

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDAC-
TIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN
J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
AMERSFOORT

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

Dr. C. DE JONG,
LEIDEN

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

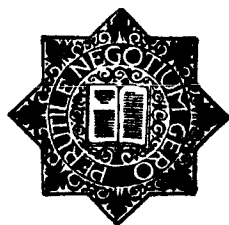
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. W. P. THIJSEN
BANDOENG

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

12e JAARGANG 1935/36, Nr. 4.



P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor intekenaars op het
Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijks afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens” (*f* 10.—) zijn ingetekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrucken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

I N H O U D.

	Blz.
Dr. E. J. DIJKSTERHUIS, Archimedes. Vervolg	145
Dr. D. P. A. VERRIJF, Didactische causerieën	167
Dr. J. G. VAN DE PUTTE, Het orthocentrisch viervlak	175
W. Korrels,	177
J. H. SCHOGT, Een Deensch wiskundeboek	180
Dr. F. BROUWER, Een rationale benaderingsformule voor de zijde van de regelmatige n -hoek	183
Ingekomen boeken.	186
J. H. SCHOGT, Opmerkingen over de wiskundige vaktaal . .	187

uiteinde van den voerstraal parallel met de verbindingslijn van de raakpunten der parallele raaklijnen.

Laat (fig. 32) de rechte door K parallel aan de raaklijnen in A en B de snede ontmoeten in F . Was nu de raaklijn in F niet parallel

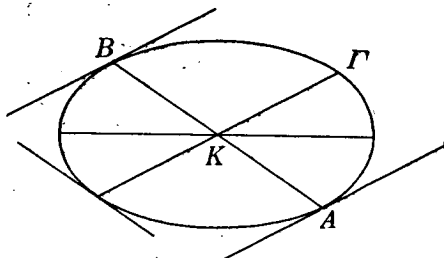


Fig. 32.

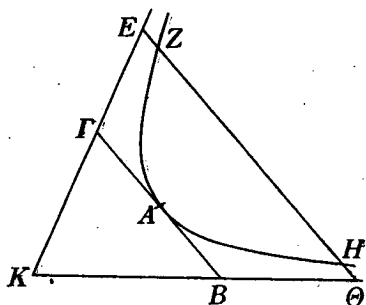


Fig. 33.

aan AB , dan zou zij AB ontmoeten in een punt E en dan zou (5,2, voor scheeve toevoeging)

$$(AE, BE) = (AK, BK)$$

dus zou $AE = BE$ moeten zijn, wat niet mogelijk is.

5,43. Een raaklijn eener amblytome snijdt de asymptoten in twee punten, die evenver van het raakpunt verwijderd zijn.

De stelling 4,1, toegepast voor scheeve toevoeging, leert onmiddellijk (fig. 33), dat de asymptoten de lijnen zijn, die het centrum verbinden met punten B en F , die op de raaklijn van A op gelijke afstanden van A liggen.

5,431. Uit 5,43 en 5,35 volgt nog, dat, wanneer een rechte de snede ontmoet in Z en H , de asymptoten opv. in E en Θ , $ZE = H\Theta$.

6. ELEMENTEN DER KEGELS, CYLINDERS, CONOIDEN EN SPHAEROÏDEN.

6,0. De kegel en zijn deelen. Er staat bij Archimedes nergens een definitie van een kegel; dit sluit echter niet in, dat hij zich zou aanpassen aan het Euclidische spraakgebruik, waarin onder een kegel een lichaam wordt verstaan (XI, Def. 18), voortgebracht door wenteling van een rechthoekigen driehoek om een rechthoekszijde. In het werk *Over Bol en Cylinder*, waarin alleen rechte cirkelkegels voorkomen, noemt hij, althans in de propositiones en expositiones, den Euclidischen kegel *gelijkbeenig* ($\kappa\acute{\omega}\nu\omicron\varsigma \text{ } \text{ισοσκελής}$), daarmee blijk-

baar aanduidend, dat de zijde (d.i. het apothema, bij hem $\pi\lambda\epsilon\nu\rho\acute{\alpha}$) constant is. Ook komt voor de term *rechte kegel* ($\kappa\acute{\omega}\nu\omicron\varsigma \delta\omicron\rho\theta\acute{o}\varsigma$). In het geschrift *Over Conoiden en Sphaeroiden* beduidt kegel, zonder adjectief gebruikt, een in het algemeen scheeven cirkelkegel. De gebruikte termen zijn verder: *top* ($\kappa\omicron\rho\rho\nu\phi\acute{\eta}$), *basis* ($\beta\alpha\sigma\acute{\iota}\varsigma$) voor den grondcirkel en voor het vlak, waarin deze ligt; *as* ($\acute{\alpha}\xi\omega\nu$) voor de rechte door den top van den kegel en het middelpunt van de basis, alsmede voor het lijnstuk, dat door deze twee punten wordt begrensd. Een *kegelsegment* ($\acute{\alpha}\pi\omicron\tau\mu\alpha\mu\alpha \kappa\acute{\omega}\nu\omicron\nu$, **C.S. Definitiones. I, 258**) is het lichaam, dat van een kegel aan de zijde van den top wordt afgesneden door een plat vlak, dat een oxytome als doorsnede oplevert; dit platte vlak, alsmede de snede zelf, heet *basis van het segment*; *as van het segment* is het lijnstuk, begrensd door den kegeltop en het centrum der snede; *hoogte* de afstand van den top tot de basis.

Dat op een scheeven cirkelkegel ook een reeks cirkeldoor-sneden ligt in vlakken, die niet parallel zijn aan de basis, wordt niet uitdrukkelijk gezegd; de wijze, waarop echter (**C.S. Definitiones**) gesproken wordt over de mogelijkheid, dat een plat vlak een kegel volgens een cirkel snijdt (zonder dat gezegd wordt, dat dit vlak parallel aan de basis zal zijn), maakt het waarschijnlijk, dat Archimedes dit heel goed geweten heeft (zie 3,5).

6,1. **De cylinder en zijn deelen.** Hiervoor geldt mutatis mutandis hetzelfde als over den kegel gezegd is. *Cylinder* ($\kappa\acute{\omicron}\lambda\iota\nu\delta\rho\omicron\varsigma$) beduidt scheeve cirkelcylinder; de rechte cirkelcylinder wordt in propositiones en expositiones als *recht* betiteld ($\kappa\acute{\omicron}\lambda\iota\nu\delta\rho\omicron\varsigma \delta\omicron\rho\theta\acute{o}\varsigma$). Een *cylinderschijf* ($\tau\acute{o}\mu\omicron\varsigma \kappa\alpha\lambda\iota\nu\delta\rho\omicron\nu$) is het lichaam, dat van een cylinder wordt afgesneden door twee parallele platte vlakken, die oxytomes als doorsnede hebben (**C.S. Definitiones**); *as van de schijf* is het lijnstuk, begrensd door de centra der twee sneden; het ligt op de as van den cylinder; *hoogte* de afstand der platte grensvlakken.

6,11. **C.S. 10.** Op grond van dezelfde redeneeringen, als gehouden zijn in Euclides XII, ziet men in, dat de reden van twee kegelsegmenten samengesteld is uit de reden hunner bases en de reden hunner hoogten en dat iedere cylinderschijf driemaal zoo groot is als een kegelsegment met dezelfde basis en dezelfde hoogte.

6,2. In het schrijven aan Dositheos, dat het werk *Over Conoiden en Sphaeroiden* inleidt, worden de volgende lichamen gedefinieerd:

6,21. Wanneer een orthotome wentelt om den diameter, ontstaat een lichaam, dat *rechthoekige conoide* heet ($\delta\theta\theta\omicron\gamma\acute{\omega}\nu\iota\omicron\nu\ \kappa\omega\nu\omicron\iota\delta\epsilon\acute{\iota}\varsigma$; weer te geven door *orthoconoide*). Wanneer parallel aan een willekeurig raakvlak van dit lichaam een snijvlak wordt gebracht, begrenst dit mèt het oppervlak een *conoidsegment* ($\tau\mu\acute{\alpha}\mu\alpha\ \tau\omicron\upsilon\ \kappa\omega\nu\omicron\iota\delta\epsilon\acute{\iota}\omicron\varsigma$), waarvan de *basis* heet de doorsnede van het snijvlak met de conoide, *top* het raakpunt van het raakvlak, *as* het lijnstuk, dat van de rechte door den top van het segment parallel aan de omwentelingsas door de twee platte vlakken wordt afgesneden.

De orthoconoide is blijkbaar een omwentelingsparaboloide.

6,22. Door omwenteling van een amblytome om den diameter ontstaat een *stomphoekige conoide* ($\sigma\tau\omicron\mu\phi\lambda\upsilon\gamma\acute{\omega}\nu\iota\omicron\nu\ \kappa\omega\nu\omicron\iota\delta\epsilon\acute{\iota}\varsigma$; weer te geven door *amblyconoide*). Dit is dus een blad van een tweebladige omwentelingshyperboloide. De asymptoten der snede brengen bij de wenteling den *omvattenden kegel* ($\kappa\acute{\iota}\nu\omicron\varsigma\ \pi\epsilon\epsilon\tau\epsilon\acute{\iota}\chi\omega\nu$) voort. Van een segment, als boven (6,21) gedefinieerd, heet *as* het lijnstuk, dat door het snijvlak en het daaraan parallele raakvlak wordt afgesneden van de rechte, die den top van den omvattenden kegel met den top van het segment verbindt. Het lijnstuk van deze rechte tusschen deze twee punten zelf heet *verlengde as* ($\pi\omicron\tau\epsilon\omicron\upsilon\sigma\alpha\ \tau\tilde{\omega}\ \acute{\alpha}\xi\omicron\nu\iota$ = *grenzend aan de as*).

6,23. Door omwenteling van de oxytome om een diameter ontstaat de *sphaeroide* (omwentelingsellipsoide), die *uitgerekt* ($\pi\alpha\rho\alpha\mu\acute{\alpha}\kappa\epsilon\varsigma\ \sigma\phi\alpha\iota\rho\omicron\iota\delta\epsilon\acute{\iota}\varsigma$) of *afgeplat* ($\acute{\epsilon}\pi\iota\pi\lambda\alpha\tau\acute{\omicron}\ \sigma\phi\alpha\iota\rho\omicron\iota\delta\epsilon\acute{\iota}\varsigma$) heet, al naar gelang de snede gewenteld heeft om den grootsten of om den kleinsten diameter. *As* en *top* worden als boven gedefinieerd, *centrum* is het centrum der wentelende snede, *diameter* de diameter der snede, die loodrecht op de wentelingsas staat. Een snijvlak bepaalt met de sphaeroide twee segmenten, waarvan de *toppen* de punten zijn, waar de raakvlakken parallel met het snijvlak het oppervlak raken, de lijnstukken, die het snijvlak op het lijnstuk der raakpunten bepaalt, de *assen*.

6.3. De orthoconoide.

C.S. 11a, *Indien een orthoconoide wordt gesneden met een plat vlak door of parallel aan de as, zal de doorsnede dezelfde orthotome zijn als die de < wentelende > figuur omvat en haar diameter zal de gemeene doorsnede zijn van het vlak, dat het lichaam snijdt en het vlak door de as loodrecht op het snijvlak gebracht.*

Het bij Archimedes ontbrekende bewijs (dat alleen vereischt

wordt voor een vlak parallel aan de as) is als volgt te leveren (fig. 34).

Laat AB de as zijn, ΓA de doorsnede van het vlak van teekening met het loodrecht daarop staande snijvlak. Laat de rechte door A loodrecht op het vlak van teekening (dus in het snijvlak) het oppervlak in Θ ontmoeten. Dan is, als de orthia der meridiaandoorsnede N is,

$$\begin{aligned} T(\Theta A) &= O(EA, ZA) = T(BE) - T(BA) \\ &= O(N, AB) - T(\Gamma H) = O(N, AB) - O(N, AH) = \\ &= O(N, BH) = O(N, \Gamma A). \end{aligned}$$

De doorsnede is dus een orthotome met top F , diameter ΓA en dezelfde orthia als EAZ , dus hiermee congruent.

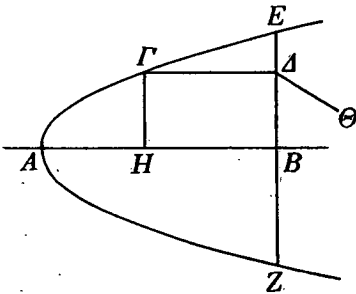


Fig. 34.

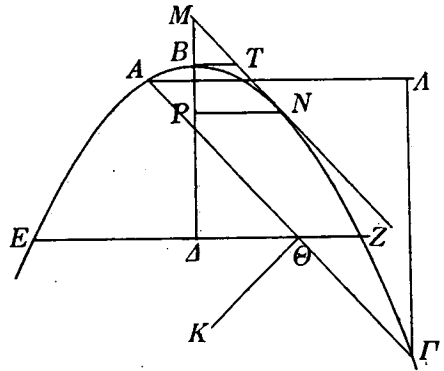


Fig. 35.

6,31. **C.S. 12.** *Indien een orthoconoide wordt gesneden met een vlak, dat noch door de as gaat, noch parallel aan de as is, noch loodrecht op de as, zal de doorsnede een oxytome zijn; de grootste diameter daarvan zal het stuk zijn, dat binnen de conoide wordt afgesneden van de doorsnede van het snijvlak en het vlak door de as loodrecht op het snijvlak; de kleinste diameter zal gelijk zijn aan den afstand der rechten, uit de uiteinden van den grootsten diameter parallel aan de as getrokken.*

Bewijs: Laat (fig. 35) $A\Gamma$ de doorsnede zijn van het meridiaanvlak, dat vlak van teekening is, met het loodrecht daarop staande snijvlak, K een punt der doorsnede van snijvlak en lichaam, $K\Theta$ de loodlijn uit K op $A\Gamma$, EZ de doorsnede met het vlak van teekening van een vlak door Θ loodrecht op de as; dit vlak snijdt de conoide dus volgens een cirkel met diameter EZ . Nu is

$$T(K\Theta) = O(E\Theta, Z\Theta).$$

Wegens de stelling, geciteerd **C.S. 3** (zie 5,38) is nu

$$[O(E\theta, Z\theta), O(A\theta, \Gamma\theta)] = [T(BT), T(NT)]$$

wanneer de raaklijn NM parallel aan AT de topmaaklijn (parallel aan EZ) in T snijdt. Wegens $NT = MT$ (uit $PB = BM$; 2,23) is dus ook

$$[T(K\theta), O(A\theta, \Gamma\theta)] = [T(BT), T(MT)] = [T(AA), T(AT)]$$

dus zijn AA en AT resp. kleinste en grootste diameter van de oxytome, die de meetkundige plaats van K is.

