassen, dürfen wir wohl sagen, dass dieser Begriff dem Gleichsetzen von zwei Grössenexemplaren *vorangeht.*

dabei maassgebend sind, sind meistens Abstraktionen, d.h. Komplexe von nur einigen Eigenschaften, die wir an den Gegenständen beobachten. So sprechen wir von „identischen" Rechtecken, welche wir von zwei verschieden gefärbten und verschieden schweren Quadern abstrahieren — ihnen schreiben wir „gleiche Oberfläche" zu; von „identischen Seiten", die wir von sonst verschiedenen Figuren abstrahieren — ihnen schreiben wir „gleiche Längen" zu; von „identischen Pendelschwingungen", die wir von dem recht komplizierten Gegenstande: dem Verlaufe der gesammten Lebenserscheinungen abstrahieren — ihnen schreiben wir „gleiche Zeitintervalle" zu; u.s.w., u.s.w.

So wird es möglich auch solchen Grössen, wie z.B. die Peripherieen oder sonstige Längen, die an einer Figur vorzufinden sind, Maasszahlen zuzuschreiben, obwohl diese Grössen in Bezug auf diese Figur als Ganzes nicht additiv sind. Jedoch ist es unmöglich, beim Gleichsetzen von Grössen vom Identischsein irgend welcher Dinge vollständig abzusehen: es würde dann kein Kriterium zum Vergleichen der Grössen übrigbleiben, der Begriff „gleiche Grössen", ja . . . . der Begriff „Grösse" selber würde dann zergehen.

Brüche.

§ 11. Der erste Anlass zum Bilden von Brüchen wird wohl dadurch gegeben, dass man eine Versammlung von Dingen in gleiche Teilversammlungen zerlegen soll, dieses aber nicht geht. Man zerlegt dann einige von den Dingen selber in (merklich) identische Teile. Wie sehr dem Begriffe des Bruches die Idee eines Dinges anhaftet, kann man z.B. an den Worten „ein viertel Apfel" bemerken: selbst unser Einer muss erst nachdenken, bevor er sagt, welcher Grösse hier eigentlich die zahl $\frac{1}{4}$ zukommt.

Aber dieses Teilen von Dingen hat einen Sinn doch nur dann, wenn man irgend eine additive Grösse an ihnen in Betracht ziehen kann[24].

---

[24]) Es ist wahr: prinzipiell wäre es denkbar den Begriff des Bruches samt den elementaren Operationen auf rein formalem Wege einzuführen, etwa so:

x sei die Lösung der Gleichung $ax = b$, wo a und b ganze Zahlen sind, unabhängig davon, ob b durch a teilbar ist oder nicht. In allen Fällen schreiben wir: $x = (b, a)$.

Alle Regeln für die Transformationen der Gleichungen und alle idenaischen Transormationen von Operationen,, welche für ganzzahlige x gelten, sollen auch im allgemeineren Falle gelten (die

Das Messen von additiven Grössen mit Einheiten, welche in den gegebenen Grössenexemplaren nicht aufgehen (was bald unvermeidlich wird, wenn man zwei Grössen mit einander vergleichen will), vertieft den Begriff des Bruches und veranlasst die Ausarbeitung der Operationenbegriffe [25].

Addition und Multiplikation von Brüchen.

§ 12. Niemand wundert sich über die Additionsregel der Brüche:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

Sie kann so leicht „bewiesen" werden! Ja, der Beweis ist kurz und für einen Jeden einleuchtend, *weil* er von den additiven Grössen ausgeht: entschliesst man sich unter der „Addition" stets die Abbildung des Vereinigens von zwei additiven Grössen zu verstehen, so volgt die Regel auf eine unzweideutige Weise. Wer würde aber unter Addition auch etwas Anderes verstehen wollen?

Widerspruchslosigkeit dieser Forderung möge hinterher kontrolliert werden). Dann haben wir:

aus $ax = b$,
wegen $max = mb$, folgt: $(b, a) = (mb, ma)$.
Ferner: aus $ax = b$ und $cy = d$,
wegen $cax = cb$, und $acy = ad$, und $ac = ca$
folgt: $cax + cay = cb + ad$, und
wegen $mx + my = m(x + y)$,
folgt: $ca(x + y) = cb + ad$, d.h. $x + y = (cb + ad, ca)$,
welches im Falle, wo x und y „Brüche" sind, nichts anderes als die bekannte Additionsregel für Brüche ist.

Ferner: $ax = b$ besagt: a mit x „multiplizieren" bedeutet, aus a die Zahl b erhalten. Nun, wenn wir a durch a teilen und das Resultat mit b multiplizieren, so erhalten wir b. Dieses soll den Begriff „Multiplikation mit (b, a)" festlegen, u.s.w.

Wir wissen jedoch, dass es historisch anders gegangen ist. Es sei auch beachtet, dass man auf diesem Wege nicht zu unserem wirklichen Begriffe „Teil der Einheit" kommen würde, auch wenn man diese Wörterverbindung formell gebrauchte.

[25]) Es wird manchmal behauptet, dass die Brüche uns deshalb um soviel vertrauter sind, als die Irrationalzahlen, weil die Messungen uns nur Brüche liefern. Ich glaube, dass man mit demselben Rechte hätte sagen können, dass die Irrationalzahlen uns geläufiger sein dürften, als die Brüche: immerhin, bei jeder einigermaassen aufmerksam ausgeführten Messung bleibt ein Rest da, der vernachtlässigt wird; sollte dieses nicht suggerieren, dass die grössen in vielen Fällen irrationale Werte hätten?! Ich glaube aber, dass die relative Leichtigkeit des Erfassens des Begriffes „Bruch" einfach daran liegt, dass die Bildung eines Bruches auf das Zählen zurückkommt.

Daher bemerkt man nicht, dass dieser Beweis im rein mathematischen Sinne kein Beweis ist. Und für den Anfänger ist eine solche Finesse unnötig.

Geht man zu der Multiplikationsregel über, so tut man es gewöhnlich so, dass ihre mathematische Unbeweisbarkeit bloss gelegt wird. Und doch kann sie mit derselben bindenden Kraft *motiviert* werden, wie die Additionsregel, indem man auch in diesem Falle von den additiven Grössen ausgeht. Man bekommt den Anlass um *Maasszahlen* zu multiplizieren, wenn man an einem und demselben Dinge zwei verschiedene additive Grössen in Betracht zieht (Länge und Oberfläche eines Rechteckes von bestimmter Höhe; Menge und Preis einer homogenen Waare u. dergl.). In vielen Fällen genügen solche Grössen der folgenden Beziehung: wenn a, b, $a + b$ die Maasszahlen der einen Grösse und g_a, g_b, g_{a+b} die entsprechenden Maasszahlen der anderen Grösse sind, so ist

$$g_{a+b} = g_a + g_b \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot (*)$$

Dieses liefert die Möglichkeit die zweite Grösse aus der ersten zu berechnen, wenn man nur ihren Wert g_1 für einen Spezialfall (entsprechend dem Werte $a = 1$) kennt.

Die Beziehung $(*)$ ist unabhängig davon, ob die Zahlen a und b ganze Zahlen sind. *Entschliesst* man sich die Berechnung von g aus g_1 und a in allen Fällen *„Multiplikation"* zu nennen, so hat man damit die Multiplikationsregel für beliebige Werte von a (nicht nur Brüche, sondern auch Irrationalzahlen) festgelegt.

Die Beziehung $(*)$ wird dann durch das *distributive* gesetz der Multiplikation abgebildet.

Entschliesst man sich nämlich stets $g_m =$ „$m \times g_1$" zu schreiben, so hat man:

$$g_{a+b} = (a + b) \times g_1;\ g_a = a \times g_1;\ g_b = b \times g_1,$$

was, in $(*)$ eingesetzt, gibt:

$$(a + b) \times g_1 = a \times g_1 + b \times g_1$$

Mir persönlich scheint es unzweifelhaft, dass es gerade dieser Sachverhalt war, der die Mathematiker des Altertums bei der Ausarbeitung der Multiplikationsregel für nicht ganzzahlige Faktoren leitete. Aber jedenfalls kann der Hinweis auf diesen Sachverhalt als ein überzeugendes Motiv bei der Einführung der Multiplikationsregel auf der Schule dienen.

Das Schema der Ableitung der Regel für die Brüche sieht dann so aus: aus (*) bekommt man leicht

$$g_{a+b+\ldots+m} = g_a + g_b + \ldots + g_m;$$

für $a = b = \ldots = m = 1$ (angenommen, die Anzahl Summanden sei n), hat man dann

$$g_n = n \times g_1;$$

für $a = b = \ldots = m = \frac{1}{k}$ (angenommen, die Anzahl Summanden sei k), hat man

$$g_1 = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \ldots + \frac{1}{k}\right) g_1 = g_{\frac{1}{k}+\frac{1}{k}+\ldots+\frac{1}{k}} =$$

$$= \frac{1}{k} \times g_1 + \ldots + \frac{1}{k} \times g_1 = k \times \left(\frac{1}{k} \times g_1\right).$$

Hier ist das Symbol „$\frac{1}{k} \times g_1$" zunächst rein formal gebraucht.

Aber aus der letzten Gleichung folgt:

$$„\frac{1}{k} \times g_1" = g_1 : k.$$

Und schliesslich

$$\frac{l}{k} \times g_1 = \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + \ldots \frac{1}{k}\right) \times g_1 = \frac{1}{k} \times g_1 + \ldots + \frac{1}{k} g_1 = l \times (g_1 : k).$$

Für die Anfänger kann es so eingekleidet werden: anstatt zu fragen, „was solle die Multiplikation mit einem Bruche bedeuten", lässt man sie an praktischen Beispielen die entsprechenden Berechnungen für ganze Zahlen und für Brüche ausführen und macht sie dann auf das Gemeinsame in allen Fällen aufmerksam, worauf dann die Einführung einer gemeinsamen Benennung folgen kann. Etwa so:

„Ein Kilo Waare kostet a geldeinheiten

10	„	„	„	$10 \times a$
12	„	„	„	$10 \times a + 2 \times a$
10½	„	„	„	$10 \times a$ + soviel als ½ Kilo kostet, d.h. $10 \times a + a : 2$

Wie lautet die Regel für die Lösung dieser Aufgabe?"

Schicken wir den Fall mit 10½ Kilo dem mit ½ Kilo voran, so wird der Name „Multiplikation" auch nicht so paradoxal erscheinen.

Multiplikation mit Irrationalzahlen.

§ 13. Die Festsetzung der Multiplikationsregel für Irrationalzahlen:

$\mathrm{I} \times a = \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{B}_n \times a$, wo I eine Irrationalzahl, B_n — der n — *te* approximierende Bruch ist, erscheint auch als eine Anpassung der Beziehung (*) des vorigen Paragraphen.

Ist $\mathrm{I} = \mathrm{B}_n + \mathrm{R}_n$, so hat man, wegen (*):

$$g_{\mathrm{I}} = g_{\mathrm{B}n} + g_{\mathrm{R}n} = \mathrm{B}_n \times g_1 + g_{\mathrm{R}n}.$$

Dass $g_{\mathrm{R}n}$ mit Vergrösserung van n zusammen mit R_n gegen Null strebt, ist leicht auf übliche Weise zu zeigen — wenn man nämlich in Betracht zieht, dass $g_{\mathrm{A}} > g_{\mathrm{B}}$ ist, falls $\mathrm{A} > \mathrm{B}$ ist.

Negative Zahlen.

