

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

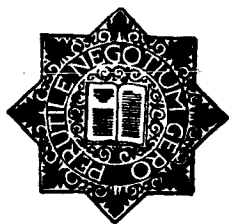
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSSEN
BANDOENG

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

12e JAARGANG 1935/36, Nr. 6.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes	241
Dr. D. P. A. VERRIJP, Didactische causerieën	247
J. T. H. GERRITSEN, Logarithmen	262
Dr. O. BOTTEMA, Het wiskundig gedeelte van het eindexamen der H. B. S.	283

Blijkbaar is nu

$$(BE, B\Gamma) = (BK, BN) = (Z, H).$$

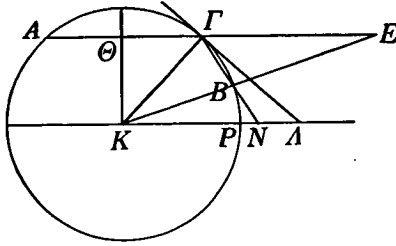


Fig. 47.

Als noodige voorwaarde voor (Z, H) vindt men

$$(Z, H) = (BK, BN) = (K\Gamma, BN) > (K\Gamma, \Gamma A) = (\Gamma\Theta, K\Theta).$$

Is omgekeerd hieraan voldaan, dan is $BN < \Gamma A$. Dat dit voldoende is, is waarschijnlijk weer ingezien op grond van de overweging, dat BN tot 0 nadert, als B nadert tot P en tot ΓA , als B nadert tot Γ .

9,4. **Spir. 8.** (fig. 48).

Thans moet E op de koorde $A\Gamma$ zoo bepaald worden, dat wan-

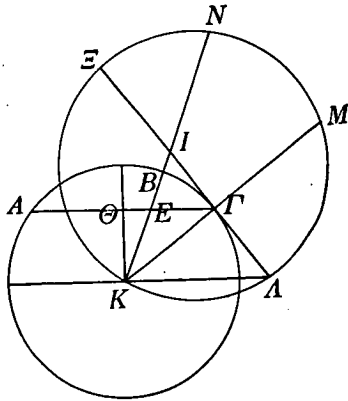


Fig. 48.

neer KE de raaklijn van den cirkel in Γ ontmoet in I ,

$$(BE, I\Gamma) = (Z, H)$$

waarbij

$$(Z, H) < (\Gamma\Theta, \Theta K) = (\Gamma K, \Gamma A).$$

Construeer nu een punt E , zoodat

$$(Z, H) = (\Gamma K, \Gamma E).$$

Hieruit volgt

$$\Gamma E > \Gamma A.$$

Beschrijf nu een cirkel door A, K, E . $K\Gamma$ snijdt dezen cirkel opnieuw in M .

Neusis: Schuif tusschen AE en den cirkel $KA E$ een lijnstuk IN in, gelijk aan ΓM en gericht naar K . Dan is KI de gevraagde rechte door K .

Bewijs:

$$(KE, \Gamma A) = (IK, IA) = (IE, IN) = (IE, \Gamma M).$$

dus

$$(KE, IE) = (\Gamma A, \Gamma M) = (\Gamma K, \Gamma E) = (KB, \Gamma E)$$

dus

$$(KE, KB) = (IE, \Gamma E) \text{ dus } (BE, KB) = (\Gamma I, \Gamma E)$$

of

$$(BE, \Gamma I) = (K\Gamma, \Gamma E) = (Z, H).$$

Dat de aan (Z, H) opgelegde voorwaarde noodig is voor de uitvoerbaarheid der constructie, is als volgt in te zien: Wegens $KI > K\Gamma$ is

$$O(KI, IN) > O(K\Gamma, \Gamma M) \text{ dus}$$

$O(IE, IA) > O(\Gamma E, \Gamma A)$. Is dus O het midden van EA , dan is $T(OA) - T(OI) > T(OA) - T(O\Gamma)$, dus $O\Gamma > OI$.

Het midden O ligt dus aan denzelfden kant van Γ als I , en daar I aan den anderen kant van Γ ligt dan A , is

$$\Gamma E > \Gamma A \text{ dus } (Z, H) = (\Gamma K, \Gamma E) < (\Gamma K, \Gamma A) = (\Gamma \theta, \theta K).$$

9.5. Spir. 9. (fig. 49).

Deze propositie is geheel analoog aan 8,4. Alleen moet nu E op het verlengde van $A\Gamma$ liggen. Dit geschiedt, wanneer $\Gamma E < \Gamma A$. In verband daarmee wordt de aan (Z, H) opgelegde voorwaarde thans

$$(Z, H) > (\Gamma \theta, K\theta).$$

werk *Over Spiralen* blijken zal, door Archimedes gebruikt in de bewijzen van indirecte limietovergangen. Dit berust hierop, dat zij aequivalent zijn met zekere limietstellingen; dit kan als volgt worden ingezien.

In 9,1 wordt bewezen, dat men B zoo kan kiezen, dat

$$(BE, \text{bg } B\Gamma) < (R, \text{gegeven cirkelomtrek})$$

m.a.w. dat, wanneer ε een willekeurig voorgeschreven grootheid is, men B zoo kan kiezen, dat

$$\frac{BE}{\text{bg } B\Gamma} < \varepsilon.$$

Dit kan worden geschreven als

$$\lim_{B \rightarrow \Gamma} \frac{BE}{\text{bg } B\Gamma} = 0$$

wat aequivalent is met

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\sec \varphi - 1}{\varphi} = 0$$

waarin $\angle B\Gamma\theta = \varphi$.

Terwijl wij tegenwoordig door berekening aantonen, dat men $\frac{\sec \varphi - 1}{\varphi}$ door keuze van φ kleiner kan maken dan ε , laat Archimedes door zijn neusis meetkundig zien, dat de verhouding $(BE, \text{bg } B\Gamma)$ een willekeurige waarde kan aannemen.

Noemen we in 9,2 $\angle \Gamma K\theta = \alpha$ en $EK\theta = \varphi$, dan staat hier voor het geval dat φ van den kleinen kant tot α nadert, te lezen

$$\lim_{B \rightarrow \Gamma} \frac{BE}{B\Gamma} = \lim_{\varphi \rightarrow \alpha} \frac{1 - \sec \varphi \cos \alpha}{\alpha - \varphi} = \frac{\Gamma\theta}{K\theta} = \text{tg } \alpha.$$

In 9,3 blijkt evenzoo

$$\lim_{B \rightarrow \Gamma} \frac{BE}{B\Gamma} = \text{tg } \alpha$$

wanneer φ van den grooten kant tot α nadert.

De proposities 9,4 en 9,5 leeren ten slotte

$$\lim_{B \rightarrow \Gamma} \frac{BE}{B\Gamma} = \text{tg } \alpha.$$

10. ELEMENTEN DER MECHANICA.

10. Voor het werk *Over Spiralen* heeft Archimedes enkele hulpstellingen over eenparige beweging nodig.

10,1. **Spir.** 1. Hierin wordt uitgesproken, dat twee wegen, die een punt in een zelfde eenparige beweging aflegt, zich verhouden als de tijden, die het daaraan besteedt.

Laat de beweging plaats hebben over AB ; beschouw hierop twee wegen ΓA en ΔE ; stel de hieraan bestede tijden opv. voor door ZH , $H\Theta$. Te bewijzen is nu

$$(\Gamma A, \Delta E) = (ZH, H\Theta).$$

Het bewijs steunt onmiddellijk op de Euclidische definitie van evenredigheid. Zij nl. $A\Delta$ een veelvoud van ΓA , ΔB een veelvoud van ΔE en zij $A\Delta > \Delta B$. (Dit is mogelijk op grond van het axioma

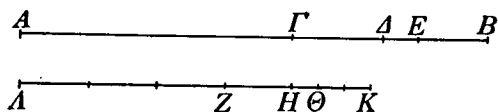


Fig. 50.

van Eudoxos dat in de inleiding van *Over Spiralen* nog eens als lemma geformuleerd wordt.

Zij nu ΔH hetzelfde veelvoud van ZH als $A\Delta$ van ΓA is, KH hetzelfde veelvoud van ΘH als ΔB van ΔE . Daar het bewegende punt over alle wegen, die aan ΓA gelijk zijn, een tijd, gelijk aan ZH , doet, blijkt, dat ΔH den tijd over $A\Delta$ voorstelt en evenzoo HK dien over ΔB . Uit $A\Delta > \Delta B$ volgt dan $\Delta H > HK$. Evenzoo wordt ingezien, dat uit ongelijkheid van willekeurige veelvouden van ZH , $H\Theta$ ongelijkheid in denzelfden zin van dezelfde veelvouden van ΓA , ΔE volgt, waaruit tot de gestelde evenredigheid besloten wordt.

Als grondslag van de redeneering dient blijkbaar een (onuitgesproken) definitie van eenparige beweging als beweging, waarin aan twee onderling gelijke wegen onderling gelijke tijden worden besteed. Het kan lijken, dat de propositie hieruit onmiddellijk volgt en dat Archimedes daarvan in het bewijs reeds gebruik maakt. Op deze wijze kan echter de stelling alleen worden ingezien voor het geval van twee wegen, die een rationale reden tot elkander hebben;

het gegeven bewijs dient, om haar geldigheid ook voor irrationale wegverhoudingen aan te toonen.

10,2. **Spir. 2.** Hierin wordt aangetoond, dat twee wegen, die in een eenparige beweging in zekere tijden worden afgelegd, zich verhouden als de wegen, die in dezelfde tijden in een andere eenparige beweging worden afgelegd. Dit volgt onmiddellijk uit 10,1.

DIDACTISCHE CAUSERIEËN

DOOR

Dr. D. P. A. VERRIJP.

III.

ANALYSE VAN DE OPGAVEN VAN HET SCHRIFTELIJK EINDEXAMEN H. B. S. B. 1935 VOOR WISKUNDE EN MECHANICA.

Eigenlijk moet ik voor de tweede maal beginnen met een excuus, want, zelfs nog minder dan de vorige maal, zal het hier te bespreken onderwerp begrepen zijn in den opzet, dien ik mij in afl. 4 van dezen jaargang bij het schrijven van mijn artikelen had voorgesteld. Toch aarzel ik niet ook dit onderwerp onder bovengenoemd hoofd te rangschikken, omdat zich vanzelf didactische opmerkingen bij de bespreking zullen voordoen.

Hoe ik tot de keuze van dit onderwerp gekomen ben? Wel, in den loop van het laatste jaar zijn mij verschillende artikelen onder de oogen gekomen, waarin de opgaven van het schriftelijk eindexamen H.B.S. B. 1935 aan kritiek hebben blootgestaan. Nu zou dit voor mij misschien nog niet een reden geweest zijn om mij meer dan gewoonlijk voor mijn oude liefde — het H.B.S. B.-onderwijs (ik ben zelf een oud-leerling en, hoewel lang geleden, ook een oud-leeraar van dit onderwijs) — te interesseeren, als niet toevallige omstandigheden mij thans er mede in contact brachten. Die interesse heeft gemaakt, dat ten slotte de redactie mij verzocht heeft het onderwerp te bespreken.

Vooraf moet ik echter kort mijn standpunt uiteenzetten. De Minister schrijft aan de deskundigen: „2. Ik verzoek U er zooveel mogelijk voor te zorgen, dat het examen op peil blijft.” Vanzelfsprekend en volkomen terecht zal de Regeering dus ook *zelf* trachten dit standpunt te handhaven. Het diploma van dit eindexamen geeft *rechten*, die in aantal en gehalte niet gering zijn. De wet-Limburg, die wellicht voor immer een voldongen feit is, heeft in 1917 die rechten vergroot, maar daarmee zijn de *plichten* zeker niet minder geworden. Men heeft dit m.i. in vroegere jaren *niet altijd* zoo goed ingezien — in 1917 waren plotseling verschillende schrif-

telijke eischen zelfs belachelijk eenvoudig —, maar er is in den tegenwoordigen tijd geen enkele reden — ik wil hierover niet verder uitweiden — om met die „plichten” te transigeeren.

Wat nu de wijze van het behandelen van het onderwerp aangaat, heb ik gemeend mij in de positie van den candidaat te moeten stellen. De oplossingen zijn dus op den voet gevolgd. Dit is de eenige manier voor een juiste beoordeeling der opgaven, al mogen dan misschien sommige lezers zeggen: nu ja, dat behoeft ge me niet te vertellen, dat weet ik ook wel! Deze manier geeft mij bovendien de gelegenheid de noodige bijbehorende opmerkingen te plaatsen, een kort oordeel over elk stel afzonderlijk uit te spreken en ten slotte een eindbeschouwing te houden.

ALGEBRA.

1. Omtrent de wortels x_1 en x_2 van de vierkantsvergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ is gegeven, dat $x_1 + x_2$, x_1 en x_2 in deze volgorde een meetskundige reeks vormen.

a. Bewijs $\frac{ac}{b^2} = -2 + \sqrt{5}$ of $-2 - \sqrt{5}$.

b. Onderzoek, of de som van de bovenbedoelde reeks, als zij onbepaald wordt voortgezet, een limiet heeft (de beide onder a bedoelde gevallen te beschouwen).

a. Het spreekt wel van zelf, dat de, onmiddellijk uit het gegeven voortvloeiende; vergelijking $x_1^2 = x_1 x_2 + x_2^2$ moet behandeld worden, zooals men steeds homogene vergelijkingen of uitdrukkingen in x_1 en x_2 behandelt, nl. door gebruik te maken van $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$. (Het is den leerlingen genoeg voorgehouden, dat substitutie van de waarden van x_1 en x_2 zelf een allerongeschiktste behandeling van dergelijke vraagstukken is.) Nu volgt gemakkelijk $x_1 - x_2 = -\frac{c}{b}$, terwijl b.v. de voor de hand liggende identiteit $(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2 = 4 x_1 x_2$ verder de homogene verg. $b^4 - a^2 c^2 = 4 ab^2 c$ levert, die, omgezet in een vierkantsvergelijking in $\frac{ac}{b^2}$, terstond de gevraagde uitkomsten oplevert.

b. Uit $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ en $x_1 - x_2 = -\frac{c}{b}$ volgt nu de reden r

der reeks $\frac{x_2}{x_1} = \frac{-b^2 + ac}{-b^2 - ac} = \frac{1 - \frac{ac}{b^2}}{1 + \frac{ac}{b^2}}$ na een kleine herleiding:

$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ of $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, hetwelk dus alleen in het eerste geval voor r een waarde tusschen -1 en $+1$ geeft, zoodat dan de som der reeks een limiet heeft.

Anders. Men kan r ook direct vinden door oplossing van de vergelijking $r^2 + r - 1 = 0$, die uit $x_2^2 + x_1 x_2 - x_1^2 = 0$ volgt. (En dan is ook sub a af te leiden.)

2. De functie $u = {}^2\log(ax^2 + bx + c)$ bereikt voor $x = 4$ de waarde 2.

De functie $z = 2 - (ax^2 + bx + c)$ bereikt voor $x = -6$ de waarde 1.

Tussen a , b en c bestaat de betrekking $ac + b = 0$.

De functie $y = ax^2 + bx + c$ is positief voor $x = 0$.

a. Laat door berekening zien, dat uit deze gegevens volgt:

$$a = -\frac{1}{15}, b = \frac{4}{15} \text{ en } c = 4.$$

Men substitueert deze waarden in de drie functies y , u en z .

b. Bestaat voor iedere waarde van x een waarde van y , u en z en zo neen, voor welke van de functies en voor welke waarde(n) van x niet?

c. Onderzoek, of de functies de waarde nul aannemen en voor welke waarden van x dit geschiedt.

d. Onderzoek, of de functies uiterste waarden aannemen, van welke aard zij zijn, voor welke waarde(n) van x dit geschiedt en hoe groot die uiterste waarden zijn.

Aan x worden alleen eindige reële waarden toegekend. De gevraagde grootheden moeten, voor zoover zij niet meetbaar zijn, in 4 decimalen benaderd worden met behulp van de logarithmentafel.

a. De gegevens leveren onmiddellijk de vergelijkingen

$$16a + 4b + c = 4; \quad -36a + 6b - c = 0;$$

$$ac + b = 0; \text{ benevens } c > 0.$$

Drukt men nu door middel van de eerste en de tweede vergelijking a en b in c uit en substitueert de gevonden uitdrukkingen in de derde vergelijking (gewone theorie: 3 vergelijkingen met 3 onbek., 2 er van van den eersten en 1 van den tweeden graad!), dan ontstaat de vierkantsvergelijking $-5c^2 + 2c + 72 = 0$, die als pos. wortel $c = 4$ geeft enz. a en b .

b. Nu is $y = -\frac{1}{15}x^2 + \frac{4}{15}x + 4$; $u = {}^2\log(-\frac{1}{15}x^2 + \frac{4}{15}x + 4)$; $z = 2\frac{1}{15}x^2 - \frac{4}{15}x - 4$, zoodat de vraag natuurlijk alleen ontkennend kan beantwoord worden voor u , daar $-\frac{1}{15}x^2 + \frac{4}{15}x + 4 = -\frac{1}{15}(x + 6)(x - 10)$ en deze laatste functie negatief is voor $x < -6$ en voor $x > 10$.

c. y blijktbaar voor $x = -6$ en $x = 10$.

u voor $-\frac{1}{15}x^2 + \frac{4}{15}x + 4 = 1$, dus $x = 9$ en $x = -5$.
 z niet, daar $\frac{1}{15}x^2 - \frac{4}{15}x - 4$ niet tot $-\infty$ kan naderen.

d. y volgens een der twee in de lagere wiskunde te behandelen methoden $= -\frac{1}{15}\{(x-2)^2 - 64\} = \frac{64}{15} - \frac{1}{15}(x-2)^2$, dus maximum $= 4\frac{4}{15}$ voor $x = 2$.

u verkrijgt blijktbaar ook een maximum voor $x = 2$, nl.

$$2\log \frac{64}{15} = \frac{\log \frac{64}{15}}{\log 2} = \text{enz.}$$

$z = \frac{1}{2^v}$ verkrijgt blijktbaar een minimum voor $x = 2$, nl.

$$\frac{1}{2^{\frac{64}{15}}} = \text{enz.}$$

Men kan veilig zeggen, dat in de beide algebra-opgaven niet het geringste aanwezig is, dat aan een behoorlijk onderlegde(n) leerling eenig hoofdbreken behoeft te kosten. De beschikbare tijd ($2\frac{1}{2}$ uur) is ook ruim voldoende om het werk geheel af te maken.

TRIGONOMETRIE.