6,32. **C.S. 15a.** *Van de rechten, getrokken uit de punten van een orthoconoïde parallel aan de as, zullen de stukken, die naar de zijde zijn getrokken, waar het convexe deel ($\tau\acute{\alpha}\ \kappa\upsilon\upsilon\tau\acute{\alpha}$) van het oppervlak ligt, buiten de conoïde vallen, de stukken, die naar de andere zijde zijn getrokken, er binnen.*

Dit wordt met behulp van **C.S. 11 a** (6,3) teruggebracht op de overeenkomstige uitspraak over de orthotome (2,03).

6,33. **C.S. Definitiones.** *Alle orthoconoiden zijn gelijkvormig.* Wat dit beduidt, wordt niet nader vermeld. Bedoeld wordt waarschijnlijk niets anders dan gelijkvormigheid der voortbrengende sneden, waarvan reeds bekend is, dat ze alle gelijkvormig zijn (2,8).

6,34. **C.S. 15γ.** *Indien een vlak een conoïde ontmoet en niet snijdt, ontmoet het haar slechts in één punt en het vlak, gebracht door het raakpunt en de as, zal loodrecht staan op het rakende vlak.*

Stel, dat het vlak het oppervlak in twee punten A en B raakt. Trek door elk dier punten een rechte parallel aan de as en breng een vlak door die twee rechten. Dit vlak snijdt de conoïde volgens een orthotome, waarop de beide punten A en B liggen. De punten van het lijnstuk AB liggen dan binnen de snede (1,5), dus binnen de conoïde.

Het tweede deel der stelling is evident voor het raakvlak in den top. Immers de raaklijnen in den top aan twee sneden van de conoiden in vlakken door de as, staan loodrecht op die as en het raakvlak dus ook. (Hier wordt er dus aan gedacht, dat het raakvlak bepaald is door twee raaklijnen van krommen op het oppervlak door het beschouwde punt). Raakt het vlak de conoïde in een ander punt, dat wordt de stelling ingezien door op te merken dat het vlak de raaklijn aan den parallelcirkel bevat en dus loodrecht op de meridiaandoorsnede door het raakpunt staat.

6,40. **De amblyconoïde.**

C.S. 11β. *Indien een amblyconoïde wordt gesneden met een*

Evenals in 6,31 vindt men (fig. 38)

$$[T(K\theta), O(A\theta, I\theta)] = [T(BT), T(NT)]$$

waaruit reeds volgt, dat de meetkundige plaats van K een oxytome is.

Nu is (5,2) $BP > BM$ dus $TN > TM > BT$ dus $BT < NT$.

Dus is AI de grootste diameter.

6,42. **C.S. 15 β .** *Van de rechten, getrokken uit de punten van een amblyconoide parallel aan een rechte, die naar de conoide getrokken is door den top van den kegel, die de conoide omvat, zullen de stukken, die naar die zijde zijn getrokken, waar het convexe deel van het oppervlak ligt, buiten de conoide vallen, de stukken, die naar de andere zijde zijn getrokken, er binnen.*

6,43. **C.S. 15 γ .** Voor een raakvlak aan een amblyconoide geldt het in 6,34 over de orthoconoide meegedeelde.

6,44. **C.S. Definitiones.** *Amblyconoiden heeten gelijkvormig, wanneer de omvattende kegels gelijkvormig zijn. Deze definitie strookt met die van 6,33 voor orthoconoiden. Daar werd als criterium van gelijkvormigheid van omwentelingsoppervlakken gelijkvormigheid der meridiaandoorsneden gesteld. Wanneer echter twee amblytomes gelijkvormig zijn (4,2), zullen de asymptoten in beide sneden denzelfden hoek met de as maken (4,1), dus zullen de omvattende kegels gelijkvormig zijn; en omgekeerd.*

6,5. De sphaeroiden.

C.S. 11 γ . *Indien een der beide sphaeroiden wordt gesneden met een vlak door de as of parallel aan de as, zal de doorsnede een oxytome zijn en wel, indien het vlak door de as gaat, dezelfde als die de $<$ wentelende $>$ figuur omvat; indien het parallel aan de as is, een, die daarmee gelijkvormig is; en de diameter van de doorsnede zal de gemeene doorsnede zijn van het vlak, dat het oppervlak snijdt en het vlak door de as loodrecht op het snijvlak.*

Het bewijs, dat bij Archimedes ontbreekt, is op dezelfde manier te leveren als in 6,40 α , β voor de amblyconoide geschiedde.

6,51. **C.S. 14 α .** *Indien een verlengde sphaeroide wordt gesneden met een vlak niet loodrecht op de as, zal de snede een oxytome zijn en de grootste diameter daarvan zal het stuk zijn, dat binnen de sphaeroide wordt afgesneden van de doorsnede van het vlak, dat het oppervlak snijdt en het vlak door de as loodrecht op het snijvlak.*

Het bewijs is geheel gelijkkluidend aan dat van **C.S. 13** (6,41)

kozen punt A der bedoelde doorsnede en de twee raakpunten B en Δ der gegeven raakvlakken. De snede $AB\Gamma\Delta$ is een cirkel of een oxytome, waaraan twee parallelle raaklijnen ZE en ΘH zijn getrokken; daaruit volgt, dat, als $A\Gamma$ de middellijn is, evenwijdig aan EZ en ΘH , de lijnen door A en Γ parallel aan $B\Delta$ getrokken, de snede zullen raken en dat alle punten behalve de raakpunten buiten de snede zullen vallen (5,42).

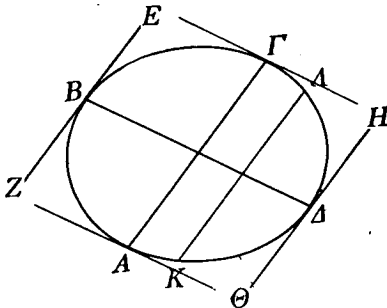


Fig. 40.

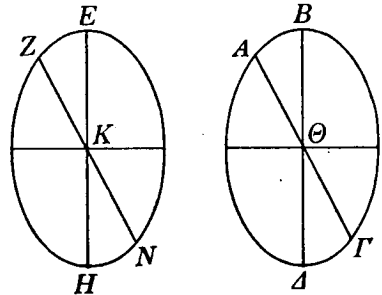


Fig. 41.

6,551. **C.S.** 17 β . *Indien het vlak parallel aan de raakvlakken niet door het centrum gaat, zooals KA , zullen van de rechten, parallel aan de verbindingslijn der raakpunten uit de punten der snede getrokken, de stukken aan de zijde, waar het kleinste segment ligt, buiten de sphaeroïde vallen; de stukken aan de andere zijde er binnen.*

6,56. **C.S.** 18. *Iedere sphaeroïde, die gesneden wordt met een vlak door het centrum, wordt zelf door dit vlak gehalveerd en het oppervlak eveneens.*

α) Gaat het snijvlak door de as of is het loodrecht op de as, dan is het duidelijk, dat het eene deel van het lichaam op het andere past en het eene deel van het oppervlak op het andere.

β) Is noch het eene noch het andere het geval, laat dan, (fig. 41) in een vlak van teekening door de as loodrecht op het snijvlak, $B\Delta$ de as zijn, Θ het centrum, $A\Gamma$ de doorsnede met het snijvlak. We beschouwen nu een tweede sphaeroïde met as EH gelijk en gelijkvormig met de eerste, die door een vlak door de as gesneden wordt volgens de oxytome $ENHZ$. Trek door K een lijn ZN , die met de as denzelfden hoek maakt als $A\Gamma$ met $B\Delta$ en breng door ZN een vlak loodrecht op het vlak van teekening. De segmenten ZEN en ZHN der tweede sphaeroïde passen nu opvolgend op de segmenten $AB\Gamma$ en $A\Delta\Gamma$ van de eerste. Laat nu de tweede sphae-

roide om de loodlijn in het vlak van teekening door K op EH draaien, totdat H en E van plaats verwisseld zijn en daarna om EH , totdat N en Z elkanders vorige plaatsen ingenomen hebben. Nu kunnen opnieuw de segmenten der tweede sphaeroïde die der eerste bedekken, nl. zoo dat EZN met ΔGA , HZN met BGA samenvalt. Daar elk der twee segmenten der gegeven sphaeroïde dus met elk der twee segmenten van de tweede kunnen samenvallen, zijn deze onderling gelijk in inhoud en in oppervlakte.

6,60. Voor alle conoiden en sphaeroiden gelden de volgende eigenschappen:

C.S. 11δ. *Wanneer men een der genoemde lichamen snijdt met een vlak door de as, zullen de voetpunten der loodlijnen, uit punten van het oppervlak, die niet op de doorsnede liggen, op het snijvlak neergelaten, binnen de doorsnede vallen.* Het bewijs hiervan volgt onmiddellijk uit het begrip omwentelingsoppervlak.

6,61. **C.S. 14.** *Corollarium. Doorsneden met parallele vlakken zijn voor elk der lichamen onderling gelijkvormig.*

Dit volgt direct uit de stellingen **C.S. 12** (6,31), **13** (6,41), **14** (6,51) in verband met de stellingen over gelijkvormigheid van kegelsneden (2,8; 3,6; 4,2).

6,62. **C.S. 14β.** *Een vlak door een raaklijn aan een doorsnede met een vlak door de as, loodrecht op dat vlak aangebracht, raakt in hetzelfde punt aan het oppervlak, als waarin de raaklijn aan de kegelsnede raakt.*

Het kan niet elders raken. Immers dan zou het voetpunt van de loodlijn uit dat andere punt op het vlak der snede in een raaklijn der snede vallen in plaats van binnen de snede (in strijd met 6,60).

7. HULPSTELLINGEN UIT ARITHMETICA EN OPPERVLAKTEREKENING.

7,1. Aan het eind van de inleiding tot het werk *Over Conoiden en Sphaeroiden* vermeldt Archimedes zonder bewijs de volgende stelling:

Indien willekeurig veel grootheden gegeven zijn, die elkander overtreffen met een gelijk bedrag, dat gelijk is aan de kleinste en andere grootheden, in aantal gelijk aan deze, in grootte echter elk gelijk aan de grootste, dan zullen alle grootheden, waarvan elk gelijk is aan de grootste, van alle, die elkander met een gelijk bedrag overtreffen, minder zijn dan het tweevoud, van deze behalve de grootste meer dan het tweevoud.

Het bewijs zal vermoedelijk als volgt gegeven zijn (fig. 42):

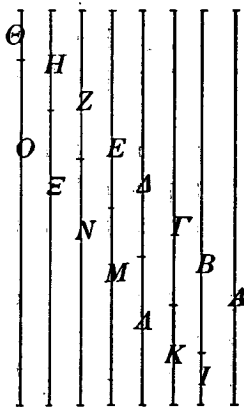


Fig. 42.

Denk de n grootheden $A, B, \dots, H, \Theta$ in rekenkundige reeks met verschil Θ . Vul $B, \dots, \Theta$ alle aan tot de grootte van A door $I = \Theta, K = H, \dots, O = B$. Dan leest men onmiddellijk af

$$(n - 1) A = 2 (B + \dots + \Theta)$$

dus

$$2 (B + \dots + \Theta) < n.A < 2 (A + B + \dots + \Theta)$$

In algebraische symboliek beduidt dit, dat uit

$$(n - 1)n = 2 (1 + 2 + \dots + \overline{n-1})$$

wordt afgeleid

$$2(1 + 2 + \dots + \overline{n-1}) < n^2 < 2(1 + 2 + \dots + n).$$

7,20. C.S. 1. *Indien van twee rijen van evenveel grootheden de gelijkgeplaatste evenredig met elkander zijn en van de grootheden der eerste rij staan alle of eenige tot andere grootheden in willekeurige verhoudingen en de overeenkomstige grootheden der tweede rij staan in dezelfde verhoudingen tot andere grootheden, dan zullen alle grootheden der eerste rij tot alle der derde dezelfde reden hebben, die alle grootheden der tweede rij hebben tot alle der vierde.*

Archimedes beschouwt twee gevallen:

α) Denk gegeven de rijen

$$\text{I.} \quad A \ B \ \Gamma \ \Delta \ E \ Z$$

$$\text{II.} \quad H \ \Theta \ I \ K \ \Lambda \ M$$

zoodat

$$(A, B) = (H, \Theta); (B, \Gamma) = (\Theta, I) \text{ enz.} \dots (1)$$

en de rijen

$$\text{III.} \quad N \ \Xi \ O \ \Pi \ P \ \Sigma$$

$$\text{IV.} \quad T \ Y \ \Phi \ X \ \Psi \ \Omega$$

$$\text{zoodat} \quad (A, N) = (H, T); (B, \Xi) = (\Theta, Y) \text{ enz.} \dots (2)$$

dan is te bewijzen

$$(A + \dots + Z, N + \dots + \Sigma) = (H + \dots + M, T + \dots + \Omega).$$

Bewijs: Uit

$$(N, A) = (T, H)$$

$$(A, B) = (H, \Theta)$$

$$(B, \Xi) = (\Theta, Y)$$

volgt ex aequali

$$(N, \Xi) = (T, Y) \dots (3)$$

Evenzoo geldt

$$(\Xi, O) = (Y, \Phi) \text{ enz.}$$

Men heeft dus eenerzijds wegens (1):

$$(A, H) = (B, \Theta) = (\Gamma, I) \dots = (A + B + \dots + Z, H + \Theta + \dots + M)$$

anderzijds wegens (2) en (3):

$$(A, H) = (N, T) = (\Xi, Y) = (O, \Phi) \dots = (N + \dots + \Sigma, T + \dots + \Omega)$$

waaruit het gestelde volgt.

β) Denk gegeven de rijen

$$\text{I.} \quad A \ B \ \Gamma \ \Delta \ E \ Z$$

$$\text{II.} \quad H \ \Theta \ I \ K \ \Lambda \ M$$

met de betrekkingen (1)

en de rijen

$$\text{III.} \quad N \ \Xi \ O \ \Pi \ P$$

$$\text{IV.} \quad T \ Y \ \Phi \ X \ \Psi$$

met, voorzover mogelijk, de betrekkingen (2).