§ 14. Man muss gestehen, dass die Einführung der negativen Zahlen und das Festsetzen ihrer Operationenregeln längs einem formalen Wege gegangen ist, und dass der Verband zwischen diesen Zahlen und den Grössen erst viel später eine allgemeine Verbreitung erhielt. In diesem Falle scheinen die Grundgesetze der Operationen, welche für das vorangehende Stadium der Erweiterung des Zahlbegriffes galten, wirklich maassgebend gewesen zu sein bei der Gestaltung der Operationenregeln für das folgende Stadium. In der Tat, ohne die Permanenz jener Grundgesetze wäre ja das Gebrauchen von dem algebraischen Kalkül unmöglich geworden, vor allem die Lösungsmethoden der algebraischen Gleichungen: man könnte von vornherein nicht wissen, ob die Wurzel der gegebenen Gleichung nicht negativ ausfallen würde, aber in einem solchen Falle — ohne die Permanenz der Grundgesetze — wären die üblichen Transformationen, die zur Vereinfachung der Gleichung führen sollten, nicht erlaubt.

Wie die Vorzeichenregel der Multiplikation durch die Permanenz des Distributiven Gesetzes festgelegt wird, kann an dem einfachen Beispiele des § 2 gezeigt werden:

$$(5-2) \times (10-3) = 5 \times 10 - 2 \times 10 - 5 \times 3 + 2 \times 3.$$

Dieses an sich hat nichts mit negativen Zahlen zu machen. Nun kann man aber die Klammerausdrücke und die rechte Seite der Gleichung als algebraische Summen von positiven und negativen Zahlen deuten, also:

$5-2=5+(-2)$; $10-3=10+(-3)$;

$5\times10-2\times10-5\times3+2\times3=(5\times10)+(-2\times3)+(-5\times3)+(2\times3)$.

Wenn man dann die rechte Seite als das Resultat der identischen Transformation

$$(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$$

deutet, so erscheinen die vier Terme der rechten Seite als die resp. Produkte von $(+10)$ mit $(+5)$, $(+10)$ mit (-2) u.s.w., woraus die Vorzeichenregel dann mit Notwendigkeit folgt.

Jedoch darf man nicht leugnen, dass die negativen Zahlen keine so grosse Bedeutung bei der Untersuchung der Naturgesetze erhalten hätten, wenn sie nicht als Abbildungen von Grössen gedeutet werden könnten. Zugleich macht diese Deutung das Aneignen der Lehre von negativen Zahlen für den Anfänger viel leichter [26]).

Komplexe Zahlen.

§ 15. Ebenso wie die negativen Zahlen, sind die *komplexen Zahlen* längs dem formalen Wege eingeführt. Man ist auf sie bei dem Wurzelziehen — und allgemeiner bei dem Lösen der quadratischen Gleichung geradezu *gestossen.* Wenn wir nachgehen, wie

---

[26]) So erscheint es zweckmässig die soeben angefürhte Berechnung durch das euclidische Beispiel der Darstellung der Oberfläche eines Rechteckes durch die bewussten vier anderen Rechtecke zu illustrieren.

Ich möchte aber warnen vor dem Versuche die Vorzeichenregel aus dem Verhalten der Grössen *abzuleiten:* solche Ableitungen enthalten stets ein dubieuses Element, denn von den drei Grössen — den beiden Faktoren und dem Produkte lassen sich schwerlich alle als gerichtete Grössen deuten. So z.B. bei der Berechnung der Oberfläche des euclidischen Rechteckes kann man schwerlich in der Gleichung $(a-b)(c-d)=ac-ad-bc+bd$ die rechte Seite als eine alg. Summe von positiven und *Negativen* Flächen deuten: es sind eher Flächen, die man *abziehen* soll. In dem sehr beliebten Beispiele „Weg = Geschwindigkeit × Zeit" happert es, wenn man an die negative Zeit herankommt, als an „die Zeit, während welcher ein gewisser Weg abgelegt wurde." Dergleiche Beispiele illustrieren wohl, wie praktisch in vielen Fällen die Einführung von negatieven Zahlen sein kann, da sie die Behandlung von allen verschiedenen Specialfällen durch eine gemeinsame Formel zulässt — und als Illustrationen ist es auch wünschenwert sie anzüfuhren. Sie können aber nicht die *Notwendigkeit* der Vorzeichenregel *beweisen*, schon deshalb nicht, weil es auch Fälle gibt, welche zu einer anderen Regel führen würden, wenn man sich an sie anpassen wollte — z.B. die Berechnung des totalen Weges, welchen ein hin- und her maneuvrierender Zug ablegt.

dieses geschah, so finden wir, dass dabei die *Permanenz der Grundgesetze* der Operationen *vorweg genommen* war: ein wesentlicher Moment bei dem Aufstellen der Lösungsformel ist die Anwendung der identischen Transformation

$$(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2.$$

Diese ist aber nur dann gültig, wenn die Transformationen

$$(a + x)\ (a + x) = aa + ax + xa + xx$$
$$ax = xa$$
$$ax + ax = (a + a)x \text{ oder } ax + ax = (1 + 1)ax$$

gelten. Und die resultierende Formel für die Wurzel, welche die Form hat $x = \mathrm{A} + \mathrm{Bi}$, befriedigt die gegebene Gleichung nur weil es angenommen wird:

$$(\mathrm{A} + \mathrm{Bi})\ (\mathrm{A} + \mathrm{Bi}) = \mathrm{A}^2 + 2\mathrm{ABi} - \mathrm{B}^2,$$

welches wiederum auf der Ausbreitung der ursprünglichen Grundgesetze auf die imaginären Zahlen beruht.

Es sei beachtet, dass dieselben quadratischen Gleichungen auch durch andere Zahlen (hyperkomplexe) befriedigt werden, aber zu diesen ist man bei dem Suchen nach den Lösungen nicht gelangt, weil sie eben nicht allen ursprünglichen Grundgesetzen der Operationen folgen.

So wird z.B. die Gleichung

$$x^2 + 2 = 0$$

auch durch $x = i + j$ befriedigt, wo i und j zwei von den drei verschiedenen Einheiten der viergliedrigen hyperkomplexen Zahlen — „*Quaternionen*" — darstellen, die den folgenden Gesetzen genügen:

$$i^2 = j^2 = -1 \ldots\ldots (1)$$
$$i\,j = -j\,i \ldots\ldots\ldots (2)$$

Die Beziehung (2) ist eine Durchbrechung des Kommutativen Gesetzes der Multiplikation. Das distributive Gesetz bleibt für diese Zahlen erhalten. So bekommen wir:

$$x^2 = (i+j)^2 = (i+j)\,(i+j) = i^2 + ij + ji + i^2 = -1 + ij - ij - 1 = -2,$$

also tatsächlich:

$$x^2 + 2 = 0.$$

Auch für die komplexen Zahlen hat man hinterher Objekte in der Erfahrungswelt gefunden welche sie abbilden können. Diese Objekte sind aber keine einfache Grössen, sondern *kombinationen von zwei Grössen.* Dem entsprechend verliert auch die Gegenüberstellung *„grösser—kleiner"* ihren Sinn; auf der kontinuierlichen Geraden, deren Punkte die kontinuierliche Folge von den vorher eingeführten — reellen — Zahlen darstellen, gibt es keinen Platz für die komplexen Zahlen.

Hyperkomplexe Zahlen.

§ 16. Beim Einführen von den komplexen Zahlen hatte man ohne jeden Skrupel angenommen, dass ihre Rechenoperationen den üblichen identischen Transformationen genügten, also, wie wir heute sagen können, der Permanenz der Grundgesetze entsprechen; und dieses hat sich gut bewährt. A priori hätte man jedoch nicht so sicher davon sein sollen. Dieses hat die Weiterentwickelung des Zahlbegriffes gezeigt.

Es scheint Gauss [27]) als erster die Frage aufgeworfen zu haben, ob man nicht auch drei- und mehrgliedrige Zahlen, als lineare Verbindungen von entsprechender Anzahl von Einheiten mit reellen Koeffizienten (analog zu den zweigliedrigen komplexen Zahlen mit den „Einheiten": 1 und *i*) einführen könnte, welche zur Abbildung der drei- und mehrdimensionalen Mannigfaltigkeiten dienen könnten, so wie die komplexen Zahlen zur Abbildung z.B. der Punktkoordinaten der Ebene dienen. Er fand, dass diese Idee verworfen werden sollte aus dem Grunde, weil solche Zahlen in den gewöhnlichen algebraischen Kalkül nicht hineinpassen würden: es wäre unmöglich die Rechenregeln für sie so festzulegen, dass sie zugleich allen Grundgesetzen der Algebra genügen könnten.

Später nahm sich Weierstrass [28]) desselben Problemes an. Er stellte fest, dass man doch wohl für solche Zahlen jene Grundgesetze aufrecht erhalten könnte, wenn man nur bereit wäre zugleich etwas anderes aufzugeben: die Eindeutigkeit der Teilungsoperation. Solche Zahlen würden allerdings nicht dem Zwecke dienen, von welchem Gauss ausgegangen war.

---

[27]) Gauss [1831] *Werke,* Bd. 2, p. 178.
[28]) Weierstrass, *Zur Theorie der aus n Haupteinheiten gebildeten komplexen Grössen.* Gött. Nachr. [1884].

Inzwischen wurden mehrgliedrige Zahlensysteme aufgebaut, welche wohl den Sachverhalt auf gewissen Forschungsgebieten abbildeten, obwohl ihre Rechenoperationen nicht allen unseren alten Grundgesetzen gehorchten [29].

Es wäre auch die folgende Frage möglich: die Gleichungen ersten Grades mit reellen Koeffizienten haben nur [30]) dann stets eine Wurzel, wenn man die negativen Zahlen einführt; die Gleichungen zweiten Grades verlangen zu diesem Zwecke die Einführung von komplexen Zahlen. Wird es nicht auch weiter so gehen, dass man stets ein n-gliedriges Zahlensystem einführen muss, will man, dass keine der Gleichungen n-ten Grades ohne Wurzel bleibt?

Doch wissen wir, dass dem nicht so ist: wie bereits d'Alembert [1746] und später auf vielfache Weise Gauss [1799... 1842] bewiesen, genügt die Gesamtheit der gewöhnlichen komplexen Zahlen um darunter Lösungen von Gleichungen beliebig hohen Grades zu finden. Uebrigens, wie wir soeben besprochen haben, kann kein System von drei- oder mehrgliedrigen Zahlen konstruiert werden, welches „algebraisch" im Sinne unserer gewöhnlichen Algebra wäre.

Abschliessende Bemerkungen.

§ 17. Die Herkunft der Zahl- und Operationenbegriffe liegt in unserer praktischen Erfahrung. Die Zahlen samt ihren Rechenoperationen erscheinen zunächst als Abbildungen des Sachverhaltes an Versammlungen von diskreten Dingen und an kontinuierlichen additiven Grössen.

Der Gebrauch von Buchstaben bei der Formulierung der Aufgaben und deren Lösungen führt dann längs einem formellen Wege zur Weiterentwickelung des Zahlbegriffes (negative und komplexe Zahlen), wobei dieselben Grundgesetze der Operationen automatisch vorweg angenommen werden. Doch ist die Entwickelung in dieser Richtung durch die Einführung von den komplexen Zahlen abgeschlossen.

---

[29]) Vergl. die bahnbrechende Arbeit von Hamilton, *Lectures on Quaternious* [1853]. Für das Weitere: L. E. Dickson, *Linear Algebras* (Cambridge Tracts in Mathem and Math. Phys. 1914).

