EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

13e JAARGANG 1936/37, Nr. 5.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde f 5.—, voor id. op Christiaan Huygens f 4.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—, voor idem op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) *f* 4.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

☛ Bij de verzending van pres. ex. van de *tweede* druk (thans derde) van de Schooltafel is een prosp. van ongeveer 3 blz. bijgevoegd. Men zal mij zeer verplichten met toezending van dat prosp.; noch de uitgever, noch ik, hebben een ex. meer. P. W.

INHOUD.

DECIMALE TAFELS

DOOR

P. WIJDENES.

---

§ 1. Het is niet van algemene bekendheid, zeker niet onder de leraren, dat in de practijk van de landmeetkunde, van 's Rijks driehoeksmeting enz. gebruik gemaakt wordt van de verdeling van een kwadrant in 100 graden (gr) welke verder decimaal worden onderverdeeld als de metrieke maten in decigraden (dgr), centigraden (cgr), milligraden (mgr) en decimilligraden (dmgr). De instrumenten zijn er op gemaakt en tafels bestaan er, zowel van de natuurlijke waarden als van hun logarithmen en . . . . . niet van vandaag of gister. Voor een tiendelige onderverdeling van de graden, waarvan er 90 in een rechte hoek gaan, hebben reeds gezorgd Briggs en Gellibrand; de titel van hun tafel, die in Gouda in 1633 verscheen, is volgens de catalogus van het Wiskundig Genootschap:

H. Brigius et H. Gellibrand Trigonometria brittannica sive de doctrina triangulorum (in 1904 door G. Mannoury in de catalogus aldus opgenomen; de tafel bleek in 1934, toen ik er naar vroeg, verdwenen te zijn, of onvindbaar). Tot mijn spijt kan ik dus verder niets meedelen, dan dat deze voorlopers de graden tiendelig verdeelden; dat lag natuurlijk in de lijn van Briggs en Vlacq, die de logarithmen berekenden met 10 als basis. De grote tafel van Vlacq, de grondslag voor alle verder tafelwerk, verscheen in 1628 in Gouda; wel een merkwaardig driemanschap: Vlacq, Briggs en Gellibrand!

De Franse revolutie, die zoveel opruimde, wat slechts door sleur behouden bleef, heeft de decimale verdeling weer opgevat. (Is er thans nog sleur? Bij het onderwijs?). De invoering van het metrieke stelsel na 1789 bracht mede, dat men overging tot een decimale verdeling van de rechte hoek: „en supposant le quart de cercle divisé en 100 degrés, le degré en 100 minutes et la minute en 100 secondes", zoals Borda zegt, en: de minute en minute ou de dix-millième en dix-millième (van een kwadrant als eenheid) pour les 100 degrés du quart de cercle" volgens Callet. Men hield bij de decimale verdeling blijkbaar nog vast aan de oude benamingen van het zestigdelige stelsel. Wanneer men in Frankrijk de oude namen heeft laten schieten, weet ik niet; liever gezegd, men is ze nog niet kwijt; een franse tafel voor de „Service géographique de l'armée" spreekt ten minste nog van „minutes centésimales", maar de tafel van de „Association de géodésie de l'union géodésique et géophysique internationale" spreekt van „grade" (niet van degrés) en van „centigrades".

Bij het samenstellen van de tafel, waarover straks, heb ik gemeend de benamingen voor de decimale verdeling te moeten gebruiken, zoals die worden aangegeven door de „Annuaire publié par le bureau des longitudes" uitgave 1935 blz. 279; omtrent de „Angles" vind ik daarin:

Unité: ANGLE DROIT.

Définition: Angle formé par deux droites se coupant sous des angles adjacents égaux.

Dénomination	Symbole	Valeur
ANGLE DROIT	D	1 D
Grade	gr	$\frac{1}{100}$ D
Décigrade	dgr	$\frac{1}{1000}$ D
Centigrade	cgr	$\frac{1}{10000}$ D
Milligrade	mgr	$\frac{1}{100000}$ D

Verder niet; maar op bladzijde 277 onder „Tableau des multiples et sous-multiples décimaux," staan: déci, centi, milli, décimilli, centimilli en micro; ik ben zo vrij geweest dus de tiende delen van milligraden aan te duiden als decimilligraden (dmgr).

De decimale verdeling heeft het grote voordeel, dat men ook de hoekmaten in het metrieke stelsel inschakelt. Als meter heeft men genomen het tienmillioenste deel van een kwart van een meridiaan; 10000 km is dat, en een rechte hoek heeft 100 $\times$ 100 $=$ 10000 centigraden, zodat *1 kilometer gelijk is aan 1 centigraad van een meridiaan van de aardbol* (bij de verdeling van een rechte hoek in 90 gelijke delen elk van 60 minuten is 1 minuut gelijk aan een Engelse zeemijl nl. 1852 meter).

Ik had het over de decimale verdeling, die tussen 1790 en 1800 weer werd opgenomen. Ik heb in mijn bezit drie kostbare tafels, nl. de Franse van Callet (1795, an III), van Borda (1801, an IX) en de Duitse van Hobert en Ideler (1799). Gaarne zal ik hier eerst een en ander over deze tafels meedelen, iets opnemen uit de voorberichten en een opgave doen van de inhoud van deze tafels.

§ 2. Het titelblad van de tafel van Callet hebben we hiernaast laten overdrukken.

TABLES PORTATIVES
DE
LOGARITHMES,

CONTENANT

LES LOGARITHMES DES NOMBRES,
depuis 1 jusqu'à 108000;

LES LOGARITHMES DES SINUS ET TANGENTES,
de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés,
de dix en dix secondes pour tous les degrés du quart de cercle;
Et, suivant la nouvelle DIVISION CENTÉSIMALE, de dix-millieme en dix-millieme.

PRÉCÉDÉES

D'un discours préliminaire sur l'explication, l'usage et la sommation des Logarithmes, et sur leur application à l'ASTRONOMIE, A LA NAVIGATION, A LA GÉOMÉTRIE-PRATIQUE, ET AUX CALCULS D'INTÉRÊTS

SUIVIES

De nouvelles tables plus approchées, et de plusieurs autres utiles à la recherche des longitudes en mer, etc.

PAR FRANÇOIS CALLET.

ÉDITION STÉRÉOTYPE,
gravée, fondue et imprimée,
PAR FIRMIN DIDOT.

A PARIS,
CHEZ FIRMIN DIDOT, Libraire pour les Mathématiques,
la Marine et l'Architecture; rue de Thionville.
1795 AN III. (Tirage 1808).

De inhoud van de tables „portatives" is de volgende.

1. Voorbericht. Uitlegging, voorbeelden van berekeningen en van toepassingen (die het titelblad aangeeft) samen 118 blz.

2. Gewone logarithmen in 7 decimalen en als aanvulling:

Gewone logarithmen en natuurlijke logarithmen van de getallen tot 1080 in 20 decimalen

bv. log 2 = 0,30102.99956.63981.19521

ln 10 = 2,30258.50929.94045.68402

Idem van de getallen 101000—101179 in 20 decimalen met de 1e, 2e en 3e differenties.

Antilogarithmen voor de log. van 0,00000 tot 0,00179, zowel voor gewone als natuurlijke b.v.

num log 0,00054 = 1,0012441692874495395, ook met 1e, 2e en 3e differenties.

Gewone logarithmen in 61 decimalen en natuurlijke in 48 dec. van de getallen van 1—100 en van de priemgetallen van 101—1097 b.v.

log 2 = 0,30102.99956.63981.19521.37388.94724.49302.67681. 89881.46210.85413.10427.5

ln 5 = 1,60943.79124.34100.37460.07593.33226.18763.95256. 01354.269

Gewone logarithmen in 61 dec. en natuurlijke in 48 dec. van de getallen 999980 tot 1000021.

Veelvouden van $m = ln$ 10 in 18 dec. van 1 $\times$ tot 100 $\times$ om gewone logarithmen om te zetten in natuurlijke; de veelvouden tot 9 maal zelfs in 70 dec. Idem veelvouden van $\frac{1}{m}$.

3. Lengte van de bogen met de straal als eenheid; degrés modernes en degrés anciennes (onze 90—60—60) in 25 decimalen b.v.

2 gr: 0,03141.59265.35897.93238.46264 dit is $\frac{1}{100}\pi$; (de naam grade is later ingevoerd);

2^0 (oude dus): 0,03490.65850.39886.59153.84738

Onderdelen van de nieuwe graden krijgt men direct door verplaatsing van de komma; die ontbreken dus; verder vindt men er nog de oude minuten en oude seconden in 25 dec. met de straal als eenheid.

4. Hierop volgt de logarithmensinustafel in 7 decimalen volgens

[1]) De tafels van Vlacq waren in folio-formaat; de tafel van Callet bevat ongeveer 700 bladzijden, zeer dicht bedrukt en weegt ongeveer 1½ kg.

de nieuwe verdeling, de hoeken opklimmende met centigraden met de S- en T-tafels, die voor kleine hoeken nodig zijn (zie Van Pesch, Gonggrijp en Versluys; in Noordhoffs schooltafel ontbreken de S- en T-tafels door de zeer bijzondere inrichting voor de eerste twee graden. Dezelfde gedachte is door mij doorgevoerd in de decimale tafel, waarover we straks zullen spreken)

bv. log sin 20,16 gr = 9,4933274—10
log tg 97,94 gr = 11,4898013—10
log cos 93,87 gr = 8,9829090—10

5. Tafel van sinus en cosinus van nieuwe graden met opklimming van 1 dgr in 15 dec. (de natuurlijke waarden dus) b.v. sin 0,019 = sin 1,9 gr = 0,02984.06997.38681; er naast vindt men de logarithmen.

6. Tafels van de evenredige delen.

7. De logarithmen van sinus en tangens volgens de oude verdeling om de seconde tot 5°; weer van voren af aan om de 10″ log sin, log cos, log tg en log cotg

8. Verder een paar kleine bijtafels

Het voorbericht van de tafel van Callet laten we hieronder volgen; men krijgt daardoor enig idee van de enorme arbeid, die onze grote voorgangers hebben verricht; onder nr. 8 vindt men iets over de decimale tafels; daarin wordt onze verdeling in graden, minuten en seconden genoemd: *division ancienne.*

AVERTISSEMENT DE F. CALLET. [1])

C'est à Jean Néper, baron écossois, que nous sommes redevables, de l'invention admirable des logarithmes. Il publia cette heureuse découverte au commencement du dernier siècle, dans un ouvrage latin, qui a pour titre: *De mirifici logarithmorum canonis constructione (a)*; le système qu'il adopta d'abord fut celui des logarithmes naturels ou hyperboliques, qui ont l'unité pour module. Henri Briggs, contemporain de Néper, composa un autre système de logarithmes,

---

[1]) De lezer zal zien, dat de spelling iets afwijkt van de tegenwoordige; ook zal hij wat accenten missen; dit zetwerk is echter volkomen gelijk aan de oorspronkelijke tekst.

(a). Cet ouvrage est extrêmement rare.

auquel il donna pour base le nombre 10, qui est celle de notre numération. Ce système ayant eu l'aveu de l'auteur des logarithmes, Briggs calcula avec quatorze décimales trente chiliades de logarithmes, savoir ceux des nombres depuis 1 jusqu'à 20000 et depuis 90000 jusqu'à 100000; cet ouvrage (*b*) précédé d'un discours anglois sur la nature, les propriétés, et les usages des logarithmes, parut à Londres en 1624 sous le titre d'Arithmétique logarithmique. Adrien Vlacq remplit la lacune qu'avoit laissée Henri Briggs; il calcula en outre les logarithmes des sinus, tangentes et sécantes de minute en minute, et avec dix décimales pour tous les degrés du quart de cercle; il publia ses grandes tables, qui parurent à Goude en 1628; elles contiennent, avec dix décimales, les logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 100000; les logarithmes-sinus, tangentes et sécantes des 5400 minutes du quart de cercle et une arithmétique logarithmique écrite en latin, et qui dans quelques exemplaires se trouve traduite en français et en anglais.

Adrien Vlacq calcula ensuite avec dix décimales les logarithmes-sinus, cosinus, tangentes et co-tangentes de dix en dix secondes par le moyen des sinus naturels, etc. de *l'Opus palatinum*. Cette table précédée d'une trigonométrie rectiligne et sphérique écrite en latin et terminée par les vingt premières chiliades des logarithmes de Briggs, parut à Goude en 1633 sous le titre *Trigonometria artificialis*. La même année on imprima à Goude des tables centésimales que Briggs avoit calculées et dont il avoit prié Vlacq de soigner l'édition, elles contiennent avec quatorze figures décimales les sinus naturels, et leurs logarithmes pour tous les centièmes des quatre-vingt-dix degrés du quart de cercle, ainsi que les tangentes et sécantes naturelles et les logarithmes tangentes des mêmes arcs, mais avec dix figures seulement; ces tables parurent précédées d'un ouvrage latin de Gellibrand intitulé *Trigonometria britannica*.

Vers le commencement de ce siècle, la fécondité des logarithmes ayant étendu leur usage sur toutes les branches des mathématiques, et la rareté des tables de Briggs et de Vlacq commençant à se faire sentir, Scherwin publia en 1724, un volume in-8^{0}. de tables contenant de logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 101000 avec sept figures, les sinus, tangentes, sécantes et leurs logarithmes de

---

(*b*) Il est aussi rare que le *Canon mirificus* de Néper; je n'en ai vu qu'un seul exemplaire qui m'a été communiqué par le C. Lalande.

minute en minute; précédées d'un discours sur la construction des tables de logarithmes, où il rassembla les méthodes de Wallis, Halley, Sharp, etc. Les deux premières éditions de cet ouvrage étant épuisées, Gardiner en donna une troisième, qui parut en 1741; et pour suppléer aux tables de Vlacq, qu'il étoit difficile de se procurer, il publia en 1742, ses grandes tables in-4^{o}., où les logarithmes-sinus sont exprimés avec sept décimales de dix en dix secondes: ces tables devinrent bientôt aussi rares que celles de Vlacq.

Jean Aubert, imprimeur d'Avignon, donna en 1770 une nouvelle édition des tables de Gardiner, un volume grand in-4^{o}.; cette édition fut revuè par le P. Pezenas; l'augmentation principale qu'on y remarque, consiste en des logar. des sinus de seconde en seconde pour les quatre premiers degrés calculés par le C. Mouton [1]); il en avoit déposé le manuscrit à l'Académie des sciences; le C. Lalande, dont les talens et le zele pour les sciences sont connus, en fit part au P. Pezenas. Cette édition, d'ailleurs assez bien exécutée, et plus complete que celle de Londres, lui cède pour la correction.

Les Astronomes, et plus particulièrement les Marins, firent remarquer à Al. Jombert que les tables de Gardiner, pour eux d'une utilité indispensable, étoient d'un service incommode en mer à cause de leur volume, et l'engagerent à en donner une édition portative. Le C. Firmin Didot en a parlé au commencement de cet avertissement; je n'ajouterai rien à ce qu'il en a dit.