1. R is de straal van de omgeschreven cirkel van de driehoek ABC. X , Y en Z zijn de middens van de kleinste der bogen, opvolgend door de zijden BC, CA en AB onderspannen. (Bedoeld is blijkbaar: X , Y en Z zijn de middens der bogen BC, CA en AB, die opv. tegenover de hoekpunten A, B en C liggen).

a. Bewijs, als O_1 de oppervlakte van driehoek ABC voorstelt:

$$O_1 = 2 R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

b. Bewijs (met gebruikmaking van het onder a. bewezene), als O_2 de oppervlakte van driehoek XYZ voorstelt:

$$O_2 = 2 R^2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

c. Als driehoek ABC gelijkbenig is en $O_2 = 2 O_1$, bereken dan de tophoek van die gelijkbenige driehoek.

d. Bewijs, dat voor de gelijkheid van O_1 en O_2 nodig is, dat driehoek ABC gelijkzijdig is.

a. Deze gemakkelijk te bewijzen formule vindt men tegenwoordig in de leerboeken der trigonometrie in de theorie aangetoond.

b.*) Daar $\angle X = \frac{1}{2} (\text{bg } YA + \text{bg } AZ) = \frac{1}{2} (\angle B + \angle C) = 90^\circ - \frac{1}{2} A$ enz. is, levert de toepassing van de formule in sub a. onmiddellijk de te bewijzen formule voor O_2 .

c. Als $\angle C$ de tophoek van den gelijkbeenigen driehoek is, vindt men, bedenkende, dat $\sin A = 2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A$ enz.:

*) Men excuseere in den druk *schuine* breukstrepen, die ik in mijn lessen *nooit* schreef.

$$1 = 16 \sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C$$

Vanzelf volgt:

$$1 = 8 \{ \cos \frac{1}{2} (A-B) - \cos \frac{1}{2} (A+B) \} \sin \frac{1}{2} C$$

$$1 = 8 (1 - \sin \frac{1}{2} C) \sin \frac{1}{2} C$$

Deze vierkantsvergelijking in $\sin \frac{1}{2} C$ geeft dan $\sin \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} \sqrt{2}$ enz.

d. is een wijziging van sub c. Men vindt nu natuurlijk:

$$4 \{ \cos \frac{1}{2} (A - B) - \sin \frac{1}{2} C \} \sin \frac{1}{2} C = 1.$$

Voor het gemak $\cos \frac{1}{2} (A - B) = \delta$ noemende en weer de vierkantsvergelijking in $\sin \frac{1}{2} C$ oplossende vindt men $\sin \frac{1}{2} C = \frac{1}{2} \delta \pm \frac{1}{2} \sqrt{\delta^2 - 1}$. Daar δ^2 hoogstens 1 kan zijn, terwijl hier de discriminant niet negatief mag zijn, volgt natuurlijk: $\delta = 1$, dus $C = 60^\circ$. Maar mutatis mutandis is ook $A = B = 60^\circ$, hetgeen blijkbaar ten slotte ook uit $\delta = 1$ volgt.

Bij sub c. en d. van dit vraagstuk kan men zeggen, dat degene, die met de oplossing geen raad weet, eenvoudig geen voldoende inzicht heeft in de oplossing van goniometrische vraagstukken.

2. Als van de driehoek ABC, die stomphoekig in C is, nog gegeven is, dat de hoogtelijn CD gelijk is aan het lijnstuk tussen C en het hoogtepunt van de driehoek, bewijs dan:

a. $CD = R \cos A \cos B$, waarin R de straal van de omgeschreven cirkel van driehoek ABC is.

b. $\sin A \sin B + \cos C = 0$.

c. De hoek C heeft de maximale waarde, als de driehoek gelijkbenig is.

Bereken de grootte van de hoek C in het onder c genoemde geval.

a. en b. Noemen we E het voetpunt der hoogte uit A en het hoogtepunt H, dan zal men uit $\triangle CEH$ toch onmiddellijk vinden

$CH = \frac{CE}{\sin EHC} = \frac{-b \cos C}{\sin B}$, terwijl $DC = b \sin A$. Gelijkstelling van beide geeft direct sub b.

Nu is $DC = b \sin A = 2 R \sin B \sin A$, terwijl sub b, omdat $\cos C = -\cos (A + B)$ is, bij ontwikkeling geeft: $2 \sin A \times \sin B - \cos A \cos B = 0$. Dan blijkt ook terstond sub a.

c. Nu gaan we, vanzelfsprekend, uit van 't zooeven verkregene (of, als men wil, ook van sub b met behoud van $\cos C$; in den grond komt het op 't zelfde neer):

$$4 \sin A \sin B - 2 \cos A \cos B = 0$$

en schrijven allicht

$$2 \{ \cos (A - B) - \cos (A + B) \} - \{ \cos (A + B) + \cos (A - B) \} = 0.$$

$$\cos (A + B) = \frac{1}{3} \cos (A - B).$$

Bij de grootste waarde van C , dus de kleinste van de scherpe $(A + B)$, dus de grootste waarde van $\cos (A + B)$, moet dan $A = B$ zijn. Verder dan: $\cos (180^\circ - C) = \frac{1}{3}$ enz.

Naar ik meen, hebben juist de *trigonometrie*-opgaven aan de meeste kritiek blootgestaan. Heusch, ik vind hier afbrekende kritiek totaal onverdiend. De besproken herleidingen *moet* elke candidaat paraat hebben!

STEREOMETRIE.

1. Van een afgeknotte cirkelkegel is M het middelpunt van het grondvlak, N dat van het bovenvlak.

R en r zijn opvolgend de stralen van grond- en bovenvlak, h is de hoogte.

A is een punt van de omtrek van het grondvlak, C een punt van de omtrek van het bovenvlak, zò dat AC een beschrijvende lijn van de kegelmantel is. B is een punt van de omtrek van het bovenvlak, zò dat $\angle BC = 90^\circ$.

Men verbindt A met B .

a. Bereken de lengte van AB .

b. Bereken de afstand der kruisende rechten MN en AB .

c. Als de onder b genoemde afstand de rechte MN snijdt in het punt P , bewijs dan, dat MN door dat punt P in stukken wordt verdeeld, die zich verhouden als R^2 en r^2 .

a. Trekt men $BD \parallel NM$, dan is AB niet anders dan de, in elk stereometrie-boek vermelde, lengte van de diagonaal van het rechth. par. pip., dat $MA = R$, $MD = r$ en $MN = h$ tot ribben heeft, dus $\sqrt{R^2 + r^2 + h^2}$.

b. Ook hier niet anders dan gewone theorie: de afstand van MN tot het vlak ADB of de hoogte ME van $\triangle ADM$, dus $\frac{Rr}{\sqrt{R^2 + r^2}}$.

c. Laat de projectie van MN op 't vlak ADB de lijn AB in Q snijden, dan is $MP = EQ$ en nu moet men wel terstond inzien, dat een eenvoudige evenredigheid in $\triangle ADB$ $\left(AE = \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + r^2}} \right)$

$EQ = \frac{R^2 h}{R^2 + r^2}$ doet vinden. De te bewijzen verhouding blijkt dan terstond.

2. Een dakvormig lichaam $ABCDEF$ heeft als grondvlak het vierkant $ABCD$. De zijvlakken $ABFE$ en $DCFE$ maken hoeken van 30° met het grondvlak; de zijvlakken BCF en ADE hoeken van 60° . De zijde van het grondvlak heeft de lengte a .

a. Bereken de inhoud van het lichaam.

Men beschrijft de rechte cirkelkegel, die de ingeschreven cirkel van ABCD tot grondvlak heeft en waaraan ADE raakvlak is.

b. Bepaal de verhouding van de delen, waarin de bol, die de hoogte van de kegel als middellijn heeft, de kegelmantel verdeelt.

c. Bereken de lengte van de kortste lijn over het kegelvlak van F tot het midden van AB.

a. De candidaat moet natuurlijk van het afgeknot driezijdig prisma de ribbe EF berekenen en hij zal dan toch allicht het gelijkb. trap., dat de doorsnede is van het lichaam met een vlak door EF loodrecht op het vlak van het vierkant, teekenen. De hoogte van dit trap. ($= \frac{1}{2} a \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{6} a \sqrt{3}$) weet hij, als zijnde de hoogte van den gelijkbeenigen driehoek (basis $= a$, basishoeken $= 30^\circ$), die de rechte doorsnede van het afgeknot driez. prisma is. In genoemd gelijkb. trap. is dan $EF = a - 2 \times \frac{1}{6} a \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{2}{3} a$. Rechte doorsnede $\times \frac{1}{3}$ v. d. som der opst. ribben doet dan toch terstond vinden de gevraagde inhoud

$$= \frac{1}{2} a \times \frac{1}{6} a \sqrt{3} \times \frac{1}{3} (a + a + \frac{2}{3} a) = \frac{2}{27} a^3 \sqrt{3}.$$

b. De asdoorsnede van den kegel is een gelijkz. driehoek, terwijl de bol dien driehoek volgens een cirkel snijdt, die de hoogte ($= \frac{1}{2} a \sqrt{3}$) tot middellijn heeft. Het apothema van den afgesneden kegelmantel is dan blijkbaar $\frac{1}{2} a \sqrt{3} \cdot \cos 30^\circ = \frac{3}{4} a$ [als men wil ook $(\frac{1}{2} a \sqrt{3})^2 : a$]. De afgesneden kegelmantel is dus $\frac{9}{16}$ van den geheelen mantel enz.

c. Dat men voor de berekening van zoo'n kortste lijn(stuk) FG het oppervlak moet ontwikkelen in een plat vlak, moet toch wel iedere candidaat weten. Dit ontwikkelde oppervlak is hier een cirkel-sector, waarvan de tophoek $\angle T = 180^\circ$ gemakkelijk blijkt uit de bekende evenredigheid $\angle T : 360^\circ = 2 \pi \times \frac{1}{2} a : 2 \pi a$. En daar FA over $\frac{1}{4}$ van het oppervlak getrokken is, heeft men FA als derde zijde van den driehoek TFG, die tot zijden heeft $TG = a$, $TF = a$ — de opstaande zijde van bovengenoemd trapezium (of $\frac{1}{3} a$) $= \frac{2}{3} a$ en tot ingesloten hoek $\frac{1}{4} \times 180^\circ = 45^\circ$. De cosinusregel (b.v.) levert dan natuurlijk 't antwoord $\frac{1}{3} a \sqrt{(13 - 6 \sqrt{2})}$.

In het geheele stereometrie-werk is *niets*, dat niet — men kan zeggen — „vanzelf loopt”.

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE.

1. Neem de X-as 12 cm van de bovenkant van het papier. Een punt P ligt in het horizontale projectievlak 5 cm vóór het verticale; neem

P 10 cm van de linkerkant van het papier. Door P gaan de vlakken α en β ; de horizontale doorgang van α maakt met de X-as een hoek van 45° met opening naar links, de verticale een hoek van 60° met opening naar rechts; de horizontale en de verticale doorgang van β maken beide een hoek van 30° met de X-as met opening naar rechts.

a. Teken door P een rechte die gelijke hoeken met beide projectievlakken maakt, in α ligt en waarvan het verticale doorgangspunt Q boven de X-as ligt.

b. Teken in β het tweede been van de rechte hoek QPR.

c. Teken de driehoek PQR, als tg $\angle$ PQR = $\frac{1}{3}$ is.

a. Nadat de doorgangen van α en β met V_1 en V_2 geteekend zijn, heeft men Q (Q_2) te tekenen in α_2 boven de X-as op een afstand van deze = P_2P_1 enz.

b. Door P(P_1) een vlak aanbrengen $\perp$ PQ (bekende constructie) en de doorsnede van dit vlak γ met β tekenen. Zij S(S_2) 't snijpunt van β_2 en γ_2 .

c. Door omslaan van het hor. proj. vl. van PQ in V_1 vindt men de lengte van QP_1 , waarvan $\frac{1}{3}$, in twee richtingen van P af, wordt afgepast op, in V_1 verkregen, PS, na omslaan van 't hor. proj. vl. van PS. Terugwerken geeft R_1 en R_2 , benevens R_1' en R_2' .

De oplossing is blijkbaar ook te geven door neerslaan (b.v. in V_1) van het vlak QPS enz.

2. In het horizontale projectievlak ligt een gelijkzijdige driehoek ABC. A ligt 5 cm van de linkerkant van het papier en $3\frac{1}{2}$ cm vóór de as. AB is 7 cm lang en maakt met de X-as een hoek van 60° met opening naar rechts. B ligt verder van de X-as dan A; C ligt rechts van A. Deze driehoek ABC is het grondvlak van een scheef driezijdig prisma, waarvan de opstaande ribben met BC een hoek van 90° en met het horizontale projectievlak een hoek van 60° maken.

a. Construeer, als AD een van de opstaande ribben is, de hoek, die de vlakken CAD en BAD met elkaar maken.

b. Als gegeven is, dat in het prisma een bol beschreven kan worden, teken dan de horizontale en de verticale projectie van het prisma.

c. Construeer het raakpunt van de ingeschreven bol aan het grondvlak.

Nemen we de helling der opstaande ribben: naar rechts.

a. Nadat het grondvlak ABC ($A_1B_1C_1$) geteekend is, teekent men natuurlijk door A, B en C loodlijnen op B_1C_1 . Daarop zullen dus liggen A_1D_1 , B_1E_1 en C_1F_1 (D_1 , E_1 en F_1 voorloopig nog onbepaald). Het in V_1 omgeslagen hor. proj. vlak van AD bevat de hoek $D_1AD = 60^\circ$. Men kan daarin een willekeurig punt P op AD beschouwen en dan verder P_1 en P_2 construeeren. Dan volgt A_2D_2 en evenwijdig hieraan B_2E_2 en C_2F_2 (ook D_2 , E_2 en F_2 voorloo-

pig nog onbepaald). De standdriehoek P_1PQ op AB (Q op AB) wordt omgeslagen in V_1 , waardoor met de lengte van QP ook het in V_1 omgeslagen vlak BAD te teekenen is. Het in V_1 omgeslagen vlak CAD bevat dezelfde hoek BAD . Nu de gewone constructie van den standhoek op AD , die men ook in elk stereometrieboek kan vinden! Of men kan de andere in de beschrijvende meetkunde gangbare constructie voor dezen standhoek volgen.

b. Voor de constructie van dezen bol denkt men zich natuurlijk de vlakken, die de ruimtehoeken, welke AB , AC en BC tot ribben hebben, middendoor deelen. Middendoor deelen van $\angle P_1QP$ in bovengenoemden standdriehoek doet gemakkelijk een ander punt dan A van de, in het in V_1 omgeslagen horizontaal projecteerend vlak van AD gelegen, snijlijn der zooeven genoemde vlakken, welke door AB en AC gaan, vinden; daarmee de omgeslagen snijlijn zelf. In dat omgeslagen projecteerend vlak teekent men ook de lijn, die uit G , 't midden van BC , getrokken, met GA een hoek van $\frac{1}{2}(180^\circ - 60^\circ) = 60^\circ$ maakt. Het snijpunt van nu twee in dat omgeslagen projecteerend vlak gelegen lijnen geeft het middelpunt van den bol, verder dan ook in projecties. Daarmede wordt de hoogte van het prisma (dubbele straal van den bol) bekend. Enz.

c. De constructie van dit raakpunt is blijkbaar in de vorige constructie begrepen.

Geeft de candidaat óók het andere geval (helling d. opst. ribben naar links), dan is een afzonderlijke teekening wel wenschelijk.

Ik kan niet anders zeggen dan dat de constructies, die in de beide vraagstukken zijn uit te voeren — no. 1 is wel ontzettend eenvoudig — direct voor de hand liggen.

MECHANICA.

1. a. Een stoffelijk punt loopt in 24 uur eenparig een cirkel rond met een omtrek van 40 000 000 m. Hoe is de versnelling van het punt gericht, en hoe groot is zij, uitgedrukt in C.G.S. eenheden?

b. Op een vast lichaam werken twee krachten langs kruisende rechten. Hoe zoudt gij die twee krachten kunnen vervangen door een enkele kracht en een koppel, als gegeven is, dat die kracht door een gegeven punt A van het lichaam moet gaan? Zijn grootte en richting van die kracht afhankelijk van de keuze van het punt A ? Zou men het punt A zo kunnen kiezen, dat het koppel verdwijnt?

c. Leid de formule af voor den afstand van het zwaartepunt van een homogene cirkelboog tot het middelpunt van de cirkel.

a. Dat $a = \frac{v^2}{r} = \frac{2\pi p}{T^2}$ (p = omtrek cirkel; T = omloopstijd) naar het middelpunt van den cirkel gericht is, terwijl $1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$

en $1 \text{ u.} = 60 \times 60 \text{ sec.}$, zal — hoop ik — elke kandidaat toch wel geweten hebben!

b. En dat men in A twee tegengestelde krachten $\underline{\underline{K_1}}$ en ook twee $\underline{\underline{K_2}}$ heeft aan te brengen, dan twee krachten en twee koppels, ieder paar voor zich, heeft samen te stellen, en dat verder richting en grootte van de resulterende kracht onafhankelijk is van de keuze van A eveneens! Alleen ter beantwoording van de vraag of het koppel kan verdwijnen moet de kandidaat even beredeneeren dat: de armen der twee koppels nooit tegelijk nul kunnen zijn en de assen der koppels wegens de kruising van K_1 en K_2 nooit tegengesteld kunnen worden.

c. In elk leerboek der mechanica te vinden!

2. Een stoffelijk punt, zwaar 20 kg; beweegt zich onder de invloed van een horizontale kracht van 15 kg over een ruw horizontaal vlak langs een rechte ABCD. In het punt A heeft het stoffelijk punt reeds een snelheid van 10 m/sec in de richting van de kracht.

De wrijvingscoëfficiënt bedraagt voor het stuk AB lang 60 m, $\frac{1}{2}$; voor het stuk BC, eveneens lang 60 m, $\frac{3}{4}$ en voor het stuk CD 1.

Het punt komt in D tot rust.

a. Bepaal, zonder gebruik te maken van de begrippen arbeid en arbeidsvermogen, de lengte van CD.

b. Hoe groot is de hoeveelheid arbeidsvermogen van beweging in het punt A?

c. Hoe groot is de arbeid, die tijdens de beweging van A tot D door de kracht van 15 kg en die, welke door de wrijving is verricht?

N.B. De berekeningen uit te voeren in het groot-statische stelsel van eenheden. De versnelling van de zwaartekracht is 10 m/sec^2 .

a. De kandidaat zal voor AB opschrijven: $\frac{20}{10} a_1 = 15 - \frac{1}{2} \times 20$ en vinden $a_1 = 2\frac{1}{2}$; verder $10 t_1 + \frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times t_1^2 = 60$ en vinden $t_1 = 4$. Dan is $v_B = 10 + 2\frac{1}{2} \times 4 = 20$. Voor BC zal hij opschrijven $\frac{20}{10} \cdot a_2 = 15 - \frac{3}{4} \times 20$ en vinden $a_2 = 0$, dus $v_C = v_B = 20$. Voor CD komt $\frac{20}{10} \cdot a_3 = 15 - 20$, dus $a_3 = -2\frac{1}{2}$, dus $20 - 2\frac{1}{2} \times t_3 = 0$, waaruit $t_3 = 8$ en dan verder $x = 20 \times 8 - \frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 8^2 = 80$, dus CD = 80 m.

b. Natuurlijk $\frac{1}{2} \times \frac{20}{10} \times 10^2 \text{ kgm} = 100 \text{ kgm}$.

c. $15 \times (60 + 60 + 80) \text{ kgm} = 3000 \text{ kgm} = (-\frac{1}{2} \times 20 \times 60 - \frac{3}{4} \times 20 \times 60 - 20 \times 80) \text{ kgm} = -3100 \text{ kgm}$.