[30]) Wenn man nur an Zahlensysteme denkt, welche stets denselben Grundgesetzen gehorchen.

Die darauf folgende Erweiterung des Zahlbegriffes (eine beträchtlich mehr bewusste und systematische) konnte nur unter dem Verzichte auf einige von den Gesetzen der gewöhnlichen Algebra geschehen.

Die negativen und die komplexen Zahlen haben hinterher eine praktische Interprätation gefunden, aber auch einige von den mehrgliedrigen Zahlensystemen erweisen sich als Abbildungen des Sachverhaltes an gewissen Forschungsgebieten.

In dem Unterrichte können manche Schwierigkeiten bei der Erweiterung des Begriffes „Multiplikation" vermieden werden indem man die Schüler so an sie heranführt, dass die verschiedenen Fälle der Multiplikation als die Abbildung einer allgemeinen Beziehung zwischen zwei additiven Grössen gesehen werden — jener Beziehung, welche durch das distributive Gesetz der Multiplikation wiedergegeben wird.

23. XII. 36. Leiden. T. EHRENFEST—AFANASSJEWA.

ENIGE OPMERKINGEN OVER DE THEORIE VAN DE WORTELVORMEN

DOOR

E. W. BETH.

De theorie van de wortelvormen is, evenals de nauw verwante theorie van de complexe getallen, een deel van de algebra, waarvan de behandeling nog al eens tot moeilijkheden aanleiding geeft, zoals o.m. blijken kan uit de polemieken, die van tijd tot tijd over deze onderwerpen verschijnen. Men zie b.v. Wiskundig Tijdschrift II en III, Euclides IV en X. Het komt me voor, dat het vaak diepgaand verschil van opvatting, dat bij deze discussies aan de dag treedt, en dat ook in de zeer uiteenlopende behandeling van de genoemde onderwerpen in de bestaande leerboeken tot uitdrukking komt, niet alleen voortkomt uit een verschil in uitgangspunt op practisch-didactisch terrein (b.v. ten aanzien van de eisen, die men aan de wiskundige exactheid moet en mag stellen), maar dat het evenzeer een uitvloeisel is van de omstandigheid, dat men hier ook op theoretisch-mathematisch gebied reeds van onderscheidene gezichtspunten kan uitgaan. Deze gezichtspunten, die ik in het volgende zal uiteenzetten, hebben alle hun bijzondere waarde, maar ze hebben zeer verschillende draagwijdte en leiden tot verschillende behandelingswijzen. Houdt men ze niet scherp uit elkaar, dan loopt men groot gevaar, tot allerlei inconsequenties en misvattingen te komen.

1. *Het abstract-algebraïsch gezichtspunt.* Dit gezichtspunt is langen tijd overheersend geweest. Door het ontstaan van de verschillende theorieën van het reële getal (Weierstrass, Cantor, Dedekind e.a.) is het enigszins op de achtergrond geraakt; in de laatste tijd komt het weer meer naar voren.

In de abstracte algebra wordt een getallenlichaam (d.w.z., een getallensysteem, waarbinnen optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling door een van nul verschillend getal onbeperkt uitvoerbaar zijn; de rationale getallen vormen een lichaam, de gehele getallen niet) uitgebreid door *adjunctie* van een niet tot dat lichaam behorende grootheid. Deze methode wordt in de bestaande leerboeken veelal toegepast bij de invoering van de complexe getallen. Men adjungeert dan de grootheid i aan het lichaam van de reële getallen en wel door een complex getal A te definiëren als gericht paar reële getallen (a, α) met de rekenregels

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta),$$
$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = (ab - \alpha\beta, a\beta + \alpha b),$$

Men bewijst, dat de complexe getallen een lichaam vormen en duidt gemakshalve (a, α) aan als $a + \alpha i$.

Op volkomen analoge wijze kan men b.v. $\sqrt{2}$ aan het lichaam der *rationele* getallen adjungeren. Men beschouwt daartoe de gerichte paren rationele getallen (a, α) met de rekenregels

$$(a, \alpha) + (b, \beta) = (a + b, \alpha + \beta)$$
$$(a, \alpha) \times (b, \beta) = (ab + 2\alpha\beta, a\beta + \alpha b),$$

Gemakkelijk bewijst men, dat ook deze getallen een lichaam vormen, dat verder de getallen $(a, 0)$ afzonderlijk ook een lichaam vormen met de structuur van het lichaam der rationele getallen en dat $(0,1)^2 = (2,0)$. Het ligt daarom voor de hand, te schrijven $(0,1) = \sqrt{2}$ en $(a, \alpha) = a + \alpha\sqrt{2}$.

Men verkrijgt op deze wijze een getallenlichaam met de eigenschap, dat elke vierkantsvergelijking met rationele coefficienten en met een discriminant van de vorm $2d^2$ (d rationeel) twee oplossingen toelaat.

Op analoge wijze kan men elke vierkantsvergelijking (en zelfs elke derde en vierdegraadsvergelijking) door adjunctie van geschikte wortelgrootheden tot oplossing brengen. Zelfs kan men, uitgaande van het lichaam der rationele getallen, door herhaalde adjunctie van geschikte grootheden, een getallenlichaam A opbouwen met de eigenschap, dat elke vergelijking van de $n$de graad met coefficienten uit A in A een wortel bezit (lichaam der algebraïsche getallen).

Hiermee is wel aan de uiterste eisen van de algebra voldaan. De toepassing van de algebra op de meetkunde is nu echter niet onmiddellijk mogelijk. Immers, van het lichaam der algebraïsche getallen kan voor het meten van lijnstukken, hoeken, oppervlakten, enz. alleen het systeem der positieve algebraïsche getallen gebruikt worden.

Men moet dus nu trachten, het systeem der positieve getallen algebraïsch te karakteriseren en daarna de positieve getallen te „ordenen", d.w.z. de betrekkingen „groter" en „kleiner" zo vast te leggen, dat de gewone eigenschappen ervoor gelden. Eerst dan kan men de positieve algebraïsche getallen overbrengen op de „getallenrechte", zodat meting van lijnstukken (voorzover ze, uitgaande van de gekozen lengte-eenheid, door algebraïsche constructie kunnen worden verkregen) mogelijk is. Dit alles is echter verre van eenvoudig.

2. *Het gezichtspunt van de theorie der reële getallen.* Men kan de rationele getallen ordenen en daarna onmiddellijk de reële getallen invoeren (b.v. volgens D e d e k i n d, als „snede" in het gebied der rationele getallen, of volgens C a n t o r, als klasse van onderling concurrente „fundamentaalrijen"; wenst men geen hoge eisen van exactheid te stellen, dan brengt men de rationele getallen op de „getallenrechte" over en maakt dan het „bestaan" van reële, niet-rationele getallen, als $\sqrt{2}$, plausibel) en de regels voor het rekenen met reële getallen vastleggen. Daarna kan men de oneven-machtswortels uit reële getallen en de evenmachtswortels uit niet-negatieve reële getallen op de bekende wijze als reële getallen definiëren.

Wanneer men zich alleen of hoofdzakelijk voor de algebraïsche eigenschappen van de wortelvormen interesseert, is deze behandeling niet volkomen bevredigend. Aan de ene kant immers bevat het continuum der reële getallen „te veel", nl. die getallen, die niet door algebraïsche bewerkingen uit de eenheid zijn af te leiden (b.v. π), aan de andere kant „te weinig", omdat de negatieve getallen er geen evenmachtswortels bezitten.

Hiertegenover staan grote voordelen. Met betrekking tot het systeem der reële getallen geldt immers de stelling van B o l z a n o-W e i e r s t r a s s: elke begrensde oneindige verzameling bezit (minstens) een verdichtingspunt (dit geldt niet voor het systeem der reële algebraïsche getallen; immers, stelt I_n de omtrek voor van de ingeschreven regelmatige n-hoek van een cirkel, dan bezit de rij

$l_1, l_2, l_3, \ldots, l_n, \ldots$ geen limiet, en, daar hij aan het convergentiekenmerk van Cauchy voldoet, evenmin een verdichtingspunt binnen het systeem der reële algebraïsche getallen), zodat men zonder moeite de theorie van de limieten kan ontwikkelen, waarop o.a. de theorie van de logarithmen berust.

Verder is het systeem der reële getallen van nature *geordend;* deze eigenschap levert de grondslag voor de decimale benadering van de reële getallen (wortels, logarithmen, goniometrische verhoudingen) en voor de aansluiting bij de meetkunde (berekening van lengten en oppervlakten).

3. *Het gezichtspunt van de theorie der complexe functies.* Men kan het gebied der reële getallen uitbreiden tot dat van de complexe en onmiddellijk overgaan tot het formuleren van het begrip „analytische functie van een complexe variabele" (Weierstrass). Door *omkering* van een analytische functie verkrijgt men een nieuwe analytische functie. Zo levert de omkering van de functie $z = w^2$ de functie $w = \sqrt{z}$; deze functie is, als bekend, tweewaardig (beter: eenwaardig op een tweebladig oppervlak van Riemann boven het z-vlak). De wortelvormen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, . . . ontstaan nu als waarden van de functie w, wanneer men voor het argument z de waarden 2, 3, . . . substitueert. Deze gedachtengang heeft blijkbaar geleid tot de behandeling van de wortelvormen, waarbij men aan elke vierkantswortel twee complexe waarden toekent (en algemener: aan elke $n$de machtswortel n). Deze handelwijze voert niet tot tegenstrijdigheden, zolang men consequent is, maar consequentie leidt hier tot grote moeilijkheden, waarvan ik er één wil aangeven; bezit $\sqrt{2}$ twee waarden, dan bezit $\sqrt{(2+\sqrt{2})}$ er vier, $\sqrt{\{2+\sqrt{(2+\sqrt{2})}\}}$ zelfs acht, enz. Het schijnt mij toe, dat men deze moeilijkheden slechts zeer ten dele ontgaat, wanneer men, zoals Prof. Schuh aangeeft (Wisk. Tijdschr. III, blz. 172) onder $\sqrt{z}$ een tweewaardige functie verstaat, maar onder $\sqrt{2}$ een positief getal. Men mag dan immers $x = 9$ eigenlijk niet aanvaarden als wortel van de vergelijking

$$x + \sqrt{x} = 6,$$

terwijl het, zoals Prof. Schuh opmerkt (t.a.p. blz. 6), uit het gezichtspunt van de theorie der complexe functies voor de hand ligt, dit wèl te doen. Echter, dan zou men er toe komen, $x = 9$ te aanvaarden als *wortel* van de vergelijking

$$\sqrt{x} = -3,$$

terwijl -3 geen *waarde* van $\sqrt{9}$ is!

Het behoeft ons niet te verwonderen, dat men bij deze wijze van behandeling van de wortelvormen tot allerlei inconsequenties pleegt te komen, waarover ik dadelijk nog iets zal zeggen.

Ik wil nl. tot slot laten zien, dat de verschillende hier besproken gezichtspunten inderdaad van invloed zijn geweest op de behandeling van de wortelvormen in de leerboeken en op de discussies over dit onderwerp. Het is niet mijn bedoeling, op bestaande leerboeken kritiek te oefenen (al zal ik op enkele zwakke punten moeten wijzen), maar alléén, de oorzaken aan te wijzen, die soms tot minder bevredigende behandeling hebben geleid.

Het eerste gezichtspunt overheerst in die leerboeken, die als theorie van de wortelvormen hoofdzakelijk de algebraïsche rekentechniek behandelen. Een opgave als: herleid

$$\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{\sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

moet dan blijkbaar zó worden opgevat: aan het systeem der rationele getallen zijn de irrationaliteiten $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$ geadjungeerd, zodat een nieuw getallenlichaam is verkregen; druk de te herleiden vorm lineair uit in die irrationaliteiten met rationele coefficienten.