Je vais rendre compte en peu de mots des augmentations que j'ai faites dans l'édition que nous publions aujourd'hui.

1^{o}. J'ai ajouté cinq mille logarithmes à la table des logarithmes des nombres: elle est poussée jusqu'à 108000; c'est le nombre de secondes contenues dans 30 degrés.

2^{o}. On voit à gauche de la colonne des nombres deux nouvelles colonnes qui, combinées avec elle et avec les nombres 1, 2, 3, etc. écrits en haut des colonnes suivantes, servent à passer de la numération sexagésimale à la décimale, et à revenir de celle-ci à celle-là.

3^{o}. J'ai placé au haut de chaque page certains logarithmes marqués par les lettres S et T; ils servent à trouver les logarithmes-sinus et tangentes des petits arcs; la lettre V marque la variation: voyez page 113.

---

[1]) C = Citoyen.

4°. On a souvent besoin d'avoir avec plus de sept ou huit figures les logarithmes des nombres et les nombres correspondans aux logarithmes. Deux tables où les logarithmes ont vingt figures et une table anti-logarithmique où les nombres ont aussi vingt figures, remplissent cet objet, lorsqu'il s'agit des logarithmes vulgaires; ces tables se trouvent dans l'ancienne édition. Trois nouvelles tables disposées comme les précédentes, et en regard de celle-ci, donnent avec vingt figures les logarithmes hyperboliques et les nombres correspondans à ces logarithmes.

5°. Dans d'autres cas, qui sont très rares, on a besoin de plus de vingt figures; pour ne rien laisser à désirer, j'ai emprunté de Scherwin deux tables où l'approximation est poussée jusqu'à 61 figures, et une de Schulze où les logarithmes hyperboliques ont 48 figures; j'ai placé cette seconde table en regard de la première des tables de Scherwin, et j'en ai calculé une quatrième que j'ai mise en regard de la seconde.

6°. On a souvent besoin de convertir un logarithme hyperbolique en un logarithme vulgaire, et réciproquement. J'ai dressé deux petites tables au moyen desquelles on opere facilement ces sortes de conversions.

7°. Les logarithmes sinus et tangentes, sont calculés de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés.

8°. Depuis quelques années on a repris la division centésimale adoptée par Briggs; on a fait plus, on a subordonné à la même loi la graduation du *quadrant*, c'est à dire, qu'on a considéré l'angle droit comme une unité à laquelle on a rapporté tous les autres angles; ainsi, les angles sont mesurés par des fractions qui ont pour dénominateur commun le *quadrant* ou quart de circonférence, et pour numérateur l'arc que chacun d'eux comprend entre ses côtés. Ce nouveau système exigeoit de nouvelles tables trigonométriques; le C. Borda s'est occupé le premier de ce travail; il y a plus de deux ans que le manuscrit est terminé. Je me suis livré à un travail moins étendu, et les tables que je donne ici peuvent être considérées comme l'abrégé de celles du C. Borda; on y trouve les logarithmes-sinus, co-sinus et tangentes, pour tous les dix-milliemes du *quadrant;* celles du C. Borda offrent en outre les logarithmes-co-tangentes, sécantes et co-sécantes, les parties proportionnelles des différences et, pour les trois premiers centiemes, les logarithmes-sinus, tangentes, etc. y sont calculés de cent-milliemes en cent milliemes. J'ai trouvé le moyen de suppléer aux omissions que j'ai faites pour me renfermer dans un cadre donné.

9°.. Une table où l'on trouve les sinus naturels et leurs logarithmes avec quinze figures pour chaque millieme du quart de cercle.

10°. A la suite de cette table, il en vient deux petites qui servent à transformer les parties décimales du *quadrant* en degrés anciens, et les degrés anciens en parties décimales du *quadrant*. Une table destinée à remplir ce second objet se trouve dans l'instruction sur les poids et mesures, mais l'approximation y est limitée, la mienne n'y met aucunes bornes.

11°. J'aurois bien voulu y joindre les parties proportionnelles des différences; n'ayant pas trouvé le moyen de les mettre à leur vraie place, j'ai construit à part une table des parties proportionnelles qui sert aussi aux tables centésimales.

Enfin j'ai fait toutes les augmentations que j'ai jugées utiles, et dont la plûpart m'ont été demandées par plusieurs savans qui se sont empressés à me donner des avis sur cette nouvelle édition; j'ai tiré parti des conférences que j'ai eues à ce sujet avec les C. C. Lagrange, Laplace, Lalande, Prony, Cousin, Mauduit, et des notes que m'ont données les C. C. Delambre, Servieres, etc. Je dois faire une mention particuliere du C. Borda; il a bien voulu me confier ses tables manuscrites, qui ont servi à la revision des épreuves des miennes. Le C. Theveneau, plein de sagacité pour ce genre pénible de travail, a relu toutes les épreuves, et collationné les tables centésimales sur celles calculées au bureau du Cadastre.

On s'occupe dans ce bureau, sous la direction du C. Prony, d'un travail considérable, dont les résultats seront bien précieux, tant par l'exactitude que par la correction. Voici la nomenclature des différentes parties de cette vaste entreprise, extraite d'une note qui m'a été communiquée par le C. Garnier, chef du bureau du Cadastre. 1°. Une table de sinus naturels ou en parties du rayon, calculés avec 22 décimales exactes, pour chaque dix-millieme du quart de cercle, et 5 ordres de différences: 2°. un tableau offrant les tangentes naturelles, avec pareil nombre de décimales, de centieme en centieme et tous les ordres de différences nécessaires, pour interpoler cent résultats: 3°. une table de logarithmes sinus et tangentes, pour chaque centmillieme du quart de cercle, avec 12 décimales, et trois ordres de différences: 4°. les logarithmes-rapport des arcs aux sinus, et des tangentes aux arcs, pour les 5 premiers centiemes du quart de cercle, avec le même nombre de décimales et deux ordres de différences; 5⁰. une table de logarithmes des nombres, depuis 1 jusqu'à 200000, avec 12 décimales, et 3 ordres de différences: 6⁰. un recueil de tables astronomiques, où les résultats de l'observation et du calcul sont ramenés à la graduation centésimale.

Tout ce que l'on peut desirer de plus, soit d'explications, soit de Tables, se trouve dans l'Astronomie de Lalande, en 3 vol. in-4⁰., où l'auteur a rassemblé, avec autant de clarté que d'étendue, tout ce qui est nécessaire à la théorie et à la pratique de l'Astronomie tant sur terre que sur mer. [1])

(Op de tweede conferentie van de „Assemblée générale de l'Union géodésique et géophysique internationale" gehouden in 1924 te Madrid, is besloten, de tafels van Prony, de „Tables du Cadastre", die nog steeds in manuscript waren gebleven, niet te publiceren. Ze zullen dus wel manuscript blijven).

We hebben in dit voorbericht namen gezien van grootmeesters op mathematisch gebied, die zich met hart en ziel gaven voor werk, dat van zo onberekenbaar nut was en is en zal zijn tot in lengte van dagen; dat men het ooit zonder logarithmen zal kunnen doen, schijnt mij volstrekt onmogelijk. Wel is misschien de tijd voorbij, dat men waarde hechtte aan zoveel decimalen; als echter Callet zegt, dat er gevallen zijn, très rares voegt hij er bij, dat men niet genoeg heeft aan twintig decimalen, dan moeten we dat wel aannemen en het zal aan mijn beperkte gezichtskring (mede aan die van de meeste collega's meen ik) liggen omtrent toepassingen op allerlei gebieden, dat we niet inzien, dat er wel eens meer decimalen nodig zijn. In geen geval vindt men bij de voorbeelden „usage des tables" domheden, als waarop gewezen is in korrel nr III blz. 178 van jaargang XII [2])

§ 3. Laten we ook iets zeggen van de tafels van Borda; het titelblad luidt

---

[1]) L'éloge de Fr. Callet est dans l'Hist. de l'Astro. pour l'an 6 (1798), par Jér. Lalande.

[2]) Iets dergelijks in een Italiaans: Trattate elementare di Trigonometria piana e sferica, quinta ed. riveduta, Livorno 1921, waarin gebruik wordt gemaakt van tafels met 5 decimalen; uit de gegevens $a = 160{,}212$, $b = 76{,}725$, $c = 83{,}511$ wordt voor de hoeken gevonden $\alpha = 178°00'53{,}''5412$; $\beta = 0°57'01'',8890$ en $\gamma = 1°02'04'',5716$.
In een ander vraagstuk met de gegevens a, β en γ worden b en c gevonden in 8 cijfers!).

TABLES

TRIGONOMÉTRIQUES DÉCIMALES,

OU

TABLE DES LOGARITHMES

DES

SINUS, SÉCANTES ET TANGENTES,

SUIVANT LA DIVISION DU QUART DE CERCLE EN 100 DEGRÉS, DU DEGRÉ EN 100 MINUTES, ET DE LA MINUTE EN 100 SECONDES;

PRÉCÉDÉES

DE LA TABLE DES LOGARITHMES

DES NOMBRES

DEPUIS DIX MILLE JUSQU'À CENT MILLE,

ET DE PLUSIEURS TABLES SUBSIDIAIRES:

CALCULÉES PAR CH. BORDA,

REVUES AUGMENTÉES ET PUBLIÉES

PAR J. B. J. DELAMBRE,

Membre de l'Institut national de France et du Bureau des Longitudes.

A PARIS;

DE L'IMPRIMERIE DE LA RÉPUBLIQUE.

AN IX.

Het werk van Borda bevat een „Préface de l'auteur" van 38 blz., waarvan de eerste regels luiden

Les raisons qui ont fait adopter la division décimale dans le nouveau système métrique, ayant dû également faire substituer à l'ancienne division sexagésimale du cercle, la division décimale ou centésimale, il est devenu nécessaire de calculer des Tables de sinus et tangentes suivant cette nouvelle division; et ce sont ces Tables que nous présentons ici au public. Nous les faisons précéder par les Tables de logarithmes des nombres dont les calculateurs font un fréquent usage, et qu'il est utile pour cette raison de réunir en un même volume.

Dit préface geeft geschiedenis, berekeningen en voorbeelden van opzoeken en terugzoeken en toepassingen. Op blz. 39 neemt Delambre het woord in een „Préface de l'éditeur"; men leest daar, dat de decimale tafels van Borda direct zijn afgeleid uit de tafels van Vlacq en Briggs, woorden, die men overal terugvindt in de voorberichten van de grote tafels.

PRÉFACE DE L'ÉDITEUR.

Ces tables sont les premières qu'on ait faites pour la nouvelle division du cercle. Le C.en *Borda* les fit calculer en même temps qu'il introduisait la division décimale dans les instrumens que l'on contruisait pour la mesure de la méridienne, et tout aussitôt que l'échelle décimale eut été déclarée un des articles fondamentaux du nouveau système des poids et mesures.

La simplicité que cette échelle de division devait amener dans tous les calculs, la faisait considérer par *Borda* comme plus universellement utile que l'uniformité même des poids et mesures; et il s'occupait avec prédilection de tout ce qui pouvait en hâter l'adoption.

Une des choses les plus urgentes était de procurer aux géomètres et aux astronomes, des tables trigonométriques pour la division du quart de cercle en cent degrés. Dès 1792 le manuscrit était achevé: diverses causes en retardèrent l'impression; et *Borda* n'eut pas la satisfaction de la terminer. Quand la mort l'enleva aux sciences et à l'opération des poids et mesures, dont il avait été l'un des premiers et des plus ardens promoteurs, il restait encore à imprimer les feuilles Z [1]) et suivantes des logarithmes des nombres, et quatre feuilles des logarithmes des sinus. Il n'avait pas mis la dernière main à la préface; on vient de la voir telle que nous l'avons trouvée dans ses papiers: seulement nous y avons joint des notes et mis des nombres dans la plupart des exemples qui étaient en blanc, et dont il n'avait déterminé que la forme et la disposition générale.

En voyant, dans cette préface, avec quel soin il a expliqué la construction des tables de logarithmes pour les nombres, on est surpris qu'il n'ait pas dit un seul mot de la manière dont il avait fait calculer ses tables trigonométriques. Tout ce que j'ai pu recueillir à cet égard, c'est qu'il avait emprunté, pour ce travail, les grandes tables de *Wlacq* [2]), qui renferment les logarithmes des sinus et des tangentes de 10 en 10″ pour tout le quart de cercle, avec dix décimales, et celles que *Briggs* a composées avec 14 pour tous les centièmes de degré.

Les premières fournissent à la nouvelle division les logarithmes des sinus et des tangentes pour tous les quarts de degré, ou de 25 en 25′; car 25′ de la nouvelle division, reviennent à 13′ 30″ de l'ancienne.

Celles de *Briggs* donnent les lignes trigonométriques et leurs logarithmes de dix en dix minutes; car 10 minutes centésimales égalent 9 centièmes du degré sexagésimal.

Il était fort naturel de supposer que *Borda* avait profité de ces secours importans pour en déduire tout le reste par interpolation; et j'en doutais si peu, qu'il ne me vint pas à l'esprit de lui en faire la question, un jour que, me montrant son manuscrit, il me disait que par-tout, jusque dans les tables des parties proportionnelles, il avait eu égard à l'inégalité des différences. Cependant il ne cite dans sa préface que les premières tables de *Wlac* [2]), celles dans lesquelles on ne trouve les sinus que de minute en minute; et l'on verra ci-après les raisons que j'ai pour croire que l'interpolation a été faite sur ces tables, les seules qui renferment les sécantes et co-sécantes.

Het préface van Delambre loopt tot blz. 115; hij geeft hierin volledige reeksontwikkelingen en berekeningen en eindigt met formules en becijferingen uit de vlakke en boldriehoeksmeting.

---

[1]) De vellen in de tafels van Callet en Borda zijn niet genummerd, maar voorzien van een letter.
[2]) Zo staat het er; ook vond ik in een tafel Ulac.

De inhoud van Borda's tafel (ongeveer 600 blz., gewicht ruim 1½ kg) is de volgende:

1. Gewone logarithmen van de getallen van 10000 tot 100000 in 7 decimalen; id. in 11 decimalen van de getallen van 1 tot 1000; id. van de getallen van 100000 tot 102000.

2. Log sin, log cos, log tg, log cotg in 11 dec. van hoeken van 0 gr tot 0,10 gr met opklimming van 1 mgr; verder van 0,1 gr tot (50 gr) 100 gr met opklimming van 1 dgr.

3. De natuurlijke logarithmen in 11 dec. van de getallen van 1—1000.

4. De logarithmen van de zes goniometrische verhoudingen in 7 decimalen, de hoeken opklimmende met 1 mgr van 0 gr tot 0,10 gr.

Van 0,10 gr af om de 1 dmgr tot 3 gr; daarna om de 1 mgr tot 40 gr en verder tot 50 gr met opklimming van 1 cgr.