3. Twee hellende vlakken, V en W, staan loodrecht op elkaar en snijden elkaar volgens een horizontale lijn.

Een staaf AB, zonder gewicht, draagt in zijn midden een stoffelijk punt met massa m en steunt met het uiteinde A op het vlak V en met het uiteinde B op het vlak W; AB ligt in alle hierna genoemde gevallen in een vlak loodrecht op V en W.

a. Indien beide hellende vlakken volkomen glad zijn, bewijs dan, dat in de evenwichtsstand (zodanig, dat geen der beide uiteinden in

de snijlijn van V en W ligt) het zwaartepunt van de staaf AB verticaal boven de snijlijn van V en W ligt.

b. Welk soort evenwicht heeft de staaf in die stand? Licht het antwoord toe.

c. Indien beide vlakken ruw zijn, zijn nog andere evenwichtsstanden mogelijk.

Geef in een figuur de krachten aan, die in een der twee uiterste gevallen (dus als de staaf op het punt is uit te glijden) op de staaf werken.

Wat weet gij in dit geval van de grootte der wrijving?

a. en b. De candidaat zal toch — hopen we — nog wel weten, dat de mediaan uit het hoekpunt van den rechten hoek in een rechth. driehoek gelijk is aan de halve hypotenusa en dus constant is, waardoor m in 't hoogste punt van een cirkelboog ligt, zoodat wankelbaar evenwicht optreedt?

c. En wanneer nu, m zich in een ander (lager) punt van den cirkelboog bevindende, de staaf in evenwicht is, maar op 't punt is uit te glijden, dan zullen toch, behalve mg , de krachten N_1 , $f_1 N_1$, N_2 , $f_2 N_2$ door ieder wel in teekening te brengen zijn, waarbij natuurlijk overwogen moet worden, welke richting $f_1 N_1$ en $f_2 N_2$ hebben. De slotvraag is niet geheel duidelijk, maar er is wellicht bedoeld als antwoord te geven, dat dan f_1 en f_2 zekere bepaalde (maximale) waarden hebben voor bepaalde oppervlakken in verband met de geaardheid van de staaf.

Bij no. 1 kan men zeggen, dat maar een schijntje van inzicht bij de oplossing van de drie vragen a , b en c vereischt wordt.

Bij no. 2 is het niets anders dan achtereenvolgens gegeven en berekende getallen in de meest elementaire formules substitueeren.

No. 3 is toch al *hoogst* eenvoudig gehouden. Niet de geringste berekening wordt geischt.

Het geheel der mechanica-opgaven moet toch wel als bijzonder simpel beschouwd worden.

Ik heb mij tenslotte ernstig afgevraagd, wat nu toch de oorzaak (oorzaken) van de klachten is (zijn), die men over deze opgaven heeft kenbaar gemaakt. Is dit werk moeilijker dan voorheen? Zeker niet moeilijker dan het werk, dat in mijn leerlingtijd en in den tijd — enkele jaren daarna — waarin ik leeraar aan een H.B.S. was, werd opgegeven. Het is tegenwoordig anders (o.a. ook wel door de — feitelijk — mindere stof; er wordt thans b.v. immers niet „opzettelijk” planimetrie ge-examineerd), zeker, maar daarom nog niet

moeilijker. Ik zou eer zeggen: gemakkelijker,¹⁾ want het werk, dat nu en ook in de onmiddellijk aan '35 voorafgaande jaren is opgegeven, sluit zich direct aan bij door de kandidaten geleerde theorie of op de les opgeloste eenvoudige vraagstukken, die op die theorie volgen, terwijl bij dat vroegere werk dikwijls meer combinatievermogen van de leerlingen geeischt werd.

Zijn de opgaven moeilijker dan in die onmiddellijk aan '35 voorafgaande jaren? Ook dit is geenszins het geval. Ik zou zeggen: nog meer sluiten de opgaven van '35 aan bij wat de kandidaten *geleerd* moeten hebben. In hun soort zijn de opgaven uitstekend, maar toch zou het mij niet verwonderen, indien b.v. van de zijde van het hooger onderwijs de vraag gesteld werd, of die opgaven wel *voldoende* waarde hebben; of ze niet te weinig gelegenheid geven om te toonen, wat de kandidaten *zelf vermogen*. Het is een dergelijke vraag, die ik me ook wel eens — op positieve gronden — gesteld heb bij de eenvoudige opgaven (dikwijls in groot aantal — het is al juist als bij het H.B.S.-index.), die tegenwoordig bij 't toelatingsexamen voor H.B.S. (of gymn.) voor rekenen worden opgegeven, nl. of deze eveneens niet te weinig doen zien, of er wat meer in de candidaatjes zit dan een beetje vlugheid van cijferen of het paraat hebben van zeer eenvoudige gedachtengangetjes. Men ziet in beide gevallen m.i. te veel voorbij, dat bij *onze* leerlingen de secundaire functie van oneindig veel meer belang is dan de primaire.²⁾

Hoe dit ook zij, wanneer nu, ondanks al dit gemakkelijke werk van 1935, wordt geconstateerd,³⁾ dat het voor de kandidaten „im groszen und ganzen” te moeilijk is, dan is maar één directe conclusie daaruit te trekken: dan zijn wij tegenwoordig met het leerlingenmateriaal op een bedenkelijk verlaagd peil aangeland. Want dat door de leeraren, in 't algemeen, thans slecht onderwijs is gegeven, mag ik niet aannemen; ik weet wel beter! Het is het

¹⁾ Een der groote bladen beweerde — uit onkunde — het vorige jaar bij de bespreking van mijn artikel „Resultaten bij het onderwijs in de wiskunde” precies het tegenovergestelde!

²⁾ Ik wees daarop ook in mijn rede ter gelegenheid van het tienjarig bestaan van Liwenagel in 1931.

³⁾ Ik heb nu wel statistisch materiaal van de „vrijstellingen” in 1935 gezien. Maar heeft men, ter vergelijking daarmee, ook materiaal van vorige jaren? Want dan toch eerst zou er meer te constateeren vallen.

doorwerken van een kwaad, waarvoor ik reeds in 1921 en ook verschillende malen daarna ernstig gewaarschuwd heb: een, ten opzichte van selectie voor het V.H.O., absoluut verkeerde L.O.-wet. Het hellende vlak!

NASCHRIFT VAN DE REDACTIE.

Met de strekking van het betoog des Heeren Verrijp, dat het niet wenschelijk is, het examen zeer gemakkelijk te maken, zal men het in het algemeen wel eens kunnen zijn. Over de vraag, wanneer een vraagstuk gemakkelijk, wanneer moeilijk genoemd moet worden, zal meer verschil van meening bestaan. De oplossing, die Dr. Verrijp geeft van het trigonometrivraagstuk 1d, komt vrijwel overeen met de oplossing, die als nummer 6 voorkomt in het aan dit vraagstuk gewijde artikel in jaargang XI van „Euclides” (bladz. 252); welnu, ik acht geen enkele der in dat artikel voorkomende oplossingen binnen het bereik der candidaten te liggen. Het trainen der leerlingen in het verzinnen van dergelijke, hoogst gekunstelde, oplossingen is mijns inziens onmogelijk, en bovendien geenszins wenschelijk. De Heer Verrijp schrijft: „... kan men zeggen, dat degene, die met de oplossing geen raad weet, eenvoudig geen voldoende inzicht heeft in de oplossing van goniometrische vraagstukken.” Ik geef dit toe; men kan het inderdaad zeggen.

Bijzondere welwillendheid van den Heer Verrijp tegenover deze examenopgaven blijkt wel uit het feit, dat hij afbrekende kritiek hier heusch totaal onverdiend vindt, niettegenstaande hij de oplossing van het eerste vraagstuk laat voorafgaan door een zin tusschen haakjes, aangevende, hoe het vraagstuk „blijkbaar bedoeld” is.

Omtrent vraag 1c van stereometrie zegt Dr. Verrijp: „Dat men vóór de berekening van zoo'n kortste lijn FG het oppervlak moet ontwikkelen in een plat vlak, moet toch wel iedere candidaat weten.” Ik stel daar tegenover: wat iedere candidaat moet weten, is, dat hij zich dient te onthouden van het toepassen van onbewezen stellingen en van het gebruiken van ongedefinieerde begrippen. Nu zullen wel zeer weinig candidaten de definitie kennen van de lengte van een stuk eener kromme lijn op een oppervlak, en geen enkele zal kunnen bewijzen, dat de lengte van zulk een stuk gelijk is aan de lengte van het stuk vlakke kromme, dat bij ontwikkeling

ontstaat. Een eindexamencandidaat met eenigen zin voor wiskunde, zal bij de oplossing trachten, definitie en bewijs te geven — en loopt dan natuurlijk vast, of hij onthoudt zich wijselijk van beantwoording van vraag 1c. Maar de candidaat, die het met de wiskunde zoo nauw niet neemt, zal misschien geen bezwaar gevoelen, eene berekening neer te schrijven, en heeft het vraagstuk dan „goed.” „In het geheele stereometrie-werk is niets, dat niet vanzelf loopt”, zegt de Heer Verrijp. Zeer zeker, als de candidaat maar niet al te wiskundig is aangelegd.

Ik vind het betreurenswaardig, dat examenopgaven worden gesteld, bij welker oplossing wiskundige aanleg een hinderpaal vormt, maar tevens, dat zulks door wiskundigen wordt verdedigd.

J. H. S.

NASCHRIFT VAN DEN SCHRIJVER.

Door een lang verblijf in het buitenland was mij het vorige jaar het door den heer Schogt genoemde artikel in Euclides jg. XI ontgaan. Nu, na lezing van dit artikel, ben ik nog meer versterkt in mijn meening, dat er over de opgave Trig. no. 1 sub d een dwaze drukte is gemaakt. Is juist *na* sub c het omzetten van het dubbele product van twee sinussen in het verschil van twee cosinussen iets gekunstelds? En is het iets gekunstelds om dan een vierkantsvergelijking op te lossen en daarna de discriminant de beslissende rol te laten spelen? Het eene, of althans iets dergelijks, in de goniometrie en het andere in de algebra bij de elementaire behandeling van allerlei functies is iets dat „schering en inslag” vormt! De geheele behandeling *moet* voor den candidaat *vanzelfsprekend* zijn.

De heer Schogt gispt mijn welwillendheid. En dan zeg ik: Wien is 't nooit overkomen, dat hij een opgave minder gelukkig redigeerde?

„De kortste lijn op een oppervlak”. Vooreerst heeft elke leeraar wel eens in zijn les die vraag gesteld voor een oppervlak van een lichaam door platte vlakken begrensd. En nu moest ik toch wel even glimlachen bij de philippica, die de heer Schogt houdt tegen onexactheid of „onwiskundigheid”. Ontwikkelt (uitspreiden, afwikkelen) hij niet zelf in § 172 van zijn leerboek der stereometrie (Versluys—Schogt) den kegelmantel op tamelijk onexacte wijze?

Dan doet b.v. Beth dit in zijn boek (§ 111) toch nog wel iets exacter! En is er nu verder zooveel „onwiskundigheid” voor noodig om, als oplossing in het onderhavige geval — nadat dus de cirkel-sector door limietstelling en definitie de vlakke representant geworden is van den kegelmantel —, over *dat verkregen* oppervlak een rechte lijn te trekken?

Ik geloof, dat de heer Schogt het te kort schieten der kandidaten zoekt in het hun eigen zijn van een — vermeenden — hyperwiskundigen aanleg. Maar . . . dien bezitten de kandidaten in 't algemeen juist *niet*! En dat ze dien niet bezitten, is heusch niet erg: een *overdreven* exactheid (bij leeraar en leerlingen) zou in hoogste mate remmend werken op het onderwijs!

Zoo juist komen in mijn handen de opgaven van het eindexamen der gymnasia in 1936 voor wiskunde (B). M.i. zéér geschikte opgaven!

Alleen één vraag: Had de beschikbare tijd voor Stelkunde (1½ uur) niet *iets* langer kunnen zijn? Er is immers wel eens een candidaat, die goed blijkt te zijn, als men hem maar wat meer tijd geeft.

V.

Op de vraag, in hoeverre inexactheid wenschelijk is, hoop ik binnenkort terug te komen.

J. H. S.

LOGARITHMEN

DOOR

J. C. H. GERRETSEN, (Groningen).

Tot de opvatting van het logaritmenbegrip, die onder invloed van Euler¹⁾ in de wiskundige wereld burgerrecht heeft verkregen, wordt men gevoerd door het probleem van het bepalen van de exponent van een macht, waarvan het grondtal en de waarde bekend zijn. In de schoolwiskunde is deze opvatting de algemeen gebruikelijke; aan een andere heeft men tot nu toe weinig behoefte gehad. Dit is te begrijpen. Immers, de doelstelling gaat op onze middelbare scholen in het algemeen niet ver uit boven die van het verkrijgen van een handig hulpmiddel voor de beheersing van allerlei numerische problemen, zoals die zich vooral bij de trigonometrie voordoen. Het vaardig hanteren van de tafel is veelal hoofdzak, terwijl de kennis van de eigenschappen van logaritmen zich kan beperken tot de eenvoudigste. Deze eigenschappen zijn geen andere dan triviale omvormingen van die van machten, en juist het machtsbegrip behoort tot de vertrouwdste begrippen in het arsenaal van de leerling bij het M.O. Men beperkt zich evenwel tot *rationale* exponenten, waarvoor dan gewoonlijk de eigenschappen vrij behoorlijk worden bewezen en bekommert zich niet om het feit, dat aan de behandeling van de logarithmen die van de *irrationale* exponenten behoort vooraf te gaan. Een groot bezwaar kan men dit echter niet noemen. De leerlingen zijn door de behandeling van machten met rationale exponenten er aan gewend zuiver formeel met machten te rekenen, zodat een logische leemte niet wordt opgemerkt, en zelfs het opvullen van deze leemte draagt tot het beter begrijpen niet noemenswaard bij. Van een werkelijk inzicht is evenwel bij deze behandelingswijze geen sprake. Het blijft een oppervlakkig gedoe. Dit komt wel duidelijk aan het licht bij het vastleggen van de definitie van de logarithe met

¹⁾ Euler, L.: *Introductio in analysin infinitorum*. Lausanne 1748.
Euler, L.: *Vollständige Anleitung zur Algebra*. Petersburg 1770.

behulp van omzettingen als: ${}^5\log x = 3$ betekent $x = 5^3$, enz. Welnu zonder haperen zal een leerling ${}^5\log x = \sqrt[5]{2}$ omzetten in $x = 5^{\sqrt[5]{2}}$, terwijl bij nadere informatie gewoonlijk blijkt, dat niemand zich ook maar even het hoofd heeft gebroken over de vraag wat $5^{\sqrt[5]{2}}$ nu eigenlijk betekent. Principiële vragen laat men zo weinig mogelijk aan de orde komen. Dat alleen positieve grondtallen, die niet gelijk zijn aan 1, tot bruikbare logaritmenstelsels kunnen voeren, moet op gezag worden aanvaard. Mededelingen over natuurlijke logaritmen en het berekenen van tafels bezitten slechts een anecdotisch karakter en het is vrijwel ondoenlijk om den leerlingen ook maar een vaag denkbeeld te verschaffen van de enorme betekenis van de logaritmen voor tal van wiskundige en natuurwetenschappelijke problemen. Zolang evenwel op de middelbare scholen de logaritmen niet anders worden gezien dan als hulpmiddel voor het vergemakkelijken van het numerische rekenen, behoeven de gesignaleerde feiten niet al te tragisch te worden opgenomen en dan is er geen klemmende reden voor het maken van propaganda voor een andere behandelingswijze.

Anders wordt dit natuurlijk, wanneer het werkelijk gewenst of nodig is om dieper door te dringen in het wezen van de logaritmen. Op sommige gymnasia schijnt dit het geval te zijn en zeker moet dit gebeuren bij het middelbaar technisch onderwijs. Indien men dan ontkomen wil aan de gekunstelde methode om vooraf het getal e en de exponentiële functie te definiëren om daaruit de natuurlijke logaritmen af te leiden, blijft er niet veel anders over dan de weg in te slaan, zoals die reeds door Felix Klein is aangewezen.²⁾ In de grond komt dit neer op het definiëren van $\log x$ met behulp van een bepaalde integraal, welke vanzelf te

²⁾ Klein, F.: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, I, 4. Auflage, Berlin 1933. S. 155 e.v.

Een inleiding in de logaritmen, zoals Klein zich dacht, is in fraaie vorm aan te treffen bij

Scheffers, G. *Lehrbuch der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik*. 7. Aufl. Leipzig 1932.

Verder kan men raadplegen:

Frenzel, C. *Zur Kleinschen Einführung in die Lehre von den Logarithmen*. Ztschr. f. Math. und Naturwiss. Unterricht, 44 (1913), S. 1.

Van de Vooren, W. L., *Grenswaarden*, 2e druk, Groningen, 1934.

Schuh, F., *Het getalbegrip, in het bijzonder het onmeetbare getal*, Groningen, 1927.

voorschijn komt bij het probleem van de hyperboolquadratuur. Zo kan een theoretisch hechte en didactisch aanvaardbare methode worden verkregen om tot de logaritmen te komen. Het is mogelijk het integraalbegrip te vermijden en daarvoor het aanschouwelijk direct gegeven oppervlaktebegrip in de plaats te stellen. Er is dan natuurlijk geen sprake meer van exactheid, maar toch biedt deze methode nog allerlei voordelen boven de gebruikelijke. In de literatuur zijn voorbeelden van een dergelijke behandelingswijze aan te treffen.³⁾ De theoretische grondslag wordt door het integraalbegrip gegeven. Methodisch zou het als een bezwaar kunnen worden aangemerkt, dat de fundering van een dusdanig elementair begrip, als de logarithme, moet geschieden via een diepliggende kwestie, namelijk het existentiebewijs van de bepaalde integraal.

Het is de bedoeling van dit artikel om te laten zien, dat dit bezwaar gemakkelijk kan worden overwonnen. Uitgaande van het probleem van de hyperboolquadratuur zal worden aangestuurd op een analytische opbouw van de theorie der logaritmen, maar in de hulpmiddelen zal een beperking in acht worden genomen. We willen niet veel meer bekend veronderstellen, dan hetgeen direct uit een theorie van het irrationale getal voortvloeit, zoals het begrip macht met rationale exponent, de eenvoudigste eigenschappen van monotone getallenrijen, reeksen en de voornaamste rekenregels voor limieten, terwijl meer dan eens de gemakkelijk te bewijzen eigenschap $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$ ($x > 0$) zal worden gebruikt. Stellingen over het omkeren van functies zullen we vermijden. De omkering geschiedt door een directe constructie; het begrip macht met irrationale exponent komt als sluitsteen van de theorie te voorschijn.

Het zal blijken, dat de hier gevolgde weg onmiddellijk voert tot een definitie van de logaritmen, die in beginsel reeds door Kepler is gegeven.⁴⁾ Deze definitie van Kepler is door Hur-

³⁾ Fladt, K. *Zur Kleinschen Einführung des Logarithmus.* Ztschr. f. Math. und Naturwiss. Unterricht **57** (1926), S. 301.

Funk, C. F. B. *Die Kleinsche Einführung des Logarithmus!* Id. **44** (1913), S. 463.

Rieder, K. *Zur Einführung des Logarithmus im Kleinschen Sinne.* Id. **47** (1916), S. 168.

Lely, U. Ph. *Een wijze van behandeling der logaritmen van rekenkundige getallen.* Euclides **5** (1928). Bidz. 5.

Tripier, H. *Les logarithmes et les puissances en partant de l'hyperbole*, Paris 1934.

⁴⁾ Kepler, J., *Chilias logarithmorum*, Marburg 1624.