Een dergelijke methode van behandeling is op zichzelf wetenschappelijk onaanvechtbaar, maar ze verschaft, wanneer men (zoals gebruikelijk is) de ordening van de reëele algebraïsche getallen buiten beschouwing laat, geen grondslag voor de meetkundige toepassingen; daar voor het lichaam van de algebraïsche getallen de stelling van Bolzano-Weierstrass niet van kracht is, is de invoering van de logarithmen hier niet verantwoord.

Het tweede gezichtspunt is in ons land het eerst door N. L. W. A. Gravelaar op de voorgrond geplaatst. Het komt uit den aard der zaak in die leerboeken tot uitdrukking, die de algebra voordragen als onderdeel van de theorie van de functies van een reëele veranderlijke en die een belangrijke plaats toekennen aan de behandeling van grafieken en limieten.

Het derde gezichtspunt leidt o.m. tot de zg. „ruime opvatting” ten aanzien van de irrationele vergelijkingen, die verdedigd is door Prof. Schuh (Wisk. Tijdschr. III blz. 2) en door den heer Wijdenes (Euclides IV blz. 95). Zoals ik reeds opgemerkt heb, leidt ook dit standpunt, mits consequent toegepast, tot geen tegenspraak. Zo moet het voorbeeld, waarmee Prof. Wolff inconsequente toepassing karakteriseert, t.w.

$$1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1,$$

bij consequente toepassing luiden

$$1 = \pm\sqrt{1} = \pm\sqrt{(-1)(-1)} = \pm\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \pm 1,$$

zodat de tegenspraak verdwijnt.

Is men niet consequent, dan komt men voortdurend in moeilijkheden. Dit is b.v. het geval in een bekend leerboek der algebra, dat eerst aan evenmachtswortels twee waarden toekent, daarna afspreekt, als evenmachtswortel alleen de positieve waarde te beschouwen, en dat even verderop zonder beperking stelt

$$\sqrt[3]{+a} = \sqrt[12]{+a^4}, \qquad \sqrt[5]{+ab^2} = \sqrt[30]{+a^6b^{12}},$$

dit in strijd met de afspraak, want voor negatieve a zijn de linkerleden beide negatief, terwijl de rechterleden evenmachtswortels uit positieve getallen voorstellen, en dus positief zijn.

Het bovenstaande mag niet worden beschouwd als een pleidooi voor één der besproken gezichtspunten of voor een bepaalde wijze van behandeling. Ik heb alleen willen wijzen op het bestaan van verschillende houdbare gezichtspunten, op de draagwijdte van elk en op de noodzakelijkheid, uit die gezichtspunten een keus te doen en aan het gekozen gezichtspunt consequent vast te houden.

DE WISKUNDE OP DE M. M. S. [1])

De Wiskunde op de M. M. S. verheugt zich sinds enige maanden in de algemene belangstelling. En waar er al zoveel, misschien te veel over geschreven is, lijkt het wel onnodig er nog een artikel aan te wijden. Doch mijn doel is te laten zien, hoe wiskunde op de M. M. S. kan gegeven worden, zodat het niet alleen geen nutteloze „kwelling" voor de meisjes is, maar van positief vormende waarde.

Ik wil antwoord geven op twee vragen, die op het ogenblik in het brandpunt staan.

1. Welk nut heeft de wiskunde als onderwijsvak voor het meisje?
2. Hoe kan wiskunde aan de M. M. S. gegeven worden?

Uit 'n artikel in de Maasbode van 24 Sept. 1936 door Dr. J. de Vreese S.J., haal ik hier aan „Omdat wij voor „de ontwikkeling van die specifieke eigenschappen van gemoed en beschaving, die de kracht van de vrouw zijn, niet zo bijster veel, om niet te zeggen, bijzonder weinig, vruchten plegen te zien van het onderwijs in deze vakken . . . ."

En uit het slot van dit artikel in de Maasbode van 25 Sept. „Het gaat bij de opvoeding van het meisje vooral om de ontwikkeling en vorming van het gemoed, het hart en de goede smaak, de fijne zin en de echte beschaving. Wat voor bijzondere, juist op de vrouw en het meisje aangepaste voordelen het wiskunde-onderwijs voor deze vorming bezit, wat vrouw en wiskunde voor onderlinge verwantschap hebben, is voor ons onvindbaar."

Wij zijn blij Dr. de Vreese dan te kunnen wijzen op een onregelmatigheid in de redenering. Als de vrouw, dus het meisje, alleen bestond uit gemoed en hart, dan zouden wij die verwantschap ook niet zo duidelijk vinden, doch de vrouw, kunnen we u verzekeren,

---

[1]) Met toestemming van de schrijfster overgenomen uit „Sancta Teresia", orgaan der R. K. middelbare meisjesscholen.

bezit ook een hoofd, dus verstand, en voor de ontwikkeling van dat vrouwenverstand is de wiskunde *mits goed onderwezen* van onnoemelijk *groot* belang. Dr. de Vreese vermag niet in te zien, dat het voordeel van ontwikkeling door wiskunde zou uitgaan boven zoveel andere kundigheden en vaardigheden, die speciaal aan de ontwikkeling van het vrouwelijk karakter en het praktisch leven later ten goede komen."

Welke die kundigheden en vaardigheden zijn, wordt niet gezegd. We mogen dus veronderstellen dat bedoeld worden: Godsdienst, handwerken, tekenen, schilderen, de talen, Kerklatijn, plant- en dierkunde, geschiedenis van Kerk en staat, aardrijkskunde, gymnastiek, rhythmische en volksdansen, koken.

Wel, niemand ontkent de hoge waarde van die vakken en onze M. M. S. trekt voor *al* deze vakken veel uren uit. Voor Kerklatijn 8 uur. En voor Latijn in de hele school zelfs 12 uur, want ook Kerklatijn vraagt kennis van buigingsvormen, en voor het behandelen der elementen van die taal wordt nog 4 uur besteed.

Doch we zijn beslist van mening, dat 12 uur wiskunde, d.i. over 5 klassen verdeeld, nog geen 2½ uur per week *gemiddeld,* (de verdeling is in de praktijk anders) wel nodig zijn voor de ontwikkeling van het verstand, vooral in onze tijd, waarin het van zo groot belang is zuiver te redeneren, en zelfs te kunnen redeneren, om je niet door een voorstander van de eerste de beste partij van je stukken te laten praten. Dit is een van de grote voordelen van het wiskundeonderwijs voor meisjes: het leert haar redeneren!

O ja, men bepleit het nut van een goede brief te kunnen schrijven, een artikel, zelfs een boek — maar een van de grote klachten bij het corrigeren der opstellen is: er is geen logica in de gedachtengang; er is geen samenhang van ideeën, „alles hangt als los zand aan elkaar" d.w.z. ze kunnen niet redeneren.

En *de* remedie daarvoor is niet: het dikwijls doen; het veel lezen etc.; het doeltreffende middel is: *leren redeneren,* de gedachten leren beheersen en ordenen; en op het juiste ogenblik logische gevolgtrekkingen maken en dat leert men door de wiskunde.

Wiskunde klinkt zo gewichtig. Bij het woord wiskunde stelt men zich direct ingewikkelde figuren en vormen voor. Zeker, die komen voor op Gymnasium en H. B. S., waar men de wiskunde studeert als voorbereiding voor latere studie of eenvoudig, omdat het een examenvak is en men op de examendag bepaalde vraagstukken moet kunnen oplossen.

Wij willen hierover geen oordeel vellen, maar op de M. M. S. is het *doel* van het wiskunde-onderwijs een geheel ander. Het hoort op de M. M. S. thuis, juist om de vormende waarde, ten eerste van het verstand, ten tweede van het karakter.

Ik zou dit graag met een heel eenvoudig voorbeeldje willen illustreren.

Ik sta in de 1e klas in het 1e trimester van het schooljaar: meetkundeles. De boeken gaan open; aan de beurt is het volgende vraagstukje. „Als men bij snijding van 2 evenwijdigen door een derde een paar binnenhoeken aan dezelfde kant van de snijlijn middendoor deelt, dan staan de deellijnen loodrecht op elkaar. Na het lezen van de som kijken de meeste leerlingen me aan met een blik van: „Wat bedoelen ze toch?"

Nu gaan we kalm (want we hebben niets geen haast, er behoeft geen bepaalde hoeveelheid stof afgewerkt te worden voor 'n examen!) ontleden.

Als men, bij snijding van 2 evenwijdigen door een derde ... Wat moeten we dus tekenen?

Antwoord: 2 evenwijdigen. Hoe doe je dat? Met driehoekjes. Best. En dan? Snijden door een derde. Waar moet je op letten? Dat je niet loodrecht snijdt, want dat is een bijzonder geval.

Een tekent op het bord. De anderen op papier. Wat nu? De binnenhoeken middendoor delen. Wordt gedaan. O, weet er een: ze staan loodrecht ... Waarom? Kun je zien. Maar anderen weten gauw te verbeteren: alles moet *bewezen* worden.

Nu gaan we de gegevens zoeken en opschrijven. Wat moet bewezen worden? Dat ze loodrecht staan. Hoe schrijf je dat anders. De hoek is recht. Hoe groot? 90°.

En als alles getekend is en „gegeven" en „te bewijzen" geordend zijn, weten velen het bewijs te vinden.

Een doet het op het bord. Die wil weer beginnen met: die hoek *is 90°* en zet daardoor de hele redenering op zijn kop. Die wordt erop gewezen. „Naar de vuurtoren" (het „te bewijzen") kijken. Daar moet je naar toe, dus daar kun je niet vanuit gaan.

Een ander wil te vlug besluiten: die wordt eraan herinnerd, dat ze „een sport van de ladder overslaat."

Een derde roept direct, als no. 1 begint uit te leggen, dat het „anders" moet. Die wordt aan het verstand gebracht, dat er méér wegen naar Rome leiden, en dat men een anders redenering moet waarderen, zolang ze waar is.

Wat zijn nu de voordelen van het behandelen, het samen bespreken en vinden van dergelijke vraagstukjes? Brengen ze zoveel *praktische* kennis aan?

Neen, maar *daar is het ook niet om te doen.*

Maar ze leren:

1. Niet op het eerste gezicht te zeggen „dat kan ik niet" — want de meisjes ondervinden, dat ze na wat denken het wèl kunnen. Ze leren dus *denken,* aan eigen kunnen geloven.

2. Haar gedachten regelen — ordenen; niet direct wat haar het eerst in het hoofd komt neer te zetten. Ze leren dus haar gedachten *beheersen.*

3. Wachten voor ze iets constateren; zien, dat wat oppervlakkig zo *lijkt,* niet altijd zo *is.* Ze leren dus voor haar leven, de zaken van alle kanten bekijken en niet oordelen afgaande op eenzijdige inlichtingen.

4. Dat men langs verschillende redeneringen tot de waarheid kan komen. En wie daarvan goed doordrongen is, zal in het leven begrijpen, dat een ander geen ongelijk behoeft te hebben, alléén omdat men zelf gelijk heeft.

5. Dat alle redeneringen niet goed zijn — dat één kleine fout daarin gemaakt — alles bederft; ze leren zelf vinden, waar de redeneringsfout zit.