Verder een paar kleine bijtafels en lijsten van errata in de tafel en in die van Callet.

§ 4. We komen nu aan de derde tafel, op blz. 194 genoemd. Het titelblad is hiernaast weergegeven.

Over deze tafels schrijft Delambre in het préface van de tafels van Borda het volgende:

Non content encore de cette révision, j'ai comparé les dernières figures des sinus et des tangentes avec celles des tables publiées à Berlin par M.M. *Hobert* et *Ideler,* en 1799, et dont ils ont eu la complaisance de m'envoyer un exemplaire. Leurs tables sont précisément de la même étendue que celles de *Borda*: mais elles ne donnent ni les sécantes, ni les parties proportionnelles toutes calculées; en revanche, elles contiennent les sinus et les tangentes en nombres naturels. Cet ouvrage m'a paru d'une correction et d'une exactitude rares. A la fin du volume, les auteurs ont donné une table de correction pour les tables que *Callet* a publiées pour la nouvelle division du cercle; ces corrections ne sont que d'une seule unité, en plus ou en moins, sur la dernière figure. A voir la grande conformité que règne à cet égard entre les tables de *Borda* et celles de *Callet,* on serait fort tenté de croire que celles-ci ne sont qu'une copie des autres; et *Callet* avoue dans son avertissement, page vj, qu'il a eu communication du manuscrit de *Borda;* il ajoute que ses tables ont été collationnées à celles du cadastre; il faut, en ce cas.

Neue

trigonometrische Tafeln

für

die Decimaleintheilung des Quadranten

berechnet

von

Johann Philipp Hobert
Professor der Mathematik und Physik an der Königl. Preussischen
Militärakademie des Artilleriekorps

und

Ludewig Ideler
Astronom der Königl. Preussischen Akademie der Wissenschaften.

Berlin,
im Verlage der Realschulbuchhandlung
1799.

que l'on n'ait pas été fort scrupuleux sur la dernière figure, car les corrections proposées par M.M. *Hobert* en *Ideler,* sont toutes conformes aux grandes tables du cadastre.

Ces corrections sont assez nombreuses. La méthode de calculs que M.M. *Hobert* en *Ideler* ont exposée dans leur préface, est déjà une forte présomption en leur faveur; cependant j'ai voulu m'assurer par moi-même de quel côté était l'erreur, et je me servais des formules indiquées dans ma préface, pages 60—62. La vérification eût été longue; le C.en *Prony* me fournit un excellent moyen de l'abréger: il me pria d'examiner les grandes tables à 12 decimales calculeés au cadastre, sous sa direction, pour tout le quart de cercle de 10 en 10".

We kunnen niet nalaten ook een deel van de „Einleitung" af te drukken, al weer om te laten zien, dat wat z.g. nieuw is, al aardig naar een leeftijd van anderhalve eeuw loopt.

EINLEITUNG.

Die alten Geometer bedienten sich zur Auflösung der Dreyecke der Sehnen statt der jetzt üblichen Sinus. Sie theilten den Halbmesser des Kreises wie den Bogen von 60 Grad, dessen Sehne er ist, in 60 gleiche Theile, jeden dieser Theile aufs Neue in 60 und nach diesem Gesetze weiter, und drückten in solchen Theilen die Sehnen der Kreisbogen aus. Sie hatten also eine Sexagesimaltheilung zugleich für Bogen und Halbmesser. Im ersten Buche des Almagests des Ptolemäus steht eine Tafel der Sehnen von halben zu halben Graden nebst den 30sten Theilen ihrer Unterschiede. Wenn hier die Sehne von 10° durch 10 27 32 ausgedrückt ist, so heisst dies, dass sie

$$=\frac{10}{60}+\frac{27}{60.60}+\frac{32}{60.60.60}=10.60^{-1}+27.60^{-2}+30.60,^{-3}$$

oder nach der gewöhnlichen Bezeichnung der Sexagesimalbrüche, $=\overset{-1}{10}+\overset{-2}{27}+\overset{-3}{32}=$ 0,174314 des Halbmessers sey, welches mit dem doppelten Sinus von 5° bis zur sechsten Decimalstelle übereinstimmt.

Die Araber bemerkten, dass die trigonometrischen Rechnungen einfacher würden, wenn man statt der Sehnen die Sinus oder halben Sehnen gebrauche, indem sich vermittelst der letztern aus den Winkeln eines Dreyecks geradezu das Verhältniss der gegenüberliegenden Seiten ergiebt, die erstern hingegen allemal eine Verdoppelung der Winkel nothwendig machen. Sie führten also die Sinus ein, behielten aber die Sexagesimaleintheilung des Halbmessers bey.

Der grosse deutsche, im funfzehnten Jahrhundert lebende, Mathematiker Johann Müller oder Regiomontan, der das Unbequeme dieser Eintheilung fühlte, berechnete einen Canon der Sinus in Theilen, deren er dem Halbmesser 6000000 beylegte. In der Folge fand er, dass der Gebrauch dieser Hülfslinien bey Auflösung der Dreyecke noch einfacher werde, wenn man zum Halbmesser eine dekadische Zahl annehme, und so bearbeitete er einen neuen Canon für den Halbmesser 10000000. Beide Tafeln enthalten die Sinus für jede Minute des Quadranten, und stehen in seinem wichtigen Werke von den Dreyecken, wodurch er den Grund zu unserer heutigen sowol ebenen als sphärischen Trigonometrie gelegt hat. Auch verdanken wir diesem um die Dreyeckmesskunst sehr verdienten Manne den Gebrauch der Tangenten, für welche er gleichfalls eine Tafel berechnete, die er ihres grossen Nutzens wegen tabula foecunda nannte.

Im sechzehnten Jahrhundert fügte Georg Joachim Rheticus noch die Secanten hinzu, und berechnete mit einem ungemeinen Aufwande von Mühe und Zeit einen Canon der Sinus, Tangenten und Secanten für jede 10te Secunde des Quadranten in Theilen, deren er dem Halbmesser 1000 Billionen gab, oder bis auf 15 Decimalstellen, wenn der Halbmesser als Einheit angenommen wird. Diese grosse Arbeit wurde nach seinem Tode von seinem Schüler Valentin Otho vollendet, der sie mit seiner und seines Lehrers Abhandlung von den Dreyecken unter dem Titel Opus palatinum de triangulis, herausgab (Neustadt in der Pfalz 1596, fol.). Hier sind indessen nur 10 Stellen abgedruckt; alle 15 hingegen von Rheticus berechnete Stellen der Sinus finden sich in des Pitiscus Thesaurus Mathematicus (Francof. 1613, fol.), dem vollständigsten Canon der Sinus, welchen wir haben.

Um die Zeit der Erscheinung des letztgedachten Werks erfand Neper die Logarithmen. Der Urheber und erste Berechner der gemeinen Logarithmen, Heinrich Briggs, dachte darauf, diese wichtige Erfindung für die Trigonometrie brauchbar zu machen, und damit zugleich eine bequemere Kreiseintheilung als die bisherige zu verbinden. Er berechnete zu dem Ende einen Canon der natürlichen Sinus, Tangenten und Secanten und der Logarithmen der Sinus und Tangenten für alle Grade und Hunderttheile von Graden, und begleitete ihn mit einer Abhandlung über die Construction desselben. Er wollte auch noch von dem Gebrauche seiner Tafeln in der sphärischen Trigonometrie handeln, allein der Tod hinderte ihn daran. Heinrich Gellibrand, sein Freund, übernahm nun die Ausarbeitung dieser Abhandlung und gab das Ganze mit Adrian Vlacqs Beyhülfe unter dem Titel Trigonometria britannica 1633 zu Gouda heraus. Hier findet man die natürlichen Sinus auf 15, die künstlichen auf 14, die natürlichen und künstlichen Tangenten aber, so wie die Secanten, auf 10 Stellen. Unterdessen hatte Vlacq vermittelst des Opus palatinum einen Canon der Logarithmen der trigonometrischen Linien auf 10 Decimalstellen für jede 10te Secunde des Quadranten berechnet, und ihn unter dem Titel Trigonometria artificialis in demselben Jahre zu Gouda herausgegeben, in welchem die Trigonometria britannica erschienen war. Da diese Tafeln vollständiger waren als die briggischen, so vernachlässigte man die letztern und hielt sich an die erstern, zumahl da die bey den Vlacqschen Tafeln zum Grunde liegende Kreiseintheilung die Auctorität des Alterthums für sich hatte. Hätte indessen Vlacq, wenn er doch etwas Vollständigeres als Briggs liefern wollte, die Logarithmen der trigonometrischen Linien für jedes Tausendtel des Grades berechnet, so ist fast nicht zu zweifeln, dass die Sexagesimaleintheilung des Grades, wenigstens in der Trigonometrie und Astronomie, durch die ungleich bequemere Decimaleintheilung eben so verdrängt worden seyn würde, wie die sechzigtheilige Zerfällung des Halbmessers durch die zehntheilige.

Erst in unsern Tagen ist die Decimaleintheilung des Kreises wieder in Anregung gekommen, und man ist in dieser Hinsicht noch einen Schritt weiter gegangen, als Briggs. Da dieser nehmlich bloss an die Stelle der Sexagesimaleintheilung des Grades die Decimaleintheilung gesetzt, die uralte Nonagesimaleintheilung des Quadranten hingegen beybehalten hatte, so hat man vorgeschlagen, auch die Eintheilung des Kreises in Grade abzuschaffen, und statt derselben eine Decimaleintheilung des Quadranten einzuführen, so dass der rechte Winkel als Einheit angenommen wird, die spitzen Winkel folglich als ächte, die stumpfen als unächte Decimalbrüche erscheinen.

Bey der seit kurzem in Frankreich vorgenommenen Maassreform und Einführung des Decimalsystems zur Eintheilung aller Maasse, Gewichte und Münzen, ist denn auch die gedachte Decimaleintheilung des Quadranten beliebt worden. Schon hat man dort angefangen, sie auf astronomischen Instrumenten anzubringen. So sind z. B. die ganzen Kreise, welche Méchain und Delambre bey ihren trigonometrischen Messungen zur Bestimmung des mittlern Erdgrades gebraucht haben, und die astronomische Uhr; vermittelst deren die Pendellänge von Paris aufs Neue durch Borda und Cassini untersucht worden ist, dem Decimalsystem gemäss eingetheilt. Auch bedienen sich bereits verschiedene französische Mathematiker dieses Systems in ihren Schriften, und es ist wahrscheinlich, dass es einst nach Erscheinung der grossen Sammlung in diesem System berechneter trigonometrischer, astronomischer und hydrographischer Tafeln, welche gegenwärtig auf Kosten der französischen Nation gedruckt werden, allgemein in Frankreich angenommen werden wird. Jeder nicht französische Mathematiker wird alsdann genöthigt seyn, sich mit der neuen Kreiseintheilung vertraut zu machen, sey es auch nur, um die Resultate französischer Messungen und Rechnungen benutzen zu können.

Deutschen Mathematikern gebührt indessen der Ruhm, zwar nicht, so viel uns wenigstens bekannt ist, die Decimaleintheilung des Quadranten in Vorschlag gebracht, aber doch an die Berechnung neuer Tafeln, wodurch ihr allein Eingang verschafft werden kann, zuerst Hand angelegt zu haben.

Der verstorbene Oberbaurath Schulze, Mitglied der Preussischen Akademie der Wissenschaften, sagt S. 270 des zweyten Heftes seines Taschenbuchs, dass er aus den Gellibrandschen (Briggischen) Tafeln andere vermittelst des Einschaltens habe berechnen lassen, welche für jeden tausendsten Theil eines Grades die Hülfslinien der Dreyeckmesskunst nebst ihren Logarithmen bis auf die 7te Stelle eines zehntheiligen Bruchs enthalten, und sey im Begriff gewesen, diese Arbeit dem Druck zu übergeben, als ihm Hr. Lagrange, damaliger Director der mathematischen Klasse der Akademie, den Gedanken geäufsert hätte, dass dergleichen Tafeln noch einfacher im Gebrauch seyn würden, wenn man auch die Eintheilung des Kreises in Grade abschaffe und eine Decimaleintheilung des Quadranten an ihre Stelle setze. Da ihm nun hiedurch die Sache ihre grösste Geschmeidigkeit erlangt zu haben scheine, so habe er gern seine völlig fertigen Tafeln wieder zurückgenommen und wünsche nichts mehr, als Lagrange's Gedanken ausgeführt zu sehen. Wir werden, setzt Schulze hinzu, den Alten ähnlicher werden, wenn wir, so wie sie, Kreisbogen und Halbmesser auf gleiche Art zerfällen, nur dass wir die Sexagesimaleintheilung gegen die unserer Art zu rechnen weit angemessenere Decimaleintheilung vertauschen. In der Vorrede des gedachten Werks berichtet er noch, dass ihm der Graf von Schafgotsch zu Prag bereits eine beträchtliche Anzahl nach dem neuen System berechneter Sinus zugeschickt habe. Was aus denselben geworden ist, wissen wir nicht.

Schulze selbst begnügt sich damit, Vorschläge zu thun, wie die Berechnung trigonometrischer Tafeln nach dem Decimalsystem am bequemsten eingeleitet werden könne. Er fängt damit an, eine neue Bezeichnung der Kreisbogen festzusetzen, die wir aber durchaus nicht billigen können. Will man einmal von der Gradeintheilung der Alten abgehen, so muss unsers Erachtens zur Verhütung aller Sprachverwirrung auch die bisherige Terminologie gänzlich abgeschafft werden. Sie kann es auch füglich, da die Wörter Zehntel, Hundertel, Tausendtel u.s.w. der Quadranten oder rechten Winkels leicht verständlich und um nichts unbequemer sind, als die bis jetzt üblichen Benennungen der Bogen oder Winkeltheile. Eben so wenig können, wenn die Verwirrung nicht vollkommen werden soll, die bey der Sexagesimaleintheilung üblichen Zeichen beybehalten werden. Soll der Quadrant, als das Maass des rechten Winkels, nach dem Decimalsystem zerfällt, bey der Bestimmung aller übrigen Winkel als Einheit dienen, warum wollte man nicht alle Kreisbogen und Winkel als Decimalbrüche des Quadranten oder rechten Winkels bezeichnen und aussprechen? Der Deutlichkeit wegen kann man ein Q (Quadrant) oder R, in der längst üblichen Bedeutung dieses Buchstabens, hinter den Decimalbruch schreiben, der den Bogen oder Winkel ausdrückt, z. B. in folgenden Reductionssätzen:

$$1^\circ = 0{,}111111\ Q = 0{,}111111\ R$$
$$1' = 0{,}000185\ Q = 0{,}000185\ R$$
$$1'' = 0{,}000003\ Q = 0{,}000003\ R$$

Dagegen würde in dem für sich verständlichen Ausdrucke sin $0{,}0025 = 0{,}0039270$ ein Q oder R hinter dem Bruche 0,0025 überflüssig seyn. Wir werden uns also der Benennungen neue Grade, Decimalgrade, Centesimalgrade, Centesimalminuten, die wir von französischen Mathematikern gebraucht finden, so wie auch der Uebertragung der bisherigen Bezeichnungen auf die neue Kreiseintheilung, gänzlich enthalten.