PROSPECTUS

ANALYTISCHE MEETKUNDE DIFFERENTIAAL EN INTEGRAALREKENING

VOOR

MIDDELBARE TECHNISCHE SCHOLEN
EN NIJVERHEIDSACTEN

DOOR

K. H. W. VISSER

Leraar aan de M. T. S. te Utrecht

PRIJS VAN HET COMPLETE BOEK,
GROOT 144 PAGINA'S
f 1.75

1935

P. NOORDHOFF N.V.
GRONINGEN - BATAVIA

VERKRIJGBAAR IN DE BOEKHANDEL

In Ned. Oost-Indië uit voorraad verkrijgbaar bij
N.V. Uitgevers-Maatschappij Noordhoff-Kolff,
Laan Holle 7, Batavia-C

VOORBERICHT.

Het leerplan voor het tweede leerjaar van de middelbare technische scholen bevat sinds enige tijd ook „hogere wiskunde”.

Hogere wiskunde is geen leervak, dat men in het algemeen aan leerlingen met de vooropleiding, zoals die voor de middelbare technische scholen wordt geëist, kan onderwijzen, tenzij men veel weglaat, wat „wiskundig” noodzakelijk zou zijn; ook dient men bij enige afleidingen en bewijzen een andere weg te volgen, dan men gewoonlijk doet.

Ik heb daarom in dit schoolboek enkele onderwerpen behandeld, die geschikt zijn voor bovengenoemde categorie leerlingen, onderwerpen, waarvan de kennis aan de studie van de mechanica een voldoende ondergrond geeft.

Utrecht, 1935.

K. H. W. VISSER.

INHOUD.

ANALYTISCHE MEETKUNDE.

HOOFDSTUK I.

Par.		Blz.
1, 2	Coördinaten. Het Punt	1
3—6	De rechte lijn	3
7, 8	Lijn door P_1 ; lijn door P_1 en P_2	8
9, 10	Snijpunt van twee lijnen	10
11, 12	De hoek van twee lijnen	11
13	Herhaling	12

HOOFDSTUK II.

14, 15	De cirkel	15
16, 17	Algemene vergelijking van de cirkel	17
18, 19	Raaklijn in een punt	18
20	Herhaling	20

HOOFDSTUK III.

21, 22	$xy = c$	22
23, 24	$y = ax^2 + bx + c$	24
25, 26	Uiterste waarde van $ax^2 + bx + c$	26
27, 28	Derdemachtsvergelijking met meetbare wortels	29
29—32	Grafische oplossing	30
33	Herhaling	34

HOOFDSTUK IV.

34	Kegelsneden	36
35—43	Ellips	37
44—49	Parabool	46
50—51	Hyperbool	51
52	Alg. herhaling van de Analytische meetkunde	52

DIFFERENTIAALREKENING.

HOOFDSTUK V.

53, 54	Eerste afgeleide functie	57
55, 56	Meetkundige betekenis van de afgeleide functie	61

Par.		Blz.
57, 58	Uiterste waarden	62
59, 60	Uiterste waarden. Tweede afgeleide functie .	66
61—63	Regels voor het differentiëren	68
64, 65	Goniometrische en cyclometrische functies . .	71
66	De functies $y = e^x$ en $\ln(x)$	74
67—68	Samengestelde functies	75
69, 70	$\frac{dy}{dx}$ als richtingscoëfficiënt van de raaklijn . .	69
71—73	Kromtestraal	71

INTEGRAALREKENING.

HOOFDSTUK VI.

74	Onbepaalde integralen. Omgekeerde bewerking	85
75, 76	Substitutie-methode	86
77, 78	De teller is de afgeleide van de noemer . . .	88
79, 80	Splitsen van breuken	89
81, 82	De noemer $ax^2 + bx + c$ en $b^2 - 4ac < 0$.	90
83, 84	Functies van de gedaante $\frac{1}{\sqrt{px^2 + qx + r}}$. .	91
85, 86	Integreren bij gedeelten	93
87—90	Enkele goniometrische integralen	96

HOOFDSTUK VII.

91—93	Het berekenen van oppervlakten	98
94, 95	Inhouden van omwentelingslichamen	102
96, 97	Lengte van een deel van een kromme lijn . .	105
98, 99	Zwaartepunt van vlakke figuren	107
100, 101	Zwaartepunt van lichamen	109
102, 103	Zwaartepunt van een boogstuk	111
104—108	Traagheidsmomenten	112

PARAMETERVERGELIJKINGEN.

HOOFDSTUK VIII.

109	Verklaring en eenvoudige voorbeelden . . .	119
110, 111	Cycloïde	121
112	Ontwondene van de cirkel	123
113, 114	Epicycloïde en hypocycloïde	124
115, 116	Spiralen	127
117	Algemene herhaling	132

HOOFDSTUK VI.

Integraalrekening.

Onbepaalde Integralen (Omgekeerde bewerking).

§ 74. In de differentiaalrekening heeft men gezien, hoe in verschillende gevallen de afgeleide functie van een gegeven functie werd bepaald. De integraalrekening leert de omgekeerde bewerking uitvoeren.

Is derhalve $f'(x)$ gegeven, dan moet $f(x)$ worden bepaald. De bewerking, die moet worden uitgevoerd om dit doel te bereiken, heet **integreren**.

Voorbeeld. Als $3x^2$ de afgeleide functie is van een andere, nog onbekende, functie, dan is deze laatste functie: $x^3 + C$ (C is een constant getal) omdat, als men $x^3 + C$ differentieert, men $3x^2$ als afgeleide functie vindt.

Het aantal functies, dat men als antwoord van de opgave vindt, is dus oneindig groot; zij verschillen echter alleen in de constante term.

Zoals men voor de uitvoering van de verschillende bewerkingen als optellen, aftrekken, vermenigvuldigen, delen, worteltrekken, enz. afzonderlijke tekens heeft, zo heeft men ook een afzonderlijk teken om aan te duiden, dat men „integreert”.

Is $y = f(x)$, dan is $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, waarvoor we ook schrijven:

$$dy = f'(x) \cdot dx.$$

Uit de laatste vorm moet nu y worden bepaald. De oplossing van deze opgave schrijft men in de vorm:

$$y = \int f'(x) \cdot dx.$$

$\int$ is het integraal-teken.

De oplossing van de opgave: $f'(x) = 3x^2$, bepaal hieruit $f(x)$, kan men dus de volgende vorm geven:

HOOFDSTUK VII.

Bepaalde integralen en toepassingen van de integraalrekening.

Het berekenen van oppervlakken.

§ 91.

In § 74 is reeds gezegd, dat integreren de omgekeerde bewerking is van differentiëren. Integreren heeft echter ook nog een andere betekenis, die uit het onderstaande duidelijk zal worden. We tekenen op een rechthoekig assenkruis een willekeurige

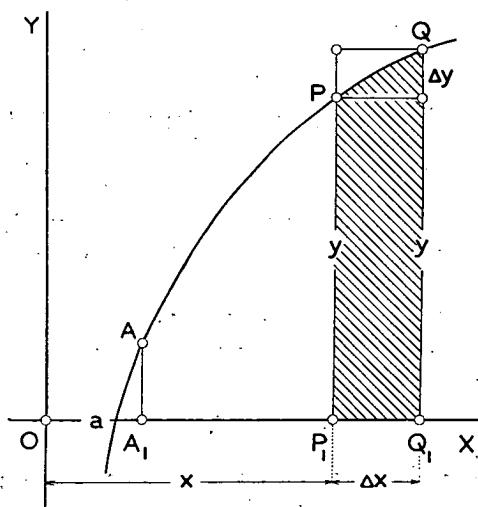


Fig 42.

kromme: $y = f(x)$ en nemen daarop twee punten A en P, waarvan de abscissen a en x zijn (fig. 42). We tekenen de beide ordinaten A_1A en P_1P , waardoor een figuur met oppervlakte O ontstaat, die ingesloten wordt door $y = f(x)$, de twee ordinaten van A en P en de X-as.

De ordinat A_1A heeft een vaste plaats, de ligging en grootte van de ordinat P_1P

hangt af van de waarde van x ; ook de oppervlakte O is hiervan afhankelijk.

Groeit x aan met Δx en y dus met Δy , dan groeit de oppervlakte O aan met ΔO .

ΔO is dus de oppervlakte van PQQ_1P_1 ; volgens fig. 42 heeft men nu:

$$y \cdot \Delta x < \Delta O < (y + \Delta y) \Delta x.$$

Na deling door Δx gaat dit over in:

$$y < \frac{\Delta O}{\Delta x} < y + \Delta y \quad \dots \quad (1).$$

Nadert Δx tot nul (bijgevolg naderen Δy en ΔO ook tot nul),

dan volgt uit (1): $\frac{dO}{dx} = y$, of $dO = y \cdot dx \quad \dots \quad (2).$

Uit (2) blijkt: als men $y \cdot dx$ integreert, vindt men O , dus

$$O = \int y dx = F(x) + C \quad \dots \quad (3).$$

In deze vorm moet de constante C nog worden bepaald. Dit geschiedt op de volgende wijze.

Voor $x = a$ is $O = 0$, zodat (3) overgaat in:

$$0 = F(a) + C,$$

zodat $C = -F(a)$ is $\dots \quad (4).$

Ten slotte vindt men dus uit (3):

$$O = F(x) - F(a) \quad \dots \quad (5).$$

Voorbeelden.

1. In fig. 43 is de kromme $y = x^2 - 2x + 3 = f(x)$

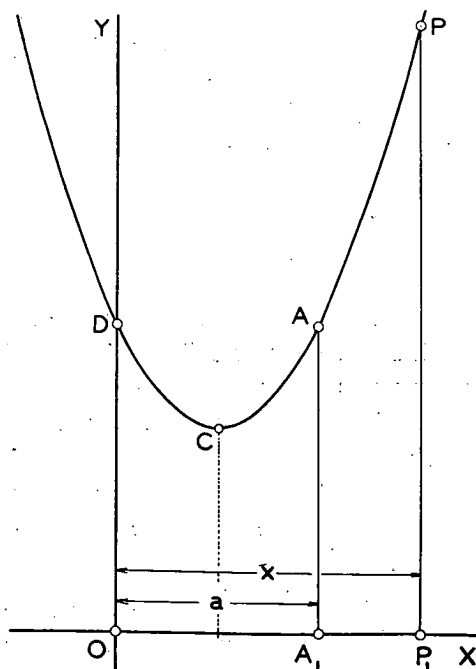


Fig. 43.

getekend; gevraagd de oppervlakte van PP_1A_1A in x uit te drukken;
 $OA_1 = a = 2.$

Zwaartepunt van vlakke figuren.

§ 98. Om de ligging van het zwaartepunt Z van een vlakke figuur te bepalen, berekenen we de afstanden van Z tot de X -as en de Y -as. We onderstellen verder, dat de vergelijking van de begrenzende kromme van de figuur bekend is in de expliciete vorm $y = f(x)$. We denken ons de figuur verdeeld in oneindig veel

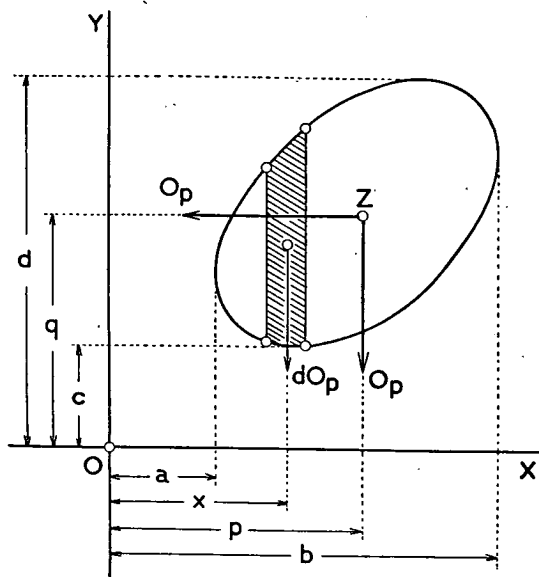


Fig. 48.

oneindig smalle stroken met een breedte dx en een oppervlakte dO_p . De oppervlakte van de gehele figuur is O_p (fig. 48).

Voor de bepaling van het zwaartepunt beschouwen we de stroken dO_p als gewichten, waarvan de zwaarte bij geschikte keuze van de gebruikte eenheid voorgesteld wordt door dO_p , en bepalen de resultante van de onderling evenwijdige krachten dO (evenwijdig aan de Y -as). Deze resultante gaat door het zwaartepunt van de figuur.

• Zoals bekend is, is het moment van de resultante t.o. van O gelijk aan de som van de momenten der samenstellende krachten, dus

$$p \times O_p = \int_a^b x \cdot dO_p \quad \text{of}$$

witz⁵⁾) als uitgangspunt genomen voor een elementaire behandeling van de logarithmen. In de leerboekliteratuur is deze behandeling aan te treffen in het nieuwste boek van E. L a n d a u.⁶⁾

We willen niet nalaten er op te wijzen, dat een rigoureuze ontwikkeling, zoals die in dit artikel is nagestreefd, in de hier gegeven vorm voor het middelbaar onderwijs minder geschikt is. Zou het ooit zover komen, dat de introductie van de logarithmen op de door Klein voorgestelde wijze een kans krijgt bij het M.O., dan moeten natuurlijk verschillende bewijsschappen, die hier analytisch zijn verricht, aan de aanschouwing worden ontleend. Hoe dit zou moeten geschieden en hoever men daarmee kan gaan, kan ieder gemakkelijk voor zichzelf uitmaken. De voordelen van een aanschouwelijke methode mogen echter niet worden onderschat. Aangezien $\log x$ wordt geïnterpreteerd als de oppervlakte van een bepaalde vlakke figuur, het „hyperbooltrapezium”, levert de insluiting van die figuur tussen eenvoudige rechte lijnen, zoals rechte hoek en trapezium tal van historisch belangrijke ongelijkheden, die den grondleggers van de logarithmen de hulpmiddelen hebben verschaft om het samenstellen van de tafels aanmerkelijk te vereenvoudigen. Bovendien wordt door de geometrische inkleding de formules leven ingeblazen, hetgeen vooral uit een didactisch oogpunt zeer belangrijk mag worden geacht.

Er is een bepaalde categorie van studerenden, die met hogere wiskunde nauwelijks in aanraking komen, en van wie men toch in de bewijsvoering een graad van exactheid mag verlangen, die op de middelbare scholen niet wordt bereikt. We hebben hier het oog op hen, die zich voor de acte L.O. wiskunde voorbereiden. Misschien hebben de hier geboden beschouwingen ook voor hen waarde en kunnen ze een aangename afwisseling betekenen in het soms wel wat eentonige menu, dat hun door de L.O.-studie wordt voorgezet.

I.

1. — We denken ons in het platte vlak een rechthoekig assenstelsel en een eenheid van lengte vast gegeven. Op de hyperbool-

⁵⁾ Hurwitz, A. *Über die Einführung der elementaren transzendenten Funktionen in der algebraischen Analysis*. Math. Ann. **70** (1911) S. 33.

⁶⁾ Landau, E. *Einführung in die Differentialrechnung und Integralrechnung*, Groningen 1934.

tak, welke ten opzichte van dit stelsel kan worden voorgesteld door

$$(1) \quad xy = 1, x > 0,$$

kiezen we twee al of niet samenvallende punten A en B. De vlakke figuur, begrensd door de boog van de hyperbooltak waarvoor A en B eindpunten zijn, de projectie van deze boog op de x-as en de beide projecterende lijnsegmenten van A en B, zullen we *hyperbooltrapezium* noemen. De abscissen a en b van de punten A en B heten kortweg de abscissen van het hyperbooltrapezium. Deze vlakke begrensde figuur bezit een oppervlakte, welke afhangt van de positieve getallen a en b en zal voorgesteld worden door

$$(2) \quad O(a, b).$$

We zullen aan de oppervlakte een teken toekennen door de afspraak, dat $O(a, b)$ positief is voor $a < b$, negatief voor $a > b$, terwijl ten slotte $O(a, b) = 0$ is voor $a = b$. Het teken is dus gebonden aan de volgorde van de punten A en B, m.a.w. door deze volgorde wordt het hyperbooltrapezium *georiënteerd*.

Het is nu onze bedoeling om van de aanschouwelijk gedefiniëerde functie $O(a, b)$ een analytische definitie te geven. Voor de opstelling van een dergelijke definitie laten we ons voorlopig door meetkundige overwegingen leiden.

2. — De volgende beschouwingen worden gebaseerd op de onderstelling $0 < a < b$. De projecties van de punten A en B op de x-as zijn A_1 en B_1 . Tussen de punten A_1 en B_1 worden $n-1$ punten geplaatst met abscissen $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$, welke aan

$$(3) \quad a < u_1 < u_2 < \dots < u_{n-1} < b$$

voldoen, zodat het segment $\overline{A_1 B_1}$ verdeeld wordt in n deelsegmenten.⁷⁾ We zullen nog u_0 voor a schrijven en u_n voor b . Op het deelsegment begrensd door punten met abscissen $u_{\lambda-1}$ en u_λ

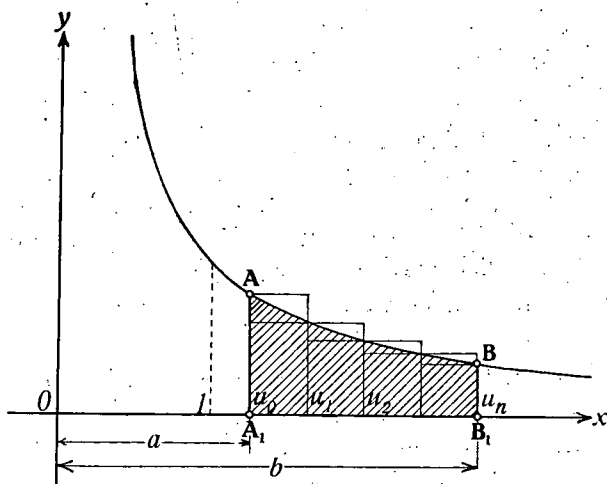
($\lambda = 1, \dots, n$) kunnen twee rechthoeken met hoogten $v_\lambda = \frac{1}{u_\lambda}$

en $v_{\lambda-1} = \frac{1}{u_{\lambda-1}}$ worden aangebracht. De eerste rechthoek noemen

we *ingeschreven* rechthoek, de tweede *omgeschreven*. De som van

⁷⁾ In het gehele artikel wordt onder n een *natuurlijk* getal verstaan.

de oppervlakten van de ingeschreven rechthoeken wordt voorgesteld door $s(n)$, de som van de oppervlakten van de omgeschreven



rechthoeken door $S(n)$. Drukken we deze getallen uit in u en v , dan wordt gevonden

$$(4) \quad S(n) = \sum_{\lambda=1}^n v_{\lambda} (u_{\lambda} - u_{\lambda-1}) \text{ en}$$

$$(5) \quad S(n) = \sum_{\lambda=1}^n v_{\lambda-1} (u_{\lambda} - u_{\lambda-1}).$$

Behalve van n hangen de getallen $s(n)$ en $S(n)$ bovendien af van de plaatsing van de deelpunten in het segment $\overline{A_1B_1}$. Om dit bezwaar op te heffen moet een voorschrift worden gegeven voor de wijze waarop de $n-1$ deelpunten moeten worden gekozen, zodra het getal n is gegeven. Het meest voor de hand ligt natuurlijk de getallen u_{λ} ($\lambda = 0, 1, \dots, n$) zo te nemen, dat

$$(6) \quad u_n - u_{n-1} = u_{n-1} - u_{n-2} = \dots = u_2 - u_1 = u_1 - u_0,$$

m.a.w. de getallen u_{λ} vormen een *rekenkundige rij*. Met gebruikmaking van dit voorschrift worden door (4) en (5) eenduidig bepaalde getallenrijen gedefinieerd. Het convergentiebewijs van deze rijen biedt evenwel moeilijkheden, die na een omweg kunnen worden overwonnen. We komen hierop in no. 12 terug.