6. Ze leren doorzetten — *willen;* want ze willen „hem hebben". En is dat niet van grote waarde voor het *karakter*? We hebben in onze tijd behoefte aan mensen (ook vrouwen!) die zuiver redeneren; eigen fouten inzien; bedaard te werk gaan; zich beheersen kunnen; werk van anderen weten te waarderen en doorzettingsvermogen hebben.

Het is onmogelijk, dunkt me, dat iemand werkelijk zou menen, dat je al die eigenschappen van de wieg af reeds in voldoende mate ontwikkeld ter beschikking hebt.

Ze moeten wel degelijk ontwikkeld worden, en ik kan geen ander vak van onderwijs vinden, dat daartoe zo geschikt is als wiskunde *mits* het onderwijs daarin niet ontaardt in opeenstapeling van vluchtige kennis, maar gegeven wordt *als middel,* niet als doel in zichzelf.

Dr. de Vreese zegt: „terwijl bijna ieder die Latijn en Grieks heeft geleerd er zijn leven lang voldoening van heeft; en zovelen van hun wiskunde geen spoor van voordeel kunnen ontdekken in hun later leven." We zouden zeggen hier zit de fout niet in de wiskunde, doch in den persoon. Doorgaans zal die persoon alle 3 vakken hebben bestudeerd en de voordelen van „redeneren geleerd te hebben etc." schrijft hij nu alleen aan Latijn en Grieks toe, waarschijnlijk ook omdat die kennis hem bovendien in staat stelt de klassieke werken te lezen, dus meer *tastbare* resultaten nalaat, wat bij wiskunde uit de aard der zaak niet het geval kan zijn. En als de persoon in kwestie niet die oude talen studeerde — weet hij, hoe het met zijn redeneerkracht, doorzettingsvermogen etc., zou gesteld zijn als hij *niet* wiskundig was getraind?

En het levert geen „kwellingen voor het meisje op, dat al hun schooljaren vergalt."

Geen kwelling: want héél velen krijgen er plezier in, zélf te vinden; als de docent dat zelf gevondene niet al te kritisch bekijkt en weet te waarderen alleen de moed en de lust al om zelf te vinden. Ik behandel dikwijls een vraagstukje op het bord. Ieder weet iets — en eindelijk de *laatste* vindt de uitkomst!

Maar dan herinneren we ons, voor we aan het volgende vraagstuk gaan, wie er allemaal *iets* aan gedaan hebben — en die worden opgetekend; want die hebben ook zelf gevonden. En voor de ouders? — is het absoluut geen kwelling op *deze* manier: als de kinderen alléén als huiswerk krijgen, wat ze nu wèl *kennen.* Meetkunde leent zich slecht voor huiswerk; dat *doen* we *samen* in de klas. En Algebra daar zijn ze na een tijdje dol op.

En de minst intelligente leerlinge weet je tenslotte met een vaste overtuiging te vertellen, dat Algebra het vak is, dat ze het beste kent.

Dr. de Vreese zegt o.a. „wij constateren dat tot die ontwikkeling (van die specifieke eigenschappen van *gemoed* en *beschaving*) andere vakken en leerstof heel wat meer plegen bij te dragen.

Daarmee stemmen we weer geheel in; maar ik zou geen vak kunnen aanwijzen, dat (Latijn en Grieks hier buiten beschouwing gelaten) het *verstand* zo ontwikkelt als de wiskunde en dat de plaats daarvan zou kunnen innemen.

Geven we dus toe, dat het *meisje* verstand *bezit,* en de *vrouw* haar verstand moet weten te *gebruiken,* dan moeten we als we logisch willen blijven, ook de noodzakelijkheid van de ontwikkeling van dat verstand erkennen en dus het nut van wiskunde-onderwijs.

En nu het „mits!"

„Zonder vervulling van deze conditie" zegt Dr. de Vreese, „mogen we dus Inspecteur Bolkenstein tot onzen medestander rekenen." Het antwoord hierop is: en *ons* ook héél zeker.

Veel berust op dat *mits.*

En die conditie is *niet on*vervulbaar. Met de 3 door Dr. de Vreese gestelde eisen zijn we het volkomen eens.

Met het samenstellen van een leerboek voor M. M. S. werd begonnen; en de samensteller zond ons een korte inhoud van het boek in wording toe. En wij hebben geantwoord, dat we het ongeschikt vinden, omdat het veel te veel bevat. Wij zijn ook tegenstander van *veel* op dat gebied.

„Ik begrijp niet wat Dr. de Vreese bedoelt met een schoolboek, dat niet dood en dor is, maar levensvol en dat daardoor een levensboek kan worden." Slaat dit ook op een wiskundeboek? Dan moet ik wel toegeven dat een „levensvol" boek, b.v. met aangrijpende treffende verhalen en platen en verhandelingen, voor wiskunde wel onmogelijk is. Maar dat de wiskunde „smakelijk" kan *gedoceerd* worden is een feit. En dan zijn wij het er toch ook wel over eens dat een combinatie Gym., H. B. S. en M. M. S. geen *ideale* toestand is. De M. M. S. is bedoeld als een *zelfstandige* school en niet als een afdeling van een reeds bestaande H. B. S. En dat altijd het gevaar — en gróót gevaar bestaat — dat de docent, die aan beide scholen les geeft, de wiskunde op de M. M. S. zal maken tot een „beknopt" H. B. S. program, dat weten we, en dat gaat recht tegen de bedoeling van de M. M. S. in. Dit vak moet aan de M. M. S. geheel *anders* onderwezen worden en de abstracte onderwerpen, die *te* veel van, zoals Inspecteur Bolkenstein zegt, het op het concrete aangelegde vrouwelijke intellect vragen, behoeven niet aangeraakt te worden; b.v. oneigenlijke machten, logarithmen; meetkundige en rekenkundige reeksen; vergelijkingen met meer dan 2 onbekenden; imaginaire getallen, etc.

Dat Dr. de Vreese zich „moeilijk illusies kan maken over de geheel eigen methode" op de M. M. S. en slechts „een zeer gering aantal docenten in staat acht om deze vakken te doceren op de voor het meisje nuttige wijze" spijt me, doch kan ik me voorstellen, want Dr. de Vreese zal zelf wel nooit een wiskundeles hebben gegeven.

Hebben we voor wiskunde 12 uur nodig?

Ja, maar onder wiskunde verstaan we rekenen, en wiskunde d.w.z. 1 meetkunde; 2 algebra; 3 eenvoudige theorie der rekenkunde, niet bestaande uit eigenschappen *leren* en *bewijzen,* doch leren *toepassen;* dit is absoluut nodig als inleiding tot de verschillende onderwerpen uit de algebra; 4 cijferen, hetgeen voor de *praktijk* nodig is. Dr. de Vreese vindt 't voldoende, „als het meisje zich maar weet weg te cijferen." Als men op dat standpunt gaat staan, begrijpen we niet, dat Dr. de Vreese een Middelbare Meisjesschool wenst; want dergelijke dingen kan men van een goede moeder ook leren. Daar behoef je geen *middelbaar onderwijs* voor te genieten.

We zijn het er beslist mee eens, dat onderwijs zonder opvoeding *niets* waard is; doch we wensen toch ook nog wel wat onderwijs voor onze meisjes, en *goed* zelfs.

Je kunt tenslotte ook zeggen, als het meisje maar thee kan schenken, is het voldoende.

Maar ik beklaag dan toch den man, die een meisje trouwt, dat niet meer cijferen kan dan de doorsnee-leerlinge die wij in de 1e klas der M. M. S. krijgen; hoe zal ze haar huishoudgeld beheren, of moet de vrouw daar ook onbekwaam toe geacht worden? En denk niet, dat ze die kennis wel op de Lagere school hebben opgedaan. De ondervinding leert anders.

En zijn nu die *12* uur nodig?

Ja! We zullen in korte woorden trachten te zeggen, hoe *wij* het wiskunde-onderwijs hebben ingericht aan *onze* M. M. S.

De wiskunde wordt uitsluitend gegeven in de Ie en IIe klas. In de IIIe klas begint de natuurkunde.

1e klas 6 uur		2e klas 6 uur	
Cijferen . .	1 uur	Algebra . .	3 uur
Rekenkunde	1 uur	Meetkunde .	
Algebra . .	2 uur	Rekenkunde	3 uur
Meetkunde .	2 uur	Cijferen . .	

De Ie klas werkt als regel 2 keer 3 kwartier buiten de lessen (dus $1\frac{1}{2}$ uur z.g. huiswerk).

De IIe klas werkt *niet* buiten de lessen.

Nu de leerstof en de boeken:

We gebruiken in beide klassen:

„Klein Leerboek der Algebra", Ie deel door P. Wijdenes, een boekje van 128 blz. Herhalingen inbegrepen. Dit behandelt: De hoofdbewerkingen op een glasheldere wijze en zeer eenvoudig.

Dus optelling, aftrekking, vermenigvuldiging, gedurige producten en machten, deling. Eenvoudige vergelijkingen.

Tot zover gaan we in klas I.

In klas II uit dat zelfde boek:: merkwaardige producten; ontbinden in factoren; G. G. D. en K. G. V., breuken.

(De stof behoeft niet af!)

De twee overige hoofdstukjes laat ik weg, doch behandel de worteltrekking op heel eenvoudige manier; waarbij de *leerlingen* geen boek gebruiken.

Voor Meetkunde: in beide klassen.

„Beknopte Meetkunde" Ie deel. P. Wijdenes. Daaruit wordt behandeld in klas I:

Grondbegrippen, hoeken, driehoeken, congruentie van driehoeken, veelhoeken (geen congruentie).

In klas II: de cirkel; Oppervlakte en inhoud van lichamen op eenvoudige manier en met gemakkelijke getallen.

Die getallen-wijzigingen breng ik zelf aan. De docent staat toch boven zijn boek!

Daarnaast ook in beide klassen: Rekenboek voor Handelsscholen, dit is een meer eenvoudige bewerking van het „Rekenboek voor de H.B.S." Hieruit kan de docent grepen doen.

En dat is alles, wat wij onze meisjes van wiskunde geven. Zijn daar dan 12 uur voor nodig? Niet als het doel was: *Kennis* aanbrengen! Maar juist omdat *ons doel* op de M. M. S. is „vormen" — moeten we langzaam vooruit en *diep* erin!

Het gaat om het leren *redeneren*, denken, zich beheersen, ordenen en . . . . niet te vergeten: willen. Het zoeken van de oplossing van een meetkundig vraagstukje is een prachtoefening van de wil. Als de docent zo nu en dan eens zegt: Je behoeft het niet te hebben; maar ik ben benieuwd, wie het vindt! Dan zijn er verschillende, die in de loop van de dag of na 1 of 2 dagen je tegenkomen en glunderen: Ik heb hem!

En dan aan het slot van Dr. de Vreese's artikel, wordt het *inzicht* geprezen van hen die „de innerlijke waarde stellen boven een examenpapiertje." Ik geloof niet, dat we nu juist in een tijd leven om enigszins minachtend over een „examen-papiertje" te spreken. Ligt in het werken voor, — het willen behalen, — en zèlf verdienen van dat examenpapiertje geen *opvoedende kracht?*

Wij zien op onze eigen school het grote verschil in studiegeest van toen het diploma weinig of geen perspectieven opende — en nu, nu het *erkende* diploma toegang geeft voor allerlei werkkringen en verdere studie. Het is nu de tijd niet meer, dat het meisje tevreden is met een cachet van ontwikkeling door in de talen redelijk thuis te zijn en wat huishoudelijke vaardigheden te hebben. Het meisje wil sociaal werken, het voelt, dat de maatschappij behoefte heeft aan de hulp van de vrouw, in kinderverzorging, ziekenverpleging etc. Ze wil wat bereiken — ze wil wat kunnen. — Ze heeft geleerd te geloven in eigen kracht. En het gaat toch niet aan te zeggen: wel, laat meisjes, die geen diploma hebben, ook tot die werkkringen en studies toe. Er moet toch ergens een grens zijn. En me dunkt, dat men toch met ons in zal stemmen, als we beweren, dat een meisje met middelmatige capaciteiten, die de *moed* heeft gehad zich in te spannen om iets te presteren en het diploma te behalen, mèèr waard is, wat karakter betreft, dan een ander in soortgelijke omstandigheden, die voor de inspanning bedankt, onder voorwendsel de innerlijke waarde boven het examenpapiertje te stellen.