Volgens denzelfden gedachtengang als bij (α) vindt men nu:

$$(A + \dots + Z, N + \dots + P) = (H + \dots + M, T + \dots + \Psi)$$

In algebraïsche symboliek is de stelling evident. Denk

- I. $A_1, A_2, \dots, A_n$
- II. $\lambda A_1, \lambda A_2, \dots, \lambda A_n$
- III. $\mu_{i_1} A_{i_1} \dots \mu_{i_\kappa} A_{i_\kappa}$
- IV. $\lambda \mu_{i_1} A_{i_1} \dots \lambda \mu_{i_\kappa} A_{i_\kappa}$

waarin $i_1, i_2 \dots i_\kappa$ onderling verschillend zijn, opklimmend in grootte en alle niet grooter dan n .

De stelling zegt nu

$$\frac{\sum_1^n i A_i}{\sum_1^n \lambda A_i} = \frac{\sum_1^\kappa \mu_{i_j} A_{i_j}}{\sum_1^\kappa \lambda \mu_{i_j} A_{i_j}}$$

Inderdaad zijn beide leden gelijk aan $\frac{1}{\lambda}$.

De door Archimedes behandelde gevallen zijn $\kappa = n-1$ en $\kappa = n$.

In het bewijs is ondersteld, dat de grootheden der vier rijen onderling alle gelijksoortig zijn; immers er wordt over de redens (A, N) , (A, H) en (N, T) gesproken en dit impliceert, dat A met N en met H , N met T en dus ook A met T gelijksoortig is.

Aan deze beperking stoort Archimedes zich nu echter in de toepassingen niet in het minst. We zullen hem de propositie zien gebruiken in het geval, dat de grootheden van de rijen I en III inhouden zijn, die van de rijen II en IV lengten, in welk geval de reden (A, H) geen zin heeft. Het lijkt waarschijnlijk, dat we hier te maken hebben met een symptoom van verslapping in de strengheid der Euclidische redentheorie ten gevolge van het feit, dat men, de stellingen der redentheorie toepassend, zich nooit meer behoefde te bekommeren om de redendefinitie (die uitdrukkelijk gelijksoortigheid eischt als voorwaarde, dat twee grootheden een reden tot elkander hebben) en om de wijze, waarop die stellingen uit de definitie waren afgeleid. Daarbij moest nog de gewoonte, alle grootheden, van welken aard ook, schematisch door lijnstukken voor te stellen, er toe medewerken, dat men het dimensieverschil tusschen inhouden, oppervlakten en lengten begon te verwaarloozen en zoo langzamerhand tot een begrip kwam, dat met dat van het positieve reële getal equivalent was.

Het is overigens gemakkelijk in te zien, dat in de strenge opvatting der redentheorie de propositie geldig blijft voor het geval, dat de grootheden van rij I alleen gelijksoortig zijn met die van rij III, die van rij II alleen met die van rij IV.

Uit $(A, B) = (H, \Theta); (B, \Gamma) = (\Theta, I)$ enz.

volgt namelijk door toepassing van de redendefinitie

$$(A + B \dots + Z, A) = (H + \dots M, H).$$

Uit (3) evenzoo

$$(N, N + E + \dots \Sigma) = (T, T + Y + \dots \Omega)$$

waaruit met tusschenschakeling van

$$(A, N) = (H, T)$$

ex aequali volgt

$$(A + B \dots + Z, N + E \dots + \Sigma) = (H + \dots + M, T + \dots + \Omega).$$

7,21. Een veel voorkomend geval, waarin de stelling 7,20 wordt toegepast, is, dat de grootheden van rij III onderling gelijk zijn en eveneens die van rij IV. De evenredigheden (2) luiden nu

$$(A, N) = (H, T) \quad (B, N) = (\Theta, T) \text{ enz.}$$

terwijl de evenredigheden (1) nu een gevolg hiervan zijn; immers uit $(A, N) = (H, T)$ en $(N, B) = (T, \Theta)$ volgt ex aequali $(A, B) = (H, \Theta)$ enz.

De conclusie luidt nu

$$(A + B + \dots, N + N + \dots) = (H + \Theta + \dots, T + T + \dots)$$

of ook

$$(A + B + \dots, N) = (H + \Theta + \dots, T).$$

7,30. **Spir. 10.** *Indien een rij van willekeurig veel lijnen gegeven is, die elkander met een gelijk bedrag overtreffen, en het verschil is gelijk aan de kleinste, en er zijn andere lijnen gegeven in aantal gelijk aan deze en in grootte elk aan de grootste, dan zullen de vierkanten op de lijnen gelijk aan de grootste, vermeerderd met het vierkant op de grootste en met den rechthoek, omvat door de kleinste en de som van alle, die elkander met een gelijk bedrag overtreffen, het drievoud zijn van alle vierkanten op de lijnen, die elkander met een gelijk bedrag overtreffen.*

Bewijs: Denk (fig. 42) een aantal lijnstukken

$A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ in rekenkundige reeks, waarvan het verschil gelijk is aan de kleinste, Θ .

Vul de stukken $\Theta, H, \dots B$ aan tot de grootte van A met de stukken $O = B, E = \Gamma, N = \Delta \dots, I = \Theta$.

Dan is te bewijzen

$$\mathbf{T}(A) + \mathbf{T}(B + I) \dots + \mathbf{T}(\Theta + O) + \mathbf{T}(A) + \mathbf{O}(\Theta, A + B + \dots \Theta) = \\ = 3 [\mathbf{T}(A) + \dots + \mathbf{T}(\Theta)]. \quad (1)$$

Bewijs:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{T}(A) &= 2\mathbf{T}(A) \\ \mathbf{T}(B + I) &= \mathbf{T}(B) + \mathbf{T}(I) + 2\mathbf{O}(B, I) \\ \mathbf{T}(\Theta + O) &= \mathbf{T}(\Theta) + \mathbf{T}(O) + 2\mathbf{O}(\Theta, O) \\ \hline \mathbf{T}(A) + \mathbf{T}(B + I) + \dots \mathbf{T}(\Theta + O) + \mathbf{T}(A) &= 2[\mathbf{T}(A) + \mathbf{T}(B) + \dots \mathbf{T}(\Theta)] + \\ &\quad \mathbf{O}(\Theta, 2B + 4\Gamma + \dots 14\Theta). \end{aligned}$$

Te bewijzen is dus nog:

$$\mathbf{O}(\Theta, A + B + \dots + \Theta) + \mathbf{O}(\Theta, 2B + 4\Gamma + \dots 14\Theta) = \\ \mathbf{T}(A) + \dots \mathbf{T}(\Theta)$$

of

$$\mathbf{O}(\Theta, A + 3B + 5\Gamma + \dots 15\Theta) = \mathbf{T}(A) + \dots + \mathbf{T}(\Theta).$$

Nu is

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(A) &= \mathbf{O}(8\Theta, A) = \mathbf{O}[\Theta, A + 2(B + \Gamma + \dots \Theta)] \\ \mathbf{T}(B) &= \mathbf{O}(7\Theta, B) = \mathbf{O}[\Theta, B + 2(\Gamma + \Delta + \dots \Theta)] \\ \mathbf{T}(H) &= \mathbf{O}(2\Theta, H) = \mathbf{O}[\Theta, H + 2\Theta] \\ \mathbf{T}(\Theta) &= \mathbf{O}[\Theta, \Theta] \\ \hline \mathbf{T}(A) + \dots \mathbf{T}(\Theta) &= \mathbf{O}[\Theta, A + 3B + \dots 15\Theta]. \end{aligned}$$

Het door Archimedes behandelde getallenvoorbeeld laat het verloop der redeneering met voldoende duidelijkheid zien; de formulering voor een reeks van n termen ligt voor de hand.

7,31. In een Corollarium wordt geconcludeerd tot de ongelijkheden

$$3[\mathbf{T}(B) + \dots \mathbf{T}(\Theta)] < \text{som van de vierkanten} \\ \mathbf{T}(A) < 3[\mathbf{T}(A) + \dots + \mathbf{T}(\Theta)]$$

waarvan de rechtsche uit (1) onmiddellijk volgt, terwijl de linksche uit (1) wordt afgeleid, door op te merken

$$\mathbf{O}(\Theta, A + \dots + \Theta) < \mathbf{O}[\Theta, A + 2(B \dots \Theta)] = \mathbf{T}(A).$$

7,32. In moderne formulering luiden de verkregen resultaten als volgt:

Zij van de rekenkundige reeks het verschil v gelijk aan den eersten term a , dan is

$$(n+1)(na)^2 + a(a+2a+\dots+na) = 3[a^2 + (2a)^2 + \dots (na)^2]$$

wat neerkomt op

$$1^2 + 2^2 + \dots n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Verder is

$$3[1^2 + 2^2 + \dots (n-1)^2] < n^3 < 3[1^2 + 2^2 + \dots n^2]$$

7,33. In het bij 7,31 vermelde Corollarium wordt nog opgemerkt, dat wanneer men op de lijnstukken, bedoeld in Prop. 7,30, als zijden gelijkvormige figuren

$$S(A), S(B), \dots S(\theta)$$

beschrijft, voor de oppervlakten hiervan de ongelijkheden van 7,31 gelden

$$3[S(B) + \dots + S(\theta)] < \text{Som van de figuren } S(A) < 3[S(A) + \dots + S(\theta)].$$

Dit volgt onmiddellijk uit Euclides VI, 20.

7,4. **C.S. 2.** *Indien er lijnen gelijk aan elkander zijn in willekeurig aantal en er wordt aan elk van deze een oppervlak aangepast met een quadratisch excès en de zijden der excessen overtreffen elkander met een gelijk bedrag, dat gelijk is aan de kleinste, en indien er andere oppervlakken zijn in aantal gelijk aan de eerste en in grootte elk gelijk aan het grootste, dan zullen deze tot alle andere oppervlakken een kleinere reden hebben dan die, welke de som van de zijde van het grootste excès en een van de gelijke lijnen heeft tot de som van het derde deel van de zijde van het grootste excès en de helft van een der gelijke lijnen, tot de andere oppervlakken behalve het grootste een grootere reden dan deze zelfde reden.*

Laat (fig 43) de lijnstukken A de gelijke lijnstukken zijn, waaraan met quadratisch excès hyperbolisch zijn aangepast de oppervlakken $\alpha\theta = X_1$, $\beta\iota = X_2$ enz., zoodat de zijden der excessen B , $\Gamma \dots H$ een rekenkundige reeks vormen met verschil H . Te bewijzen is nu

$$(nX_1, X_1 + X_2 + \dots + X_n) < (B + A, \frac{1}{3}B + \frac{1}{2}A) < (nX_1, X_2 + \dots + X_{n-1}).$$

Bewijs: De rechthoeken $\Pi_1, \Pi_2 \dots$ vormen een rekenkundige reeks met verschil Π_n , dus is wegens 7,1:

$$2 (\Pi_2 + \dots + \Pi_n) < n \cdot \Pi_1 < 2 (\Pi_1 + \dots + \Pi_n). \quad (1)$$

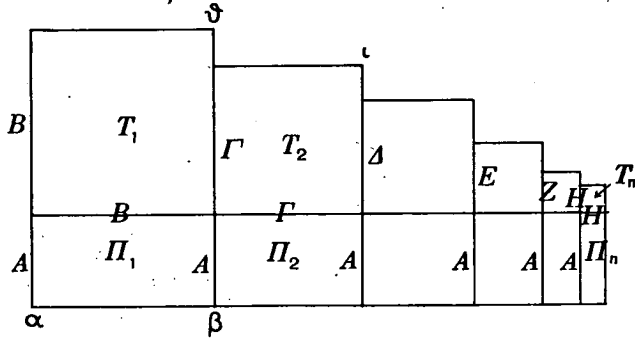


Fig. 43.

Voor de vierkanten $T_1, T_2 \dots$ geldt wegens 7,31:

$$3 (T_2 + \dots + T_n) < n \cdot T_1 < 3 (T_1 + \dots + T_n). \quad (2)$$

Tel (1) na deeling door 2 op bij (2) na deeling door 3, dan is

$$X_2 + \dots + X_n < n \left(\frac{1}{2} \Pi_1 + \frac{1}{3} T_1 \right) < X_1 + \dots + X_n \quad (3)$$

of $X_2 + \dots + X_n < n \cdot O(B, \frac{1}{3}B + \frac{1}{2}A) < X_1 + \dots + X_n$
dus

$$(n X_1, X_1 + \dots + X_n) < [n X_1, n \cdot O(B, \frac{1}{3}B + \frac{1}{2}A)] < (n X_1, X_2 + \dots + X_n)$$

dus

$$(n X_1, X_1 + \dots + X_n) < (B+A, \frac{1}{3}B + \frac{1}{2}A) < (n X_1, X_2 + \dots + X_n).$$

Algebraisch:

Zij $A = a, H = p$, dan is $B = np$; $X_1 = np(a + np) \dots$
 $X_n = p(a + p)$

De propositie luidt:

$$\frac{n \cdot np(a+np)}{p(a+p) + \dots + np(a+np)} < \frac{np+a}{\frac{1}{3}np + \frac{1}{2}a} < \frac{n \cdot np(a+np)}{p(a+p) + \dots + (n-1)p[a + (n-1)p]}$$

Het bewijs wordt geleverd door optelling van de ongelijkheden
 $ap + 2ap + \dots + nap > \frac{1}{2} n \cdot nap > ap + 2ap + \dots + (n-1)ap$
 $p^2 + (2p)^2 + \dots + (np)^2 > \frac{1}{3} n(np)^2 > p^2 + (2p)^2 + \dots + [(n-1)p]^2$
waaruit volgt

$$p(a+p) + \dots + np(a+np) > n \cdot np \left[\frac{1}{3}np + \frac{1}{2}a \right] > p(a+p) + \dots + (n-1)p[a + (n-1)p].$$

Door deeling van de leden dezer ongelijkheid op $n \cdot np$ ($a + np$) volgt het gestelde. De inkleeding hiervan is reeds geheel aangepast aan de toepassing in C.S. 26. De eigenlijke inhoud van de stelling wordt echter door de ongelijkheid (3) uitgedrukt. Voor $p = a = 1$ zegt deze

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n+1) > n^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n \right) > 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n.$$

Het verdient opmerking, dat de bewezen propositie in algebraïsch vorm niet eenvoudiger te formuleeren is dan in de meetkundige inkleeding, waarin Archimedes haar geeft.