3. — Een andere mogelijkheid wordt gegeven, wanneer we de verdeling inrichten volgens het voorschrift

$$(7) \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} = \dots = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0}$$

m.a.w. de getallen u_λ vormen een *meetkundige rij*. Het zal blijken, dat het voorschrift (7) bijzonder bruikbaar is. De verdelingen worden voor $n = 1, 2, 2^2, \dots$ als volgt aangebracht. Met $n = 1$ correspondeert het oorspronkelijke segment $\overline{A_1B_1}$. Elke volgende verdeling ontstaat uit een voorafgaande, door elk reeds aanwezig deelsegment in twee nieuwe te splitsen, zodat de abscissen van de nieuwe deelpunten met die van de reeds aanwezige wederom een meetkundige rij vormen; bij elke verdeling is dan aan (7) voldaan. Na k verrichtingen zijn zo 2^k deelsegmenten ontstaan. Daarbij behoren eenduidig bepaalde getallen $s(2^k)$ en $S(2^k)$ gedefinieerd volgens (4) en (5). Ter bekorting zullen we schrijven $s_k = s(2^k)$ en $S_k = S(2^k)$.

4. — We onderzoeken nu de getallenrijen $\{s_k\}$ en $\{S_k\}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$). Van deze rijen zullen we bewijzen, dat *ze beide een limiet bezitten voor onbepaald toenemende k , en dat bovendien deze limieten gelijk zijn*. Het bewijs is geleverd, wanneer we hebben aangetoond:

a) de rij $\{s_k\}$ is monotoon stijgend, de rij $\{S_k\}$ is monotoon dalend;

b) steeds is $s_k < S_k$;

c) de quotiënten $\frac{S_k}{s_k}$ (welke steeds betekenis hebben, daar geen der getallen s_k nul is) bezitten de limiet 1.

De quotiënten in (7) zijn behalve van a en van b alleen afhankelijk van k , wegens $n = 2^k$. We mogen ze dus aanduiden met ϱ_k . Wegens

$$u_n = \varrho_k u_{n-1} = \varrho_k^2 u_{n-2} = \dots = \varrho_k^n u_0,$$

is dus

$$(8) \quad \varrho_k = \sqrt[2^k]{\frac{b}{a}} = \sqrt[2^k]{x},$$

indien $\frac{b}{a} = x$ gesteld wordt.

We vinden dan voor de getallen s_k en S_k

$$s_k = \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{u_\lambda} (u_\lambda - u_{\lambda-1}) = \sum_{\lambda=1}^n \left(1 - \frac{u_{\lambda-1}}{u_\lambda}\right), \text{ of}$$

$$(9) \quad s_k = 2^k \left(1 - \frac{1}{\varrho_k}\right), \text{ en}$$

$$S_k = \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{u_{\lambda-1}} (u_{\lambda} - u_{\lambda-1}) = \sum_{\lambda=1}^n \left(\frac{u_{\lambda}}{u_{\lambda-1}} - 1 \right);$$

of

$$(10) \quad S_k = 2^k (\varrho_k - 1).$$

Daar $a < b$, is $x > 1$, en dus ook $\varrho_k > 1$. Wegens

$$S_k = \varrho_k \cdot 2^k \left(1 - \frac{1}{\varrho_k} \right) = \varrho_k S_k, \text{ is}$$

$$(11) \quad S_k < S_k.$$

Daarmee is b) al bewezen. c) volgt uit het feit, dat

$$\frac{S_k}{S_k} = \varrho_k \text{ en } \lim_{k \rightarrow \infty} \varrho_k = 1.$$

Ten slotte volgt uit $\varrho_k = \sqrt[2^k]{x}$, dat $\varrho_k = \varrho_{k+1}^2$, zodat

$$\frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{1}{2} \frac{\varrho_k - 1}{\varrho_{k+1} - 1} = \frac{1}{2} (\varrho_{k+1} + 1) > \frac{1}{2} (1 + 1) = 1,$$

waaruit

$$(12) \quad S_k > S_{k+1}$$

voortvloeit, terwijl

$$\frac{S_k}{S_{k+1}} = \frac{\varrho_{k+1} S_k}{\varrho_k S_{k+1}} = \frac{1}{2\varrho_{k+1}} (\varrho_{k+1} + 1) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\varrho_{k+1}} \right) < \frac{1}{2} (1 + 1) = 1,$$

en dus

$$(13) \quad S_k < S_{k+1}.$$

(12) en (13) vatten evenwel de bewering a) samen.

5. — Hetgeen in no. 4 is bewezen geeft ons het recht het getal $O(a, b)$ analytisch te definiëren door

$$O(a, b) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k,$$

uitvoeriger

$$(14) \quad O(a, b) = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k \left(\sqrt[2^k]{\frac{b}{a}} - 1 \right).$$

Voorlopig heeft $O(a, b)$ slechts betekenis voor $a < b$. Is $a > b > 0$, dan geldt

$$2^k \left(\sqrt[2^k]{\frac{b}{a}} - 1 \right) = \sqrt[2^k]{\frac{b}{a}} \cdot 2^k \left(1 - \sqrt[2^k]{\frac{a}{b}} \right) =$$

$-\sqrt[2^k]{\frac{b}{a}} \cdot 2^k \left(\sqrt[2^k]{\frac{a}{b}} - 1 \right) \rightarrow -O(b, a)$ wegens $\sqrt[2^k]{\frac{b}{a}} \rightarrow 1$. Stellen we

vast, dat

$$(15) \quad O(a, b) = -O(b, a)$$

zal zijn voor $a > b$, dan blijft (14) ook voor dit geval juist. Ten slotte blijft de geldigheid van (14) behouden, als we $O(a, b) = 0$ nemen voor $a = b$. Daarmee is voor het naief ingevoerde begrip oppervlakte een analytisch gelouterd begrip in de plaats getreden. In het volgende zullen we dan ook onder de oppervlakte van een (georiënteerd) hyperbooltrapezium met abscissen a en b steeds het door (14) gedefinieerde getal verstaan. Een nadeel is natuurlijk, dat dit oppervlaktebegrip steeds gebonden is aan het speciale verdelingsvoorschrift (7). Men kan dit nadeel overwinnen door invoering van het integraalbegrip, maar voor onze beschouwingen is dit volkomen overbodig. Daar uit (14) blijkt, dat $O(a, b)$ alleen afhangt van $\frac{b}{a}$, kunnen we dus zeggen, dat de oppervlakte van een hyperbooltrapezium bepaald is door het quotiënt van zijn abscissen.

6. — Aangezien de aanschouwing leert, dat oppervlakten additieve grootheden zijn, ligt de relatie

$$(16) \quad O(a, b) + O(b, c) = O(a, c)$$

voor de hand. Daar wij evenwel de oppervlakte analytisch hebben ingevoerd, moet (16) langs analytische weg worden geverifieerd. Zonder moeite geschiedt dit als volgt:

$$\begin{aligned} O(a, b) + O(b, c) &= \lim 2^k \left(\sqrt[2^k]{\frac{b}{a}} - 1 \right) + \\ &+ \lim 2^k \left(\sqrt[2^k]{\frac{c}{b}} - 1 \right) = \lim \sqrt[2^k]{\frac{c}{b}} \lim 2^k \left(\sqrt[2^k]{\frac{b}{a}} - 1 \right) + \\ &+ \lim 2^k \left(\sqrt[2^k]{\frac{c}{b}} - 1 \right) = \lim 2^k \left(\sqrt[2^k]{\frac{c}{a}} - \sqrt[2^k]{\frac{c}{b}} + \sqrt[2^k]{\frac{c}{b}} - 1 \right) = \\ &= \lim 2^k \left(\sqrt[2^k]{\frac{c}{a}} - 1 \right) = O(a, c). \end{aligned}$$

Na deze voorbereidingen kunnen we overgaan tot de invoering van het begrip *logarithme*.

7. — Onder de *natuurlijke logarithme* van het positieve getal x wordt verstaan het getal $O(a, b)$ indien $x = \frac{b}{a}$. Notatie: $\log x$.

De logarithme van x wordt aanschouwelijk gegeven door de oppervlakte van een hyperbooltrapezium met abscissen 1 en x , omdat $O(a, b) = O(1, x)$. Het is dus mogelijk om grafisch bij een getal x de bijbehorende logarithme te bepalen, door bijvoorbeeld de kromme $y = \frac{1}{x}$ op millimeterpapier te tekenen, zodat de oppervlakte van een trapezium kan worden gevonden door het uittellen van vierkantjes met zijden 1 mm. Voor elk positief getal is de logarithme gedefinieerd. De reden, dat voor niet-positieve waarden de logarithme niet gedefinieerd wordt, is vanzelfsprekend gelegen in het feit, dat de kromme $y = \frac{1}{x}$ een bijzonder gedrag vertoont in de oorsprong.

De definitie van $\log x$ verschaft tevens het middel om de logarithme van een positief getal numerisch met elke gewenste graad van nauwkeurigheid te benaderen. Immers, wegens (14) mogen we schrijven

$$(17) \quad \log x = \lim_{k \rightarrow \infty} 2^k (\sqrt[k]{x} - 1) \quad x > 0,$$

zodat het benaderen van logarithmen kan geschieden door succesieve vierkantsworteltrekking. De practische bezwaren zijn evenwel bij deze wijze van doen niet gering.

Men kan uit de definitie van $\log x$ direct belangrijke conclusies trekken. Allereerst

$$(18) \quad \log 1 = 0$$

omdat $O(a, b) = 0$ voor $a = b$. Verder volgt

$$(19) \quad \log \frac{1}{x} = -\log x$$

uit (15). Immers $O(b, a) = O\left(1, \frac{a}{b}\right)$ en $O(a, b) = O\left(1, \frac{b}{a}\right)$.

Tenslotte volgt uit (16) de functionaalrelatie:

$$(20) \quad \boxed{\log x_1 + \log x_2 = \log x_1 x_2}$$

Dit wordt ingezien door te bedenken, dat indien $\frac{b}{a} = x_1$ en $\frac{c}{b} = x_2$ is, $\frac{c}{a}$ gelijk is aan $x_1 x_2$. Uit (20) volgt dan zonder moeite

$$(21) \quad \log x_1 - \log x_2 = \log \frac{x_1}{x_2}$$

en

$$(22) \quad \log x^r = r \log x \quad (r \text{ rationaal}).$$

8. — Een dieper inzicht in het gedrag van de logarithmische functie kan worden verkregen door te steunen op de ongelijkheden (12) en (13). Op grond van deze ongelijkheden wordt de geldigheid ingezien van

$$s_k < \log x < S_k \text{ voor } x > 1,$$

of

$$(23) \quad 2^k \left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}} \right) < \log x < 2^k \left(\sqrt[k]{x} - 1 \right).$$

Deze ongelijkheden blijven juist voor $x < 1$. Immers dan is $\frac{1}{x} > 1$ en dus

$$2^k \left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}} \right) < \log \frac{1}{x} < 2^k \left(\frac{1}{\sqrt[k]{x}} - 1 \right),$$

$$2^k \left(\sqrt[k]{x} - 1 \right) > -\log \frac{1}{x} > 2^k \left(1 - \frac{1}{\sqrt[k]{x}} \right),$$

waaruit in verband met (19) de ongelijkheden (23) zijn af te leiden. Wanneer in 't bijzonder in (23) $k = 0$ wordt genomen vinden we ⁸⁾

$$(24) \quad 1 - \frac{1}{x} \leq \log x \leq x - 1.$$

⁸⁾ Deze en soortgelijke ongelijkheden zijn bij Neper en Kepler aan te treffen

Napier, J. *Mirifici logarithmorum canonis constructio*, Lugduni 1620.

De gelijkttekens gelden alleen voor $x = 1$. Deze opmerking geldt ook voor alle andere ongelijkheden, die uit (24) zullen worden afgeleid. Vervangen we in (24) x door $\sqrt[n]{x}$ en maken we gebruik van de relatie (22), dan komt

$$1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \leq \frac{1}{n} \log x \leq \sqrt[n]{x} - 1$$

of

$$(25) \quad n \left(1 - \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \right) \leq \log x \leq n (\sqrt[n]{x} - 1),$$

een generalisatie van (23). We kunnen voor de ongelijkheden (25) ook schrijven

$$\log x \leq n (\sqrt[n]{x} - 1) \leq \sqrt[n]{x} \log x.$$

Hieruit volgt evenwel

$$(26) \quad \log x = \lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[n]{x} - 1),$$

waarmede een generalisatie van (17) is verkregen. Men zou natuurlijk (26) kunnen nemen als definitie van $\log x$. Het directe bewijs van het bestaan van de limiet in het rechterlid is niet zo gemakkelijk als dat van de limiet bij (17). Deze moeilijkheden hebben juist tot de hier gevolgde methode geleid.

9. — Is $x > 1$, dan is het linkerlid van (24) positief, d.w.z.

$$(27) \quad \log x > 0 \quad \text{voor } x > 1.$$

Logarithmen van getallen groter dan 1 zijn positief. Uit (19) volgt dan, dat *logarithmen van getallen kleiner dan 1 negatief zijn*. Verder bewijst men gemakkelijk, dat de *logarithmische functie monotoon stijgend* is,

$$(28) \quad \log x_2 > \log x_1 \quad \text{voor } x_2 > x_1.$$

Immers dan is $\frac{x_2}{x_1} > 1$ en $\log x_2 - \log x_1 = \log \frac{x_2}{x_1} > 0$. De functie is zelfs *onbepaald stijgend*, wat gewoonlijk wordt aangegeven door

$$(29) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log x = +\infty.$$

Zij namelijk G een positief getal. Kies een natuurlijk getal m zo, dat $m \log 2 > G$. Wegens $\log 2 > 0$ is dit mogelijk. Voor alle $x > 2^m$ is dan $\log x > \log 2^m = m \log 2 > G$.

Met behulp van (17) kan dan verder uit (29) worden gevonden

$$(30) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log x = -\infty.$$

We kunnen ons een globaal inzicht verschaffen betreffende de mate van aangroeien van $\log x$ voor onbepaald toenemende waarden van x . We zullen daartoe bewijzen, *dat $\log x$ zwakker aangroeit, dan elke macht van x met positieve rationale exponent, hoe klein men overigens die exponent ook neemt*, m.a.w.

$$(31) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{voor } \alpha > 0 \text{ en rationaal.}$$

Om dit te bewijzen wordt het natuurlijke getal m zo gekozen, dat $m > \frac{1}{\alpha}$, dus $\frac{1}{m} < \alpha$. Volgens (25) is dan

$$m \left(\frac{1}{x^\alpha} - \frac{1}{x^{\alpha + \frac{1}{m}}} \right) \leq \frac{\log x}{x^\alpha} \leq m \left(\frac{1}{x^{\alpha - \frac{1}{m}}} - \frac{1}{x^\alpha} \right).$$

De uiterste leden van deze ongelijkheden hebben voor $x \rightarrow \infty$ de limiet 0, dus is dit ook het geval met het middelste lid.

10. — De in het voorafgaande nummer afgeleide eigenschappen betroffen het gedrag van de functie „in het groot”. We onderzoeken nu nog het locale gedrag van de functie, te weten de continuïteit en de differentieerbaarheid.

Schrijven we in (24) in de plaats van x , $1 + \frac{h}{x}$ (h stelt een reëel getal voor met $x + h > 0$), dan wordt met gebruikmaking van (21) gevonden

$$(32) \quad \frac{h}{x+h} \leq \log(x+h) - \log x \leq \frac{h}{x}$$

(gelijkteken alleen voor $h = 0$). (32) drukt evenwel de continuïteit van $\log x$ uit voor elke waarde van x , waarvoor $\log x$ bestaat.

Ten slotte volgt uit

$$\frac{1}{x+h} \leq \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \leq \frac{1}{x} \quad \text{voor } h \geq 0,$$

dat

(33)

$$\boxed{\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}}$$

waarmede de differentieerbaarheid voor elke positieve waarde van x is bewezen.

11. — Voor het practische rekenen zijn de eigenschappen (19), (20) en de monotonie-eigenschap (voor het interpoleren) de belangrijkste. Deze eigenschappen blijven behouden, wanneer men $\log x$ vermenigvuldigt met een constante μ (met een triviale wijziging van de monotonie-eigenschap als $\mu < 0$ is). Is a een *positief* getal en $\neq 1$, dan is het mogelijk μ zo te bepalen, dat

$$(34) \quad \mu \log a = 1.$$

De functie $\mu \log x = \frac{\log x}{\log a}$ wordt aangeduid met $^a\log x$ en heet *a-logarithme van x*. Deze wijze van invoeren van a-logarithmen stelt duidelijk in het licht, waarom aan het *grondtal a* de beperking > 0 en $\neq 1$ moet worden opgelegd. Is in 't bijzonder $a = 10$, dan is $\mu = \frac{1}{\log 10}$, gewoonlijk aangeduid met M .

De omzetting van grondtallen geschiedt door de formule

$$(35) \quad ^a\log b \cdot ^b\log c = ^a\log c \quad \left(\begin{array}{l} a \neq 1, b \neq 1 \\ a > 0, b > 0, c > 0 \end{array} \right),$$

welke inderdaad niets anders is dan

$$\frac{\log b}{\log a} \cdot \frac{\log c}{\log b} = \frac{\log c}{\log a}.$$

Hiermede zijn de elementaire eigenschappen van logarithmen bewezen en is de grondslag voor het rekenen met de tafels gelegd. In het tweede deel zal de theorie worden verdiept en het omkeerprobleem worden behandeld.

II.