Mariënbosch—Nijmegen. F.

BOEKBESPREKING.

P. Wijdenes. *Beginselen van de Getallenleer. Deel* II *van de Theorie der Rekenkunde.* Groningen-Batavia 1937. P. Noordhoff N.V. 234 blz. Ing. *f* 4,50; geb. *f* 5,25. Voor intekenaars op Noordhoff's Wiskundige tijdschriften *f* 3,75, geb. *f* 4,50.

In de Nederlandsche leerboeklitteratuur voor wiskunde, hoe volledig zij langzamerhand ook geworden is, ontbrak nog steeds een elementair werk over getallentheorie ten behoeve van aankomende studenten aan de universiteit, van studeerenden voor de acte K I en van de niet onbelangrijke groep wiskundige amateurs, die zich als van ouds het meest tot de eigenschappen der geheele getallen aangetrokken gevoelt. Zij waren tot dusver aangewezen op Schuh's *Elementaire Theoretische Rekenkunde,* een werk, dat weliswaar zeer groote qualiteiten bezit, maar dat door de eigenaardige inkleeding der stof, met name de groepeering om de theorie der repeteerende positiebreuken en het consequent vermijden van de terminologie van de leer der congruenties, aan beginnelingen groote moeilijkheden in den weg blijkt te leggen. Het moet daarom voor alle drie de genoemde categorieën als een aanwinst worden beschouwd, dat Wijdenes, die reeds eerder als commentator op Schuh's boek de studie daarvan had trachten te vergemakkelijken, thans een zelfstandige inleiding in de getallentheorie tot stand heeft gebracht, die als een vervolg op zijn *Theorie der Rekenkunde* kan worden beschouwd. Het nieuwe werk bevat de geheele stof voor het examen K I; het geeft na een inleiding over het begrip indicator en enkele eigenschappen van priemgetallen een uitvoerige en duidelijke uiteenzetting van de theorie der congruenties en van de leer der quadratische en hoogere-machts-resten. Dat daarbij ook het reciprociteitstheorema voor quadraatresten behandeld wordt kan slechts worden toegejuicht; het werk verkrijgt daardoor een schoone en belangrijke afsluiting.

Het nieuwe leerboek laat zich hoogst aangenaam en gemakkelijk lezen. Volkomen vertrouwdheid met de stof, gepaard aan een opmerkelijke en in den loop der jaren zich nog steeds ontwikkelende didactische begaafdheid, stelde den schrijver in staat tot een behandelingswijze, die den lezer de toch waarlijk niet geringe moeilijkheden van het onderwerp als het ware spelenderwijze doet overwinnen. De talrijke uitgewerkte voorbeelden en de vele vraagstukken maken het boek ook voor zelfstandige bestudeering zeer geschikt.

De ondernemende uitgever zorgde als gewoonlijk voor een goede verzorging van het uiterlijk. E. J. D.

HOOFDSTUK V.

OVER BOL EN CYLINDER.

Boek II.

Het tweede boek van het werk *Over Bol en Cylinder* begint weer met een schrijven van Archimedes aan Dositheos, waarin hij nog eens de voornaamste stellingen van Boek I samenvat, de oplossing van enkele daarbij aansluitende problemen voor Boek II aankondigt en spoedige toezending van de beloofde stellingen over spiralen en conoiden in het vooruitzicht stelt.

Het eerste der in Boek II behandelde problemen betreft de constructie van een cirkel, waarvan de oppervlakte gelijk is aan die van een gegeven bol; de oplossing hiervan volgt onmiddellijk uit I, 33. Daarna volgt

Propositie 1.

Wanneer een kegel of een cylinder gegeven is, een bol te vinden, gelijk aan den kegel of den cylinder.

De behandeling hiervan wordt analytisch ingekleed. (fig. 80).

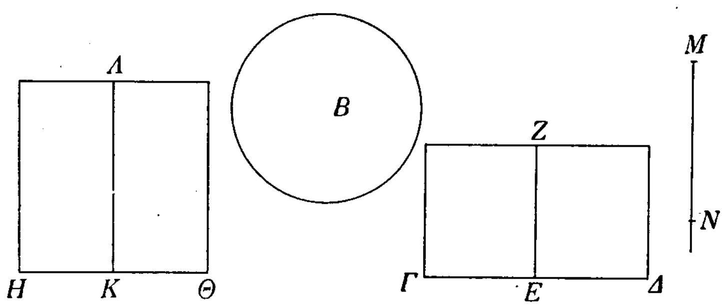

Fig. 80.

Als de bol B gelijk moet zijn aan den kegel of cylinder A, zal de cylinder K, waarvan de basisdiameter $H\Theta$ en de hoogte $K\Lambda$ beide gelijk zijn aan den diameter van B, volgens **S.C.** I, 34 anderhalf maal zoo groot zijn als B, dus gelijk aan een cylinder E, die

EUCLIDES

13e JAARGANG 1936/37

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

13e JAARGANG 1936/37

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

Men raadplege ook onze Catalogus C, die op aanvrage kosteloos wordt toegezonden. Deze catalogus bevat aanwijzingen omtrent het gebruik, de omvang, druk, prijs en van vele werken de inhoudsopgave.

DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAALREKENING

Verlaagde prijs

Vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening en over analytische en beschrijvende meetkunde door **prof. dr F. Schuh.**

Deel I A. Vraagstukken over differentiaalrekening, met volledige aanwijzingen ter oplossing. Gecart. *f* 8,— **f 4,90**

Deel II. Schriftelijke vraagstukken van het examen K V van 1900—1922 — met volledige aanwijzingen ter oplossing. Gecartonneerd *f* 7,50 **f 4,60**

Supplementen 1923 tot heden à *f* 0,75 (supplement 1931—1935 bij elkaar *f* 1.50).

Deel III. Vraagstukken over differentiaal- en integraalrekening —met volledige aanwijzingen ter oplossing. Gecartonneerd *f* 14,50 **f 8,85**

Inleiding tot de studie der elliptische functies door **prof. dr G. Schouten.** Gebonden *f* 2,50 **f 1,60**

Inleiding tot de leer der verzamelingen door **dr B. P. Haalmeijer** en **J. H. Schogt.** Gebonden *f* 3,25 **f 2,05**

Moderne integraalrekening — door **Prof. dr C. H. van Os.** Gebonden *f* 5,50 **f 3,45**

ANALYTISCHE MEETKUNDE

Vraagstukken over de analytische meetkunde van het platte vlak en de rechte lijn en het platte vlak in de ruimte — door **H. Siersma.** *f* 1,90 **f 1,15**

Inleiding tot de analytische meetkunde van het platte vlak door **prof. dr J. Wolff.** *f* 4.50 **f 2,70**
gebonden *f* 5,25 **f 3,30**

ALGEBRA

Lessen over de hogere algebra — door **prof. dr F. Schuh.**

Deel I — 2de druk.	Gebonden	*f* 13,75	**f 8,50**
Deel II.	Gebonden	*f* 11,50	**f 7,15**
Deel III.	Gebonden	*f* 19,—	**f 11,65**
De drie delen samen		*f* 40,—	**f 25,00**

		Verlaagde prijs
Lessen over hogere algebra — door Lobatto—Rahusen — 2de stuk (splitsing in gebrokens, reeksen en kettingbreuken) — met een verzameling vraagstukken van **P. Wijdenes.**	*f* 4,75	**f 2,85**
Het getalbegrip — in het bijzonder het onmeetbare getal, met toepassingen op de algebra, de differentiaal- en integraalrekening — met 457 vraagstukken door **prof. dr F. Schuh.**	Gebonden *f* 7,50	**f 4,65**
Kansrekening — door **prof. dr F. Schuh.**	Gebonden *f* 4,25	**f 2,95**
Oneindige producten — met aanhangsel over gelijkmatige convergentie en de gammafuncties door **prof. dr F. Schuh.**	*f* 4,25	**f 2,55**
	gebonden *f* 4,75	**f 2,95**
De grondslagen der rekenkunde — met toepassingen op grenswaarden, oneindige reeksen en producten, gedurige breuken, dubbelreeksen, door **prof. dr G. Schouten.**	2de druk — gebonden *f* 3,90	**f 2,45**
Algebraïsche hoofdstukken — ter uitbreiding van de leerboeken over de elementaire analyse door **C. L. Landré.**	*f* 3,50	**f 2,10**

REKENKUNDE

Het natuurlijke getal — in zo streng mogelijke behandeling door **prof. dr F. Schuh** — met 218 vraagstukken.	Gebonden *f* 5,90	**f 3,70**
Axiomatische behandeling van de meetbare en onmeetbare verhoudingen door **prof. dr F. Schuh.**	Gebonden *f* 3,25	**f 2,05**
Leerboek der theoretische rekenkunde door **prof. dr F. Schuh.**	Gebonden *f* 10,20	**f 6,40**
Leerboek der elementaire theoretische rekenkunde door **prof. dr F. Schuh.**	Deel I. Gebonden *f* 10,80	**f 6,75**
	Deel II. Gebonden *f* 10,80	**f 6,75**
Rekenkunde K I — door **P. Wijdenes.**	2de druk *f* 2,50	**f 1,50**

MEETKUNDE

Stereometrische hoofdstukken — door **C. L. Landré.**	2de druk *f* 3,50	**f 2,10**
Complement der stereometrie — door **C. A. Cikot.** 2de verbeterde druk met 442 vraagstukken.	Gebonden *f* 2,25	**f 1,45**

NATUUR- EN WERKTUIGKUNDE

Verlaagde prijs

Leerboek der zonnephysica — door **prof. dr W. H. Julius** verzorgd door **dr M. Minnaert.** *f* 9,75 **f 5,85**
Gebonden *f* 10,50 **f 6,45**

Val en worp — Een bijdrage tot de geschiedenis der mechanica van Aristoteles tot Newton door **dr E. J. Dijksterhuis.** *f* 7,50 **f 4,50**
Gebonden *f* 8,25 **f 5,10**

Vraagstukken over theoretische mechanica — door **prof. dr F. Schuh en ir J. C. N. Graafland e. i.** Deel I *f* 8,50 **f 5,10**
Gebonden *f* 9,50 **f 5,90**

Beginselen der theoretische mechanica door **J. H. Schogt.**
Deel I *f* 3,— **f 1,80**
Gebonden *f* 3,50 **f 2,20**
Deel II *f* 3,75 **f 2,25**
Gebonden *f* 4,25 **f 2,65**

DIVERSE UITGAVEN

Het Wiskundig genootschap. Zijn oudste geschiedenis, zijn werkzaamheden en zijn betekenis voor het verzekeringswezen door **dr M. van Haaften.** Gebonden *f* 2,50 **f 1,60**

Noordhoff's historische bibliotheek voor de exacte vakken.
De elementen van Euclides — door **dr E. J. Dijksterhuis.**
Deel I Gebonden *f* 4,50 **f 2,80**
Deel II Gebonden *f* 5,75 **f 3,60**

Inleiding tot de Niet-Euclidische meetkunde op historische grondslag — door **dr H. J. E. Beth.** Gebonden *f* 4,50 **f 2,80**

Newton's „Principia" — door **dr H. J. E. Beth.**
In twee gebonden delen à *f* 4,25 **f 2,65**

EXAMEN-UITGAVEN

Tien jaargangen van het Nieuw tijdschrift voor wiskunde bevattende de voornaamste artikelen en vraagstukken uit de eerste tien jaargangen voor studerenden verzameld.