7,50. **Spir.** 11. *Indien een rij van willekeurig veel lijnen gegeven is, die elkander met een gelijk bedrag overtreffen en ook andere lijnen, één minder in aantal en elk in grootte gelijk aan de grootste, dan hebben alle vierkanten op de lijnen, gelijk aan de grootste, tot de vierkanten op de lijnen, die elkander met een gelijk bedrag overtreffen, behalve de kleinste, een kleinere reden dan het vierkant op de grootste heeft tot de som van den rechthoek, omvat door de grootste en de kleinste en het derde deel van het vierkant op het verschil van de grootste en de kleinste; tot de vierkanten echter op de lijnen, die elkaar met een gelijk bedrag overtreffen, behalve het vierkant op de grootste een grotere reden dan deze.*

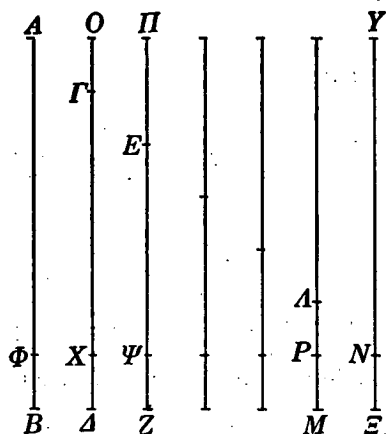


Fig. 44.¹⁾

Laat gegeven zijn (fig. 44) de rij lijnstukken $AB, \Gamma A \dots NE$ in rekenkundige reeks. Archimedes neemt in zijn bewijs aan, dat het verschil gelijk is aan den kleinsten term, NE , maar hij past de stelling toe in gevallen, waarin deze voorwaarde niet vervuld is. We zullen zijn onderstelling handhaven, maar daarna aantoonen, dat zij voor de geldigheid van de stelling niet noodig is.

Vul de gegeven lijnstukken alle aan tot de grootte van AB door toevoeging van $\Gamma O = NE, E\Pi = 2 \cdot NE$ enz. Te bewijzen is nu

¹⁾ Aan het bovenuiteinde van het lijnstuk, dat A, P en M bevat, is de letter T weggevallen.

$$[T(OA) + \dots + T(YE), T(AB) + \dots + T(AM)] < [T(AB), O(AB, NE) + \frac{1}{3} T(NY)] < [T(OA) + \dots + T(YE), T(IA) \dots T(NE)].$$

Maakt men $\Phi B = XA = \dots NE$, dan is

$$[T(AB), O(AB, \Phi B) + \frac{1}{3} T(A\Phi)] = [T(OA), O(OA, XA) + \frac{1}{3} T(OX)] = \text{enz. waaruit volgt:}$$

$$[T(OA) + T(IZ) + \dots + T(YE), O(NE, OA + IZ + \dots + YE) + \frac{1}{3} \{T(OX) + T(IZ) + \dots + T(YN)\}] = [T(AB, O(AB, NE) + \frac{1}{3} T(YN)].$$

Vergelijking met het gestelde leert nu, dat de stelling bewezen zal zijn, indien aangetoond kan worden

$$T(IA) + \dots + T(NE) < O(NE, OA + \dots + YE) + \frac{1}{3} \{T(OX) + \dots + T(YN)\} < T(AB) + \dots + T(AM). \quad (1)$$

Nu is in het middelste lid van deze ongelijkheid:

$$O(NE, OA + \dots + YE) = O[NE, (OX + XA) + \dots + (YN + NE)] = O(NE, OX + \dots + YN) + \underline{T(XA) + \dots + T(NE)}$$

in het eerste lid:

$$T(IA) + \dots + T(NE) = T(IX) \dots + T(AP) + 2 O(XA, IX + \dots + PA) + \underline{T(XA) + \dots + T(NE)}$$

in het derde lid:

$$T(AB) + \dots + T(AM) = T(A\Phi) + \dots + T(AP) + 2 O(\Phi B, A\Phi + \dots + AP) + \underline{T(\Phi B) + \dots + T(PM)}.$$

In alle drie de leden de onderstreepte sommen weglatend, hebben we nog te bewijzen

$$T(IX) + \dots + T(AP) + 2 O(XA, IX + \dots + AP) < \frac{1}{3} [T(OX) + \dots + T(YN)] + O(NE, OX + \dots + YN) < T(A\Phi) + \dots + T(AP) + 2 O(\Phi B, A\Phi + \dots + AP).$$

Vergelijken we eerst de sommen van vierkanten, die in de drie leden staan, dan geldt hiervoor wegens 7,31

$$T(IX) + \dots + T(AP) < \frac{1}{3} [T(A\Phi) + \dots + T(TP)] < T(A\Phi) + \dots + T(AP) \quad (2)$$

waarin het middelste lid hetzelfde is als

$$\frac{1}{3} [T(OX) + \dots + T(YN)].$$

Vergelijking van de rechthoeken in de drie leden geeft

$$\begin{aligned} 2 \mathbf{O}(XA, GX + \dots + AP) &= \mathbf{O}(NE, GX + \dots + AP + TA \dots + \\ &+ GO) = \mathbf{O}(NE, OX \dots + TP) < \mathbf{O}(NE, OX \dots + YN) < \\ &< \mathbf{O}(\Phi B, OG + GX + \dots TA + AP + 2 YN) = \\ &= \mathbf{O}[\Phi B, 2(A\Phi + \dots AP)]. \end{aligned} \quad (3)$$

Door optelling van de ongelijkheden (2) en (3) volgt de geldigheid van (1).

7,51. De volgende inkleeding van het bewijs in algebraische symbolen, waarin aan den gang van het betoog niets wezenlijks veranderd is, zal de redeneering voor den hedendaagschen lezer wellicht nog wat kunnen verduidelijken. Wij laten daarbij tevens de onderstelling los, dat het verschil van de rekenkundige reeks gelijk is aan den eersten term, waardoor het gebruik, dat Archimedes van de stelling zal blijken te maken, zijn rechtvaardiging vindt.

Zij $NE = t_0 = a$; $AM = t_1 = a + v$; $\dots AB = t_n = a + nv$.

Te bewijzen is de ongelijkheid (1):

$$t_{n-1}^2 + \dots + t_0^2 < a \cdot nt_n + \frac{1}{3} n(nv)^2 < t_n^2 + \dots + t_1^2.$$

Inderdaad is

$$\begin{aligned} t_{n-1}^2 + \dots + t_0^2 &= na^2 + v^2 [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] + \\ &+ 2av [1 + 2 + \dots (n-1)] \\ &< na^2 + \frac{1}{3} v^2 n^3 + n^2 \cdot av = na(a + nv) + \frac{1}{3} n(nv)^2 = \\ &= a \cdot nt_n + \frac{1}{3} n(nv)^2 < \\ &< na^2 + v^2 [1^2 + 2^2 + \dots + n^2] + 2av (1 + 2 + \dots + n) = \\ &= t_n^2 + \dots + t_1^2. \end{aligned}$$

7,52. Op dezelfde wijze als in 7,33 ziet men in, dat de stelling geldig blijft, wanneer men in het eerste en in het derde lid de vierkanten op de gegeven lijnstukken vervangt door andere, onderling gelijkvormige figuren, waarin die lijnstukken homologe zijden zijn.

7,60. **Q. P. 23.** In *Quadratuur van de Parabool* bewijst Archimedes de volgende stelling over de som van een meetkundige reeks met reden $\frac{1}{4}$.

Indien er grootheden gesteld worden opvolgend in viervoudige reden, dan zullen alle grootheden en nog het derde deel van de kleinste samengeteld een derde grooter zijn dan de grootste.

Laat gegeven zijn de grootheden A, B, Γ, Δ, E , zoodat

$$B = \frac{1}{4}A, \Gamma = \frac{1}{4}B \text{ enz.}$$

Te bewijzen is

$$A + B + \dots + E + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A.$$

Bewijs:

$$\text{Zij } Z = \frac{1}{3}B, H = \frac{1}{3}\Gamma, \Theta = \frac{1}{3}\Delta, I = \frac{1}{3}E$$

dan is

$$B + Z = \frac{1}{3}A; \Gamma + H = \frac{1}{3}B; \Delta + \Theta = \frac{1}{3}\Gamma; E + I = \frac{1}{3}\Delta$$

dus

$$B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \frac{1}{3}(A + B + \Gamma + \Delta).$$

Nu is

$$Z + H + \Theta = \frac{1}{3}(B + \Gamma + \Delta)$$

dus

$$B + \Gamma + \Delta + E + I = \frac{1}{3}A$$

of

$$A + B + \Gamma + \Delta + E + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A.$$

7,61. Dit resultaat volgt ook uit Euclides XI, 35. Volgens deze stelling is nl.

$$(A - E, A + B + \Gamma + \Delta) = (A - B, A) = (3, 4)$$

dus

$$A + B + \Gamma + \Delta = \frac{4}{3}A - \frac{4}{3}E$$

of

$$A + B + \Gamma + \Delta + E + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A.$$

7,62. De algemeene formulering van de door Archimedes toegepaste methode is:

Zij van een meetkundige reeks $a_1, a_2, \dots, a_n$ de reden $r = \frac{1}{1+b}$ ($b > 0$). Men heeft nu

$$a_i + \frac{1}{b} a_i = a_i \frac{1+b}{b} = \frac{a_{i-1}}{b}$$

dus

$$\begin{aligned} S_n \left(1 + \frac{1}{b}\right) &= a_1 \left(1 + \frac{1}{b}\right) + \frac{a_1}{b} + \dots + \frac{a_{n-1}}{b} = a_1 \left(1 + \frac{1}{b}\right) + \\ &+ \frac{1}{b} (S_n - a_n) \end{aligned}$$

of

$$S_n + \frac{1}{b} a_n = \left(1 + \frac{1}{b}\right) a_1.$$

DIDACTISCHE CAUSERIEËN

DOOR

Dr. D. P. A. VERRIJP.

I.

Wanneer de hooggeleerde schrijver van een actueel Nederlandsch boek — prof. Huizinga in zijn „In de schaduwen van morgen” — ons wil suggereeren, dat wij in een tijd van geestelijke *vervlakking* leven, dan moet ik verklaren, dat de lezing van dit boek mij geen oogenblik een betoog heeft doen hooren, dat mij tot instemming met deze conclusie heeft gebracht. Hoewel onderhoudend geschreven, bevat het, naast juiste referaten — die echter de conclusie verzwakken —, ook niet-overtuigende of overdreven *passages*; bovendien gaat het aan het groote euvel mank, dat de beschouwingen niet zijn uitgegaan van het aspect, dat de huidige algemeene maatschappelijke toestand ons biedt.

Ik wil thans hierover niet verder in 't algemeen uitweiden, maar wel in 't bijzonder opmerken, dat van geestelijke *vervlakking* bij het docentencorps, zoowel hier te lande als in het buitenland allermint kan gesproken worden. In mijn jonge jaren werd onder de collega's over weinig anders gesproken dan over orde- of tuchtkwesties, het vereenigingsleven was weinig ontwikkeld en bemoeide zich niet intens, zooals tegenwoordig, met didactische (en als men wil ook met paedagogische) vraagstukken; ook met de lectuur daarover was het in die dagen maar matig gesteld. Een tijdschrift van het gehalte van *Euclides* bestond zeker in Nederland niet. Men begrijpe mij goed. Ik wil hiermede nog niet zeggen, dat *alles*, wat heden ten dage gezegd, geschreven of gedaan wordt, ons op een hooger peil brengt. Maar voor alles moet toch geapprecieerd worden, dat het *streven* bestaat en wel op ruime schaal!

Zoo deed het mij onlangs weer eens goed als hospitant een vergadering bij te wonen, waar zulk een *streven* merkbaar was. In die prettige sfeer, waarin gezocht werd naar het behalen van geeste-

lijke winst op het gebied van het mathematisch onderwijs, kwam ik op de gedachte zoo nu en dan eens een causerie te houden over een of andere les, die ik in mijn afgeloopen loopbaan geregeld gaf. Nu is het niet mijn bedoeling over zoo'n causerie telkens een discussie uit te lokken, wel hoop ik, dat ze de lezers zal aansporen mijn behandeling van zoo'n les met die van de hunne te vergelijken. Ik heb zelf indertijd in vergaderingen — soms van een geheelen dag — van de wiskunde-commissie van Liwenagel ondervonden, hoe iedereen van zulke vergelijkingen leert, zelfs al is men het principeel niet met elkander eens.

HET GETALBEGRIP.

De eerste les, die ik — na de namen van mijn nieuwe leerlingen goed in mijn geheugen te hebben geprent — aan de eerste klasse van het gymnasium te Arnhem (heel vroeger van de H.B.S. te Deventer) gaf, was altijd gewijd aan het getalbegrip. Om mij dan eenigszins omtrent mijn leerlingen te oriënteeren, vroeg ik, wie op de lagere school een en ander van „theorie” van 't rekenen of van verklaringen van rekenkundige bewerkingen geleerd hadden. Het resultaat van mijn vraag was, een groote veertig jaar geleden, dat alle leerlingen de vinger opstaken. Later is het percentage van 't aantal opgestoken vingers geslonken, maar tot nul gereduceerd is het toch nooit. Dat dit percentage minder is geworden, in 't bijzonder sedert de wijziging van het L.O., is te begrijpen. De vroegere schoolbevolking werd in hoofdzaak gerecruteerd uit de leerlingen van bepaalde opleidingsscholen bij het L.O. Dit is, sedert de officieele afschaffing van het Fransch op de L.S. nu zóó, dat onze veel grootere *totale* schoolbevolking haar leerlingen krijgt van *alle* lagere scholen, dus zoowel van scholen, die de oude op hooger peil staande opleiding niet hebben vaarwel gezegd, als van andere, welker onderwijs geen voldoende aansluiting geeft met dat op de H.B.S. of het gymnasium, een gebrek aan aansluiting, toch nog minder door gebrek aan kennis dan wel door gebrek aan methode. Meent men dus, dat de vroegere opleidingsscholen niet meer in het kader van een democratische maatschappij passen, dan zal men, ondanks verklaringen van de hoofden der lagere scholen, toelatingsexamens, proefklassen van korten termijn, onderzoek volgens de methode der commissie-Bolkestein enz., toch nooit komen tot deugdelijke

criteria voor het vermogen van het volgen van ons voortgezet onderwijs. Laten we 't voor de dooven — zoowel voor de opzettelijke als voor de niet-opzettelijke — toch nog eens zeggen: Verbetering is alleen te verwachten van splitsing op circa negen- (misschien tien-) jarigen leeftijd. De, voor het latere middelbaar onderwijs, intellectueel geschikten moeten dan door de, zich goed van hun verantwoordelijkheid bewuste, onderwijzers aangewezen worden om een opleidingsschool voor H.B.S. of gymnasium te volgen. Dáár kan Fransch en op hooger peil staand rekenonderwijs gegeven worden: Een winst van duizenden guldens voor Staat en Maatschappij in verschillende opzichten!¹⁾

Maar nu dan toch de les! Ik begon altijd te vragen aan een of anderen leerling, of hij wel kon zeggen, wat een getal eigenlijk is. In de meeste gevallen kreeg ik dan — als ik ten minste een antwoord kreeg — te hooren: een hoeveelheid. Ja, gaf ik dan tot wederantwoord, je kunt misschien wel gelijk hebben, maar ik heb aan het antwoord niet veel. Want vooreerst geef je me voor de gevraagde beteekenis van een woord een ander woord, waarvan ik je wederom de beteekenis zou kunnen vragen en in de tweede plaats is het de vraag, of het woord „hoeveelheid” juist in verband met het onderwerp, dat we in deze les zullen bespreken, niet tweeledig kan worden opgevat. Men kan met „hoeveelheid” bedoelen *hoeveel*-heid, en dan kan ik zeker weer vragen: wat beteekent het woord „hoeveel”; maar het woord „hoeveelheid” kan ook beteekenen: een zekere *verzameling* van leerlingen of van boeken of van andere dingen. Bij zoo'n verzameling behoef ik nog volstrekt niet aan een getal te denken.