De „Einleitung" beslaat 72 bladzijden met uitgebreide uiteenzettingen van de methoden, die Hobert en Ideler hebben gevolgd ter berekening van de goniometrische verhoudingen van hoeken in decimale verdelingen en van hun logarithmen.

De tafel bevat geen gewone logarithmen, maar in 7 decimalen nauwkeurig op elke linkerbladzijde b.v.

Arc	Sinus	D	Cosinus	Tang.	D	Cotang.	Diff.	Arc
0,01258	0,0197593	157	0,9998048	0,0197632	157	50,5991182	402644	0,98742

Hierbij betekent 0,01258 = 0,01258 quadrant = 1,258 gr.

Op de rechterbladzijde vindt men dezelfde indeling voor de logarithmen.

Tot 0,003 dus tot 3 graden lopen de hoeken op met 1 mgr (dit deel beslaat dus alleen al 120 bladzijden); daarna lopen de hoeken op met 1 cgr, zodat de resterende 47 graden 188 bladzijden beslaan.

Daarna volgen: Verschiedene mit der Decimaltheilung des Quadranten in Verbindung stehende Tafeln nl. sinus en tangens van hoeken met opklimming van 1 dmgr van 0 gr tot 1 cgr in 10 decimalen; verder omzetting van oude graden („bisher übliche Theile". bis nun!) in nieuwe en omgekeerd. Daarna volgt nog een tafel van de gewone logarithmen van de getallen van 1 tot 1100 en van 999980 tot 1000021 in 36 decimalen. En aan het slot lijsten van verbeteringen aan te brengen in de tafels van Callet en in die van Vega.

§ 5. In het vorige hebben we enig idee gegeven van de pogingen, die aangewend zijn om het decimale stelsel van verdeling van de omtrek van een cirkel ingang te doen vinden. Welk nut heeft de decimale verdeling boven de 90—60—60-delige? We zouden zeggen: hetzelfde als het metrieke stelsel boven niet metrisch verdeelde maten; voor de school is het verschil niet noemenswaard, maar voor de practijk. Welke practijk? Wie werken er dagelijks in de driehoeksmeting? De geodeten, de landmeters, de militairen, de zeevaarders; de laatste werken, zo ver ik weet, enkel in 90—60, waarbij in de onvolprezen zeevaartkundige tafels van Haverkamp de minuten verder in tiende delen worden verdeeld (in nr. V van jaargang 23 (1935/36) van het Nieuw tijdschrift voor wiskunde komt een artikel voor van Tjepkema, leraar aan de Z. V. S. te Groningen, waar men voorbeelden ziet uitgewerkt; van een boldriehoek zijn b.v. gegeven: $a = 124°12',5$, $\angle B = 153°17',1$ en $\angle C = 87°43',6$). De zeevaarders geven de afstanden in zeemijlen van 1852 meter; 1' van de aardse breedte = 1 zeemijl, zodat het systeem vrij goed werkt. Dat zal anders worden, zodra men berekeningen gaat uitvoeren met de rekenmachine; deze kan alleen decimaal geschreven getallen verwerken en dit is dan ook de reden, dat de decimale hoekverdeling wordt gebruikt door de landmeters voor het kadaster en de „stadsmeters" (van Publieke werken). Als dan toch een rekenmachine wordt gebruikt, dan maakt men tevens bij voorkeur gebruik van de natuurlijke waarden:

$$43{,}26 \times \sin 3{,}158 \text{ (gr)} = 45{,}26 \times 0{,}04959$$

krijgt men door de getallen aan te slaan, een paar handgrepen uit te voeren en het product verschijnt. De machines zijn echter heel duur, zodat een logarithmen-sinustafel onmisbaar blijft.

De decimale tafel wordt in Frankrijk veel gebruikt; in een boekje over driehoeksmeting voor het M. O., waarin zowaar ook nog wat becijferingen voorkomen (de Fransen zijn theoretici op en top), al is het dan maar 6 blz. van de 282, wordt gewerkt met het decimale stelsel b.v. $\angle A = 80^G, 4147$, $\angle C = 44^G, 3467$. De lezer lette op, dat 1 decimilligraad van een cirkel, zo groot als een meridiaan van de aarde, slechts 10 meter is, zodat mij deze „nauwkeurigheid" voor de school wel wat overdreven voorkomt. Onze oude seconden zijn 31 meter, de milligraden 100 meter; de school beperke zich in de nieuwe graden toch tot mgr!

Bij het militaire onderwijs, dat in Frankrijk en in België zo'n grote plaats inneemt, gebruikt men het decimale stelsel en daarvoor is de school er waarschijnlijk ook toe overgegaan. Waarom ook niet? Als men daarmee dichter bij de practijk komt te staan, is er alles voor. Toch...... voor de school geeft de overgang geen noemenswaard voordeel, zeker niet genoeg, om nu maar direct over te gaan tot de decimale verdeling, die...... langzaam maar zeker toch komt. Een eerste vereiste daarvoor is echter, dat men tegen een redelijke prijs tafels verkrijgbaar stelt.

Tafels zijn er wel, maar ze zijn duur; voor twee tafels in 5 decimalen, de een met de natuurlijke waarden, de andere met de logarithmen, betaalde ik samen met een flinke korting toch nog *f* 5,58. (Een tafel van de natuurlijke waarden (164 blz.) in 6 dec. kostte me *f* 7,40). Daarvan heeft de eerste dan nog het ongemak, dat hij de cotangens van hoeken tot 20 gr (de tangens van hoeken tussen 80 gr en 100 gr) in 1, 2, 3 of 4 decimalen geeft, wat m.i. minder gewenst is; men kan altijd zo men wil, cotg 5,50 gr = 11,54609 afkorten tot in vijf cijfers, maar niet, als de tafel geeft cotg 5,50 gr = 11,546 deze cotangens in vijf decimalen geven.

De logarithmen sinustafel boven aangeduid heeft het nadeel, dat men met de S- en T-tafels moet werken; als er iets is, dat lastig is en bij het cijferen ophoudt, dan is het wel, dat het eerste stuk van een tafel dan onhandelbaar is.

De decimale tafel in 5 decimalen, die ik heb samengesteld en in het Engels heb uitgegeven bij Noordhoff in Groningen bevat meer en ondervangt beide bezwaren. De inhoud is: [1])

I. De Briggse logarithmen met een paar bijtafeltjes.

Omzettingen; zie de noot.

III. De logarithmensinustafel.

De hoeken klimmen eerst op met 1 milligraad, waardoor het mogelijk is reeds evenredig te interpoleren van 15 cgr af! Hoeken tot 15 cgr en tussen 99,85 gr en 100 gr komen weinig voor en zo ze voorkomen, dan kan elke logarithme van alle hoeken in dmgr

---

[1]) Deze uitgave wordt aangeduid met de naam

FIVE PLACE TABLES
Decimal system.

Contents:

I. *Mantissas of logarithms of the integers from 1—11000.*
 I*b* Seven place logarithms of $(1+i)$ and $(1-d)$.
 1*c* Logarithms of constants.

II *Conversions.*
 II*a*, *b* of grades to degrees *v. v.*
 II*c*, *d* of grades to radians *v. v.*
 II*e* of degrees to radians.

III *Logarithms of trigonometric functions.*

IV *Natural functions.*
 Interpolation tables for the cotangents between 7 gr en 24 gr and the tangents between 93 gr and 76 gr.

V *Area of segments.*
 168 pages; geb. *f* 2,50.

(4 dec. van 1 gr dus) in vijf decimalen worden bepaald; de formule daarvoor is aangegeven. Van 15 cgr af kan men met de „evenredige delen" de logarithmen van alle goniometrische verhoudingen in 5 decimalen bepalen voor hoeken gegeven in 4 decimalen van een graad. Daartoe was het nodig tot 1,20 gr met milligraden op te klimmen. Daarna geeft de tafel de centrigraden en kan men, zodra de lijstjes van de evenredige delen niet meer zo talrijk zijn (te beginnen met 4 gr) een volle graad op een bladzijde houden. Een paar bijtafeltjes nl. omzetting van oude graden in nieuwe en omzetting van nieuwe graden in radialen, beide vice versa, besluiten dan de logarithmensinustafel.

IV. De sinustafel.

De tafel van de natuurlijke waarden is geheel met opklimming van een centrigraad; in de tafels van Gonggrijp, Versluys, Van Pesch en in de Schooltafel (deze vier in het stelsel 90—60—60) is de opklimming per minuut. Ongemeen lastig maken het ons in beide stelsels de zeer sterke daling van de cotangens van 0° (0 gr) af of wel de sterke stijging van de tangens naar 90° (100 gr).

Er bestaat, zover ik weet, maar één 60-delige tafel, die volledige interpolatietafels geeft nl. Versluys—Wijdenes Tafel H. De decimale tafel door mij gemaakt bevat de nodige formules, waardoor het mogelijk is, indien nodig, van alle hoeken in dmgr de cotangens en de tangens te vinden in vijf decimalen b.v. cotg $a'' = \frac{p}{a} - q.a$; waarbij $0 < a'' < 3{,}5$ gr dus $0 < a < 35000$; hierin is $p = 636619{,}77$ en $q = 0{,}000\,000\,5236$ (ook log p en log q zijn opgegeven).

Bij het onderwijs beperke men zich met de natuurlijke waarden van hoeken in minuten; met de decimale tot centigraden; in een rechte hoek gaan 90 × 60 minuten, 100 × 100 centigraden, zodat een centigraad ongeveer een halve minuut is (32,"4).

De practijk heeft andere eisen; in de topographie komt het voor de stafkaarten op een meter niet aan, maar bij het kadaster, bij terrein- en stadsmeting komt het op centimeters aan. Als de aanloop van een brug 300 meter is en de helling 1,50 gr, dan geeft de tafel voor de hoogte boven het vlakke land 0,02357 × 300 m dus een waarde nauwkeurig in centimeters, wat rijkelijk voldoende. Dat men zich in de zeevaart houdt aan tienden van minuten is duidelijk, want

0,1 min. is op aarde 185 meter. Bij het vliegwezen zal een centigraad (1 km) wel heel nauwkeurig zijn. — Voor geodetische metingen zijn tafels in 8 decimalen nodig om een nauwkeurigheid van 1 mm op 50 km te krijgen; astronomen zullen tafels in nog meer decimalen nodig kunnen hebben. — Voor het gewone gebruik is de tafel door mij samengesteld ruimschoots voldoende en om het gebruik mogelijk te maken is de prijs buitengewoon laag gesteld. De lezers houden het mij ten goede, dat in een artikel met zo iets wordt beëindigd. Het feit bestaat nu eenmaal tot op dit ogenblik, dat het ontbreken van een goede, practische, tafel voor weinig geld de overgang tot het decimale stelsel ten enenmale onmogelijk maakt, ook voor hen, die uit hoofde van hun practijk gaarne er toe over zouden gaan.

NASCHRIFT.

Op de bekende reiskaarten van Michelin vindt men centesimale graden; van aequator tot pool dus 100 gr; dit heeft het grote voordeel, dat op de kaart de parallel-cirkels (deze lopen van Oost naar West over de kaart) reeds globaal de afstanden aangeven in kilometers. Op een kaart van België vindt men b.v. aan de Oostrand 57^G; 56^G80; 56^G60; 56^G40; 56^G20, met een onderlinge afstand van 20 km dus. Op een kaart van Frankrijk vindt men hele graden, stukken Noord—Zuid dus van 100 km.

OVER DISTRIBUTIVITEIT.

VRAAG. [1])

Geachte Redactie,

Tot nog toe heb ik steeds gemeend, dat het begrip der *distributiviteit* bij de diverse getalbewerkingen inhield, dat een hogeregraadsbewerking uitsluitend distributief kon zijn t. o. v. de beide bewerkingen van *naast-lagere graad.* Waar de logarithme-neming in die zin niet distributief is t.o.v. de vermenigvuldiging en de deling, daar blijven dus 8 distributieve eigenschappen over, n.l. van de vermenigvuldiging en de deling t. o. van optelling en aftrekking en van de machtsverheffing en de worteltrekking t. o. van vermenigvuldiging en deling.

Deze opvatting der distributiviteit vindt steun in diverse verhandelingen van prof. Schuh, o.a. het Leerboek der Elem. Theor. Rekenkunde, Het Getalbegrip, Het Natuurlijke Getal, enz. Zonder dat bij mijn weten prof. Schuh ergens een scherp begrensde definitie geeft van de distributiviteit, kan uit deze verhandelingen m. i. wel de conclusie worden getrokken, dat hij geen andere distributiviteit erkent dan die van een hogere-graadsbewerking t. o. van de beide bewerkingen van *naast-lagere graad.* Zo vond ik in de Elem. Theor. Rekenkunde, Eerste deel op pag. 49 de voetnoot:

„De lezer geve zich rekenschap, waarom de distributieve eigenschap der vermenigvuldiging wat de vermenigvuldiger betreft, dus de formule (52)

$$(a+b)c = ac+bc$$

niet is om te zetten tot distributiviteit der machtsverheffing t. o. van de vermenigvuldiging wat de exponent betreft."

---

[1]) De Redactie stelt zich gaarne beschikbaar tot het beantwoorden van vragen als door den heer C. gesteld, en noodigt de abonné's uit, zich met hunne vragen tot haar te wenden.

Moet hieruit niet de conclusie worden getrokken, dat distributiviteit van de machtsverheffing *wat de exponent betreft* geheel wordt ontkend?

Nu is mijn mede-examinator voor het vak rekenen op het huidige acte-examen L.O. van een andere mening. Hij verwijst daarvoor naar het „Leerboek der Rekenkunde" van N. L. W. A. Gravelaar, eerste deel, 3e druk, waarin inderdaad aan het bedoelde begrip der distributiviteit een ruimere betekenis wordt gegeven.

Gravelaar zegt op pag. 52 van bedoeld leerboek:

„Algemeen noemen we thans een eigenschap distributief, als in de letterformule, waardoor zij wordt uitgedrukt, niet elke letter in elk lid éénmaal voorkomt." Nader wordt deze uitspraak verklaard op pag. 50, waar Gravelaar de diverse distributieve eigenschappen als volgt laat ontstaan:

„Om de hoofdeigenschappen voor een van de 7 bewerkingen vast te stellen, beginne men met beurtelings ieder van de twee getallen, waarmee de bewerking moet worden uitgevoerd te beschouwen als de uitkomst van elk der bewerkingen, die tot de voorgaande groepen behoren, dus bij de vermenigvuldiging en de deling als een som en een verschil, bij de machtsverheffing, de worteltrekking en de logarithmeneming als een som, een verschil, een product en een quotient; de waarden van de komende vormen trachte men op nog andere wijze voor te stellen als uitkomsten van bewerkingen met dezelfde getallen, maar zo dat de gevolgtrekkingen, waartoe men geraakt, onafhankelijk zijn van de waarden der gekozen getallen: door de formules, die men zodoende vindt, worden — behoudens enige uitzonderingen — de *distributieve hoofdeigenschappen* van de betreffende bewerking uitgedrukt."