Deel I — stof voor het examen l.o. — door **H. G. A. Verkaart.**
Gebonden *f* 7,50 **f 4,50**

Deel II — stof voor het examen K I — door **P. Wijdenes.**
Gebonden *f* 7,50 **f 4,50**

Schriftelijke examens Wiskunde l.o. 1921—1926 — met de uitvoerige en volledige uitwerkingen — door **H. G. A. Verkaart.** *f* 1,40 **f 0,85**

anderhalfmaal zoo groot is als A. Construeert men nu eerst dezen cylinder E (basisdiameter $\Gamma\Delta$, hoogte EZ), dan moeten wegens Euclides XII, 15 de bases van K en E omgekeerd evenredig zijn met de hoogten, dus, in verband met Euclides XII, 2

$$[\mathbf{T}\,(\Gamma\Delta),\ \mathbf{T}\,(H\Theta)] = (K\Lambda,\ EZ). \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Hierin is $H\Theta = K\Lambda$. Construeert men nu MN, zoodat

$$\mathbf{T}\,(H\Theta) = \mathbf{O}\,(\Gamma\Delta, MN) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

dan gaat (1) over in

$(\Gamma\Delta,\ MN) = (H\Theta, EZ)$ dus *permutando* in verband met (2) $\quad (\Gamma\Delta, H\Theta) = (H\Theta, MN) = (MN,\ EZ)$.

De diameter $H\Theta$ van den gevraagden bol B is dus de eerste van de twee middenevenredigen van $\Gamma\Delta$ en EZ [1]). De synthese is nu duidelijk. De constructie van den cylinder E wordt nog toegelicht door Eutokios; zij volgt onmiddellijk uit de stellingen Euclides XII, 10,14.

Algebraisch: Zij van den gegeven cylinder de diameter d, de hoogte h, van den gevraagden bol de diameter x, dan moet een cylinder met diameter x en hoogte x (die anderhalfmaal zoo groot is als de bol) denzelfden inhoud hebben als een cylinder met diameter d en hoogte $\frac{3}{2}h$.

Dus moet

$$\frac{d^2}{x^2} = \frac{x}{\frac{3}{2}h}.$$

Is nu $\dfrac{x^2}{d} = p$, dan is $\dfrac{d}{p} = \dfrac{x}{\frac{3}{2}h}$, dus $\dfrac{d}{x} = \dfrac{x}{p} = \dfrac{p}{\frac{3}{2}h}$

zoodat x de eerste is van de twee middenevenredigen tusschen d en $\frac{3}{2}h$.

In de tweede propositie wordt een stelling over den inhoud van een bolsegment afgeleid, die bij de oplossing van latere problemen zal worden toegepast.

---

[1]) Dat hier dus in de synthese de twee middenevenredigen van twee gegeven lijnstukken moeten worden bepaald, geeft Eutokios aanleiding tot zijn onschatbare uitweiding over de verschillende oplossingen, die van het problem der twee middenevenredigen (en daarmee dus van het Delische probleem van de verdubbeling van den kubus) in de Grieksche wiskunde zijn gegeven. *Opera* III, 54—106.

Propositie 2.

Aan elk bolsegment is een kegel gelijk, die dezelfde basis heeft als het segment en als hoogte een rechte, die tot de hoogte van het segment dezelfde reden heeft, die de som van den straal van den bol en de hoogte van het overblijvende segment tot de hoogte van het overblijvende segment heeft.

Ter verduidelijking van de ingewikkelde redeneering geven we den gedachtengang analytisch weer (fig. 81).

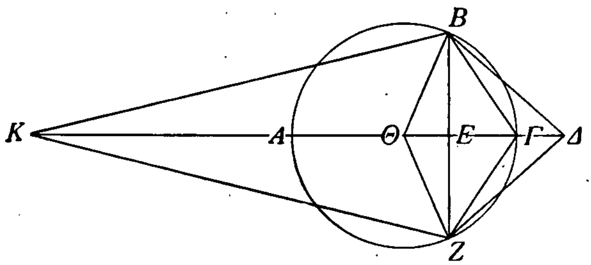

Fig. 81.

Om een kegel te construeeren, die gelijk is aan het bolsegment ΓBZ (dat kleiner is dan een halve bol), trachten we den bolsector $\Theta B\Gamma Z$ om te zetten in een stereo-rhombos, die den cirkel met diameter BZ tot basis heeft en waarvan een top in Θ ligt. De tweede kegel van den rhombos zal dan gelijk zijn aan het bolsegment.

Nu is (I, 42,44) de bolsector $\Theta B\Gamma Z$ gelijk aan een kegel met basisdiameter $B\Gamma$ en hoogte R. Is dus de andere top van den rhombos Δ, dan moet (Euclides XII, 15 en 2)

$$[\mathbf{T}\,(B\Gamma),\ \mathbf{T}\,(BE)] = (\Theta\Delta,\ R)$$

of

$$(A\Gamma,\ AE) = (\Theta\Delta,\ R)$$

waaruit *separando* $(\Gamma E, AE) = (\Gamma\Delta, R)$

permutando $(\Gamma E, \Gamma\Delta) = (AE, R)$

componendo $(\Delta E, \Gamma E) = (AE + R, AE)$.

Bepaalt men dus Δ zoo, dat aan deze betrekking is voldaan, dan vindt men door omkeering van de afleiding

$$\text{bolsector } \Theta B\Gamma Z = \text{rhombos } \Theta(BZ)\Delta$$

dus ook

$$\text{bolsegment } \Gamma BZ = \text{kegel } \Delta BZ.$$

Algebraisch: Zij $A\Gamma = d$, $\Theta\Gamma = R$, $\Gamma E = h_1$, $AE = h_2$, $BE = r$, dan wordt de ligging van Δ bepaald door

$$\tfrac{1}{3}\pi r^2 \,.\, \Theta\Delta = \tfrac{1}{3}\pi \,.\, B\Gamma^2 \,.\, R$$

of

$$\Theta\Delta = R \,.\, \frac{B\Gamma^2}{r^2} = R \,.\, \frac{d}{h_2}$$

dus

$$\Delta E = R\frac{d}{h_2} - (R - h_1) = h_1\frac{R + h_2}{h_2}.$$

De gevonden uitdrukking voor den inhoud van het bolsegment met pijl h_1 wordt dus

$$I = \tfrac{1}{3}\pi r^2 \,.\, h_1 \frac{R + h_2}{h_2} = \tfrac{1}{3}\pi h_1^2 (R + h_2) = \tfrac{1}{3}\pi h_1^2 (3R - h_1).$$

Dit bewijs geldt nu echter alleen voor bolsegmenten, die kleiner zijn dan de halve bol, omdat alleen kegels met uitspringende tophoeken worden beschouwd. Te bewijzen is dus nog, dat als K bepaald is door de betrekking

$$(KE, AE) = (R + \Gamma E, \Gamma E)$$

ook

$$\text{bolsegment } ABZ = \text{kegel } KBZ.$$

Hiertoe wordt bewezen, dat de geheele bol gelijk is aan den rhombos $K(BZ)\Delta$. Daar nu (**S.C.** I, 34) de bol gelijk is aan een kegel met basisstraal $A\Gamma$ en hoogte R, de rhombos echter aan een kegel met basisstraal BE en hoogte $K\Delta$, moet bewezen worden

$$[\mathbf{T}(A\Gamma),\ \mathbf{T}(BE)] = (K\Delta, R).$$

Nu is wegens

$$\mathbf{T}(BE) = \mathbf{O}(AE, \Gamma E)$$

het eerste lid ook te schrijven

$$[\mathbf{T}(A\Gamma),\ \mathbf{O}(AE, \Gamma E)].$$

Om het bewijs te leveren, bepalen we nu afzonderlijk de verhoudingen

$$(A\Gamma, AE) \text{ en } (A\Gamma, \Gamma E).$$

Gegeven zijn de betrekkingen

$$(\Delta E, \Gamma E) = (R + AE, AE) \qquad (KE, AE) = (R + \Gamma E, \Gamma E)$$

separando

$$(\Gamma\Delta, \Gamma E) = (R, AE) \qquad (KA, AE) = (R, \Gamma E)$$

permutando

$$(AE, \Gamma E) = (R, \Gamma\Delta) \qquad (AE, \Gamma E) = (KA, R)$$

$$(R, \Gamma\Delta) = (KA, R)$$

componendo

$$(\Theta\Delta, \Gamma\Delta) = (\Theta K, R)$$

permutando

$$(\Theta\Delta, \Theta K) = (\Gamma\Delta, R)$$

componendo

$$(K\Delta, \Theta K) = (\Theta\Delta, R)$$

$$\text{of } \mathbf{O}\,(\Theta K, \Theta\Delta) = \mathbf{O}\,(K\Delta, R) \qquad (\alpha)$$

componendo *componendo*

$$(A\Gamma, AE) = (\Theta\Delta, R) \qquad (A\Gamma, \Gamma E) = (\Theta K, R)$$

$$[\mathbf{T}\,(A\Gamma), \mathbf{O}\,(AE, \Gamma E)] = [\mathbf{O}\,(\Theta\Delta, \Theta K), \mathbf{T}\,(R)]\ ^{2)}$$

of wegens (α)

$$[\mathbf{T}\,(A\Gamma), \mathbf{O}\,(AE, \Gamma E)] = [\mathbf{O}\,(K\Delta, R), \mathbf{T}\,(R)] = (K\Delta, R)$$

q. e. d.

Algebraisch: Zijn Δ en K opv. bepaald door

$$\Delta E = h_1 \frac{R + h_2}{h_2} \text{ en } KE = h_2 \frac{R + h_1}{h_1}$$

dan is te bewijzen:

$$\tfrac{1}{3}\pi r^2 \,.\, K\Delta = \tfrac{1}{3}\pi d^2 R$$

of

$$\frac{K\Delta}{R} = \frac{d^2}{r^2} = \frac{d^2}{h_1 h_2}.$$

---

[2]) Deze overgang, dien wij tegenwoordig door vermenigvuldiging van de overeenkomstige leden der twee afgeleide evenredigheden zouden uitvoeren, wordt in de Grieksche redentheorie gemotiveerd door te schrijven

$$(A\Gamma, AE) = [\mathbf{T}(A\Gamma), \mathbf{O}(A\Gamma, AE)] = [\mathbf{O}(\Theta\Delta, \Theta K), \mathbf{O}(R, \Theta K)]$$

$$(A\Gamma, \Gamma E) = [\mathbf{O}(A\Gamma, AE), \mathbf{O}(\Gamma E, AE)] = [\mathbf{O}(R, \Theta K), \mathbf{T}(R)]$$

waaruit de verlangde conclusie ex aequali volgt.