Maar kijk, zei ik dan, laat ik de vraag, wat nu een getal precies is, een oogenblik laten rusten. Laat ik echter een andere vraag doen: Wat wordt je al op heel jongen leeftijd — misschien wel, als je nauwelijks drie jaar oud bent — geleerd, waarbij getallen „uitgesproken” worden? Stelt men deze vraag aan de geheele klas, dan wordt wel een voldoende aantal vingers opgestoken, dat het juiste antwoord doet verkrijgen, nl.: „tellen”. Zeker, zei ik dan, maar laten we nu eens precies nagaan, wat dat tellen eigenlijk te betee-

¹⁾ Men zie mijn artikel in Euclides jg. XI, afl. 3: Resultaten bij het onderwijs in de wiskunde.

kenen heeft. En om dan dat vragen- en antwoorden-spel niet al te lang te laten duren — men moet in dit opzicht maat weten te houden; gaan in de richting van de Deutsche Arbeitsschule lijkt mij te veel tijdverlies op te leveren — begon ik zelf maar: Het onovergankelijk werkwoord „tellen” *beteekent* niets anders dan *een bepaald woord en zoo men wil* — en dat is in den regel het geval — *meer bepaalde woorden alle in een bepaalde volgorde opzeggen*. Men zegt „één” en weet dan, dat onherroepelijk daarna „twee” moet gezegd worden, indien men verder dan „één” wil gaan. Daarna volgt dan, zoo men wil, „drie”, dan „vier” enz. Een klein kind kan op deze wijze maar een beperkt aantal woorden achter elkaar opzeggen, het vergist zich in de juiste volgorde in het begin wel eens; later gaat het beter. Toch moet je eerst lezen en schrijven geleerd hebben om een middel te vinden, waardoor met dat tellen zonder moeite ongestoord doorgegaan kan worden, zoo lang als je maar wilt. En wat is dat middel? Het is, dat je geen „woorden” één, twee, drie, vier enz. „zegt”, maar *in plaats daarvan* „teekens” 1, 2, 3, 4 enz., dus „cijfers” „schrijft”. Jelui weet allen wel — ik praat daarover nu niet verder — hoe het mogelijk is met dat „geschreven tellen” maar steeds door te gaan. Nietwaar, als 9 geschreven is, gaat men verder met 10, waarbij men naast een bepaald cijfer (1) nog een ander teeken (0, ook een cijfer genoemd) zet, enz.

Voordat we verder gaan, moet ik jelui even opmerkzaam maken op iets, dat je eigenlijk allen wel weet, maar dat toch hoogst gewichtig is — trouwens, zoo goed als alles, wat ik je in deze les vertel, weet je eigenlijk wel: het komt er hier in hoofdzaak op aan, dat je leert die kennis meer tot je *begrip* te doen spreken. Ik wou je dan vertellen, dat we zoo pas een voorbeeld gehad hebben van dingen, die men met andere dingen laat correspondeeren, laat overeenkomen, anders gezegd: van dingen, die men aan andere dingen toekent, toevoegt. We lieten nl. de cijfers 1, 2, 3 enz. achtereenvolgens correspondeeren met de woorden één, twee, drie enz. En als men nu eens een uitdrukking wil bezigen, die erg geleerd klinkt, maar toch precies hetzelfde beduidt, als wat we zoeven zeiden, dan zegt men, dat daar dingen op andere dingen *afgebeeld* zijn door een (1, 1) *correspondentie*. Die (1, 1) correspondentie is natuurlijk hier: één, 1; twee, 2; enz., waarbij men zoowel de reeks één, twee, drie enz. op 1, 2, 3 enz. kan afgebeeld denken, als ook 1, 2, 3 enz. op één, twee, drie enz.

In het dagelijksch leven, in de kunst en — zooals je later wel zult leeren — in de wetenschap, liggen correspondenties voor het grijpen. Neem het voorwerp „bank”, waarmede o.a. het gesproken woord „bank” en hiermede weer het geschreven woord „bank” correspondeert. Muzikale klanken laat je correspondeeren met geschreven noten enz. Zonder dergelijke correspondenties zou ons huidige leven onmogelijk worden. Je moet daarover maar eens nadenken!

En zoo kom ik hier tot het gewichtigste voorbeeld van correspondenties. Ik heb jelui hier voor me, als een verzameling van leerlingen, een verzameling van gelijksoortige „eenheden”, zou ik kunnen zeggen. Wat doe ik nu, als ik straks iemand, die deze nog niet kent, de „uitgebreidheid” van jelui verzameling wil duidelijk maken? De woorden één, twee, drie enz. ga ik leerling na leerling aan je toekennen, toevoegen. Het kan me niet schelen in welke volgorde dat gebeurt ten opzichte van jezelf. Ik zal echter voor het gemak maar de rijen langs gaan, want ik wil niemand overslaan. Ik zou daarbij ook van onze cijfers gebruik kunnen maken; ik zou die op stukjes papier kunnen schrijven en op die wijze voor iedere leerling op de bank zoo'n stukje papier kunnen neerleggen. Doe ik dit, dan krijgt de laatst getelde leerling (b.v. Marietje) een papiertje, waarop, laten we zeggen, 23 staat.

Nu doet zich direct een vraag voor. Wie zou me kunnen zeggen, welke vraag dat is? Na wat over en weer praten komt dan wel de juiste formuleering, nl.: als U de volgorde der leerlingen eens anders genomen had, zou dan de laatst getelde leerling ook het papiertje, waarop 23 staat, gekregen hebben? Zeker, zegt dan ieder. Maar nu moet ik jelui toch dadelijk dit zeggen; je denkt thans wel: dat spreekt van zelf, maar dat spreekt zoo maar niet vanzelf: ik zal 't je verklaren, bewijzen!

Gaan we eens uit van de eerste telling. Ieder heeft zoo'n papiertje voor zich liggen. Jan b.v. kreeg het papiertje met 1 er op. Maar nu kijk ik naar een willekeurige andere leerling, b.v. Wiesje, die het papiertje met 14 er op voor zich heeft liggen. Ik zeg dan tegen Jan en Wiesje: Gaat eens allebei naast je bank staan, maar laat de papiertjes liggen. — Er komen dan twee leege plaatsen. — Nu verwisselen van plaats. (Licht glimlachen, als telkens een jongen naast een meisje komt te zitten.) Zie zoo, alle plaatsen, die vroeger bezet waren, zijn nu weer bezet. En nu begriip je wel, wat ik verder

wil doen. Ik verwissel zoo de leerling met het papiertje 2 voor zich met b.v. die van het papiertje 20, enz. enz. Op de plaats van Marietje, die immers eerst 23 voor zich had liggen, komt nu, laten we zeggen, Dolf te zitten. Ten slotte heeft, nemen we aan, ieder een ander papiertje gekregen dan eerst. (Dat er misschien leerlingen zouden zijn, die hetzelfde zouden gehouden hebben, doet tot de zaak niets af.) Maar laten we het nog eens herhalen: *alle* aanvanke-lijk ingenomen plaatsen zijn weer bezet! Wat volgt nu hieruit? Het laatste papiertje had, telkens bij een gekozen telling, wel ieder der leerlingen kunnen krijgen. Welnu, dan heeft dit woord 23 nog een andere beteekenis, dan het woord, dat aan de laatst getelde leerling toekwam. *Het geeft ons een denkbeeld van de „uitgebreidheid”, van de „grootte” van de klasse!* Als de deur van de klas op slot blijft, als er geen enkele leerling kan bijkomen of geen kan weggaan, krijg ik bij *elke* telling 23. ¹⁾

En laat ik nu eens in enkele zinnnetjes samenvatten, wat we geleerd hebben en wat we er dan nog aan kunnen toevoegen.

1. Er heeft plaats gehad een opnoemen van woorden in een bepaalde volgorde, woorden, die we door teekens — cijfers — kunnen vervangen. Deze, in een bepaalde volgorde genomen, woorden — geschikter: cijfers — (ik spreek hier liever niet van symbolen) heet de rij van de „natuurlijke getallen”. Ze kan onbegrensd worden voortgezet. Het woord tellen, het zeggen van één, twee, drie enz., kwam hierbij voor in de beteekenis van een onovergankelijk werkwoord. Het laten volgen van 4 op 3, van 8 op 7, van 19 op 18, *in 't algemeen de overgang van a op $a + 1$* , zooals men dat met behulp van een letter a aanduidt, heet „de elementaire bewerking der rekenkunde”.

2. Het woord „tellen” is daarna gebruikt als overgankelijk werkwoord: We hebben een verzameling geteld. Daarbij kreeg Wiesje b.v. het natuurlijk getal 14. Dit was voor haar een rangnummer bij het bezigen van een zekere rangorde, een „*ordinaal getal*” dus.

3. Het laatst te bezigen ordinaal getal (bij onze verzameling: 23) bleek iedere eenheid der verzameling te kunnen krijgen. Dit natuur-

¹⁾ Natuurlijk is manoeuvreeren met de papiertjes in plaats van met de leerlingen ook mogelijk, doch dan is er minder duidelijke actie.

lijk getal kan dus dienen om de geheele verzameling aan te duiden, als alleen op de uitgebreidheid der verzameling gelet wordt. Als zoodanig noemt men dit natuurlijk getal een „*cardinaal getal*”. Het is niets anders dan wat men in het dagelijksch leven het *aantal* (het „hoeveel”) *eenheden* der verzameling noemt. Dit is de belangrijkste beteekenis van het „getal”. Men spreekt hier ook van een „onbenoemd” getal, terwijl men van een „benoemd” getal spreekt, als de naam der eenheden van de verzameling er aan toegevoegd wordt. Tegelijk hebben we nu de eigenschap geleerd, die wel de *hoofdeigenschap der rekenkunde* heet nl.: *Het cardinaalgetal (aantal eenheden) eener verzameling is onafhankelijk van de volgorde, waarin haar eenheden zijn geteld*. Deze eigenschap is „bewezen”. Alle verdere eigenschappen der rekenkunde kunnen we er op laten berusten.

Wat nu verder gedaan, als men de tweede les aanvangt? Men kan het geheele verhaal in het kort navragen. Bij een proefklasse heb ik er dan wel eens een opstelletje over laten maken — als ik ten minste over een tweede uur direct na het eerste kon beschikken. Ik kreeg dan wel eens *bijzonder* goede opstelletjes in handen. Toch moet men voorzichtig zijn met het maken — dan al — van een vergaande conclusie omtrent de intelligentie der kinderen. Het is waar: men heeft hun intellectueel perceptievermogen gepeild, maar bij het latere vraagstuk-oplossende werk valt zoo'n goed-opstelmakende leerling wel eens tegen. Ik zou zeggen: laat men toch nooit aan dat perceptievermogen meer waarde gaan toekennen dan aan de zelfwerkzaamheid! Ook al weer hier: men moet maat houden!

Laten we aannemen, dat in de tweede les de eerste nog eens „doorgenomen” is geworden en dat daarbij het correspondentiebeginsel (de afbeelding) opnieuw goed in het licht gesteld werd. Hoe ik dan verder ging, is wel te vermoeden: Ons gronddenkbeeld moet zijn „aanschouwen” en „voorstellen” met, waar het op eenvoudige wijze mogelijk is, „redeneeren” te beoefenen. Op die wijze is al dadelijk in de wiskunde-lessen een sfeer geschapen, waarin gestreefd wordt naar inzicht.

Gelijkheid van *natuurlijke getallen*, ongelijkheid ($>$ en $<$), transiviteit, laat ik hun oorsprong vinden in de mogelijkheid tot afbeelding van *verzamelingen* op elkaar.

De optelling. Vraagt men een willekeurige leerling, wat optellen

is, dan antwoordt deze in den regel ongeveer: het bijelkaar voegen van twee of meer getallen. Dat dit — hoe men de zaak ook keert of wendt — onzin is, moet dan duidelijk gemaakt worden. Immers dit „bij elkaar voegen” zegt t.o. van natuurlijke getallen en t.o. van verzamelingen, die er op betrekking hebben, niets. Vanzelf spreekt hoe het wèl gezegd kan worden: Neem twee of meer natuurlijke getallen en denk deze de cardinaalgetallen van twee of meer verzamelingen van gelijksoortige eenheden, die geen eenheid gemeen hebben. *Strek de telling uit over* de verzameling, die *alle* eenheden dier twee of meer verzamelingen bevat, dan krijgt men als cardinaalgetal *steeds* (I) een *geheel bepaald* (II) natuurlijk getal, dat de *som* der eerstgenoemde getallen heet. De geheele bewerking heet het optellen der natuurlijke getallen.

De *commutatieve* (III) en de *associatieve* (IV) wet der optelling zijn direct duidelijk (hoofdeigenschap der rekenkunde!).

Verder geldt de wet der *monotonie* (V): Uit $b > c$ volgt $a + b > a + c$ (in te zien met „afbeelding”).

De tusschen haakjes geplaatste cijfers wijzen de 5 wetten der optelling aan.

Toe te voegen zijn nog *vaststellingen* van $a + 0 = a$ en $0 + a = a$ (*definities*).

Zie zoo, nu eindig ik voor dit maal en geef mijn oud-collega's gelegenheid tot stille overpeinzing. Het resultaat zal bij ieder lang niet hetzelfde zijn!