Blijkens verwijzingen van Gravelaar zelf worden aldus tot de distributieve eigenschappen ook gerekend de 4 volgende:

1) $a^{m+n} = a^m \times a^n$

2) $a^{m-n} = a^m : a^n$

3) ${}^g\log ab = {}^g\log a + {}^g\log b$ en

4) ${}^g\log \frac{a}{b} = {}^g\log a - {}^g\log b$.

Ja, zelfs ook nog de volgende: ${}^a\log b \times {}^b\log c = {}^a\log c$.

Volgens Gravelaar is dus het criterium, waarmee men de distributieve eigenschappen van de commutatieve en associatieve onderscheidt, dit, dat in het eerste geval in de betrokken letterformule *niet* elke letter in elk lid éénmaal voorkomt, terwijl dit bij de beide andere soorten eigenschappen *wèl* het geval is. De commutatieve eigenschappen onderscheiden zich dan van de associatieve, doordat in de letterformules bij de commutatieve eigenschappen in elk lid slechts *één* letter als eerste term van een bewerking dienst doet, terwijl bij de associatieve eigenschap *niet* in elk lid slechts één letter als eerste term van een bewerking dienst doet.

Het is in verband met het voorgaande, dat ik U vraag:

1) Is hier sprake van meerdere opvattingen, die beide juist kunnen zijn, ja dan neen?

2) Zo neen, welke is dan de juiste opvatting en kan die worden gebaseerd op een juiste definitie van het begrip *distributiviteit* in de eerste en van scherpe afgrenzing van dit begrip van de begrippen *commutativiteit* en *associativiteit* in de tweede plaats?

Met een uitvoerige beantwoording in „Euclides" verplicht U ten zeerste,

Uw abonné
C.

ANTWOORD.

De definitie, die Gravelaar geeft, is niet onjuist, maar, voor zoover ik zien kan, van geen beteekenis. Wat voor nut het heeft, elk der eigenschappen van rekenkundige bewerkingen onder te brengen in een van drie groepen, wanneer zulk eene groep geen kenmerkende eigenschappen heeft, waarmede men iets bereiken kan — en daartoe kan men toch het aantal malen, dat eene letter in een formulelid voorkomt, niet rekenen — is mij niet duidelijk.

Ik heb dan ook nog nooit eerder gehoord, dat men

$$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$$

en

$$(ab)^m = a_m \cdot b^m$$

als tot één type behoorende beschouwde. Wèl noemt men de eerste formule soms eene distributiviteit van den tweeden trap. Zoo vindt men het b. v. in Professor M a n n o u r y 's werk „Methodologisches und Philosophisches zur Elementar-Mathematik", bldz. 93 en 94, en wel in verband met het volgende vraagstuk (dat trouwens ook door G r a v e l a a r even genoemd wordt, bldz. 48): de reeks van bewerkingen

$$a + b \qquad a \,.\, b \qquad a^b$$

voort te zetten

$$5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5 \quad 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 \quad 5^{5^{5^5}} = {}_4 5$$

Professor M a n n o u r y verwijst naar andere litteratuur, en zegt verder, dat deze voortzetting niet voert tot nieuwe theoretische gezichtspunten, en practisch niet veel te beteekenen heeft, omdat de eigenschappen van commutativiteit, associativiteit en distributiviteit verloren gaan. Tracht men de reeks der bewerkingen op zoodanige wijze voort te zetten, dat de eigenschappen bewaard blijven, dan komt men tot bewerkingen, die in het algemeen niet kunnen worden toegepast op geheele getallen. Hieruit blijkt, dunkt mij, dat de definitie, die men in Prof. M a n n o u r y's werk vindt, voor het wiskunde-onderwijs aan middelbare scholen geen beteekenis heeft, en die van G r a v e l a a r evenmin.

Wat nu de tweede „opvatting" betreft waarop de inzender doelt, men kan deze definities geven: Eene bewerking $a * b$ heet

commutatief, als $a * b = b * a$

associatief, als $(a * b) * c = a * (b * c)$

en voorts heet eene bewerking ① t. o. van eene andere bewerking ②

distributief wat betreft den eersten component van ① als

$$(a ② b) ① c = (a ① c) ② (b ① c)$$

en distributief wat betreft den tweeden component van ① als

$$c ① (a ② b) = (c ① a) ② (c ① b).$$

Het voordeel van deze definities vergeleken bij die van G r a v e l a a r is, dat men met behulp ervan in verscheidene gevallen rekenkundige eigenschappen onder één gezichtspunt kan vereenigen. Ik zal dit door een paar voorbeelden verduidelijken.

I. Stelling. Is eene commutatieve bewerking wat haar eersten component betreft distributief t. o. v. eene tweede bewerking, dan is zij het ook wat haar tweeden component betreft.

Onderstelde. $(a ② b) ① c = (a ① c) ② (b ① c); p ① q = q ① p.$

Gestelde. $c ① (a ② b) = (c ① a) ② (c ① b).$

Bewijs. $c ① (a ② b) = (a ② b) ① c = (a ① c) ② (b ① c) =$
$= (c ① a) ② (c ① b).$

Hieruit blijkt dus, dat

$(a + b)c = ac + bc$ meebrengt $c(a + b) = ca + cb,$
$(a - b)c = ac - bc$ „ $c(a - b) = ca - cb.$

Beschouwen wij eene bewerking ① met eersten component p en tweeden component q, zoodat

$$p ① q = r.$$

Wij duiden de omgekeerde bewerking, waardoor de tweede component q uit p en r wordt afgeleid, aan door het teeken $\overset{1}{*}$, zoodat

$$q = p \overset{1}{*} r$$

en

$$p ① (p \overset{1}{*} r) = r,$$

terwijl wij de omgekeerde bewerking, waardoor de eerste component p uit q en r wordt afgeleid, aanduiden door $\underset{1}{*}$, zoodat

$$p = r \underset{1}{*} q$$

$$(r \underset{1}{*} q) ① q = r.$$

II. Stelling. Is eene bewerking ② wat betreft haar tweeden component distributief t. o. v. eene bewerking ①, dan is dit ook het geval met die omgekeerde bewerking van ②, die den tweeden component afleidt.

Onderstelde. $a ② (b ① c) = (a ② b) ① (a ② c).$

Gestelde. $a \overset{2}{*} (b ① c) = (a \overset{2}{*} b) ① (a \overset{2}{*} c)$

Bewijs[1]. Wegens de onderstelde distributiviteit van ② is

$$a ② \{(a \overset{2}{*} b) ① (a \overset{2}{*} c)\} = \{a ② (a \overset{2}{*} b)\} ① \{a ② (a \overset{2}{*} c)\}$$
$$= b ① c$$

[1]) Dit bewijs is, evenals de volgende, schematisch, zooals de lezer gemakkelijk zal inzien. Een volledig bewijs moet mede berusten op onderstellingen omtrent de uitvoerbaarheid der optredende bewerkingen.

en hiervoor kan men schrijven

$$(a \overset{2}{*} b) ① (a \overset{2}{*} c) = a \overset{2}{*} (b ① c), \text{ q. e. d.}$$

III. Stelling. Is eene bewerking ② wat betreft haar eersten component distributief t. o. v. eene bewerking ①, dan is dit ook het geval met die omgekeerde bewerking van ②, die den eersten component afleidt.

Onderstelde. $(b ① c) ② a = (b ② a) ① (c ② a)$.

Gestelde. $(b ① c) \overset{*}{2} a = (b \overset{*}{2} a) ① (c \overset{*}{2} a)$.

Bewijs. Wegens de onderstelde distributiviteit van ② is

$$\{(b \overset{*}{2} a) ① (c \overset{*}{2} a)\} ② a = \{(b \overset{*}{2} a) ② a\} ① \{(c \overset{*}{2} a) ② a\}$$
$$= b ① c$$

en hiervoor kan men schrijven

$$(b \overset{*}{2} a) ① (c \overset{*}{2} a) = (b ① c) \overset{*}{2} a, \text{ q. e. d.}$$

IV. Stelling. Is eene bewerking ② wat betreft haar tweeden component distributief t. o. v. eene bewerking ①, dan is zij, wat betreft haar tweeden component, distributief t. o. v. de beide omgekeerde bewerkingen van ①.

Onderstelde. $a ② (b ① c) = (a ② b) ① (a ② c)$.

Gestelde. $a ② (p \overset{1}{*} q) = (a ② p) \overset{1}{*} (a ② q)$,

$a ② (p \overset{*}{1} q) = (a ② p) \overset{*}{1} (a ② q)$.

Bewijs. Schrijft men in het onderstelde voor $b ① c$ de letter d, dan kan men c of b elimineeren. In het eerste geval vindt men

$$a ② d = (a ② b) ① \{a ② (b \overset{1}{*} d)\}$$

of $$a ② (b \overset{1}{*} d) = (a ② b) \overset{1}{*} (a ② d),$$

en in het tweede

$$a ② d = \{a ② (d \overset{*}{1} c)\} ② (a ① c)$$

of $$a ② (d \overset{*}{1} c) = (a ② d) \overset{*}{1} (a ② c).$$

V. Stelling. Is eene bewerking ② wat betreft haar eersten component distributief t. o. v. eene bewerking ②, dan is zij, wat betreft haar eersten component, distributief t. o. v. de beide omgekeerde bewerkingen van ①.

Onderstelde. $(a \text{①} b) \text{②} c = (a \text{②} c) \text{①} (b \text{②} c)$.

Gestelde. $(p \overset{1}{*} q) \text{②} c = (p \text{②} c) \overset{1}{*} (q \text{②} c)$

$(p \overset{*}{1} q) \text{②} c = (p \text{②} c) \overset{*}{1} (q \text{②} c)$

Bewijs. Stel $a \text{①} b = d$, dan is

$$d \text{②} c = \{(d \overset{*}{1} b) \text{②} c\} \text{①} (b \text{②} c)$$

of $$(d \overset{*}{1} b) \text{②} c = (d \text{②} c) \overset{*}{1} (b \text{②} c).$$

en ook

$$d \text{②} c = (a \text{②} c) \text{①} \{a \overset{1}{*} d) \text{②} c\}$$

of $$(a \overset{1}{*} d) \text{②} c = (a \text{②} c) \overset{1}{*} (d \text{②} c).$$

Interpreteert men in stelling IV de bewerking ② als vermenigvuldiging, ① als optelling, dan wordt zoowel $*$ als $\overset{*}{1}$aftrekking, en stelling IV leidt dan uit

$$a(b + c) = ab + ac \qquad \text{af} \qquad a(b - c) = ab - ac.$$

Interpreteert men echter ② als machtsverheffing, met het grondtal als tweeden component, zoodat a^b wordt b ② a, en ① als vermenigvuldiging, zoodat $\overset{1}{*}$ en $\overset{*}{1}$ deeling voorstellen, dan leidt stelling IV uit

$$(ab)^c = a^c b^c \qquad \text{af} \qquad (a : b)^c = a^c : b^c.$$

Men kan deze resultaten ook uit stelling V halen.

Interpreteert men in stelling III de bewerking ② als vermenigvuldiging, zoodat $\overset{*}{2}$ deeling wordt, en ① als optelling of aftrekking, dan leidt stelling III uit

$$(a + b)c = ac + bc \qquad \text{af} \qquad (a + b) : c = a : c + b : c$$

en uit

$$(a - b)c = ac - bc \qquad \text{af} \qquad (a - b) : c = a : c - b : c.$$

Interpreteert men ② als machtsverheffing met het grondtal als eersten component, zoodat a^b wordt a ② b, dan is $\overset{*}{2}$ de worteltrekking: $c \overset{*}{2} d = \sqrt[d]{c}$; zij verder ① de vermenigvuldiging of deeling, dan leidt stelling III

$$\text{uit} \quad (ab)^c = a^c b^c \qquad \text{af} \qquad \sqrt[c]{ab} = \sqrt[c]{a} \,.\, \sqrt[c]{b}$$

$$\text{en} \quad „ \quad (a:b)^c = a^c : b^c \qquad \sqrt[c]{a:b} = \sqrt[c]{a} : \sqrt[c]{b}.$$

Deze beschouwingen lijken mij niet ontbloot van belang voor het onderwijs; het is niet mijne bedoeling dat zij in bovenstaanden abstracten vorm aan de leerlingen zullen worden voorgezet, maar zij kunnen den leeraar er toe leiden, de aandacht te vestigen op de analogie in bouw bij de bewijzen der eigenschappen van omgekeerde bewerkingen.

De beide door den inzender gestelde vragen zou ik aldus willen beantwoorden.

1. Er zijn inderdaad meerdere opvattingen (in den zin van definities) mogelijk, maar de opvatting, die ik als laatste behandeld heb, is, voor zoover ik zien kan, de eenige, die voor het onderwijs van belang is.

2. Houdt men zich aan deze „opvatting", dan is de juiste formuleering der definitie van het begrip distributiviteit die, welke op blz. 221, regel 23—28 is gegeven. Van eene „afgrenzing" van dit begrip van de begrippen commutativiteit en associativiteit is dan geen sprake.

J. H. Schogt.

INGEKOMEN BOEKEN.

H. A. GRIBNAU, *Het geslacht van vlakke krommen.* Academisch proefschrift.

Van P. NOORDHOFF.

P. WIJDENES, *Nieuw Rekenboek* I. 2e druk. (**7e druk** van het Rekenboek voor M.U.L.O. I) . . . . *f* 0,65

P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE. *Vlakke Meetkunde* I. **11e druk**, 132 blz. 153 fig. met gradenboog en overzicht *f* 1,75, gec. . . . . - 2,—
Belangrijke verbeteringen betreffen: de meetkundige plaatsen, de cirkel en de verplaatsing van de oppervlakten van het tweede deel naar het eerste; evenredigheden en gelijkvormigheid zijn overgebracht naar het tweede deel.

BOEKBESPREKINGEN.

Prof. Dr. FRED. SCHUH en B. J. VAN TROTSENBURG, *Leerboek der Mechanica voor het Middelbaar Onderwijs*. Leiden, A. W. Sijthoff's Uitgeversmaatschappij [1937]. 323 bladzijden, prijs ingenaaid *f* 3,35.