12. — De moeilijkheden van de hyperboolquadratuur met behulp van het voorlopig ter zijde gelaten voorschrift (6) zijn met behulp van de ongelijkheden (32) gemakkelijk te overwinnen. Volgens dat voorschrift is

$$u_{\lambda} - u_{\lambda-1} = \frac{b-a}{n},$$

dus
$$u_{\lambda} = a + \lambda \frac{b-a}{n},$$

en
$$v_{\lambda} = \frac{n}{na + \lambda(b-a)},$$
 zodat voor $s(n)$ wordt gevonden

$$\begin{aligned} s(n) &= \sum_{\lambda=1}^n \frac{b-a}{na + \lambda(b-a)} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{\frac{b}{a} - 1}{n + \lambda\left(\frac{b}{a} - 1\right)} = \\ &= \sum_{\lambda=1}^n \frac{x-1}{n + \lambda(x-1)} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{z}{n + \lambda z}, \text{ als we } z \text{ schrijven} \end{aligned}$$

voor $x-1$. We zullen nu bewijzen

$$(36) \quad \log x = \log(1+z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^n \frac{z}{n + \lambda z} \quad (z > -1).$$

In de ongelijkheden (30) vervangen we x door $x-h$ (waarbij h moet voldoen aan $x-h > 0$). Naast

$$(30) \quad \frac{h}{x+h} \leq \log(x+h) - \log x \leq \frac{h}{x}$$

bestaan dan de ongelijkheden

$$\frac{h}{x} \leq \log x - \log(x-h) \leq \frac{h}{x-h},$$

zodat we mogen besluiten tot

$$\log(x+h) - \log x \leq \frac{h}{x} \leq \log x - \log(x-h).$$

Wanneer we nu hierin h door $\frac{z}{n}$ vervangen en x door $1 + \lambda \frac{z}{n}$, dan wordt gevonden

$$\log\left(1 + \lambda + 1 \frac{z}{n}\right) - \log\left(1 + \lambda \frac{z}{n}\right) \leq \frac{z}{n + \lambda z} \leq \log\left(1 + \lambda \frac{z}{n}\right) - \log\left(1 + \lambda - 1 \frac{z}{n}\right).$$

Achtereenvolgens nemen we voor λ de waarden $1, 2, \dots, n$ en we tellen de ongelijkheden, die zo ontstaan, samen. Het resultaat is dan

$$(37) \log\left(1 + \frac{n+1}{n}z\right) - \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) \leq \sum_{\lambda=1}^n \frac{z}{n + \lambda z} \leq \log(1 + z).$$

(gelijktekens alleen voor $z = 0$). Omdat de logarithmische functie overal continu is, zijn de beweringen $\lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{n+1}{n}z\right) = \log(1 + z)$ en $\lim_{n \rightarrow \infty} \log\left(1 + \frac{z}{n}\right) = 0$ juist. Daarmee is dan (36) aangetoond. Tevens is daarmee exact gebleken, dat de hyperbool-quadratuur volgens het voorschrift (6) en die volgens het voorschrift (7) tot hetzelfde resultaat voeren.

13. — De formule (36) verschaft ons het middel om zonder grote moeite tot de reeksontwikkeling van $\log(1 + z)$ te komen. Indien $|z| < 1$ ondersteld wordt, kan

$$\frac{z}{n + \lambda z} = \frac{\frac{z}{n}}{1 + \lambda \frac{z}{n}}$$

voor elke positieve gehele waarde van $\lambda \leq n$ in een meetkundige reeks worden ontwikkeld:

$$\frac{z}{n + \lambda z} = \frac{z}{n} \left(1 - \frac{\lambda}{n}z + \frac{\lambda^2}{n^2}z^2 - \dots\right) = \frac{z}{n} - \frac{\lambda}{n^2}z^2 + \frac{\lambda^2}{n^3}z^3 - \dots$$

Dus:

$$(38) \sum_{\lambda=1}^n \frac{z}{n + \lambda z} = z - \frac{\Sigma \lambda}{n^2} z^2 + \frac{\Sigma \lambda^2}{n^3} z^3 - \dots = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{\Sigma \lambda^{\nu-1}}{n^{\nu}} z^{\nu}.$$

Wanneer nu gebruik wordt gemaakt van

$$(39) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1} \quad (p \text{ een geheel getal } \geq 0),$$

kan uit (38) door termsgewijze limietovergang worden gevonden:⁹⁾

$$(40) \log(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{z^{\nu}}{\nu}, \quad |z| < 1.$$

⁹⁾ Deze reeks is door N. Mercator (*Logarithmotechnia*, London 1668) gevonden door termsgewijze integratie van de meetkundige reeks.

14. — Om de termsgewijze limietovergang voor de afleiding van (40) te funderen, zullen we beginnen met een eenvoudig bewijs te geven van (39).

Is $\alpha > \beta \geq 0$, dan volgt uit

$$\frac{\alpha^{p+1} - \beta^{p+1}}{\alpha - \beta} = \alpha^p + \alpha^{p-1}\beta + \dots + \alpha\beta^{p-1} + \beta^p, \text{ dat}$$

$$(p+1)\alpha^p > \frac{\alpha^{p+1} - \beta^{p+1}}{\alpha - \beta} > (p+1)\beta^p \quad (p \text{ geheel, } \geq 0).$$

Nemen we in 't bijzonder $\alpha = \lambda$ en $\beta = \lambda - 1$, dan komt

$$(p+1)\lambda^p > \lambda^{p+1} - (\lambda-1)^{p+1} > (p+1)(\lambda-1)^p.$$

We geven aan λ achtereenvolgens de waarden $\lambda = 1, 2, \dots, n$, en tellen de aldus optredende ongelijkheden samen. Dan vinden we

$$(p+1) \sum_{\lambda=1}^n \lambda^p > n^{p+1} > (p+1) \sum_{\lambda=1}^n (\lambda-1)^p,$$

of

$$(p+1) \sum_{\lambda=1}^n \lambda^p > n^{p+1} > (p+1) \sum_{\lambda=1}^n \lambda^p - (p+1)n^p,$$

waaruit

$$\frac{\sum \lambda^p}{n^{p+1}} > \frac{1}{p+1} > \frac{\sum \lambda^p}{n^{p+1}} - \frac{1}{n},$$

waarvoor we liever schrijven

$$(41) \quad \frac{1}{p+1} < \frac{\sum \lambda^p}{n^{p+1}} < \frac{1}{p+1} + \frac{1}{n}.$$

De ongelijkheden (41) voeren evenwel tot (39).

Uit (38) en (41) kan nu worden gevonden:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\lambda=1}^n \frac{z}{n + \lambda z} - \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{z^{\nu}}{\nu} \right| &= \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \left(\frac{\sum \lambda^{\nu-1}}{n^{\nu}} - \frac{1}{\nu} \right) z^{\nu} \right| \leq \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\sum \lambda^{\nu-1}}{n^{\nu}} - \frac{1}{\nu} \right) |z|^{\nu} \leq \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{\infty} |z|^{\nu} = \frac{1}{n} \frac{|z|}{1 - |z|}. \end{aligned}$$

Deze schatting geeft evenwel direct

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^n \frac{z}{n + \lambda z} = z - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^3 - \dots \quad (|z| < 1),$$

waarmee in verband met (36) het exacte bewijs voor (40) is geleverd. Een grondslag voor een snelle numerische berekening van de logaritmen is hiermee tevens verkregen.

15. — Het omkeerprobleem betreft de oplosbaarheid van de vergelijking,

$$(42) \quad \log x = y$$

voor elke reële waarde van y . Zonder een beroep te doen op de algemene stelling, dat elke in een zeker interval continue en monotone functie in dit interval omkeerbaar is, willen we zo direct mogelijk een functie antilog y definiëren, waarvoor voldaan is aan

$$(43) \quad \log \text{antilog } y = y \text{ voor elke reële } y.$$

Een oplossing x van (42) moet op grond van (25) voldoen aan

$$y \leq n (\sqrt[n]{x} - 1),$$

dus ¹¹⁾

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n \leq x.$$

Het ligt dus voor de hand om de getallenrij

$$(44) \quad \left\{\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n\right\},$$

voor vaste y , nader te bestuderen.

Om de convergentie van de variant (44) te kunnen aantonen, bewijzen we eerst, dat de functie ¹⁰⁾

$$(45) \quad \frac{\log(1+z)}{z}$$

monotoon is en niet stijgend. Zij nl. $z_2 > z_1 > -1$.

Dan is

$$\sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{n + \lambda z_2} < \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{n + \lambda z_1} \text{ en}$$

$$\frac{\log(1+z_2)}{z_2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{n + \lambda z_2} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{n + \lambda z_1} = \frac{\log(1+z_1)}{z_1}.$$

¹⁰⁾ De functie bezit voor $z = 0$ een ophefbare discontinuïteit, als de waarde voor $z = 0$ gelijk 1 genomen wordt.

Overigens kan men bewijzen, dat het gelijktaken alleen geldt voor $z_1 = z_2$. We hebben dit echter niet nodig.

Toegepast op ¹¹⁾

$$\log \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = y \frac{\log \left(1 + \frac{y}{n}\right)}{\frac{y}{n}} \quad \text{vinden we,}$$

dat $\log \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$ voor toenemende n monotoon is en niet afnemend. Daar de logarithme een monotone functie is, blijkt dus, dat ook

$$\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$$

voor toenemende n monotoon is en niet afnemend. Bovendien is $\left(1 + \frac{y}{n}\right)^n$ begrensd. Zou dit niet het geval zijn, dan zou na keuze van een positief getal G een getal n zijn te vinden, zodat ook

$$\log \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n > G.$$

Evenwel is volgens (24)

$$\log \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = n \log \left(1 + \frac{y}{n}\right) \leq n \times \frac{y}{n} = y.$$

Voor $G > y$ geeft dit een tegenspraak. Het bestaan van

$$(46) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \text{antilog } y$$

is daarmee verzekerd.

Wanneer nu gelet wordt op

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{y}{n}\right)}{\frac{y}{n}} = 1,$$

(hetgeen kan worden ingezien, door in (32) te nemen $x = 1$ en $h = \frac{y}{n}$) en verder op de continuïteit van de logarithmische functie,

¹¹⁾ We nemen n zo groot, dat $1 + \frac{y}{n} > 0$ is.

komen we zonder moeite tot

$$\begin{aligned}\log \operatorname{antilog} y &= \log \lim \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \lim \log \left(1 + \frac{y}{n}\right)^n = \\ &= y \lim \frac{\log \left(1 + \frac{y}{n}\right)}{\frac{y}{n}} = y, \text{ de formule (43).}\end{aligned}$$

16. — De eigenschappen van $\log x$ kunnen nu gemakkelijk omgezet worden in eigenschappen van $\operatorname{antilog} y$. De functionaalbetrekking van deze functie wordt gevonden uit

$$\begin{aligned}\log (\operatorname{antilog} y_1 \cdot \operatorname{antilog} y_2) &= \log \operatorname{antilog} y_1 + \log \operatorname{antilog} y_2 = \\ &= y_1 + y_2 = \log \operatorname{antilog} (y_1 + y_2) \text{ en de overweging, dat } \operatorname{antilog} y \text{ door}\end{aligned}$$

$$\log \operatorname{antilog} y = y$$

eenduidig is bepaald, wegens de monotonie van $\log x$. Bijgevolg

$$(47) \quad \operatorname{antilog} (y_1 + y_2) = \operatorname{antilog} y_1 \cdot \operatorname{antilog} y_2.$$

Wordt het getal e gedefinieerd door

$$(48) \quad e = \operatorname{antilog} 1,$$

dan kan met (47) worden gevonden, dat voor elke *rationale* y geldt

$$(49) \quad \operatorname{antilog} y = e^y.$$

Voor irrationale y zal (49) de definitie zijn voor e^y , zodat voor reële exponenten y_1 en y_2 de relatie

$$(50) \quad e^{y_1 + y_2} = e^{y_1} e^{y_2}$$

juist is; en voor elke reële waarde van y is

$$(51) \quad \log e^y = y.$$

Is $a > 0$ en y rationaal, dan is

$\log a^y = y \log a$, dus volgens (51) (y vervangen door $y \log a$):

$$\log a^y = \log e^{y \log a}, \text{ zoodat}$$

$$(52) \quad a^y = e^{y \log a}.$$

Voor irrationale y is weer (52) de definitie van a^y voor $a > 0$. Voor elke reële y is dan

$$(53) \quad \log a^y = y \log a.$$

Met (53) kunnen verder de eigenschappen van a^y zonder enige moeite worden gevonden. Bovendien kan uit (53) direct worden afgeleid, dat de hier ingevoerde logaritmen overeenstemmen met die, welke volgens de methode van Euler worden gevonden.

Immers ${}^a\log x$ was gedefinieerd als $\frac{\log x}{\log a}$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Dus

$${}^a\log a^y = \frac{\log a^y}{\log a} = \frac{y \log a}{\log a} = y, \text{ m a.w. is}$$

$${}^a\log b = y, \text{ dan is } b = a^y.$$

Wordt in de definitie van ${}^a\log x$ genomen $a = e$, dan blijkt

$${}^e\log x = \frac{\log x}{\log e} = \log x,$$

dus e is het grondtal van de natuurlijke logaritmen.

HET WISKUNDIG GEDEELTE VAN HET EINDEXAMEN DER H.B.S.¹⁾

DOOR

Dr. O. BOTTEMA.

M. de V. Uw bestuur heeft goedgevonden, dat ik deze middag spreek over het eindexamen in wiskunde aan de scholen van het type, dat ik uit directe ervaring ken. Dat onderwerp beperkt ongetwijfeld de kring van belangstellende toehoorders, maar ik waag de hoop uit te spreken dat het genoemde examen in zijn historische ontwikkeling enige algemene tendenzen doet zien, die van belang kunnen zijn voor het eindexamen gymnasium na de gelijkschakeling.

Het eindexamen is een bij uitstek praktische aangelegenheid. Het zal U moeite kosten, maar U moet mij maar vergeven, dat ik het waag na de redevoering van Prof. de Vries, U weer omhoog te voeren naar Uw hoogste klasse, en naar de zorgen, die zij U gaf en straks weer geven zal.

U zult er mij niet van verdenken, dat ik met sommige van onze leerlingen en hun verzorgers het eindexamen beschouw als doel van ons onderwijs. Anderzijds komt het mij voor, dat deze instelling door haar wisselwerking met de praktijk van het leerplan, voornamelijk natuurlijk in de hogere klassen, belangrijk genoeg is, om er ons op te bezinnen, om de balans ervan eens op te maken en na te gaan tot welke conclusies deze aanleiding geeft.

Ik veronderstel, dat wij het in deze kring in meerderheid eens zullen zijn omtrent het doel van ons eindexamen. Als ik mij dan maar weer mag aansluiten bij de hier gebruikelijke beeldspraak, dan kunnen wij zeggen, dat het eindexamen een onderzoek inhoudt naar de vraag of de candidaat de school met vrucht heeft doorlopen.

¹⁾ Lezing, gehouden te Utrecht in de Paasvacantie 1936.

Deze simpele uitspraak accentueert intussen een opvatting omtrent de plaats en het autonome karakter van onze middelbare scholen, waarbij het waard is even stil te staan.

Het is merkwaardig, dat de twee examens, die resp. aan de aanvang en aan het einde der middelbare school zijn ingesteld, beide door deze school zeer egocentrisch worden opgevat. In beginsel stelt de middelbare school zelf vast welke leerlingen zij zal toelaten, maar later beslist zij tevens over de vraag of de vorderingen der candidaten bevredigend zijn, ook al is aan een gunstige beslissing automatisch het recht van toelating tot een hogere onderwijsinstelling verbonden. U weet, dat aan deze beginselen meermalen is getornd. De kwestie's die zich ten aanzien van ons toelatingsexamen in de loop der jaren hebben voorgedaan, moet ik hier uiteraard geheel laten rusten. Het probleem dat zich bij het einde van de middelbare schoolperiode voordoet, moet ik wel even aanroeren, juist omdat de wiskunde bij deze materie gemoeid is. Wanneer in de loop der jaren gebleken is, dat het einddiploma der H.B.S. B een genoegzame waarborg biedt voor de studie aan universiteit en hogeschool en dit feit ook zijn officiële erkenning heeft gevonden, dan nemen wij daarvan met voldoening en dankbaarheid acte. Wij kunnen verder gaan en ons in beginsel ontvankelijk achten voor raadgevingen en wensen, die door het hoger onderwijs ten opzichte van onze scholen worden geuit. Wanneer ons klachten bereiken over het peil der door ons afgeleverde leerlingen, dan zijn die zeer zeker ernstige overweging waard. Maar ik geloof, dat wij ons ernstig moeten verzetten tegen elk streven om het eindexamen der H.B.S. op te vatten als een toelatingsexamen tot een hogere onderwijsinstelling. Ons eindexamen blijve een onderzoek naar de resultaten der volbrachte leertijd en verandere niet in een test, die beslist over de geschiktheid voor hogere studie. Wij zouden die nog steeds uitgebreide groep van onze leerlingen te kort doen, welke geen hoger onderwijs kunnen of willen volgen. Indien er, wat ik persoonlijk niet geloof, een lacune bestaat tussen M.O. en H.O., niet in een bijzonder geval, maar als verschijnsel, dan moet de toenadering zeker niet geforceerd worden door een principiële wijziging van ons eindexamen.

Een vergelijking tussen de aankomende student van nu en die van enige decennien geleden, valt dikwijls uit in het nadeel van

de eerstgenoemde. Voor zover het de wiskunde betreft, schijnen zij die het verleden prijzen mij toe geen gelijk te hebben, als zij vermoeden, dat het onze jeugd met dit vak gemakkelijker wordt gemaakt, dan hun ouders. Vergelijken met vroeger is in een dergelijke materie zeer hachelijk, maar het is geen waagstuk om de stelling te poneren, dat het tegenwoordige wiskundeonderwijs scherpere begripsvorming, een dieper inzicht en meer combinatievermogen eist dan het vroegere.

Ons examen is gesplitst in een schriftelijk en een mondeling gedeelte. Dat het eerste het belangrijkste wordt geacht, blijkt reeds uit de instelling van het instituut „vrijstelling.” Over de verhouding der beide delen zou ik gaarne enige opmerkingen willen maken. Ik sluit deze aan bij de inhoud van een rondschriften, dat de directeuren der H.B.-scholen in een der inspecties het vorige jaar uit handen van hun inspecteur bereikte. Het was bij het eindexamen voorgekomen, dat uit een 2 voor het schriftelijk en een 6 voor het mondeling examen een 3 als eindcijfer werd afgeleid en de betrokken autoriteit achtte dit onjuist en ongewenst; hij was van mening dat bij een verschil van een even aantal punten het juiste midden het eindcijfer moest zijn. Men ziet hier dus de opvatting verkondigd, dat de twee delen van het examen (behoudens afzonderingscriteria) als gelijkwaardig moeten worden beschouwd. Practisch is deze zaak niet zo heel gewichtig; ik heb althans wel eens horen fluisteren dat verschillende examinatoren de gewoonte hebben na het mondeling examen eerst het eindcijfer vast te stellen en daarna voor het mondeling examen een zodanig cijfer berekenen, dat zij met de combinatie zonder aanstoot te geven in de vergadering kunnen verschijnen. Maar principieel lijken mij de bedoelde opmerkingen toch zeer aanvechtbaar. Normen zou ik hier eigenlijk liever in het geheel niet geven, omdat zij alleen maar in de vrijheid van handelen belemmeren. Maar om het zelfstandig werken gedurende $2\frac{1}{2}$ uur aan een wel overwogen en voor alle kandidaten gelijkwaardige opgave gelijk te willen stellen met een mondeling onderhoud gedurende welgeteld $11\frac{1}{4}$ minuut is toch bij een vak als wiskunde onverdedigbaar. Alleen een zeer langdurig mondeling onderzoek kan hier waarde hebben en ook dan blijft een beoordeling nog zeer subjectief. Het mondeling examen in wiskunde in zijn tegenwoordige vorm betekent niet veel meer dan de mogelijkheid van

retouchering en van afronding — vooral naar boven — van de op het schriftelijk deel verkregen cijfers. Handhaving lijkt mij alleen gewenst met het oog op de gevallen, waarin een candidaat bij het schriftelijk deel ver beneden gerechtvaardigde verwachtingen is gebleven.

Voor verhoging der vrijstellingsgrens van 7 op 8, of voor algehele afschaffing der vrijstellingen voel ik dan ook niet veel. Evenmin voor het uitbreiden van het eindexamen met onderwerpen, die alleen op het mondeling examen aan de orde komen.