HET ORTHOCENTRISCH VIERVLAK

DOOR

Dr. J. G. VAN DE PUTTE.

Verscheidene eigenschappen van het orthocentrisch viervlak kunnen eenvoudig bewezen worden met behulp van het omgeschreven parallelepipedum.

Hieronder volgt een andere manier om sommige eigenschappen te vinden.

Zij D. ABC het orthocentrisch viervlak. Door de hoekpunten A, B en C van het grondvlak trekken we rechten opv. evenwijdig met BC, AC en AB, die elkaar in E, F en G snijden.

We bewijzen nu eerst, dat uit $DA \perp BC$ en $DB \perp AC$ volgt: $DC \perp AB$.

Uit $DA \perp BC$ volgt: $DA \perp FG$ en daar $AG = AF$, is $DG = DF$.

Evenzo volgt uit $DB \perp AC$, dat $DG = DE$, dus is $DE = DF$; $DC \perp EF$, dus $DC \perp AB$.

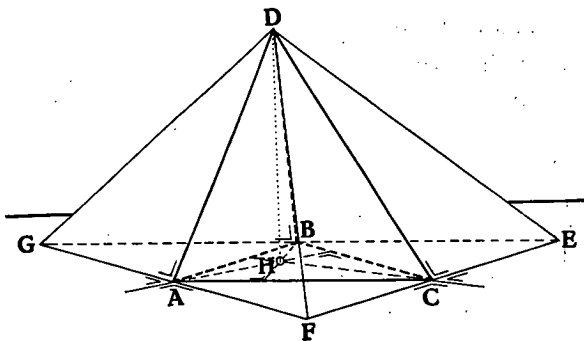


Fig. 1.

Daar van de pyramide D. EFG de opstaande ribben gelijk zijn, is het voetpunt van de loodlijn uit D op EFG neergelaten, het middelpunt van de omcirkel van $\triangle EFG$, dus het hoogtepunt van $\triangle ABC$.

Verder is $DA^2 + BC^2 = DA^2 + AG^2 = DG^2 = DE^2 = DB^2 + BE^2 = DB^2 + AC^2$ enz. Ook de omgekeerde stelling, nl. als $DA^2 + BC^2 = DB^2 + AC^2 = DC^2 + AB^2$ is, is het viervlak D. ABC

orthocentrisch, kunnen we met behulp van de pyramide D. EFG bewijzen.

DB is zwaartelij in $\triangle DGE$, dus $DB^2 = \frac{1}{2} (DG^2 + DE^2) - \frac{1}{4} GE^2$ of $DB^2 + AC^2 = \frac{1}{2} (DG^2 + DE^2)$.

Dus is $DG^2 + DE^2 = DG^2 + DF^2 = DE^2 + DF^2$, waaruit volgt $DG = DE = DF$, dus $DB \perp GE$ of $DB \perp AC$ en evenzo $DC \perp AB$.

Zij S het zwaartepunt van $\triangle ABC$ en Z het zwaartepunt van

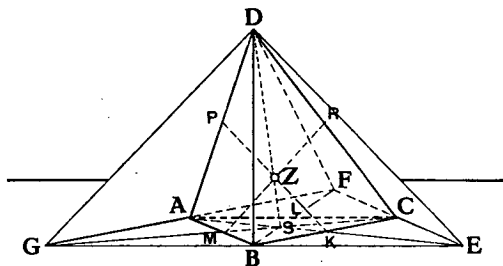


Fig. 2.

D. ABC. De rechten AE, BF en CG snijden opv. BC, AC en AB in de middens K, L en M. Dan is $SM = \frac{1}{4} SG$; $SK = \frac{1}{4} SE$ en $SL = \frac{1}{4} SF$.

Zoals bekend is, delen de lijnen, die de middens der overstaande ribben van een viervlak verbinden, elkaar middendoor in het zwaartepunt van het viervlak. Vermenigvuldigen we nu de bol met D als middelpunt en gaande door E, F en G, ten opzichte van S met $\frac{1}{4}$, dan krijgen we een bol met Z als middelpunt en die door de middens der ribben gaat, die de zijvlakken volgens de negenpunts cirkels snijdt, dus de z.g. 24 puntsbol.

Daar $MZ \parallel GD$ is, staat het raakvlak in M aan de 24 puntsbol loodrecht op GD. Nu staat de gemeenschappelijke loodlijn van AC en BD loodrecht op vlak DGE, dus loodrecht op DG, evenzo staat de gemeenschappelijke loodlijn van BC en AD loodrecht op GD.

Het raakvlak in M (en dus ook in R) aan de 24 puntsbol is dus evenwijdig met de lijn, die AC en BD loodrecht snijdt en met de lijn, die BC en AD loodrecht snijdt.

De raakvlakken in M, K en L aan de 24 puntsbol maken gelijke hoeken met het grondvlak, omdat de lijnen ZM, ZK en ZL gelijk zijn en dus met het grondvlak gelijke hoeken maken.

KORRELS.

Onder dit opschrift is de redactie van plan om allerlei kleine mededelingen te plaatsen; b.v. bijzondere oplossingen, betere methoden, opmerkingen, ook wel domme fouten, die men gedrukt ziet. De lezers, die wat bij hun lessen tegenkomen, dat de moeite waard is, worden hierbij opgewekt tot inzending; omvang hoogstens een bladzijde. We kunnen niet beter doen, dan te beginnen met enige „korrels”.

I. Een aardige toepassing van de reststelling.

De oppervlakte O van $\triangle ABC$ in de zijden a, b en c uit te drukken; gegeven is, dat O^2 een veelterm is in a, b en c .

Opl. O^2 beschouwen we als een veelterm in a ; de veelterm moet nul worden, als a vervangen wordt door $c - b$; dan immers is de oppervlakte nul; een zijde is in dit geval nl. gelijk aan het verschil van de beide andere. De deelbaarheid door $a - (c - b) = a + b - c$ en dus door $b + c - a$ en $c + a - b$ staat hiermee al vast.

$O^2 = P(a + b - c) (b + c - a) (c + a - b)$; omdat O^2 van de 4e graad in a, b en c is, moet P nog een symmetrische vorm van de eerste graad in a, b en c bevatten en mogelijk een getallenfactor; we stellen dus

$$O^2 = f \cdot (a + b + c) (a + b - c) (b + c - a) (c + a - b).$$

Nu is de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek met zijde a gelijk aan $\frac{1}{4}a^2\sqrt{3}$; voor deze driehoek wordt onze formule $\frac{3}{16}a^4 = f \cdot 3a \cdot a \cdot a$; dus is $f = \frac{1}{16}$ en

$$O^2 = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{c+a-b}{2} = s(s-a)(s-b)(s-c).$$

W.

II. Kort en juist.

Gaat men na, hoe op de eerste of tweede bladzijde van een schoolboek voor analytische meetkunde (neem er gerust een paar studieboeken bij) geredeneerd wordt, om te komen tot afstand van

twee punten op de x -as, dan krijgt men een gevoel van vaagheid en onvoldaanheid. En het kan zo kort en goed als volgt.

Voor twee punten A en B geldt $AB + BA = 0$; nevenvorm: $AB = -BA$. Voor drie punten geldt $AB + BC + CA = 0$ (de betrekking van Möbius; voor leerlingen direct duidelijk; het totale effect van de drie termen is immers, dat men op het uitgangspunt A terugkomt). Vervang nu C door O. Uit $AB + BO + OA = 0$ (van BO de letters verwisseld) volgt

$$AB = OB - OA = x_B - x_A.$$

Klaar zijn we; in geen geval voor de afleiding een figuur tekenen; die geeft nl. maar één geval en hij verheldert niets; integendeel. Hoogstens, als men eenmaal heeft $P_1P_2 = x_2 - x_1$, op een figuur voor verschillende plaatsen van de punten t.o. van O en onderling, natellen en laten zien, dat ook het teken in orde is.

III. Uit een frans boek van 1912.

$$\text{Calculer l'expression } x = \frac{(0,9751468)^8}{1572,369}$$

$$8 \log 0,9751468 = \bar{1},91256$$

$$\text{colog } 1572,369 = \underline{4,80345}$$

$$\log x = \bar{4},71601$$

$$x = 0,00005200111$$

W.

($\bar{1},91256$ betekent $0,91256 - 1$; wij trekken gewoonlijk af; dus 3,19655 aftrekken, wordt omgezet in $0,80345 - 4$ of $\bar{4},80345$ optellen; maar daarover is niets op te merken, laat staan aan te merken).

Het fraaie van de zaak is, dat men in een tafel met 5 decimalen een getal terugzoekt in 7 cijfers!

Het eerste getal is $\bar{1},91256$; hoe is men daaraan gekomen?

$$\log 0,9751468 = 0,98907 - 1$$

$$\text{—————} 8$$

$$\bar{7},91256 - 8 = \bar{1},91256$$

Nu is $0,98705$ nk. op $\frac{1}{2}e_5$ (halve eenheid van de 5e decimaal) en de $2e_5$, die de zijrij nog oplevert is evenmin nauwkeurig; op zijn minst is de speling in de 5e decimaal dus $4e_5$; dan nog de optelling van een getal nauwkeurig op $\frac{1}{2}e_5$. De fout in $\log x$ is minstens $4\frac{1}{2}e_5$; het terugzoeken van vier cijfers is al het uiterste, waartoe men kan gaan.

Hoe de schrijver aan 111 komt? Wel

$\log 5,200 = 0,71600$
 $\log 5,201 = 0,71609$

} $\log x = 0,71601$; 1 in de rij van de 9
 geeft $\frac{1}{9} = 0,111 \dots$

Op een andere bladzijde wordt bij 0,80884 teruggezocht als volgt

$\log 6,439 = 0,80882$
 $\log 6,440 = 0,80889$

} 2 in de rij van de 7 geeft nog 285; dus
 vindt men 6,439285. Of het ook menens is!

Nog op een ander bladzijde wordt bij $\log x = 0,37289$ gevonden 2,35988888! Waarom hij eigenlijk hier zich beperkt tot 9 cijfers tegen 7 bij het vorige is niet duidelijk!

Gaan onze schoolboeken alle vrij uit?

W.

4. De regelmatige veelhoeken komen in de vlakke meetkunde achteraan. Daar is alle reden toe, omdat de omtrekken en oppervlakten van regelmatige veelhoeken bij toenemend aantal zijden tot een benadering voor π voeren. Daarom leert men ook z_{2^n} uit te drukken in z_n en Z_n in z_n .

Het voornaamste van de regelmatige veelvlakken is, dat men bewijst, dat er maar vijf bestaan; dat ze een om- en ingeschreven bol hebben is geen reden de behandeling uit te stellen tot aan het hoofdstuk van de bol. Van de zeer nauwe betrekking tussen regelmatige veelhoeken en cirkel, zodat de cirkel als limiet van een n -hoek beschouwd kan worden, is bij regelmatige veelvlakken en bol in het geheel geen sprake.

De regelmatige veelvlakken kan men beter bij de andere veelvlakken behandelen dan heel aan het eind van de leerstof. De stelling van Euler (waarvan een „bewijs” van enige regels, beslist fout moet zijn) is geheel onnodig om het bewijs te leveren, dat er maar vijf mogelijkheden zijn.

W.

EEN DEENSCH WISKUNDEBOEK

DOOR

J. H. SCHOGT.

Misschien stellen de lezers van „Euclides” er belang in, iets te vernemen omtrent een der meest gebruikte moderne leerboeken der wiskunde voor de Deensche gymnasia.

In het artikel van den Heer J. K. Eriksen in jaargang VII van „Euclides” (bladzijde 197—233) kan men gegevens vinden omtrent de inrichting van het middelbaar onderwijs in Denemarken. Daaruit blijkt, dat de eerste klasse der gymnasia, waarvoor het te bespreken boek bestemd is, leerlingen heeft van 14 à 15 jaar.

De leerlingen, die het eerste deel van Pihl, Kristensen en Rubinstein's Lærebog i Matematik for det matematisk-naturvidenskabelige Gymnasium ¹⁾ voor zich krijgen, hebben vijf jaren lagere school en drie jaren voorschool (vroeger tusschenschool geheeten) achter den rug. ²⁾

In tegenstelling tot de bij ons gebruikelijke leerboeken bevat het Deensche leerboek niet één bepaald onderdeel, maar de leerstof voor ééne klasse, in dit geval voor de eerste klasse van de wis- en natuurkundige lijn van het gymnasium. Het boek is verdeeld in vijf afdeelingen:

- I. Grondslagen der wiskunde.
- II. Analytische meetkunde.
- III. Functies.
- IV. Trigonometrie.
- V. Stereometrie.

De eerste afdeeling, blijkbaar bedoeld als herhaling en uitbreiding van vroeger geleerde onderwerpen, heeft een eenigszins bonten

¹⁾ Kopenhagen, Gyldendalske Boghandel, Nordisk Forlag, 1935. Derde druk, echter met het oog op een nieuw leerplan geheel omgewerkt.

²⁾ Zie de figuur op bladz. 219 van jaargang VII.

inhoud. Eerst worden 16 beweringen omtrent reële getallen als *axiomata* opgesteld; waarschijnlijk zullen deze later geheel of ten deele uit eene theorie van het reële getal worden afgeleid. Hieruit wordt de theorie der lineaire ongelijkheidsopgaven ontwikkeld, en daarna wordt de algorithmus der vierkantsworteltrekking behandeld. — Vervolgens komt een stelsel van 16 axiomata voor de vlakke meetkunde, dat sterk afwijkt van de hier te lande nogal bekende stelsels van Hilbert en van Veblen, doordat veel met het verplaatsingsbegrip wordt gewerkt. Eene systematische afleiding der stellingen uit dit axiomastelsel heeft niet plaats. Zeer uitvoerig wordt gesproken over de toekenning van lengten aan lijnstukken, waarna de stellingen over evenredigheid van lijnstukken voor willekeurige reële verhoudingen worden behandeld en de gelijkvormigheid van driehoeken wordt besproken (*niet* met vermenigvuldiging van figuren), terwijl de stelling van Ptolemaeus de afdeeling besluit.