Van hoe verschillend gehalte de Nederlandsche schoolboeken voor mechanica ook zijn, men kan ze alle onderbrengen in twee groepen: de in hoofdzaak juiste en de in hoofdzaak foutieve. Men beschikt voor deze verdeeling over twee kenmerken, welker toepassing, naar de ervaring leert, steeds tot hetzelfde resultaat voert. In hoofdzaak foutief zijn de boeken, waarin samenstelling van bewegingen verward wordt met vectoroptelling, en waarin samenstelling van bewegingen en samenstelling van krachten door elkaar worden gehaald. In deze boeken wordt iedere vectoroptelling als eene vergelijking van bewegingen ten opzichte van verschillende omgevingen voorgesteld, en wordt het z.g. parallelogram van krachten uit het z.g. parallelogram van versnellingen afgeleid. Het stemt tot tevredenheid, dat in de laatste tien of twaalf jaren geen in hoofdzaak foutieve mechanicaboeken meer verschenen zijn (als men eene onlangs verschenen herziening van een reeds lang bestaand werk uitzondert). Men dient hierbij echter te bedenken, dat de oudere, foutieve werken in gebruik gebleven zijn; men zou moeten weten, hoeveel terrein zij verloren hebben, om eene schatting te kunnen maken aangaande de verbetering van het mechanica-onderwijs.

Niemand zal wel verwacht hebben, dat de heeren Schuh en Van Trotsenburg met een in hoofdzaak foutief leerboek voor den dag zouden komen. En dat is natuurlijk ook niet het geval. Integendeel, met veel succes hebben de schrijvers gestreefd naar zuiverheid zoowel in wiskundig als in natuurkundig opzicht. De schrijvers laten aan de behandeling der mechanica eene wiskundige inleiding voorafgaan, waarin iets over graphische voorstellingen, diagrammen, limieten en differentiaalquotienten behandeld wordt. Dan volgt de behandeling der kinematica: eerst de rechtlijnige beweging van een punt, met de afleiding van snelheid en versnelling, dan een hoofdstukje over eenheden en dimensies, dan de kromlijnige beweging, en de uitbreiding der begrippen snelheid en versnelling daarop. Dit gedeelte begint met eene uitvoerige en solide behandeling van de theorie der vrije vectoren; de vectorentheorie is dus niet in de wiskundige inleiding behandeld. De behandeling der kinematica wordt besloten met eene beknopte bespreking van translatie en rotatie en eene breedvoeriger bespreking van de samenstelling van bewegingen, waarbij natuurlijk niet verzuimd is te wijzen op de beperktheid der geldigheid van het parallelogram van versnellingen. — De hoofdstukken over de grondslagen der dynamica en over de zwaartekracht zijn zeer duidelijk en uitvoerig, en geven mijns inziens den lezers een goeden kijk op deze moeilijke materie. In deze hoofdstukken, evenals in die over arbeid en arbeidsvermogen, staat niet veel belangrijks, dat ook niet in oudere schoolboeken te vinden is; eene zeer belangrijke nieuwe behandelingswijze vindt men daarentegen in het hoofdstuk over dynamica der vaste lichamen, waarin de theorie der glijdende vectoren is ondergebracht. Deze theorie behoort strikt genomen in de wiskundige inleiding thuis, maar wordt daar nooit behandeld; de traditioneele leergang geeft haar eene plaats na de grondslagen der dynamica, waar zij behandeld wordt op eene noodeloos omslachtige en tevens onvolledige manier. Deze manier heeft tot nog toe weerstand geboden aan alle pogingen tot verbetering, en vormt een der hechtste bolwerken der traditie. De heeren Schuh en Van Trotsenburg bewijzen eerst, dat de beweging van een vast lichaam onder invloed van een krachtenstelsel bepaald wordt door de vectorsom van het stelsel en het moment van het stelsel ten opzichte van de coördinatenassen. Daarna definieeren zij de aequivalentie van twee krachtenstelsels als het hebben van denzelfden invloed op de beweging van het lichaam, waaruit dan volgt, dat twee stelsels aequivalent zijn, als zij bovengenoemde grootheden gelijk hebben, of, wat zooals de schrijvers bewijzen, op hetzelfde neerkomt, als zij gelijke vectorsommen hebben en gelijke momenten ten opzichte van één bepaald punt. Hieruit wordt de vereenvoudiging van vectorenstelsels afgeleid.

Een paar bijzonderheden, waarop de aandacht wel gevestigd mag worden: de parabolische beweging is niet behandeld in het hoofdstuk over kinematica, maar in dat over dynamica van het stoffelijke punt. Bij de bepaling der zwaartepunten van puntenstelsels is uitsluitend van rechte symmetrie gebruik gemaakt, waardoor zekere bekende moeilijkheden vermeden zijn. Het boek bevat een groot aantal (1072) vraagstukken, waarvan er zeer vele een overwegend mechanisch (dus niet overwegend wiskundig) karakter hebben.

Men moet zich vooral niet voorstellen, dat de schrijvers bijzonder diep op wiskundige moeilijkheden ingaan. Integendeel. Herhaaldelijk komt het voor, dat resultaten, die slechts door moeizame ontwikkelingen kunnen worden verkregen, als van zelf duidelijk worden voorgesteld. Zoo bij voorbeeld op bladzijde 129, waar gezegd wordt: Uit de gegeven definitie volgt, dat de verrichte arbeid nul is, als in ieder punt der door het materieele punt doorloopen baan de kracht loodrecht op de baan staat. Voorts op verscheidene plaatsen in het hoofdstuk over zwaartepuntsbepaling. In het algemeen kan men zeggen, dat met limietovergangen wel wat los wordt omgesprongen. Op bladzijde 20, regel 10 wordt bij de afleiding van het theorema der samengestelde functie (opzettelijk?) niet vermeld, of limietovergang voor $\triangle x$ of voor $\triangle z$ naar nul bedoeld wordt. Voorts is het naar mijne meening een verzuim, dat terwijl vectordifferentiatie wordt toegepast, nergens eene definitie van eene vectorlimiet wordt gegeven, nog minder eenige regels voor het rekenen met zulke limieten worden afgeleid. In § 12 wordt de definitie der limietwaarde eener functie aldus gegeven: de limietwaarde van $f(x)$ voor de waarde a van x is L, als bij ieder positief getal ε hoe klein ook, een zoo klein positief getal δ bestaat, dat voor iedere x, waarvoor $|x - a| < \delta$ is, geldt $|f(x) - L| < \varepsilon$. Deze definitie heeft het bezwaar, dat men er uit kan afleiden, dat de limietwaarde nooit van de functiewaarde verschillen kan, waardoor het begrip limietwaarde overbodig wordt. Was namelijk $f(a) \neq L$, dan neme men een positief getal ε kleiner dan $|f(a) - L|$, zoodat dus $|f(a) - L| > \varepsilon$. Neemt men nu $x - a = 0$, zoodat $|x - a| < \delta$ voor iedere positieve δ, dan wordt geëischt dat $|f(a) - L| < \varepsilon$ zal zijn, hetgeen blijkbaar met het bovenstaande onvereenigbaar is.

Het is niet onmogelijk, dat men na eenig zoeken nog wel enkele plaatsen vindt, waartegen iets kan worden ingebracht. Maar vergeleken met de groote verdiensten, die dit leerboek heeft, zijn dat kleinigheden. Het boek is veel beter dan eenig ander mechanicaboek dat ik ken. Mogen wij de hoop koesteren, dat dit werk eindelijk de hoog noodige verbetering van ons mechanica-onderwijs zal brengen, die vroegere pogingen vergeefs hebben trachten te bereiken? Ik vrees, dat deze hoop ijdel zal blijken. Wie een mechanicaboek voor de hoogere burgerschool schrijft, staat voor onoverkomelijke moeilijkheden. Er moet den leerlingen in zeer beperkten tijd eene leerstof worden bijgebracht, die tamelijk omvangrijk, maar vooral zeer moeilijk is en daardoor uitvoerige toelichting vereischt. Ieder, die als leeraar in de mechanica aan zulk eene school werkzaam is, weet, hoe bijzonder moeilijk voor de leerlingen sommige kinematische begrippen zijn (versnelling, tangentieele en normale versnelling, scalaire snelheid en snelheidsvector, enz. enz.). Men kan nu twee wegen inslaan: men kan de leerstof in een boek van matigen omvang samenpersen, maar dan wordt, zooals de ervaring leert, de behandeling noodzakelijkerwijze onvolledig en slordig. Men kan ook, zooals de heeren Schuh en Van Trotsenburg doen, eene breede, volledige en duidelijke behandeling geven, maar dan is er geen doorkomen aan het boek. De schrijvers hebben dit blijkbaar wel gevoeld, zij geven althans den leeraar aanwijzingen om allerlei onderwerpen over te slaan, raden hem zelfs aan, zich van sommige onderwerpen maar wat gauw af te maken, maar de omvang van het boek wordt daardoor niet kleiner. Bovendien heeft de groote omvang ten gevolge dat de prijs, hoewel laag in verhouding tot dien omvang, hooger is dan die van eenige oudere werken, waardoor tegen de invoering van het boek allicht bezwaren van bureaucratischen aard zullen rijzen. Dat is heel jammer, want het boek zou een werkelijk saneerenden invloed op het mechanica-onderwijs kunnen hebben. Laat ons hopen, dat de bezwaren in de practijk blijken mee te vallen. J. H. S.

Prof. Dr. Hk. DE VRIES, *Inleiding tot de studie der meetkunde van het aantal.* P. Noordhoff, Groningen. (312 bladzijden, *f* 4.75, geb. *f* 5.75).

De titel en de naam van den schrijver zeggen reeds, dat men hier te doen heeft met een vlot geschreven werk, dat zich voornamelijk richt tot hen, die nog weinig schreden op het gebied van de meetkunde van het aantal hebben gezet, waarbij echter uit den aard der zaak de beginselen der analytische meetkunde bekend moeten worden ondersteld. Leerlingen en oudleerlingen van den schrijver kunnen getuigen, dat het onderwerp inderdaad zeer geschikt is om het gestelde doel, het wekken van enthousiasme voor de meetkunde, te bereiken.

Het werk is geheel gebaseerd op Schuberts „Kalkül der abzählenden Geometrie", hoewel namen als Zeuthen en Halphen niet verzwegen worden Na een bespreking van Schuberts incidentie- en coïncidentieformules, en de daarbij min of meer toevallig aansluitende toepassingen, komen als systematische toepassingen aan de orde: het puntalgemeene n-de graadoppervlak, aantallen kegelsneden en kwadrieken, en het n-de graadsstralencomplex. Het laatste hoofdstuk, gewijd aan het karakteristiekenprobleem, verwijdert zich iets meer van Schuberts boek, en draagt de sporen van den invloed van Schuh, Schaake en Van der Waerden.

In zijn voorrede duidt de schrijver aan, dat het „beginsel van het behoud van het aantal" tot onjuiste conclusies *kan* voeren, doch hij stelt zich terecht op het standpunt, dat door de wonderbaarlijke vruchtbaarheid van de Kalkül en de tallooze onderlinge contrôles op haar resultaten, het enthousiasme voor en het vertrouwen in de methode gewekt moet worden, voor men zal inzien, dat het de moeite waard is, de methode te preciseeren en zorgvuldig te grondvesten. Misschien had de schrijver aan enkele wenschen tegemoet kunnen komen door in een literatuurlijstje den weg te wijzen naar kritische en opbouwende artikelen (waaronder het werk van Van der Waerden wel een voorname rol zal spelen).

De verschijning van dit nieuwe deel van Noordhoffs serie is van harte toe te juichen, niet wegens het feit dat Schuberts werk niet meer te verkrijgen is, doch om de keuze en rangschikking der stof, en de enthousiaste en didactische wijze, waarop deze is voorgedragen.

L. J. Smid.

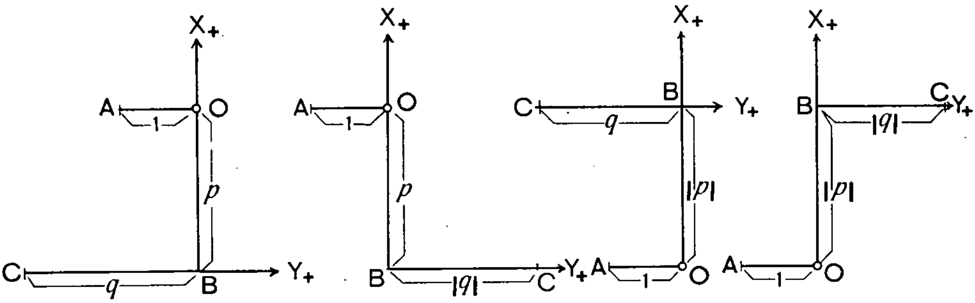
DE FUNCTIE $y = x^2 + px + q$ EN DE VERGELIJKING $x^2 + px + q = 0$

DOOR

Dr. J. G. VAN DE PUTTE.

Op blz. 267 van de „Elementar Mathematik von höheren Standpunkt" deel II, 3e druk, bespreekt Felix Klein de Lillsche methode, waarin met behulp van twee rechte hoeken een benaderde oplossing gegeven wordt van een 3e graadsvergelijking.

We zullen deze methode toepassen op de functie $y = x^2 + px + q$ en de vergelijking $x^2 + px + q = 0$.



$p>0$, $q>0$, $p>0$, $q<0$, $p<0$, $q>0$, $p<0$, $q<0$.

Fig. 1—4.

We nemen de lengteeenheid AO aan, trekken in O de loodlijn OB op AO met lengte $|p|$, daarna in B de loodlijn BC op OB, met lengte $|q|$.

Als twee op elkaar volgende coëfficienten hetzelfde teken hebben, slaan we rechts om; als ze verschillend teken hebben, slaan we links om. In fig. 1—4 zijn de 4 verschillende gevallen aangegeven.

We nemen OX_+ als positieve x richting aan met O als beginpunt van telling en CY als positieve y richting met C als beginpunt.

We nemen nu eerst het geval $p > 0$, $q > 0$. Fig. 5.

Zij $OD = x$. We trekken $DE \perp AD$.

Dan is $\triangle$ AOD $\sim$ $\triangle$ DBE, dus:

$$AO : OD = DB : BE.$$
$$1 : x = (p + x) : BE$$
$$BE = x^2 + px.$$

Dus $\quad CE = x^2 + px + q.$

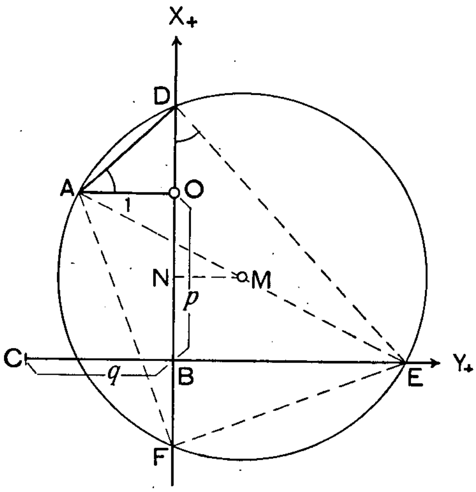


Fig. 5.