Ik herhaal, dat ik hier sprak naar aanleiding van de bestaande toestand. De vraag, welke wijze van examineren voor het vak wiskunde in het algemeen het meest gewenst is, wil ik slechts even aanroeren. B e t h heeft enige jaren geleden als zijn mening geuit, dat het mondeling gedeelte het voornaamste moet zijn, omdat het schriftelijk examen slechts paraatheid van kennis en verkregen routine tot object heeft en het begrip niet tot zijn recht komt. Dat artikel heeft mij nog eens helder doen inzien, hoezeer men over deze dingen van mening kan verschillen.

Het is een oude waarheid, dat iemands wiskundig inzicht het best wordt beproefd door hem een vraagstuk voor te leggen. Het is hier niet de plaats om in te gaan op het wezen van de geestelijke processen, die zich bij de studie der wiskunde afspelen, maar het lijkt mij een feit, dat hierbij het scheppende element belangrijker is dan het reproducerende. De ontwikkelende kracht van het wiskundeonderwijs berust voor een groot deel op de omstandigheid, dat de leerling geplaatst wordt voor situaties, die telkens weer enigszins anders zijn, en die hem dwingen tot ordening en formulering van zijn gedachten. Door zelfwerkzaamheid verkregen routine, in de goede zin van het woord, is daarbij onmisbaar. Een hogere soort van geheugen dan dat hetwelk bij eenvoudig memoriseren nodig is, doet hem analogieën ontdekken en brengen hem tot het inzicht, dat hij, tot de kern van de vraag doorgedrongen, zich bevindt in bekende omgeving. Maar de weg tot dit inzicht te vinden maakt juist de moeilijkheid van het probleem uit. Een opgelost vraagstuk lijkt achteraf gezien, dikwijls zeer eenvoudig, omdat uit de oplossing de moeilijkheden min of meer zijn geëlimineerd. De zelfwerkzaamheid bij het „zoeken” van de oplossing van een goed vraagstuk, lijkt mij daarom in ons onderwijs van overwegend belang. Ik acht het daarom een ver-

heugende omstandigheid, dat ons examen den candidaten vraagstukken voorlegt en geen reproductie vraagt van stellingen uit de z.g. theorie. Het is in de loop der jaren slechts een enkele maal voorgekomen, dat men van dit beginsel afweek, zoals Trigonometrie II, 1902, waar de cosinusregel en de formules van Gauss moesten worden afgeleid, Trigon. III, 1909 waar het probleem van Snellius werd gevraagd. Algebra 1906, III vraagt de definitie en de eigenschappen der logarithmen.

Ik vestig opzettelijk de aandacht op deze feiten omdat men in de laatste jaren een reactie kan waarnemen op deze ideeën. Als tegenwicht tot sommige ontegenzeggelijk gekunstelde problemen, die aan onze leerlingen soms worden voorgelegd, heeft deze terugslag zeer zeker zijn nut. De neiging om de mathesis te zien niet als een vraagstukkenverzameling, maar als een compositie, als een aaneenschakeling van stellingen in organisch verband, valt zeker toe te juichen. Ik zie echter groter bezwaren, zowel van principiële als van praktische aard, om deze opvattingen in ons schriftelijk examen tot uiting te brengen.

Hoewel het opgeven van vraagstukken op ons schriftelijk examen mijn onverdeelde instemming heeft, kan ik toch niet ontkennen, dat aan de uitwerking nadelen zijn verbonden. Het jaarlijks terugkeren van de verplichting een stel geschikte opgaven te ontwerpen, plaatst het college van inspecteurs ongetwijfeld voor grote moeilijkheden. Allereerst is het componeren van een vraagstuk, dat de verschillende elementen bevat, die het geschikt maken voor het beoogde doel en dat moet worden voorgelegd aan de honderden candidaten uit het gehele land, onderwezen door docenten van verschillende opvatting met behulp van leerboeken van uiteenlopende aard, één moeilijke bezigheid. Bovendien worden de gestelde opgaven op de dag van hun verschijnen, onderworpen aan het oordeel en het analyserend vernuft van die docenten, die ambtshalve voortdurend tot scherp lezen en kritisch beschouwen moeten opwekken. Natuurlijk hebben wij het recht aan de opgaven naar inhoud en vorm de hoogste eisen te stellen, maar wanneer wij ons de daaraan verbonden moeilijkheden, die wij zelf bij onze proefwerken op kleinere schaal ook ontmoeten, goed voor ogen houden, dan past ons bescheidenheid bij onze kritiek. Over 't geheel meen ik wel te kunnen zeggen, dat de verzamelde eindexamenvraagstukken een goede collectie vormen.

Dat verscheiden onzer wiskundeleerboeken de opgaven hebben overgenomen en dat de verzamelde opgaven in boekvorm aan vele scholen zijn ingevoerd mag men niet geheel toeschrijven aan hun voortreffelijkheid, omdat hier ook andere overwegingen van invloed zijn, maar vooral voor de meetkundige vakken heb ik de verzameling altijd als zeer goed beschouwd. Vele vraagstukken kunnen het verdragen telken jare opnieuw te worden opgelost zonder dat ze voor den docent hun bekoring verliezen.

Er zijn echter twee op zichzelf min of meer tegenstrijdige invloeden, waardoor in de loop der jaren een aantal minder bevredigende vraagstukken het licht hebben gezien.

De eerste komt voort uit de overweging, dat het vraagstuk, dat men den candidaat voorlegt, niet een herhaling mag zijn van een vroegere opgave, maar een „nieuw” element moet bevatten. Deze overweging komt voort uit het wezen der wiskundevraagstukken zelve, waarbij men nu eenmaal meer verlangt dan een prestatie, die alleen door middel van het geheugen kan ontstaan. De toestand is in dat opzicht geheel verschillend van die bij de scheikunde of de natuurkunde, waar in de loop der jaren een zelfde vraag meermalen terugkeert. Wij hebben hetzelfde bij onze proefwerk vraagstukken in alle klassen der school: ook daar zullen wij de neiging hebben de leerlingen een nog niet ontmoete moeilijkheid voor te leggen, tot wanhoop van sommige ijverige en conscientieuze, maar niet begaafde onder hen, die zich goed hebben voorbereid en zich beklagen, dat zij door een aan het vak inhaerente onbetrouwbaarheid, geen loon naar werken krijgen.

Deze natuurlijke neiging tot de creatie van iets min of meer origineels komt in conflict met een tweede overweging, die er voor terug doet schrikken den candidaten voor „verrassingen” te plaatsen. Juist door het feit, dat het eindexamen geen test mag zijn, maar een contrôle van het resultaat van bepaald onderwijs, mogen docent en candidaat aan het examen de eis stellen van een zekere continuïteit. Men kan de verontwaardiging billijken van een docent, die met zijn leerlingen hard heeft gewerkt en het beste ervan verwacht, als hij de teleurstelling ondervindt hen geplaatst te zien voor de opgave van een type, waarop hij in het minst niet had gerekend.

Uit deze twee, op zichzelf volledig te waarden factoren, neiging tot originaliteit en tot continuïteit, zijn een aantal rondweg

gezegd slechte opgaven voortgekomen. De tweede factor eist het handhaven van een bepaald thema, de eerste volgt daar in de vorm van exponenten, reeksen, doorsneden en omwentelingen een aantal variaties aan toe, die het geheel maken tot een gekunstelde en onnatuurlijke opgave. Ik overdrijf niet als ik zeg, dat bijna geen enkel onderwerp van onze wiskunde tegen de door het eindexamen er op gepleegde roofofbouw bestand is gebleken. Als voor de hand liggende voorbeelden noem ik U de goniometrische vergelijkingen, de „ingeklede vraagstukken”, de logaritmische en exponentiële vergelijkingen, de samengestelde interest en het berekenen met logaritmen, de toepassing der goniometrie op planimetrische problemen, oppervlakte en inhoudsbepaling van omwentelingsfiguren, het construeren van doorsneden, het bepalen van zwaartepunten en het evenwicht van vaste lichamen. Elk dezer onderwerpen hebben hun tijd van glorie gehad, waarin zij vrijwel geabonneerd waren op een vertegenwoordiging in de opgaven. Men werd dan blijkbaar zo medegesleept door de suggestie van de onmisbaarheid dezer onderwerpen, dat men geen maat wist te houden en ze geheel uitputte. Het resultaat was de tegenzin, die van overmaat het bekende gevolg is. Ik heb de memorie van toelichting gemist, die het voorstel tot afschaffing der mechanica op het eindexamen in 1921 vergezelde, maar ik heb zo'n vermoeden dat de verschijnselen, die ik U schetste, hierbij van invloed zijn geweest. Dichterbij ligt de tragedie van de samengestelde interest, waar een toepasselijk vraagstuk over het uitsterven van de deelnemers aan een spaarkas het einde heeft verhaast. Zie ik goed, dan dreigt bij de thans in zwang zijnde algebravraagstukken over de extreme waarde van een kwadratische vorm het verschijnsel zich te herhalen. Hoe weinig de verdwijning van verschillende der onderwerpen, die ik U noemde, berustte op het inzicht, dat zij als zodanig hun tijd hadden gehad, blijkt uit de terugkeer van de goniometrische vergelijkingen, maar nu op een wijze die meer met hun ondergeschikte aard overeenstemt. Misschien hangt de wederinvoering der mechanica ook samen met het inzicht, dat men uitgemergeld land in bedrijf kan terugbrengen door het enige tijd braak te laten liggen. Wie weet of onze nazaten niet zullen smullen in interestopgaven met de gezonde eetlust, die op het vasten volgt.

Tussen de twee stromingen die zich bij een wiskunde-examen

voordoen: de neiging naar originaliteit enerzijds, die voortkomt uit het wezen der wiskundige denkwijze, dat napraten verwerpt en het streven naar continuïteit anderzijds, gebaseerd op eisen van menselijkheid, op de beperktheid van initiatief bij de meesten onzer kandidaten en op de redelijke wens der docenten om hun enig houvast te geven, tussen die twee stromingen wordt het evenwicht gemakkelijk verbroken. Overheerst de continuïteit, dan beleeft men een tijdperk van clichévraagstukken, de verzamelde eindexamenopgaven worden verheven tot leerboek, begrijpen wordt minder belangrijk dan onthouden, men loopt kans om te vervallen tot africhten, tot examendressuur. Minder dan ooit geeft een goed examen waarborg voor het bezit van die geestes eigenschappen wier ontwikkeling het doel van het wiskundeonderwijs moet zijn. Ten slotte keert de wal het schip en wendt men zich uit begrijpelijke reactie van de bewuste onderwerpen af.

Andere, niet minder ernstige gevaren bedreigen het examen als de neiging tot originaliteit overheerst. Ongetwijfeld beleeft men dan een periode van interessante, aesthetisch bevredigende vraagstukken, met nieuwe ideeën en frisse durf. Maar men loopt veel kans het beginsel uit het oog te verliezen, dat ik U zo straks voorop heb gesteld, nl. om te onderzoeken of de kandidaat met vrucht het onderwijs heeft gevolgd. Het examen wordt dan geen natuurlijke afsluiting van het onderwijs, maar verandert in een intelligentietest; die niet in de eerste plaats teruggrijpt op het verleden, maar een onderzoek opent naar toekomstige bruikbaarheid en die eerder aanleg onderzoekt dan resultaat van genoten onderwijs. Terwijl deze toestand op zichzelf reeds onjuist moet worden geacht, komt daar nog bij, dat de bedoelde test niet is „geijkt” en omtrent de redelijke verwachtingen die men aangaande de prestaties van den kandidaat heeft, geen directe ervaring bestaat. Het is een bekend feit, dat men over het vermogen van anderen om zelfstandig een vraagstuk op te lossen, dat men zelf opgelost voor zich heeft, meestal te optimistisch gestemd is. Samenvattend kan men zeggen dat in een tijdperk, dat uitziet naar nieuwe mogelijkheden men er licht toekomst zijn eisen te hoog te stellen tot schade van den kandidaat en tot teleurstelling van den docent.

Wanneer het mij vergund is deze algemene opmerkingen een oogenblik te confronteren met de actuele stand van zaken, dan

zou ik geneigd zijn te zeggen, dat de tendens naar originele opgaven thans sterker is dan het betrachten van traditionele motieven. Misschien zijn de opgaven op zichzelf thans niet moeilijker dan vroeger, maar de docent heeft minder houvast aan zijn ervaringen van vorige jaren.

Daar komt bij dat de neiging tot originaliteit zich op het ogenblik niet beperkt tot een enkel vak, maar zich wel schijnt uit te strekken over alle vier wiskunde-onderdelen en de mechanica. Er zit in het streven naar vernieuwing van het wiskundeonderwijs veel wat op zich zelf te waarderen is, maar het gevaar van overschatting der kandidaten is dunkt mij niet denkbeeldig gebleken. Het gevaar dat altijd aanwezig is als men naar nieuwe gebieden van onderzoek zoekt, doet zich ook hier voor, men verliest de kijk op proporties en in zijn enthousiasme vergeet men de enige maat aan te leggen die over de bruikbaarheid kan beslissen: het vermogen van onze gemiddelde leerlingen. Onze tijdschriften en vergaderingen bevatten in het algemeen meermalen voorstellen en opvattingen omtrent nieuwe mogelijkheden voor het wiskundeonderwijs, die grote twijfel doen rijzen aan het werkelijkheidsbesef van hun auteurs.

Ik geloof, dat het verschijnsel, dat ik U noemde grotendeels de oorzaak is van de ontevredenheid over het eindexamen wiskunde, dat hier en daar aan het licht is getreden. De Telegraaf van de vorige Zaterdag bevatte een artikel over deze kwestie met de headline: „felle kritiek van leraren in de wiskunde”. Het artikel gaat uit van de opinie, dat de examenopgaven voor de exacte vakken van jaar tot jaar moeilijker worden en dat de docenten in deze vakken ten einde raad zouden zijn. Met spatie en met leedvermaak wordt het oordeel herdrukt, M. d. V., dat U in December 1935 over de opgaven van dat jaar in het weekblad hebt gepubliceerd. Als een bewijs, hoe lichtvaardig buitenstaanders tot conclusies geneigd zijn, vermeld ik U het oordeel van den schrijver van het artikel, de heer Stijger, over de oorzaak van de verzwaring, die volgens hem opzettelijk zou zijn en tot doel hebben het aantal studenten te beperken. Ik geloof met zekerheid te kunnen vaststellen, dat dergelijke geruchten uit de lucht zijn gegrepen en hoop U te hebben aangetoond, dat hier interne oorzaken hebben gewerkt. Laat ons tevens vaststellen, dat de eindexamenopgaven voor zover ik weet, steeds voort-

komen uit ons corps zelf en dat de verantwoordelijke inspecteurs hierbij, naar men zegt, vrijwel immer verzachtend en vereenvoudigend moeten te werk gaan. Toch lijkt het me goed ook hier nog eens te constateren, dat ons examen te zwaar wordt, als het al te gauw nieuwe wegen inslaat. Men vergete b.v. niet dat de eenvoudige vraag over de limiet voor $n \rightarrow \infty$ van de uitdrukking $2^n r^n$ in 1933 reeds vele kandidaten moeilijkheden gaf en dat het een groot verschil maakt of men een vraagstuk over de geodetische lijn op een kegeloppervlak voor het eerst of bij herhaling voorgelegd krijgt.

Ik heb U een tweetal factoren genoemd, die samenwerken tot het ontstaan van minder bevredigende opgaven. Het lijkt mij toe, dat men deze verschijnselen althans gedeeltelijk zou kunnen onderwerpen door het tot stand brengen van een minder vaag, van een meer gedetailleerd eindexamenprogramma. Het is de onkunde omtrent de grenzen van het gebied, die hier meespreekt. Laat ik U een voorbeeld geven. Op de meeste scholen zal men in den regel wel bij de algebra de reststelling behandelen en bij de stereometrie enige tijd aan het construeren van eenvoudige netwerken wijden. Voor zover mij bekend is het eerste onderwerp slechts éénmaal, in 1911, aan de orde geweest op het schriftelijk examen, het tweede nooit. Men heeft het stellen van vragen uit deze gebieden zo lang uitgesteld, dat men er thans moeilijk zonder voorafgaande aankondiging mee voor den dag kan komen, wil men niet de kans lopen verschillende kandidaten ernstig te duperen. Wij hebben hier, dunkt me, enige voorbeelden van te ver gevoerde zelfbeperking van de kant van de stellers der opgaven. Maar aan de andere kant voelt ook de docent de bezwaren van de al te vage begrenzing van het gebied, waaruit hij de opgaven redelijkerwijze mag verwachten en zal hij voorzichtigheidshalve tijd moeten blijven besteden aan onderwerpen, die zeer waarschijnlijk niet zullen worden gevraagd. Een sprekend voorbeeld is hier weer de interestrekening; na de debacle van de spaarkas in 1928 bleven de docenten nog geruime tijd in het onzekere omtrent de mogelijkheid van reorganisatie der zaak; eerst later als gevolg van de door Uwe vereniging, M. de V. ondernomen démarches, bereikte ons de tijding, dat de traditionele opgaven inderdaad waren bijgezet in het pantheon der geschiedenis.

Voor de natuur- en de scheikunde heeft men uitvoerige lijsten samengesteld van de onderwerpen, waartoe het examen zich zal bepalen. Hoewel de wiskunde zich voor dergelijke systematisering minder goed leent, zou een uitvoeriger uitwerking van het programma toch gewenst zijn. De ontwerpers der opgaven zouden zonder kans op conflicten vrijer zijn in hun keus, de docenten zouden ontheven zijn van de plicht rekening te houden met bepaalde vraagstuktypes.

Op een andere traditie van het eindexamen voor wiskunde zou ik U nog willen wijzen. De vraagstukken zijn in het algemeen zeer lang en als gevolg daarvan gesplitst of althans te splitsen in vele delen. Dat is te waarderen, wanneer de opgave b.v. luidt om van een bepaalde figuur of van een bepaalde functie verschillende eigenschappen te ontdekken of te bewijzen. Onze verzameling bevat vele voorbeelden van voortreffelijk gecomponeerde, niet in stukken uiteenvallende, maar uit onderdelen organisch opgebouwde vraagstukken. Maar onbevredigend is het resultaat, wanneer een bepaalde idee, hoe geschikt overigens, te mager bleek om er een vraagstuk van de gebruikelijke minimum afmetingen mee te vullen. Ook dit is een oorzaak van het ontstaan van onnatuurlijke en aesthetisch onwaardeerbare opgaven, zoals U die allen kent en waarbij men voelt, dat de auteur een afgeronde opgave moest voorzien van appendices, omdat ze anders te onaanzienlijk was voor een eindexamenvraagstuk.

Praktisch is het tegenwoordig al dikwijls zo, dat men het als een verdienste van een vraagstuk beschouwt als b.v. het derde onderdeel onafhankelijk van het tweede kan worden opgelost, omdat men den candidaat dit voordeel in de gegeven omstandigheden van harte gunt. De z.g. korte vragen in het derde deel van het eindexamen natuurkunde hebben mij ook altijd als examenopgaven een groot succes toegeschenen. Bij het stellen van kortere opgaven zou men ook gelegenheid hebben onderwerpen, waar men nu op het examen verre van blijft, op voorzichtige en tastende wijze in te voeren.