De afdeeling over analytische meetkunde handelt in hoofdzaak over de rechte lijn en den lijnenbundel. De opzet is in veel sterkere mate arithmetisch dan bij ons het geval is, en er wordt veel gewicht gehecht aan strenge afleiding van algemeen geldige resultaten. Ten einde eene algemeen geldige en toch beknopte formulering mogelijk te maken, gebruiken de schrijvers den richtingscoëfficiënt niet, maar bepalen de richting eener lijn door twee richtingsgetallen. Bijzonder veel werk wordt gemaakt van teekenquaesties en omloopszinnen, deze laatste worden door het teeken van z.g. omloopsgetallen onderscheiden. Eigenaardig is, dat eene algemeene theorie der homothetie en gelijkvormigheid aan de analytische behandeling der meetkunde wordt vastgeknoopt, en dienovereenkomstig eene plaats vindt in de tweede afdeeling.

De derde afdeeling, getiteld „functies”, bevat eene behandeling van de lineaire functie, de quadratische functie, en de logaritmen. De eerste twee bevatten juist, wat ook te onzent van deze onderwerpen behandeld wordt, de behandeling der logaritmen wijkt echter sterk af. Eene definitie, zooals wij die kennen, of eene invoering met behulp van reken- en meetkundige reeksen wordt niet gegeven, maar tot later uitgesteld, doch zonder bewijs wordt medegedeeld, dat er eene functie $\log x$ bestaat, voor alle positieve waarden van x gedefinieerd, en die de volgende eigenschappen bezit:

$$\text{als } x > 1 \text{ is } \log x > 0,$$

$$\log (xy) = \log x + \log y.$$

Hieruit worden de algemeene eigenschappen der logarithmen afgeleid, en daarna beginnen direct de oefeningen in het practisch rekenen met vierdecimalige tafels.

De trigonometrie wordt iets beknopter behandeld dan bij ons het geval is; de toekenning van één- en meerwaardige maten aan cirkelbogen en hoeken wordt echter veel uitvoeriger besproken, en gebaseerd op een drietal axiomata.

De stereometrie wordt gebaseerd op 11 axiomata; de behandeling is veel beknopter dan te onzent gebruikelijk is, vooral wat betreft oppervlakte en inhoud. Doordat voortdurend gebruik gemaakt wordt van het verplaatsingsbegrip, is de volgorde der eerste stellingen geheel anders dan wij die kennen. Hoogst merkwaardig is voor onze begrippen, dat in de bespreking van het boek in *Matematisk Tidsskrift*¹⁾ — waardoor mijne aandacht op dit werk is gevestigd — het denkbeeld van een axiomatischen opbouw voor de meetkunde veel bedenkelijker wordt geacht dan voor de rekenkunde.

Het is niet mijn doel, het boek in onderdeelen te kritiseeren, evenmin het in bescherming te nemen tegen kritiek van anderen; ik wilde slechts een voorbeeld geven van de sterke afwijkingen, die er bestaan tusschen Nederlandsch en buitenlandsch wiskunde-onderwijs. Misschien vind ik in het verschijnen der volgende deelen aanleiding, om op dit onderwerp terug te komen.

¹⁾ *Matematisk Tidsskrift* A, 1935, bladzijde 59.

EEN RATIONALE BENADERINGSFORMULE VOOR DE ZIJDE VAN DE REGELMATIGE n -HOEK

DOOR

Dr. F. BROUWER.

Een, waarschijnlijk weinig bekende, benaderingsconstructie voor de zijde van de regelmatige n -hoek is de volgende:

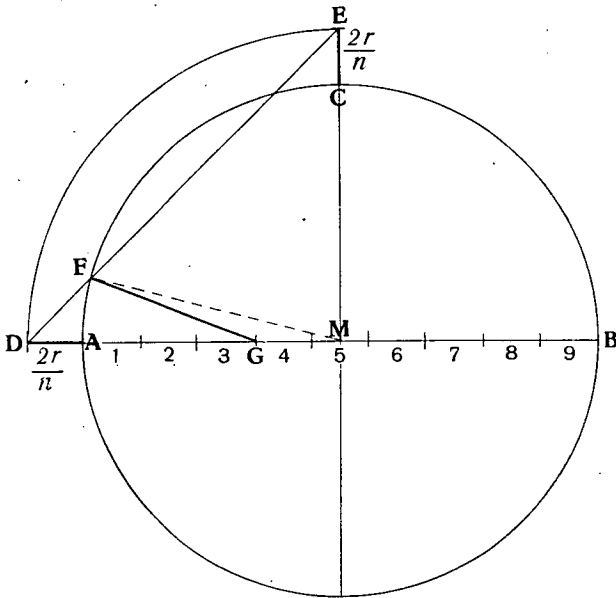


Fig. 1.

1. Verdeel een middellijn AB van de cirkel (M) in n gelijke delen.
2. Richt in M de straal $MC \perp AB$.
3. Verleng de middellijn en de straal ieder met $\frac{1}{n}$ deel van de middellijn.
4. Verbind de eindpunten D en E.
5. De lijn FG is nu bij benadering de zijde van de regelmatige

n -hoek, als F het snijpunt van DE met de cirkel is, het dichtst bij D gelegen en G het 3e deelpunt op de middellijn van A af gerekend.

Berekening. Trek FM en stel $2r = n$. Dan is in $\triangle DMF$:
 $DM = r + 1$, $FM = r$, $\angle D = 45^\circ$, terwijl $\angle F > 90^\circ$ is.

$$\text{Uit de sinusregel volgt: } \sin F = \frac{r+1}{r\sqrt{2}}$$

$$\text{en daar } F > 90^\circ, \cos F = \frac{-\sqrt{r^2-2r-1}}{r\sqrt{2}}.$$

$$\text{Verder is: } \sin FMD = \sin (D + F) = \sin D (\sin F + \cos F) = \frac{(r+1) - \sqrt{r^2-2r-1}}{2r}.$$

Uit de sinusregel volgt dan:

$$DF = \frac{(r+1) - \sqrt{r^2-2r-1}}{\sqrt{2}}.$$

In $\triangle DFG$ is nu $FG (= z_n)$ met de cosinusregel te vinden:

$$(1) \quad z_n^2 = r^2 - 4r + 12 - (r-3) \sqrt{r^2-2r-1} \quad (r = \frac{1}{2}n).$$

Bij benadering is:

$$\sqrt{r^2-2r-1} = (r-1) \left\{ 1 - \frac{2}{(r-1)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \sim (r-1) \left\{ 1 - \frac{1}{(r-1)^2} \right\}$$

Dit in (1) gesubstitueerd en uitgewerkt geeft:

$$z_n^2 = 9 + \frac{r-3}{r-1}$$

waaruit men berekent, (bij benadering)

$$(2) \quad z_n = 3 + \frac{1}{6} \cdot \frac{r-3}{r-1} \quad (r = \frac{1}{2}n)$$

Herleiden we (2) op straal $r = 1$ dan volgt:

$$(3) \quad \boxed{z_n = \frac{6}{n} + \frac{n-6}{3n(n-2)}}.$$

De vraag is nu, hoeveel de waarden van z_n , volgens (1) en (3) afwijken van de exakte waarde:

$$(4) \quad z_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

De volgende tabel geeft een overzicht van de fouten voor de verschillende waarden van n . (straal = 1).

TABEL 1.

n .	z_n volgens de con- struktie. (1).	Fout in de con- struktie.	Juiste waarde $z_n = 2 \sin \frac{\pi}{n}$	Fout in de benade- ring.	z_n volgens derat. ben. form. (3).
3	} imaginair		1,7321	— 0,064	1,6667
4			1,4142	+ 0,0025	1,4167
5			1,1756	+ 0,0022	1,1778
6	1	0	1	0	1
7	0,86752	— 0,00036	0,86788	— 0,00121	0,86667
8	0,76462	— 0,00074	0,76536	— 0,00146	0,76390
9	0,68304	— 0,00100	0,68404	— 0,00150	0,68254
10	0,61698	— 0,00106	0,61804	— 0,00137	0,61667
12	0,51673	— 0,00091	0,51764	— 0,00097	0,51667
15	0,41528	— 0,00054	0,41582	— 0,00044	0,41538
18	0,34705	— 0,00025	0,34730	— 0,00008	0,34722
20	0,31277	— 0,00009	0,31286	+ 0,00010	0,31296
24	0,26116	+ 0,00010	0,26106	+ 0,00030	0,26136
30	0,20933	+ 0,00027	0,20906	+ 0,00046	0,20952
45	0,13987	+ 0,00035	0,13952	+ 0,00053	0,14005
60	0,10505	+ 0,00037	0,10468	+ 0,00049	0,10517
120	0,05261	+ 0,00025	0,05236	+ 0,00031	0,05267

Voor het gebied $n = 13 \rightarrow 20$ is de benaderingsformule nauwkeuriger dan de konstruktie; daarbuiten is het andersom.

Zowel voor de konstruktie als voor de berekening is de fout zeer klein. Bij een cirkel met straal van 1 dm is de grootste fout in de konstruktie (9 en 10 hoek) 0,1 mm. Nauwkeuriger te werken is toch praktisch onmogelijk.

De benaderingsformule (3) geeft voor $n = 4 \rightarrow 24$ een fout $< 2\text{‰}$ t.o. van z_n zelf. (9 en 10 hoek $< 2\frac{1}{4}\text{‰}$). Voor de andere veelhoeken blijft de fout altijd minder dan 1 ‰. Dit is als volgt in te zien.

Voor toenemende waarden van n , nadert de exakte waarde van

z_n tot $\frac{\pi}{1/2n}$ en volgens (3) tot $\frac{3^{1/6}}{1/2n}$. De absolute fout nadert dus tot $\frac{3^{1/6} - \pi}{1/2n}$ en de relatieve fout tot $\frac{3^{1/6} - \pi}{\pi}$, wat $< \frac{1}{100}$ is.

Zowel de constructie als de benaderingsformule zullen dus in alle voorkomende gevallen voldoende nauwkeurig zijn.

Opmerking. Uit tabel 1 volgt tevens, dat voor een zeker gebied een behoorlijke benaderingsformule te verkrijgen is voor $\sin \frac{\pi}{n}$ en wel:

$$\sin \frac{\pi}{n} = \frac{3}{n} + \frac{n-6}{6n(n-2)}.$$

waaruit men gemakkelijk afleidt:

$$\cos \frac{\pi}{n} = 1 - \frac{5n-12}{n^2(n-2)}.$$

een uitkomst, die voor $n > 30$ d.i. voor hoeken kleiner dan 6° in 5 decimalen nauwkeurig is.

INGEKOMEN BOEKEN.

Van P. NOORDHOFF, Groningen.

M. G. H. BIRKENHÄGER en H. J. D. MACHIELSEN, *Nieuw Meetkundeboek voor scholen met beperkt wiskunde-programma.*

Deel I f 0.60; deel II f 1.—

P. WIJDENES en Dr. H. J. E. BETH, *Nieuwe schoolalgebra.*

Deel III A f 1.—; deel IV B f 0.80

P. WIJDENES, *Algebra voor M.U.L.O.* 28e druk . . . geb. - 1.40

Van de schrijvers de volgende proefschriften:

J. P. VAN ROOYEN, *La notion de probabilité et la science actuarielle.*

Ir. A. GABEL, *Nomographische Lösung von Kurs- und Rentabilitätsaufgaben.*

H. C. M. VAN DIJK, *Involuties in de stralenruimte.*

E. W. BETH, *Rede en aanschouwing in de Wiskunde* (fac. van letteren en wijsbegeerte).

OPMERKINGEN OVER DE WISKUNDIGE VAKTAAL

DOOR

J. H. SCHOOT.

(Vervolg van X, bladz. 72.)

§ 35. *Congruent, gelijk.* Congruentie is eene betrekking tusschen meetkundige figuren, die op eene of andere wijze wordt gedefinieerd; men kan b.v. congruentie van puntenparen als grondbegrip invoeren, en met behulp daarvan congruentie van andere puntverzamelingen definieeren. In de schoolwiskunde wordt gewoonlijk deze bepaling gegeven: men noemt twee figuren congruent, als men de eene met de andere tot bedekking kan brengen. Op de voor- en nadeelen van deze bepaling worde hier niet ingegaan, wel echter op het feit, dat men gewoon is, het woord „congruent” te vervangen door „gelijk”, zoodra sprake is van bepaalde figuren, zooals lijnstukken en hoeken, terwijl in andere gevallen deze twee woorden volstrekt niet synoniem zijn.

Gaat men het gebruik van het woord „gelijk” in de meetkunde na, dan blijkt, dat gelijkheid van twee figuren beteekent, dat aan die beide figuren hetzelfde getal is toegevoegd op grond van een of ander voorschrift voor het toekennen van getallen aan figuren. Zooals bekend is, gaat dit zelfs zoo ver, dat men spreekt van gelijkheid van een hoek en een cirkelboog. De (naar ik meen verouderende) uitdrukking „gelijke driehoeken” heeft betrekking op driehoeken, waaraan hetzelfde getal als oppervlakte is toegevoegd. De bewering, dat de cirkelboog AB gelijk is aan den cirkelboog CD kan drieërlei beteekenis hebben: 1o. dat de cirkelbogen congruent zijn, 2o. dat zij gelijkvormig zijn; er is dan een zelfde aantal booggraden aan toegevoegd, 3o. dat er een zelfde getal als lengte aan is toegevoegd door zekere bekende limietbeschouwingen (dit doet zich b.v. voor als de cirkelbogen als afgelegde wegen van bewegende punten optreden).

Omdat congruentie onafhankelijk is van de toekenning van getallen aan figuren, en bovendien in eenige gevallen het woord „con-

gruent" duidelijker is dan „gelijk" (zooals bij cirkelbogen, zie boven), lijkt het mij niet gewenscht; het woord „congruent" te vervangen door „gelijk".

De naam „*overeenkomstige*" elementen van congruente figuren lijkt mij te verkiezen boven „gelijkstandige"; deze laatste uitdrukking kan beter gereserveerd blijven voor homothetische figuren.

§ 36. De in de Woordenlijst voorkomende uitdrukking „onbegrensde rechte" lijkt mij niet gelukkig. Zie mijn artikeltje „Over het formuleeren van stellingen en bewijzen der meetkunde" in I, bladz. 81.

§ 37. Over de benamingen halve lijn en lijnstuk heb ik uitvoerig gesproken in het artikeltje, dat in § 36 is genoemd; het gebruik van deze termen is thans zoo algemeen, dat het nauwelijks noodig is, nog iets ter aanbeveling in het midden te brengen. Ik heb steeds gesproken van „eindpunt(en)" van deze figuren; de Woordenlijst geeft ook andere termen, en nu lijkt mij achteraf de naam *grenspunt* te verkiezen boven eindpunt. Wanneer men later aan lijnstukken getallen gaat toevoegen, die niet meer positief behoeven te zijn, moet men beginpunt en eindpunt onderscheiden, en het is gemakkelijker, dit te doen als men eerst van twee grenspunten heeft gesproken, dan wanneer het lijnstuk eerst twee eindpunten heeft gehad. Bovendien is dit gebruik van het woord grenspunt in overeenstemming met het gebruik, dat algemeen in de wiskunde van dit woord wordt gemaakt.