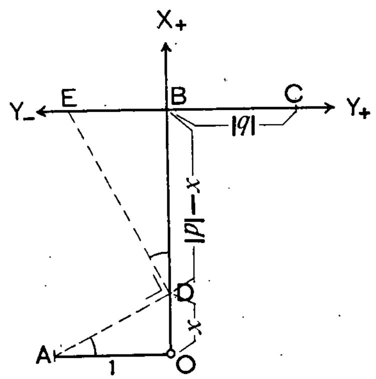


Fig. 6.

CE is dus de functiewaarde, die voor $x = OD$ wordt aangenomen. In het geval $p < 0$, $q < 0$, (fig. 6) krijgen we:

$$OD = x;\ |BD| = |p| - x. \qquad |BE| = (|p| - x)\ x.$$
$$|CE| = |q| + (|p| - x)\ x = -q - px - x^2$$

dus $CE = x^2 + px + q$.

We gaan nu verder met het eerste geval (fig. 5).

Om te onderzoeken voor welke andere waarde van x de functiewaarde CE wordt aangenomen, beschrijven we de cirkel met AE als middellijn en M als middelpunt. Deze snijdt het verlengde van OB in F. Voor $x = -|OF|$ is de functiewaarde ook CE. Trekken we $MN \perp OB$, dan is $|ND| = |NF| = k$.

De functie neemt dus voor $x = -\frac{1}{2}p + k$ en $x = -\frac{1}{2}p - k$ dezelfde waarden aan.

Bij elke waarde van x vinden we één bepaald punt E. Omgekeerd vinden we bij een bepaald punt E, alleen dan de punten D en F, als de cirkel, met AE als middellijn beschreven, de lijn OB of haar verlengden snijdt. De grensstand krijgen we, als de cirkel OB raakt. De punten D en F vallen dan samen met N (fig. 7).

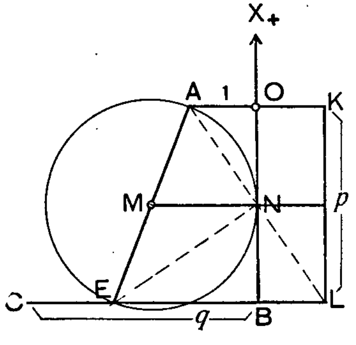


Fig. 7.

Dan is $|EB| : |NB| = |ON| : OA$
dus $|EB| = \frac{1}{4} p^2$.
dus $CE = q - \frac{1}{4} p^2$.

Het minimum van de functie is dus $q - \frac{1}{4} p^2$, het wordt bereikt voor $x = - |ON| = - \frac{1}{2} p$.

We kunnen dit ook als volgt afleiden.

Als D zich over OX verplaatst, is DE raaklijn aan de parabool, die A tot brandpunt en OX tot topraaklijn heeft. We moeten nu de vraag stellen, welke raaklijn aan de parabool CB in een zo ver mogelijk naar links gelegen punt snijdt. Dit zal zijn de raaklijn in het snijpunt van de parabool met CB.

Als $OK = AO$ is en $KL \perp AK$, is KL de richtlijn van de parabool. Het snijpunt van de middelloodlijn van AL met CB geeft het snijpunt van CB met de parabool. Deze middelloodlijn is echter NE, zodat beide redeneringen hetzelfde punt E opleveren.

We gaan nu de vergelijking $x^2 + px + q = 0$ beschouwen. De wortels zijn de nulpunten van $x^2 + px + q$. Het punt E valt dan samen met C. We beschrijven dus de cirkel met AC als middellijn. Snijdt deze de lijn OB of haar verlengden, dan zijn de wortels rëeel; bij raking, zijn de wortels gelijk; snijdt de cirkel OB niet, dan zijn de wortels complex.

De cirkel snijdt OB als $MN < MP$ (fig. 8).

Nu is $MN = \frac{1 + q}{2}$ en $MP = \frac{1}{2}$ AC
$= \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + (q - 1)^2}$,
dus $\frac{1 + q}{2} < \frac{1}{2} \sqrt{p^2 + (q - 1)^2}$.
$q^2 + 2q + 1 < p^2 + q^2 - 2q + 1$
dus $p^2 - 4q > o$.

Bij raking zal $p^2 - 4q = o$ zijn.

Uit fig. 2 en fig. 4 is onmiddellijk af te lezen, dat voor $q < 0$ de wortels

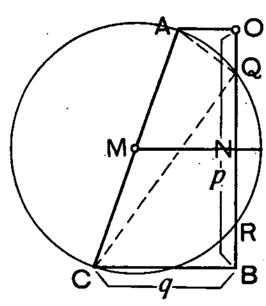


Fig. 8.

reëel zijn; de punten A en C liggen dan aan weerszijden van OB.

Verder is in fig. 8: $x_1 = -|OQ|$ en $x_2 = -|OR|$ dus

$$x_1 + x_2 = -|OQ| - |OR| = -|OB| = -p.$$

Daar $\triangle$ AOQ $\backsim$ $\triangle$ QBC is AO : $|OQ| = |QB|$: BC

dus $|OQ| \times |QB| = q$.

of $|OQ| \times |OR| = q$.

$x_1 \times x_2 = q$, waarmee ook de elementair-symmetrische functies van de wortels uit de tekening zijn afgeleid.

Dr. D. P. A. VERRIJP. †

Terwijl deze aflevering ter perse was, bereikte de redactie het bericht, dat Dr. D. P. A. Verrijp is overleden. Van den aanvang af heeft ons tijdschrift Dr. Verrijp onder zijne medewerkers geteld, en in de verschenen jaargangen vindt men vele artikelen van de hand van dezen toegewijden beoefenaar en verdediger der wiskunde. Na zijn aftreden als leeraar is Dr. Verrijp eene reeks Didaktische Causerieën begonnen, die veel beloofde, maar nu ontijdig is afgebroken. De herinnering aan zijn werk zal bij redactie en lezers nog lang levendig blijven.

J. H. S.

LEON BATISTA ALBERTI

(500 Jahre Perspektive)

DOOR

Dr. phil. GEORG WOLFF.

Als Leon Battista Alberti (1404—1472) mit 24 Jahren zum Dr. jur. in Bologna promoviert worden war, wurde der über seine Familie verhängte Bann aufgehoben, und der wissendurstige, vielseitig begabte Jurist, Sprachler, Philisoph und Techniker durfte gegen Ende 1428 den Mittelpunkt der neuen Kunst in Florenz aufsuchen. Es ist für einen strebenden Geist wie Alberti selbstverständlich, dass er die Kreise pflegte, in denen die Schrittmacher der Kultur zu finden waren. Und das war in Florenz der Kreis um Filippo Brunelleschi (1377—1446), den Architekten, Maler und Ingenieur. Zu ihm gehörte Lorenzo Ghiberti (1381—1455), Donatello (1386—1468), Luca Della Robbia (1400—1481) und der Bildhauer und Architekt Maso di Bartolomeo genannt Masaccio (1406 bis etwa 1457).

Wir wissen es von Alberti, wir wissen es von anderen Zeugnissen, dass sich dieser Zirkel lebhaft um die Fundamentierung einer neuen Kunst bemühte, einer Kunst, die der Raumausbildung ganz besondere Beachtung schenkte, und die deshalb die geometrische Darstellungsmethode pflegen musste, die unserem Sehvorgang am besten nahekommt, die *Perspektive* oder *Zentralprojektion*. Aber noch war kein Grundstein für diese neue Wissenschaft gelegt worden. Was vom Altertum herüberkam, waren lediglich spekulative Erörterungen über den Sehprozess, man hatte sich noch nicht die Frage vorgelegt, wie das durch das Sehen erzeugte Bild aussehen könne, welche Haupteigenschaften es besitze. Wir wissen auch heute noch nicht, wer die Lösung des Problems gefunden hat, wir besitzen keinerlei Quellen für diesen ersten, ernsten Schritt, wenn auch Alberti gelegentlich davon spricht, dass er aus den „Quellen der Sicherheit" geschöft habe.

Einwandfrei steht nur fest, dass Brunelleschi mit seinen Freunden um die Probleme der Perspektive gerungen haben, und dass Alberti, der als einziger nicht durch die Goldschmiede sondern durch das Tor der Wissenschaft zur Kunst kam, von ihnen in den Ideenkreis geführt worden ist. Eigenartig ist es, dass gerade er aus diesem Kreis heraus das erste Werk über die perspektivische Abbildung schrieb, denn der Versuch Ghibertis in seinem 3. Kommentar[1]) kommt über optische Erwägungen nicht hinaus. Ja, man muss leider sagen, dass der Dilettantismus des Schriftstellers Ghiberti seine Schatten auf das produktive Schaffen des tiefgründlichen, klaren, allseitig interessierten Humanisten geworfen hat. Von seinen zahlreichen Werken sei in erster Linie genannt: *Della prictura libri tre,* die unter dem Titel: *Drei Bücher über die Malerei* von H. Janitschek[2]) ins Deutsche übersetzt worden sind.

Die Entstehungsgeschichte ist nicht ohne Interesse. Alberti's Aufenthalt in Florenz war nur von kurzer Dauer, er begab sich auf Reisen, trat 1432 in Rom in die Dienste des Papstes Eugen IV. und kehrte am 23.6.1434 in die Kunstmetropole zurück. Wir wissen es, dass er in der Zwischenzeit Musse fand, sich mit der Baukunst, der Malerei und der Bildhauerei, aber auch mit der Mathematik und den Naturwissenschaften zu befassen, und in Florenz mag er seine Kunst- und Perspektivstudien mit besonderem Nachdruck fortgesetzt haben. Ende Mai 1435 hat er mit der Niederschrift seines Werkes in lateinischer Sprache begonnen, am 26.8.1435 setzte er den Schlusspunkt unter seine Vorrede. Mit Stolz berichtet sein anonymer Biograph[3]), dass er in 90 Tagen die ganze Arbeit niedergeschrieben, sicherlich ein Beweis der genialen Begabung dieses gottbegnadeten Forschers.

Diese Bearbeitung wurde dem Feldherrn Giovanni Francesco, Marchese von Mantua in besonderem Anschreiben gewidmet. Und es liegt berechtigterweise die Vermutung nahe, Alberti

---

[1]) J. v. Schlosser, Lorenzo Ghiberti's Denkwürdigkeiten. 2. Bde. J. Bard, Berlin 1912.

[2]) Hubert Janitschek, Leone Battista Alberti's Kleinere Kunsttheoretische Schriften. Wilhelm Bramüller, Wien, 1877.

[3]) Feceter vermutet, dass der Anonymus der Selbstbiograph sei. Vergl. G. Below-Fr. Meinecke, Handbuch der mittelalt. u. neueren Geschichte. Abteilung I Allgemeines: Eduard Feceter, Geschichte der neueren Historiographie, S. 105. R. Oldenbourg, München 1911.

habe diesem hohen Militär sein Werk gewidmet, weil er bereits die grosse Tragweite erkannte, die die perspektivische Wissenschaft dermaleinst in der Kriegskunst spielen würde. Perspektiviker wie Filarete, Leonardo (1442—1519), Dürer (1471—1528) und viele andere, haben in der Geschichte der Kriegswissenschaften einen festen Platz gefunden, und es ist bezeichnend, dass Guido Ubaldi del Monte (1545—1607) der *Perspectiva libri sex Pesaro* (1600), von der Kriegskunst kam, dass Simon Stevin (1548—1620) im Jahre 1608 seine Sciagraphia für die Einführung des Prinzen Moritz von Nassauen (1567—1625) in das Befestigungszeichnen schrieb. Stevin erzählt selbst, dass den Prinzen als Offizier das Zeichnen von Festungen, Städten u. dergl. nach Gefühl und Augenmass nicht befriedigte, und dass er von sich aus nach einer exakten, dem wirklichen Sehen entsprechenden Methode verlangt habe.

Alberti besass diese Vorahnung nicht. Er kannte Francesco als einen Mann von vielseitigen, geistigen Interessen, er wollte sich die Gunst dieses einflussreichen hohen Beamten erwerben.

Freilich, die Künstlerschaft konnte dieses Werk nicht studieren, weil sie im allgemeinen der lateinischen Sprache nicht mächtig waren. Er verfasste deshalb ein italienisches Manuskript, das er am 17. Juli 1436 abgeschlossen hat. Diese Ausgabe ist dem Filippo Brunelleschi in einem besonderen Anschreiben (S. 46—49) zugedacht, denn es heisst eigens: *„Das ich in toskanischer Sprache Deinem Namen widme."*

Es sind also nunmehr 500 Jahre her, dass dieses grundlegende Werk der Malerei in lateinischer und in italienischer Sprache niedergeschrieben worden ist, ein Werk, das nach der Erfindung der Buchdruckerkunst eine ganz ausgedehnte Verbreitung gefunden hat. Um so mehr haben wir Grund, das Jubiläum des halben Jahrtausend zum Anlass zu nehmen, der Bedeutung dieses Buches zu gedenken.

Mit Recht wird gesagt werden, Alberti als Kunsthistoriker liegt klar vor uns. Wir kennen seine kunstkritischen Anschauungen, die er als letzte Konsequenzen aus seiner malerischen Perspektive zog, wie er aus diesen Gesichtspunkten heraus sagte: „Die Malerei zerfällt also in drei Teile: *Umriss, Composition* und *Beleuchtung*". Daneben würdigt er auch die *Luftperspektive*

(S. 56 u. S. 62) und entwickelt das ihm eigene *Schönheitsideal* (S. 110 ff., S. 150 ff.), das die Proportionierung des Ganzen und seiner Teile zum Ziel hat. Infolgedessen wollen wir auch in diesem Aufsatz von diesen Dingen nicht handeln, sondern wir wollen seine mathematische und seine praktische Perspektive in dem Bewusstsein zu würdigen versuchen, dass heute kein Kunsthistoriker mehr einen Satz wie diesen schreiben würde:

„Es erscheint vielleicht als ein jäher Abfall, dass Leon Battista dieser pomphaften Lobrede auf die Malerei in demselben Buch [1]) ziemlich trockene technische Regeln unmittelbar folgen lässt". [2])

Seitdem Julius v. Schlosser, Heinrich Wölfflin u. viele Andere den Weg zur Objektivierung der Kunst gesucht und gefunden haben, ist die Perspektive ein integrierender Bestandteil der Kunstwissenschaft und der Kunsthistorie geworden, und es ist jeder Kunstgelehrte verpflichtet, sich mit den Grundzügen perspektivischen Schauens und seiner konstruktiven Gestaltung auseinanderzusetzen. *Diese Tatsache gab in erster Linie Veranlassung,* Alberti's *Werk daraufhin durchzusehen, was er denn eigentlich für die Entwicklung der Perspektive in der Kunst getan hat.*

Die Hinweise, die wir meistens in der Kunstliteratur über Alberti's Perspektive finden, beziehen sich auf seine „Schleiermethode"; auf die Darstellung des quadrierten Fussbodens in genauer und in approximativer Methode und vor allem wird betont, dass Alberti das perspektivische Bild als Schnitt einer Ebene mit der Sehpyramide angesehen habe. Es fehlt nicht an kritischen Bemerkungen, die seine „Methoden der perspektivischen Konstruktion, der Bestimmung des Augenpunktes usw. noch unvollkommen" nennen, ja man hat sogar geglaubt, indem man ihn anscheinend unter Ghiberti's Brille sah, ihn als Dilettanten ansehen zu sollen. Wer so urteilt, tut ihm bitter unrecht.