M. de V. In wat ik tot nu toe te berde heb gebracht, schemerde reeds iets door van een andere functie van ons eindexamen, dan die welke zij uit de aard van haar bestaan vervult. Het is tevens in sommige opzichten de exegese van de tekst van ons

leerplan in de hogere klassen. Dat dit leerplan vaak is heb ik reeds gezegd, maar ook na een enigszins verscherpte formulering zou ik het eindexamenwerk blijven zien als de jaarlijks herhaalde uitleg omtrent de bedoeling van het programma. Een leerplan, dat aan de docenten de vrijheid gunt, die zij zo waarderen, die hen toestaat al naar hun persoonlijke voorkeur deze of gene methode te volgen, zal altijd gebruik moeten maken van uitdrukkingen als: „de beginselen van dit”, en „de eenvoudigste vormen van dat”. En zo'n codex zou aanleiding geven tot grote ongelijkheid en onbillijkheid, wanneer zij niet begeleid werd door een oordeelkundige en richtinggevende jurisprudentie. Het uniforme schriftelijke werk is vrijwel de enige oorzaak tot de mogelijkheid van het vergelijken van verschillende scholen.

Een andere instantie, aan wie men a priori invloed in dezen zou kunnen toekennen, ik bedoel het instituut der deskundigen, speelt, dunkt me, slechts een ondergeschikte rol. Haar betekenis ligt minder op het terrein, waar van een uitspraak een regelende en norm aanwijzende invloed voor later uitgaat, dan wel in het gebied der accountancy. Misschien dat de vergaderingen van de examencommissies ten tijde van het staatsexamen in dit opzicht meer hebben betekend.

Van de tegenwoordige normvergaderingen gaat wel weer enige samenbindende kracht uit, al blijkt dit vrijwel alleen uit het streven naar eenstemmigheid in de beoordeling van het gemaakte werk en minder dan vroeger uit haar pogingen tot kritiek op de opgave zelf. Het halfslachtige en officieuze karakter van dit instituut doet het echter weer veel van zijn betekenis verliezen. Ik veronderstel, dat de invloed van de gecommitteerden bij het gymnasiale eindexamen door verschillende oorzaken meer normgevend is. Het uniforme werk zal ook hier eenheid en centralisatie teweegbrengen, die allicht zullen opwegen tegen het gevaar voor conservatisme, dat er ontegenzeggelijk uit voortvloeit.

De betekenis die ons schriftelijk examen heeft als officieel commentaar op het leerplan vergroot de verantwoordelijkheid, die op de betrokken autoriteiten rust. Een minder geschikt vraagstuk zal niet alleen van schadelijke invloed kunnen zijn op het examen in het jaar waarin het werd gesteld, maar de vloek van een dergelijke slechte daad kan ook het kwaad voortbrengen, dat het den docent in volgende jaren in onzekerheid brengt omtrent de

bedoelingen van de leidende personen in het middelb. onderwijs. Karakteristiek zijn in dit opzicht de vraagstukken algebra 2 en 3 in 1931. Vraagstuk 2, de oplossing der vergelijking $\log x = -\sqrt{7}$, waarbij $\sqrt{7}$ het grondtal is van het logaritmenstelsel, was niet alleen een opgave, die op zich zelf weinig geslaagd was en tot veel meningsverschil aanleiding gaf, het gaf althans mij persoonlijk tevens het inzicht, dat ik mij had vergist ten aanzien van de mate waarin de toch onmiskenbare ontwikkeling van het algebraonderwijs door de autoriteiten was gesanctioneerd. Het dwong nog in het vervolg om rekening te houden met de mogelijkheid van opgaven als deze, waaraan men had gemeend ontgroeid te zijn. Terwijl dit vraagstuk een remmende invloed had op het proces, dat bezig was zich te voltrekken, het 3e vraagstuk van de zelfde jaargang bracht ons om geheel andere redenen in onzekerheid. Het scheen nl. dat de autoriteiten van zins waren de behandeling kwadratische functie, die met dat vraagstuk haar debuut maakte op het schriftelijk examen, uit te breiden tot de beginselen der analytische meetkunde. Men kan op zich zelf daartegen geen bezwaren hebben en toch van mening zijn, dat de zo geheel verschillende mentaliteit van deze beide opgaven den docent verplicht zijn werkzaamheid te verdelen langs een al te lang front. Het was dan dunkt mij ook niet direct misnoegen omtrent het 2e vraagstuk zelf, maar de twijfel die het gaf aangaande de voornemens, die er voor volgende jaren uit bleken, welke Uwe vereniging, M. de V. aanleiding gaf omtrent dit vraagstuk bij haar leden een enquête in te stellen.

De regulerende invloed, die van het eindexamenwerk uitgaat op de interpretatie van het leerplan, is daarom zo krachtig, omdat zij berust op het aangeven van een voorbeeld, dat door zijn concrete werking dikwijls meer indruk maakt dan een min of meer vaag algemeen voorschrift. Door het eindexamen heeft de inspectie het dan ook in haar macht de ontwikkeling van het onderwijs te beïnvluencen door jaarlijkse doses, waardoor de uitvoerbaarheid van een nieuw denkbeeld onmiddellijk experimenteel wordt getoetst. Ik kan mij voorstellen, dat deze gang van zaken een meer principiële geest niet bevredigt, maar de realiteit leert, dat men op deze wijze soms veel meer bereikt, dan met een poging tot algehele wijziging van het leerplan. Een goed geleide eindexamenpolitiek maakt uiteraard periodieke partiële wijzigingen in ons leerplan niet overbodig, maar zij kan ons onderwijs infiltreren met nieuwe

ideeen door een proces van natuurlijke groei, terwijl een meer revolutionaire hervormingspoging, waarvan men de gevolgen niet kan overzien een zodanige reactie opwekt, dat men weinig of niets bereikt. Een voorstel tot leerplanwijziging, dat rekening moet houden met bestaande toestanden komt licht te vroeg, als het ver uit gaat boven de registratie van de denkbeelden, die bij een meerderheid der docenten zijn gerijpt en door hun praktijk op uitvoerbaarheid getoetst.

Gaarne zou ik enkele woorden wijden aan het beeld dat de eind-examenopgaven van de laatste jaren ons geven, aangaande de tegenwoordige opvattingen van de verantwoordelijke autoriteiten en hun adviseurs. Bij de algebra is de toestand nog weinig stabiel en ik noemde U reeds de vraagstukken van 1931 als een symptoom van de kentering, die wij in dit vak beleven. Het inzicht in de belangrijkheid van functionele afhankelijkheid vindt men op rustig voortschrijdende wijze in de opgaven weerspiegeld. Het eerste vraagstuk van dien aard (1929, 2) omtrent de positieve en negatieve toestand van bepaalde functies was niet in alle opzichten bevredigend; Schogt heeft indertijd reeds op de complicaties, die zich hier voordoen gewezen en de anoniemen auteur van het vraagstuk heeft blijk gegeven voor de betekenis van zekere uitzonderingswaarden der onafhankelijke veranderlijke niet veel oog te hebben, tenzij hij van oordeel was dat de daaraan verbonden moeilijkheden door candidaat en docent niet als een probleem zouden worden gezien. Uit beide alternatieven kon men een tot voorzichtigheid manende conclusie trekken omtrent het gehalte van het inzicht van ons corps in dergelijke vragen. Uit de omstandigheid dat sinds het paraboolvraagstuk in 1931 slechts in 1934 een klein onderdeel van een vraagstuk betrekking had op tekenen van een grafiek, kan men misschien de conclusie trekken, dat men het in deze richting niet wenst te zoeken. De m.i. gelukkige beperking tot gehele kwadratische functies en gebroken lineaire, die officieel is voorgeschreven, laat trouwens weinig variatie toe. De vraagstukken 1932,2 en 1933,2 eisen beide een onderzoek van een niet al te eenvoudige functie en ik vind ze beiden als zodanig zeer geslaagd. Ook het definiëren van een reeks door t_n of S_n is een goede illustratie van functioneel verband, het brengt de candidaat tot het inzicht, dat er nog andere reeksen zijn dan rekenkundige en meetkundige en dat men een reeks onbeperkt kan voortzetten, ook als zij niet toevallig

meetkundig en afdalend is. Zondert men 1931 uit, dan heeft men sinds 1924 geen vraagstuk over het berekenen met logaritmen, sinds 1926 geen klassieke logaritmisch-exponentiële vergelijkingen gehad. Uit 1934,2 en 1935,2 blijkt echter, dat uitdrukkingen als $u + 9 \log -13$ enz. nog steeds hun aantrekkelijkheid behouden. De kwadratische functie zal nog wel een goed thema blijken. Ik heb reeds gezegd, dat matigheid hier geboden is en ik hoop dat men het oplossen en ook het opstellen van vergelijkingen niet zal verwaarlozen.

Bij de trigonometrie is het rekenwerk op de achtergrond gedrongen, vermoedelijk als reactie op zeer bewerkelijke vraagstukken, die meer technische bedrevenheid dan wiskundig inzicht eisten. Het weer in voeren van eenvoudige goniometrische vergelijkingen beschouw ik als een vooruitgang. Zie ik goed dan tracht men ook hier te komen tot een dynamisch beschouwen van een goniometrische relatie, zoals ook blijkt uit de enige malen herhaalde vraag naar de extreme waarden van een goniometrische functie. Interessante vraagstukken zijn er in deze materie nog genoeg, maar men maakt het gauw te moeilijk voor leerlingen, die voor dergelijke problemen niet speciaal zijn voorbereid.

In de stereometrie is de hausse in omwentelingsfiguren voorgoed achter de rug. De laatste jaren brachten hier ons in het algemeen zeer goede, soms brillante vraagstukken, waar aesthetisch niets op aan te merken was, maar die helaas wel eens voerden tot het stellen van te hoge eisen aan den candidaat.

Ook voor de beschrijvende meetkunde worden de opgaven er niet gemakkelijker op; in elk geval blijven zij veel tijd van voorbereiding eisen gedurende het laatste leerjaar. Door de aard van dit vak, dat zich weinig meer ontwikkelt, zijn de opgaven hier niet van zo'n normgevende invloed als bij de andere onderdelen.

De opgaven over de mechanica, dat sinds 1931 weer op het schriftelijk examen is ingevoerd, zijn als regel frisser en natuurlijker, dan die welke men voor 1920 placht op te geven en zij vertonen ook meer variatie. Het stellen van vragen uit de theorie zal echter in de toekomst, als men althans niet in herhaling wil vervallen, veel vindingskracht eisen. Het debuut in 1931, waarbij het samenstellen van krachten in het platte vlak moest worden behandeld, was minder gelukkig, maar sinds dien hebben de theorievragen mij over 't geheel wel bevredigd. Maar men kan

zich niet onttrekken aan de indruk dat men door de meest voor de hand liggende onderwerpen heen is. Men heeft ook te kampen met de moeilijkheid, dat de behandeling van sommige stellingen in verschillende leerboeken uiteenloopt. De stelling omtrent het moment van de resultante van enige krachten t.o.v. een punt, wordt b.v. op zo verschillende wijze en uitgaande van zo uiteenlopende voorkennis behandeld, dat een desbetreffende vraag de eenheid van het examen min of meer in gevaar zou brengen. Het zelfde geldt voor het evenwicht van twee koppels in een zelfde vlak. Moeilijkheid kan hier de vraag geven, welke eigenschappen de candidaat als gegeven mag beschouwen. Het vorige jaar deed zich dat b.v. voor bij de afleiding van de plaats van het zwaartepunt van een homogene cirkelboog, waarbij sommige kandidaten er van uitgingen, dat die van het zwaartepunt van een regelmatig gebroken lijn als bekend mocht worden beschouwd. Men kan het onderwijs, waarbij het memoreren van deze laatste uitkomst wordt voorgeschreven niet bepaald epistemisch noemen, maar daarmee zijn de moeilijkheden aan het beoordelen van het werk niet verdwenen. Een ander bezwaar bij dezelfde vraag is de mate van gestrengheid, die men bij de limietovergang eist; de leerboeken lopen hier ook zeer uiteen.

Enige opmerkingen, M. de V. zou ik willen maken over de beoordeling van het werk door het toekennen van cijfers. Ik wil niet lang stilstaan bij de eigenaardigheid van onze cijfertabel, die niet met nul, maar met één begint en de geregeld terugkerende discussies daarover op de normvergaderingen. Men krijgt de indruk dat onze tabel is ontworpen door een niet mathematische geest, niet gestegen tot het peil, waarop men nul voor vol aanziet. Van meer belang is de opmerking, dat de candidaat bij de exacte vakken wordt beloond voor wat hij goed heeft en bij de talen gestraft voor zijn fouten. Dit heeft de consequentie, dat men bij de taalvakken door zijn beoordeling een correctie kan aanbrengen op werk, dat te moeilijk of te gemakkelijk is gebleken, eenvoudig door het tarief te wijzigen.

Bij de exacte vakken bestaat deze mogelijkheid, die wel is waar ongeschikte opgaven niet tot geschikt werk maken, maar toch de onbillijkheden vermindert, uiteraard niet. Voor zoover mijn per-

soonlijke praktijk betreft, werd er alleen gebruik van gemaakt in 1935 ten opzichte van vraag 1d der trigonometrie.

Een enkele opmerking wil ik maken over de vraag in hoeverre de uitslag van het examen een beslissing inhoudt over de geschiktheid van het werk. Uwe vereeniging, M. de V. heeft uit het feit, dat voor de wiskundevakken en de mechanica de percentages der vrijstellingen over het gehele land in 1935 resp. bedroegen 26, 35 en 42 geconcludeerd dat het opgegeven werk te moeilijk was. Deze conclusie is intussen niet algemeen aanvaard.

Laten wij niet uit het oog verliezen dat het cijfer dat nodig is om een vrijstelling te verwerven het op één na laagste voldoende cijfer is. Vergelijken met rapportcijfers is hier onzuiver, omdat op onze rapporten de cijfers zich praktisch tot een veel kleiner interval bepalen.

Een enkel woord nog over de redactie der examenopgaven. De opgaven der verschillende jaren weerspiegelen de veelvuldigheid van nomenclatuur en van notatie, die in ons land op wiskundig gebied heerst en ik heb het wel eens betreurd, dat het examen hier geen poging doet tot het brengen van eenheid. Eenvoudig is deze materie allermint, zoals uit de interessante artikelen van Schogt in Euclides over de wiskundige vaktaal wel is gebleken. Men zou op het eerste gezicht genegen zijn bij de opgaven de hoogste eisen te stellen van exactheid en ondubbelzinnigheid, maar men komt spoedig tot het inzicht, dan dikwijls een uitvoerigheid te behoeven, die verwarrend kan werken. Laten wij niet vergeten dat de slechte verstaanders, die onze kandidaten veelal zijn, aan een half woord genoeg hebben en aan een heel woord te veel. Maar twijfel aan de bedoeling der vraag mag toch niet voorkomen. Vage uitdrukkingen als „behandel het samenstellen van krachten” op Mechanica 1931, of „los x op uit...” op Algebra 1931 hebben tot veel onenigheid en onzekerheid aanleiding gegeven, evenals de mij nog steeds onbegrijpelijke vraag op Mechanica III 1935: „wat weet gij in dit geval van de grootte van de wrijving”. Gunstig steekt daar tegenaf de redactie Algebra II, 1935: „de gevraagde grootheden moeten voor zover zij niet meetbaar zijn, in 4 decimalen benaderd worden met behulp der logarithmentafel”. Ook het gebruik van het woord „lijnstuk” is niet langer taboe. Des te

meer teleurstellend doet het aan in Stereometrie I, 1935 te lezen over het snijpunt van een lijn en een afstand.

Een technische kwestie bij het eindexamen is nog het gebruik der tafels. Het eindexamenreglement verbiedt het gebruik van andere hulpmiddelen dan logarithmentafels, zodat het raadplegen van de directe tafels der goniometrische functies blijkbaar niet is geoorloofd. Ik veronderstel dat velen met mij dat verbod zullen betreuren in de overtuiging dat de bedoelde tafels voor het verkrijgen van inzicht in het verloop der functies en voor het oplossen van eenvoudige goniometrische vergelijkingen in de wiskunde, de mechanica en de natuurkunde het natuurlijke hulpmiddel zijn.

M. d. V. Ik hoop, dat U de opmerkingen, die ik over ons eindexamen heb gemaakt, zult opvatten als een bewijs van de grote belangstelling en waardering die ik voor dit instituut gevoel en ik dank U voor de gelegenheid, die Uwe vereniging mij bood om het onderwerp op deze congresdag ter sprake te brengen.

VACANTIELEERGANG.

Uitgaande van het Curatorium van den bijzonderen leerstoel voor
Verlichtingskunde.

Aan de Rijksuniversiteit te Utrecht wordt in de laatste week van Augustus 1936 een vacantieleergang georganiseerd, welke ten doel heeft, voor afgestudeerden (physici, chemici, ingenieurs enz.) enkele onderwerpen betreffende licht en verlichting nader te behandelen, die voor deze afgestudeerden in hun practijk van leeraar of bedrijfsphysicus, gemeente-ingenieur of technisch journalist, enz. van belang zijn, terwijl hun vroegere opleiding uit den aard der zaak aan deze onderwerpen destijds minder aandacht besteedde. Licht, lichteenheden, theoretische en toegepaste lichtmeting, gasontladingsverschijnselen, gasontladingslampen en lichttoepassing zullen o.a. worden behandeld.

Als docenten hebben zich reeds tot medewerking bereid verklaard: Prof. Dr. Ornstein, Prof. Ir. van de Werfhorst, Dr. Brinkman, Dr. Elenbaas, Ir. de Jongh, Dr. Uyterhoeven en Dr. Vermeulen. Een klein prospectus met nadere bijzonderheden wordt op aanvraag aan belangstellenden toegezonden door de „Administratie van het Fysisch Laboratorium, Bijlhouwerstraat, Utrecht”.

Voor dekking van kleine onkosten is voor inschrijving voor dezen vacantieleergang een bedrag van f 2.50 vastgesteld.

Het Curatorium van den leerstoel voor

Verlichtingskunde:

20 Mei 1936.

Mr. A. J. A. A. BARON VAN HEEMSTRA,
Jhr. Mr. H. A. M. VAN ASCH VAN WIJCK,
Mr. B. J. L. BARON DE GEER VAN JUTPHAAS,
Prof. Dr. L. S. ORNSTEIN,
Ir. F. J. PHILIPS.

MECHANICA

**VOOR HET M.O. — MET VRAAGSTUKKEN
DOOR**

Dr. H. J. E. BETH en Dr. P. J. VAN LOO

TWEEDE DRUK GEB. f 2.50

TER PERSE:

J. VERSLUYS, Grote tafel H 3e druk

**P. WIJDENES en Dr. D. DE LANGE,
Vlakke Meetkunde II. 9e druk**

**P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH,
Nieuwe Schoolalgebra I 8e druk**

VERSCHENEN:

P. WIJDENES, Beknopte Driehoeksmeting. . . 7e druk

P. WIJDENES

Uitgewerkte mondelinge examens Hogere Algebra

**41 volledig uitgewerkte vragen en bovendien nog
11 volledige verslagen en 30 niet uitgewerkte vragen**

Prijs f 6,—. Voor int. op het N. T. v. Wiskunde slechts f 3,50

Uitgaven P. NOORDHOFF N.V., GRONINGEN-BATAVIA