Nu is inderdaad

$$K\Delta = \Delta E + KE = \frac{h_1^2(R+h_2)+h_2^2(R+h_1)}{h_1h_2} = R\frac{(h_1+h_2)^2}{h_1h_2} = R\frac{d^2}{h_1h_2}.$$

Opmerking. De bewezen eigenschap wordt in plaats van in den vorm

$$(\Delta E, \Gamma E) = (R + AE, AE)$$

ook vaak gebruikt in den *separando* af te leiden vorm

$$(\Delta\Gamma, \Gamma E) = (R, AE)$$

Algebraïsch: $$\frac{\Delta\Gamma}{h_1} = \frac{R}{h_2}.$$

Propositie 3.

Een gegeven bol door een plat vlak te snijden, zoodat de oppervlakken der segmenten een reden tot elkander hebben, die dezelfde is als een gegeven reden.

Uit I, 42,43 volgt gemakkelijk, dat het vlak hiertoe den diameter, waarop het loodrecht staat, in de gegeven verhouding moet verdeelen.

Hierna volgt een der groote problemen der Grieksche wiskunde:

Propositie 4.

Een gegeven bol zoo < door een plat vlak > te snijden, dat de segmenten van den bol een reden tot elkander hebben, die dezelfde is als een gegeven reden[3]).

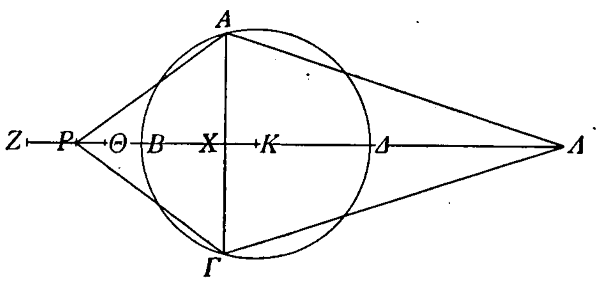

Fig. 82.

[3]) De oorspronkelijke formuleering van deze propositie (we herinneren eraan, dat we van *Over Bol en Cylinder* slechts een Attische redactie bezitten), is af te lezen uit haar vermelding in de voorrede van *Over Spiralen:* τὰν δοθεῖσαν σφαῖραν ἐπιπέδῳ τεμεῖν, ὥστε τὰ τμάματα αὐτᾶς ποτ' ἄλλαλα τὸν ταχθέντα λόγον ἔχειν.

Zij (fig. 82) $A\Gamma$ de doorsnede van het gevraagde vlak met het loodrecht daarop staande meridiaanvlak van den bol met centrum K. We kunnen blijkbaar ook eischen, dat de bol tot het segment $A\Delta\Gamma$ een gegeven verhouding heeft. Zij deze verhouding gelijk aan

$$(ZB,\ Z\Theta),\ \text{waarin}\ ZB = R.$$

Bepaal volgens **S.C.** II,2 de punten P en Λ zoo dat

$$\text{Kegel}\ PA\Gamma = \text{segment}\ BA\Gamma$$
$$\text{Kegel}\ \Lambda A\Gamma = \text{segment}\ \Delta A\Gamma$$

Hiertoe moet (zie Opmerking bij II, 2)

$$(PB, BX) = (R, X\Delta)\ \ldots\ldots\quad (1)$$
$$(\Lambda\Delta, \Delta X) = (R, XB)\ \ldots\ldots\quad (2)$$

Het vraagstuk komt dus neer op het bepalen van een punt X, zoodat

$$(P\Lambda, X\Lambda) = (ZB, Z\Theta)\ \ldots\ldots\quad (3)$$

waarbij echter de ligging der punten P en Λ volgens (1) en (2) van de ligging van X afhangt.

De reden $(P\Lambda,\ X\Lambda)$ is samengesteld uit de redens

$$(P\Lambda,\ \Delta\Lambda)\quad(\alpha)\quad \text{en}\quad (\Delta\Lambda,\ X\Lambda)\quad(\beta).$$

Deze beide redens worden nu eerst in anderen vorm geschreven:

α. Uit (1) volgt *permutando*

$$(PB, R) = (BX, X\Delta)$$

componendo

$$(PK, R) = (B\Delta, X\Delta)\quad (4)$$

Uit (2) volgt *permutando*

$$(\Lambda\Delta, R) = (\Delta X, XB)$$

componendo

$$(\Lambda K, \Lambda\Delta) = (B\Delta, X\Delta)\quad (5)$$

$$(PK, R) = (\Lambda K, \Lambda\Delta)$$

permutando

$$(PK, K\Lambda) = (R, \Lambda\Delta)$$

componendo

$$(P\Lambda, K\Lambda) = (K\Lambda, \Lambda\Delta).$$

Blijkbaar is dus $(P\Lambda, \Lambda\Delta)$ de dubbelreden van $(K\Lambda, \Lambda\Delta)$, dus wegens (5) van $(B\Delta, X\Delta)$. Dus is

$$(P\Lambda, \Lambda\Delta) = [\mathbf{T}\,(B\Delta), \mathbf{T}\,(X\Delta)].$$

β. Uit (2) volgt *componendo*

$$(\Lambda X, \Lambda\Delta) = (ZX, ZB)\quad \text{of } \textit{invertendo}$$
$$(\Lambda\Delta, \Lambda X) = (ZB, ZX)$$

De reden $(P\Lambda, X\Lambda)$ is dus samengesteld uit de redens

$$[\mathbf{T}\,(B\Delta), \mathbf{T}\,(X\Delta)] \text{ en } (ZB, ZX) \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$

De in het 2e lid van (3) voorkomende reden $(ZB, Z\Theta)$ is echter samengesteld uit

$$(ZB, ZX) \text{ en } (ZX, Z\Theta) \quad . \; . \quad (7)$$

Door vergelijking van de uitdrukkingen (6) en (7) volgt wegens (3)

$$(ZX, Z\Theta) = [\mathbf{T}\,(B\Delta), \; \mathbf{T}\,(X\Delta)] \quad (8)$$

De vraag komt dus hierop neer, dat een gegeven lijnstuk $Z\Delta$ $(3R)$ in een punt X zoo moet worden verdeeld, dat het stuk ZX zich tot een gegeven lijnstuk $Z\Theta$ verhoudt als het vierkant op een ander gegeven lijnstuk BΔ $(2R)$ tot het vierkant op het reststuk $X\Delta$.

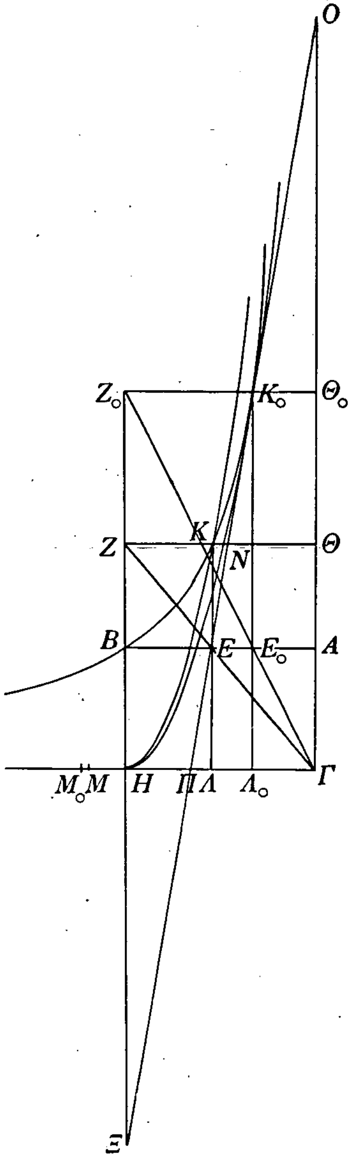

Fig. 83.

Archimedes kondigt aan, dat hij dit probleem aan het slot van de propositie analytisch en synthetisch zal behandelen[4]). Dit geschiedt echter niet. De oplossing, die hij belooft, moet reeds ten tijde van Diokles (die er een andere voor in de plaats geeft) verloren zijn geweest. Eutokios meent echter, haar te hebben teruggevonden[5]) in een blijkbaar bedorven toestand; hij biedt een reconstructie aan, die we als volgt weergeven: Algemeen geformuleerd (dus zonder samenhang met de notatie en de speciale verhoudingen der lijnstukken onderling in II, 4) luidt het vraagstuk als volgt: Als gegeven is (fig. 83) een lijnstuk AB, een lijnstuk $A\Gamma$ en een

---

[4]) *Opera* I, 192. ἐπὶ τέλει ἀναλυθήσεται καὶ συντεθήσεται.

[5]) *Opera* III, 130—132. Eutokios zegt hier, dat hij de oplossing van Archimedes, kenbaar aan het Dorisch taaleigen en aan de oude

oppervlakte Δ, vraagt men, op AB een punt E zoo te bepalen, dat

$$(AE, A\Gamma) = [\Delta, T(BE)] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\gamma)$$

Deze vraag wordt analytisch behandeld: Zij E het gevraagde punt. Uit de figuur, waarin $A\Gamma$ loodrecht op AB is uitgezet en de rechthoek $HZ\Theta\Gamma$ voltooid is, volgt:

$$(AE, A\Gamma) = (H\Gamma, HZ) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\delta)$$

Zij verder

$\Delta = \mathbf{O}(H\Gamma, HM)$ dan moet, daar $BE = ZK$,

$$(H\Gamma, HZ) = [\mathbf{O}(H\Gamma, HM), \mathbf{T}(ZK)] \text{ of}$$

$$[\mathbf{O}(H\Gamma, HM), \mathbf{O}(HZ, HM] = [\mathbf{O}(H\Gamma, HM), \mathbf{T}(ZK)]$$

dus

$$\mathbf{T}(ZK) = \mathbf{O}(HZ, HM).$$

Hieruit volgt (III; 2,0), dat K op een parabool ligt, die H tot top heeft, HZ tot diameter en HM tot orthia (latus rectum).

Bovendien is, wegens Euclides I, 43, de rechthoek $K\Gamma$ gelijk aan den rechthoek AH, zoodat K ook op een orthogonale hyperbool ligt met asymptoten $H\Gamma$ en $\Theta\Gamma$, die door B gaat (*Conica*, II, 12). K is dus bepaald als snijpunt van twee kegelsneden.

Voordat nu tot de synthese kan worden overgegaan, wordt een diorismos [6]) afgeleid. Het is nl. duidelijk, dat bij gegeven waarde van AB de gegevens $A\Gamma$ en Δ aan zekere grenzen gebonden zijn. Men heeft nl. de betrekking

$$(AE, A\Gamma) = [\Delta, \mathbf{T}(BE)]$$

die, wegens Euclides XI, 34, uitspreekt, dat de inhoud van het parallelepipedum met basis $\mathbf{T}$ (BE) en hoogte AE gelijk is aan den inhoud van het parallelepipedum, waarvan de basis een oppervlakte Δ heeft en waarvan de hoogte $A\Gamma$ is. Duiden we de bedoelde lichamen opv. aan door

$$\Sigma[\mathbf{T}(BE), AE] \text{ en } \Sigma[\Delta, A\Gamma] \quad (\Sigma = \sigma\tau\varepsilon\varrho\varepsilon\acute{o}\nu)$$

dan moet worden onderzocht, welke de grootste waarde is, die bij

---

namen der kegelsneden, die in geen enkelen codex voorkwam, heeft teruggevonden in een boek, maar dat ze onduidelijk was en met vele fouten in de figuren. Zelf gebruikt hij bij zijn uiteenzetting de Apollonische termen parabool en hyperbool, welk voorbeeld wij bij de weergave van zijn betoog volgen.

[6]) Diorismos hier te verstaan in den zin van „voorwaarde, waaraan de gegevens van een probleem moeten voldoen, wil het oplossingen toelaten". *Elementen van Euclides* I, 168.