Auch in der mathematischen Wissenschaft hat Alberti die ihm gebührende Anerkennung noch nicht gefunden. Moritz

---

[1]) Gemeint ist: De pictura.

[2]) A. Springer, Bilder aus der neueren Kunstgeschichte, 1886. Darin der sehr lesenswerte Aufsatz in Teil 7 S. 259 ff. über „Alberti". Siehe dort S. 280.

Cantor hat ihm im 2. Band seiner Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik[1]) etwa eine gute Seite gewidmet. Es werden zwar die 10 Bücher über die Baukunst[2]) es werden die 3 Bücher über die Malerei, es wird auch „de statua", seine Proportionslehre, erwähnt und flüchtig gewürdigt. Von seinen mathematischen Erquickstunden den *„Ludi"* oder *„Piacevolezze Matematiche"* weiss Cantor unter Berufung auf Giovanni Ross[3]) zu berichten, dass man einen rechten Winkel durch die Strecken 3, 4, 5 bilden könne, „weniger genau werde der rechte Winkel, wenn man die Längen 4, 5, 6 anwende". Prüft man aber diese Stelle nach, so findet man, dass sich Alberti nicht als ein schlechter sondern als ein guter Mathematiker erweist, denn er stellt fest, dass es auch Leute gäbe, die den rechten Winkel mit den Strecken 5, 5, 7 herstellten. Diese aber irrten.[4])

Bei Cantor ist gar nicht erwähnt die schöne Abhandlung über die „Möndchen": *„De lunularum quadratura"*[5]), ferner nicht der leider verloren gegangene „Mathematische Kommentar": „Commentarii rerum mathematicarum", in welchen er die Grundlagen der analytischen Geometrie aufgestellt hat, auch nicht seine *„Elementa picturae"*,[6]) die zum Verständnis seiner perspektivischen Leistungen unerlässlich sind und noch manche Arbeit mehr.

Kein Wunder, dass die Nachwelt nicht das richtige Bild von den Verdiensten Alberti's um die Förderung des beobachtenden Denkens in der Malerei und Skulptur erhalten konnte. Unumwunden anerkannt sind seine Verdienste um das rein Künstlerische in der Kunst, nicht vollgültig gewürdigt sind seine praktisch-perspektivischen Leistungen.

Will man sie verstehen, so muss man wissen, dass er schon auf

---

[1]) B. G. Teubner, Leipzig 1913. S. 292/93. Siehe auch Bd. IV S. 580.

[2]) Uebersetzung von Max Theuer, Wien u. Leipzig 1912.

[3]) La groma e lo squadro ovvero storia dell' agrimensura italiana, Torin, 1877 S. 105.

[4]) Anicio Bonucci, Opere volgari di Leon Battista Alberti. Bd. IV S. 422. Firenze, 1847. Die Ludi umfassen die Seiten 405—440. Dieses Werk ist schon in der Ausgabe von Cosimo Bartoli, Opuscoli morali di Leon Battista Alberti, Venetia 1568 abgedruckt. Es ist die erste Drucklegung von einem Teil der Arbeiten Alberti's.

[5]) Hieronymo Mancini, Leonis Baptistae Alberti, Opere Inedita. Florenz, 1890. S. 305—307.

[5]) In den Inedita S. 47 bis 65.

der Universität Bologna bei einem Verwandten Mathematik studierte, dass er nicht nur die Geometrie des Leonardo von Pisa sondern auch die Werke anderer Mathematiker [1]) jener Zeit studiert hat, dass anscheinend Verbindungen zwischen ihm und den mathematischen Köpfen Nicolaus Cusanus (1401—1464) und Paolo Toscanelli (1397—1482) bestanden haben, dass ihm der Beiname *„Florentiner Archimedes, Euklid und Vitruv"* gegeben worden ist, und dass *der Florentiner Dichter* Ugolino Verino (1441—1500) *von ihm sagt:*

„Kleiner nicht als Euklid: Albertus, als Sieger besteht er neben Vitruv.

Nex minor Euclide est Albertus, vincit et ipsum Vitruvium." Man muss auch wissen, dass die oben genannten Elementa picturae etwa 1436, kurz nach dem Abschluss von De pictura, niedergeschrieben worden sind, um die mathematische Aufgabe des Malers noch einmal insgesamt zusammenzufassen, man muss auch wissen, dass etwa aus derselben Zeit eine kleine Note stammt:

De Punctis et Lineis Apud Pictores, [2])

in der er als angewandter Mathematiker noch einmal klarlegt, dass er den Punkt nicht als ein verfeinertes ideelles sondern als ein wirkliches atomartiges Gebilde ansehe.

Und damit kommen wir zum Kernpunkt in der Alberti'schen Auffassung. Er schrieb nicht für mathematische Fachleute, sondern für die meistens nicht humanistisch gebildeten Maler und für das grosse Publikum, denn es war jetzt Mode geworden, dass der Gebildete neben „der Geometrie und der Musik auch das Malen" lernte. Nur ein Mann von so selten hohem pädagogischen Geschick wie Alberti, einem Geschick, das in allen seinen Werken deutliche Spuren zeigt, vermochte eine solche Arbeit zu schreiben. Voraussetzung aber war, dass er selbst die Materie von hoher Warte beherrschte. Wenn Helmholtz, Planck u.a. über die Physik populäre Vorträge hielten, so konnten sie das nur, weil sie über dem Stoff standen. Und in der Tat hat sich Alberti mit der Perspektive eingehend auseinandergesetzt, ehe er darüber so schreiben konnte, wie er geschrieben hat. Das zeigt der Tat-

---

[1]) Girolamo Mancini, Vita di L. B. Alberti, 2. Aufl. Florenz 1911, S. 281 ff.
[2]) Opera Inedita S. 66.

bestand, das zeigt aber auch die erste Seite seiner Elementa picturae,[1]) wo er S. 47 sagt, dass er viel Zeit auf das Studium der Perspektive verwandt habe, dass er insbesondere, wie bereits gesagt, aus sicheren Quellen geschöpft habe. Daraus geht also überdies noch hervor, dass es anscheinend damals schon Werke über das Gebiet gegeben hat, von denen wir heute nichts wissen.

Dazu kommt die ausgeprägte Eigenschaft eines praktischen Naturwissenschaftlers, der die Beobachtung liebt, das Konkrete schätzt und gern durch Experimente bestätigt sieht, was er geistig erfassen soll. Und so sehen wir Alberti im Sinne von Roger Bacon (1214—1294) die naturwissenschaftliche Methode in die Kunst, auch in die Mathematik einfähren, ja eine neue praktische Mathematik begründen helfen. So versteht man es, wenn er von Punkten als Zeichen spricht, wenn die Linien durch Fäden, die Fläche durch ein „Leinengewebe", der Kreis durch einen Kranz vorgestellt werden.

Bedeutete es nicht einen Schritt unerhörter Kühnheit, mit der alten Tradition des *Euklid*ischen Denkens zu brechen und eigene, selbständige Wege zu gehen? Aber nicht nur hinsichtlich der Fundamente der Geometrie, sondern auch in Bezug auf die Methode des Denkens schlug er einen neuen Kurs ein. Er brach mit der starren Figur des *Euklid* ganz und gar, die beiden Dreiecke die zwischen den Sehstrahlen (Fig. 1) liegen, werden verschoben, gedreht, ihre Veränderlichkeit, ihre Abhängigkeit, ihre funktionale Verwandtschaft wird eingehend studiert, wie der Physiker die Einflüsse auf sein Experiment genau zu prüfen hat.

Das war das neue Denken der projektiven Geometrie, das dann im 20. Jahrhundert gewaltige Erfolge feiern konnte. Und in dieser Linie liegt auch die Tatsache, dass Alberti — ebenso wie Cusanus — das unendlich Kleine erkennt, worauf ihn die perspektive Abbildung eines quadrierten Flächenstückes führen musste. Nach Ludwig hat Alberti auch das Bild des unendlich fernen Punktes gekannt,[2]) und darin kann man zustimmen. Denn es wird

---

[1]) Ursprünglich italienisch geschrieben, dann ins Lateinische auf Wunsch des Humanisten Theodor von Gaza von der Universität Ferrara, der der Lehrer von Regiomontamus (1436—1476, berühmter deutscher Mathematiker) im Griechischen war, übersetzt.

[2]) Heinrich Ludwig, Lionardo da Vinci; Das Buch von der Malerei III. Bd. Wien 1882 S. 181.

DIFFERENTIAALL- EN INTEGRAALREKENING.

BETH, Dr. H. J. E., **Inleiding tot de Differentiaal- en Integraalrekening,** met toepassingen op verschillende gebieden, ... geb. f 11.50
Antwoorden . . . . - 1.—

LANDAU, Prof. Dr. EDMUND, **Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung** . . . . geb. - 13.50

VAN OS, Prof. Dr. C. H., **Inleiding tot de Functietheorie,** . . . geb. - 5.75

VAN OS, Prof. Dr. C. H., **Moderne Integraalrekening,** Inleiding tot de leer der puntverzamelingen en der integralen van Lebesgue. geb. - 5.50

RUTGERS, Prof. Dr. J. G. en Prof. Dr. F. SCHUH, **Compendium der Hogere Wiskunde III,** . . . . geb. - 9.—
Deel IV . . . . geb. - 15.50

SCHOUTEN, Prof. Dr. G., **Inleiding tot de studie der elliptische functies,** in slap linnen bandje . . . . - 2.50

SCHUH, Prof. Dr. F., **Vraagstukken over Diff. en Int. rek. en over Anal. en Beschr. Meetkunde.** Met volledige aanwijzingen ter oplossing.
Deel I A, Vraagstukken over Differentiaalrekening . . . gec. - 8.—
Deel II, Schriftelijke vraagstukken van het examen KV. . . gec. - 7.50
Supplementen van 1923 tot heden . . . . à - 0.75
Deel III, Vraagstukken over Diff. en Int. rekening, . . . gec. - 14.50

SCHUH, Prof. Dr. F., **Oneindige producten** (met aanhangsel over gelijkmatige convergentie en gammafuncties) . . . . - 4.25
geb. . . . . - 4.75

SCHUH, Prof. Dr. F., **Het Getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal,** met toepassingen op algebra, differentiaal- en integraalrekening . . . . geb. - 7.50

STIELTJES, TH. J., **Oeuvres complètes I, II** samen . . . . - 35.—
in leer gebonden . . . . - 47.50

VERRIEST, GUSTAVE, **Cours de Mathématiques générales,** 1e partie, Calcul différentiel, Géométrie Analytique à deux dimensions, 2e **druk** . . . . geb. - 6.—
2e partie, Géométrie Analytique à trois dimensions, Calcul intégral . . . . geb. - 6.—

VRIES, Prof. Dr. Hk. DE, **Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening en van de theorie der Differentiaalvergelijkingen.**
I. De differentiaal- en elementaire integraalrekening, **2e druk** geb. - 19.20
II. Integraalrekening . . . . geb. - 16.50
III. Differentiaalvergelijkingen . . . . geb. - 19.20
prijs voor de drie delen samen . . . . - 48.—

VRIES, Prof. Dr. Hk. DE, **Beknopt Leerboek der Differentiaal- en Integraalrekening** met 73 figuren . . . . geb. - 15.—

WEITZENBÖCK, Prof. Dr. R., **Invariantentheorie** f 5.—, . . geb. - 6.—

WOLFF, Prof. Dr., J., **Fouriersche Reihen mit Aufgaben** . . . geb. - 2.40

SCHOOLBOEKEN OVER DIFFERENTIAAL- EN INTEGRAAL-REKENING.

VOOREN, Dr. W. L. VAN DE, **Grenswaarden, 2e druk** . . . geb. f 3.—

WIJDENES, P. en Dr. H. J. E. BETH, **Nieuwe Schoolalgebra IV,** geb. - 2.25
" " " **Nieuwe Schoolagebra IVβ** . . - 0.80

VISSER, K. H. W., **Analytische Meetkunde, Differentiaal- en Integraalrekening, vooral voor M.T.S.** . . . . - 1.75

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA
Ook verkrijgbaar in de boekhandel

VERSCHENEN:

De vierde verkorte en vereenvoudigde druk van
MOLENBROEK—WIJDENES

Stereometrie voor M. O. en V. H. O.

Ingenaaid *f* 1.90, gecartonneerd . . . . *f* 2.25

„Beperking tot redelijke eisen".

Theorie met 142 fig. 123 bladz.
Twee projectiemethoden 18 fig. 8 bladz.

P. WIJDENES

MEETKUNDIGE VRAAGSTUKKEN

Met de bewijzen van de stellingen en meer dan 70 uitgewerkte voorbeelden. Een leerboek er naast is niet nodig.

Een verzameling vraagstukken met sterk didactisch karakter voor H.B.S., Gymnasium, Lyceum, Kweekschool, Zeevaartschool, Middelb. Technische School.

Deel I. 100 blz. 144 fig., 20 oplossingen, 4 volledige werkstukken en 3 meetkundige plaatsen; gec. met gradenboog en twee driehoeken . . . . *f* **1.40**

Deel II. 166 blz. 189 fig., 26 oplossingen, 11 volledige werkstukken en 8 meetkundige plaatsen; gec. . . . . . *f* **2.40**

Pres. ex. voor leraren op aanvrage bij P. NOORDHOFF N.V. GRONINGEN.

Leraren, die de Meetkundige vraagstukken op hun school gebruiken kunnen bij den uitgever of bij den schrijver gratis een ex. bekomen van Dr. P. MOLENBROEK,
LEERBOEK DER VLAKKE MEETKUNDE
bewerkt door P. WIJDENES (8ste, geheel herziene druk, komt in October 1937 klaar).

FUNCTIES EN GRAFIEKEN

door P. WIJDENES.

Werkschrift (18 bij 24 cm) 64 blz. met 27 fig. **Prijs** . . *f* **1.25**

3 blz. titel en voorbericht; 30 blz. over functies en grafieken; 4 blz. overzicht van enige theorie van de algebra; 5 blz. met zwarte figuren; 21 blz. met groene ruitjes; 1 blz. (en de derde zijde van de omslag) voor aantekeningen.

De theorie wordt voor het grootste deel gegeven in vragen en opgaven en het daarbij tekenen van figuren, dus volgens een sterk didactische methode; het is daardoor bijzonder geschikt voor zelfstudie.

Leraren, die het werkje niet kennen, wordt verzocht een pres. ex. aan te vragen.

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V. — Groningen-Batavia.
Ook verkrijgbaar in de boekhandel.