Met bijzondere ingenomenheid begroet ik den naam *zijlijn* (van een driehoek) voor de lijn, waarvan eene zijde eens driehoeks deel uitmaakt; deze is mij door Wijdenes aan de hand gedaan.

§ 38. *Hoek*. Er is tamelijk veel geschreven over de beteekenis van het woord „hoek". Uit de aanschouwing volgt, en uit een voldoende volledig axiomastelsel kan ook worden afgeleid, dat twee halve lijnen met gemeenschappelijk grenspunt, te zamen met dit grenspunt, de verzameling der overige punten van het platte vlak waarin zij liggen (eventueel van een willekeurig plat vlak waarin zij liggen) verdeelen in twee gebieden, die de halve lijnen met haar gemeenschappelijk eindpunt tot gemeenschappelijke grens hebben. Dat wil zeggen: elke twee punten eener zelfde verzameling kunnen worden verbonden door gebroken lijnen, die geen punt met die

grens gemeen hebben, terwijl iedere gebroken lijn, die een punt van eene der verzamelingen met een punt der andere verbindt, ten minste een punt met de grens gemeen heeft. Het twistpunt is nu, of men den naam „hoek” moet geven aan zulk een hoekgebied of aan de gemeenschappelijke grens van de twee gebieden. Natuurlijk zijn zoowel de gebieden als de begrenzingen figuren, die het onderwerp van wiskundige beschouwingen kunnen zijn, en men zou gevoeglijk beiden figuren namen kunnen geven, en dus bij voorbeeld spreken van hoekgebieden en van hoekbegrenzingen. Maar als men nu toch het woord hoek wil gebruiken, dat het voordeel heeft kort te zijn en zich gemakkelijk te leenen tot het vormen van samenstellingen, hebben dan de hoekbegrenzingen of de hoekgebieden het meeste recht op dezen naam? Welke figuren spelen de belangrijkste rol in de elementaire vlakke meetkunde? Mij dunkt de hoekgebieden. Want de toekenning van een getal als grootte (in graden, rechte hoeken of radialen) gebeurt aan de hoekgebieden en niet aan de hoekbegrenzingen. Immers, juist doordat eene hoekbegrenzing twee hoekgebieden begrenst, is de grootte van den „hoek” niet bepaald door de hoekbegrenzing. Afspraken, die ten doel hebben, de grootte eenduidig te doen bepalen door de hoekbegrenzing, komen practisch neer op afschaffing van inspringende hoeken, wat verstrekkende en gewoonlijk niet bedoelde gevolgen heeft ten aanzien van de som der hoeken van concave veelhoeken. Er zijn eenige gevallen, waar men in het midden kan laten, of men hoekbegrenzingen dan wel hoekgebieden bedoelt, b.v. congruentiebeschouwingen, omdat congruentie van een dezer soorten figuren congruentie van de andere meebrengt, maar zoodra men spreekt over grooter en kleiner worden blijkbaar de hoekgebieden en niet de begrenzingen bedoeld. Bij de gelijkvormigheidstransformatie dient men uitdrukkelijk te zeggen, of men over gebieden dan wel over begrenzingen spreekt; gewoonlijk wordt dit niet gedaan.

Het komt mij voor, dat in de elementaire meetkunde de hoekgebieden een veel belangrijker rol spelen dan de begrenzingen; ik voel er dan ook het meeste voor, den naam hoek voor de hoekgebieden te reserveeren.¹⁾

¹⁾ Het is intusschen merkwaardig, dat de schrijvers, die de Euclidische meetkunde wetenschappelijk behandelen, zooals Hilbert, Forder, en Van der Waerden (in „Chr. Huygens”, jaargang XIII en XIV) den hoek definieeren als de figuur gevormd door twee halve lijnen met gemeenschappelijk eindpunt. Ik hoop later uitvoerig op deze zaak terug te komen.

§ 39. *Driehoek, veelhoek.* Dergelijke beschouwingen, als in § 38 aan het woord „hoek” zijn vastgeknoopt, gelden ook voor driehoeken en veelhoeken. Hierbij zou men drie-(veel-)hoeksomtrekken en drie-(veel-)hoeksgebieden kunnen onderscheiden. Het is weer de vraag, welke van de twee soorten figuren de belangrijkste zijn voor de elementaire meetkunde. Het komt mij voor, dat de gebieden bij de gebruikelijke behandeling worden verwaarloosd, maar eene nadere toelichting van deze stelling zou mij te ver van mijn onderwerp, de terminologie, verwijderen; ik hoop op deze quaestie later terug te komen.

Of men de driehoeken onder de veelhoeken wil opnemen of niet, is onverschillig, mits men consequent blijft, en daaraan ontbreekt nogal eens wat.

§ 40. *Gelijkbeenige en gelijkzijdige driehoeken.* Gewoonlijk blijkt niet, of men met „gelijkbeenige driehoek” bedoelt een driehoek met twee congruente zijden, of een driehoek met ten minste twee congruente zijden, m.a.w. of men de gelijkzijdige driehoeken niet of wel als een bijzonder geval van de gelijkbeenige beschouwt. Het komt mij het meest wenschelijk voor, gelijkzijdige driehoeken niet als gelijkbeenige te beschouwen, want de gelijkbeenige driehoeken, met twee en niet meer dan twee congruente zijden, hebben eigenschappen, welke de driehoeken met drie congruente zijden missen. Zij hebben namelijk een hoekpunt, een hoek en eene zijde, die eene uitzonderingspositie bekleeden tegenover twee andere gelijkwaardige hoekpunten, enz. Hierop berust de mogelijkheid eener speciale nomenclatuur (top, tophoek, basis, enz.) voor driehoeken met twee congruente zijden; deze nomenclatuur is evenmin van toepassing op driehoeken met drie congruente zijden als op driehoeken met drie verschillende zijden.

§ 41. *Gelijk en gelijkvormig, congruent.* De naam, „gelijk en gelijkvormig” suggereert, dat de betrekking, die door het woord wordt uitgedrukt, bestaat in het gezamenlijk voorkomen van twee betrekkingen, gelijkheid (dat is gewoonlijk gelijkheid van oppervlakte, zie § 35) en gelijkvormigheid. Deze opvatting zal eertijds wel bestaan hebben, getuige het gebruik van het teeken $\cong$, samengesteld uit ∞ en $=$). Maar van tegenwoordig standpunt bezien is het begrip congruentie primair, gelijkheid en gelijkvormig-

heid worden daaruit afgeleid, en niet omgekeerd. Vandaar dat de benaming congruent mij te verkiezen lijkt boven gelijk en gelijkvormig.

Over het gebruik van de beide woorden in de stereometrie zie beneden, § 57.

§ 42. Waarom men van evenwijdige lijnen zegt, dat zij *loopen*, is mij niet duidelijk. Misschien stelt men zich voor, dat twee punten, welker afstand constant is, elk een van die lijnen doorloopen. Maar omdat men in de elementaire meetkunde evenwijdigheid definieert als afwezigheid van gemeenschappelijke punten, kan men mijns inziens den zonderlingen term „evenwijdig loopen” gevoeglijk afschaffen.

Het feit, dat evenwijdigheid gedefinieerd wordt als het ontbreken van gemeenschappelijke punten, en niet als aequidistantie, doet den heer Dijksterhuis den term „parallel” verkiezen boven „evenwijdig”. Zie *Euclides V*, bladz. 287.

§ 43. Wanneer men eenmaal heeft besloten, lijnen en lijnstukken te onderscheiden, ligt het voor de hand, ook onderscheid te maken tusschen zwaartelijnen en zwaartelijnstukken, enz. Het is merkwaardig, dat vrijwel niemand dit doet. Zie echter het slot van § 37.

§ 44. *Cirkel*. Met betrekking tot den cirkel kan men opmerkingen maken, welke overeenkomen met die van § 38 en § 39. Ook hier zijn twee meetkundige figuren, die beide het onderwerp van wiskundige beschouwingen kunnen zijn: eene kromme lijn en het daardoor begrensde binnengebied, cirkelbegrenzing en cirkelgebied. Maar in twee opzichten is er verschil met de vorige gevallen: de taal heeft twee woorden ter beschikking, namelijk cirkelomtrek en cirkel, en in dit geval is zonder twijfel de begrenzing belangrijker dan het binnengebied, omdat de cirkelbegrenzing eene eenvoudige meetkundige plaats is, welke eigenschap de veelhoeksbegrenzungen niet hebben. Het schijnt voor de hand te liggen, het woord cirkelomtrek (Fransch: *circonférence*) te gebruiken voor de kromme lijn en cirkel voor het cirkelgebied. Maar ook kan men de kromme lijn aanduiden als cirkel, en het gebied door den (naar analogie van „zonnenschijf” gevormden) naam „cirkelschijf”, zooals reeds hier en

daar geschiedt. Dit heeft het voordeel, dat de figuur die het meest genoemd moet worden, den kortsten naam krijgt.

§ 45. *Cirkel en middelpunt.* In de Woordenlijst staat: een cirkel beschrijven *met, om, uit* O als middelpunt. Het is bekend, dat in sommige gevallen de beteekenis der voorzetsels, die eene plaatselijke betrekking aanduiden, in de wiskundige taal aanmerkelijk is verzwakt: vooral bij de incidentie van punt met lijn of vlak, en van lijn en vlak onderling, blijkt dit („in”, „op”). Maar het is er ver vandaan, dat men ter aanduiding van eene liggingsbetrekking gebruik kan maken van een willekeurig voorzetsel, zoodat men bij voorbeeld de incidentie van punt en vlak kan aangeven door „onder”, „tegen” of „tusschen”. Wanneer er keuze is uit meer voorzetsels, lijkt mij dat het meest aanbevelenswaardig, waarvan de beteekenis in het dagelijksch leven het gemakkelijkst in overeenstemming is te brengen met de wiskundige relatie, die onder woorden moet worden gebracht. Nu ligt, in de alledaagsche beteekenis, een cirkel om zijn middelpunt heen, dus lijkt mij „om” het meest geschikte voorzetsel, hoewel velen de voorkeur geven aan „uit”, en de leerlingen, speciaal Amsterdammers uit de lagere volksklassen, eene duidelijke voorliefde aan den dag leggen voor „vanuit”.

§ 46. *Basis van een trapezium.* De Woordenlijst vermeldt als beteekenis: één der evenwijdige zijden. Daar de evenwijdige zijden van een trapezium noodzakelijk verschillend zijn, lijkt het mij wenschelijk, den naam basis te reserveeren voor eene bepaalde der evenwijdige zijden, namelijk de grootste.

Hierbij is ondersteld, dat onder „trapezium” verstaan wordt een vierhoek met twee en niet meer dan twee evenwijdige zijden, niet een vierhoek met ten minste twee evenwijdige zijden. Vgl. § 40.

§ 47. *Elkander.* Het is bekend, dat twee cirkels, waarvan de eene binnen den anderen ligt, door leerlingen vaak worden aangeduid als cirkels die „binnen elkaar” liggen. Schrijvers van leerboeken deinzen gewoonlijk voor deze uitdrukking terug, maar bedienen zich wel eens van de zegswijze, dat twee cirkels *elkaar* inwendig raken. Dit brengt ons tot de vraag, of het gebruik van het woord *elkander* geoorloofd is ter aanduiding van niet-wederkeerige betrekkingen. De slordige taal des dagelijkschen levens ziet

Dr. J. J. van Laar

Die Thermodynamik

einheitlicher Stoffe und binärer Gemische, mit Anwendungen auf verschiedene physikalisch-chemische Probleme.

380 bladzijden. f 12.—. Gebonden f 13.50.

Einheitliche Stoffe. Die Zustandsgleichung. — Die thermodynamischen Grössen einheitlicher Stoffe. — Heterogene Gleichgewichte zwischen verschiedenen Phasen einheitlicher Stoffe. — Binäre Systeme. Die thermodynamischen Potentiale. — Gleichgewichte bei gemischten Phasen. — Gleichgewichte in homogener Gasphase. — Gleichgewicht zwischen zwei binären Flüssigkeitsgemischen, und in einer homogenen Phase. — Gleichgewicht zwischen einer binären flüssigen und einer binären Dampfphase. — Gleichgewicht flüssig-fest bei zwei Komponenten. — Die verschiedenen Formen des Entmischungsgebietes, wenn die beiden Komponenten eine binäre, teilweise dissoziierte Verbindung bilden. — Autorenregister. —

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN-BATAVIA

VERSCHENEN:

Nieuwe Schoolalgebra III α f 1.00
Nieuwe Schoolalgebra IV β - 0.80
Nieuwe Schoolalgebra II 7e druk - 2.25

en de vierde, belangrijk verkorte en verbeterde druk van

MOLENBROEK—WIJDENES

Stereometrie voor M.O. en V.H.O.

Verlaagd in prijs tot f 1.90, geb. f 2.25

Richtsnoer bij de herziening:

bepierking tot redelijke eisen



Leraren, die geen pres. ex. ontvingen, worden verzocht, ze alsnog aan te vragen.

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN-BATAVIA

Dr. H. J. E. BETH

Meetkunde van de ruimte

180 blz. 189 fig., geb. f 2.90

Stereometrie en Beschrijvende meetkunde in onderling verband in één boek.

VERSCHENEN:

C. J. ALDERS

ALGEBRA voor M.O. en V.H.O.

Deel I. gec. f 1.50. Antw. f 0.50

Deel II. gec. f 2.50. Antw. f 0.50

VERSCHENEN:

M. G. H. Birkenhäger en H. J. D. Machielsen

NIEUW MEETKUNDEBOEK

voor scholen met beperkt wiskunde-programma

Deel I f 0.60, Deel II f 1.00

VERSCHENEN:

Logarithmen- en Rentetafels B

10e druk. — gec. verlaagd in prijs f 0.75

Dr. H. C. SCHAMHARDT

Mondelinge Staatsexamens A

Ex. 1932 { 66 vragen over Meetkunde
 { 85 „ „ Algebra

Ex. 1934 { 95 vragen over Meetkunde
 { 110 „ „ Algebra

Prijs van elk der deeltjes f 1.00

UITGAVEN P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN-BATAVIA